Electrodynamics

Yury Holubeu *

November 3, 2025

This note is not intended for distribution. Classical electrodynamics is discussed in detail. Links below show contents of solved problems and summary of special topics. Readers who have opened this note for the first time are highly recommended to read the preface.

Contents

Preface **15**

I —— Typical Electrodynamics in a Nutshell —— 17

1 Typical laws and phenomena 17
1.1 Basic laws of electrodynamics . . . 17
1.1.1 Main laws and parameters of electrodynamics . . . 17
1.1.2 Currents in media: basics . . . 21
1.1.3 Kinetics of electrons in media: basics . . . 22
1.1.4 Polarization, electrostriction, electric forces . . . 22
1.1.5 Formalism for temperature phenomena in electrodynamics . . . 25
1.1.6 Energy bands in solids in a nutshell . . . 26
1.1.7 Dynamics of electromagnetic waves . . . 26
1.2 Systems of units . . . 27
1.3 Mathematics for electrodynamics . . . 31
1.4 Typical models of electrodynamics . . . 31
1.4.1 Motion of a particle in electromagnetic field . . . 31
1.4.2 Radiation of free and interacting charges . . . 32
1.4.3 Special, well-known scatterings . . . 33
1.4.4 Basic electrostatics: Dipoles, capacitors, conducting surfaces, charge systems . . . 33
1.4.5 Electrostatics of conductors . . . 38
1.4.6 Electrostatics of dielectrics . . . 44
1.4.7 Magnetostatics . . . 48
1.4.8 Special dielectrics . . . 51
1.4.9 Currents in scope of microscopic kinetics: basic models . . . 51
1.4.10 Plasma . . . 52
1.4.11 Electric circuits: basics . . . 52
1.4.12 Electric circuits with diodes, transistors: basics for applications . . . 55
1.4.13 Para- and diamagnetism: basics . . . 56
1.4.14 Ferromagnetism: basics . . . 58
1.4.15 Ising, Hubbard, Heisenberg models: basics . . . 59

II Fundamentals of Electrodynamics 60

2 Laws of Electrodynamics 60
2.1 General Idea and Construction of Electrodynamics . . . 60
2.1.1 Concept of Fields and Electromagnetism . . . 60
2.1.2 Constructing Electrodynamics from Experimental Facts . . . 60
2.2 Main Experiments in Fundamentals of Electrodynamics . . . 60
2.2.1 General Ideas of Typical Measurements in ED . . . 60
2.2.2 Main Experimental Confirmations Maxwell's Equations . . . 60
2.3 General Laws of Electrodynamics . . . 60
2.3.1 Typical Maxwell Equations . . . 61

*https://yuriholubeu.github.io/, yuri.holubev@gmail.com

2.3.2 Boundary Conditions for E and D (!!!) . . . 66
2.3.3 Electromagnetic Field Pulse . . . 68
2.3.4 Inductance and Mutual Induction (?) . . . 73
2.3.5 Coulomb's Law . . . 79
2.3.6 Gauss' Law (!?) . . . 80
2.3.7 Faraday's Law . . . 82
2.3.8 Biot–Savart law . . . 84
2.3.9 Overview of Theoretical Forms of Maxwell Equations . . . 84
2.3.10 Laws of Motion of a Particle in an Electromagnetic Field . . . 84
2.3.11 Typical Models of Particle Motion in an Electromagnetic Field . . . 85
2.4 Parameters of Electrodynamics . . . 85
2.4.1 Dielectric Constant ε . . . 85
2.4.2 Magnetic Permeability μ . . . 85
2.4.3 Magnetization . . . 85
2.4.4 Electromagnetic Induction . . . 85
2.4.5 Electrical Capacitance . . . 85
2.4.6 Currents . . . 85
2.5 Fundamental Properties of Electrodynamics . . . 85
2.5.1 Overview of Theoretical Derivations of Maxwell Equations . . . 85
2.5.2 Limits on the Applicability of Classical ED from the Radiation 1 . . . 86
2.5.3 Limits on the Applicability of Classical ED from the Radiation 2 . . . 95

3 Other Laws of Electrodynamics 100
3.1 Response of a Media . . . 100
3.1.1 Kramers-Kronig Relations . . . 100
3.2 Laws of Electrodynamics in Special Configurations . . . 100
3.2.1 Electrodynamics of Rotating Bodies (!??!) . . . 100
3.2.2 What If the Space is Curved? . . . 101

III Fields in Space 102

4 Main Laws of Fields in Space 102
4.1 Framework of Electrostatics . . . 102
4.1.1 Dipole Moment . . . 102
4.2 I Electrostatics of Conductors by Landau . . . 104
4.2.1 §1. The electrostatic field of conductors . . . 104
4.2.2 §1. The electrostatic field of conductors . . . 104
4.2.3 §2. The energy of the electrostatic field of conductors . . . 107
4.2.4 §3. Methods of solving problems in electrostatics . . . 112
4.2.5 §4. A conducting ellipsoid . . . 123
4.2.6 §5. The forces on a conductor . . . 134
4.3 Magnetostatics . . . 138
4.3.1 Magnetic Pressure . . . 138
4.3.2 Dipole in a Magnetic Field . . . 141
4.3.3 Force on a Magnetic Dipole by Boyer (1987) . . . 142
4.3.4 Energy of a Magnetic Field . . . 151
4.4 2 Basic Concepts of Electrodynamics. Maxwell's Equations . . . 156
4.4.1 2.1. Electrostatics . . . 156
4.4.2 2.2. Magnetostatics . . . 173
4.4.3 2.3. Maxwell's Equations. Free Electromagnetic Field . . . 188
4.4.4 2.4. Answers and Solutions . . . 206

5 Radiation of Fields **234**
5.1 Main Models of Radiation . . . 234
5.2 5 Radiation and Scattering of Electromagnetic Waves . . . 234
5.2.1 5.1. The Green's Function and Retarded Potentials . . . 234
5.2.2 5.2. Radiation from Non-Relativistic Systems of Charges and Currents . . . 241
5.2.3 5.3. Radiation of Relativistic Particles . . . 251
5.2.4 5.4. Interaction of Charged Particles with Radiation . . . 266
5.2.5 5.5. Answers and Solutions . . . 277
5.3 6 Quantum Theory of Photon Emission and Scattering . . . 327
5.3.1 6.1. The Quantum Theory of the Free Electromagnetic Field . . . 327
5.3.2 6.2. Radiation, Absorption and Scattering by Atomic Systems . . . 344
5.3.3 6.3. The Interaction of Relativistic Particles with Photons . . . 361
5.3.4 6.4. Answers and Solutions . . . 376
5.4 Special Models of Radiation in Space . . . 411
5.4.1 Radiation Field at Close Distances . . . 411
5.4.2 Hertz Vector . . . 415
5.4.3 Radiation of a Fast-Moving Charge . . . 415
5.4.4 Magneto-Braking Radiation . . . 420
5.4.5 Braking by Radiation . . . 427
5.4.6 Radiation Deceleration in the Relativistic Case . . . 433
5.4.7 Spectral Decomposition of Radiation in the Ultrarelativistic Case . . . 436
5.4.8 Some Other Radiations in Space . . . 440

IV Electromagnetic Properties of Media **441**

6 Chains and Currents: Basics **441**
6.1 Chains: Basics . . . 441
6.1.1 Constant Current in a Conductor . . . 441
6.1.2 Oscillating Circuit . . . 447
6.1.3 Forced Oscillations with Alternating Current . . . 451
6.1.4 Vector Diagram Method . . . 455
6.1.5 Fourier Analysis of Oscillations in Circuits . . . 455
6.1.6 Contact Potential Difference . . . 455
6.1.7 Galvanic Cell (???) . . . 458
6.2 Special Properties of Chains for Applications . . . 459
6.2.1 Overview of Appliactions of Chains (???) . . . 459
6.2.2 Types of Chains . . . 460

7 Electrodynamics of Media by Landau **460**
7.1 II Electrostatics of Dielectrics by Landau . . . 460
7.1.1 §6. The electric field in dielectrics . . . 460
7.1.2 §7. The permittivity . . . 461
7.1.3 §8. A dielectric ellipsoid . . . 466
7.1.4 §9. The permittivity of a mixture . . . 469
7.1.5 §10. Thermodynamic relations for dielectrics in an electric field . . . 470
7.1.6 §11. The total free energy of a dielectric . . . 474
7.1.7 §12. Electrostriction of isotropic dielectrics . . . 477
7.1.8 §13. Dielectric properties of crystals . . . 480
7.1.9 §14. The sign of the dielectric susceptibility . . . 485
7.1.10 §15. Electric forces in a fluid dielectric . . . 486
7.1.11 §16. Electric forces in solids . . . 490
7.1.12 §17. Piezoelectrics . . . 494
7.1.13 §18. Thermodynamic inequalities . . . 501

7.1.14 §19. Ferroelectrics . . . 504
7.1.15 §20. Improper ferroelectrics . . . 511
7.2 III Steady Current by Landau . . . 512
7.2.1 §21. The current density and the conductivity . . . 512
7.2.2 §22. The Hall effect . . . 516
7.2.3 §23. The contact potential . . . 519
7.2.4 §24. The galvanic cell . . . 521
7.2.5 §25. Electrocapillarity . . . 522
7.2.6 §26. Thermoelectric phenomena . . . 523
7.2.7 §27. Thermogalvanomagnetic phenomena . . . 527
7.2.8 §28. Diffusion phenomena . . . 528

8 Typical Magnetism **530**
8.1 Typical Paramagnets . . . 530
8.1.1 Langevin Theory . . . 530
8.2 Typical Diamagnets . . . 531
8.3 IV Static Magnetic Field by Landau . . . 531
8.3.1 §29. Static magnetic field . . . 531
8.3.2 §30. The magnetic field of a steady current . . . 534
8.3.3 §31. Thermodynamic relations in a magnetic field . . . 541
8.3.4 §32. The total free energy of a magnetic substance . . . 543
8.3.5 §33. The energy of a system of currents . . . 545
8.3.6 §34. The self-inductance of linear conductors . . . 548
8.3.7 §35. Forces in a magnetic field . . . 554
8.3.8 §36. Gyromagnetic phenomena . . . 556

9 Main Exotic Magnetism **557**
9.1 V Ferromagnetism and Antiferromagnetism by Landau . . . 557
9.1.1 §37. Magnetic symmetry of crystals . . . 557
9.1.2 §38. Magnetic classes and space groups . . . 559
9.1.3 §39. Ferromagnets near the Curie point . . . 562
9.1.4 §40. The magnetic anisotropy energy . . . 565
9.1.5 §41. The magnetization curve of ferromagnets . . . 567
9.1.6 §42. Magnetostriction of ferromagnets . . . 571
9.1.7 §43. Surface tension of a domain wall . . . 574
9.1.8 §44. The domain structure of ferromagnets . . . 581
9.1.9 §45. Single-domain particles . . . 585
9.1.10 §46. Orientational transitions . . . 587
9.1.11 §47. Fluctuations in ferromagnets . . . 590
9.1.12 §48. Antiferromagnets near the Curie point . . . 594
9.1.13 §49. The bicritical point for an antiferromagnet . . . 598
9.1.14 §50. Weak ferromagnetism . . . 599
9.1.15 §51. Piezomagnetism and the magnetoelectric effect . . . 606
9.1.16 §52. Helicoidal magnetic structures . . . 608
9.2 Magnetic semiconductors and insulators . . . 609
9.2.1 Exchange interactions in magnetic semiconductors and insulators . . . 609
9.2.2 Ferromagnetic insulators . . . 609
9.3 Other Magnetic Properties and Special Magnetic Media . . . 609
9.3.1 Magnetoresistance . . . 610
9.3.2 Superparamagnetism . . . 610
9.3.3 Ferrimagnetism . . . 610

10 Main Special Effects in Media **613**
10.1 Electrodynamic Fluctuations . . . 613
10.1.1 Johnson–Nyquist noise . . . 613
10.1.2 Shot noise . . . 613
10.2 Other Effects in Media . . . 614
10.2.1 Hall Effect: Introduction . . . 614
10.2.2 Electrocapillarity (???) . . . 616
10.3 Phenomena with Temperature Gradient . . . 618
10.3.1 Thermoelectric Phenomena . . . 618

11 Electrodynamics in Media by Batygin Toptygin **622**
11.1 7 Equations of Constant Electric and Magnetic Fields in Media . . . 625
11.1.1 7.3. Polarization of Matter in a Constant Field . . . 625
11.1.2 7.4. Answers and Solutions . . . 633
11.2 8 Electrostatics of Conductors and Dielectrics . . . 649
11.2.1 8.1. Basic Concepts and Methods of Electrostatics . . . 649
11.2.2 8.2. Special Methods of Electrostatics . . . 656
11.2.3 8.3. Energy, Forces and Thermodynamic Relations for Conductors and Dielectrics 667
11.2.4 8.4. Answers and Solutions . . . 683
11.3 9 Direct Current and Magnetic Field in Media . . . 715
11.3.1 9.1. Direct Current . . . 715
11.3.2 9.2. The Magnetic Field in Magnets . . . 727
11.3.3 9.3. Energy, Forces and Thermodynamic Relations for Magnets . . . 730
11.3.4 9.4. Electrical and Magnetic Properties of Superconductors . . . 743
11.3.5 9.5. Answers and Solutions . . . 756
11.4 10 Quasi-Stationary Electromagnetic Field . . . 779
11.4.1 10.1. Quasi-Stationary Phenomena in Linear Conductors . . . 779
11.4.2 10.2. Eddy Currents and Skin Effect . . . 785
11.4.3 10.3. Magnetic Hydrodynamics . . . 790
11.4.4 10.4. Answers and Solutions . . . 808
11.5 11 Maxwell's Equations for Variables and Inhomogeneous Fields . . . 849
11.5.1 11.1. Various Forms of Maxwell's Equations in Media. Coupling Equations And Electromagnetic Response Functions . . . 849
11.5.2 11.2. Causality and Dispersion Relations . . . 864
11.5.3 11.3. Energy Relations for Alternating Electromagnetic Fields in Media. Longitudinal Electrical Oscillations . . . 869
11.5.4 11.4. Magnetic Vibrations and Magnetic Resonance . . . 876
11.5.5 11.5. Electrodynamics of Moving Media . . . 879
11.5.6 11.6. Answers and Solutions . . . 892

V Propagation of Waves Through Media **921**

12 Propagation of Waves Through Media by Landau **921**
12.1 IX The Electromagnetic Wave Equations by Landau . . . 921
12.1.1 §75. The field equations in a dielectric in the absence of dispersion . . . 921
12.1.2 §76. The electrodynamics of moving dielectrics . . . 924
12.1.3 §77. The dispersion of the permittivity . . . 928
12.1.4 §78. The permittivity at very high frequencies . . . 931
12.1.5 §79. The dispersion of the magnetic permeability . . . 931
12.1.6 §80. The field energy in dispersive media . . . 936
12.1.7 §81. The stress tensor in dispersive media . . . 939
12.1.8 82. The analytical properties of $\varepsilon(\omega)$ . . . 942
12.1.9 883. A plane monochromatic wave . . . 946

12.1.10 §84. Transparent media . . . 949
12.2 X The Propagation of Electromagnetic Waves by Landau . . . 951
12.2.1 §85. Geometrical optics . . . 951
12.2.2 §86. Reflection and refraction of electromagnetic waves . . . 954
12.2.3 §87. The surface impedance of metals . . . 961
12.2.4 §88. The propagation of waves in an inhomogeneous medium . . . 965
12.2.5 §89. The reciprocity principle . . . 969
12.2.6 §90. Electromagnetic oscillations in hollow resonators . . . 971
12.2.7 §91. The propagation of electromagnetic waves in waveguides . . . 975
12.2.8 §92. The scattering of electromagnetic waves by small particles . . . 980
12.2.9 §93. The absorption of electromagnetic waves by small particles . . . 983
12.2.10 §94. Diffraction by a wedge . . . 984
12.2.11 §95. Diffraction by a plane screen . . . 987
12.3 XI Electromagnetic Waves in Anisotropic Media by Landau . . . 991
12.3.1 §96. The permittivity of crystals . . . 991
12.3.2 §97. A plane wave in an anisotropic medium . . . 993
12.3.3 §98. Optical properties of uniaxial crystals . . . 999
12.3.4 §99. Biaxial crystals . . . 1001
12.3.5 §100. Double refraction in an electric field . . . 1007
12.3.6 §101. Magnetic-optical effects . . . 1007
12.3.7 §102. Mechanical-optical effects . . . 1015
12.4 XII Spatial Dispersion by Landau . . . 1018
12.4.1 §103. Spatial dispersion . . . 1018
12.4.2 §104. Natural optical activity . . . 1022
12.4.3 §105. Spatial dispersion in optically inactive media . . . 1026
12.4.4 §106. Spatial dispersion near an absorption line . . . 1028
12.5 XIII Non-Linear Optics by Landau . . . 1030
12.5.1 §107. Frequency transformation in non-linear media . . . 1030
12.5.2 §108. The non-linear permittivity . . . 1032
12.5.3 §109. Self-focusing . . . 1036
12.5.4 §110. Second-harmonic generation . . . 1041
12.5.5 §111. Strong electromagnetic waves . . . 1046
12.5.6 §112. Stimulated Raman scattering . . . 1048
12.6 XIV The Passage of Fast Particles Through Matter by Landau . . . 1051
12.6.1 §113. Ionization losses by fast particles in matter: the non-relativistic case . . . 1051
12.6.2 §114. Ionization losses by fast particles in matter: the relativistic case . . . 1055
12.6.3 §115. Cherenkov radiation . . . 1061
12.6.4 §116. Transition radiation . . . 1068
12.7 XV Scattering of Electromagnetic Waves by Landau . . . 1072
12.7.1 §117. The general theory of scattering in isotropic media . . . 1072
12.7.2 §118. The principle of detailed balancing applied to scattering . . . 1079
12.7.3 §119. Scattering with small change of frequency . . . 1081
12.7.4 §120. Rayleigh scattering in gases and liquids . . . 1088
12.7.5 §121. Critical opalescence . . . 1093
12.7.6 §122. Scattering in liquid crystals . . . 1095
12.7.7 §123. Scattering in amorphous solids . . . 1096
12.8 XVI Diffraction of X-Rays in Crystals by Landau . . . 1098
12.8.1 Overview of X-ray diffraction and Applications . . . 1098
12.8.2 §124. The general theory of X-ray diffraction . . . 1098
12.8.3 §125. The integral intensity . . . 1104
12.8.4 §126. Diffuse thermal scattering of X-rays . . . 1107
12.8.5 §127. The temperature dependence of the diffraction cross-section . . . 1108
12.9 Other Scatterings . . . 1111

12.9.1 Mie scattering (on a sphere) (??) . . . 1111

13 Extra Theory about Wave Propagation in Media by Batygin Toptygin 1111
13.1 12 Propagation of Electromagnetic Waves . . . 1111
13.2 13 Coherence and Nonlinear Waves . . . 1188
13.2.1 13.1. Coherence and Interference . . . 1188
13.2.2 13.2. Random Waves and Waves in Randomly Inhomogeneous Media . . . 1200
13.2.3 13.3. Waves in Nonlinear and Active Media . . . 1212
13.2.4 13.4. Answers and Solutions . . . 1223
13.3 14 Electromagnetic Vibrations in Finite Bodies . . . 1237
13.3.1 14.1. Electromagnetic Waves in Waveguides . . . 1237
13.3.2 14.2. Electromagnetic Oscillations in Resonators . . . 1244
13.3.3 14.3. Answers and Solutions . . . 1248
13.4 15 Interaction of Charged Particles with Equilibrium and Nonequilibrium Media . . . 1273
13.4.1 15.1. Ionization and Radiation Energy Losses of Fast Particles in Environments 1273
13.4.2 15.2. Macroscopic Mechanisms of Emission of Fast Particles in Media . . . 1296
13.4.3 15.3. Channeling and Emission of Fast Particles in Crystals . . . 1311
13.4.4 15.4. Particle Acceleration in Turbulent Plasma Media . . . 1325
13.4.5 15.5. Answers and Solutions . . . 1346
13.4.6 Appendix 4. Turbulence and Its Description Using Correlation Tensors . . . 1373

VI Problems in Electrodynamics 1382

14 Typical Problems 1382
14.1 Basic Laws and Models . . . 1382
14.1.1 Introductory Problems about Maxwell's equations . . . 1382
14.1.2 Problems about different special phenomena and devices 1 . . . 1384
14.1.3 Problems about different special phenomena and devices 2 . . . 1405
14.1.4 Problems about Simple Electrostatics . . . 1412
14.1.5 Problems about Specific Theoretical Electrostatics 1 . . . 1419
14.1.6 Problems about Basic, Easy Electrostatics 1 . . . 1426
14.1.7 Problems about Basic, Easy Electrostatics 2 . . . 1430
14.1.8 Problems about Basic, Easy Electrostatics 3 . . . 1431
14.1.9 Problems about Basic, Easy Electrostatics 4 . . . 1432
14.1.10 Problems about Electric Field in the Media 1 . . . 1440
14.1.11 Problems about Electric Field in the Media 2 . . . 1443
14.1.12 Problems about Electric Field in the Media 3 . . . 1445
14.1.13 Problems about Electric Field in the Media 4 . . . 1447
14.1.14 Problems about Constant Current 1 . . . 1453
14.1.15 Problems about Constant Current 2 . . . 1455
14.1.16 Problems about Constant Current 3 . . . 1456
14.1.17 Problems about Magnetic Field in Conductors, Inductance 1 . . . 1461
14.1.18 Problems about Magnetic Field in Conductors, Inductance 2 . . . 1464
14.1.19 Problems about Magnetic Field in Conductors, Inductance 3 . . . 1468
14.1.20 Problems about Magnetic Field in Matter . . . 1470
14.1.21 Problems about Magnetism of Typical Substances . . . 1476
14.2 Well-known Phenomena . . . 1485
14.2.1 Problems of advanced electrodynamics of continuous media . . . 1485
14.2.2 Problems about magnetic fields . . . 1487
14.2.3 Problems about superconductors in a magnetic field . . . 1487
14.2.4 Problems about electromagnetic induction . . . 1497
14.2.5 Problems about energy and forces in a magnetic field . . . 1503
14.2.6 Basic Problems about Particles in Electromagnetic Field . . . 1513

14.2.7 Advanced Problems about Particles in Electromagnetic Field . . . 1524
14.2.8 Problems about Hall's Electromotive force and impact on motion of a body . . 1524
14.2.9 Problems about non-stationary processes in circuits . . . 1532
14.2.10 Basic Problems about circuits 1 . . . 1542
14.2.11 Basic Problems about circuits 2 . . . 1551
14.2.12 Generally special problems about circuits 1 . . . 1560
14.2.13 Generally special problems about circuits 2 . . . 1570
14.2.14 Problems about spectral analysis and circuits . . . 1580
14.2.15 Problems about Electromagnetic Waves . . . 1589
14.2.16 Problems about Waveguides and Resonators . . . 1594
14.3 Practice in Theoretical Methods . . . 1608
14.3.1 Problems about properties of Maxwell's equations . . . 1608
14.4 Questions for checking knowledge . . . 1608
14.4.1 Questions About Understanding the Laws of Electrodynamics . . . 1608
14.4.2 Questions on Understanding Typical Electrodynamics in Everyday Life and Applications . . . 1608
14.4.3 Typical Knowledge Testing Tasks . . . 1609
14.4.4 Questions About Understanding Typical Details . . . 1616

15 Extra problems just for practice basic methods 1616
15.0.1 Problems about Strange Capacitors . . . 1616

16 Problems from Batygin Toptygin 1620
16.1 Vector and tensor calculus . . . 1620
16.1.1 a basics . . . 1620
16.1.2 b Vector analysis . . . 1623
16.2 Electrostatics in vacuo . . . 1630
16.3 Electrostatics of conductors and dielectrics . . . 1639
16.3.1 a Basic concepts and methods of electrostatics . . . 1639
16.3.2 b Coefficients of potential and capacitance . . . 1647
16.3.3 c Special methods of electrostatics . . . 1649
16.4 Steady currents . . . 1654
16.5 Magnetostatics . . . 1658
16.6 Electrical and magnetic properties of matter . . . 1667
16.6.1 a Polarisation of matter in a constant field . . . 1667
16.6.2 b Polarisation of matter in a variable field . . . 1670
16.6.3 c Ferromagnetic resonance . . . 1674
16.6.4 d Superconductivity . . . 1676
16.7 Quasi-stationary electromagnetic fields . . . 1678
16.7.1 a Quasi-stationary phenomena in linear conductors . . . 1678
16.7.2 b Eddy currents and skin effect . . . 1682
16.8 Propagation of electromagnetic waves . . . 1685
16.8.1 a Plane waves in a homogeneous medium. . . . 1685
16.8.2 b Plane waves in anisotropic and gyrotropic media . . . 1692
16.8.3 d Coherence and interference . . . 1699
16.8.4 e X-ray diffraction . . . 1706
16.9 Electromagnetic oscillations in finite bodies . . . 1709
16.10 Special theory of relativity . . . 1717
16.10.1 a Lorentz transformations . . . 1717
16.10.2 b Four-dimensional vectors and tensors . . . 1725
16.10.3 c Relativistic electrodynamics . . . 1727
16.11 Relativistic mechanics . . . 1730
16.11.1 a Energy and momentum . . . 1730
16.11.2 b The motion of charged particles in an electromagnetic field . . . 1740

16.11.3 a The Hertz vector and the multipole expansion . . . 1746
16.11.4 b The electromagnetic field of a moving point charge . . . 1751
16.11.5 c Interaction of charged particles with radiation . . . 1756
16.12 Plasma physics . . . 1765
16.12.1 a The motion of separate particles in a plasma . . . 1765
16.12.2 b Collective motions in a plasma . . . 1769

17 Solutions from Batygin Toptygin **1773**
17.1 Vector and tensor calculus . . . 1773
17.1.1 b Vector analysis . . . 1777
17.2 Electrostatics in vacuo . . . 1781
17.3 Electrostatics of conductors and dielectrics . . . 1794
17.3.1 b Coefficients of potential and capacitance . . . 1811
17.3.2 c Special methods of electrostatics . . . 1813
17.4 Steady currents . . . 1824
17.5 Magnetostatics . . . 1830
17.6 Electrical and magnetic properties of matter . . . 1846
17.6.1 a Polarisation of matter in a constant field . . . 1846
17.6.2 b Polarisation of matter in a variable field . . . 1851
17.6.3 c Ferromagnetic resonance . . . 1857
17.6.4 d Superconductivity . . . 1862
17.7 Quasi-stationary electromagnetic fields . . . 1864
17.7.1 a Quasi-stationary phenomena in linear conductors . . . 1864
17.7.2 b Eddy currents and skin effect . . . 1874
17.8 Propagation of electromagnetic waves . . . 1885
17.8.1 a Plane waves in a homogeneous medium. . . . 1885
17.8.2 b Plane waves in anisotropic and gyrotropic media . . . 1899
17.8.3 d Coherence and interference . . . 1922
17.8.4 e X-ray diffraction . . . 1927
17.9 Electromagnetic oscillations in finite bodies . . . 1931
17.10 Special theory of relativity . . . 1950
17.10.1 a Lorentz transformations . . . 1950
17.10.2 b Four-dimensional vectors and tensors . . . 1964
17.10.3 c Relativistic electrodynamics . . . 1966
17.11 Relativistic mechanics . . . 1972
17.11.1 a Energy and momentum . . . 1972
17.12 Emission of electromagnetic waves . . . 2009
17.13 The radiation emitted during the interaction of charged particles with matter . . . 2045
17.14 Plasma physics . . . 2058
17.14.1 a The motion of separate particles in a plasma . . . 2058
17.14.2 b Collective motions in a plasma . . . 2063

VII —— Special Electrodynamics in a Nutshell —— 2073

18 Special Phenomena in a Nutshell **2073**
18.1 Other phenomena with currents . . . 2073
18.1.1 The Galvanic Cell According to Landau (??) . . . 2073
18.1.2 Electrocapillarity (??) . . . 2073
18.1.3 Thermoelectric Phenomena . . . 2073
18.1.4 Thermohalvanomagnetic Phenomena . . . 2073
18.1.5 Diffusion-Electrical Phenomena . . . 2073
18.1.6 Electrodynamics of Moving Media According to Bolotov, Stolyarov . . . 2073
18.1.7 Skin effect . . . 2074

18.1.8 Foucault's currents . . . 2076
18.1.9 Contact Potential Difference . . . 2076
18.1.10 Very specific models with current . . . 2076
18.2 Hall effect . . . 2076
18.2.1 Typical Hall Effects . . . 2076
18.2.2 Other about Hall Effects . . . 2076
18.2.3 Hall Effect at the Micro Level . . . 2077
18.3 Magnetism: other models and properties . . . 2079
18.3.1 Review of Magnetic Bodies and Theories of Magnetism . . . 2079
18.3.2 Ferrimagnets, Antiferromagnets: Basics . . . 2079
18.3.3 Ferrimagnets, Antiferromagnets: Special Properties . . . 2080
18.3.4 Magnetic Groups, Symmetries (?!!) . . . 2081
18.3.5 Magnetic Hydrodynamics: Main Models (???) . . . 2081
18.4 Typical Superconductivity in a Nutshell (??) . . . 2081
18.4.1 Superconductivity According to Ginzburg Landau and London . . . 2081
18.4.2 BCS Superconductivity . . . 2081
18.4.3 Josephson, Meissner, Field Penetrations, Films, Rods . . . 2081
18.4.4 Vortices and Superconductors of the 2nd Kind in a Nutshell . . . 2081
18.5 Light waves and particles in media . . . 2082
18.5.1 Main Models of Electromagnetic Wave Propagation . . . 2082
18.5.2 Typical scattering, diffraction of waves . . . 2082
18.5.3 Special, exotic scatterings in media . . . 2082
18.5.4 Spatial Dispersion, Optical Activity . . . 2082
18.5.5 Waves in anisotropic media . . . 2082
18.5.6 Typical Nonlinear Optics . . . 2084
18.5.7 Fast Particles in Matter, Ionization, Cherenkov Radiation . . . 2084
18.5.8 X-Ray Diffraction in Crystals . . . 2084
18.5.9 Waveguides, Optical Fibers and Resonators: Basics (!!??) . . . 2084
18.5.10 Waveguides, Optical Fibers and Resonators: Extra Properties (!!??) . . . 2085

19 Special properties of electrodynamics 2085
19.1 Deeper understanding of basics of electrodynamics . . . 2085
19.1.1 The Nature of Electricity and Magnetism (???) . . . 2085
19.2 Special Peculiar Theoretical Constructions . . . 2085
19.2.1 Maxwell's Equations in Curved Space (????) . . . 2085
19.2.2 Connections with Quantum Electrodynamics . . . 2085
19.2.3 Complex Form of Maxwell's Equations . . . 2085
19.2.4 Electromagnetic Fluctuations: Formalism . . . 2086
19.2.5 Electromagnetic Fluctuations: Consequences . . . 2086
19.3 Hypothetical Effects and Theories . . . 2086
19.3.1 Typical Monopoles (??) . . . 2086

20 Electronics in a Nutshell 2086
20.1 Other applications of electrodynamics: overview . . . 2086
20.1.1 Computer: general principle . . . 2086

VIII Applications of Electrodynamics and Experiments 2087

21 Electromagnetic Devices, Electrical Engineering 2087
21.1 Applied Circuit Theory (??) . . . 2087
21.2 Typical Electrical Appliances . . . 2087
21.2.1 Arduino (??) . . . 2087
21.2.2 Oscilloscope . . . 2087

21.2.3 Lamp Generator . . . 2087
21.2.4 Resonators . . . 2087
21.2.5 Other Electrical Devices for Experiments . . . 2087
21.2.6 Wi-Fi . . . 2087
21.2.7 Transition Lines (????) . . . 2087
21.2.8 Antennas . . . 2088
21.2.9 Electromagnets . . . 2088
21.3 Mechanics of Electrodynamic Devices . . . 2088
21.4 Fundamentals of Robotics . . . 2088
21.5 Other Information About Experiments with Electricity . . . 2088
21.5.1 Measurements of Charge . . . 2088
21.6 Semiconductor Devices . . . 2089

22 Experimental Confirmations of Laws of Electrodynamics 2089

23 Some Rare Applications 2089
23.1 Electrochemistry . . . 2089
23.1.1 Fundamentals of Electrochemistry (???) . . . 2089
23.1.2 Operation of Electric Batteries (???) . . . 2089
23.1.3 Cyclic Voltammetry . . . 2089
23.1.4 Other Things in Electrochemistry and Applications . . . 2089
23.2 Important Experiments from the Past . . . 2089

IX Numerical Methods and Simulations 2090

24 Numerical Methods and Simulations 2090
24.1 FDTD: Main Ideas . . . 2090
24.2 Meep . . . 2090

X Specific Electrodynamics for Theoreticians 2091

25 Peculiar Forms of Electrodynamics for Exotic Applications 2091
25.1 Theoretical Derivations of Maxwell Equations . . . 2091
25.1.1 Derivation of Maxwell Equations from Poincare Group . . . 2091
25.2 Special Theoretical Models . . . 2091
25.2.1 Electrodynamics of moving media according to Bolotovek, Stolyarov 1 . . . 2091
25.2.2 Electrodynamics of moving media according to Bolotovek, Stolyarov 2 . . . 2103
25.2.3 Electrodynamics of moving media according to Bolotovek, Stolyarov 3 . . . 2111

26 Peculiar Forms of Electrodynamics for Theoreticians 2111
26.1 Complex Form of Classical and Quantum Electrodynamics by Kryuchkov et al. . . . 2111
26.1.1 Introduction . . . 2111
26.1.2 Maxwell's Equations in $3D$-Complex Form . . . 2112
26.1.3 Hertz Symmetric Stress Tensor . . . 2113
26.1.4 "Angular Momentum" Balance . . . 2116
26.1.5 Complex Covariant Form of Macroscopic Maxwell's Equations . . . 2116
26.1.6 Dual Electromagnetic Field Tensors . . . 2117
26.1.7 Covariant Derivation of Energy-Momentum Balance Equations . . . 2119
26.1.8 Covariant Derivation of Angular Momentum Balance . . . 2121
26.1.9 Transformation Laws of Complex Electromagnetic Fields . . . 2121
26.1.10 Material Equations, Potentials, and Energy-Momentum Tensor for Moving Isotropic Media . . . 2124
26.1.11 Real versus Complex Lagrangians . . . 2128

26.1.12 Formulas from Vector Calculus . . . 2130
26.1.13 Dual Tensor Identities . . . 2130
26.1.14 Proof of Identities . . . 2132
26.2 The Response of Optical Fibres to Gravitational Waves by Mieling . . . 2132
26.2.1 Introduction and Summary . . . 2132
26.2.2 Statement of the Problem . . . 2134
26.2.3 Decomposition of the Maxwell Equations . . . 2135
26.2.4 The Unperturbed Modes . . . 2136
26.2.5 The Perturbed Modes . . . 2138
26.2.6 Perturbation of the Phase . . . 2149
26.2.7 Perturbation of the Polarisation . . . 2150
26.2.8 Numerical Examples and Angular Dependence . . . 2152
26.2.9 Comparison with Light Propagation in Vacuum . . . 2154
26.2.10 Conclusion . . . 2155
26.2.11 Derivation of the Wave Equation . . . 2156
26.2.12 Continuity Conditions . . . 2156
26.3 Hypothetical, Philosophical Theories, Ideas . . . 2158
26.3.1 Can energy be Freely Transmitted Using Works of Nikola Tesla? . . . 2158
26.3.2 Can energy be Freely Transmitted Somehow? . . . 2158
26.3.3 Has Electromagnetic Field the Earth Something To Do With Life? . . . 2158
26.3.4 Human Electromagnetic Fields . . . 2158

27 Generalizations and other theories of electrodynamics 2158
27.1 Some Generalizations of Electrodynamics . . . 2158
27.2 Electrodynamics in the Presence of Gravity (?) . . . 2158
27.2.1 Electrodynamics in the Presence of Gravitational Waves 1 (!?!??) . . . 2159
27.2.2 Electrodynamics in the Presence of Gravitational Waves 2 (?) . . . 2184
27.2.3 Electrodynamic equations for waveguides in a gravitational wave . . . 2193

XI Other Topics 2201

28 Fare, Specific Phenomena 2201
28.1 VI Basics of Superconductivity . . . 2201
28.1.1 §53. The magnetic properties of superconductors . . . 2201
28.1.2 §54. The superconductivity current . . . 2203
28.1.3 §55. The critical field . . . 2206
28.1.4 56. The intermediate state . . . 2210
28.1.5 §57. Structure of the intermediate state . . . 2214
28.2 VII Quasi-Static Electromagnetic Field by Landau . . . 2218
28.2.1 §58. Equations of the quasi-static field . . . 2218
28.2.2 §59. Depth of penetration of a magnetic field into a conductor . . . 2221
28.2.3 §60. The skin effect . . . 2228
28.2.4 §61. The complex resistance . . . 2230
28.2.5 §62. Capacitance in a quasi-steady current circuit . . . 2233
28.2.6 §63. Motion of a conductor in a magnetic field . . . 2237
28.2.7 §64. Excitation of currents by acceleration . . . 2241
28.3 VIII Magnetohydrodynamics by Landau . . . 2244
28.3.1 Overview of Applications of Magnetohydrodynamics . . . 2244
28.3.2 §65. The equations of motion for a fluid in a magnetic field . . . 2244
28.3.3 §66. Dissipative processes in magnetohydrodynamics . . . 2247
28.3.4 §67. Magnetohydrodynamic flow between parallel planes . . . 2249
28.3.5 §68. Equilibrium configurations . . . 2251
28.3.6 69. Hydromagnetic waves . . . 2254

28.3.7 §70. Conditions at discontinuities . . . 2258
28.3.8 §71. Tangential and rotational discontinuities . . . 2259
28.3.9 72. Shock waves . . . 2263
28.3.10 73. Evolutionary shock waves . . . 2265
28.3.11 74. The turbulent dynamo . . . 2271
28.4 Waveguides . . . 2275
28.5 Plasma Physics . . . 2275
28.5.1 Gas Discharge . . . 2275
28.6 Semiconductors . . . 2280
28.7 Some Materials with Special Electromagnetic Properties . . . 2280

29 Phenomena in Nature and Everyday Life 2281
29.1 Well-Known Phenomena . . . 2281
29.1.1 Lightning . . . 2281
29.1.2 Gigantic Jet . . . 2281
29.1.3 Earth's Electromagnetic Field . . . 2281
29.1.4 Field from Wi-Fi and Mobile Devices . . . 2281
29.2 Not So Well-Known Phenomena . . . 2282
29.2.1 Drift in the Earth's radiation belts . . . 2282
29.3 Electrodynamics in Outer Space . . . 2282
29.4 Hypothetical Phenomena . . . 2282
29.4.1 Ball lightning (??) . . . 2282

XII Appendix 2283

A Preface and Introduction to Electrodynamics 2283
A.1 Other Motivation . . . 2283
A.1.1 General Motivation for Electrodynamics . . . 2283
A.1.2 Amazing Facts . . . 2283
A.1.3 Overview of Applications of Different Topics . . . 2283
A.2 Thinking of a Professional in Electrodynamics . . . 2284
A.2.1 How Much Does One Really Need to Know Theoretical Electrodynamics? . . . 2284
A.2.2 How Find Out What Is Shit and Only Looks Like Electrodynamics? . . . 2285
A.2.3 Methods of Studying Classical Electrodynamics . . . 2285
A.2.4 The Most Applied Topics of Electrodynamics (??) . . . 2285
A.2.5 Ways to Guess the Main Ideas of Electrodynamics . . . 2285
A.2.6 Misconceptions in Electrodynamics . . . 2286
A.3 Acknowledgements . . . 2286
A.4 Literature . . . 2286
A.4.1 Main Literature . . . 2286
A.4.2 Extra Literature . . . 2287
A.5 Critical Review of Classical Electrodynamics . . . 2288
A.5.1 What is Electrodynamics as a Science? . . . 2288
A.5.2 Overview of Theoretical Approaches . . . 2289
A.5.3 Обзор дальнейших развитий электродинамики . . . 2289
A.5.4 Connection of Electrodynamics to Other Subjects . . . 2289
A.6 Description of the Note . . . 2289
A.7 Puzzles for Different Occasions . . . 2289
A.7.1 Puzzles About Ideological Models in Electricity and Magnetism . . . 2289
A.7.2 Puzzles about Ideological Issues of the Theory of Electricity . . . 2289
A.7.3 Puzzles about Physical Phenomena . . . 2290
A.7.4 Puzzles for Demotivation (??) . . . 2290
A.7.5 Can Some Phenomena Occur or Not? . . . 2290

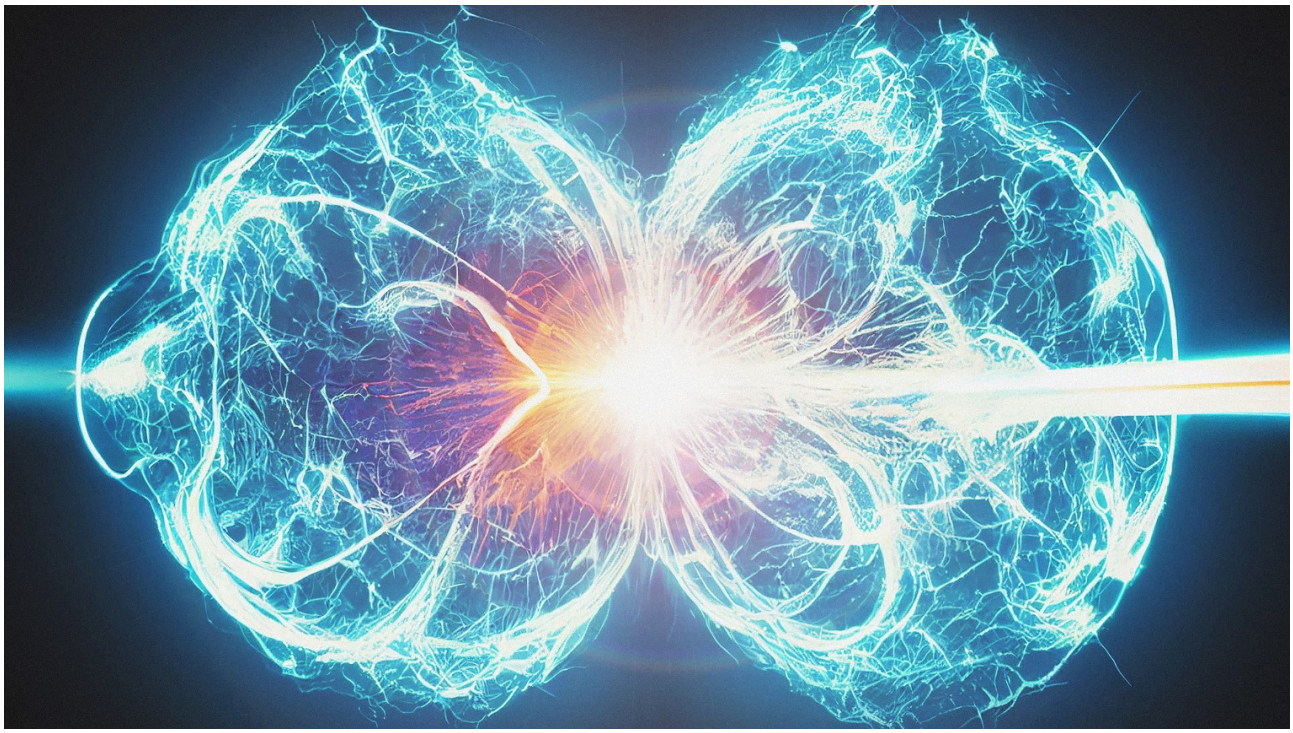
A.7.6 Purely Theoretical Puzzles (???) . . . 2290
A.8 History of Electrodynamics in a Nutshell . . . 2291
A.8.1 Creation of Maxwell's Equations . . . 2291
A.8.2 Ether . . . 2291

B Mathematics for Electrodynamics 2291
B.1 Coordinates and Objects . . . 2291
B.1.1 Curvilinear Coordinates by Landau . . . 2291
B.1.2 Solid Angle . . . 2295

C Background for Electrodynamics 2296
C.1 Mathematical Introduction to Electrodynamics . . . 2296
C.1.1 1.3. Special Functions of Mathematical Physics . . . 2301
C.1.2 1.4. Answers and Solutions . . . 2324
C.2 3 Special Theory of Relativity and Relativistic Kinematics . . . 2338
C.2.1 3.1. The Principle of Relativity and the Lorentz Transformation . . . 2338
C.2.2 3.2. Kinematics of Relativistic Particles . . . 2354
C.2.3 3.3. Answers and Solutions . . . 2368
C.3 4 The Variational Principle in Relativistic Mechanics and Field Theory . . . 2398
C.3.1 4.1. Four-Vectors and Tensors . . . 2398
C.3.2 4.2. Motion of Charged Particles in Electromagnetic Fields. Electromagnetic Field Conversion . . . 2405
C.3.3 4.3. Four-Dimensional Formulation of Electrodynamics. An Introduction to Field Theory . . . 2430
C.3.4 4.4. Answers and Solutions . . . 2446

D References 2496

Preface



Overview of the note

Fundamentals of Electrodynamics

Fields in Space

Electromagnetic Properties of Media

Propagation of Waves Through Media

Problems in Electrodynamics

Special Electrodynamics in a Nutshell

Applications of Electrodynamics

Numerical Methods and Simulations

Specific Electrodynamics for Theoreticians

Other Topics

Appendix

I used the following literature.

Idea of the note in a nutshell

(I'll write very shortly the main idea of this approach later)

Electrodynamics - one of the most important parts of physics

Множество приложений

Укажем приложения
(потом раскрою)

Удивительные факты

(потом раскрою)

Избранные идейные головоломки для мотивации

m-th.1 Как передается электромагнитная энергия?

(?? через воздух. серьезно? пока лень про это думать.)
Hint:

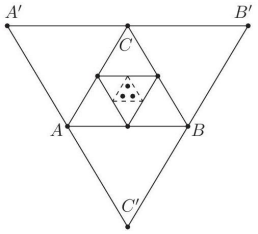
m-th.1 Фазы при излучении

Почему в колебательном контуре ток и напряжение (а значит магнитное и электрическое поля вокруг) сдвинуты по фазе на 90°, а в электромагнитной волне электрическое и магнитное поля имеют одну фазу?
Hint:
(потом додумаю, впишу в задачи потом)

Избранные технические головоломки для мотивации

m-te.1 Треугольный фрактал

(напишу потом условие)



Hint:
(см. туймаада, скоро додумаю это!)

Part I
Typical Electrodynamics in a Nutshell

1 Typical laws and phenomena

1.1 Basic laws of electrodynamics

1.1.1 Main laws and parameters of electrodynamics

Уравнения Максвелла для задач по электродинамике

$$\operatorname{curl}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \text{(Faraday)}, \qquad \operatorname{div}\mathbf{B} = 0 \quad \text{(no magnetic charge)}$$
$$\operatorname{curl}\mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_{\text{free}} \quad \text{)Biot\&Savart)}, \qquad \operatorname{div}\mathbf{D} = 4\pi\rho_{\text{free}} \quad \text{)Coulomb)}.$$

Equations of motion:

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = 0 \qquad \nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \boldsymbol{j}_{\text{ext}} + \boldsymbol{j}_{\text{free}}$$
$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_{\text{ext}} + \rho_{\text{free}} \qquad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

where

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}_{\text{bound}} \qquad \mathbf{B} = \mu_0(\boldsymbol{H} + \boldsymbol{M})$$

$$\oint(\mathbf{D}\cdot d\mathbf{S}) = 4\pi\int \rho dV = 4\pi Q \qquad \oint(\mathbf{B}\cdot d\mathbf{S}) = 0$$
$$\oint(\mathbf{E}\cdot d\mathbf{l}) = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\oint(\mathbf{B}\cdot d\mathbf{S}) \qquad \oint(\mathbf{H}\cdot d\mathbf{l}) = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\oint(\mathbf{D}\cdot d\mathbf{S}) + \frac{4\pi}{c}\oint(\mathbf{j}\cdot d\mathbf{S})$$

Для перехода помним $(\operatorname{rot}\mathbf{E})_n = \lim_{\Delta S\to 0}\left(\frac{1}{\Delta S}\oint_{L(\Delta S)}\mathbf{E}d\mathbf{r}\right)$

О граничных условиях и связях D, E и H, B

Электрическое поле: тангенциальная компонента непрерывная

$$D_{1n} - D_{2n} = 4\pi\sigma, \quad E_{1r} = E_{2r}$$

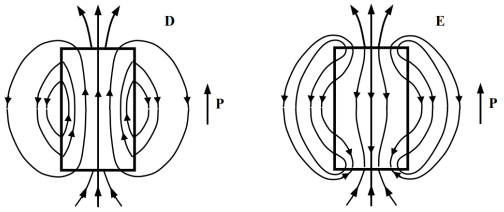
Магнитное поле: нормальная компонента непрерывная

$$B_{1n} = B_{2n}, \quad H_{1r} - H_{2r} = \frac{4\pi}{c}i_N,$$

Из тангенциальной часто можно найти поверхностный ток.

(абзац о смысле Поляризации (?))

(??)



$$P_n = \frac{\mathbf{PS}}{S} = \frac{1}{S}\left(\frac{\sigma S \mathbf{l}}{\mathbf{Sl}}\right)\mathbf{S} = \sigma.$$

Суть каждого из уравнений Максвелла

Теорема Гаусса

Суть теоремы о циркуляции МП

закон Био-Савара

Объёмная плотность поляризационных зарядов (?????)

$$\rho_{\text{пол}} = -\operatorname{div}\mathbf{P}.$$

В диэлектриках:

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = 4\pi\left(\rho + \rho_{\text{пол}}\right)$$

ρ - плотность свободных зарядов, а $\rho_{\text{пол}}$ - плотность поляризационных зарядов. Подставляя $\rho_{\text{пол}} = -\operatorname{div}\mathbf{P}$, получаем $\operatorname{div}\mathbf{E} = 4\pi(\rho - \operatorname{div}\mathbf{P})$. Обозначим

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}.$$

Тогда теорема Гаусса примет вид

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = 4\pi\rho.$$

Введённый в (1.5.6) вектор D называется вектором электрической индукции.

Поляризуемость α:

$$\mathbf{P} = \alpha\mathbf{E}$$

ЛЛ2-75. Торможение излучением

(that theory about F$\sim$ third derivative)

Индуктивность (?)

коэффициент самоиндукции и взаимной индукции

$$\Phi = \int\limits_S \mathbf{B}d\mathbf{S}$$

индуктивность соленоида

Рассмотрим идеальный соленоид, то есть прибор из

$$B = \mu H = \frac{4\pi}{c}\mu i = \frac{4\pi\mu}{c}\frac{NJ}{l}$$

Магнитный поток через каждый виток

$$\Phi_1 = BS = \frac{4\pi\mu N}{cl}SJ$$

в итоге индуктивность:

$$L = \frac{4\pi\mu N^2 S}{l}$$

Индуктивность тороидальной катушки

$$\oint_L \mathbf{H}d\mathbf{r} = \frac{4\pi}{c}NJ \qquad \rightarrow \qquad H \cdot 2\pi r = \frac{4\pi}{c}NJ \qquad \rightarrow \qquad H = \frac{2NJ}{cr} \rightarrow B = \frac{2\mu NJ}{cr}$$

взаимная индукция двух индуктивно связанных катушек (??)

От одной поле и поток:

$$B_1 = \frac{4\pi\mu}{c}\frac{N_1 J_1}{l}, \qquad \Phi_1 = \frac{4\pi\mu}{c}\frac{N_1 J_1}{l}S$$

Этот поток пронизывает все N_2 витков второй катушки, что даёт полный

$$\Phi_{21} = N_2\Phi_1 = \frac{4\pi\mu}{c}\frac{N_1 N_2 J_1}{l}S = \frac{1}{c}L_{21}J_1$$

Отсюда коэффициент взаимной индукции:

$$L_{21} = \frac{4\pi\mu N_1 N_2}{l}S$$

Параметры магнетизма (?)

Параметры магнитных тел

μ **Магнитная проницаемость**

χ_e, α_{ij} **- Поляризуемость / диэлектрическая восприимчивость / electric susceptibility**

Поляризуемость - свойство веществ приобретать электрический или магнитный дипольный момент во внешнем электромагнитном поле, то есть

$$\vec{P} = \chi_e\vec{E} \text{ (СГС)} \qquad \vec{P} = \varepsilon_0\chi_e\vec{E} \text{ (СИ)}.$$

E - электрическое поле; ε_0 - электрическая постоянная.

χ_e связана с диэлектрической проницаемостью ε так:

$$\varepsilon = 1 + 4\pi\chi_e \text{ (СГС)} \quad \varepsilon = 1 + \chi_e\text{(СИ)}$$

$$\vec{M} = \chi_m\vec{H} \text{ (СГС, СИ)}$$

Магнитная восприимчивость χ_m связана с магнитной проницаемостью μ так:

$$\mu = 1 + 4\pi\chi_m \text{ (СГС)} \qquad \mu = 1 + \chi_m \text{ (СИ)}.$$

Намагниченность

очень важный объект ЭСС.

Магнитный момент

Емкость

Основные формулы

$$C := q/\Delta\varphi$$

Показывает, как много нужно заряда добавить в систему, чтобы изменить потенциал (?? да???)

Для плоского конденсатора:

$$C = \frac{\varepsilon S}{4\pi d}$$

(??) получаем из

Для сферического конденсатора:

$$C = \frac{\varepsilon R_1 R_2}{R_2 - R_1}.$$

R_2 - радиус внутренней сферы, на которой $-q$, R_1 - радиус внешней сферы, на которой $+q$. Получаем ее из $\Delta\varphi = \varphi_+ - \varphi_- = \frac{q}{\varepsilon R_1} - \frac{q}{\varepsilon R_2}$ и определения емкости.

Для цилиндрического конденсатора:

$$C = \frac{\varepsilon l}{2\ln(b/a)}$$

В пределе (???) $C = \frac{\varepsilon l}{2\ln(b/a)} = \frac{\varepsilon a l}{2d} = \frac{\varepsilon S}{4\pi d}$, $S = 2\pi a l$ - площадь боковой поверхности (обкладки) конденсатора.

Обзор применений

Запаздывающие потенциалы

(об этом сперва в теорполе напишу, потом суть сюда соберу.)

Потенциалы Лиенара–Вихерта

Спектральное разложение запаздывающих потенциалов

Функция Лагранжа с точностью до членов второго порядка

(будет 3/4 страницы сути и формул, пока не актуально)

О преобразовании полей

(тоже не такая актуальная и понятная тема, мб 1 страницу уделю указаниям на них)

переход из электрического поля в магнитное
(?????????)

Вектор Пойтинга

Импульс электромагнитного поля

О квантовании свободного ЭМ поля

$$\mathscr{E}_0 = \frac{1}{2}\sum_s \hbar\omega_s,$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) = \sum_s \left\{b_s(t)\mathscr{A}_s(\boldsymbol{r}) + b_s^*(t)\mathscr{A}_s^*(\boldsymbol{r})\right\}, \quad \text{где} \quad \mathscr{A}_s(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{e}_s\sqrt{\frac{4\pi c^2}{\mathscr{V}}}e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$$

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = i\sum_s \frac{\omega_s}{c}\left\{b_s(t)\mathscr{A}_s(\boldsymbol{r}) - b_s^*(t)\mathscr{A}_s^*(\boldsymbol{r})\right\}$$

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t) = i\sum_s \boldsymbol{k}\times\left\{b_s(t)\mathscr{A}_s(\boldsymbol{r}) - b_s^*(t)\mathscr{A}_s^*(\boldsymbol{r})\right\}$$

О дисперсии волн

Суть законов электродинамики в сплошных средах

Уравнения поля в диэлектриках в отсутствие дисперсии

Уравнения электродинамики для движущихся диэлектриков

Уравнения дисперсии дизлектрической и магнитных проницаемостей

Энергия поля в диспергирующих средах

Тензор напряжений в диспергирующих средах

Аналитические свойства функции $\varepsilon(\omega)$

Плоская монохроматическая волна

Прозрачные среды

1.1.2 Currents in media: basics

Токи

Выберем площадку $d\mathbf{S}$ на пути носителей, перпендикулярную дрейфовой скорости. За время dt эту площадку пересекут носители, находящиеся в цилиндре объёмом $dV = udtdS$. Их число равно $dN = nudtdS$, а перенесут они суммарный заряд

$$dq = enudtdS = \rho udtdS.$$

А плотность тока, то есть заряд за единицу времени через единичную площадку:

$$j = \frac{enudtdS}{dtdS} = enu = \rho u.$$

Закон Ома:

$$J = U/R$$

$$\mathbf{j} = \lambda \mathbf{E},$$

λ - проводимость среды. $\rho_c = 1/\lambda$ - удельное сопротивление.

При наличии сторонних сил можно ввести эффективную напряжённость поля этих сил: $\mathbf{E}_{\text{стор}} = \mathbf{F}_{\text{стор}}/e$, после чего закон Ома примет вид $\mathbf{j} = \lambda\left(\mathbf{E} + \mathbf{E}_{\text{стор}}\right)$

Ток течет в противоположную сторону к тому, что мы обозначаем из-за отрицательного заряда электрона. (??? забыл про это почти все, кроме этого факта.)

Энергия и мощность тока
(! write it)

основные свойства проводников

Параметры проводников

Теория проводимости Друде (???)

Электрон в постоянном однородном поле $\mathbf{E}$ ускоряется с $\mathbf{a} = e\mathbf{E}/m$. Если $v_0 = 0$, то до столкновения с рассеивающим центром она меняется по закону $\mathbf{v} = \mathbf{a}t = (e\mathbf{E}/\mathrm{m})t$. После столкновения скорость обращается в среднем в нуль, и начинается новый цикл ускорения. Если время свободного пробега равно τ, то средняя скорость упорядоченного движения электрона от столкновения до столкновения составит

$$\mathbf{u} = \overline{\mathbf{v}} = \frac{e\mathbf{E}}{2m}\tau$$

$$\mathbf{j} = ne\mathbf{u} = \frac{ne^2\tau}{2m}\mathbf{E} \equiv \lambda\mathbf{E} \qquad \text{(закон Ома)}$$

$$\lambda = \frac{ne^2\tau}{2m}$$

1.1.3 Kinetics of electrons in media: basics

Кинетическое уравнение для электронов в металле

3 II

Проводимость, обусловленная примесями

III

Теплопроводность, обусловленная примесями

IV

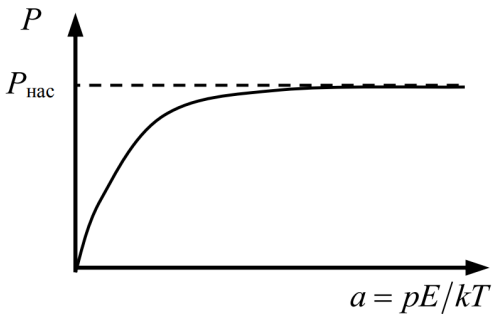
1.1.4 Polarization, electrostriction, electric forces

(!!! графики добавлю!!!)

Механизмы поляризации диэлектриков

О теории Дебая для поляризации (???)

(?? та же теория Ланжевена, только вычисляем поляризацию (????) спишу потом у Кириченко.)



Формула Клаузиуса–Моссотти (Лоренц-Лоренца)

При выводе выражения для диэлектрической проницаемости мы, рассчитывая вектор поляризации среды, учитывали действие только внешнего поля на частицы. Вместе с тем каждая частица сама производит поле, действующее на остальные частицы. Это становится тем более существенным, чем выше их концентрация.

$$\Delta\mathbf{E} = -\frac{4\pi}{3}\mathbf{P}$$

(как поле внутри однородно поляризованного шара). В этой же сфере действует также поле $\mathbf{E}'$, производимое всеми прочими зарядами. Сумма двух полей даёт среднее поле: $\mathbf{E} = \mathbf{E}' + \Delta\mathbf{E}$, или

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}' - \frac{4\pi}{3}\mathbf{P} \Rightarrow \mathbf{E}' = \mathbf{E} + \frac{4\pi}{3}\mathbf{P}.$$

$$\mathbf{P} = n\beta\mathbf{E}' = n\beta\left(\mathbf{E} + \frac{4\pi}{3}\mathbf{P}\right) \Rightarrow \mathbf{P} = \frac{n\beta}{1 - \frac{4\pi}{3}n\beta}\mathbf{E}$$

Наконец, вводя диэлектрическую проницаемость среды равенством $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P} = \varepsilon\mathbf{E}$, находим

$$\varepsilon = \frac{1 + \frac{8\pi}{3}n\beta}{1 - \frac{4\pi}{3}n\beta}.$$

Полученная формула связывает диэлектрическую проницаемость среды с поляризуемостью отдельной молекулы и концентрацией молекул. Перепишем её в следующем виде:

$$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \frac{4\pi}{3}n\beta$$

$$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2}\frac{\mu}{\rho} = \frac{4\pi}{3}N_{\mathrm{A}}\beta, \qquad \text{(Клаузиуса-Моссотти)}$$

μ и ρ - молярная масса и плотность вещества

$$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \frac{4\pi}{3}\sum_i n_i\beta_i \qquad \text{(несколько составляющих)}$$

Если же у частиц есть собственный дипольный момент в отсутствии поля, то

$$\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}=\frac{4\pi}{3}n\left(\beta_0+\frac{p^2}{3kT}\right) \qquad \text{(ф Ланжевена-Дебая)}$$

Учитывается ориентационный и деформационный (квазиупругий) механизмы поляризации. β_0 - квазиупругая (деформационная) поляризуемость молекулы, p - дипольный момент (определяемый главным образом взаимным расположением атомов и ионов).

Электрострикция изотропных диэлектриков (сжимаемость при наложении поля)

$$\Phi=\Phi_0-\frac{1}{2}\mathscr{C}\mathscr{P}$$

$$d\mathscr{F}=-\mathscr{S}dT-PdV-\mathscr{P}d\mathfrak{C}.$$

$$\Phi:=\mathscr{F}+PV.$$

$$d\Phi=-\mathscr{S}dT+VdP-\mathscr{P}d\mathfrak{C}.$$

$$\Phi=\Phi_0-\frac{1}{2}\mathfrak{C}\mathscr{P}$$

$$\Phi=\Phi_0(P,T)-\frac{1}{2}V\alpha_{ik}\mathfrak{C}_i\mathfrak{C}_k\approx\Phi_0(P,T)-\frac{\varkappa V}{2}\mathfrak{C}^2$$

$$V-V_0=-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial(\varkappa V)}{\partial P}\right)_T\mathfrak{C}^2 \qquad \text{volume}$$

$$Q=\frac{T}{2}\left(\frac{\partial(\varkappa V)}{\partial T}\right)_P\mathfrak{C}^2 \qquad \text{heat}$$

Нужна теория для задач в духе “определить изменение объема и электрокалорический эффект для диэлектрического эллипсоида в однородном электрическом поле, параллельном одной из его осей” (???)

Диэлектрические свойства кристаллов

$$D_i=D_{0i}+\varepsilon_{ik}E_k$$

$$F=\widetilde{F}+\frac{E_iD_i}{4\pi}=F_0+\frac{\varepsilon_{ik}^{-1}D_iD_k}{8\pi}.$$

Термодинамические величины пироэлектрического тела находим, интегрируя соотношение

$$-4\pi\frac{\partial\tilde{F}}{\partial E_i}=D_i=D_{0i}+\varepsilon_{ik}E_k,$$

$$\mathscr{F}=\int\left(F_0-\frac{\mathbf{E}\mathbf{D}_0}{8\pi}\right)dV$$

В частности, пироэлектрическими заведомо не могут быть кристаллы, обладающие центром симметрии. Перечислим те из 32 -х кристаллических классов, в которых существует пироэлектричество:

триклинная система: $\boldsymbol{C}_1$, моноклинная система: $\boldsymbol{C}_s, \boldsymbol{C}_2$, ромбическая система: $\boldsymbol{C}_{2v}$, тетрагональная система: $\boldsymbol{C}_4, \boldsymbol{C}_{4v}$, ромбоэдрическая система: $\boldsymbol{C}_3, \boldsymbol{C}_{3v}$, гексагональная система: $\boldsymbol{C}_6, \boldsymbol{C}_{6v}$.

(по идее после этого раздела задачи про анизотропные среды должны решаться.... потом додумаю это!)

Положительность диэлектрической восприимчивости

(словами потом напишу, теор параграф, не так важно это вообще, насколько сейчас понимаю)

Электрические силы в жидком диэлектрике

Вопрос о вычислении сил (их называют пондеромоторными), действующих на диэлектрик в произвольном неоднородном электрическом поле, довольно сложен и требует раздельного рассмотрения для жидких (или газообразных) и твердых тел. Мы начнем с более простого случая жидких диэлектриков.

(в духе МСС сложные формулы тут, потом додумаю когда-то, вообще не до них пока)

$$\sigma_{ik} = \left[\tilde{F} - \rho \left(\frac{\partial \tilde{F}}{\partial \rho} \right)_{\mathbf{E},T} \right] \delta_{ik} + \frac{E_i D_k}{4\pi}.$$

При учете уравнения $\operatorname{div} \mathbf{D} \equiv \partial D_k / \partial x_k = 0$ выражение в скобках в последнем члене сводится к сумме

$$-\varepsilon E_k \frac{\partial E_k}{\partial x_i} + D_k \frac{\partial E_i}{\partial x_k} = -D_k \left(\frac{\partial E_k}{\partial x_i} - \frac{\partial E_i}{\partial x_k} \right),$$

обращающейся в нуль ввиду того, что $\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$. Таким образом, получаем

$$\mathbf{f} = -\operatorname{grad} P_0(\rho, T) + \frac{1}{8\pi} \operatorname{grad} \left[E^2 \rho \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho} \right)_T \right] - \frac{E^2}{8\pi} \operatorname{grad} \varepsilon$$

(другие умные формулы не пишу, в теории сперва про них напишу)

Электрические силы в твердых телах

1.1.5 Formalism for temperature phenomena in electrodynamics

Thermodynamic potentials according to Landau 8 (????)

Термодинамические соотношения для диэлектриков в электрическом поле

$$e = -\frac{1}{4\pi} \oint D_n df = -\frac{1}{4\pi} \oint \mathbf{D} d\mathbf{f}$$

$$\delta R = \varphi \delta e = -\frac{1}{4\pi} \int \varphi \delta \mathbf{D} d\mathbf{f} = -\frac{1}{4\pi} \int \operatorname{div}(\varphi \delta \mathbf{D}) dV$$

$$\delta \mathscr{U} = T \delta \mathscr{S} + \frac{1}{4\pi} \int \mathbf{E} \delta \mathbf{D} dV$$

$\mathscr{F} = \mathscr{U} - T\mathscr{S}$,

$$\Delta\mathscr{F} = -\mathscr{S}\delta T + \frac{1}{4\pi}\int \mathbf{E}\delta\mathbf{D}dV$$

$$\widetilde{U} := U - \frac{\mathbf{ED}}{4\pi}, \qquad \widetilde{F} := F - \frac{\mathbf{ED}}{4\pi},$$

$$d\widetilde{U} = TdS + \zeta d\rho - \frac{1}{4\pi}\mathbf{D}d\mathbf{E},$$

$$d\widetilde{F} = -SdT + \zeta d\rho - \frac{1}{4\pi}\mathbf{D}d\mathbf{E}.$$

$$\mathbf{D} = -4\pi\left(\frac{\partial\widetilde{U}}{\partial\mathbf{E}}\right)_{S,\rho} = -4\pi\left(\frac{\partial\widetilde{F}}{\partial\mathbf{E}}\right)_{T,\rho}$$

$$S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_{\rho,\mathbf{D}} = S_0(T,\rho) + \frac{D^2}{8\pi\varepsilon^2}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial T}\right)_\rho = S_0(T,\rho) + \frac{E^2}{8\pi}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial T}\right)_\rho$$

$$\zeta = \left(\frac{\partial F}{\partial\rho}\right)_{T,\mathbf{D}} = \zeta_0(T,\rho) - \frac{E^2}{8\pi}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_T$$

ζ - химический потенциал. Обе эти величины отличны от нуля только внутри диэлектрика.

$$\mathscr{F} - \mathscr{F}_0 = \int \frac{\mathbf{ED}}{8\pi}dV = \frac{1}{2}\sum_a e_a\varphi_a.$$

Matsubara summation method for electrodynamics

Thermodynamic inequalities according to Landau 8, пар. 18 (????)

1.1.6 Energy bands in solids in a nutshell

(суть того, что в конд средах, очень важная часть ЭД)

1.1.7 Dynamics of electromagnetic waves

(??? still there are a lot of theory about it that I don't know)

Об электромагнитных волнах

$$\Delta\boldsymbol{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t)$$

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -4\pi\rho(\boldsymbol{r},t),$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0.$$

$G:\ \Delta G - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} = -4\pi\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\,\delta(t-t')$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{c}\int G(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r}',t')\,j(\boldsymbol{r}',t')\,d^3r'dt'$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{c}\int\frac{\boldsymbol{j}\left(\boldsymbol{r}',t-\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|/c\right)}{\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|}dV' \qquad \varphi(\boldsymbol{r},t)=\int\frac{\rho\left(\boldsymbol{r}',t-\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|/c\right)}{\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|}dV'$$

$$\boldsymbol{A}_{\omega}^{R}(\boldsymbol{r})=\frac{1}{c}\int\frac{\exp\left(i\omega\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|/c\right)}{\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|}\boldsymbol{j}_{\omega}\left(\boldsymbol{r}'\right)dV' \qquad \varphi_{\omega}^{R}(\boldsymbol{r})=\int\frac{\exp\left(i\omega\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|/c\right)}{\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|}\rho\omega\left(\boldsymbol{r}'\right)dV'$$

$$\boldsymbol{H}_{\omega}(\boldsymbol{r})=\nabla\times\boldsymbol{A}_{\omega}^{R}(\boldsymbol{r}),\quad \boldsymbol{E}_{\omega}=-\frac{i\omega}{c}\boldsymbol{A}_{\omega}^{R}(\boldsymbol{r})-\nabla\varphi_{\omega}^{R}(\boldsymbol{r})$$

Электромагнитная индукция в движущихся и неподвижных проводниках

Нерелятивистские законы преобразования полей

Релятивистские законы преобразования полей

Распространение в средах

Распространение в кристаллах

ЛЛ2-38. Поле равномерно движущегося заряда

Методы решения задач на динамику переменных полей

Уравнение поля

Параметры поля

Энергия

Импульс

Момент импульса

Тензор энергии-импульса

66. Поле системы зарядов на далеких расстояниях

1.2 Systems of units

Обзор систем единиц и переходов (??)

(внизу где-то целый нормальный раздел про это, тут лишь указание сути)

Conversion of SI units in electromagnetism to ESU, EMU, and Gaussian subsystems of CGS[20][14]

Quantity	Symbol	SI unit	ESU unit	Gaussian unit	EMU unit
electric charge	q	1 C	$\triangleq (10^{-1}\ c)$ statC (Fr)		$\triangleq (10^{-1})$ abC
electric current	I	1 A	$\triangleq (10^{-1}\ c)$ statA (Fr/s)		$\triangleq (10^{-1})$ abA (Bi)
electric potential / voltage	φ / V, E	1 V	$\triangleq (10^{8}\ c^{-1})$ statV (erg/Fr)		$\triangleq (10^{8})$ abV
electric field	**E**	1 V/m	$\triangleq (10^{6}\ c^{-1})$ statV/cm (dyn/Fr)		$\triangleq (10^{6})$ abV/cm
electric displacement field	**D**	1 C/m^2	$\triangleq (4\pi \times 10^{-5}\ c)$ statC/cm^2		$\triangleq (4\pi \times 10^{-5})$ abC/cm^2
electric dipole moment	**p**	1 C·m	$\triangleq (10\ c)$ statC·cm		$\triangleq (10)$ abC·cm
electric flux	Φ_e	1 C	$\triangleq (4\pi \times 10^{-1}\ c)$ statC		$\triangleq (4\pi \times 10^{-1})$ abC
permittivity	ε	1 F/m	$\triangleq (4\pi \times 10^{-11}\ c^2)$ cm/cm		$\triangleq (4\pi \times 10^{-11})$ s^2/cm^2
magnetic B field	**B**	1 T	$\triangleq (10^{4}\ c^{-1})$ statT	$\triangleq (10^{4})$ G	
magnetic H field	**H**	1 A/m	$\triangleq (4\pi \times 10^{-3}\ c)$ statA/cm	$\triangleq (4\pi \times 10^{-3})$ Oe	
magnetic dipole moment	**μ**	1 A·m^2	$\triangleq (10^{3}\ c)$ statA·cm^2	$\triangleq (10^{3})$ erg/G (Bi·cm^2)	
magnetic flux	Φ_m	1 Wb	$\triangleq (10^{8}\ c^{-1})$ statWb	$\triangleq (10^{8})$ Mx	
permeability	μ	1 H/m	$\triangleq ((4\pi)^{-1} \times 10^{7}\ c^{-2})$ s^2/cm^2	$\triangleq ((4\pi)^{-1} \times 10^{7})$ cm/cm	
resistance	R	1 Ω	$\triangleq (10^{9}\ c^{-2})$ statΩ (s/cm)		$\triangleq (10^{9})$ abΩ
resistivity	ρ	1 Ω·m	$\triangleq (10^{11}\ c^{-2})$ statΩ·cm (s)		$\triangleq (10^{11})$ abΩ·cm
capacitance	C	1 F	$\triangleq (10^{-9}\ c^{2})$ statF (cm)		$\triangleq (10^{-9})$ abF
inductance	L	1 H	$\triangleq (10^{9}\ c^{-2})$ statH (s^2/cm)		$\triangleq (10^{9})$ abH

Constant	Symbol	Value
atomic mass constant	m_u	$1.660\ 539\ 069 \times 10^{-24}$ g
Bohr magneton	μ_B	$9.274\ 010\ 066 \times 10^{-21}$ erg/G (EMU, Gaussian)
		$2.780\ 278\ 273 \times 10^{-10}$ statA·cm^2 (ESU)
Bohr radius	a_0	$5.291\ 772\ 105 \times 10^{-9}$ cm
Boltzmann constant	k	$1.380\ 649 \times 10^{-16}$ erg/K
electron mass	m_e	$9.109\ 383\ 71 \times 10^{-28}$ g
elementary charge	e	$4.803\ 204\ 71 \times 10^{-10}$ Fr (ESU, Gaussian)
		$1.602\ 176\ 634 \times 10^{-20}$ abC (EMU)
fine-structure constant	α	0.007 297 352 564
Newtonian constant of gravitation	G	6.6743×10^{-8} dyn·cm^2/g^2
Planck constant	h	$6.626\ 070\ 15 \times 10^{-27}$ erg·s
reduced Planck constant	$\hbar$	$1.054\ 571\ 817 \times 10^{-27}$ erg·s
speed of light	c	$2.997\ 924\ 58 \times 10^{10}$ cm/s

	cgs	SI
Force between poles	$F = \frac{p_1 p_2}{r^2}$ (dyne)	$F = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{p_1 p_2}{r^2}$ (newton)
Field of a pole	$\boldsymbol{H} = \frac{p}{r^2}$ (oersted)	$\boldsymbol{H} = \frac{p}{r^2}$ (ampere/m)
Magnetic induction	$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{H} + 4\pi\boldsymbol{M}$ (gauss)	$\boldsymbol{B} = \mu_0(\boldsymbol{H} + \boldsymbol{M})$ (tesla)
Energy of a dipole	$E = -\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{H}$ (erg)	$E = -\mu_0 \boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{H}$ (joule)
Susceptibility	$\chi = \frac{\boldsymbol{M}}{\boldsymbol{H}}$(emu/(cm^3 oersted))	$\chi = \frac{\boldsymbol{M}}{\boldsymbol{H}}$ (dimensionless)
Permeability	$\mu = \frac{\boldsymbol{B}}{\boldsymbol{H}} = 1 + 4\pi\chi\left(\frac{\text{gauss}}{\text{oersted}}\right)$	$\mu = \frac{\boldsymbol{B}}{\boldsymbol{H}} = \mu_0(1+\chi)\left(\frac{\text{henry}}{\text{m}}\right)$

F	1 dyne	=	10^{-5} newton
$\boldsymbol{H}$	1 oersted	=	79.58 ampere/m
$\boldsymbol{B}$	1 gauss	=	10^{-4} tesla
E	1 erg	=	10^{-7} joule
Φ	1 maxwell	=	10^{-8} weber
$\boldsymbol{M}$	1 emu/cm^3	=	12.57×10^{-4} weber/m^2
μ	1 gauss/oersted	=	1.257×10^{-6} henry/m

newton (N)	=	kg m/s^2
joule (J)	=	kg m^2/s^2
tesla (T)	=	kg/(s^2 A)
weber (Wb)	=	kg m^2/(s^2 A)
henry (H)	=	kg m^2/(s^2 A^2)

О системе СГС

- длина - сантиметр (см);
- масса - грамм (г);
- время - секунда (с);
- скорость - см/с;
- ускорение - гал, см/с ^{2};
- сила - дина, г·см/с ^{2};
- энергия - эрг, г· см^2/с^2;
- мощность - эрг/с, Г · см^2/с^3;
- давление - бария, дин/см^2, г/(см c^2);
- динамическая вязкость - пуаз, г/(см сс);
- кинематическая вязкость - стокс, см^2/с;
- количество вещества - моль (моль).

1erg = 10^{-7} J,

(ниже про Теслу, сокращу потом) Expressed only in SI base units, 1 tesla is:

$$\mathrm{T} = \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{A} \cdot \mathrm{s}^2}$$

where A is ampere, kg is kilogram, and s is second. [2] Additional equivalences result from the derivation of coulombs from amperes (A), C = A · s:

$$\mathrm{T} = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{A} \cdot \mathrm{m}}$$

the relationship between newtons and joules (J), $\mathrm{J} = \mathrm{N} \cdot \mathrm{m}$:

$$\mathrm{T} = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{A} \cdot \mathrm{m}^2}$$

and the derivation of the weber from volts (V), $\mathrm{Wb} = \mathrm{V} \cdot \mathrm{s}$:

$$\mathrm{T} = \frac{\mathrm{V} \cdot \mathrm{s}}{\mathrm{m}^2}$$

1 Oe:= 1 dyn/maxwell
1 maxwell:= 1 gauss $\cdot$ cm^2
1 maxwell $\equiv 10^{-4}$ tesla $\times (10^{-2}$ metre $)^2 = 10^{-8}$ weber
1 Oe $=10^{-4}$ T in non-magnetic materials, because:

$$1\mathrm{G} = 10^{-4}\ \mathrm{T} \qquad 1\mathrm{Oe} = \frac{1000}{4\pi}\mathrm{A/m}$$

To go between the two magnetic fields, we have

$$\frac{B}{1\mathrm{G}} = \mu_r \frac{H}{1\mathrm{Oe}} \quad \text{(CGS)},$$
$$B = \mu_r \mu_0 H \quad \text{(SI)},$$

where $\mu_r \sim 1$ (dimensionless relative permeability of the medium) and $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\mathrm{H/m}$ (henries per meter) is the vacuum permeability.

(????? почему такие странные значения размерностей сопротивления, т.п.???? про это подробнее!!!)

О системе СГСМ

В СГСМ магнитная постоянная μ_0 безразмерна и равна 1, а электрическая постоянная $\varepsilon_0 = 1/c^2$ (размерность: c^2/cm^2). В этой системе нефизические коэффициенты отсутствуют в формуле закона Ампера для силы, действующей на единицу длины l каждого из двух бесконечно длинных параллельных прямолинейных токов в вакууме: $F = 2I_1 I_2 l/d$, d - расстояние между токами. В результате единица силы тока должна быть выбрана как квадратный корень из единицы силы (дина $^{1/2}$). Из выбранной таким образом единицы силы тока (иногда называемой абампером, размерность: $\mathrm{cm}^{1/2}\Gamma^{1/2}c^{-1}$) выводятся определения производных единиц (заряда, напряжения, сопротивления и т. п.). Все величины этой системы отличаются от единиц СИ в 10 в целой степени раз, за исключением напряжённости магнитного поля: 1 А/м = 4л$\cdot\cdot\cdot 10^3$ Э.

О системе СГСЭ

В сгсЭ электрическая постоянная ε_0 безразмерна и равна 1, магнитная постоянная $\mu_0 = 1/c^2$ (размерность: с $^2/\mathrm{cm}^2$), c - скорость света в вакууме, фундаментальная физическая постоянная. В этой системе закон Кулона в вакууме записывается без дополнительных коэффициентов: $F = Q_1 Q_2/r^2$, в результате единица заряда должна быть выбрана как квадратный выводятся определения производных единиц (напряжения, силы тока, сопротивления и т. п.). Все величины этой системы отличаются от единиц СГСМ в с в целой степени раз.

(!!! тут очень важный абзац про то, как постоянство скорости света помогает нам переходить от одной системы единиц в другую!)

Natural units system

(уже в теорполе написано, и тут тоже напишу)

Определения физических величин

(потом допишу, типа кулон - это то-то, ампер - это то-то и т.п. уже разобрался, важно иметь страничку про это, с пониманием систем единиц связано это сильно. важная тема!)

Other units

International	Thou	Inch	Foot	Yard	Centimetre
Inch	1000	1	1/12	1/36	2.54

International	Inch	Foot	Yard	Chain	Furlong	Mile	Metre
Yard	36	3	1	1/22	1/220	1/1760	0.9144

Feet	Yard	Chain	Furlong	Mile	Kilometres
$5,280$	$1,760$	80	8	1	1.609344

1.3 Mathematics for electrodynamics

(collection of most used formulas)

Main mathematics for radiation

Main mathematics for motion in electromagnetic field

Main mathematics for magnetism

(много разных формул статфиза и не только могут быть полезны)

1.4 Typical models of electrodynamics

1.4.1 Motion of a particle in electromagnetic field

(по идее этого раздела хватит для всех задач. пока не тренировался, не до этого.)

ЛЛ2-39. Движение в кулоновом поле

О радиационном трении (??)

(пока тут, потом посмотрим)

О движении в магнитном поле

$$m\dot{\mathbf{v}} = \frac{q}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

$$m\dot{\mathbf{v}}_{-\parallel} = 0$$
$$m\dot{\mathbf{v}}_{\perp} = \tfrac{q}{c}\mathbf{v}_{\perp} \times \mathbf{B}$$

Об измерении заряда по движению в полях (????)

(вроде как типичный метод???)

Электродинамика релятивистских частиц

тут про запаздывающие потенциалы

1.4.2 Radiation of free and interacting charges

Об излучении волн

$$\frac{dI_m}{d\Omega} = \frac{cr^2}{2\pi} |\boldsymbol{H}_m(\boldsymbol{r})|^2$$

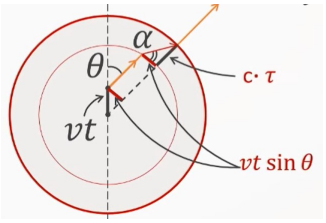
$$\frac{d\mathscr{E}^{rad}}{d\Omega} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dI(t)}{d\Omega} dt$$

$$\frac{d\mathscr{E}^{rad}}{d\Omega} = \frac{cr^2}{4\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t) \cdot \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t) dt = \frac{cr^2}{8\pi^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\boldsymbol{H}_\omega(\boldsymbol{r})|^2 \, d\omega = \frac{cr^2}{4\pi^2} \int\limits_{0}^{\infty} |\boldsymbol{H}_\omega(\boldsymbol{r})|^2 \, d\omega.$$

$$\frac{d^2 I_\omega}{d\omega d\Omega} = \frac{cr^2}{4\pi^2} |\boldsymbol{H}_\omega(\boldsymbol{r})|^2,$$

Дипольное излучение

Можно разделить на две составляющие поле от смещенного заряда и так по общей физике посчитать интенсивность: (!?!? додумаю!!!)



$$E_\perp = E_\parallel \cdot \frac{vt}{c\tau} \cdot \sin\theta$$

$$E_\parallel = \frac{q}{r^2} = \frac{q}{(ct)^2} \quad a = \frac{v}{\tau} \quad ct = r$$

$$E_\perp = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{q}{(ct)} \cdot \frac{v}{\tau} \cdot \sin\theta = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{q}{r} \cdot a \cdot \sin\theta$$

$$E(t) = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{q}{r} \cdot a \left(t - \frac{r}{c}\right) \cdot \sin\theta$$

68. Дипольное излучение при столкновениях

69. Тормозное излучение малых частот

70. Излучение при кулоновсгом взаимодействии

71. Квадрупольное и магнитно-дипольное излучения

ЛЛ2-72. Поле излучения на близких расстояниях, потенциал Герца

On Hertz potential (!???!??!?!)

(нужно будет - по Батыгину Топтыгину изучу за мб день.)

Considering cases of electric and magnetic polarization separately for simplicity, each can be defined in terms of the scalar and vector potentials which then allows for the electric and magnetic fields to be found. For cases of just electric polarization the following relations are used.

$$\phi = -\nabla \cdot \mathbf{\Pi}_e$$
$$\mathbf{A} = \mu\epsilon \frac{\partial \mathbf{\Pi}_e}{\partial t}$$

And for cases of solely magnetic polarization they are defined as:

$$\phi = 0$$
$$\mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{\Pi}_m$$

To apply these, the polarizations need to be defined so that the form of the Hertz vectors can be obtained. Considering the case of simple electric polarization provides the path to finding this form via the wave equation. Assuming the space is uniform and non-conducting, and the charge and current distributions are given by $\rho(\mathbf{r}, t), \mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$, define a vector $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{r}, t)$ such that $\rho = -\nabla \cdot \mathbf{P}$ and $\mathbf{J} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$. Using these to solve for the $\mathbf{\Pi}$ vectors is similar to how the auxiliary fields $\mathbf{D}$ and $\mathbf{H}$ can be found, however here the Hertz vectors treat the electric and magnetic polarizations as sources. The Hertz vector potentials from these sources, $\mathbf{\Pi}_e$ for the electric Hertz potential, and $\mathbf{\Pi}_m$ for the magnetic Hertz potential can be derived using the wave equation for each.

$$\nabla^2 \mathbf{\Pi}_e - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{\Pi}_e}{\partial t^2} = -\frac{\mathbf{P}}{\epsilon}$$
$$\nabla^2 \mathbf{\Pi}_m - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{\Pi}_m}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{M}$$

ЛЛ2-73. Излучение быстро движущегося заряда

ЛЛ2-74. Магнито-тормозное излучение

ЛЛ2-76. Торможение излучением в релятивистском случае

(1/2 page)

ЛЛ2-77. Спектральное разложение излучения в ультрарелятивистском случае

1.4.3 Special, well-known scatterings

ЛЛ2-78. Рассеяние свободными зарядами

ЛЛ2-79. Рассеяние волн с малыми частотами

ЛЛ2-80. Рассеяние волн с большими частотами

117. Общая теория рассеяния в изотропных средах

118. Принцип детального равновесия при рассеянии

119. Рассеяние с малым изменением частоты

120. Рэлеевское рассеяние в газах и жидкостях

121. Критическая опалесценция

1.4.4 Basic electrostatics: Dipoles, capacitors, conducting surfaces, charge systems

(по идее вообще этого раздела и хватит на все возможные вузовские задачи)

Об основных формулах электростатики

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}, \quad \mathbf{E} = \frac{q}{r^2}$$

$$\mathbf{p} = q\mathbf{l}$$

$$\mathbf{E} = \frac{3\mathbf{n}(\mathbf{n}, \mathbf{d}) - \mathbf{d}}{R^3},$$

$$\mathbf{M} = [\mathbf{p} \times \mathbf{E}]$$

$$U = -\mathbf{pE}$$

$$E = 2\pi\sigma$$

$$\mathbf{E} = -\varphi, \quad \Delta\varphi = -4\pi\rho, \quad \varphi = -\mathbf{Er}$$

$$\mathbf{p} = a^3\mathbf{E}-$$

$$P_n = \frac{\mathbf{PS}}{S} = \sigma$$

$$q_{\mathbf{mo},t} = -\oint_S \mathbf{P}d\mathbf{S}, \quad \rho_{\mathbf{tto},t} = -\operatorname{div}\mathbf{P}$$

$$\mathbf{P} = \alpha\mathbf{E}, \quad \mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E},$$
$$\varepsilon = 1 + 4\pi\alpha$$

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = 4\pi\frac{\rho}{\varepsilon},$$

$$\mathbf{E} = \frac{q}{\varepsilon r^3}\mathbf{r},$$
$$\varphi = \frac{q}{\varepsilon r}$$

Об энергии в электростатике

Чтобы сблизить два заряда q_1 и q_2 до расстояния r_{12}, нужно совершить работу против сил поля $A_{12} = q_1q_2/r_{12}$, поэтому пара зарядов обладает энергией

$$U_{12} = q_1q_2/r_{12}.$$

Если имеется система зарядов $\{q_1, q_2, \ldots, q_n\}$, то их взаимная энергия:

$$U = \sum_{\substack{i,k \\ i<k}} \frac{q_iq_k}{r_{ik}} = \frac{1}{2}\sum_{\substack{i,k \\ i\neq k}} \frac{q_iq_k}{r_{ik}}$$

О силах и втягивании объектов (???????????)

(общефиз, пока не помню это, нужно дорабатывать.)

О диполе

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{pr}}{r^3}, \qquad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\operatorname{grad}\varphi(\mathbf{r}) = \frac{3(\mathbf{pr})\mathbf{r} - \mathbf{p}r^2}{r^5}$$

Из того, что $\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|} = \frac{1}{\sqrt{(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i)^2}} \approx \frac{1}{\sqrt{r^2-2\mathbf{r}\mathbf{r}_i}} \approx \frac{1}{r}\left(1 + \frac{\mathbf{r}\mathbf{r}_i}{r^2}\right)$ (??????) одно направлено по радиусу вектору, второе - против дипольного момента. (??? вывод укажу потом)

Энергия:

$$U = -\mathbf{pE}$$

Из того, что $M = pE\sin\theta$ а работа $\delta A = -Md\theta = -pE\sin\theta d\theta$. (???)

Сила:

$$\mathbf{F} = (\mathbf{p}\nabla)\mathbf{E} \qquad \text{or } \mathbf{F} = q(\mathbf{l}\nabla)\mathbf{E}$$

$\vec{p} = q\vec{l}$. Находим ее из равнодействующей силы $\mathbf{F} = q\left(\mathbf{E}_+ - \mathbf{E}_-\right) = q\left[\mathbf{E}\left(\mathbf{r}_- + \mathbf{l}\right) - \mathbf{E}\left(\mathbf{r}_-\right)\right] \approx q(\mathbf{l}\nabla)\mathbf{E}$.

Энергия поля

$$\Delta U = \int \frac{\mathbf{E}d\mathbf{D}}{8\pi} dV,$$

$$u = \frac{\mathbf{ED}}{8\pi}$$

О потенциалах электрического поля

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi$$

Уравнение Пуассона:

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho.$$

Оно следует из того, что $\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\varphi, \operatorname{div}\mathbf{E} = 4\pi\rho$, и $\Delta = \operatorname{div}\ \operatorname{grad}$.

Системы зарядов и разложение полей

ЛЛ2-37. Электростатическая энергия зарядов

(все ниже потом выпишу, пока не так хорошо еще это усвоено, вообще, в теории поля особо подробнее в 1й части, тут только по сути. скоро дойду до этого радела!)

ЛЛ2-40. Дипольный момент

ЛЛ2-42. Система зарядов во внешнем поле

Диполи, шары, конденсаторы, диски

О типичных диполях

Сила между диполями есть

$$F = p_2 \frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{6 p_1 p_2}{d^4},$$

ведь напряженность от одного диполя вдоль его направления равна $E = \frac{2p_1}{x^3}$, а у нас как раз диполи выстраиваются параллельно друг другу.

О модификациях диполя

Если диполь упругий: дипольный момент $p = ql$ зависит от приложенного поля:

$$p = q^2 E/\kappa = \beta E.$$

Коэффициент β называется поляризуемостью молекулы.

О проводящем шаре

В ЭМ поле наводится индукционный заряд, поэтому появляется дополнительное поле (?????)

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \frac{3(\mathbf{pr})\mathbf{r} - \mathbf{p}r^2}{r^5}$$

Энергия равномерно заряженного шара:

$$U = \frac{3}{5}\frac{Q^2}{R}.$$

Получаем из переноса из бесконечности заряд порциями dq и высаживать в сферическом слое $(r, r + dr)$: $dU = \varphi dq = \frac{q(r)}{r} dq$. Поскольку объёмная плотность заряда должна быть постоянной, то $q(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho, dq = 4\pi r^2 dr \cdot \rho$, и интегрируем, подставив полный заряд $Q = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$.

Дипольные моменты типичных объектов

у шарика дипольный момент есть

$$\vec{p} = \vec{E} r^3$$

важно
(??? разберусь потом, почему)

О типичной проводящей сфере (!!!!)

(очень много задач на нее, так что пропишу!!)

О проводящих дисках

Для определения поля выделяем в диске кольцо, интегрируем по всем кольцам

$$E = \int\limits_S \frac{\sigma dS}{r^2+d^2}\cos\theta = \int\limits_{\Omega_{\text{диска}}} \sigma d\Omega = 2\pi\sigma(1-\cos\alpha) = 2\pi\sigma\left(1-\frac{d}{\sqrt{r^2+d^2}}\right)$$

(!?!? додумаю, допишу точнее! тут все просто.)

О типичных простых моделях электростатики диэлектриков

(тут подготовка к задачам Овчинкина, очень часто важно эти свойства понимать.)

О шарах

О цилиндрических катушках

О плоскостях

О шарах

Для равномерно заряженного по объему шара (с плотностью ρ) радиусом a:

$$\varphi = \frac{4}{3}\frac{\pi\rho a^3}{\varepsilon r}; \qquad \text{(вне)}$$

$$\varphi = 2\pi\rho\frac{3a^2-r^2}{3\varepsilon} \qquad \text{(внутри)}$$

(?? строчка - почему???)

О нитях

О цилиндрах

О задачах на теорему Гаусса

О тороидальных катушках

(?? хз)

О методах определения емкости

Примеры типичных емкостей

О типичных конденсаторах (!!!)

(много на них задач, так что про них раздел)

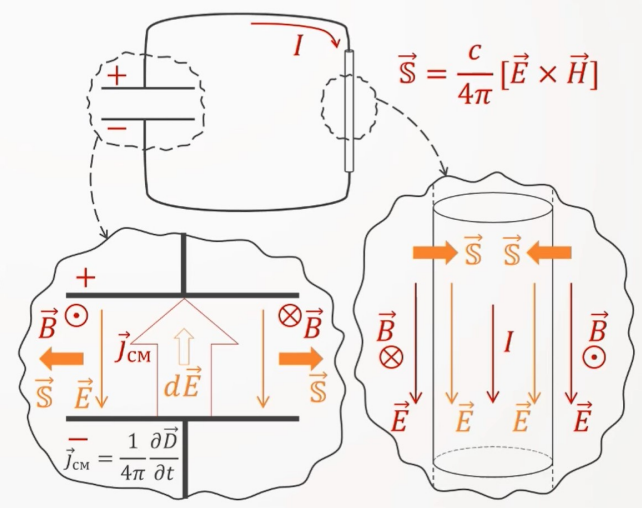
О добавлениях в конденсатор чего-то

Если конденсатор отключен от источника, то просто два раза пишем теорему Гаусса для обоих случаев, и если какой-то есть диэлектрик, то там $E = \varepsilon E_0$.

Если конденсатор подключен к источнику, то потенциал всегда одинков (????)

О разрядке конденсатора в резистор через воздух (???)

(допишу потом.)



(??? я так и не понял, почему вся энергия у нас перейдет в резистор? почему не будет такого, что большая часть энергии излучится в пространство и лишь малая часть снова войдет в резистор через пространство????)

Об энергии электростатических систем

(потом задумаюсь, на самом ли деле такие формулы и откуда они???, пока пофиг)

$$C = \frac{\varepsilon S}{4\pi d}$$

(??? строчка про ввод!)

$$U = \frac{q^2}{2C} = \frac{q\varphi}{2} = \frac{1}{2}C\varphi^2$$

(!! тут абзац важной мысли про то, что из бесконечности двигаем заряд, поэтому такая формула и получается.)

$$U = \frac{1}{2}\sum q_i\varphi_i,$$

$$U = \frac{1}{2}\int\limits_V \rho(\mathbf{r})\varphi(\mathbf{r})dV + \frac{1}{2}\int\limits_S \sigma(\mathbf{r})\varphi(\mathbf{r})dS$$

$$dA = dU = \varphi dq$$

1.4.5 Electrostatics of conductors

ЛЛ8.1 Электростатическое поле проводников

Распределение зарядов по поверхности проводника:

$$\sigma = \frac{1}{4\pi}E_n = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\varphi}{\partial n}$$

Полный заряд проводника:

$$e = -\frac{1}{4\pi}\oint \frac{\partial\varphi}{\partial n}df$$

$\varphi(x, y, z)$ может достигать максимального или минимального значения лишь на границах области поля. (?? додумаю, почему это важно?)

ЛЛ8.2. Энергия электростатического поля проводников

$$\mathscr{U} = \frac{1}{8\pi}\int \mathbf{E}^2 dV$$

$\mathscr{U} = -\frac{1}{8\pi}\int \mathbf{E}\,\mathrm{grad}\,\varphi dV = -\frac{1}{8\pi}\int \mathrm{div}(\varphi\mathbf{E})dV + \frac{1}{8\pi}\int \varphi\,\mathrm{div}\,\mathbf{E}dV.$
$\mathscr{U} = \frac{1}{8\pi}\sum\limits_a \oint \varphi E_n df = \frac{1}{8\pi}\sum\limits_a \varphi_a \oint E_n df$

$$\mathscr{U} = \frac{1}{2}\sum_a e_a\varphi_a$$

$$e_a = \sum_b C_{ab}\varphi_b$$

При бесконечно малом изменении их зарядов или потенциалов:

$$\delta\mathscr{U} = \sum_a \varphi_a \delta e_a$$

ибо $\delta\mathscr{U} = \frac{1}{4\pi}\int \mathbf{E}\delta\mathbf{E}dV$ (?? и преобразуем это)
$C_{ab}^{-1} = C_{ba}^{-1}$
Энергия $\mathscr{U}$ может быть представлена в виде квадратичной формы потенциалов или зарядов:

$$\mathscr{U} = \frac{1}{2}\sum_{a,b} C_{ab}\varphi_a\varphi_b = \frac{1}{2}\sum_{a,b} C_{ab}^{-1} e_a e_b$$

Все коэффициенты емкости положительны:

$$C_{aa} > 0$$

(а также и $C_{aa}^{-1} > 0$)[1]. Напротив, все коэффициенты электростатической индукции отрицательны:

$$C_{ab} < 0 \quad (a \neq b).$$

Энергия истинного электростатического поля минимальна1) по сравнению с энергией полей, которые были бы созданы всяким другим распределением зарядов по объему проводников (теорема Томсона).

под влиянием внешнего поля проводник приобретает дипольный электрический момент, который мы обозначим через $\mathscr{P}$. Потенциал поля электрического диполя на большом расстоянии $\mathbf{r}$ от него есть, как известно, $\varphi = \mathscr{P}\mathbf{r}/r^3$. Поэтому

$$\mathscr{U} = \frac{e}{2r^3}\mathscr{P}\mathbf{r}.$$

Но $-e\mathbf{r}/r^3$ является в то же время напряженностью $\mathfrak{C}$ поля, создаваемого зарядом e. Таким образом,

$$\mathscr{U} = -\frac{1}{2}\mathscr{P}\mathfrak{C}.$$

В силу линейности всех уравнений поля очевидно, что компоненты дипольного момента $\mathscr{P}$ являются линейными функциями компонент напряженности $\mathfrak{C}$. Козффициенты пропорциональности между $\mathscr{P}$ и $\mathfrak{C}$ имеют размерность куба длины и поэтому пропорциональны объему проводника:

$$\mathscr{P}_i = V\alpha_{ik}\mathfrak{C}_k,$$

где коэффициенты α_{ik} зависят только от формы тела. Совокупность величин $V\alpha_{ik}$ составляет тензор поляризуемости тела.

$$\mathscr{U} = -\frac{1}{2}V\alpha_{ik}\mathfrak{C}_i\mathfrak{C}_k$$

(?? выше уже писал про это?? соединю в одну теорию!)

ЛЛ8.3. О методе изображений для сложных задач

(выше в разделе - для простых, общефизных)

Пусть имеется система зарядов:

$$\{q\} + \{q'\}, \{q\} = \{q_1, q_2, \ldots, q_n\}, \{q'\} = \{q'_1, q'_2, \ldots, q'_m\}$$

Проведём мысленно эквипотенциальную поверхность S (на которой потенциал принимает значение $\varphi = \varphi_0$), разделяющую пространство на две области: I и II. В этих областях находятся соответственно группы зарядов $\{q\}$ и $\{q'\}$.

Потенциал поля заряда e и его «изображения» e' равен

$$\varphi = e\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right),$$

r и r' - расстояния точки наблюдения от зарядов e и e'. На граничной плоскости $r = r'$ и потенциал имеет постоянное значение $\varphi = 0$, так что необходимое граничное условие действительно выполняется и (3.1) дает решение поставленной задачи. Отметим, что заряд e притягивается к проводнику с силой $e^2/(2a)^2$ (сила изображения), а энергия взаимодействия равна $-e^2/(4a)$.

Распределение на граничной плоскости поверхностных зарядов, индуцированных точечным зарядом e, дается формулой

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\varphi}{\partial n}\bigg|_{r=r'} = -\frac{e}{2\pi}\frac{a}{r^3},$$

a - расстояние от заряда до плоскости. Легко убедиться в том, что полный заряд на этой плоскости равен

$$\int \sigma df = -e,$$

ЛЛ8.3. О методе инверсии для сложных задач

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\Delta_\Omega\varphi = 0$$

$$r = \frac{R^2}{r'} \qquad\qquad \varphi = \frac{r'}{R}\varphi'$$

(додумаю потом когда-то его)

ЛЛ8.3. О методе конформного отображения для электростатики проводников

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} - i\frac{\partial A}{\partial x} = -E_x + iE_y. \qquad \text{комплексн. потенц.}$$

Силовые линии поля определяются уравнением

$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y}.$$

$$\int E_n dl = \int \frac{\partial A}{\partial l} dl = A_2 - A_1$$

A_2 и A_1 - значения A на обоих концах отрезка. В частности, поток электрического поля через замкнутый контур равен $4\pi e$, e - полный заряд, охватываемый этим контуром (отнесенный к единице длины проводников вдоль оси z).

$$e = \frac{1}{4\pi}\Delta A,$$

$$w = -2e \ln z = -2e \ln r - 2ie\theta.$$

Если же заряженная нить проходит не через начало координат, а через точку (x_0, y_0), то комплексный потенциал

$$w = -2e \ln (z - z_0),$$

$z_0 = x_0 + iy_0$.

Об энергетическом методе вычисления сил

$$\Delta F = \frac{\mathbf{ED}}{8\pi} V$$

определяет свободную энергию ΔF в объёме V, связанную с полем.

1) Пусть на проводниках поддерживаются постоянными заряды: q const, то есть нет внешних источников энергии. Тогда работа сил поля происходит за счёт энергии поля:

$$(\delta A)_{\text{эл}} = \mathbf{f}\delta\mathbf{r} = -(dF)_{q,T}.$$

Рассмотрим в качестве примера конденсатор. Изменение свободной энергии связано с изменением ёмкости:

$$F = \frac{q^2}{2C}, (dF)_{q,T} = \frac{q^2}{2}\delta\left(\frac{1}{C}\right) = -\frac{q^2}{2C^2}\delta C = -\frac{1}{2}\varphi^2 \delta C.$$

Учтено, что $\varphi = q/C$. Из (1.8.15), (1.8.16) следует, что

$$(\delta A)_{\text{эл}} = \frac{1}{2}\varphi^2 \delta C.$$

2) Пусть теперь на проводниках поддерживаются постоянными потенциаль: $\varphi = \text{const}$. С этой целью в систему включены батареи ЭДС, поставляющие заряды и расходующие энергию на совершение работы. Рассмотрим конденсатор в цепи, содержащей ЭДС (рис. 1.8.2). В этом случае для свободной энергии имеем выражение

$$F = \frac{C\varphi^2}{2} \Rightarrow (dF)_{\varphi,T} = \frac{\varphi^2}{2}\delta C$$

Этот метод основной для многих задач про силы: найти энергию от расстояния, а по ней силу.

(ну там задачи на это есть, дойду - впишу.)

ЛЛ2-41. Мультипольные моменты

(2/3 страницы максимум идей и указаний про применения.)

О типичных моделях сложной электростатики проводников

О заряде вблизи шара

$$l' = \frac{R^2}{l}, \quad e' = \frac{eR}{l}.$$

Потенциал этого поля

$$\varphi = \frac{e}{r} - \frac{eR}{lr'}$$

(см. рис. 1). На поверхности шара индуцируется при этом отличный от нуля полный заряд, равный $-e'$. Энергия взаимодействия заряда с шаром равна

$$\mathscr{U} = -\frac{ee'}{2\,(l-l')} = -\frac{e^2R}{2\,(l^2-R^2)},$$

и заряд притягивается к шару с силой

$$F = -\frac{\partial \mathscr{U}}{\partial l} = -\frac{e^2lR}{\left(l^2-R^2\right)^2}.$$

(потом решу, если будет актуально, типичная задача)

О поле вблизи незаряженного шара в поле

(интересная задача, ЛЛ8 среди задач)

$$\varphi_1 = -\text{ const }\cdot \mathfrak{C}\nabla\frac{1}{r} = \text{ const }\cdot\frac{\mathfrak{C}\mathbf{r}}{r^3}$$

(начало координат выбираем в центре шара). На поверхности шара φ должно быть постоянным; отсюда находим $\text{const} = R^3$, так что

$$\varphi = -\mathfrak{C}r\cos\theta\left(1-\frac{R^3}{r^3}\right)$$

(аналогичные не пишу, каталог задач на них)

О проводящем клине

(интересная техническая задача, когда-то разберу, но там большие формулы, так что мб текстом укажу суть и итоговый ответ напишу)

Потенциал поля дается формулой

$$\varphi = \frac{e}{\alpha\sqrt{2ar}}\int\limits_{\eta}^{\infty}\left[\frac{\operatorname{sh}\left(\frac{\pi\zeta}{\alpha}\right)}{\operatorname{ch}\frac{\pi\zeta}{\alpha}-\cos\frac{\pi(\theta-\gamma)}{\alpha}}-\frac{\operatorname{sh}\left(\frac{\pi\zeta}{\alpha}\right)}{\operatorname{ch}\frac{\pi\zeta}{\alpha}-\cos\frac{\pi(\theta+\gamma)}{\alpha}}\right]\frac{d\zeta}{\sqrt{\operatorname{ch}\zeta-\operatorname{ch}\eta}},$$

$$\operatorname{ch}\eta = \frac{a^2+r^2+z^2}{2ar}, \quad \eta > 0;$$

(аналогичные не пишу, на них только указания, в каталоге они решены)

ЛЛ8.4. Проводящий эллипсоид

(??? в чем суть этой модели??? к другим координатам переходим и все, да???)
$\frac{x^2}{a^2+u}+\frac{y^2}{b^2+u}+\frac{z^2}{c^2+u}=1 \quad (a>b>c)$.
Координаты ξ,η,φ называют сплюснутыми сфероидалъными координатами

$$z=\pm\left[\frac{(\xi+c^2)(\eta+c^2)}{c^2-a^2}\right]^{1/2}, \quad \rho=\left[\frac{(\xi+a^2)(\eta+a^2)}{a^2-c^2}\right]^{1/2}$$

(дальше всякие технические преобразования, напишу потом словами суть)
Распределение плотности заряда по поверхности эллипсоида определяется нормальной производной потенциала

$$\sigma=-\frac{1}{4\pi}\frac{\partial\varphi}{\partial n}\bigg|_{\xi=0}=-\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{h_1}\frac{d\varphi}{d\xi}\right)_{\xi=0}=\frac{e}{4\pi\sqrt{\eta\zeta}}.$$

С помощью уравнений (4.4) легко убедиться в том, что при $\xi=0$

$$\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}=\frac{\eta\zeta}{a^2b^2c^2}.$$

Поэтому

$$\sigma=\frac{e}{4\pi abc}\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)^{-1/2}.$$

(потом доучу, пока не до этой модели. просто одна модель, где куча преобразований. словами напишу суть потом.)

ЛЛ8.5 Силы, действующие на проводник

Плотность потока импульса в электрическом поле в пустоте определяется известным максвелловским тензором напряжений:

$$-\sigma_{ik}=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{E^2}{2}\delta_{ik}-E_iE_k\right).$$

$$\mathbf{F}_{\text{пов}}=\mathbf{n}\frac{E^2}{8\pi},$$

или, вводя поверхностную плотность зарядов σ,

$$\mathbf{F}_{\text{пов}}=2\pi\sigma^2\mathbf{n}=\frac{1}{2}\sigma\mathbf{E}.$$

$$F_q=-\left(\frac{\partial\mathscr{U}}{\partial q}\right)_e$$

Аналогично, проекция на какую-либо ось полного действующего на проводник момента сил равна

$$K=-\left(\frac{\partial\mathscr{U}}{\partial\psi}\right)_e,$$

ψ - угол поворота тела как целого вокруг данной оси.
Для системы проводников, потенциалы которых поддерживаются постоянными, роль механической энергии играет не $\mathscr{U}$, а величина

$$\widetilde{\mathscr{U}}=\mathscr{U}-\sum_a e_a\varphi_a.$$

$$\widetilde{\mathscr{U}} = -\mathscr{U}.$$

$$F_q = -\left(\frac{\partial \widetilde{\mathscr{U}}}{\partial q}\right)_{\varphi} = \left(\frac{\partial \mathscr{U}}{\partial q}\right)_{\varphi}.$$

$\delta\mathfrak{C} = -[\delta\boldsymbol{\psi}\cdot\mathfrak{C}]$,

$$\delta\mathscr{U} = \frac{\partial \mathscr{U}}{\partial \mathfrak{C}}\delta\mathfrak{C} = -\delta\psi\left[\mathfrak{C}\frac{\partial \mathscr{U}}{\partial \mathfrak{C}}\right].$$

$\partial\mathscr{U}/\partial\mathfrak{C} = -\mathscr{P}$, $\delta\mathscr{U} = -[\mathscr{P}\mathfrak{C}]\delta\boldsymbol{\psi}$,

$$\mathbf{K} = [\mathscr{P}\mathfrak{C}]$$

Пусть деформирующее поле создается самим заряженным проводником, тогда

$$\mathscr{U} = e^2/(2C)$$

$$\Delta P = -\frac{e^2}{2}\frac{\partial}{\partial V}\left(\frac{1}{C}\right).$$

При заданной форме тела его емкость (как величина, имеющая размерность длины) пропорциональна его линейным размерам, т. е. пропорциональна $V^{1/3}$. Поэтому находим

$$\Delta P = \frac{e^2}{6CV} = \frac{e\varphi}{6V}.$$

(??!!)

1.4.6 Electrostatics of dielectrics

Электростатическое поле в диэлектриках

$$\bar{\rho} = -\operatorname{div}\mathbf{P}$$

$$\int \bar{\rho}dV = -\int \operatorname{div}\mathbf{P}dV = -\oint \mathbf{P}d\mathbf{f} = 0$$

$$\int \mathbf{r}\bar{\rho}dV = \int \mathbf{P}dV$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = 4\pi\rho_{\text{CT}}$$

сти составляющей индукции:

$$D_{n1} = D_{n2}.$$

Действительно, скачок нормальной составляющей $D_n = D_z$ означал бы обращение производной $\partial D_z/\partial z$ (а с нею и $\operatorname{div}\mathbf{D}$) в бесконечность.

На границе между диэлектриком и проводником $\mathbf{E}_t = 0$, а условие для нормальной компоненты получается из (6.8):

$$\mathbf{E}_t = 0, \quad D_n = 4\pi\sigma_{\text{ст}},$$

$\sigma_{\text{ст}}$ - плотность зарядов на поверхности проводника (ср.

Диэлектрическая проницаемость

$$\mathbf{P} = \varkappa \mathbf{E} \equiv \frac{\varepsilon - 1}{4\pi}\mathbf{E}$$

Величина $\varkappa$ называется коэффициентом поляризуемости вещества (или его дизлектрической восприимчивостъю).

$$\bar{\rho} = -\operatorname{div}\mathbf{P} = -\operatorname{div}\frac{\varepsilon-1}{4\pi\varepsilon}\mathbf{D} = -\frac{\mathbf{D}}{4\pi}\operatorname{grad}\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon} = -\frac{\mathbf{E}}{4\pi\varepsilon}\nabla\varepsilon$$

$$D_n = -\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 4\pi\sigma.$$

(?? абзац про то, что делать если граница сред??? задача там есть, додумаю, есть итак пара идей)

Диэлектрический эллипсоид

Диэлектрический шар во внешнем поле $\mathfrak{E}$:

$$\varphi^{(e)} = -\mathfrak{E}\mathfrak{r} + A\mathfrak{E}\frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

$$\varphi^{(i)} = -B\mathfrak{E}\mathfrak{r};$$

$\mathbf{E}^{(i)} = B\mathfrak{E}$,

$$E^{(i)} = \mathfrak{E}\left(1 - \frac{A}{R^3}\right) \quad \text{(непрер потенциала)}$$

$$D^{(i)} = \varepsilon^{(e)}\mathfrak{E}\left(1 + \frac{2A}{R^3}\right).$$

$$D^{(i)} = \varepsilon^{(e)}\mathfrak{E}\left(1 + \frac{2A}{R^3}\right) \quad \text{(непрер норм инд)}$$

$$\frac{1}{3}\left(\mathbf{D}^{(i)} + 2\varepsilon^{(e)}\mathbf{E}^{(i)}\right) = \varepsilon^{(e)}\mathfrak{E}$$

$\mathbf{D}^{(i)} = \varepsilon^{(i)}\mathbf{E}^{(i)}$,

$$\mathbf{E}^{(i)} = \frac{3\varepsilon^{(e)}}{2\varepsilon^{(e)} + \varepsilon^{(i)}}\mathfrak{E}.$$

Диэлектрический цилиндр во внешнем поле $\mathfrak{E}$:

$$\frac{1}{2}\left(\mathbf{D}^{(i)} + \varepsilon^{(e)}\mathbf{E}^{(i)}\right) = \varepsilon^{(e)}\mathfrak{E}$$

$$\mathbf{E}^{(i)} = \frac{2\varepsilon^{(e)}}{\varepsilon^{(i)} + \varepsilon^{(e)}}\mathfrak{E}$$

Диэлектрический эллипсоид во внешнем поле $\mathfrak{E}$:
$\varphi'_e = \varphi_0 F(\xi)$, $F(\xi) = A\int\limits_{\xi}^{\infty}\frac{d\xi}{(\xi+a^2)R_\xi}$,

$$\varphi_i = B\varphi_0$$

$$aE_x^{(i)} + bD_x^{(i)} = \mathfrak{E}_x$$

$$\mathbf{D}^{(i)} = 4\pi\mathbf{P} = \frac{4\pi}{V}\mathscr{P}$$

$$D_x^{(i)} = \frac{\mathfrak{C}_x}{n^{(x)}}$$

$b = n^{(x)}$, $a = 1 - n^{(x)}$.

$$\left(1 - n^{(x)}\right) E_x^{(i)} + n^{(x)} D_x^{(i)} = \mathfrak{C}_x,$$

или

$$E_x^{(i)} = \mathfrak{C}_x - 4\pi n^{(x)} P_x.$$

$4\pi n^{(x)} P_x$ - "деполяризующиее поле".

$$E_i^{(i)} = n_{ik}\left(D_k^{(i)} - E_k^{(i)}\right) = \mathfrak{C}_i.$$

Если диэлектрическая проницаемость среды $\neq 1$, то заменяем $\varepsilon^{(i)}$ на $\varepsilon^{(i)}/\varepsilon^{(e)}$,

$$\left(1 - n^{(x)}\right) \varepsilon^{(e)} E_x^{(i)} + n^{(x)} D_x^{(i)} = \varepsilon^{(e)} \mathfrak{C}_x.$$

(?? тут обзор задач про это!)

Диэлектрическая проницаемость смеси

Если вещество представляет собой мелкодисперсную смесь (эмульсия, порошкообразная смесь и т. п.), то можно рассматривать электрическое поле, усредненное по объемам, большим по сравнению с масштабами неоднородностей. По отношению к такому среднему полю смесь является однородной и изотропной средой и как таковая может характеризоваться определенным эффективным значением диэлектрической проницаемости $\varepsilon_{\text{см}}$.

$$\overline{\mathbf{D}} = \varepsilon_{\text{СМ}} \overline{\mathbf{E}}.$$

$$\overline{\mathbf{D}} = \overline{(\bar{\varepsilon} + \delta\varepsilon)(\overline{\mathbf{E}} + \delta\mathbf{E})} = \bar{\varepsilon}\overline{\mathbf{E}} + \overline{\delta\varepsilon\delta\mathbf{E}}$$

$\operatorname{div} \mathbf{D} = 0$,

$$\operatorname{div}(\bar{\varepsilon} + \delta\varepsilon)(\overline{\mathbf{E}} + \delta\mathbf{E}) = \bar{\varepsilon} \operatorname{div} \delta\mathbf{E} + \overline{\mathbf{E}} \nabla \delta\varepsilon = 0.$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\overline{\delta E_x} = \frac{\partial}{\partial y}\overline{\delta E_y} = \frac{\partial}{\partial z}\overline{\delta E_z} = \frac{1}{3} \operatorname{div} \overline{\delta\mathbf{E}}.$$

Если $\overline{\mathbf{E}} \| Ox$, то

$$3\bar{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial x}\overline{\delta E_x} = -\overline{E_x}\frac{\partial \delta\varepsilon}{\partial x},$$

$$\overline{\delta E_x} = -\frac{\overline{E_x}}{3\bar{\varepsilon}}\delta\varepsilon.$$

$$\varepsilon_{\text{см}} = \varepsilon_1 + c\frac{3(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)\varepsilon_1}{\varepsilon_2 + 2\varepsilon_1}.$$

$$\overline{\varepsilon^{1/3}} = \overline{(\bar{\varepsilon} + \delta\varepsilon)^{1/3}} = \bar{\varepsilon}^{1/3}\left(1 - \frac{\overline{(\delta\varepsilon)^2}}{9\bar{\varepsilon}^2}\right)$$

$$\varepsilon_{\text{СМ}}^{1/3} = \overline{\varepsilon^{1/3}}$$

$$\frac{1}{V}\int (\mathbf{D}-\varepsilon_1\mathbf{E})\,dV \equiv \overline{\mathbf{D}}-\varepsilon_1\overline{\mathbf{E}}$$

$$\varepsilon_{\text{CM}} = \varepsilon_1 + c\frac{3(\varepsilon_2-\varepsilon_1)\varepsilon_1}{\varepsilon_2+2\varepsilon_1}$$

(допишу словами основные идеи!)

Полная свободная энергия диэлектрического тела

Полная свободная энергия, из которой исключена энергия поля:

$$\mathscr{F} \overset{\text{here}}{:=} \int\left(F-\frac{\mathfrak{C}^2}{8\pi}\right)dV$$

F - плотность свободной энергии, $\mathfrak{C}$ - напряженность тела. Если явно посчитать, делая умные преобразования, то

$$\delta\mathscr{F} = -\frac{1}{4\pi}\int(\mathbf{D}-\mathbf{E})\delta\mathbb{C}dV = -\int\mathbf{P}\delta\mathfrak{C}dV$$

$$\delta\mathscr{F} = -\delta\mathfrak{C}\int\mathbf{P}dV = -\mathscr{P}\delta\mathfrak{C}, \qquad \text{(однор. } \mathfrak{C}\text{)}$$

$\mathscr{P}$ - полный электрический дипольный момент тела.

$$d\mathscr{F} = -\mathscr{S}dT - \mathscr{P}d\mathfrak{C}.$$

$$\mathscr{P} = -\left(\frac{\partial\mathscr{F}}{\partial\mathfrak{C}}\right)_T.$$

$\overline{\frac{\partial\widehat{\mathscr{H}}}{\partial\lambda}} = \left(\frac{\partial\mathscr{F}}{\partial\lambda}\right)_T$, $-\mathfrak{C}\mathscr{P}\subset\widehat{\mathscr{H}}$, $\lambda\equiv\mathfrak{C}$.

$\mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E}\Rightarrow$

$$\mathscr{F}-\mathscr{F}_0 = \int\frac{\mathbf{ED}-\mathfrak{C}^2}{8\pi}dV.$$

$$\mathscr{F}-\mathscr{F}_0 = \frac{1}{8\pi}\int(\mathbf{E}+\mathfrak{C})(\mathbf{D}-\mathfrak{C})dV - \frac{1}{8\pi}\int\mathfrak{C}(\mathbf{D}-\mathbf{E})dV$$

(есть и другие тут формулы для свободной энергии, потом добавлю мб.)

В случае $\varepsilon\approx 1$, $\varkappa=\frac{\varepsilon-1}{4\pi}$,

$$\mathbf{P} = \varkappa\mathbf{E}\approx\varkappa\mathfrak{C}.$$

$$\mathscr{F}-\mathscr{F}_0 = -\frac{\varkappa}{2}\int\limits_{\text{bulk}}\mathfrak{C}^2dV$$

однородном поле дипольный момент $\mathscr{P}=V\varkappa\mathfrak{C}$,

$$\mathscr{F}-\mathscr{F}_0 = -\frac{\varkappa V}{2}\mathfrak{C}^2$$

В общем случае произвольной $\mathbf{D}(\mathbf{E})$:

$$\mathscr{F} = \int\left(F-\frac{\mathfrak{C}^2}{8\pi}\right)dV = \int\left[F-\frac{\mathbf{ED}}{8\pi}-\frac{1}{2}\mathscr{P}\mathfrak{C}\right]dV$$

(добавлю этот же раздел в статфиз!!!)

1.4.7 Magnetostatics

Основные законы магнитостатики

Закон Био-Савара-Лапласа

$$d\mathbf{B} = \frac{1}{c}\frac{\mathbf{j}\times\mathbf{r}}{r^3}dV$$

а поле линейного элемента тока $Jd\mathbf{l}$ даётся выражением

$$d\mathbf{B} = \frac{J}{c}\frac{d\mathbf{l}\times\mathbf{r}}{r^3}.$$

То есть у нас $B \sim J/c$ и также как и в кулоне $B \sim 1/r$, но направленно перпендикулярно току. Для приложений всегда интегрируем $\mathbf{j}$ по областям с токами. (??? радиус же из точки, где ток течет берется??)

Магнитное поле магнитного диполя:

$$\mathbf{B} = \frac{3(\mathfrak{M}\mathbf{r})}{r^5}\mathbf{r} - \frac{\mathfrak{M}}{r^3}.$$

(??? строчка про вывод!)

О типичных конфигурациях магнитостатики

(!! тут указания про соленоиды, что типичная модель!)

Термодинамические соотношения в магнитном поле

Полная свободная энергия магнетика:
(!?!?)

Энергия системы токов

Самоиндукция линейных проводников

Силы в магнитном поле

Гиромагнитные явления

Об определении магнитного поля от токов

(тут тренироваться нужно точно!!!)

О природе магнетизма в целом

О силах от магнетика(?)

(пока не думал про это, не понимаю еще)

магнитная энергия тока

Пусть если есть ток, какая энергия будет у МП вокруг него?

Итоговые формулы энергии

$$\Delta A = F_{\mathbf{A}} dx = \left(\frac{1}{c} JB\right) dx = \frac{1}{c} Jd\Phi,$$

$d\Phi = BdS, dS = ldx.$

$$\Delta A = J\left(-\mathcal{E}_{\text{инд}}\right) dt = J\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt}dt = \frac{1}{c}Jd\Phi$$

$$U = \int_0^J \Delta A = \frac{LJ^2}{2c^2} = \frac{J\Phi}{2c} = \frac{\Phi^2}{2L}$$

пример: энергия магнитного поля в соленоиде

$$H = \frac{4\pi}{c} i = \frac{4\pi}{c}\frac{NJ}{l}$$

$$dU = \frac{1}{c} J \cdot d\Phi = \frac{1}{c}\frac{cl}{4\pi} H \cdot SdB = \frac{HdB}{4\pi} V$$

$$U = \frac{\mu H^2}{8\pi} V = \frac{BH}{8\pi} V = \frac{B^2}{8\pi\mu} V$$

$$u = \frac{U}{V} = \frac{B^2}{8\pi}$$

пример: энергия системы токов

(кирич стр 158)

$$dU = dU_{\mathbf{c}} + dU_{\mathbf{B}}, dU_{\mathbf{c}} = \frac{1}{c^2}\sum_{i=1}^{n} L_{ii} J_i dJ_i, dU_{\mathbf{B}} = \frac{1}{c^2}\sum_{\substack{i,k=1;i \\ i\neq k}}^{n} L_{ik} J_i dJ_k$$

$$U_{\mathbf{c}} = \frac{1}{2c^2}\sum_{i=1}^{n} L_{ii} J_i^2$$

$$dU_{\mathbf{B}} = \frac{1}{c^2}\left[\left(L_{12}J_1 dJ_2 + L_{21}J_2 dJ_1\right) + \left(L_{13}J_1 dJ_3 + L_{31}J_3 dJ_1\right) + \left(L_{23}J_2 dJ_3 + I_{32}J_3 dJ_2\right) + \ldots\right]$$

(ничего не помню, переучить нужно)

ЛЛ8.30 Магнитное поле постоянных токов

(соединю это потом с тем, что выше, тут типичная теория)

$$\overline{\rho\mathbf{v}} = c\,\mathrm{rot}\,\mathbf{M} + \mathbf{j}$$

$$\mathrm{div}\,\mathbf{B} = 0,$$
$$\mathrm{rot}\,\mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}.$$

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0.$$

Уравнение для A получается подстановкой (30.3) в (30.2). При линейной связи $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ имеем

$$\operatorname{rot}\left(\frac{1}{\mu}\operatorname{rot}\mathbf{A}\right) = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}.$$

В таком виде это уравнение справедливо для любой неоднородной среды.

В однородной среде $\mu = \text{const}$, и поскольку $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{A} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{A} - \Delta\mathbf{A} = -\Delta\mathbf{A}$, то уравнение (30.5) приводится к виду

$$\Delta\mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c}\mu\mathbf{j}.$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{H} = \frac{1}{c}\int \frac{[\mathbf{jR}]}{R^3}dV$$

О шаблонах для магнитостатики (???)

О магнитном моменте (!!!)

(очень важно понимать это.)

Об определении магнитного поля от токов

Об индуктивности

О взаимной индукции

О магнитной энергии

ЛЛ2-43. Постоянное магнитное поле

ЛЛ2-44. Магнитный момент

ЛЛ2-45. Теорема Лармора

Суть теоремы о циркулцяии МП

хз

Электромагнитное поле с точки зрения теоретический физики

(тут формулы теории поля)

Об основных теоремах матфизики для электростатики (!?)

Теорема 2. Решение краевой задачи для уравнения Пуассона $\Delta\varphi = -4\pi\rho$, $\mathbf{r} \in D$; $\varphi|_{\mathbf{r}\in\Gamma} = f(\mathbf{r})$ единственно.

Доказывается из предположении обратного и разности двух решений (???).

1.4.8 Special dielectrics

Пьезоэлектрики

Сегнетоэлектрики

Несобственные сегнетоэлектрики

О ферроэлектриках (??)

О пьезоэлектриках

Пьезоэлектрики — диэлектрики, в которых наблюдается пьезоэффект, то есть те, которые могут либо под действием деформации индуцировать электрический заряд на своей поверхности (прямой пьезоэффект), либо под влиянием внешнего электрического поля деформироваться (обратный пьезоэффект).

О сегнетоэлектриках

Сегнетоэлектрик — материал, обладающий спонтанной поляризацией, ориентацию которой можно изменить посредством внешнего электрического поля.

Такие вещества обладают сегнетоэлектрическим гистерезисом, когда поляризация материала зависит неоднозначно от внешнего электрического поля.

(не понял)

1.4.9 Currents in scope of microscopic kinetics: basic models

(потом поставлю в другие места, пока тут. Курс ПТФ про электроны в металлах, это же в конд средах и почти это же в кинетике, думаю, очень типичные темы. какая-то тема будет важной особо - выделю в отдельный раздел!)

Электрон-электронное рассеяние

A

Без процессов переброса

B

Роль процессов переброса

V

Электрон-фононное рассеяние

VI

Температурная зависимость проводимости и теплопроводности

VII

Кин. уравнение при наличии магнитного поля

$$\frac{\partial f}{\partial t_1}\dot{t}_1 + \frac{\partial f}{\partial \varepsilon}\dot{\varepsilon} + \frac{\partial f}{\partial p_z}\dot{p}_z = I_{\text{ст}}(f)$$
$$\dot{\varepsilon} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial \mathbf{p}}\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{v}\frac{d\mathbf{p}}{dt}$$
$$\dot{\mathbf{p}} = \frac{e}{c}[\mathbf{v}\times\mathbf{H}] + e\mathbf{E}$$
$$\dot{\varepsilon} = e\mathbf{v}\mathbf{E}$$
$$\dot{p}_z = eE_z$$
$$-\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}\frac{\partial \psi}{\partial t_1} + \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}e\mathbf{v}\mathbf{E} = I_{\text{ст}}\,(f),$$

откуда

$$\frac{\partial \psi}{\partial t_1} - I_1(\psi) = e\mathbf{v}\mathbf{E}, \qquad I_1(\psi) := \frac{I_{\text{ст}}\,\left(f_0 - \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}\psi\right)}{-\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon}}.$$

1.4.10 Plasma

Основные формулы (??)

О пинч эффекте (??)

1.4.11 Electric circuits: basics

Правила Кирхгофа

1. Для любого узла сумма токов, входящих в узел (с учётом знаков), равна нулю:

$$\sum_k J_k = 0.$$

Это правило выражает закон сохранения заряда: заряды в узлах не могут рождаться или исчезать.

2. Для любого замкнутого участка цепи выполняется равенство

$$\sum_i \mathcal{E}_i = \sum_k J_k R_k$$

Большинство задач на цепи решаются с использованием в том числе правила Кирхгофа.

(??)

О шаблонах теории цепей (???)

О методе векторных диаграмм (!?!?)

проработаем его.

RLC-контур

тоже такие простые задачи часто есть.

Типичные свойства RLC-контура

График напряжения на конденсаторе от частоты источника при постоянном напряжении источника

Пик такой вогнутый, где слева ниже, чем справа
(вставлю потом картинку)

Колебательные характеристики контуров

их тоже много.

О другом про простые цепи

Об автоколебаниях в цепях (!?!?)

Цепи с входным и выходным напряжением (!!!!!)

Методы работы с цепями с входным и выходным напряжением

методы тут особенные, так что подумаем про них тоже.

Свойства объектов, к которым он применим

интересно, где еще можно его применить?

Обзор применений

вот кст нужен нередко, не пойму, насколько часто.

Добротность

Основные формулы

$$Q := \frac{U_{\text{мах}}}{U_{\text{и}}} = \frac{f_0}{2\Delta f}$$

То ест это отношение энергии к потерям за период (???)
там отношение энергии к потерям за период
по графику: это отношение максимальной энергии к жнергии источника
или резонансной частоты к ширине резонансного пика.
(поч кст? но пока просто принимаю)

Добротность: места применения

хз, где она нужна?

Спектральный анализ электрических сигналов.

Модуляция.

Параметрические колебания.

Автоколебания.

Импеданс

суть импеданса

Электрический импеданс — комплексное сопротивление между двумя узлами цепи или двухполюсника для гармонического сигнала.

Основные формулы импеданса

$$Z_c = \frac{1}{i\omega C}$$

Обзор применений импеданса

давно был вопрос, где же этот импеданс нужен??
потренируюсь - пойму.

О токах и явлениях с подходом физике твердого тела (????)

(???? что с физики твердого тела могу добавить про это????)

О тепловых явлениях с токами

Статистическая теория теплового шума

Корреляционная функция

Формула Найквиста

Пусть есть проводник без тока. Среднее квадратичное напряжение зависит от сопротивления R, k_BT и ширины частотного диапазона измерений $\Delta\nu$:

$$\left\langle V^2 \right\rangle = 4Rk_BT\Delta\nu$$

Выводится из мощности стоячих волн в проводнике и закона Джоуля-Ленца (????). Число их с частотой от ν до $\nu + d\nu$ в проводнике длиной L с учётом поляризации $dn(\nu) = 2 \cdot \frac{2Ld\nu}{c}$. На каждую стоячую волну приходится энергия k_BT. Тогда энергия стоячих волн с частотой от ν до $\nu + d\nu$ будет $dE(\nu) = 4 \cdot \frac{L}{c} d\nu k_BT$. Мощность на единицу длины цепи равна $dW = \frac{dE(\nu)}{\frac{L}{c}} = 4k_BTd\nu$. Вся энергия флуктуационных токов снова переходит в тепло на сопротивлении. Потеря мощности на единице длины проводника с сопротивлением R по закону Джоуля-Ленца равна $\frac{dW(\nu)}{d\nu} = \frac{\left\langle V^2 \right\rangle(\nu)}{R}$, $\langle V^2 \rangle$ - средний квадрат флуктуационной ЭДС для волн с частотой ν. Получаем формулу Найквиста $\langle V^2 \rangle = 4Rk_BT\Delta\nu$.
(???? как в ФДТ связана???? чего еще не проработал???)

О странных цепях

(указания для олимпиадных задач тут)

1.4.12 Electric circuits with diodes, transistors: basics for applications

О диоде

(1/2 страницы указаний для простых задач на него!)

Other well-known phenomena in chains

Закон «трёх вторых» Ленгмюра

Рассмотрим вакуумный диод (лампу) - систему из двух электродов (катода и анода) в вакууме, между которыми поддерживается разность потенциалов V. Если один из электродов (катод) нагрет, то часть электронов имеет достаточную энергию, чтобы выйти из металла наружу. Для чистых металлов работа выхода составляет несколько электронвольт. Далее электроны увлекаются внешним электрическим полем в направлении анода и создают ток J.

Если бы на анод попадали все эмитированные с катода электроны, то в стационарных условиях ток J не зависел бы от величины приложенного напряжения V и равнялся бы току насыщения. Последний определяется только количеством электронов, испущенных катодом в единицу времени. В действительности в пространстве между катодом и анодом образуется отрицательный объёмный заряд, препятствующий прохождению тока.

$$|j| = \frac{a^2}{4\pi}\sqrt{-\frac{2e}{m}} = CV^{3/2}, C = \frac{1}{9\pi d^2}\sqrt{-\frac{2e}{m}}.$$

(??? мб когда-то укажу пару формул, из которых это берется.)

О вынужденных колебаниях

(тема 11/15 общефиз)

Распространение в двухпроводной линии и телеграфное уравнение

(потоп допишу, небольшая тема, просто что такое есть для кругозора)

$$\Delta V = V(z+\Delta z) - V(z) = -\frac{L_0 \Delta z}{c^2}\cdot\frac{\partial I}{\partial t}$$

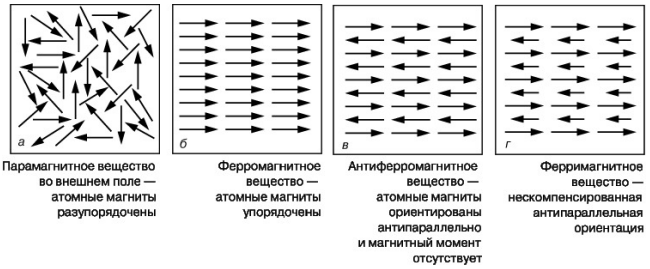
$$\frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{L_0}{c^2}\cdot\frac{\partial I}{\partial t}$$

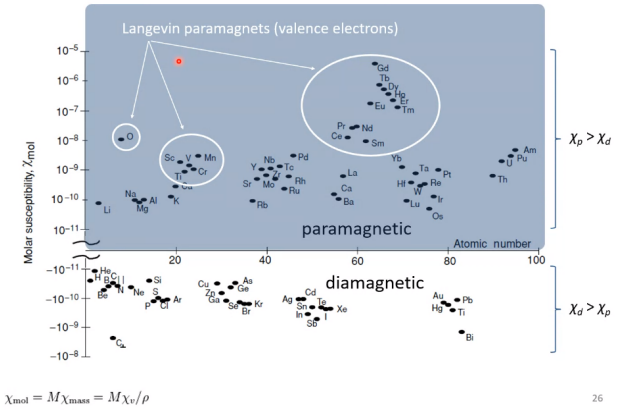
$I(z) = I(z+\Delta z) + \frac{\partial q}{\partial t} \quad q = V\cdot(C_0\Delta z)$

$$\Delta I = -\frac{\partial q}{\partial t} = -C_0\Delta z\cdot\frac{\partial V}{\partial t} \quad \frac{\partial I}{\partial z} = -C_0\frac{\partial V}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \frac{c^2}{L_0 C_0}\cdot\frac{\partial V^2}{\partial z^2} \quad U_\phi = \frac{c}{\sqrt{L_0 C_0}}$$

1.4.13 Para- and diamagnetism: basics





Магнитное поле Земли = 0.1 Oe, магнит на холодильнике имеет 5000 Oe.

О парамагнетизме

(думаю для указания сути мелкого раздела хватит.)

On Langevin theory of paramagnetism (теория Ланжевена о парамагнетизме)

$$\boldsymbol{M}_{J=1/2} = NmL(\alpha) := Nm\left[\coth\left(\frac{mH}{k_{\mathrm{B}}T}\right) - \frac{k_{\mathrm{B}}T}{mH}\right],$$

$L(\alpha)$ - функция Ланжевена.

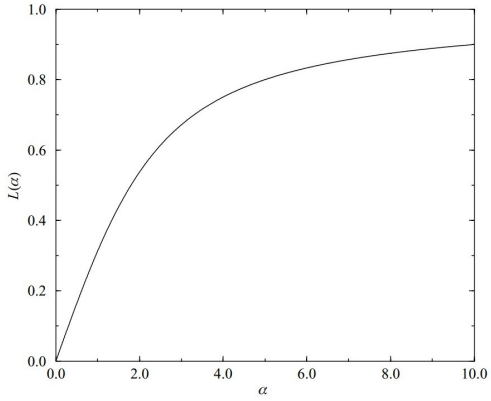


Figure 1.1: $\alpha = mH/k_{\mathrm{B}}T$, and $L(\alpha) = \coth(\alpha) - 1/\alpha$

Получается из соображений статфиза: так как энергия $E = -\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{H} = -mH\cos\theta$, то $e^{-E/k_\mathrm{B}T} = e^{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{H}/k_\mathrm{B}T} = e^{mH\cos\theta/k_\mathrm{B}T}$, распределение по углам: $p(\theta) = \frac{e^{mH\cos\theta/k_\mathrm{B}T}\sin\theta d\theta}{\int\limits_0^\pi e^{mH\cos\theta/k_\mathrm{B}T}\sin\theta d\theta}$, в итоге

$$\boldsymbol{M} = Nm\langle\cos\theta\rangle = Nm\int\limits_0^\pi \cos\theta p(\theta)d\theta = Nm\frac{\int\limits_0^\pi e^{mH\cos\theta/k_\mathrm{B}T}\cos\theta\sin\theta d\theta}{\int\limits_0^\pi e^{mH\cos\theta/k_\mathrm{B}T}\sin\theta d\theta} =$$

$$= Nm\left[\coth\left(\frac{mH}{k_\mathrm{B}T}\right) - \frac{k_\mathrm{B}T}{mH}\right],$$

(???? как вычислить интеграл кстати??)

$$L(\alpha) \approx \frac{\alpha}{3} - \frac{\alpha^3}{45} + \cdots$$

$$\boldsymbol{M} \approx \frac{Nm\alpha}{3} = \frac{Nm^2}{3k_\mathrm{B}}\frac{\boldsymbol{H}}{T}$$

(The equivalent expression in SI units is $\boldsymbol{M} = (N\mu_0 m^2/3k_\mathrm{B})\,(\boldsymbol{H}/T)$, since $E = -\mu_0\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{H}$.)

$$\chi = \frac{\boldsymbol{M}}{\boldsymbol{H}} = \frac{Nm^2}{3k_\mathrm{B}T} = \frac{C}{T}$$

$$\boldsymbol{M} = NgJ\mu_\mathrm{B}\left[\frac{2J+1}{2J}\coth\left(\frac{2J+1}{2J}\alpha\right) - \frac{1}{2J}\coth\left(\frac{\alpha}{2J}\right)\right] \equiv NgJ\mu_\mathrm{B}B_J(\alpha).$$

$B_J(\alpha)$; $B_J(\alpha) \lim\limits_{J\to\infty} L(\alpha)$,

$$B_J(\alpha) = \frac{J+1}{3J}\alpha - \frac{\left[(J+1)^2 + J^2\right](J+1)}{90J^3}\alpha^3 + \cdots.$$

Here $\alpha = Jg\mu_\mathrm{B}H/k_\mathrm{B}T$.

$$\chi_\mathrm{sgs} = \frac{Ng^2J(J+1)\mu_\mathrm{B}^2}{3k_\mathrm{B}T} \sim \frac{C}{T}$$

$$\chi_\mathrm{si} = \mu_0\chi_\mathrm{sgs}.$$

The Curie–Weiss law

$$\chi = \frac{\boldsymbol{M}}{\boldsymbol{H}} \sim \frac{C}{T-\theta},$$

Proof:

$$\chi = \frac{\boldsymbol{M}}{\boldsymbol{H}} = \frac{C}{T},$$

$\boldsymbol{H} \to \boldsymbol{H}_\mathrm{tot} = \boldsymbol{H} + \gamma\boldsymbol{M}$,

$$\frac{\boldsymbol{M}}{\boldsymbol{H}+\gamma\boldsymbol{M}} = \frac{C}{T},$$

$$\boldsymbol{M} = \frac{C\boldsymbol{H}}{T - C\gamma}. \qquad \Rightarrow \text{ Curie-Weiss law}$$

Pauli paramagnetism

(???? да я хз вообще.)

О диамагнетизме

(думаю для указания сути мелкого раздела хватит.)

Diamagnetism by Langevin

$$\varepsilon = E \times 2\pi r = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

$$\frac{dL}{dt} = -eEr = +\frac{e}{2\pi}\frac{d\Phi}{dt} = \frac{er^2\mu_0}{2}\frac{d\boldsymbol{H}}{dt}$$

$\Phi = \mu \boldsymbol{H} A$, where $A = \pi r^2$ is the area.

$$\Delta L = \frac{er^2\mu_0}{2}\boldsymbol{H}$$

is just $-e/2m_\mathrm{e}$ multiplied by the angular momentum. (Remember $L = m_\mathrm{e} v a$ and $I = ev/2\pi a$, so $\boldsymbol{m} = IA = -\left(e/2m_\mathrm{e}\right) L$.) So the change in magnetic moment

$$\begin{aligned}\Delta \boldsymbol{m} &= -\frac{e}{2m_\mathrm{e}}\Delta L \\ &= -\frac{e^2 r^2 \mu_0}{4m_\mathrm{e}}\boldsymbol{H}.\end{aligned}$$

This reduces the effective magnetic moment by a factor of $2/3$.

$$\Delta \boldsymbol{m} = -\frac{Ze^2 \left\langle r^2\right\rangle_\mathrm{av} \mu_0}{6m_\mathrm{e}}\boldsymbol{H}.$$

$$\chi = \frac{\boldsymbol{M}}{\boldsymbol{H}} = -\frac{N\mu_0 Ze^2}{6m_\mathrm{e}}\left\langle r^2\right\rangle_\mathrm{av}.$$

$$\chi = -\frac{NZe^2}{6m_\mathrm{e}c^2}\left\langle r^2\right\rangle_\mathrm{av},$$

in units of emu/ $(\mathrm{cm}^3\mathrm{Oe})$.

Paramagnetic diatomic gases

1.4.14 Ferromagnetism: basics

О ферромагнетизме

(думаю для указания сути мелкого раздела хватит.)
Кюри-Вейсса

Основные параметры

$$\boldsymbol{M} := \frac{\boldsymbol{m}}{V} \qquad \text{(magnetization)}$$

Solenoid is a type of electromagnet formed by a helical coil of wire whose length is substantially greater than its diameter. For 1 loop

$$\boldsymbol{m} = IA$$

основные свойства ферромагнетиков

О доменах и их энергиях

(на них есть задачи, так что указание на это будет, минимум на 3/4 страницы. Отдельный вопрос про них!)

основные применения ферромагнетиков

1.4.15 Ising, Hubbard, Heisenberg models: basics

(see statistical physics about it for now. I'll write more about phenomena, not about beautiful statistical theory)

Квантовые эффекты в магнитной восприимчивости электронной системы

XVII

Эффект де Гааза–ван Альфена

Part II
Fundamentals of Electrodynamics

Обсудим подробно основы классической электродинамики.

2 Laws of Electrodynamics

2.1 General Idea and Construction of Electrodynamics

(тут более подробно, чем в теории поля. и обсуждение с самых разных сторон этого вопроса, как и почему мы строим её.)

2.1.1 Concept of Fields and Electromagnetism

(пока тут особо не копал я.)

Понятие поля (?)

2.1.2 Constructing Electrodynamics from Experimental Facts

(типичное построение, с которой все и начинается, см. типичный курс по общей физике)

2.2 Main Experiments in Fundamentals of Electrodynamics

(I'll collect experiments themselves later)

2.2.1 General Ideas of Typical Measurements in ED

Как идейно работают измерительные приборы тока?

Как идейно работают измерительные приборы напряжения?

Как работает вольтметр? !(!??!?!??!?!!??)

Какое минимальное напряжение можно мерять?

Какое максимальное напряжение можно мерять?

Как идейно работают измерительные приборы магнитного поля?

2.2.2 Main Experimental Confirmations Maxwell's Equations

(just main ones, I'll write shortly. details will be in the part about experiments)

2.3 General Laws of Electrodynamics

(научимся их максимально профессионально решать. именно этот раздел и решает задачу про гравитационные волны.)

2.3.1 Typical Maxwell Equations

Уравнения Максвелла в локальной форме

Уравнения Максвелла в локальной форме в координатном языке имеют вид:

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}\mathbf{H} =& \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\\ \operatorname{rot}\mathbf{E} =& -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\\ \operatorname{div}\mathbf{D} =& \rho\\ \operatorname{div}\mathbf{B} =& 0\end{aligned}$$

Особенно простой и согласованной выглядит эта система уравнений для электромагнитного поля в вакууме, когда по физическому смыслу величины $\mathbf{E}$ и $\mathbf{D}$, а также $\mathbf{B}$ и $\mathbf{H}$ тождественны (в системе СГС они просто равны друг другу).

О замкнутости уравнений Максвелла

Но и в этом случае система уравнений еще не замкнута, поскольку должны быть еще определены величины $\mathbf{j}(\mathbf{E},\mathbf{B})$ и $\rho(\mathbf{E},\mathbf{B})$.

Таким образом, уравнения поля, вообще говоря, должны решаться совместно с уравнениями, описывающими вещество.

Последние, в частности для случая поля в среде, позволяют установить связь между полем и индукцией:

$$\begin{aligned}\mathbf{D} &= \widehat{\varepsilon}\mathbf{E}\\ \mathbf{B} &= \widehat{\mu}\mathbf{H}\end{aligned}$$

Здесь $\widehat{\varepsilon}(\mathbf{E},\mathbf{B})$ и $\widehat{\mu}(\mathbf{E},\mathbf{B})$ - самый общий вид операторов, связывающих две величины.

В простейшем случае, которым мы пока в основном ограничивались, это просто константы вещества.

В анизотропных средах, скажем кристаллах, они могут превратиться в тензоры, могут вместо константы быть представлены интегральным оператором, могут быть комплексными и нелинейными по полям.

О материальных уравнениях

Любое из этих представлений неуниверсально, границы применимости каждого из них существенно уже, чем собственно уравнений поля, и по традиции уравнения (9.6), (9.7) вместе с законом Ома и т.п. выделяют в особую группу и называют материальными уравнениями, тогда как уравнениями Максвелла считаются именно (9.2) – (9.5). ???

Typical Maxwell equations in media

(write just how they look and what is their sense)

Уравнения Максвелла в интегральной форме

Уравнения Максвелла также можно записать в интегральной форме:

$$\oint \mathbf{H}d\mathbf{l} = I_\Sigma + \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_S \mathbf{D}d\mathbf{S} \qquad \oint \mathbf{E}d\mathbf{l} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

$$\oint \mathbf{D}d\mathbf{S} = q_\Sigma \qquad \oint \mathbf{B}d\mathbf{S} = 0$$

Любое уравнение можно брать в любой форме, локальной либо интегральной, руководствуясь исключительно соображениями удобства.

Эквивалентность локальной и интегральной формы

давно про это думал, хз

граничные условия

Система уравнений Максвелла решается при следующих граничных условиях на поверхности:

$$\begin{aligned} [\mathbf{E}_\tau] &= 0 \\ [\mathbf{B}_n] &= 0 \\ [\mathbf{D}_n] = 0 \quad \text{или} \quad \sigma &= \frac{dq}{dS} \\ [\mathbf{H}_\tau] = 0 \quad \text{или} \quad i &= \frac{dI}{dl}, \end{aligned}$$

где квадратные скобки означают скачок соответствующей величины на поверхности.

В правой части двух последних уравнений стоИт нуль или, соответственно, поверхностная плотность заряда и тока в зависимости от того, рассматриваем ли мы истинную границу или представляем в качестве таковой слой с толщиной много меньшей характерного пространственного масштаба задачи.

Получение граничных условий

что-то я хз, откуда берутся они?

Было бы заблуждением считать, что граничные условия (9.12) – (9.15) нами уже были выведены.

Например, условие (9.12) получено для случая потенциального поля, которое тождественно обратило бы В нуль левую часть 9.3 Или (9.9).

В определенном смысле граничные условия следуют из самих уравнений (9.2) – (9.5) и точно так же должны рассматриваться как обобщение экспериментальных данных.

Электрическое поле может быть непотенциальным (??!!)

да ну?

Электрическое поле при учете эффекта электромагнитной индукции теряет свойство потенциальности.

Можно видеть, что, ЭДС, т.е. непотенциальность электрического поля, обязательно связана с нестационарностью.

Вектор-потенциал

Но оказывается, добавление в систему уравнений вектор-потенциала позволяет в принципе представить два вектора $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ как функции двух потенциалов.

Не останавливаясь на этом вопросе подробно, ограничимся случаем поля в вакууме:

$$\mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}; \quad \mathbf{E} = -\nabla\varphi - \mu_0 \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

Взяв ротор от выражения для $\mathbf{E}$, получим уравнение (9.3), а дивергенция $\mathbf{H}$ оказывается нулевой, как и следует из (9.5) для поля в вакууме.

калибровочная инвариантность

Из уравнений (9.16) вытекает весьма полезное свойство потенциалов, которое принято называть калибровочной инвариантностью.

Физически наблюдаемыми (измеряемыми) величинами являются поля **E** и **H**, между тем, даже в электростатике потенциал φ определен лишь с точностью до аддитивной постоянной.

Обратившись к первому уравнению (9.16), нетрудно заметить, что магнитное поле не изменится, если к величине A мы добавим градиент любой скалярной функции ψ, поскольку ротор любого градиента равен нулю (отсюда ранее употреблявшийся термин - «градиентная инвариантность»).

Но для того чтобы из второго уравнения (9.16) получилось то же самое поле **E**, следует к скалярному потенциалу добавить величину $-\mu_0 \partial\psi/\partial t$. Таким образом, уравнения Максвелла в общем случае оказываются инвариантными относительно следующей замены.

$$\varphi' = \varphi - \mu_0 \frac{\partial \psi}{\partial t}$$
$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\psi$$

Очевидно, добавление к φ произвольной константы, не завися- щей от координат, есть частный случай преобразований (9.17).

обзор применений уравнений Максвелла

определение тока смещения

подумаю потом про это

Идея ввода тока смещения 1

Данную тему мы начнем с мысленного эксперимента.

Представим себе заряженный сферический конденсатор, у которого пространство между обкладками заполнено однородным диэлектриком.

Пусть заряды обкладок равны $\pm Q$.

Предположим, что в некоторый момент времени диэлектрик практически мгновенно и всюду однородно переводится в проводящее состояние.

В случае мысленного эксперимента неважно, как именно это сделано - скажем, импульсом ионизирующего излучения.

Итак, в силу абсолютной симметрии постановки задачи, конденсатор начинает разряжаться также симметричным образом, т.е. вектор плотности тока направлен строго по радиусу:

$$\mathbf{j} = -\frac{\mathbf{r}}{r}\frac{\partial Q/\partial t}{4\pi r^2}$$

Знак «-» учитывает, что ток разряжает конденсатор, понижая заряд, а зависимость $j \propto 1/r^2$ отвечает закону сохранения заряда, который должен выполняться, по крайней мере, в случае достаточно медленного процесса разрядки.

Действительно, если при протекании тока нигде в диэлектрике не происходит накопления заряда, ток через любую сферическую поверхность, концентрическую с обкладками, должен быть одинаков, а значит, плотность тока обратно пропорциональна площади сферы.

При попытке применить теорему о циркуляции в форме (4.10) мы столкнулись бы с очевидным абсурдом.

Единственно разрешенным направлением для **H** в случае столь высокой симметрии было бы радиальное направление $\mathbf{r}/r$.

Но эта возможность исключена теоремой Гаусса для магнитного поля (4.1), поскольку такая конфигурация отвечала бы магнитному заряду в центре симметрии.

Таким образом, единственно разумный ответ в данной задаче - нулевое магнитное поле.

А в то же время, приложив формулу (4.10) к любой токовой трубке, мы получили бы $\oint \mathbf{H}d\mathbf{l} \neq \neq 0$.

Значит, мы должны так модифицировать теорему (4.10), чтобы в данной задаче получить строго нуль в правой части.

Идея ввода тока смещения 2

Другую иллюстрацию той же проблемы представляет рис. 9.2.

Квазистационарный ток $I(t)$ протекает по цепи, содержащей конденсатор.

Вдали от конденсатора магнитное поле у проводов должно определяться формулой (4.10). Натянем на контур K, охватывающий провод, такую поверхность S, которая проходила бы между пластинами конденсатора.

Тогда поток заряда (ток) через нее будет равен нулю, но совершенно очевидно, что значение магнитного поля, а значит и циркуляция его по любому контуру от таких построений не зависит.

Таким образом, модификация теоремы (4.10) должна «замКнуть» ток через конденсатор.

Удобнее все же вносить поправки не в формулу (4.10) как таковую, а в соответствующее ей локальное уравнение (4.12):

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \mathbf{j} + \ldots ?$$

Вернемся к ситуации, изображенной на рис.

9.1.

Поправка, обращающая для этого случая в нуль правую часть (4.12), должна иметь вид

$$-\mathbf{j} = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\frac{Q}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r} \equiv \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

Можно убедиться в том, что проблему, представленную на рис. 9.2, поправка (9.1) полностью разрешает.

В самом деле,

$$\frac{\partial D}{\partial t} = \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\frac{U}{d} = \frac{\varepsilon_0}{d}\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{C}{S}\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{1}{S}\frac{\partial Q}{\partial t}$$

Интеграл по поверхности S рис. 9.2 даст просто полный ток I.

Величина, представленная формулой (9.1), называется плотностью тока смещения, а поток от нее - соответственно, током смещения.

К тому же результату можно прийти и другим путем, исходя из закона сохранения заряда (3.7):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{j} = 0$$

Если мы возьмем дивергенцию от уравнения (4.12), то в левой части получим нуль: $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\mathbf{H}) = \nabla[\nabla\mathbf{H}] \equiv 0$. Значит, нуль должен получиться и в правой части нового уравнения

$$\operatorname{div}[\mathbf{j} + \ldots] = -\frac{\partial \rho}{\partial t} + \ldots = \operatorname{div}\left[-\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \ldots\right]$$

что тождественно удовлетворяется как раз добавкой (9.1).

Все приведенные рассуждения являются хорошими аргументами В пользу (9.1), но отнюдь не бесспорными доказательствами, и окончательное слово остается, как обычно в физике, за экспериментом.

Логика, которой мы следовали, для физики вообще характерна. Мы стартовали от простых эмпирических законов (Кулона, Био и Савара и т.п.), а пришли к соотношениям гораздо более общим и базирующимся на новых понятиях. После этого надлежит от аналитических методов вернуться к эксперименту и убедиться в правильности нашего понимания законов природы.

Экспериментальное тестирование этих законов будет продолжаться и далее, но уже на предмет установления границ их применимости.

две группы законов электродинамики (???)

Рассмотренные до настоящего момента законы электродинамики явно распадаются на две группы.

В одну из них входят так называемые материальные соотношения: закон Ома, зависимость $\mathbf{P}(\mathbf{E})$ или $\mathbf{J}(\mathbf{B})$ и т.д.

Эти законы задаются физикой строения вещества; результаты, на них основанные, всегда не универсальны, причем это общее свойство их всех, а не только простых линейных моделей.

Вторая группа - чисто электродинамические законы, например теорема Гаусса или теорема о циркуляции.

Эти законы, разумеется, также имеют свою область применимости, но она гораздо шире, чем у материальных соотношений, по сути, оставаясь в рамках классической физики, мы за нее заведомо не выходим.

Более того, эти фундаментальные законы более совершенны, нежели закон Кулона или закон Био и Савара, их породившие, поскольку не связаны приближениями точечных зарядов или бесконечно тонких элементов тока.

Его, конечно, имеет смысл модифицировать применительно к системе со средними (????) параметрами - токовому контуру -

$$\mathscr{E} = \oint \mathbf{E} d\mathbf{l} = -L\frac{dI}{dt}$$

если его параметры не меняются во времени, если же контур является перестраиваемым или, скажем, деформируемым, то соотношение (6.8) допускает естественное обобщение:

$$\mathscr{E} = \oint \mathbf{E} d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\left(L\frac{dI}{dt} + I\frac{dL}{dt}\right)$$

В то же время, как и для всех законов такого рода, желательно получить локальную форму закона Фарадея, которая была бы свободна от понятия какого-либо материального контура.

Для этого воспользуемся теоремой Стокса: $\oint \mathbf{E} d\mathbf{l} = \int \operatorname{rot} \mathbf{E} d\mathbf{S}$ - циркуляция вектора по некоторому контуру равна потоку ротора этого вектора через любую гладкую поверхность, натянутую на контур.

Объединяем теорему Стокса и закон Фарадея:

$$\int \operatorname{rot} \mathbf{E} d\mathbf{S} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\int \mathbf{B} d\mathbf{S}$$

Ввиду произвольности контура и натянутой на него поверхности, можно просто приравнять подынтегральные выражения.

Только временную производную надо будет представить в виде частной производной по времени, чтобы избежать в локальной форме уравнения эффектов, связанных, например, с движением вещества.

Итак, вот локальная форма закона Фарадея:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

Знак «-», который мы до сих пор старательно удерживали Как символ направленности ЭДС индукции, приобрел в этой векторной формуле окончательный смысл.

В зависимости от конкретной задачи, может быть использована любая форма закона электромагнитной индукции (6.7) – (6.10), но именно (6.10) представляет закон Фарадея в нанболее общем виде.

2.3.2 Boundary Conditions for E and D (!!!)

мотивация

вроде это на самом деле важно.
потом уточню, зачем

Theory

Располагая в качестве рабочего инструмента теоремой Гаусса в дифференциальной форме или уравнением Пуассона, мы, каза- лось бы, можем в приближении сплошной среды решить любую электростатическую задачу, т.е. задать заряды или потенциалы системы физических тел и найти поле во всем пространстве. Первое препятствие к тому — проблема состояния вещества в электрическом поле.

Мы ее предельно упростили, полагая вещество либо идеально проводящим, либо идеальным диэлектриком, свойства которого сведены к одной-единственной константе. Но остается еще проблема границы вещества с вакуумом или двух веществ.

Нам придется считать такие границы идеально гладкими и вдобавок предположить, что свойства среды, такие, как проводимость и диэлектрическая проницаемость, меняются на границе скачком.

(Иногда адекватность таких приближений представляет собой проблему более сложную, нежели собственно решение задачи).

Для статического электрического поля всегда остается в силе условие потенциальности

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{l} = 0$$

Именно это условие позволяет представить электрическое поле в виде градиента скалярной функции.

Оно выполняется для поля любого неподвижного электрического заряда.

Конструируя поле, взаимодействующее с веществом, т.е. учитывая поляризационные эффекты, мы ничего в этом смысле не меняем.

Сколько и какие бы мы ни взяли заряды, суммарное поле обязано удовлетворять уравнению (2.11).

Обратимся к рис. 2.2 а.

Пусть A - идеальная граница двух сред.

Построим на двух касательных и двух нормалях к этой границе некоторый малый контур, как показано на рисунке, а затем перейдем для его высоты К пределу $dz \to 0$, оставляя при этом длину dl малой, но ненулевой, и следя за тем, чтобы верхняя и нижняя стороны контура оставались в разных средах.

В результате (2.11) вырождается в соотношение

$$\mathbf{E_{II}} d\mathbf{l} - \mathbf{E_I} d\mathbf{l} = 0$$

т.е. в условие сохранения проекции поля $\mathbf{E}$ на направление касательной.

Последнее выбиралось произвольно; повторив это дважды для двух ортогональных направлений в касательной плоскости, приходим к выводу о сохранении проекции поля $\mathbf{E}$ на касательную плоскость:

$$\mathbf{E_{I}}_{\tau} = \mathbf{E_{II}}\tau$$

Еще одно граничное условие последует из уравнения (2.2).

Построим на границе сред I и II малый цилиндр с образующей, параллельной нормали, и основаниями dS, параллельными касательной плоскости и располагающимися в разных средах, как показано на рис. 2.2 б.

Устремим высоту цилиндра dz к нулю, сохраняя площадь оснований малой, но ненулевой.

Если на поверхности A нет поверхностного заряда, (2.2) вырождается В условие непрерывности на границе нормальной компоненты вектора индукции:

$$\mathbf{D}_{\mathrm{In}} = \mathbf{D}_{\mathrm{II}\,n}$$

Вообще говоря, даже элементарных сведений о строении вещества и электронной природе электрического заряда достаточно, чтобы утверждать, что в строгом смысле поверхностного заряда не бывает.

Невозможно конечный заряд поместить на листок нулевой толщины.

Но в строгом смысле не бывает и идеального скачка на границе, так что мы должны различать реальную физику и ее математическую модель.

Например, корректно описать проводник в электрическом поле можно лишь привлекая понятие поверхностного заряда или входя в такие детали физики пограничного слоя, которые неоправданно усложняют задачу.

Иногда, к тому же, необходимая нам точность решения допускает такое упрощение, как «стягивание» заряженного слоя конечной толщины в бесконечно тонкий листок.

Итак, пусть на поверхности A располагается некоторый заряд с поверхностной плотностью σ. Тогда (2.2) можно переписать в виде

$$\mathbf{D_{II}}_{n}dS - \mathbf{D_{In}}dS = \sigma dS$$

и окончательно, вместо (2.13), получаем

$$\mathbf{D}_{In} - \mathbf{D_{II}}_{n} = \sigma$$

Таким образом, действительно, в отличие от тривиального вакуумного случая, граничные условия для поля и индукции не совпадают, так что утверждение, будто индукция - это просто вакуумное поле свободных зарядов, некорректно.

Условия (2.12), (2.13) подсказывают и способы измерения поля в веществе.

Представим себе, что мы вырезали в образце вещества очень тонкую щель достаточно большого сечения, перпендикулярную силовым линиям, и вводим туда зонд, способный измерить в ней электрическое поле.

Тогда, в силу)2.13) индукция в такой щели будет равна индукции в веществе, но внутри щели она с точностью до коэффициента ε_0 как раз и равна измеренному полю.

Если бы мы вырезали щель не перпендикулярно, а параллельно силовым линиям, то, согласно (2.12) измеренное в ней поле было бы равно полю в веществе.

Не столь нагляден ответ в случае, например, анизотропного кристалла, когда направления $\mathbf{E}$ и $\mathbf{D}$, вообще говоря, не совпадают.

Забегая вперед, отметим, что область применимости полученных граничных условий не ограничивается электростатикой, более того, они оказываются совершенно универсальными.

2.3.3 Electromagnetic Field Pulse

Рассмотрим теперь импульс поля.

корректное определение импульса поля

Аналогии об импульсе поля

Для более интуитивного понимания рассмотрим некоторые аналогии.

Например, вектор плотности тока j можно с равным правом именовать вектором потока заряда, поскольку он представляет собой как раз заряд, протекающий в единицу времени через единицу площади поперечного сечения проводника.

В случае единственного сорта носителей заряда его можно достаточно просто выразить через концентрацию заряженных частиц и их локальную скорость:

$$\mathbf{j} = ne\mathbf{v}$$

Теперь представим себе, что вместо заряда, мы подставили в эту формулу массу частиц.

Тогда, очевидно, мы получим выражение для потока массы

$$\mathbf{q}_m = nm\mathbf{v}$$

В случае течения многокомпонентного газа (жидкости, плазмы) это выражение следовало бы просуммировать по сортам частиц, но для наших рассуждений в этом нет надобности.

Нетрудно заметить, что поток массы представляет собой не что иное, как пространственну ю плотность импульса среды:

$$\mathbf{q}_m = nm\mathbf{v} \equiv \frac{d\mathbf{p}}{dV}$$

релятивистский случай

(зачем он?)

Соотношение (9.26) остается в силе и в релятивистском случае, если под массой понимать не массу покоя, а так называемую релятивистскую массу m_r, которая как самостоятельная величина в настоящее время употребляется редко, потому что предпочитают просто выражать ее через полную энергию частицы $\mathscr{E}$:

$$m_r = \frac{m}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \equiv \frac{\mathscr{E}}{c^2}; \quad \mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{\mathscr{E}}{c^2}\mathbf{v}$$

Из этих общеизвестных формул и (9.26) следует:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dV} = \frac{1}{c^2}\mathbf{q}_w, \qquad \text{где} \qquad \mathbf{q}_w \equiv n\mathscr{E}\mathbf{v}$$

т.е. Плотность импульса с точностью до коэффициента $1/c^2$ есть поток энергии частиц.

И вот этот результат, абсолютно строгий в случае течения вещества, мы и перенесем на электромагнитное поле:

$$\frac{d\mathbf{p}_{\text{эм}}}{dV} = \frac{\mathbf{S}}{c^2} = \frac{[\mathbf{EH}]}{c^2}.$$

Из формулы (9.28) можно извлечь несколько поучительных следствий.

Во-первых, как нетрудно видеть, чисто электрическое или чисто магнитное поле импульсом не обладают.

Во-вторых, если $\mathbf{E} \parallel \mathbf{H}$, плотность импульса также равна нулю.

В-третьих, представим себе одну из названных ситуаций и предположим, что мы перешли в некоторую движущуюся систему отсчета.

Поле, как мы теперь понимаем, имеет массу.

Следовательно, в новой системе отсчета у поля окажется ненулевой плотность импульса, а это значит, в согласии с (9.28), в новой системе отсчета обязательно должны быть представлены оба поля $\mathbf{E}, \mathbf{H}$, и притом не параллельные друг другу.

всегда можем перейти в такую систему отсчета, в которой импульс электромагнитного поля равен нулю

(???? да ну???? хочу пример)

Справедливо и обратное: можно показать, что мы всегда можем перейти в такую систему отсчета, в которой импульс электромагнитного поля равен нулю, т.е. существует или только $\mathbf{E}$, или только $\mathbf{H}$.

где-то там пример был кст.

пример: вектор Пойтинга в особенном соленоиде

(вроде это должен быть пример с каким-то смыслом..)

Рассмотрим электрическую цепь, представленную на рис. 9.5.

Постоянный ток I протекает по длинному соленоиду радиуса r_2 с плотной намоткой n витков/м, далее? через сопротивление R и возвращается по соосному с соленоидом прямому проводу радиуса r_1. Найдем вектор Пойнтинга внутри катушки вдали от ее торцов, считая пренебрежимо малыми сопротивления как соленоида, так и соединительных проводов.

При таком предположении разность потенциалов между обмоткой соленоида и центральны п проводом равна $\Delta\varphi = IR$. Электрическое

поле внутри катушки направлено, в силу симметрии, по радиусу, а значит, $E(r) \propto 1/r$ (полезно еще раз обратить внимание на замечание в конце предыдущего параграфа).

Зная разность потенциалов, его можно найти точно:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\frac{\mathbf{r}}{r^2}\frac{IR}{\ln(r_2/r_1)}$$

Что касается магнитного поля, то оно имеет две компоненты одна создается током, текущим по осевому проводу, а другая током через обмотку соленоида:

$$H_\varphi = \frac{I}{2\pi r}; \quad H_z = nI$$

Соответственно и вектор Пойнтинга имеет две компоненты.

Одна из них соответствует направлению на нагрузку:

$$S_z = EH_\varphi = \frac{1}{2\pi}\frac{I^2R}{r^2\ln(r_2/r_1)}$$

Ей отвечает полный поток энергии через сечение катушки

$$\int_{r_1}^{r_2} S_z \cdot 2\pi r dr = I^2R$$

Другая компонента вектора Пойнтинга направлена по азимуту:

$$S_\varphi = EH_z = \frac{I^2 Rn}{r \ln(r_2/r_1)}$$

Соответствующий поток энергии как будто бы «бесполезен» — он отнюдь не направлен на нагрузку, а просто циркулирует вокруг оси системы.

Что это значит, можно понять, обратившись еще раз к соотношению (9.28).

Оказывается, электромагнитное поле может иметь не только импульс, но и ненулевой момент импульса.

Только что рассмотренная система дает тому самый простой пример.

Теорема Пойнтинга: суть

Теорема Пойнтинга утверждает, что вектор потока электромагнитной энергии

$$\mathbf{S} = [\mathbf{EH}]$$

называется вектором Пойнтинга, а закон эволюции энергии в замкнутом объеме - теоремой Пойнтинга.

Как мы уже выяснили, вектор Пойнтинга - это вектор потока энергии, т.е. модуль его есть энергия, переносимая электромагнитным полем в единицу времени через площадку единичной площади, ориентированную перпендикулярно вектору потока.

Теорема Пойнтинга: вывод

Действительно.

Проследим, как эволюционирует энергия поля в динамической задаче.

Это, в свою очередь, позволяет распространить закон сохранения энергии на такие среды, в которых существенно взаимодействие поля с веществом.

Итак, мы исходим из выражений (2.29) и (7.11).

Таким образом, плотность энергии электромагнитного поля (если ее можно выделить из общей энергии системы «поле-вещество») равна

$$w = \frac{(\mathbf{ED})}{2} + \frac{(\mathbf{BH})}{2}$$

Предположим, что мы следим за эволюцией энергии поля в некотором объеме V, ограниченном поверхностью s:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\int\limits_V w dV = \int\limits_V \left[\frac{\partial}{\partial t}\frac{\mathbf{ED}}{2} + \frac{\partial}{\partial t}\frac{\mathbf{BH}}{2}\right] dV$$

Ограничимся случаем линейной среды

$$\mathbf{D} \propto \mathbf{E}; \quad \mathbf{B} \propto \mathbf{H}$$

Действительно, в этом случае производные квадратичных членов в (9.19) могут быть преобразованы следующим образом:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \int\limits_V \left(\mathbf{E}, \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right) + \left(\mathbf{H}, \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\right) dV$$

Затем подставим соответствующие частные производные из уравнений Максвелла (9.2) и (9.3):

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\int\limits_V (\mathbf{jE})dV + \int\limits_V (\mathbf{E}, \operatorname{rot}\mathbf{H}) - (\mathbf{H}, \operatorname{rot}\mathbf{E})dV$$

Первый интеграл в (9.21) можно сопоставить с формулой (3.12), откуда сразу становится ясной его физическая природа - это джоулево тепловыделение в объеме V.

Кстати, полезно заметить, что ток смещения напрямую к тепловому эффекту не ведет это можно видеть из того же выражения (9.21).

Второй интеграл - чисто «полевой» - может быть преобразован с помощью следующего векторного тождества:

$$\operatorname{div}[\mathbf{EH}] = \operatorname{div}[\check{\mathbf{E}}\mathbf{H}] + \operatorname{div}[\mathbf{E}\check{\mathbf{H}}] = (\mathbf{H}, \operatorname{rot}\mathbf{E}) - (\mathbf{E}, \operatorname{rot}\mathbf{H})$$

Таким образом, объемный интеграл может быть сведен к поверхностному по теореме Гаусса:

$$\int\limits_V (\mathbf{E}, \operatorname{rot}\mathbf{H}) - (\mathbf{H}, \operatorname{rot}\mathbf{E})dV = -\int\limits_V \operatorname{div}[\mathbf{EH}]dV = -\int\limits_s [\mathbf{EH}]d\mathbf{s}$$

а все выражение (9.21) может быть сведено к следующему:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\int\limits_V (\mathbf{jE})dV - \int\limits_s \mathbf{S}d\mathbf{s}$$

Словами это можно выразить так: изменение со временем электромагнитной энергии в объеме обусловлено, во-первых, джоулевой диссипацией и, во-вторых, «вытеканием» энергии через поверхность, ограничивающую данный объем.

Вектор потока электромагнитной энергии

$$\mathbf{S} = [\mathbf{EH}]$$

называется вектором Пойнтинга, а закон эволюции энергии в замкнутом объеме - теоремой Пойнтинга.

Локальная форма

Ее можно представить и в локальной форме.

Для этого последний интеграл В правой части нужно оставить в виде объемного, а левую часть - также в виде объемного интеграла от плотности энергии.

Поскольку объем интегрирования может быть совершенно произвольным, должны быть равны подынтегральные выражения:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{S} = -\mathbf{j}\cdot\mathbf{E}$$

В таком виде теорема Пойнтинга напоминает закон сохранения заряда (3.7), только в данном случае имеет место еще и сток энергии в тепло через джоулеву диссипацию.

При отсутствии таковой мы получили бы точный закон сохранения электромагнитной энергии.

А теперь перейдем от линейной среды к общему случаю произвольной зависимости $\mathbf{D}(\mathbf{E}), \mathbf{B}(\mathbf{H})$. Пока и поскольку мы могли выделить энергию электромагнитного поля аддитивным образом, эта связь предполагалась линейной.

Следовательно, в общем случае мы не сможем отделить друг от друга энерГию поля, энергию вещества и энергию взаимодействия поля с веществом.

Но поскольку расширение понятий и зависимостей представляется гораздо более естественным, нежели их полная ревизия, имеет смысл распространить и на этот случай действие теоремы Пойнтинга, доопределив все остальные добавки к энергиИ и потоку энергии как взаимодействие поля с веществом.

При таком определении мы как бы узаконим проведенну ю выше операцию:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{(\mathbf{ED})}{2}+\frac{(\mathbf{BH})}{2}\right)=\left(\mathbf{E},\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\right)+\left(\mathbf{H},\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\right)$$

Таким образом, работа по изменению электрического и/или магнитного поля - каким бы образом она ни совершалась - может быть представлена в виде

$$\Delta A=(\mathbf{E},d\mathbf{D})+(\mathbf{H},d\mathbf{B})$$

Рассмотрим пример.

Предположим, что мы поместили ферромагнитный образец в периодическое внешнее магнитное поле.

По прошествии каждого периода он неукоснительно возвращается в исходное состояние.

Этот процесс требует энергетических

затрат, которые пропорциональны (с точностью до размагничивающего фактора) площади, охватываемой кривой гистерезиса:

$$\Delta Q_T\approx V\cdot\oint_{B(H)}HdB$$

Далее рассмотрим некоторые простые примеры вычисления вектора Пойнтинга.

энергия поля в веществе

пример: цилиндрический проводник с током

Представим себе цилиндрический проводник, по которому течет ток с равномерно распределенной по сечению плотностью j (рис. 9.3).

Электрическое поле вне провода вблизи его поверхности должно быть, согласно условию (9.12), таким же, как и внутри, т.е. $\mathbf{E}=\mathbf{j}/\lambda$, магнитное поле $H=I/(2\pi r)=j\cdot r/2$, соответственно, вектор Пойнтинга нормален к поверхности проводника, направлен внутрь него и равен

$$|\mathbf{S}|=EH=\frac{j^2r}{2\lambda}.$$

Энергия, «втекающая» в проводник на длине l

$$\dot{W}_{in}=|\mathbf{S}|\cdot 2\pi rl=\pi r^2l\cdot\frac{j^2}{\lambda}$$

в точности соответствует темпу джоулевой диссипации, как и следует тому быть в стационарной задаче.

еще пример

Другой пример представлен на рис. 9.4.

Длинная двухпроводная линия соединяет источник постоянной ЭДС и нагрузку — сопротивление.

Полагая сопротивление подводящих проводов пренебрежимо малым, определим направление вектора Пойнтин- га.

Мы при этом ограничимся малой окрестностью проводов. Направление магнитного поля задается правилом буравчика (см. рис.

Электрическое поле есть не что иное, как поле двумерного диполя. Дело в том, что при идеальной проводимости соединительных элементов все падение напряжения приходится на сопротивление, так что каждый из проводов оказывается эквипотенциальным при разности потенциалов между ними IR.

Отсюда и поле диполя.

Определяя направление векторного произведения [EH] в данной геометрии, нетрудно убедиться в том, что в любой точке вектор Пойнтинга будет «показывать» на нагрузку, что вполне естественно: в стационарной задаче поток энергии должен быть направлен туда, где происходит диссипация, поскольку $\dot{W} \equiv 0$

Отметим важное обстоятельство.

Из теоремы Гаусса следует, что оба провода в данной системе должны быть заряжены, что не всегда правильно понимается при решении задач на протекание тока в твердом проводнике.

В отличие от электростатики, здесь не поле задается зарядом, а заряд - полем, которое следует из разности потенциалов IR.

Но все закономерности, изученные нами ранее, продолжают работать, и забывать об этом не следует.

2.3.4 Inductance and Mutual Induction (?)

Случаи применения взаимной индукции

Суть

Рассмотрим электрические цепи.

В отличие от гл. 3, где в электрической цепи важна была только последовательность элементов и законы формирования контуров (в случае их неодносвязности), теперь для нас первостепенное значение приобретает геометрия контура, поскольку мы рассматриваем магнитное поле токов.

И здесь весьма существенный выигрыш в объеме вычислений даст нам введенное в (4.3) понятие вектор-потенциала: $\mathbf{A} = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r})}{r} dV$. (?? как конкретно???)

Взаимная индукция

Рассмотрим два замкнутых контура 1 и 2. Пусть в каждом из них течет некоторый постоянный ток: I_1 и I_2. Каждый контур создает в пространстве магнитное поле, которое можно представить соответствующим вектор-потенциалом. Будем считать, что поперечные размеры проводника и распределение в нем тока несущественны в сравнении с характерными масштабами задачи.

Тогда $\mathbf{j}dV = jdS_\perp d\mathbf{l}$, и объемные интегралы сводятся к интегралам по контуру:

$$\mathbf{A}_1 = \frac{I_1}{4\pi}\oint_1 \frac{d\mathbf{l}_1}{r}; \quad \mathbf{A}_2 = \frac{I_2}{4\pi}\oint_2 \frac{d\mathbf{l}_2}{r}$$

Вычислим магнитный поток, создаваемый током контура 1 в контуре 2, используя при этом теорему Стокса:

$$\Phi_{12} = \int\limits_2 \mathbf{B}_1 d\mathbf{S}_2 = \mu_0 \int\limits_2 \operatorname{rot} \mathbf{A}_1 d\mathbf{S}_2 = \mu_0 \oint_2 \mathbf{A}_1 d\mathbf{l}_2 = \frac{I_1 \mu_0}{4\pi} \oint_1 \oint \frac{d\mathbf{l}_1 d\mathbf{l}_2}{R_{12}}$$

Совершенно аналогично,

$$\Phi_{21} = \frac{I_2 \mu_0}{4\pi} \oint \oint_2 \frac{d\mathbf{l}_2 d\mathbf{l}_1}{R_{21}}$$

Коэффициенты при токе в формулах (6.1) и (6.2), как нетрудно видеть, идентичны:

$$\Phi_{12} = L_{12} I_1; \quad \Phi_{21} = L_{21} I_2; \quad L_{12} = L_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \oint_1 \frac{d\mathbf{l}_1 d\mathbf{l}_2}{R_{12}}$$

Величины L_{12}, L_{21} называются взаимной индуктивностью или коэффициентами взаимной индукции, а правило их равенства - теоремой взаимности, которая часто используется при решении задач или инженерных расчетах.

Легко видеть, что эти коэффициенты зависят только от геометрии контуров, с точностью, впрочем, до знака, который задается направлением обхода в интегралах (6.1) – (6.3). Его, как правило, выбирают так, чтобы все величины L_{ik} были положительны, за исключением тех случаев, когда приходится суммировать магнитные потоки разного знака.

Самоиндукция

Теперь представим себе единственный замкнутый контур, по которому протекает ток I.

Так же, как и в предыдущем примере, представим магнитный поток через контур, обязанный собственному току I в виде

$$\Phi = \frac{I \mu_0}{4\pi} \oint \oint \frac{d\mathbf{l} d\mathbf{l}'}{R} \equiv LI$$

где $R = |\mathbf{R}_{d1,d1'}|$. Величина L называется индуктивностью контура или коэффициентом самоиндукции.

Единицу измерения индуктивности или взаимной индукции принято называть генри; ее размерность: 1 Гн = 1 В $\cdot$ с/А.

Причина именно такого выбора размерности прояснится ниже. (??? хз)

Другое определение той же единицы: 1 Гн = 1 Вб/А.

Как и фарада для измерения емкости, единица эта очень велика, поэтому фактически используются микрогенри или даже наногенри; последняя совпадает с очень хорошей точностью с единицей измерения индуктивности в системе СГС, а потому часто называется санТиметром.

Определение самоиндукции (6.4) удобно постольку, поскольку следует общему алгоритму (6.3), демонстрирует явно зависимость только от геометрии контура, но никогда не используется, в отличие от (6.3), для фактического расчета индуктивности Дело в том, что именно при рассмотрении самоиндукции неадекватно приближение линейности контура.

Как следствие, интеграл (6.4) оказывается несобственным.

Это впрочем, легко понять и на более элементарном уровне: вблизи идеально тонкого провода $B \propto H \propto 1/r$, а значит, поток через контур Φ расходится логарифмически.

Но формула (6.4) удобна для доказательств общего вида, в чем мы еще убедимся в следующей главе;

теперь же дадим два простых примера прямого вычисления индуктивности.

Индуктивность коаксиальной линии

На рис. 6.1 представлена система двух соосных проводников.

Ток течет по внутреннему цилиндрическому проводнику радиуса r_1 и возвращается по внешнему Цилиндрическому проводнику радиуса r_2. Во избежание уже упомянутой проблемы расходимости полного потока, внутренний проводник, как и внешний, будем считать полым и тонким в сравнении с масштабами r_1, r_2. Тогда магнитное поле можно считать сосредоточенным в пространстве между Цилиндрами.

Внутри внутреннего цилиндра и вне внешнего оно обращается В нуль в силу теоремы о Циркуляции и азимутальной симметрии системы.

В силу тех же аргументов, между цилиндрами поле идентично полю прямого провода.

Отсюда нетрудно вычислить и поток, взяв элемент сечения контура $dS = ldr$:

$$\Phi = l \int_{r_1}^{r_2} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} dr = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1} \Longrightarrow \frac{dL}{dl} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}$$

Величина dL/dl есть по определению индуктивность на единицу длины коаксиальной линии.

Индуктивность соленоида

Пусть дан длинный соленоид, без сердечника или с магнитомягким сердечником, с плотной намоткой (см., например, рис.

4.2); радиус соленоида R, длина l, полное число витков N, число витков на единицу длины $n = N/l$, магнитная проницаемость сердечника μ. Согласно выражению (4.13), внутри соленоида $B = \mu\mu_0 n$ I.

Определяя поток через контур, следует принять во внимание, что каждая силовая линия охватывается обмоткой соленоида N раз: $\Phi = \pi R^2 N \mu\mu_0 n I$. Отсюда следует и результат, который может быть представлен в двух эквивалентных формах:

$$\frac{dL}{dl} = \pi\mu_0\mu(nR)^2; \quad L = \pi\mu_0\mu\frac{NR^2}{l}$$

Опытные качественные факты об индукции

Из опыта хорошо известно, что любое вещество, если его внести в электрическое поле, проявляет ответную реакцию на такое воздействие.

Количественные оценки

насколько мала индукция, чтобы ей пренебрегать?

Определение вектора электрической индукции D

Определим вектор электрической индукции в вакууме, отличающийся от поля лишь коэффициентом:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}$$

так что, например, теорема Гаусса может быть представлена в виде:

$$\oint \mathbf{D} d\mathbf{S} = \sum_i q_i$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho$$

вместо выражений (1.10), (1.14)??????

Пока и поскольку мы рассматриваем поле в вакууме, физический смысл величин **E** и **D** остается тождественным.

качественное рассмотрение ЭП в диэлектрике

Пусть теперь предметом рассмотрения будет электрическое поле в диэлектрической среде.

Представим себе реакцию среды.

Если даже ее проводимость пренебрежимо мала, это не означает запрета на смещение во внешнем поле заряженных частиц относительно их равновесного положения в нейтральном атоме либо кристалле.

Результатом смещения окажется некоторое ослабление внешнего поля, как говорят, экранирование.

Сама же реакция среды - поляризация - может быть представлена распределенным в среде электрическим дипольным моментом.

При не слишком больших напряженностях поля в веществе естественно ожидать, что дипольный момент и поле будут связаны линейной зависимостью (да и более сложную функциональную связь можно в слабых полях приближенно представить первым членом ряда Тэйлора).

Поскольку обе величины являются векторными, естественно ожидать, что эти векторы будут параллельны.

плотность дипольного момента

Итак, предлагается следующее соотношение между полем **E** и плотностью дипольного момента **P**:

$$\mathbf{P} \equiv \frac{d\mathbf{p}}{dV} = \beta \cdot \varepsilon_0 \mathbf{E}$$

Величина ε_0 выделена в коэффициенте особо для удобства последующих вычислений; под **E** понимается действующее поле в среде - только его и могут воспринимать заряженные частицы.

Сделаем два важных замечания.

Во-первых, сколь ни естественны наши предположения при введении зависимости (2.4), нельзя исключить и обратных предположений - скажем, в сильных полях связь может оказаться существенно нелинейной.

граница применимости линейной той связи выше

Формула применима, если расстояния больше полей атомов в решетке.

потом четко напишу.

Подразумевается усреднение в пространстве и/или во времени с таким пространственным и временным масштабом, что микроскопические эффекты из нашего поля зрения исчезают и остается лишь умеренной напряженности электрическое поле, которое может быть измерено на макромасштабе и макроскопическим регистрирующим прибором.

При этом диэлектрик рассматривается просто как сплошная среда.

две модельных задачи

Рассмотрим две модельных задачи, геометрия которых представлена на рис.

???? 2.1 а, б.

Прежде всего, пусть имеется малый параллелепипед, мысленно выделенный в объеме однородно поляризованного диэлектрика, так что вектор плотности дипольного момента $\mathbf{P}$ (его называют также вектором поляризации) параллелен оси x. Пусть стороны параллелепипеда соответственно равны $\Delta x, \Delta y, \Delta z$.

Тогда полный его

равны $\Delta x, \Delta y, \Delta z$. Тогда полный его дипольный момент равен $p_x = P_x \Delta x \Delta y \Delta z$. С другой стороны, нетрудно сообразить, что при однородной поляризации - смещении всех отрицательных зарядов относительно всех положительных - плотность заряда в объеме тела остается невозмущенной и лишь на торцевых гранях появляются поверхностные заряды $\mp\sigma_x$. Из определения дипольного момента (1.23) следует

$$p_x = \sum_i q_i x_i = (\sigma \Delta y \Delta z) \cdot \Delta x$$

Сравнивая оба результата, получаем $P_x = \sigma_x$, или в общем случае границы поляризованного диэлектрика - скачок поляризации

$$\Delta(\mathbf{P})_n = \sigma$$

где индекс n означает компоненту, нормальную к поверхности разрыва.

В случае неоднородной поляризации в объеме может возникнуть и ненулевое возмущение заряда.

Такой заряд принято называть связанны.м, в отличие от свободных зарядов, с которыми мы до сих пор имели дело.

Связанный заряд не может быть ни создан внешним источником, ни снят с тела, поскольку это лишь определенное состояние среды, обусловленное воздействием электрического поля и оставляющее тело электрически нейтральным.

Смоделируем неоднородную поляризацию среды, соединив торцами два малых параллелепипеда, как показано на рис.

2.1 б.

В соответствии с (2.5) на первом стыке возникает заряд

$$dq = dydz \cdot \Delta\sigma_x \approx -dxdydz \frac{\partial P_x}{\partial x}$$

Относя эту величину к объему элементарного параллелепипеда, получаем ответ уже в достаточно универсальном виде плотности

заряда:

$$\rho_{\text{связ}} = -\frac{\partial P_x}{\partial x}$$

Аналогичные ответы последуют при неоднородности поляриза- ции в направлениях y и z. В общем же случае мы должны будем взять их сумму:

$$\rho_{\text{связ}} = -\left[\frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial P_y}{\partial y} + \frac{\partial P_z}{\partial z}\right] = -\operatorname{div}\mathbf{P}$$

Этот результат позволит нам получить достаточно общее уравнение для поля в диэлектрике.

Обратимся к уравнению (1.14) и подставим в его правую часть плотность всех зарядов, как свободных, так и связанных:

$$\varepsilon_0 \operatorname{div}\mathbf{E} = \rho_{\text{своб}} + \rho_{\text{связ}} = \rho - \operatorname{div}\mathbf{P}$$

Мы сохранили обозначение ρ за плотностью свободных зарядов.

Введем понятие индукции электрического поля в случае диэлектрической среды, по отношению к которому данное выше определение (2.1) окажется естественным для вакуумного поля частным случаем:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

Сравнивая (2.7) и (2.8), нетрудно убедиться, что электрическая индукция $\mathbf{D}$ по-прежнему удовлетворяет уравнениям $(2.2), (2.3)$. Зависимость, связывающая $\mathbf{D}$ и $\mathbf{E}$, не столь универсальна; более того, она зависит еще и от того приближения, в котором мы описываем диэлектрическую среду.

В случае простой модели Получаем

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0(1+\beta)\mathbf{E} \equiv \varepsilon_0 \varepsilon \mathbf{E}$$

Величина β называется поляризуемостью среды, а $\varepsilon = 1+ +\beta$ - диэлектрической проницаемостью.

Таким образом, если среда однородна, то, действительно, поле в сравнении с вакуумной ситуацией просто ослабляется в ε раз.

В частности, закон Кулона может быть переписан в виде

$$\mathbf{F}_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_{12}^2}\frac{\mathbf{r}_{21}}{r_{12}}$$

Рассмотрим конденсатор, емкость которого в отсутствие диэлектрического заполнения $-C_0$. Заполним пространство между обкладками диэлектриком с постоянной ε.

Если при этом конденсатор был отключен от источника, должны сохраниться заряды на обкладках $\mp Q$. Тем самым при заданном распределении свободных зарядов сохраняется величина индукции; поле же падает в ε раз.

Исходя из соотношений

$$U = \frac{U_0}{\varepsilon} \equiv \frac{Q}{C}.$$

получаем $C = \varepsilon C_0$.

Если конденсатор был подключен к источнику, то инвариантным остается напряжение на обкладках, а значит и электрическое поле в конденсаторе.

Следовательно, индукция обязана возрасти в ε раз, а с ней, в согласии с $(2.2), (2.3)$, и заряды на обкладках.

В итоге снова приходим к тому же ответу - он вообще оказывается универсальным:

$$C = \varepsilon C_0$$

Важно не забывать про усреднение (???!!!)

Базируясь на подобных тривиальных примерах, авторы некоторых публикаций позволяют себе смелые заявления: «Электрическая индукция - с точностью до коэффициента есть поле свободных зарядов, без учета поляризации среды».

«Индукция и поле связаны между собой коэффициентом диэлектрической проницаемости вещества».

Оба эти утверждения в общем случае неверны.

И дело не только в том, что связь между $\mathbf{P}$ и $\mathbf{E}$ может не быть линейной.

Переход от поля свободных, т.е. заданных извне зарядов к истинному полю не есть результат простого суммирования внешнего воздействия и отклика, но еще и переход от точного К некоторому усредненному описанию.

Как мы увидим далее на примере сегнетоэлектриков, пространственное распределение **D** И **E** может быть вообще существенно различным и притом В отсутствие свободных зарядов.

Более того, эти два вектора могут оказаться противоположны по направлению.

Формально это получается из того, что совпадение уравнений индукции и поля в пустоте еще не означает совпадения решений, ибо решать их следует при разных граничных условиях.

корректное определение энергии ЭП и МП

В предшествующих главах мы расширили известное из механики понятие энергии, введя корректным образом энергию электрического, а затем и магнитного поля.

2.3.5 Coulomb's Law

Описание

согласно закону Кулона, точечный источник, помещенный в центре координат, т.е. заряд e, создает электрическое поле:

$$\mathcal{E} = \frac{e}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

Вычислим поток электрического поля через сферу радиуса r с элементом плопади $\mathbf{d}^2\mathbf{\Sigma} = r^2\mathbf{d}\Omega\boldsymbol{r}/r$, где

$$\oint_{\partial V_r} \mathbf{d}^2\mathbf{\Sigma}\cdot\mathcal{E} = e\int \mathbf{d}\Omega = 4\pi e$$

Согласно теореме Гаусса поток вектора через замкнутую поверхность ∂V, являющуюся границей объема V, равен интегралу дивергенции вектора по этому объему

$$\oint_{\partial V} \mathbf{d}^2\mathbf{\Sigma}\cdot\mathcal{E} = \int\limits_V \mathbf{d}V\,\mathrm{div}\,\mathcal{E}$$

так что закон Кулона может быть переписан в интегральной форме

$$\int\limits_V \mathbf{d}V\,\mathrm{div}\,\mathcal{E} = 4\pi e = 4\pi\int\limits_V \mathbf{d}V\rho$$

где мы ввели плотность заряда ρ.

Заметим, что сферу, охватывающую заряд в ее центре, можно деформировать в замкнутую фигуру любой формы.

В самом деле, если поверхность замкнутая, то интеграл по ее ориентированной поверхности равен нулю1 .

Тогда поток электрического поля по поверхности бесконечно малого объема, внутри которого нет заряда, можно представить как интеграл от постоянного значения электрического поля в точке внутри объема плюс поправки второго порядка малости из-за зависимости поля от точки на поверхности (сингулярность возникает, если только заряд внутри объема), а поток постоянного поля по замкнутой поверхности обращается в нуль.

Суммирование по таким бесконечно малым объемам, не содержащим заряд, дает конечный объем, произвольной формы, поток электрического поля через поверхность которого равна нулю.

Теперь представим себе, например,

опыт, подтверждающий закон Кулона

хз

О модификациях (??)

(хз, но вообще, это больше теория поля.)

Виртуальный фотон как переносчик силы Кулона (!??!?!?!?!?)

(потом из КТП выпишу, пока физически плохо это представляю, типа у нас даже в электростатике все в фотонах, пусть и только ЭП есть?????)

2.3.6 Gauss' Law (!?)

(тут его и обсужу подробно.)

Теорема Гаусса в дифференциальной и интегральной формах

Обратимся к рис.
1.1.
Пусть некоторый заряд q окружен гладкой замкнутой поверхностью S. Выделим на ней малый элемент dS. Пусть $\mathbf{n}$ - единичный вектор нормали к dS, а φ - угол между векторами $\mathbf{E}$ и п.

При вычислении некоторых поверхностных интегралов оказывается удобным представить дифференциал поверхности в векторной форме.

По определению, вектором элемента площади $d\mathbf{S}$ называется
$dS \cdot \mathbf{n}$, соответственно,

$$(\mathbf{E}d\mathbf{S}) \equiv (\mathbf{En})dS \equiv E\cos\varphi dS$$

Также по определению, потоком вектора $\mathbf{E}$ через поверхность S называется поверхностный Интеграл

$$\oint \mathbf{E}d\mathbf{S} \equiv \int\limits_S (\mathbf{En})dS = \int\limits_S E\cos\varphi dS$$

При этом в случае замкнутой поверхности (рис.
1.1) поток B (1.7) будем определять по отношению к внешней нормали (в противном случае поток имел бы ту же величину, но противоположный знак).

Для последующих выкладок нам полезно вспомнить еще определение телесного угла.

Линейный угол, как известно, определяется отношением элемента дуги к радиусу.

Телесный же угол Ω, по аналогии (см.
рис.
1.1) определяется отношением площади, нормальной к радиусу-вектору, к квадрату этого радиуса.

Удобно определить его через малый элемент:

$$d\Omega = \frac{dS_\perp}{r^2} = \frac{(d\mathbf{Sn})}{r^2} = \frac{dS\cos\varphi}{r^2}$$

Полный линейный угол равен отношению длины окружности к радиусу, т.е.
2π, аналогично, полный телесный угол равен
отношению площади поверхности сферы к квадрату радиуса, Т. е.

4π.

Теперь подставим первое - скалярное - равенство B (1.7) и воспользуемся соотношением (1.8):

$$\oint \mathbf{E}d\mathbf{S} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int\limits_S \frac{dS\cos\varphi}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int d\Omega = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Таким образом, поток вектора **E** через поверхность, окружающую заряд, равен, с точностью до коэффициента ε_0^{-1}, величине этого заряда.

Два обстоятельства стоят того, чтобы их отметить.

Во-первых, ни симметрия поверхности, ни точка расположения заряда абсолютно не существенны.

Во-вторых, источником поля может быть и не один точечный заряд, но любая система зарядов.

В этом случае следует руководствоваться принципом суперпозиции.

Поток поля любого заряда, расположенного вне замкнутой поверхности, будет равен нулю (удобно иллюстрировать это на языке силовых линий, пронизывающих поверхность), а каждый из потоков от внутренних зарядов будет соответствовать формуле (1.9).

Итак, поле может быть произвольной природы, но поток его через замкнутую поверхность задается лишь заключенным в ней суммарным зарядом (разумеется, с учетом знака)

$$\oint \mathbf{E}d\mathbf{S} = \sum_i \frac{q_i}{\varepsilon_0}$$

Это и есть теорема Гаусса (по имени немецкого математика, астронома и физика К.Ф. Гаусса (1777–1855)).

Она, как уже отмечалось, принадлежит к числу основных законов электроди- намики; вместе с тем, это хороший инструмент для решения задач электростатики, особенно в случае достаточно высокой симметрии зарядовой системы.

Рассмотрим в качестве примера поле одномерного и двумерного «точечного заряда» — соответственно, равномерно заряженной плоскости и однородно заряженной нити (рис. 1.2$a, б$). Из симметрии задачи следует, что в первом случае вектор **E** направлен по нормаЛИ к плоскости (причем его направление по отношению к ней одинаково в обоих полупространствах), а во втором - по радиусу (при том, что OO' - ось симметрии).

Пусть заряд распределен по плоскости с плотностью $\sigma \equiv dQ/dS$(рис. 1.2a). Возьмем цилиндрическую поверхность, образующая которой совпадает с нормалью к плоскости,

основание имеет произвольную форму площади S, причем заряженная плоскость пересекается с боковой поверхностью между двумя основаниями цилиндра.

Заметим, что поскольку **E** перпендикулярно плоскости, то и «густота» силовых линий, т.е. напряженность поля постоянна в каждом полупространстве, а в двух полупространствах, разграниченных заряженной плоскостью, отличается знаком.

Поэтому интегральное соотношение (1.10) вырождается в алгебраическое:

$$(\mathbf{SE}_1) - (\mathbf{SE}_2) = E \cdot 2S = \varepsilon_0^{-1}\sigma \cdot S$$

откуда следует:

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

Обратимся к геометрии рис. 1.2 б.

Пусть $q^* \equiv dQ/dl$ - линейная плотность заряда нити.

Окружим последнюю цилиндрической поверхностью длины l и радиуса R. Теперь (1.10) преобразуется к виду

$$E \cdot 2\pi Rl = \varepsilon_0^{-1} q^* l$$

что дает:

$$E = \frac{q^*}{2\pi\varepsilon_0 R}$$

Выражения (1.11),(1.12) могут быть получены и непосредственно из закона Кулона, но вычисления будут достаточно громоздкими.

Для полноты описания представим теорему Гаусса еще и в локальной форме, опираясь не на интегральные соотношения, а на параметры поля в данной точке пространства.

Для этого удобно использовать дифференциальный оператор дивергенцию вектора, - который был введен в гл.

8 раздела «Механика»: $\operatorname{div}\mathbf{E} \equiv \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$.

Его часто записывают как скалярное произведение оператора векторного дифференцирования ∇ («набла») -

$$\nabla \equiv \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

- на векторную функцию:

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = \nabla \cdot \mathbf{E}$$

Здесь $\mathbf{e}_{x,y,z}$ - орты соответствующих осей. В математическом анализе известна теорема Гаусса-Остроградского: поток вектора через замкнутую поверхность равен интегралу от его дивергенции по объему, ограниченному этой поверхностью, -

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \operatorname{div}\mathbf{E} dV$$

2.3.7 Faraday's Law

мотивация

О принципе ле Шателье–Брауна

(вроде он обобщение правила Ленца, но посмотрим)

Этот принцип в простейшей форме выглядит следующим образом: если некая смесь веществ пребывает в динамическом равновесии за счет встречных экзо- и эндотермической реакций, то при нагревании быстрее начинает идти эндотермическая реакция, а при охлаждении — экзотермическая.

(прямо очень непонятно, откуда такой он?)

(немного укажу про него. где применяется? везде что ли?)

опыт, подтверждающий закон Фарадея

Принцип Ленца

В электродинамике близкий по идее принцип к принципу ле Шателье был сформулирован знаменитым российским ученым-естественником Э. Х. Ленцем.

Токи, возникающие в проводнике при движении его в магнитном поле, направлены так, что силы, действующие на эти токи, противодействуют движению проводника.

С учетом иных возможностей изменения магнитного потока может быть предложена более общая формулировка.

Отклик динамической системы на перестройку магнитно- го поля всегда имеет тенденцию противодействовать этой перестройке. Если уронить медную или серебряную монетку между полю- сами мощного электромагнита, то невооруженным глазом можно

наблюдать замедление — даже весьма значительное — скорости по сравнению со свободным падением.

Это «работают» магнитное давление и натяжение силовых линий. (??????)

Основная причина того, что эти механизмы вступают в игру, может быть связана с принципом Ленца.

Равным образом объясняются этим принципом токи Фуко в железном сердечнике трансформатора (из-за которых его обычно набирают из отдельных пластин) и работа динамомашины.

Заметим что в первом из этих двух случаев нет ни движения проводника в поле, ни деформации контура, но лишь осциДляция магнитного поля в сердечнике как следствие непостоянства тока.

Это и соответ- ствует второй — более общей — формулировке принципа Ленца. Приходится, однако, встречаться с очень грубой его трактовкой, типа «реакция противоположна воздействию».

Если бы это было правильно, то в природе, например, не существовало бы ни пара-, ни ферромагнетиков, но лишь диамагнетики.

Потому и существенна оговорка относительно реакции динамической системы. Ларморова прецессия и вызванный ею диамагнетизм, и в самом деле, вполне согласуются с правилом Ленца, но, к примеру, ферромагнитные явления уже не могут быть сведены к такой схеме. Круг явлений, подпадающий под принцип Ленца, принято на- зывать электромагнитной индукцией.

Закон Фарадея

Основной количественный закон здесь был установлен английским физиком Майклом Фарадеем (1791–1867).

Пусть имеется замкнутый контур любой природы (проводящий или непроводящий — даже мысленно очерченный), и пусть по любой причине — движение, деформация, затухание тока в контуре, изменение внешнего магнитного поля — изменяется во времени магнитный поток через означенный контур.

Тогда в контуре возникает ЭДС $\mathscr{C}$, которая может быть найдена из соотношения:

$$\mathscr{C} = \oint \mathbf{E} d\mathbf{l} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Знак в (6.7) отражает то обстоятельство, что возбуждаемая в контуре ЭДС индукции по направлению такова, что противодействует изменению магнитного потока.

В частности, при идеальной проводимости контура поток, который им охватывается, должен быть инвариантом.

Это относится как к тому случаю, когда охватывающий контур является сверхпроводящим, так и к тому, когда пространственные и временные масштабы задачи позволяют считать его идеальным проводником.

(Эти две ситуации не следует путать; мы еще вернемся к этому вопросу В ГЛ. 9.)

Из (6.7) следует введенная в гл. 4 размерность магнитного потока 1 Вб = 1 А. с. Ом.

По этому поводу следует, впрочем, заметить, что расшифровка единиц в системе СИ в принципе может быть любой, которая не противоречила бы их определению, но обычно предпочитают пользоваться размерностью, следующей из наиболее употребительных законов и по возможности не опирающейся на размерность «вакуумных» констант μ_0 и ε_0.

В некоторых простых случаях соотношение (6.7) может быть получено как следствие уже известных законов.

Поставим следующий мысленный эксперимент (рис. 6.2): имеется проводящий контур, составленный из двух направляющих, замкнутых с одной стороны неподвижной перемычкой, а с другой подвижной, которая движется вдоль направляющих со скоростью $\mathbf{v}$. Расстояние между направляющими равно l, Контур помещен в магнитное поле $\mathbf{B}$, ортогональное его плоскости.

Рассмотрим электрон в подвижной перемычке, Который движется вместе с ней, а значит, на него действует сила Лоренца $\mathbf{F} = -e[\mathbf{vB}]$. Как уже не раз отмечалось, это означает, что в системе отсчета, связанной с перемычкой, возникает электрическое поле $\mathbf{E} = [\mathbf{vB}]$. Отсюда циркуляция $\oint \mathbf{E}d\mathbf{l} = vBl$. И поскольку $vl = dS/dt$, отсюда как раз следует формула (6.7).

В общем случае, однако, ее не удается вывести, так что этот закон должен рассматриваться как опытный факт.

Полезно лишний раз отметить (см. рис. 6.2), что ток, порождаемый индукционным электрическим полем, в свою очередь, порождает магнитное поле, по направлению противоположное внешнему полю B, и тем самым как бы «старается» скомпенсировать увеличение магнитного потока через контур — в согласии с принципом Ленца.

При обратном направлении движения рамки генерируется поле того же направления, что и приложенное извне.

2.3.8 Biot–Savart law

опыт, подтверждающий закон БСЛ

хз

2.3.9 Overview of Theoretical Forms of Maxwell Equations

(there are really a lot of them, so there is no sense to write about each here. I'll write it at the end of this note, and here I'll only point out what can be and why?)

2.3.10 Laws of Motion of a Particle in an Electromagnetic Field

(по идее этого раздела полностью на это хватит, но там посмотрим. вообще, в механике уже решал это.)

Основное описание

движение в $E||B$

движение в $E\perp B$

Движение в магнитных ловушках

(тут опишу всё это, из К-С задачи про это есть, также из ЛЛ2. подумаю про это много потом.)

Основные формулы движения в магнитных ловушках

2.3.11 Typical Models of Particle Motion in an Electromagnetic Field

2.4 Parameters of Electrodynamics

2.4.1 Dielectric Constant ε

суть

Обзор применений

2.4.2 Magnetic Permeability μ

суть

хз, магнитостатику прорешать нужно!!!

Обзор применений

2.4.3 Magnetization

очень важный объект ЭСС.

2.4.4 Electromagnetic Induction

(discuss this concept in detail here)

2.4.5 Electrical Capacitance

(discuss what electrical capacitance is in general and how is it used?)

Основные формулы

Суть емкости

потом пропишу

Обзор применений

2.4.6 Currents

важно разобраться с ними четко!!!

Определение тока

чет там знак минус вроде как еще появляется, хз.
или мб от направления движения зарядов зависит?
пропишу потом.

2.5 Fundamental Properties of Electrodynamics

2.5.1 Overview of Theoretical Derivations of Maxwell Equations

(just discuss approaches and ideas, derivations will be at the latter sections)

2.5.2 Limits on the Applicability of Classical Electromagnetic Fields as Inferred from the Radiation Reaction by McDonald (1998) 1

Abstract

Can the wavelength of a classical electromagnetic field be arbitrarily small, or its electric field strength be arbitrarily large? If we require that the radiation-reaction force on a charged particle in response to an applied field be smaller than the Lorentz force we find limits on the classical electromagnetic field that herald the need for a better theory, i.e., one in better accord with experiment. The classical limitations find ready interpretation in quantum electrodynamics. The examples of Compton scattering and the QED critical field strength are discussed. It is still open to conjecture whether the present theory of QED is valid at field strengths beyond the critical field revealed by a semiclassical argument.

Introduction

The ultimate test of the applicability of a physical theory is the accuracy with which it describes natural phenomena. Yet on occasion the difficulty of a theory in dealing with a "thought experiment" provides a clue as to limitations of that theory.

It has long since been recognized that classical electrodynamics has been surplanted by quantum electrodynamics in some respects. But one doubts that quantum electrodynamics, or even its generalization, the Standard Model of elementary particles, is valid in all domains. To aid in the search for new physics, it is helpful to review the warning signs of the past transitions from one theoretical description to another.

The debates as to the meaning of the classical radiation reaction for pointlike particles provide examples of such warning signs. One case is the "4/3 problem" of electromagnetic mass, where covariance does not imply uniqueness [1]. Such difficulties have often been interpreted as suggesting that classical electrodynamics cannot be a complete description of matter on the scale of the classical electron radius, $r_0 = e^2/mc^2$ in Gaussian units.

It seems less appreciated that the part of the classical radiation reaction that is independent of particle size provides clues as to the limits of applicability of classical electromagnetic fields. For example, a recent article [2] ends with the sentence, "Only when all distances involved are in the classical domain is classical dynamics acceptable for electrons". While this condition is necessary, it is not sufficient. For a classical description to be accurate, an electron can only be subject to fields that are not too strong. This paper seeks to illustrate what "not too strong" means.

Considerations of strong fields have been very influential in the development of other modern theories besides quantum electrodynamics. In classical gravity, i.e., general relativity, the strong-field problem is identified with black holes. One of the best known intersections between gravity and quantum electrodynamics is the Hawking radiation of black holes. In the case of the strong (nuclear) interaction, the fields associated with nuclear matter all appear to be strong, and weak fields are thought to exist only in the high-energy limit (asymptotic freedom). Such considerations led to the introduction of non-Abelian gauge theories. These constructs, when applied to the weak interaction, led to the concept of a background (Higgs) field that is strong in the sense of having a large vacuum expectation value, which in turn has the effect of generating the masses of the W and Z gauge bosons. Most recently, considerations of the strong-field (strong-coupling) limit of string theories have led to the notion of "duality", i.e., the various string theories of the 1980's are actually different weak-field limits of a single strong-field theory. These string theories are noteworthy for suggesting that particles are to be considered as excitations of small, but extended quantum strings, thereby avoiding the infinite

self energies that have appeared in theories of point particles since J.J. Thomson introduced the concept of electromagnetic mass in 1881 [3].

The main argument concerning classical electromagnetic fields is given in sec. 2, and is brief. This argument could have been given around 1900 by Lorentz [4, 5, 6] or by Planck [7]. who made remarks of a related nature. But the argument seems to have been first made in 1935 by Oppenheimer [8], and more explicitly by Landau and Lifshitz [9]. Additional historical commentary is given in sec. 1.1. Sections 2.1-2.5 comment on various aspects of the main argument, still from a classical perspective. A quantum view in introduced in sec. 3, and the important examples of Compton scattering and the QED critical field are discussed in secs. 3.1-2. The paper concludes in sec. 4 with remarks on the role of strong fields on the development of quantum electrodynamics, and presents two examples (secs. 4.1-2) of speculative features of strong-field QED and one of very short distance QED (sec. 4.3).

Historical Introduction

The relation between Newton's third law and electromagnetism has been of concern at least since the investigations of Ampère, who insisted that the force of one current element on another be along their line of centers. See Part IV, Chap. II, especially sec. 527, of Maxwell's *Treatise* for a review [10]. However, the presently used differential version of the Biot-Savart law does not satisfy Newton's third law for pairs of current elements unless they are parallel.

Perhaps discomfort with this fact contributed to the delay in acceptance of the concept of isolated electrical charges, in contrast to complete loops of current, until the late nineteenth century.

A way out of this dilemma became possible after 1884 when Poynting [11] and Heaviside [12] argued that electromagnetic fields (in suitable configurations) can be thought of as transmitting energy. The transmission of energy was then extended by Thomson [13], Poincaré [14] and Abraham [15] to include transmission (and storage) of momentum by an electromagnetic field.

That a moving charge interacting with thermal radiation should feel a radiation pressure was anticipated by Stewart in 1871 [16], who inferred that both the energy and the momentum of the charge would be affected.

In 1873, Maxwell discussed the pressure of light on conducting media at rest, and on "the medium in which waves are propagated" ([10], secs. 792-793). In the former case, the radiation of a reflected wave by a (perfectly conducting) medium in response to an incident wave results in momentum, but not energy, being transferred to the medium. The energy for the reflected wave comes from the incident wave.

The present formulation of the radiation reaction is due to Lorentz' investigations of the self force of an extended electron, beginning in 1892 [4] and continuing through 1903 [5]. The example of dipole radiation of a single charge contrasts strikingly with Maxwell's discussion of reaction forces during specular reflection. There is no net momentum radiated by an oscillating charge with zero average velocity, but energy is radiated. The external force alone can not account for the energy balance. An additional force is needed, and was identified by Lorentz as the net electromagnetic force of one part of an extended, accelerated charge distribution on another. See eq. (2.1) below.

In 1897, Planck [7, 17] applied the radiation reaction force of Lorentz to a model of charged oscillators and noted the existence of what are sometimes called "runaway" solutions, which he dismissed as having no physical meaning (keine physikalishe Bedeutung).

The basic concepts of the radiation reaction were brought essentially to their final form by Abraham [18, 19], who emphasized the balance of both energy and momentum in the motion of extended electrons moving with arbitrary velocity.

Important contributions to the subject in the early twentieth century include those of Som-

merfeld [20], Poincaré [21], Larmor [22], Lindemann [23], Von Laue [24], Born [25], Schott [26, 27, 28, 29], Page [30], Nordström [31], Milner [32], Fermi [33], Wenzel [34], Wesel [35] and Wilson [36]. The main theme of these works was, however, models of classical charges and the related topic of electromagnetic mass.

The struggle to understand the physics of atoms led to diminished attention to classical models of charged particles in favor of quantum mechanics and quantum electrodynamics (QED). In 1935, there was apparent disagreement between QED and reported observations at energy scales of 10-100 MeV. Oppenheimer [8] then conjectured whether QED might fail at high energies and, in partial support of his view, invoked a classical argument concerning difficulties of interpretation of the radiation reaction at short distances. The present article illustrates an aspect of Oppenheimer's argument that was developed further by Landau [9].

Another response to Oppenheimer's conjecture was by Dirac [37] in 1938, when he deduced a covariant expression for the radiation reaction force (previously given by Abraham, Lorentz and von Laue in noncovariant notation) by an argument not based on a model of an extended electron. Dirac also gave considerable discussion of the paradoxes of runaway solutions and pre-acceleration. This work of Dirac, and most subsequent work on the classical radiation reaction, emphasized the internal consistency of classical electromagnetism as a mathematical theory, rather than as a description of nature. But, as has been remarked by Schott [26], "there is considerable danger, in a purely mathematical investigation, of losing touch with reality". Quantum mechanics had triumphed.

Research articles on the classical radiation reaction are still being produced; see, for example, Refs. [38]-[89]. Sarachik and Schappert ([67], sec. IIID) present a brief version of the argument given below in sec. 2.

Reviews of the subject include Refs. [90]-[124]. Most noteworthy in relation to the present article are the reviews by Lorentz [6], Erber [100] and Klepikov [109], which are the only ones that indicate an awareness of the problem of strong fields. The texts of Landau and Lifshitz [9], Jackson [106] and Milonni [111] briefly mention that issue.

The radiation reaction has been a frequent topic of articles in the American Journal of Physics, including Refs. [2] and [113]-[129]. The article of Page and Adams [113] is noteworthy for illustrating how the concept of electromagnetic field momentum restores the full validity of Newton's third law in an interesting example of the interaction of a pair of moving charges.

A General Result for the Radiation Reaction

Consider an electron of charge e and mass m moving in electric and magnetic fields $\mathbf{E}$ and $\mathbf{B}$. The mass m is the "effective mass" in the language of Lorentz [6], now called the "renormalized" mass, for which the divergent electromagnetic self energy of a small electron is cancelled in a manner beyond the scope of this article. Then the remaining leading effect of the radiation reaction is the "radiation resistance" which is independent of hypotheses as to the structure of the electron. Our argument emphasizes the effect of radiation resistance, since any deductions about properties of electromagnetic fields will then be as free as possible from controversy as to the nature of matter.

The (nonrelativistic) equation of motion including radiation resistance is (in Gaussian units)

$$m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}_{\text{ext}} + \mathbf{F}_{\text{resist}}, \tag{2.1}$$

where

$$\mathbf{F}_{\text{ext}} = e\mathbf{E} + e\frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B} \tag{2.2}$$

is the Lorentz force on the electron due to the external field,

$$\mathbf{F}_{\text{resist}} = \frac{2e^2}{3c^3}\ddot{\mathbf{v}} + \mathcal{O}(\mathbf{v}/c) \tag{2.3}$$

is the force of radiation resistance, $\mathbf{v}$ is the velocity of the electron, c is the speed of light and the dot indicates differentiation with respect to time. Equation (2.3) is the form of the radiation reaction given in the original derivations of Lorentz [4] and Planck [7, 17], which is sufficient for the main argument of this paper. Some discussion of the larger context of the classical radiation reaction is given in secs. 2.1-5.

If the second time derivative of the velocity is small we estimate it by taking the derivative of (2.1):

$$\ddot{\mathbf{v}} \approx \frac{e\dot{\mathbf{E}}}{m} + \frac{e}{m}\frac{\dot{\mathbf{v}}}{c} \times \mathbf{B} + \frac{e}{m}\frac{\mathbf{v}}{c} \times \dot{\mathbf{B}}. \tag{2.4}$$

We further suppose that the velocity is small (without loss of generality according to the principle of relativity; see sec. 2.4 for a relativistic discussion). so it suffices to approximate $\dot{\mathbf{v}}$ as $e\mathbf{E}/m$ in (2.4). Hence,

$$\ddot{\mathbf{v}} \approx \frac{e\dot{\mathbf{E}}}{m} + \frac{e^2}{m^2 c}\mathbf{E} \times \mathbf{B}. \tag{2.5}$$

The radiation resistance is now

$$\mathbf{F}_{\text{resist}} \approx \frac{2e^2}{3c^3}\left(\frac{e\dot{\mathbf{E}}}{m} + \frac{e^2}{m^2 c}\mathbf{E} \times \mathbf{B}\right). \tag{2.6}$$

The first term in (2.6) contributes only for time-varying fields, which I take to have frequency ω and reduced wavelength $\lambda\!\!\!^{-}$; hence, $\dot{\mathbf{E}} \propto \omega\mathbf{E}$. The second term contributes only when $\mathbf{E} \times \mathbf{B} \neq 0$, which is most likely to be in a wave (with $E = B$) if the fields are large. So, for an electron in an external wave field, the magnitude of the radiation-resistance force is

$$\begin{aligned} F_{\text{resist}} &\approx \frac{2}{3}eE\sqrt{\left(\frac{e^2}{mc^2}\frac{\omega}{c}\right)^2 + \left(\frac{e^3 E}{m^2 c^4}\right)^2} \\ &\approx F_{\text{ext}}\sqrt{\left(\frac{r_0}{\lambda\!\!\!^{-}}\right)^2 + \left(\frac{E}{e/r_0^2}\right)^2}, \end{aligned} \tag{2.7}$$

where $r_0 = e^2/mc^2 = 2.8 \times 10^{-13}$ cm is the classical electron radius.

Equation (2.7) makes physical sense only when the radiation reaction force is smaller than the external force. Here we don't explore whether the length r_0 describes a physical electron; we simply consider it to be a length that arises from the charge and mass of an electron. Rather, we concentrate on the implication of eq. (2.7) for the electromagnetic field. Then we infer that a classical description becomes implausible for fields whose wavelength is small compared to length r_0, or whose strength is large compared to e/r_0^2.

Commentary

The argument related to eq. (2.7) is that there are classical electromagnetic fields that lead to physically implausible behavior when radiation-reaction effects are included. This does not necessarily imply any mathematical inconsistency in the theory. Indeed, various authors have displayed solutions for electron motion coupled to an oscillator of very high natural frequency [48, 101]. Such solutions are well-defined mathematically but appear "physically implausible". Of course, the mathematics might be correct in predicting the physical behavior in an unfamiliar situation. So it becomes a matter of experiment to decide whether the characterization "implausible" corresponds to physical reality or not. The experiments that produce the most influential results are typically those that reveal new phenomena in realms where prevailing theories are "implausible".

Thus far, there is no evidence for the behavior predicted by the classical equations for electrons interacting with waves of frequencies greater than c/r_0. Rather, quantum mechanics is needed for a good description of the phenomena observed in that case, Compton scattering being an early example (sec. 3.1). Laboratory studies of strong-field electrodynamics have been undertaking only recently (sec. 3.2), and deal primarily with effects not anticipated in a classical description.

The argument of sec. 2 can also be considered as a model-independent version of a restriction that Lorentz placed on his derivation of eqs. (2.1-2.3) ([6], sec. 37, eq. (73)). Namely, the derivation makes physical sense only if

$$\frac{l}{ct} \ll 1, \tag{2.8}$$

where l is a characteristic length of the problem, and t is a characteristic time "during which the state of motion is sensibly altered".

Lorentz would certainly have considered the classical electron radius, r_0, as an example of a relevant characteristic length. Hence, for an electron in an electromagnetic wave of (reduced) wavelength $\lambda\!\!\!^{-}$, the characteristic time of the resulting motion is $\lambda\!\!\!^{-}/c$, and Lorentz' condition (2.8) becomes

$$\frac{r_0}{\lambda\!\!\!^{-}} \ll 1, \tag{2.9}$$

A close variant of the above argument was also given by Planck [7].

In case of a strong field with a long (possibly infinite) wavelength, Lorentz' condition (2.8) can be interpreted as requiring the change in the electron's velocity to be small compared to the speed of light during the time it takes light to travel one classical electron radius. That is, we require

$$\Delta v = a\Delta t = \frac{eE}{m}\frac{r_0}{c} \ll c, \tag{2.10}$$

and hence,

$$E \ll \frac{mc^2}{er_0} = \frac{e}{r_0^2}. \tag{2.11}$$

Thus, we arrive by another (although closely related) path to the conclusion drawn previously from eq. (2.7). Perhaps because the limiting field strength implied by (2.11) is extraordinarily large by practical standards, neither Lorentz nor Planck mentioned it explicitly.

In the first sentence of his 1938 article, Dirac [37] stated that "the Lorentz model of the electron...has proved very valuable...in a certain domain of problems, in which the electromagnetic field does not vary too rapidly and the accelerations of the electrons are not too great". However, he does not elaborate on the meaning of "not too great".

Dirac's derivation of the radiation-reaction 4-force was not based on a model of an extended electron, and so the derivation was not subject to Lorentz' restriction (2.8). But as a co-inventor of quantum mechanics, Dirac cannot have expected his classical results to have unrestricted validity in the physical world.

In the decade after Dirac's 1938 paper, a few works [35, 40, 42, 43, 45, 49] appeared that commented on the concept of a limiting field strength, typically in classical discussions of electron-positron pair creation. In sec. 3.2 we return to the issue of pair creation, but in a quantum context.

After the discovery of pulsars in 1967 there was a burst of interest in the behavior of electrons in very strong magnetic fields. Several papers appeared in which classical electrodynamics was applied [66, 70, 71, 73, 74, 76, 77, 81], often with the intent of clarifying the boundary between the classical and quantum domains. For very large fields, classical solutions to the motion were obtained in which the electron has a damping time constant that is small compared to the period of cyclotron motion. Whether or not such highly damped solutions are "implausible",

they are outside ordinary experience. Again, one must perform experiments to decide whether the classical theory is valid in this domain. If such experiments had been possible prior to the development of quantum mechanics, they would have revealed deviations from the classical theory that would have encouraged development of a new theory. Arguments such as those leading to eqs. (2.7), (2.9) and (2.11) would have motivated the experiments.

Another Strong-Field Regime

Are there any other domains in which classical electrodynamics might be called into question?

Another interpretation of Lorentz' criterion (2.8) is that the amplitude of the oscillatory motion of an electron in a wave of frequency ω should be small compared to the wavelength. As is well known (see prob. 2, sec. 47 of Ref. [9]), this leads to the condition that the dimensionless, Lorentz-invariant quantity,

$$\eta = \frac{eE_{\text{rms}}}{m\omega c}, \tag{2.12}$$

should be small compared to one. Parameter η can exceed unity for waves of very low field strength if the frequency is low enough. An interesting result is that the electron can be said to have an effective mass,

$$m_{\text{eff}} = m\sqrt{1+\eta^2}, \tag{2.13}$$

when inside a wave field [134]. An electron in a spatially varying wave experiences a force $\mathbf{F} = -\nabla m_{\text{eff}}c^2$ which is often called the "ponderomotive force", but which can be regarded as a kind of radiation pressure for a case where the "reflected" wave cannot be distinguished from the incident wave, and hence as a kind of radiation reaction force in its broadest meaning.

Debates continue regarding energy-transfer mechanisms between electrons and strong classical waves (as represented by a laser beam with $\eta \gtrsim 1$). To what extent can net energy be exchanged between a free electron and a laser pulse in vacuum? Does a classical discussion suffice? Our understanding suggests that quantum aspects should be unimportant even for $\eta \gg 1$ so long as condition (2.11) is satisfied, but full understanding has been elusive. Detailed discussion of this matter is deferred to a future article.

Utility of the Classical Radiation Reaction

Besides provoking extensive discussion on the validity of classical electrodynamics, the radiation reaction has enjoyed some well-known success in classical phenomenology. In particular, the topics of linewidth of radiation by a classical oscillator and resonance width in scattering of waves off such an oscillator show how partial understanding of atomic systems can be obtained in a classical context. Also, the radiation reaction is very important in antenna engineering where the power source must provide for the energy (and momentum, if any) radiated as well as that consumed in Joule losses. It is worth noting that these successes hold where the electron is part of an extended system.

In contrast, the radiation reaction has been almost completely negligible in descriptions of the radiation of free electrons for practical parameters in the classical domain (i.e., outside the domain of quantum mechanics). That this might be the case is the main argument of sec. 2. Section 3 discusses effects of the radiation reaction in the quantum domain.

Relativistic Radiation Reaction

For purposes of additional commentary, it is useful to record relativistic expressions for the radiation reaction.

The relativistic version of (2.1) in 4-vector notation is

$$mc^2 \frac{du^\mu}{ds} = F^\mu_{\rm ext} + F^\mu_{\rm resist}, \tag{2.14}$$

with external 4-force $F^\mu_{\rm ext} = \gamma(\mathbf{F}_{\rm ext} \cdot \mathbf{v}/c, \mathbf{F}_{\rm ext})$, and radiation-reaction 4-force given by

$$F^\mu_{\rm resist} = \frac{2e^2}{3}\frac{d^2u^\mu}{ds^2} - \frac{Ru^\mu}{c}, \tag{2.15}$$

where

$$R = -\frac{2e^2c}{3}\frac{du_\nu}{ds}\frac{du^\nu}{ds} = \frac{2e^2\gamma^6}{3c^3}\left[\dot{\mathbf{v}}^2 - \frac{(\mathbf{v}\times\dot{\mathbf{v}})^2}{c^2}\right] \geq 0 \tag{2.16}$$

is the invariant rate of radiation of energy of an accelerated charge, $u^\mu = \gamma(1, \mathbf{v}/c)$ is the 4-velocity, $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$, $ds = cd\tau$ is the invariant interval and the metric is $(1, -1, -1, -1)$.

The time component of eq. (2.14) can be written

$$\frac{d\gamma mc^2}{dt} = \mathbf{F}_{\rm ext}\cdot\mathbf{v} + \frac{d}{dt}\left(\frac{2e^2\gamma^4\mathbf{v}\cdot\dot{\mathbf{v}}}{3c^2}\right) - R, \tag{2.17}$$

and the space components as

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma m\mathbf{v}}{dt} &= \mathbf{F}_{\rm ext} \\ &+ \frac{2e^2\gamma^2}{3c^3}\left[\ddot{\mathbf{v}} + \frac{3\gamma^2}{c^2}(\mathbf{v}\cdot\dot{\mathbf{v}})\dot{\mathbf{v}} + \frac{\gamma^2}{c^2}(\mathbf{v}\cdot\ddot{\mathbf{v}})\mathbf{v} + \frac{3\gamma^4}{c^4}(\mathbf{v}\cdot\dot{\mathbf{v}})^2\mathbf{v}\right]. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Keeping terms only to first order in velocity, eqs. (2.17-2.18) become

$$\frac{dmv^2/2}{dt} = \mathbf{F}_{\rm ext}\cdot\mathbf{v} + \frac{2e^2\mathbf{v}\cdot\ddot{\mathbf{v}}}{3c^3}, \tag{2.19}$$

and

$$\frac{dm\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}_{\rm ext} + \frac{2e^2\ddot{\mathbf{v}}}{3c^3} + \frac{2e^2(\mathbf{v}\cdot\dot{\mathbf{v}})\dot{\mathbf{v}}}{c^3}. \tag{2.20}$$

Equations (2.17-2.18) were first given by Abraham [19]. Von Laue [24] was the first to show that these equations can be obtained by a Lorentz transformation of the nonrelativistic results (2.19-2.20). The covariant notation of eqs. (2.14-2.16) was first applied to the radiation reaction by Dirac [37]. An interesting discussion of the development of eqs. (2.17-2.18) has been given recently by Yaghjian [110].

Terminology

During a century of discussion of the radiation reaction a variety of terminology has been employed. In this article I use the phrase "radiation reaction" to cover all aspects of the physics of "Rückwirkung der Strahlung" as introduced by Lorentz and Abraham. This usage contrasts with a proposed narrow interpretation discussed at the end of this section.

"Æthereal friction" was the first description by Stewart [16] in 1871, which he used in only a qualitative manner.

In 1873, Maxwell wrote on the "pressure exerted by light" in secs. 792-793 of his *Treatise* [10].

Lorentz used the French word "résistance" in describing eq. (2.3) when he presented it in 1892, and used the English equivalent "resistance" in his 1906 Columbia lectures [6].

Planck [7, 17] also discussed eq. (2.3), which he described as "Dämpfung" (damping) and "Dämpfung durch Strahlung" (literally, "damping by radiation" but translated more smoothly as "radiation damping"). The term "Strahlungsdämpfung" (radiation damping) does not, however, appear in the German literature until 1933 [34].

Around 1900, Larmor [22] used the terms "frictional resistance" and "ray pressure" to describe a result meant to quantify Stewart's insight, but which analysis has not stood the test of time.

The massive analyses of Abraham were accompanied by the introduction of several new terms. The title of Abraham's 1904 article [19] included the term "Strahlungsdruck" (radiation pressure). This use of the phrase "radiation pressure" can, however, be confused with the simpler concept of the pressure that results when a wave is reflected from a conducting surface [10]. Perhaps for this reason, Abraham also introduced the phrase "Reaktionskraft der Strahlung", which I translate as "radiation reaction force". This appears to be the origin of the phrase "radiation reaction", although in German that phrase remained a qualifier to "Kraft" (force) for many years. The variant "Strahlungsreaktion" (radiation reaction) appeared for the first time in 1933 [35].

Lorentz' 1903 Encyklopädie article [5] introduced the topic of the radiation reaction with the phrase "Rückwirkung des Äthers" (back interaction of the æther). In his 1905 monograph [90], Abraham used the variant "Rückwirkung der Strahlung" (back interaction of radiation, which could also be translated agreeably as "radiation reaction").

In England in 1908, the Adams Prize examiners chose the topic of the radiation reaction, suggesting the cumbersome title "The Radiation from Electric Systems or Ions in Accelerated Motion and the Mechanical Reactions on their Motion which arise from it". The winning essay by Schott [26] adopted much of this title, but in the text Schott refers to "radiation pressure" and indicates that he follows Abraham in this. In his 1915 article, Schott [27] also used the phrase "reaction due to radiation" and indicated that it was equivalent to his use of the phrase "radiation pressure".

Schott also introduced other terms that seem less than ideal descriptions of the phenomena associated with the radiation reaction. His argument of 1912 [26] is less crisp than one he gave in 1915 [27], so I follow the latter here. Schott considered the rate at which a radiating charge loses energy, and deduced eq. (2.17) in essentially that form. Schott noted that term R is just the rate of radiation of energy by an accelerated charge, which he described as an "irreversible" process. He then interpreted the term

$$Q = \frac{2\gamma^4 e^2 \mathbf{v}\cdot\dot{\mathbf{v}}}{3c^3}, \tag{2.21}$$

as an energy stored "in the electron in virtue of its acceleration" and gave it the name "acceleration energy". Schott considered the term $\dot{Q}$ in eq. (2.17) to be a "reversible" loss of energy.

Insights related to the concept of the "acceleration energy" have been useful in resolving the paradox of whether a charge radiates if its acceleration is uniform, i.e., if $\dot{\mathbf{v}} = 0$. In this case the radiation reaction force (2.3) vanishes and many people have argued that this means there is no radiation [25, 31, 72, 131]. But as first argued by Schott [27], in the case of uniform acceleration "the energy radiated by the electron is derived entirely from its acceleration energy; there is as it were internal compensation amongst the different parts of its radiation pressure, which causes its resultant effect to vanish". This view is somewhat easier to follow if "acceleration energy" means energy stored in the near and induction zones of the electromagnetic field [52, 99].

Schott's use of the word "irreversible" to describe the process of radiation seems inapt. He may have meant that in a classical universe containing only one electron and an external force field, the radiated energy can never return to the electron. But as noted by Planck [132], "the fundamental equations of mechanics as well as those of electrodynamics allow the direct reversal

of every process as regards time". For example, "if we now consider any radiation processes whatsoever, taking place in a perfect vacuum enclosed by reflecting walls, it is found that, since they are completely determined by the principles of classical electrodynamics, there can be in their case no question of irreversibility of any kind". However, "an irreversible element is introduced by the addition of emitting and absorbing substance". Thus, consistent use of the word "irreversible" goes beyond classical electron theory. These views of Planck were seconded by Einstein [133] and elaborated upon in the absorber theory of radiation of Wheeler and Feynman [95].

As another counterexample to the view that radiation is irreversible, a theme of contemporary accelerator physics is that every radiation process can be inverted to produce energy gain, not loss. Hence, there are now devices that accelerate electrons based on inverse Čerenkov radiation, inverse free-electron radiation, inverse Smith-Purcell radiation, inverse transition radiation, etc. Uniform acceleration is the inverse of uniform deceleration, and the inverse transformation is especially simple here: since $\mathbf{F}_{\text{resist}}$ vanishes, it suffices to reverse the sign of the external force. These inverse radiation processes will be the subject of a future paper.

Schott's use of "irreversible" as applied to the term $-Ru^\mu/c$ of the radiation reaction has not been followed in the German literature. See Ref. [99] for an interesting contrast.

The English phrase "radiation reaction" appears to have been first used by Page in 1918 [30].

In his 1938 paper, Dirac [37] used the phrase "the effect of radiation damping on the motion of the electron". As a consequence, most subsequent papers use "radiation damping" interchangeably with "radiation reaction" as a general description of the subject. Thus, in German there appeared the use of "Strahlungsdämfung" [34] (already in 1933), in French, "force de freinage" [43] (braking force, compare "rayonnement freinage" = Bremsstrahlung), and in Russian the equivalent of "radiation damping" must have been used as well [9]. Dirac seconded Schott's use of the terms "irreversible" and "acceleration energy", and these become fairly common in the English literature thereafter. Indeed, "acceleration energy" becomes "Schott acceleration energy", or just "Schott energy".

The terminology of Schott and Dirac was taken a step further by Rohrlich in 1961 [53] and 1965 [104], who proposed that only the second term in the covariant expression (2.15) is entitled to be called "the radiation reaction". The first term of (2.15) is to be called the "Schott term". A motivation for this terminology appears to be that in the case of uniform acceleration, expression (2.15) vanishes by virtue of cancellation of its two nonzero terms. Then the broadly defined "radiation reaction" (i.e., eq. (2.15)) vanishes, but the radiation does not (although it takes considerable effort to demonstrate this [52]). The terminology of Rohrlich has the merit that the paradox "how can there be radiation if there is no radiation reaction" is avoided in this case since only the (nonvanishing) term $-Ru^\mu/c$ is called the "radiation reaction".

However, this terminology is at odds with the origins of the subject, which emphasize the low-velocity limit, eqs. (2.19-2.20). Here, the radiated momentum enters only in terms of order v^2/c^2, so the direct back reaction of the radiated momentum (i.e., $-Ru^\mu/c$) plays no role in the nonrelativistic limit. Thus, according to Rorhlich's terminology there is no "radiation reaction" in the nonrelativistic limit.

But the original, and continuing, purpose of the concepts of the radiation reaction is to describe how a charge reacts to the radiation of energy when it does not radiate net momentum. To define the "radiation reaction" to be zero in this circumstance is counterproductive.

It appears that the terminology of Rohrlich has been adopted only by three subsequent workers [65, 67, 108].

2.5.3 Limits on the Applicability of Classical Electromagnetic Fields as Inferred from the Radiation Reaction by McDonald (1998) 2

A Quantum Interpretation

To go further, we pass beyond the realm of classical electromagnetism. The remainder of this paper is not a direct consequence of that theory, but considers how only a modest admixture of quantum concepts greatly clarifies the hints deduced by classical argument.

A simple device is to multiply and divide eq. (2.7) by Planck's constant $\hbar$, which was introduced by him [130] shortly after his work on eq. (2.1) [7]. Then we can write

$$\begin{aligned} F_{\text{resist}} &\approx F_{\text{ext}} \sqrt{\left(\frac{e^2}{\hbar c}\frac{\hbar}{mc}\frac{\omega}{c}\right)^2 + \left(\frac{e^2}{\hbar c}\frac{e\hbar}{m^2c^3}E\right)^2} \\ &\approx \alpha F_{\text{ext}} \sqrt{\left(\frac{\lambda\!\!\!^{-}_C}{\lambda\!\!\!^{-}}\right)^2 + \left(\frac{E}{E_{\text{crit}}}\right)^2}, \end{aligned} \tag{2.22}$$

where $\alpha = e^2/\hbar c$ is the QED fine structure constant, $\lambda\!\!\!^{-}_C = \hbar/mc$ is the reduced Compton wavelength of an electron and

$$E_{\text{crit}} = \frac{m^2c^3}{e\hbar} = 1.6 \times 10^{16} \text{ V/cm} = 3.3 \times 10^{13} \text{ Gauss} \tag{2.23}$$

is the QED critical field strength, discussed in sec. 3.2 below.

Thus, our naïve quantum theory (classical electromagnetism plus $\hbar$) leads us to expect important departures from classical electromagnetism for waves of wavelength much shorter than the Compton wavelength of the electron, and for fields of strength larger than the QED critical field strength.

The Radiation Reaction and Compton Scattering

Compton scattering [135] was one of the earlier predictions of quantum theory and its observation had an important historical role in widespread acceptance of photons as quanta of light. Compton scattering is distinguished from Thomson scattering of classical electromagnetism in that wavelengths of the photons involved in Compton scattering are not small compared to the Compton wavelength of the electron, when measured in the frame in which the electron is initially at rest. Hence Compton scattering appears to be exactly the kind of example discussed above in which the radiation reaction should be important.

A description of a quantum scattering experiment relates the energy and momentum (plus relevant internal quantum numbers) of the initial state to those of the final state without discussion of forces. Yet, we can identify various correspondences between the quantum and classical descriptions.

In the case of Compton scattering, the initial photon corresponds to the external force field on the electron, while the final photon corresponds to the radiated wave. The quantum changes in momentum (and energy) of the electron in the scattering process can be said to correspond to classical time integrals of force (and of $\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$). Conservation of momentum (and energy) is described in the scattering process by including the back reaction of the final photon on the electron as well as the direct reaction of the initial photon. Thus, the quantum description, which incorporates conservation of momentum (and energy), can be said to include automatically the (time-integrated) effects of the radiation reaction.

Compton scattering is an electromagnetic scattering process in which large changes in momentum (and energy) of the electron are observed (in the frame in which the electron is initially at rest). It can therefore be said to correspond to a situation in which the radiation reaction is large, in agreement with the semiclassical inferences of secs. 2 and 3.

The correspondence between quantum conservation of energy and the classical radiation reaction appears to involve only the second term, $-Ru^\mu/c$, in expression (2.15) for the radiation-reaction force. Since the electron has constant (though different) initial and final velocities in a scattering experiment, the "acceleration energy" Q of eq. (2.21) is zero both before and after the scattering, and the equivalent of $\dot{Q}$ cannot be expected to appear in the quantum description (at "tree level", in the technical jargon) of Compton scattering.

Effects corresponding to the near-field "acceleration energy" can be said to occur in quantum electrodynamics in the case of so-called vertex corrections and propagator (mass) corrections, in which a virtual photon is emitted and absorbed by the same electron. These "loop corrections" to the behavior of a quantum point charge implement the equivalent of the self interaction of an extended charge, but diverge when the emission and absorption occur at the same spacetime point. They are the source of the famous infinities of QED that are dealt with by "renormalization". See also sec. 4.1 below.

In the early 1940's, Heitler [136, 93] and coworkers [137, 138] formulated a version of QED in which radiation damping played a prominent role. Following the suggestion of Oppenheimer [8], they hoped that this theory would provide a general method of dealing with the divergences of QED. By selecting a subset of "loop corrections", they deduced an expression for Compton scattering that corresponds to classical Thomson scattering plus classical radiation damping. While this result is suggestive, it does not appear to be endorsed in detail by subsequent treatments of "renormalization" in QED.

The Critical Field

The second term under the radical in eq. (2.22) may be less familiar. The concept of a critical field in quantum mechanics began with Klein's paradox [139]: an electron that encounters an (electric) potential step appears to be reflected with greater than unit probability in Dirac's theory.

Sauter [140] noted that this effect arises only when the potential gradient is larger than the critical field, $m^2c^3/e\hbar$. The resolution of the paradox is due to Heisenberg and Euler [141], who noted that electrons and positrons can be spontaneously produced in critical fields – a very extreme form of the radiation reaction. The critical field has been discussed at a sophisticated level by Schwinger [142] and by Brezin and Itzykson [143], among many others.

An electron that encounters an electromagnetic wave of critical strength produces not only Compton scattering of the wave photons but also electron-positron pairs. These effects have recently been observed in experiments in which the author participated [144, 145].

There is speculation that critical magnetic fields exist at the surface of neutron stars [146, 147, 148], and may be responsible for some aspects of pulsar radiation.

Pomeranchuk [40] noted that the Earth's magnetic field appears to have critical strength from the point of view of an electron of energy 10^{19} eV, which energy is at the upper limit of observation of cosmic rays.

The critical field arises in discussion of the radiation, commonly called synchrotron radiation, of electrons moving in circular orbits under the influence of a magnetic field B. If an electron of laboratory energy $\mathcal{E} \gg mc^2$ moves in an orbit with angular velocity ω_0, then the characteristic frequency of the synchrotron radiation is

$$\omega \approx \gamma^3 \omega_0, \tag{2.24}$$

where $\gamma = \mathcal{E}/mc^2$ is the Lorentz boost to the rest frame of the electron. For motion in a magnetic field B, the cyclotron frequency ω_0 can be written

$$\hbar\omega_0 = \frac{mc^2 B}{\gamma B_{\rm crit}}, \tag{2.25}$$

where $B_{\rm crit} = m^2c^3/e\hbar$. Thus, the characteristic energy of synchrotron-radiation photons (often called the critical energy) is

$$\hbar\omega \approx \mathcal{E}\frac{\gamma B}{B_{\rm crit}}. \tag{2.26}$$

Hence an electron radiates away roughly 100% of its energy in a single synchrotron-radiation photon if the magnetic field in the electron's rest frame, $B^\star = \gamma B$, has critical field strength. In this regime a classical theory of synchrotron radiation is inadequate [149, 150].

Critical electric fields can be created for short times in the collision of nonrelativistic heavy ions, resulting in positron production [151, 152, 153].

As a final example of the inapplicability of classical electromagnetism in strong fields, the performance of future high-energy electron-positron colliders will be limited by the disruptive (quantum) effect of the critical fields experienced by one bunch of charge as it passes through the oncoming bunch [154].

Discussion

In this paper I have followed the example of Landau in using the argument of sec. 2 to suggest limitations to the concepts of classical electrodynamics. However, this line of argument appears to have played no role in the early development of quantum mechanics. Rather, the argument was used in the 1930's to suggest that quantum electrodynamics might have conceptual limitation when carried beyond the leading order of approximation [8, 141, 155, 156, 157, 158, 159]. The history of this era has been well reviewed in the recent book by Schweber [160].

While the program of renormalization, of which Lorentz was an early advocate in the classical context [6], appears to have been successful in eliminating the formal divergences that were so troublesome in the 1930's, quantum electrodynamics is still essentially untested for fields in excess of the critical field strength (2.23) [145]. It still may be the case that this realm contains new physical phenomena that will validate the cautionary argument of Oppenheimer [8].

We close with three examples to stimulate additional discussion. Two are from strong-field electrodynamics; while not necessarily suggesting defects in the theory, they indicate that not all aspects of QED are integrated in the most familiar presentations. The third example considers the case of extraordinarily short wavelengths.

The Mass Shift of an Accelerated Charge

We can rewrite the nonrelativistic expressions (2.1-2.3) for the radiation reaction as

$$\frac{d}{dt}\left(m\mathbf{v} - \frac{2e^2\dot{\mathbf{v}}}{3c^3}\right) = \mathbf{F}_{\rm ext}, \tag{2.27}$$

and the relativistic expressions (2.14-2.16) as

$$\frac{d}{ds}\left(mc^2u^\mu - \frac{2e^2}{3}\frac{du^\mu}{ds}\right) = F^\mu_{\rm ext} - \frac{Ru^\mu}{c}. \tag{2.28}$$

These forms suggest the interpretation that the momentum, $m\mathbf{v}$, of a moving charge is decreased by amount $2e^2\dot{\mathbf{v}}/3c^2$ if that charge is accelerating as well [52, 53].

If we take mc as the scale of the ordinary momentum, then the effect of acceleration, eE/m, due to an electric field E becomes large in eq. (2.27) only when $E \gtrsim m^2c^4/e^3 = e/r_0^2$, i.e., when the electric field is large compared to the classical critical field found in sec. 2.

This interpretation has been seconded by Ritus [161] based on a semiclassical analysis (classical electromagnetic field, quantum electron) of the behavior of electrons in a strong, uniform electric field. He finds that the mass of an electron (= eigenvalue of the mass operator) obeys

$$m = m_0 \left(1 - \frac{\alpha E}{2E_{\rm crit}} + \mathcal{O}(E^2/E_{\rm crit}^2)\right), \tag{2.29}$$

and remarks on the relation between this result and the classical interpretations (2.27-2.28). The mass shift of an accelerated charge becomes large when $E \gtrsim E_{\rm crit}/\alpha = e/r_0^2$, as found above.

The physical meaning of Ritus' result remains somewhat unclear. For example, a mass shift of the form (2.29) does not appear in Ritus' treatment of Compton scattering in intense wave fields [162] (which treatment agrees with other works), although the effective mass (2.13) does appear.

Hawking-Unruh Radiation

According to Hawking [163], an observer outside a black hole experiences a bath of thermal radiation of temperature

$$T = \frac{\hbar g}{2\pi c k}\ , \tag{2.30}$$

where g is the local acceleration due to gravity and k is Boltzmann's constant. In some manner, the background gravitational field interacts with the quantum fluctuations of the electromagnetic field with the result that energy can be transferred to the observer as if he(she) were in an oven filled with black-body radiation. Of course, the effect is strong only if the background field is strong.

An extreme example is that if the temperature is equivalent to 1 MeV or more, virtual electron-positron pairs emerge from the vacuum into real particles.

As remarked by Unruh [164], this phenomenon can be demonstrated in the laboratory according to the principle of equivalence: an accelerated observer in a gravity-free environment experiences the same physics (locally) as an observer at rest in a gravitational field. Therefore, an accelerated observer (in zero gravity) should find him(her)self in a thermal bath of radiation characterized by temperature

$$T = \frac{\hbar a^\star}{2\pi c k}\ , \tag{2.31}$$

where $a^\star$ is the acceleration as measured in the observer's instantaneous rest frame.

The Hawking-Unruh temperature finds application in accelerator physics as the reason that electrons in a storage ring do not reach 100% polarization despite emitting polarized synchrotron radiation [166]. Indeed, the various limiting features of performance of a storage ring that arise due to quantum fluctuations of the synchrotron radiation can be understood quickly in terms of eq. (2.31) [167].

Here we consider a more speculative example. Suppose the observer is an electron accelerated by an electromagnetic field E. Then, scattering of the electron off photons in the apparent thermal bath would be interpreted by a laboratory observer as an extra contribution to the radiation rate of the accelerated charge [168]. The power of the extra radiation, which I call

Unruh radiation, is given by

$$\frac{dU_{\rm Unruh}}{dt} = (\text{energy flux of thermal radiation}) \times(\text{scattering cross section}). \tag{2.32}$$

For the scattering cross section, we use the well-known result for Thomson scattering, $\sigma_{\rm Thomson} = 8\pi r_0^2/3$. The energy density of thermal radiation is given by the usual expression of Planck:

$$\frac{dU}{d\nu} = \frac{8\pi}{c^3}\frac{h\nu^3}{e^{h\nu/kT}-1}, \tag{2.33}$$

where ν is the frequency. The flux of the isotropic radiation on the electron is just c times the energy density. Note that these relations hold in the instantaneous rest frame of the electron. Then

$$\frac{dU_{\rm Unruh}}{dtd\nu} = \frac{8\pi}{c^2}\frac{h\nu^3}{e^{h\nu/kT}-1}\frac{8\pi}{3}r_0^2. \tag{2.34}$$

On integrating over ν we find

$$\frac{dU_{\rm Unruh}}{dt} = \frac{8\pi^3\hbar r_0^2}{45c^2}\left(\frac{kT}{\hbar}\right)^4 = \frac{\hbar r_0^2 a^{\star 4}}{90\pi c^6}, \tag{2.35}$$

using the Hawking-Unruh relation (2.31). The presence of $\hbar$ in eq. (2.35) reminds us that Unruh radiation is a quantum effect.

This equals the classical Larmor radiation rate, $dU/dt = 2e^2a^{\star 2}/3c^3$, when

$$E^\star = \sqrt{\frac{60\pi}{\alpha}}E_{\rm crit} \approx \frac{E_{\rm crit}}{\alpha}, \tag{2.36}$$

where $E_{\rm crit}$ is the QED critical field strength introduced in eq. (2.23). In this case, the acceleration $a^\star = eE^\star/m$ is about 10^{31} Earth g's.

The physical significance of Unruh radiation remains unclear. Sciama [169] has emphasized how the apparent temperature of an accelerated observed should be interpreted in view of quantum fluctuations. Unruh radiation is a quantum correction to the classical radiation rate that grows large only in situations where quantum fluctuations in the radiation rate become very significant. This phenomenon should be contained in the standard theory of QED, but a direct demonstration of this is not yet available. Likewise, the relation between Unruh radiation and the mass shift of an accelerated charge, both of which become prominent at fields of strength $E_{\rm crit}/\alpha$, is not yet evident.

The existence of Unruh radiation provides an interesting comment on the "perpetual problem" of whether a uniformly accelerated charge emits electromagnetic radiation [63]; this issue has been discussed briefly in sec. 2.5. The interpretation of Unruh radiation as a measure of the quantum fluctuations in the classical radiation implies that the classical radiation exists. It is noteworthy that while discussion of radiation by an accelerated charge is perhaps most intricate classically in case of uniform acceleration, the discussion of quantum fluctuations is the most straightforward for uniform acceleration.

In addition, Hawking-Unruh radiation helps clarify a residual puzzle in the discussion of the equivalence between accelerated charges and charges in a gravitational field. Because of the difficulty in identifying an unambiguous wave zone for uniformly accelerated motion of a charge (in a gravity-free region) and also in the case of a charge in a uniform gravitational field, there remains some doubt as to whether the 'radiation' deduced by classical arguments contains photons. Thus, on p. 573 of the article by Ginzburg [63] we read: "neither a homogeneous gravitational field nor a uniformly accelerated reference frame can actually "generate" free

particles, expecially photons". We now see that the quantum view is richer than anticipated, and that Hawking-Unruh radiation provides at least a partial understanding of particle emission in uniform acceleration or gravitation. Hence, we can regard the concerns of Bondi and Gold [50], Fulton and Rohrlich [52], the DeWitt's [58] and Ginzburg [63] on radiation and the equivalence principle as precursors to the concept of Hawking radiation.

Can a Photon Be a Black Hole?

While quantum electrodynamics appears valid in all laboratory studies so far, which have explored photons energies up to the TeV energy scale, will this success continue at arbitrarily high energies (i.e., arbitrarily short wavelengths)?

Consider a photon whose (reduced) wavelength $\lambda\!\!\!^{-}$ is the so-called Planck length [170],

$$L_P = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} \approx 10^{-33} \text{ cm}, \tag{2.37}$$

where G is Newton's gravitational constant. The gravitational effect of such a photon is quite large. A measure of this is the "equivalent mass",

$$m_{\text{equiv}} = \frac{\hbar\omega}{c^2} = \frac{\hbar}{c\lambda\!\!\!^{-}} = \frac{\hbar}{cL_P}. \tag{2.38}$$

The Schwarzschild radius corresponding to this equivalent mass is

$$R = \frac{2Gm_{\text{equiv}}}{c^2} = \frac{2\hbar G\omega}{c^3 L_P} = 2L_P = 2\lambda\!\!\!^{-}. \tag{2.39}$$

A naïve interpretation of this result is that a photon is a black hole if its wavelength is less than the Planck length. Among the scattering processes involving such a photon and a charged particle would be the case in which the charged particle is devoured by the photon, which would increase the energy of the latter, making its wavelength shorter still.

At very short wavelengths, electromagnetism and gravitation become intertwined in a manner that requires new understanding. The current best candidate for the eventual theory that unifies the fundamental interactions at short wavelengths is string theory. Variants of the preceding argument are often used to motivate the need for a new theory.

3 Other Laws of Electrodynamics

3.1 Response of a Media

3.1.1 Kramers-Kronig Relations

(see kinetics or statphys about it for now)

3.2 Laws of Electrodynamics in Special Configurations

3.2.1 Electrodynamics of Rotating Bodies (!??!)

(пока не готов все еще их описывать.)

(пока не готов все еще их описывать, слишком основы взяты слабо, задачи еще решать нужно сперва. но чуть что в статье On the influence of Earth's rotation on light propagation in waveguides по Thomas B Mieling 2020 Class. Quantum Grav. 37 225001 написаны эти уравнения. пока точно много подготовки нужно.)

3.2.2 What If the Space is Curved?

(just intro to what is going on in this part of science? detailed discussion is in the end of this note or in separate note)

Is it important to know this?

(a real discussion of importance of this theory)

Теория

(I'll write some general things about it)

Part III
Fields in Space

4 Main Laws of Fields in Space

4.1 Framework of Electrostatics

(пока такая структура, тут элементарные выгрузки)

4.1.1 Dipole Moment

(all about this model, see LL2)

Electric Dipole

Самое простое определение электрического диполя - пара зарядов $+q$ и $-q$, на расстоянии l друг от друга (рис.

1.4a); при этом величина $\mathbf{p} = q \cdot \mathbf{l}$ называется вектором дипольного момента.

Мы не ограничимся таким определением - как будет ясно из дальнейшего, физический смысл электрического диполя и дипольного момента оказывается более понятен, если мы несколько обобщим наше определение.

Пусть дана некоторая система зарядов $q_1, q_2, \dots q_n$, расположенных в точках $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots \mathbf{r}_n$. Достаточно очевидно, что на расстояниях, больших в сравнении с характерным расстоянием между зарядами, ее можно рассматривать как точечный заряд:

$$\mathbf{E} \approx \frac{Q}{r^3}\mathbf{r}; \quad \varphi \approx \frac{Q}{r}; \quad Q = \sum_i q_i$$

Что же определяет поле системы зарядов, если $\sum\limits_i q_i = 0$? Или, как ввести поправки, учитывающие конечный размер системы для ненулевого полного заряда? Следующим приближением

по отношению характерной величины $|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|$ к рас- стоянию до точки наблюдения и будет так называемое дипольное приближение.

Определим дипольный момент произвольной системы зарядов следующим образом:

$$\mathbf{p} = \sum_i q_i \mathbf{r}_i$$

Если зарядов всего два, и притом равных по величине и отличных по знаку, старое определение остается в силе - просто как следствие (1.23).

Но определение (1.23) является существенно более общим, поскольку вводится для произвольной системы зарядов.

Важно отметить, что формула (1.23) инвариантна относительно переноса начала координат, если полный заряд системы равен нулю.

Это нетрудно показать с помощью рис.

1.4 б.

Можно видеть, что при переносе начала отсчета из точки O в точку O'

имеем $\mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_i + \mathbf{R}$, откуда следует

$$\mathbf{p}' = \mathbf{p} + \mathbf{R}\sum_i q_i$$

При нулевой сумме зарядов дипольный момент и в самом деле оказывается инвариантом.

И если мы хотим определить поле нейтральной в целом системы заряженных частиц (например, поле заряженного плоского конденсатора), то именно дипольный момент системы оказывается принципиально важным.

Вычислим поле системы зарядов в точке A, удаленной в сравнении с характерным пространственным масштабом системы (рис.

1.4 в).

Начнем с потенциала, ограничившись первым членом разложения в ряд Тэйлора:

$$f(\mathbf{R}+\Delta\mathbf{R}) \approx f(\mathbf{R}) + \Delta x \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + \Delta y \cdot \frac{\partial f}{\partial y} + \ldots = f(\mathbf{R}) + \Delta\mathbf{R} \cdot \nabla f$$

Воспользовавшись тем, что $r_i \ll R$(см.

рис.

1.4 в), получаем

$$4\pi\varepsilon_0\varphi(A) = \sum_i \frac{q_i}{|\mathbf{R}-\mathbf{r}_i|} \approx \sum_i \frac{q_i}{R} - \sum_i q_i\mathbf{r}_i \nabla\frac{1}{R} =$$

$$= \frac{Q}{R} - \mathbf{p}\cdot\nabla\frac{1}{R} \overset{Q}{=} \frac{0}{R^3}.$$

Таким образом, у нейтральной системы с ненулевым дипольным моментом $\varphi \propto R^{-2}$. Теперь можно вычислить и поле:

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(3\frac{(\mathbf{pR})}{R^4}\frac{\mathbf{R}}{R} - \frac{\mathbf{p}}{R^3}\right) = \frac{3(\mathbf{pR})\mathbf{R} - R^2\mathbf{p}}{4\pi\varepsilon_0 R^5}$$

т.е.

при нулевом полном заряде $E \propto R^{-3}$. При этом, в отличие от точечного заряда, поле зависит от угла.

На примере (1.24),(1.25) можно убедиться, что зачастую полезно потратить время на под готовку корректных определений и затем использовать адекватный математический аппарат, если это позволяет избежать громоздКих вычислений.

Любая из этих формул, выведенная «в ЛОб», Потребовала бы много больше работы.

Далее, если мы будем говорить о точечном диполе, понимать это надо как нейтральную зарядовую систему, поле которой рассматривается на столь больших расстоянияХ, что справедливы соотношения (1.24), (1.25). И если для представлений об элементарном магнитном диполе современная физика дает некоторые основаниЯ, то в данном случае таковые отсутствуют: на сегодняшний день у элементарных частиц электрические диПОльные моменты не обнаружены.

Вычислим в дипольном приближении энергию системы зарядов во внешнем поле: $U = \sum\limits_i q_i\varphi\left(\mathbf{R}+\mathbf{r}_i\right) = \varphi(\mathbf{R})\sum\limits_i q_i + \sum\limits_i q_i\mathbf{r}_i\cdot\nabla\varphi =$

$$= Q\varphi(\mathbf{R}) - (\mathbf{pE})$$

Из (1.26) следует, что сила, действующая на точечный диполь в электрическом поле, может быть представлена в виде

$$\mathbf{F} = \nabla(\mathbf{pE})$$

Можно также показать (предоставляем это читателю в качестве упражнения), что момент, действующий на дипольную систему во внешнем поле, равен

$$\mathbf{M} = [\mathbf{pE}]$$

4.2 I Electrostatics of Conductors by Landau

4.2.1 §1. The electrostatic field of conductors

Macroscopic electrodynamics is concerned with the study of electromagnetic fields in space that is occupied by matter. Like all macroscopic theories, electrodynamics deals with physical quantities averaged over elements of volume which are "physically infinitesimal". ignoring the microscopic variations of the quantities which result from the molecular structure of matter. For example, instead of the actual "microscopic" value of the electric field $\mathbf{e}$, we discuss its averaged value, denoted by $\mathbf{E}$:

$$\overline{\mathbf{e}} = \mathbf{E}. \tag{1.1}$$

The fundamental equations of the electrodynamics of continuous media are obtained by averaging the equations for the electromagnetic field in a vacuum. This method of obtaining the macroscopic equations from the microscopic was first used by H. A. Lorentz (1902).

The form of the equations of macroscopic electrodynamics and the significance of the quantities appearing in them depend essentially on the physical nature of the medium, and on the way in which the field varies with time. It is therefore reasonable to derive and investigate these equations separately for each type of physical object.

It is well known that all bodies can be divided, as regards their electric properties, into two classes, conductors and dielectrics, differing in that any electric field causes in a conductor, but not in a dielectric, the motion of charges, i.e. an electric current. †

Let us begin by studying the static electric fields produced by charged conductors, that is, the electrostatics of conductors. First of all, it follows from the fundamental property of conductors that, in the electrostatic case, the electric field inside a conductor must be zero. For a field $\mathbf{E}$ which was not zero would cause a current; the propagation of a current in a conductor involves a dissipation of energy, and hence cannot occur in a stationary state (with no external sources of energy).

Hence it follows, in turn, that any charges in a conductor must be located on its surface. The presence of charges inside a conductor would necessarily cause an electric field in it, ‡ they can be distributed on its surface, however, in such a way that the fields which they produce in its interior are mutually balanced.

Thus the problem of the electrostatics of conductors amounts to determining the electric field in the vacuum outside the conductors and the distribution of charges on their surfaces.

At any point far from the surface of the body, the mean field $\mathbf{E}$ in the vacuum is almost

4.2.2 §1. The electrostatic field of conductors

Macroscopic electrodynamics is concerned with the study of electromagnetic fields in space that is occupied by matter. Like all macroscopic theories, electrodynamics deals with physical quantities averaged over elements of volume which are "physically infinitesimal", ignoring the microscopic variations of the quantities which result from the molecular structure of matter. For example, instead of the actual "microscopic" value of the electric field $\mathbf{e}$, we discuss its averaged value, denoted by $\mathbf{E}$:

$$\overline{\mathbf{e}} = \mathbf{E}. \tag{1.1}$$

[0]† The conductor is here assumed to be homogeneous (in composition. temperature, etc.). In an inhomogeneous conductor, as we shall see later, there may be fields which cause no motion of charges.
‡ This is clearly seen from equation (1.8) below.

The fundamental equations of the electrodynamics of continuous media are obtained by averaging the equations for the electromagnetic field in a vacuum. This method of obtaining the macroscopic equations from the microscopic was first used by H. A. Lorentz (1902).

The form of the equations of macroscopic electrodynamics and the significance of the quantities appearing in them depend essentially on the physical nature of the medium, and on the way in which the field varies with time. It is therefore reasonable to derive and investigate these equations separately for each type of physical object.

It is well known that all bodies can be divided, as regards their electric properties, into two classes, conductors and dielectrics, differing in that any electric field causes in a conductor, but not in a dielectric, the motion of charges, i.e an electric current. †

Let us begin by studying the static electric fields produced by charged conductors, that is, the electrostatics of conductors. First of all, it follows from the fundamental property of conductors that, in the electrostatic case, the electric field inside a conductor must be zero. For a field **E** which was not zero would cause a current; the propagation of a current in a conductor involves a dissipation of energy. and hence cannot occur in a stationary state (with no external sources of energy).

Hence it follows, in turn, that any charges in a conductor must be located on its surface. The presence of charges inside a conductor would necessarily cause an electric field in it ; ‡ they can be distributed on its surface, however, in such a way that the fields which they produce in its interior are mutually balanced.

Thus the problem of the electrostatics of conductors amounts to determining the electric field in the vacuum outside the conductors and the distribution of charges on their surfaces.

At any point far from the surface of the body, the mean field **E** in the vacuum is almost

the same as the actual field **e**. The two fields differ only in the immediate neighbourhood of the body, where the effect of the irregular molecular fields is noticeable, and this difference does not affect the averaged field equations. The exact microscopic Maxwell's equations in the vacuum are

$$\text{dive} \ = 0 \tag{1.2}$$

$$\text{curle} \ = -(1/c)\hat{r}\mathbf{h}/\partial t \tag{1.3}$$

where h is the microscopic magnetic field. Since the mean magnetic field is assumed to be zero, the derivative $\partial \mathbf{h}'\partial t$ also vanishes on averaging, and we find that the static electric field in the vacuum satisfies the usual equations

$$\operatorname{div} E = 0, \quad \operatorname{curl} E = 0, \tag{1.4}$$

i.e. it is a potential field with a potential ϕ such that

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \phi, \tag{1.5}$$

and ϕ satisfies Laplace's equation

$$\triangle \phi = 0. \tag{1.6}$$

The boundary conditions on the field **E** at the surface of a conductor follow from the equation curl $\mathbf{E} = 0$, which. like the original equation (1.3), is valid both outside and inside the body. Let us take the z-axis in the direction of the normal **n** to the surface at some point

[0] † The conductor is here assumed to be homogeneous (in composition, temperature, etc.). In an inhomogeneous conductor, as we shall see later, there may be fields which cause no motion of charges.
‡ This is clearly seen from equation (1.8) below.

on the conductor. The component E_z of the field takes very large values in the immediate neighbourhood of the surface (because there is a finite potential difference over a very small distance). This large field pertains to the surface itself and depends on the physical properties of the surface, but is not involved in our electrostatic problem, because it falls off over distances comparable with the distances between atoms. It is important to note, however. that, if the surface is homogeneous, the derivatives $\partial E_z/\partial x, \partial E_z/\partial y$ along the surface remain finite, even though E_z itself becomes very large. Hence, since (curl $\mathbf{E})_x = \partial E_z/\partial y - \partial E_y/\partial z = 0$, we find that $\partial E_y/\partial z$ is finite. This means that E_y is continuous at the surface, since a discontinuity in E_y would mean an infinity of the derivative $\partial E_y/\partial z$. The same applies to E_x, and since $\mathbf{E} = 0$ inside the conductor, we reach the conclusion that the tangential components of the external field at the surface must be zero:

$$\mathbf{E}_t = 0. \tag{1.7}$$

Thus the electrostatic field must be normal to the surface of the conductor at every point. Since $\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\phi$, this means that the field potential must be constant on the surface of any particular conductor. In other words. the surface of a homogeneous conductor is an equipotential surface of the electrostatic field.

The component of the field normal to the surface is very simply related to the charge density on the surface. The relation is obtained from the general electrostatic equation dive $= 4\pi\rho$, which on averaging gives

$$\operatorname{div} E = 4\pi\bar{\rho}, \tag{1.8}$$

$\bar{\rho}$ being the mean charge density. The meaning of the integrated form of this equation is well known: the flux of the electric field through a closed surface is equal to the total charge inside that surface, multiplied by 4π. Applying this theorem to a volume element lying between two infinitesimally close unit areas, one on each side of the surface of the
conductor, and using the fact that $\mathbf{E} = 0$ on the inner area, we find that $E_n = 4\pi\sigma$, where σ is the surface charge density, i.e. the charge per unit area of the surface of the conductor. Thus the distribution of charges over the surface of the conductor is given by the formula

$$4\pi\sigma = E_n = -\partial\phi/\partial n \tag{1.9}$$

the derivative of the potential being taken along the outward normal to the surface. The total charge on the conductor is

$$e = -\frac{1}{4\pi}\oint\frac{\partial\phi}{\partial n}\,\mathrm{d}f \tag{1.10}$$

the integral being taken over the whole surface.
The potential distribution in the electrostatic field has the following remarkable property: the function $\phi(x, y, z)$ can take maximum and minimum values only at boundaries of regions where there is a field. This theorem can also be formulated thus: a test charge e introduced into the field cannot be in stable equilibrium, since there is no point at which its potential energy e ϕ would have a minimum.

The proof of the theorem is very simple. Let us suppose, for example, that the potential has a maximum at some point A not on the boundary of a region where there is a field. Then the point A can be surrounded by a small closed surface on which the normal derivative $\partial\phi/\partial n < 0$ everywhere. Consequently, the integral over this surface $\oint(\hat{C}\phi/\partial n)\mathrm{d}f < 0$. But by Laplace's equation $\oint(\hat{C}\phi/\partial n)\mathrm{d}f = \int\triangle\phi\mathrm{d}V = 0$, giving a contradiction.

4.2.3 §2. The energy of the electrostatic field of conductors

Let us calculate the total energy $\mathscr{U}$ of the electrostatic field of charged conductors, †

$$\mathscr{U} = \frac{1}{8\pi}\int \mathbf{E}^2 \, \mathrm{d}V. \tag{2.1}$$

where the integral is taken over all space outside the conductors. We transform this integral as follows:

$$\mathscr{U} = -\frac{1}{8\pi}\int \mathbf{E}\cdot\operatorname{grad}\phi \, \mathrm{d}V = -\frac{1}{8\pi}\int \operatorname{div}(\phi\mathbf{E})\mathrm{d}V + \frac{1}{8\pi}\int \phi \operatorname{div}\mathbf{E} \, \mathrm{d}V$$

The second integral vanishes by (1.4), and the first can be transformed into integrals over the surfaces of the conductors which bound the field and an integral over an infinitely remote surface. The latter vanishes, because the field diminishes sufficiently rapidly at infinity (the arbitrary constant in ϕ is assumed to be chosen so that $\phi = 0$ at infinity). Denoting by ϕ_a the constant value of the potential on the a th conductor, we have ‡

$$\mathscr{U} = \frac{1}{8\pi}\sum_a \oint \phi E_n \, \mathrm{d}f = \frac{1}{8\pi}\sum_a \phi_a \oint E_n \, \mathrm{d}f.$$

Finally, since the total charges e_a on the conductors are given by (1.10) we obtain

$$\mathscr{U} = \frac{1}{2}\sum_a e_a\phi_a \tag{2.2}$$

which is analogous to the expression for the energy of a system of point charges.
The charges and potentials of the conductors cannot both be arbitrarily prescribed; there are certain relations between them. Since the field equations in a vacuum are linear and homogeneous, these relations must also be linear, i.e. they must be given by equations of the form

$$e_a = \sum_b C_{ab}\phi_b \tag{2.3}$$

where the quantities C_{aa}, C_{ab} have the dimensions of length and depend on the shape and relative position of the conductors. The quantities C_{aa} are called coefficients of capacity, and the quantities $C_{ab}(a \neq b)$ are called coefficients of electrostatic induction. In particular. if there is only one conductor, we have $e = C\phi$, where C is the capacitance, which in order of magnitude is equal to the linear dimension of the body. The converse relations, giving the potentials in terms of the charges, are

$$\phi_a = \sum_b C^{-1}_{ab} e_b \tag{2.4}$$

where the coefficients ${C^{-1}}_{ab}$ form a matrix which is the inverse of the matrix C_{ab}.
Let us calculate the change in the energy of a system of conductors caused by an infinitesimal change in their charges or potentials. Varying the original expression (2.1), we have $\delta\mathscr{U} =$

[0]† The square $\mathbf{E}^2$ is not the same as the mean square $\overline{\mathbf{e}^2}$ of the actual field near the surface of a conductor or inside it (where $\mathbf{E} = 0$ but, of course, $\mathbf{e}^2 \neq 0$). By calculating the integral (2.1) we ignore the internal energy of the conductor as such, which is here of no interest, and the affinity of the charges for the surface.
‡ In transforming volume integrals into surface integrals, both here and later, it must be borne in mind that E_n is the component of the field along the outward normal to the conductor. This direction is opposite to that of the outward normal to the region of the volume integration, namely the space outside the conductors. The sign of the integral is therefore changed in the transformation.

$(1/4\pi)\int \mathbf{E}\cdot\delta\mathbf{E}\mathrm{d}V$. This can be further transformed by two equivalent methods. Putting $\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\phi$ and using the fact that the varied field, like the original field, satisfies equations (1.4) (so that $\operatorname{div}\delta\mathbf{E} = 0$), we can write

$$\delta\mathscr{U} = -\frac{1}{4\pi}\int \operatorname{grad}\phi\cdot\delta\mathbf{E}\ \mathrm{d}V = -\frac{1}{4\pi}\int \operatorname{div}(\phi\delta\mathbf{E})\mathrm{d}I$$
$$= \frac{1}{4\pi}\sum_a \phi_a \oint \delta E_n\ \mathrm{d}f$$

that is

$$\delta\mathscr{U} = \sum_a \phi_a \delta e_a \tag{2.5}$$

which gives the change in energy due to a change in the charges. This result is obvious; it is the work required to bring infinitesimal charges δe_a to the various conductors from infinity, where the field potential is zero.

On the other hand, we can write

$$\delta\mathscr{U} = -\frac{1}{4\pi}\int \mathbf{E}\cdot\operatorname{grad}\delta\phi\ \mathrm{d}V = -\frac{1}{4\pi}\int \operatorname{div}(\mathbf{E}\delta\phi)\mathrm{d}l$$
$$= \frac{1}{4\pi}\sum_a \delta\phi_a \oint E_n\ \mathrm{d}f$$

that is

$$\delta\mathscr{U} = \sum_a e_a \delta\phi_a, \tag{2.6}$$

which expresses the change in energy in terms of the change in the potentials of the conductors.

Formulae (2.5) and (2.6) show that. by differentiating the energy $\mathscr{U}$ with respect to the charges, we obtain the potentials of the conductors, and the derivatives of $\mathscr{U}$ with respect to the potentials are the charges:

$$\partial\mathscr{U}/\partial e_a = \phi_a, \quad \partial\mathscr{U}/\partial\phi_a = e_a. \tag{2.7}$$

But the potentials and charges are linear functions of each other. Using (2.3) we have $\partial^2\mathscr{U}/\partial\phi_a\partial\phi_b = \partial e_b/\partial\phi_a = C_{ba}$, and by reversing the order of differentiation we get C_{ab}. Hence it follows that

$$C_{ab} = C_{ba}, \tag{2.8}$$

and similarly ${C^{-1}}_{ab} = {C^{-1}}_{ba}$. The energy $\mathscr{U}$ can be written as a quadratic form in either the potentials or the charges:

$$\mathscr{U} = \frac{1}{2}\sum_{a,b} C_{ab}\phi_a\phi_b = \frac{1}{2}\sum_{a,b} {C^{-1}}_{ab} e_a e_b. \tag{2.9}$$

This quadratic form must be positive definite, like the original expression (2.1). From this condition we can derive various inequalities which the coefficients C_{ab} must satisfy. In particular, all the coefficients of capacity are positive:

$$C_{aa} > 0 \tag{2.10}$$

(and also ${C^{-1}}_{aa} > 0$). †
All the coefficients of electrostatic induction, on the other hand, are negative:

$$C_{ab} < 0 \quad (a \neq b) \tag{2.11}$$

That this must be so is seen from the following simple arguments. Let us suppose that every conductor except the a th is earthed, i.e. their potentials are zero. Then the charge induced by the charged a th conductor on another (the b th, say) is $e_b = C_{ba}\phi_a$. It is obvious that the sign of the induced charge must be opposite to that of the inducing potential, and therefore $C_{ab} < 0$. This can be more rigorously shown from the fact that the potential of the electrostatic field cannot reach a maximum or minimum outside the conductors. For example, let the potential ϕ_a of the only conductor not earthed be positive. Then the potential is positive in all space, its least value (zero) being attained only on the earthed conductors. Hence it follows that the normal derivative $\partial\phi/\partial n$ of the potential on the surfaces of these conductors is positive, and their charges are therefore negative, by (1.10). Similar arguments show that ${C^{-1}}_{ab} > 0$.

The energy of the electrostatic field of conductors has a certain extremum property, though this property is more formal than physical. To derive it, let us suppose that the

charge distribution on the conductors undergoes an infinitesimal change (the total charge on each conductor remaining unaltered), in which the charges may penetrate into the conductors; we ignore the fact that such a charge distribution cannot in reality be stationary. We consider the change in the integral $\mathscr{U} = (1/8\pi)\int E^2 \, \mathrm{d}V$, which must now be extended over all space, including the volumes of the conductors themselves (since after the displacement of the charges the field $\mathbf{E}$ may not be zero inside the conductors). We write

$$\begin{aligned}\delta\mathscr{U} &= -\frac{1}{4\pi}\int \operatorname{grad}\phi \cdot \delta\mathbf{E} \, \mathrm{d}V \\ &= -\frac{1}{4\pi}\int \operatorname{div}(\phi\delta\mathbf{E})\mathrm{d}V + \frac{1}{4\pi}\int \phi \operatorname{div}\delta\mathbf{E} \, \mathrm{d}V.\end{aligned}$$

The first integral vanishes, being equivalent to one over an infinitely remote surface. In the second integral, we have by (1.8) $\operatorname{div}\delta\mathbf{E} = 4\pi\delta\bar{\rho}$, so that $\delta\mathscr{U} = \int \phi\delta\bar{\rho}\mathrm{d}V$. This integral vanishes if ϕ is the potential of the true electrostatic field, since then ϕ is constant inside each conductor, and the integral $\int \delta\bar{\rho}\mathrm{d}V$ over the volume of each conductor is zero, since its total charge remains unaltered.

Thus the energy of the actual electrostatic field is a minimum † relative to the energies of fields which could be produced by any other distribution of the charges on or in the conductors (Thomson's theorem).

From this theorem it follows, in particular, that the introduction of an uncharged conductor into the field of given charges (charged conductors) reduces the total energy of the field. To prove this, it is sufficient to compare the energy of the actual field resulting from the introduction of the uncharged conductor with the energy of the fictitious field in which there are no induced charges on that conductor. The former energy, since it has the least possible value, is less than the latter energy, which is also the energy of the original field (since, in the absence of induced charges, the field would penetrate into the conductor, and remain unaltered). This result can also be formulated thus: an uncharged conductor remote from a system of given charges is attracted towards the system.

Finally, it can be shown that a conductor (charged or not) brought into an electrostatic field cannot be in stable equilibrium under electric forces alone. This assertion generalizes the theorem for a point charge proved at the end of §1, and can be derived by combining the latter theorem with Thomson's theorem. We shall not pause to give the derivation in detail.

[0]† We may also mention that another inequality which must be satisfied if the form (2.9) is positive is $C_{aa}C_{bb} > {C_{ab}}^2$.

Formulae (2.9) are useful for calculating the energy of a system of conductors at finite distances apart. The energy of an uncharged conductor in a uniform external field $\mathbb{C}$, which may be imagined as due to charges at infinity, requires special consideration. According to (2.2), this energy is $\mathscr{U} = \frac{1}{2}e\phi$, where e is the remote charge which causes the field, and ϕ is the potential at this charge due to the conductor. $\mathscr{U}$ does not include the energy of the charge e in its own field, since we are interested only in the energy of the conductor. The charge on the conductor is zero, but the external field causes it to acquire an electric dipole moment, which we denote by $\mathscr{P}$. The potential of the electric dipole field at a large distance $\mathbf{r}$ from it is $\phi = \mathscr{P} \cdot \mathbf{r}r^3$. Hence $\mathscr{U} = e\mathscr{P} \cdot \mathbf{r}/2r^3$. But $-e\mathbf{r}r^3$ is just the field $\mathscr{E}$ due to the charge e. Thus

$$\mathscr{U} = -\frac{1}{2}\mathscr{P} \cdot \mathcal{G}. \tag{2.12}$$

Since all the field equations are linear, it is evident that the components of the dipole moment $\mathscr{P}$ are linear functions of the components of the field $\mathbb{C}$. The coefficients of proportionality between $\mathscr{P}$ and $\mathscr{E}$ have the dimensions of length cubed, and are therefore proportional to the volume of the conductor:

$$\mathscr{P}_i = V\alpha_{ik}\mathfrak{E}_k, \tag{2.13}$$

where the coefficients α_{ik} depend only on the shape of the body. The quantities $V\alpha_{ik}$ form a tensor, which may be called the polarizability tensor of the body. This tensor is symmetrical: $\alpha_{ik} = \alpha_{ki}$, a statement which will be proved in §11. Accordingly, the energy (2.12) is

$$\mathscr{U} = -\frac{1}{2}V\alpha_{ik}\mathcal{G}_i\mathcal{E}_k. \tag{2.14}$$

PROBLEMS

Problem 1. Express the mutual capacitance C of two conductors (with charges $\pm e$) in terms of the coefficients C_{ab} -

Solution. The mutual capacitance of two conductors is defined as the coefficient C in the relation $e = C(\phi_2 - \phi_1)$, and the energy of the system is given in terms of C by $\mathscr{U} = \frac{1}{2}e^2/C$. Comparing with (2.9), we obtain

$$\begin{aligned} 1/C &= C^{-1}{}_{11} - 2C^{-1}{}_{12} + C^{-1}{}_{22} \\ &= (C_{11} + 2C_{12} + C_{22}) \,/\, \left(C_{11}C_{22} - C_{12}{}^2\right). \end{aligned}$$

Problem 2. A point charge e is situated at O, near a system of earthed conductors, and induces on them charges e_a. If the charge e were absent, and the a th conductor were at potential ϕ'_a, the remainder being earthed, the field potential at O would be ϕ'_0. Express the charges e_a in terms of ϕ'_a and ϕ'_0.

Solution. If charges $\boldsymbol{e_a}$ on the conductors give them potentials $\phi_{\boldsymbol{a}}$, and similarly for $\boldsymbol{e'_a}$ and $\phi'_{\boldsymbol{a}}$, it follows from (2.3) that

$$\sum_a \phi_a e'_a = \sum_{a,b} \phi_a C_{ab} \phi'_b = \sum_a \phi'_a e_a$$

We apply this relation to two states of the system formed by all the conductors and the charge e (regarding the latter as a very small conductor). In one state the charge e is present, the charges on the conductors are e_a, and their potentials are zero. In the other state the charge e is zero, and one of the conductors has a potential $\phi'_a \neq 0$. Then we have $e\phi'_0 + e_a\phi'_a = 0$, whence $e_a = -e\phi'_0/\phi'_a$.

[0]‡ We shall not give here the simple arguments which demonstrate that the extremum is a minimum.

For example, if a charge e is at a distance r from the centre of an earthed conducting sphere with radius $a(<r)$, then $\phi_0' = \phi_a' a/r$, and the charge induced on the sphere is $e_a = -ea/r$.
As a second example, let us consider a charge e placed between two concentric conducting spheres with radii a and b, at a distance r from the centre such that $a < r < b$. If the outer sphere is earthed and the inner one is charged to potential ϕ_a', the potential at distance r is

$$\phi_0' = \phi_a' \frac{1/r - 1/b}{1/a - 1/b}.$$

Hence the charge induced on the inner sphere by the charge e is $e_a = -ea(b-r)/r(b-a)$. Similarly the charge induced on the outer sphere is $e_b = -eb(r-a)/r(b-a)$.

Problem 3. Two conductors, with capacitances C_1 and C_2, are placed at a distance r apart which is large compared with their dimensions. Determine the coefficients C_{ab}.
Solution. If conductor 1 has a charge e_1, and conductor 2 is uncharged, then in the first approximation $\phi_1 = e_1/C_1, \phi_2 = e_1/r$; here we neglect the variation of the field over conductor 2 and its polarization. Thus $C^{-1}{}_{11} = 1/C_1, C^{-1}{}_{12} = 1/r$, and similarly $C^{-1}{}_{22} = 1/C_2$. Hence we find †

$$C_{11} = C_1\left(1 + \frac{C_1C_2}{r^2}\right), \quad C_{12} = -\frac{C_1C_2}{r}, \quad C_{22} = C_2\left(1 + \frac{C_1C_2}{r^2}\right)$$

Problem 4. Determine the capacitance of a ring (radius b) of thin conducting wire of circular cross-section (radius $a \ll b$).

Solution. Since the wire is thin, the field at the surface of the ring is almost the same as that of charges distributed along the axis of the wire (for a right cylinder. it would be exactly the same). Hence the potential of the ring is

$$\phi_a = \frac{e}{2\pi b}\oint \frac{\mathrm{d}l}{r},$$

where r is the distance from a point on the surface of the ring to an element $\mathrm{d}l$ of the axis of the wire. the integration being over all such elements. We divide the integral into two parts corresponding to $r < \Delta$ and $r > \Delta$, Δ being a distance such that $a \ll \Delta \ll b$. Then for $r < \Delta$ the segment of the ring concerned may be regarded as straight, and therefore

$$\oint_{\Delta>r} \frac{\mathrm{d}l}{r} = \int_{-\Delta}^{\Delta} \frac{\mathrm{d}l}{\sqrt{(l^2+a^2)}} \cong 2\log(2\Delta/a)$$

In the range $r > \Delta$ the thickness of the wire may be neglected, i.e. r may be taken as the distance between two points on its axis. Then

$$\oint_{r>\Delta} \frac{\mathrm{d}l}{r} = 2\int_{\phi_0}^{\pi} \frac{b\ \mathrm{d}\phi}{2b\sin\frac{1}{2}\phi} = -2\log\tan\frac{1}{4}\phi_0$$

where ϕ is the angle subtended at the centre of the ring by the chord r, and the lower limit of integration is such that $2b\sin\frac{1}{2}\phi_0 = \Delta$, whence $\phi_0 \cong \Delta/b$. When the two parts of the integral are added, Δ cancels, and the capacitance of the ring is

$$C = \frac{e}{\phi_a} = \frac{\pi b}{\log(8b/a)}$$

[0]† The subsequent terms in the expansion are in general of order (in $1/r$) one higher than those given. If, however, r is taken as the distance between the "centres of charge" of the two bodies (for spheres, between the geometrical centres), then the order of the subsequent terms is two higher.

4.2.4 §3. Methods of solving problems in electrostatics

The general methods of solving Laplace's equation for given boundary conditions on certin surfaces are studied in mathematical physics, and we shall not give a detailed description of them here. We shall merely mention some of the more elementary procedures and solve various problems of intrinsic interest. †

(1) The method of images. The simplest example of the use of this method is to determine the field due to a point charge e outside a conducting medium which occupies a half-space. The principle of the method is to find fictitious point charges which, together with the given charge or charges, produce a field such that the surface of the conductor is an equipotential surface. In the case just mentioned, this is achieved by placing a fictitious charge $e' = -e$ at a point which is the image of e in the plane which bounds the conducting medium. The potential of the field due to the charge e and its image e' is

$$\phi = e\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}\right) \tag{3.1}$$

where r and r' are the distances of a point from the charges e and e'. On the bounding plane, $r = r'$ and the potential has the constant value zero, so that the necessary boundary condition is satsfied and (3.1) gives the solution of the problem. It may be noted that the charge e is attracted to the conductor by a force $e^2/(2a)^2$ (the image force; a is the distance of the charge from the conductor), and the energy of their interaction is $-e^2/4a$.

The distribution of surface charge induced on the bounding plane by the point charge e is given by

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi}\left[\frac{\partial\phi}{\partial n}\right]_{r=r'} = -\frac{e}{2\pi}\frac{a}{r^3}. \tag{3.2}$$

It is easy to see that the total charge on the plane is $\int \sigma \mathrm{d}f = -e$, as it should be.
The total charge induced on an originally uncharged insulated conductor by other charges is, of course, zero. Hence, if in the present case the conducting medium (in reality a large conductor) is insulated, we must suppose that, besides the charge $-e$, a charge $+e$ is also induced, which, however, has a vanishingly small density, being distributed over the large surface of the conductor.

Next, let us consider a more difficult problem, that of the field due to a point charge e near a spherical conductor. To solve this problem, we use the following result, which can easily be proved by direct calculation. The potential of the field due to two point charges e and $-e'$, namely $\phi = e/r - e'/r'$, vanishes on the surface of a sphere whose centre is on the line joining the charges (but not between them). If the radius of the sphere is R and its centre is distant l and l' from the two charges, then $l/l' = (e/e')^2$, $R^2 = ll'$.

Let us first suppose that the spherical conductor is maintained at a constant potential $\phi = 0$, i.e. it is earthed. Then the field outside the sphere due to the point charge e at A (Fig. 1), at a distance l from the centre of the sphere, is the same as the field due to two charges, namely the given charge e and a fictitious charge $-e'$ at A' inside the sphere, at a distance l from its centre, where

$$l' = R^2/l, \quad e' = eR/l \tag{3.3}$$

The potential of this field is

[0]† The solutions of many more complex problems are given by W. R. Smythe, Static and Dynamic Electricity, 3rd ed., McGraw-Hill, New York, 1968; G. A. Grinberg, Selected Problems in the Mathematical Theory of Electric and Magnetic Phenomena (Izbrannye voprosy matematichesko teorii lektricheskikh i magnitnykh yavlenit), Moscow, 1948.

$$\phi = \frac{e}{r} - \frac{eR}{lr'} \tag{3.4}$$

r and r' being as shown in Fig. 1. A non-zero total charge $-e'$ is induced on the surface of the sphere. The energy of the interaction between the charge and the sphere is

$$\mathscr{U} = -\frac{1}{2}ee'/(l-l') = -\frac{1}{2}e^2R'_{,}\left(l^2-R^2\right), \tag{3.5}$$

and the charge is attracted to the sphere by a force $F = -\partial\mathscr{U}/\partial l = -e^2lR/\left(l^2-R^2\right)^2$. If the total charge on the spherical conductor is kept equal to zero (an insulated uncharged sphere), a further fictitious charge must be introduced, such that the total charge induced on the surface of the sphere is zero, and the potential on that surface is still constant. This is done by placing a charge $+e'$ at the centre of the sphere. The potential of the required field is then given by the formula

$$\phi = \frac{e}{r} - \frac{e'}{r'} + \frac{e'}{r_{\mathrm{o}}} \tag{3.6}$$

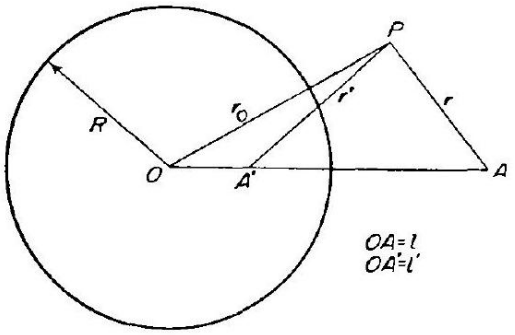


Fig. 1

The energy of interaction in this case is

$$\mathscr{U} = \frac{1}{2}ee'\left(\frac{1}{l} - \frac{1}{l-l'}\right) = -\frac{e^2R^3}{2l^2\left(l^2-R^2\right)}. \tag{3.7}$$

Finally, if the charge e is at A' (Fig. 1) in a spherical cavity in a conducting medium, the field inside the cavity must be the same as the field due to the charge e at A' and its image at A outside the sphere, regardless of whether the conductor is earthed or insulated:

$$\phi = \frac{e}{r'} - \frac{eR}{l'r}. \tag{3.8}$$

(2) The method of inversion. There is a simple method whereby in some cases a known solution of one electrostatic problem gives the solution of another problem. This method is based on the invariance of Laplace's equation with respect to a certain transformation of the variables.

In spherical polar coordinates Laplace's equation has the form

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\triangle_\Omega\phi = 0$$

where $\triangle_\Omega$ denotes the angular part of the Laplacian operator. It is easy to see that this equation is unaltered in form if the variable r is replaced by a new variable r' such that

$$r = R^2/r' \tag{3.9}$$

(the inversion transformation) and at the same time the unknown function ϕ is replaced by ϕ' such that

$$\phi = r'\phi'/R \tag{3.10}$$

Here R is some constant having the dimensions of length (the radius of inversion). Thus, if the function $\phi(\mathbf{r})$ satisfies Laplace's equation, then so does the function

$$\phi'(\mathbf{r}') = R\phi\left(R^2\mathbf{r}'/r'^2\right)/r' \tag{3.11}$$

Let us assume that we know the electrostatic field due to some system of conductors, all at the same potential ϕ_0, and point charges. The potential $\phi(\mathbf{r})$ is usually defined so as to vanish at infinity. Here, however, we shall define $\phi(r)$ so that it tends to $-\phi_0$ at infinity. Then $\phi = 0$ on the conductors.

We may now ascertain what problem of electrostatics will be solved by the transformed function (3.11). First of all, the shapes and relative positions of all the conductors of finite size will be changed. The boundary condition of constant potential on their surfaces will be automatically satisfied, since $\phi' = 0$ if $\phi = 0$. Furthermore, the positions and magnitudes of all the point charges will be changed. A charge e at a point $\mathbf{r}_0$ moves to $\mathbf{r}'_0 = R^2\mathbf{r}_0/{r_0}^2$ and takes a value e' which can be determined as follows. As $\mathbf{r} \to \mathbf{r}_0$ the potential $\phi(\mathbf{r})$ tends to infinity as $e/|\delta\mathbf{r}|$, where $\delta\mathbf{r} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$. Differentiating the relation $\mathbf{r} = R^2\mathbf{r}'/r'^2$, we find that the magnitudes of the small differences $\delta\mathbf{r}$ and $\delta\mathbf{r}' = \mathbf{r}' - \mathbf{r}'_0$ are related by $(\delta\mathbf{r})^2 = R^4\left(\delta\mathbf{r}'\right)^2/{r'_0}^4$. Hence, as $\mathbf{r}' \to \mathbf{r}'_0$, the function ϕ' tends to infinity as $eR/r'_0|\delta\mathbf{r}| = er'_0/R\,|\delta\mathbf{r}'|$, corresponding to a charge

$$e' = er'_0/R = eR/r_0. \tag{3.12}$$

Finally, let us examine the behaviour of the function $\phi'(\mathbf{r}')$ near the origin. For $\mathbf{r}' = 0$ we have $\mathbf{r} \to \infty$ and $\phi(\mathbf{r}) \to -\phi_0$. Hence, as $\mathbf{r}' \to 0$. the function ϕ' tends to infinity as $-R\phi_0/r'$. This means that there is a charge $e_0 = -R\phi_0$ at the point $\mathbf{r}' = 0$.

We shall give, for reference, the way in which certain geometrical figures are transformed by inversion. A spherical surface with radius a and centre $\mathbf{r}_0$ is given by the equation $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)^2 = a^2$. On inversion, this becomes $\left([R^2\mathbf{r}'/r'^2] - \mathbf{r}_0\right)^2 = a^2$, which, on multiplying by r'^2 and rearranging, can be written $(\mathbf{r}' - \mathbf{r}'_0)^2 = a'^2$, where

$$\mathbf{r}'_0 = -R^2\mathbf{r}_0/\left(a^2 - r_o^2\right), \quad a' = aR^2/\left|a^2 - r_0^2\right|. \tag{3.13}$$

Thus we have another sphere, with radius a' and centre $\mathbf{r}'_0$. If the original sphere passes through the origin ($a = r_0$), then $a' = \infty$. In this case the sphere is transformed into a plane perpendicular to the vector $\mathbf{r}_0$ and distant $r'_0 - a' = R^2/(a + r_0) = R^2/2a$ from the origin.

(3) The method of conformal mapping. A field which depends on only two Cartesian coordinates (x and y, say) is said to be two-dimensional. The theory of functions of a complex variable is a powerful means of solving two-dimensional problems of electrostatics. The theoretical basis of the method is as follows.

An electrostatic field in a vacuum satisfies two equations: curl $\mathbf{E} = 0$, div $\mathbf{E} = 0$. The first of these makes it possible to introduce the field potential, defined by $\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\phi$. The second equation shows that we can also define a vector potential $\mathbf{A}$ of the field, such that $\mathbf{E} = \mathbf{curlA}$. In the two-dimensional case, the vector $\mathbf{E}$ lies in the xy-plane, and depends only on x and y. Accordingly, the vector A can be chosen so that it is perpendicular to the xy plane. Then the field components are given in terms of the derivatives of ϕ and $\mathbf{A}$ by

$$E_x = -\partial\phi/\partial x = \partial A/\partial y, \quad E_y = -\partial\phi/\partial y = -\partial A/\partial x \tag{3.14}$$

These relations between the derivatives of ϕ and A are. mathematically, just the wellknown Cauchy-Riemann conditions, which express the fact that the complex quantity

$$w = \phi - iA \tag{3.15}$$

is an analytic function of the complex argument $z = x + iy$. This means that the function $w(z)$ has a definite derivative at every point, independent of the direction in which the derivative is taken. For example. differentiating along the x-axis, we find $\mathrm{d}w/\mathrm{d}z = \partial\phi/\partial x - i\partial A/\partial x$. or

$$\mathrm{d}w/\mathrm{d}z = -E_x + iE_y \tag{3.16}$$

The function w is called the complex potential.

The lines of force are defined by the equation $\mathrm{d}x/E_x = \mathrm{d}y/E_y$. Expressing E_x and E_y as derivatives of A, we can write this as $(\partial A/\partial x)\mathrm{d}x + (\partial A/\partial y)\mathrm{d}y = \mathrm{d}A = 0$, whence $A(x, y) =$ constant. Thus the lines on which the imaginary part of the function $w(z)$ is constant are the lines of force. The lines on which its real part is constant are the equipotential lines. The orthogonality of these families of lines is ensured by the relations (3.14), according to which

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{\partial A}{\partial y} = 0$$

Both the real and the imaginary part of an analytic function $w(z)$ satisfy Laplace's equation. We could therefore equally well take im w as the field potential. The lines of force would then be given by re $w =$ constant. Instead of (3.15) we should have $w = A + i\phi$.

The flux of the electric field through any section of an equipotential line is given by the integral $\oint E_n\,\mathrm{d}l = -\oint(\partial\phi/\partial n)\mathrm{d}l$, where $\mathrm{d}l$ is an element of length of the equipotential line and $\mathbf{n}$ the direction of the normal to it. According to (3.14) we have $\partial\phi/\partial n = -\partial A/\partial l$, the choice of sign denoting that l is measured to the left when one looks along $\mathbf{n}$. Thus $\oint E_n\,\mathrm{d}l = \oint(\partial A/\partial l)\mathrm{d}l = A_2 - A_1$, where A_2 and A_1 are the values of A at the ends of the section. In particular, since the flux of the electric field through a closed contour is $4\pi e$, where e is the total charge enclosed by the contour (per unit length of conductors perpendicular to the plane), it follows that

$$e = (1/4\pi)\Delta A \tag{3.17}$$

where ΔA is the change in A on passing counterclockwise round the closed equipotential line.

The simplest example of the complex potential is that of the field of a charged straight wire passing through the origin and perpendicular to the plane. The field is given by $E_r = 2e/r, E_\theta = 0$, where r, θ are polar coordinates in the xy-plane, and e is the charge per unit length of the wire. The corresponding complex potential is

$$w = -2e\log z = -2e\log r - 2ie\theta \tag{3.18}$$

If the charged wire passes through the point $(\ x_0, y_0\ )$ instead of the origin, the complex potential is

$$w = -2e\log(z - z_0) \tag{3.19}$$

where $z_0 = x_0 + iy_0$.

Mathematically, the functional relation $w = w(z)$ constitutes a conformal mapping of the plane of the complex variable z on the plane of the complex variable w. Let C be the crosssectional

contour of a conductor in the xy-plane, and ϕ_0 its potential. It is clear from the above discussion that the problem of determining the field due to this conductor amounts to finding a function $w(z)$ which maps the contour C in the z-plane on the line $w = \phi_0$, parallel to the axis of ordinates, in the w-plane. Then re w gives the potential of the field. (If the function $w(z)$ maps the contour C on a line parallel to the axis of abscissae, then the potential is im w.)
(4) The wedge problem. We shall give here, for reference, formulae for the field due to a point charge e placed between two intersecting conducting half-planes. Let the z-axis of a system of cylindrical polar coordinates (r, θ, z) be along the apex of the wedge, the angle θ

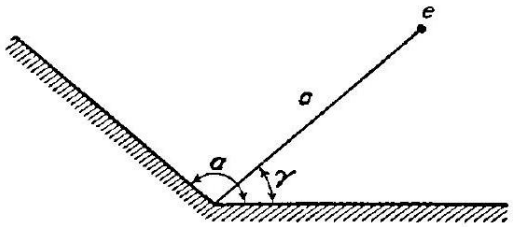


Fig. 2

being measured from one of the planes, and let the position of the charge e be $(a, \gamma, 0)$ (Fig. 2). The angle α between the planes may be either less or greater than π; in the latter case we have a charge outside a conducting wedge.

The field potential is given by

$$\phi = \frac{e}{\alpha\sqrt{(2ar)}} \int_\eta^\infty \left\{ \frac{\sinh(\pi\zeta/\alpha)}{\cosh(\pi\zeta/\alpha) - \cos[\pi(\theta-\gamma)/\alpha]} - \frac{\sinh(\pi\zeta/\alpha)}{\cosh(\pi\zeta/\alpha) - \cos[\pi(\theta+\gamma)/\alpha]} \right\} \times \frac{\mathrm{d}\zeta}{\sqrt{(\cosh\zeta - \cosh\eta)}}, \quad \cosh\eta = \left(a^2 + r^2 + z^2\right)/2ar, \quad \eta > 0 \tag{3.20}$$

The potential $\phi = 0$ on the surface of the conductors, i.e. for $\theta = 0$ or α. This formula was first given by H. M. Macdonald (1895).

In particular, for $\alpha = 2\pi$ we have a conducting half-plane in the field of a point charge. In this case the integral in (3.20) can be evaluated explicitly, giving

$$\phi = \frac{e}{\pi} \left\{ \frac{1}{R} \cos^{-1} \left(\frac{-\cos\frac{1}{2}(\theta-\gamma)}{\cosh\frac{1}{2}\eta} \right) - \frac{1}{R'} \cos^{-1} \left(\frac{-\cos\frac{1}{2}(\theta+\gamma)}{\cosh\frac{1}{2}\eta} \right) \right\} \tag{3.21}$$

$$R^2 = a^2 + r^2 + z^2 - 2ar\cos(\gamma - \theta)$$

$$R'^2 = a^2 + r^2 + z^2 - 2ar\cos(\gamma + \theta)$$

In the limit as the point (r, θ, z) tends to the position of the charge e, the potential (3.21) becomes

$$\phi = \phi' + e/R, \qquad \text{where } \phi' = -\frac{e}{2\pi a}\left[1 + \frac{\pi - \gamma}{\sin\gamma}\right]. \tag{3.22}$$

The second term is just the Coulomb potential, which becomes infinite as $R \to 0$, while ϕ' is the change caused by the conductor in the potential at the position of the charge. The energy of the interaction between the charge and the conducting half-plane is

$$\mathscr{U} = \frac{1}{2}e\phi' = -\frac{e^2}{4\pi a}\left[1 + \frac{\pi - \gamma}{\sin\gamma}\right]. \tag{3.23}$$

PROBLEMS

Problem 1. Determine the field near an uncharged conducting sphere with radius R placed in a uniform external electric field $\mathcal{C}$.

Solution. We write the potential in the form $\phi = \phi_0 + \phi_1$, where $\phi_0 = -\mathfrak{G} \cdot \mathbf{r}$ is the potential of the external field and ϕ_1 is the required change in potential due to the sphere. By symmetry, the function ϕ_1 can depend only on the constant vector $\boldsymbol{C}$. The only such solution of Laplace's equation which vanishes at infinity is

$$\phi_1 = -\text{ constant } \times \mathcal{G} \cdot \operatorname{grad}(1/r) = \text{ constant } \times \mathcal{G} \cdot \mathbf{r}/r^3,$$

the origin being taken at the centre of the sphere. On the surface of the sphere ϕ must be constant, and so the constant in ϕ_1 is R^3, whence

$$\phi = -\mathbb{G} r \cos\theta \left(1 - \frac{R^3}{r^3}\right),$$

where θ is the angle between $\mathbb{C}$ and $\mathbf{r}$. The distribution of charge on the surface of the sphere is given by

$$\sigma = -(1/4\pi)[\partial\phi/\partial r]_{r=R} = (3\mathbb{C}/4\pi)\cos\theta.$$

The total charge $e = 0$. The dipole moment of the sphere is most easily found by comparing ϕ_1 with the potential $\mathscr{P} \cdot \mathrm{r}/r^3$ of an electric dipole field, whence $\mathscr{P} = R^3\mathscr{C}$.

Problem 2. The same as Problem 1, but for an infinite cylinder in a uniform transverse field.

Solution. We use polar coordinates in a plane perpendicular to the axis of the cylinder. The solution of the two-dimensional Laplace's equation which depends only on a constant vector is

$$\phi_1 = \text{ constant } \times \mathscr{C} \cdot \operatorname{grad}(\log r) = \text{ constant } \times \mathscr{C} \cdot \mathbf{r}/r^2.$$

Adding $\phi_0 = -\boldsymbol{C} \cdot \mathbf{r}$ and putting the constant equal to R^2, we have

$$\phi = -\mathbb{C} r \cos\theta \left(1 - \frac{R^2}{r^2}\right).$$

The surface charge density is $\sigma = (\mathbb{C}/2\pi)\cos\theta$. The dipole moment per unit length of the cylinder can be found by comparing ϕ with the potential of a two-dimensional dipole field, namely $2\mathscr{F} \cdot \operatorname{grad}(\log r) = 2\mathscr{F} \cdot \mathrm{r}/r^2$, so that $\mathscr{P} = \frac{1}{2}R^2\mathscr{C}$.

Problem 3. Determine the field near a wedge-shaped projection on a conductor.

Solution. We take polar coordinates r, θ in a plane perpendicular to the apex of the wedge, the origin being at the vertex of the angle θ_0 of the wedge (Fig. 3). The angle θ is measured from one face of the wedge, the region outside the conductor being $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi - \theta_0$. Near the apex of the wedge the potential can be expanded in powers of r, and we shall be interested in the first term of the expansion (after the constant term), which contains the lowest power of r. The solutions of the two-dimensional Laplace's equation which are proportional to r^n are $r^n \cos n\theta$ and $r^n \sin n\theta$. The solution having the smallest n which satisfies the condition $\phi =$ constant for $\theta = 0$ and $\theta = 2\pi - \theta_0$ (i.e. on the surface of the conductor) is

$$\phi = \text{ constant } \times r^n \sin n\theta, \quad n = \pi/(2\pi - \theta_0).$$

[0]† Its derivation is given by hm in Electromagnetism, Bell. London, 1934, p. 79, and by V. V. Batygin and I. N. Toptygin, Problems in Electrodynamics, 2nd ed., Academic Press, London, 1978. p. 47.

The field varies as r^{n-1}. For $\theta_0 < \pi (n < 1)$, therefore, the field becomes infinite at the apex of the wedge. In particular, for a very sharp wedge $\left(\theta_0 \ll 1, n \cong \frac{1}{2}\right) E$ increases as $r^{-\frac{1}{2}}$ as $r \to 0$. Near a wedge-shaped concavity in a conductor ($\theta_0 > \pi, n > 1$) the field tends to zero.

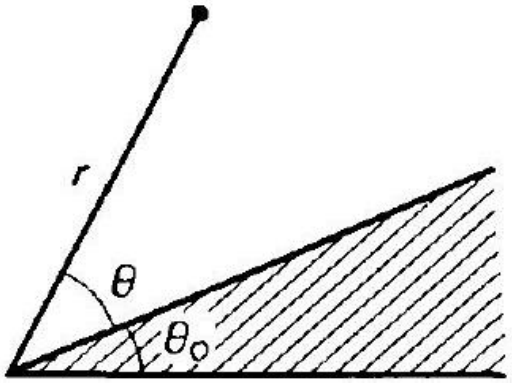


Fig. 3

The value of the constant can be determined only by solving the problem for the whole field. For example, for a very sharp wedge in the field of a point charge e, the passage to the limit of small r in (3.21) confirms that

$$\phi = \text{ constant } \times \sqrt{r} \sin \frac{1}{2}\theta$$

the constant being $\left[4e\sqrt{a}/\pi\left(a^2+z^2\right)\right] \sin \frac{1}{2}\gamma$. In this case, "near the wedge" means that $r \ll a$, under which condition the $\partial^2\phi/\partial z^2$ term in Laplace's equation may be neglected.

Problem 4. Determine the field near the end of a sharp conical point on the surface of a conductor.

Solution. We take spherical polar coordinates, with the origin at the vertex of the cone and the polar axis along the axis of the cone. Let the angle of the cone be $2\theta_0 \ll 1$, so that the region outside the conductor corresponds to polar angles in the range $\theta_0 \leqslant \theta \leqslant \pi$. As in Problem 3, we seek a solution for the variable part of the potential, which is symmetrical about the axis, in the form

$$\phi = r^n f(\theta), \tag{1}$$

with the smallest possible value of n. Laplace's equation

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right) = 0$$

after substitution of (1), gives

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\theta}\right) + n(n+1)f = 0 \tag{2}$$

The condition of constant potential on the surface of the cone means that we must have $f(\theta_0) = 0$.

For small θ_0 we seek a solution by assuming that $n \ll 1$ and $f(\theta)$ is of the form constant $\times[1+\psi(\theta)]$, where $\psi \ll 1$. (For $\theta_0 \to 0$, i.e. an infinitely sharp point, we should expect that ϕ tends to a constant almost everywhere near the cone.) The equation for ψ is

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}\theta}\right) = -n \tag{3}$$

The solution having no singularities outside the cone (in particular, at $\theta = \pi$) is $\psi(\theta) = 2n\log\sin\frac{1}{2}\theta$.

For $\theta \sim \theta_0 \ll 1, \psi$ is no longer small. Nevertheless, this expression remains valid, since the second term in equation (2) may be neglected because θ is small. To determine the constant n in the first approximation we must require that the function $f = 1 + \psi$ vanish for $\theta = \theta_0$. Thus †$n = -1/2\log\theta_0$. The field increases to infinity as $r^{-(1-n)}$ in the neighbourhood of the vertex, i.e. essentially as $1/r$.

Problem 5. The same as Problem 4, but for a sharp conical depression on the surface of a conductor.

Solution. The region outside the conductor now corresponds to the range $0 \leqslant \theta \leqslant \theta_0$. As in Problem 4, we seek ϕ in the form (1), but now $n \geqslant 1$. Since $\theta \ll 1$ for all points in the field, equation (2) becomes

$$\frac{1}{\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\theta\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\theta}\right) + n^2 f = 0$$

This is Bessel's equation, and the solution having no singularities in the field is $J_0(n\theta)$. The value of n is determined as the smallest root of the equation $J_0(n\theta_0) = 0$, whence $n = 2.4/\theta_0$.

Problem 6. Determine the energy of the attraction between an electric dipole and a plane conducting surface.

Solution. We take the x-axis perpendicular to the surface of the conductor, and passing through the dipole; let the dipole moment vector $\mathscr{P}$ lie in the xy-plane. The image of the dipole is at the point $-x$ and has a moment $\mathscr{P}'_x = \mathscr{P}_x, \mathscr{P}'_y = -\mathscr{P}_y$. The required energy of attraction is the energy of the interaction between the dipole and its image, and is $\mathscr{U} = -\left(2\mathscr{P}_x{}^2 + \mathscr{P}_y{}^2\right)/8x^3$.

Problem 7. Determine the mutual capacitance per unit length of two parallel infinite conducting cylinders with radii a and b, their axes being at a distance c apart ‡

† A more exact formula $n = 1/2\log(2/\theta_0)$, containing a coefficient in the (large) logarithm, cannot really be obtained by the simple method given here. A more rigorous calculation, however, leads, as it happens, to this same formula.

‡ The corresponding problem for two spheres cannot be solved in closed form. The difference arises because, in the field of two parallel wires bearing equal and opposite charges, all the equipotential surfaces are circular cylinders, whereas in the field of two equal and opposite point charges the equipotential surfaces are not spheres.

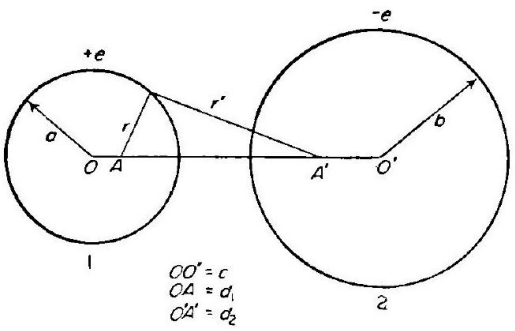


Fig. 4

Solution. The field due to the two cylinders is the same as that which would be produced (in the region outside the cylinders) by two charged wires passing through certain points A

and A' (Fig. 4). The wires have charges $\pm e$ per unit length, equal to the charges on the cylinders, and the points A and A' lie on OO' in such a way that the surfaces of the cylinders are equipotential surfaces. For this to be so, the distances OA and $O'A'$ must be such that $OA \cdot OA' = a^2, O'A' \cdot O'A = b^2$, i.e. $d_1\,(c - d_2) = a^2, d_2\,(c - d_1) = b^2$. Then, for each cylinder, the ratio r/r' of the distances from A and A' is constant. On cylinder $1, r/r' = a/OA' = a/\,(c - d_2) = d_1/a$, and on cylinder 2, $r'/r = d_2/b$. Accordingly, the potentials of the cylinders are $\phi_1 = -2e \log\,(r/r') = -2e \log\,(d_1/a)$, $\phi_2 = 2e \log\,(d_2/b)\,, \phi_2 - \phi_1 = 2e \log\,(d_1 d_2/ab)$. Hence we find the required mutual capacitance $C = e/\,(\phi_2 - \phi_1)$:

$$1/C = 2 \log\,(d_1 d_2/ab) = 2 \cosh^{-1}\left[\left(c^2 - a^2 - b^2\right)/2ab\right].$$

In particular, for a cylinder with radius a at a distance $h(> a)$ from a conducting plane, we put $c = b + h$ and take the limit as $b \to \infty$, obtaining $1/C = 2 \cosh^{-1}(h/a)$.

If two hollow cylinders are placed one inside the other ($c < b - a$), there is no field outside, while the field between the cylinders is the same as that due to two wires with charges $\pm e$ passing through A and A' (Fig. 5). The same method gives

$$1/C = 2 \cosh^{-1}\left[\left(a^2 + b^2 - c^2\right)/2ab\right].$$

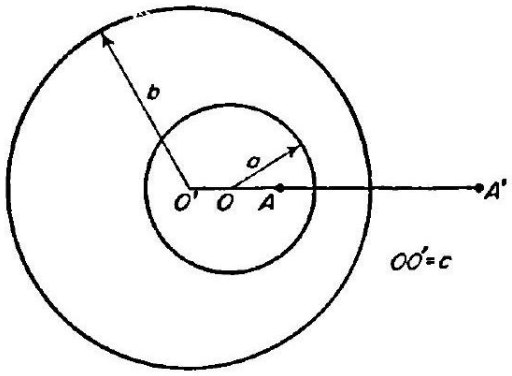


Fig. 5

Problem 8. The boundary of a conductor is an infinite plane with a hemispherical projection. Determine the charge distribution on the surface.

Solution. In the field determined in Problem 1, whose potential is

$$\phi = \text{ constant } \times z\left(1 - \frac{R^3}{r^3}\right),$$

the plane $z = 0$ with a projection $r = R$ is an equipotential surface, on which $\phi = 0$. Hence it can be the surface of a conductor, and the above formula gives the field outside the conductor. The charge distribution on the plane part of the surface is given by

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi}\left[\frac{\partial \phi}{\partial z}\right]_{z=0} = \sigma_0\left(1 - \frac{R^3}{r^3}\right);$$

we have taken the constant in ϕ as $-4\pi\sigma_0$, so that σ_0 is the charge density far from the projection. On the surface of the projection we have

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi}\left[\frac{\partial \phi}{\partial r}\right]_{r=R} = 3\sigma_0 \frac{z}{R}.$$

Problem 9. Determine the dipole moment of a thin conducting cylindrical rod, with length $2l$ and radius $a \ll l$, in an electric field $\mathbb{C}$ parallel to its axis.

Solution. Let $\tau(z)$ be the charge per unit length induced on the surface of the rod, and z the coordinate along the axis of the rod. measured from its midpoint. The condition of constant potential on the surface of the conductor is

$$-\mathbb{C}_z + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{I}\frac{\tau\left(z'\right)\mathrm{d}z'\mathrm{d}\phi}{R} = 0$$
$$R^2 = \left(z'-z\right)^2 + 4a^2\sin^2\frac{1}{2}\phi$$

where ϕ is the angle between planes passing through the axis of the cylinder and through two points on its surface at a distance R apart. We divide the integral into two parts, putting $\tau\left(z'\right) \equiv \tau(z) + \left[\tau\left(z'\right) - \tau(z)\right]$. Since $l \gg a$, we have for points not too near the ends of the rod

$$\frac{\tau(z)}{2\pi}\iint\frac{\mathrm{d}z'\mathrm{d}\phi}{R} \cong \frac{\tau(z)}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log\frac{l^2-z^2}{a^2\sin^2\frac{1}{2}\phi}\,\mathrm{d}\phi = \tau(z)\log\frac{4\left(l^2-z^2\right)}{a^2},$$

using the result that $\int_0^{\pi}\log\sin\phi\mathrm{d}\phi = -\pi\log 2$. In the integral which contains the difference $\tau\left(z'\right) - \tau(z)$, we can neglect the a^2 term in R. since it no longer causes the integral to diverge. Thus

$$\mathbb{C}_z = \tau(z)\log 4\left(l^2-z^2\right)/a^2 + \int_{-l}^{l}\frac{\tau\left(z'\right)-\tau(z)}{|z'-z|}\mathrm{d}z'.$$

The quantity τ is almost proportional to z, and in this approximation the integral gives $-2\tau(z)$, the result being

$$\tau(z) = \frac{\mathbb{E}_z}{\log\left[4\left(l^2-z^2\right)/a^2\right]-2}.$$

This expression is invalid near the ends of the rod. but in calculating the dipole moment that region is unimportant. In the above approximation we have

$$\mathscr{P} = \int_{-1}^{I}\tau(z)z\;\mathrm{d}z = \frac{\mathbb{E}}{L}\int_0^I\left\{z^2 - \frac{z^2}{2L}\log\left(1-\frac{z^2}{l^2}\right)\right\}\mathrm{d}z$$
$$= \frac{\mathbb{E}l^3}{3L}\left\{1+\frac{1}{L}\left(\frac{4}{3}-\log 2\right)\right\}$$

where $L = \log(2l/a) - 1$ is large, or (with the same accuracy)

$$\mathscr{P} = \frac{\mathcal{E}I^3}{3\log(4I/a)-7}.$$

Problem 10. Determine the capacitance of a hollow conducting cap of a sphere.

Solution. We take the origin O at a point on the rim of the cap (Fig. 6), and carry out the inversion transformation $r = l^2r'$, where l is the diameter of the cap. The cap then becomes the half-plane shown by the dashed line in Fig. 6, which is perpendicular to the radius AO of the cap and passes through the point B on its rim.

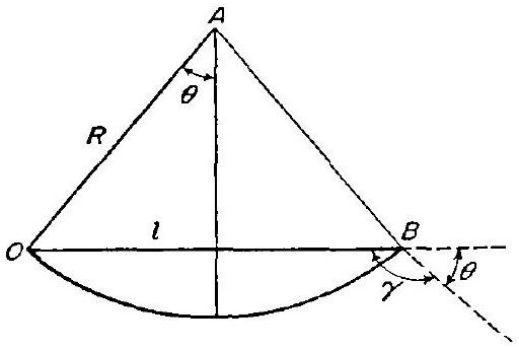


Fig. 6

The angle $\gamma = \pi - \theta$, where 2θ is the angle subtended by the diameter of the cap at the centre of the sphere.

If the charge on the cap is e and its potential is taken as zero, then as $r \to \infty$ the potential $\phi \to -\phi_0 + e/r$. Accordingly, in the transformed problem, as $r' \to 0$ the potential is $\phi' \to l\phi/r' \cong -l\phi_0/r' + e/l$, where the first term corresponds to a charge $e' = -l\phi_0$ at the origin.

According to formula (3.22) we have

$$\phi' = \frac{e'}{r'} - \frac{e'}{2\pi l}\left(1 + \frac{\theta}{\sin\theta}\right)$$

(the potential near a charge e' at a distance l from the edge of a conducting half-plane at zero potential) Comparing the two expressions, we have for the required capacitance $C = e/\phi_0$

$$C = \frac{l}{2\pi}\left(1 + \frac{\theta}{\sin\theta}\right) = \frac{R}{\pi}(\sin\theta + \theta),$$

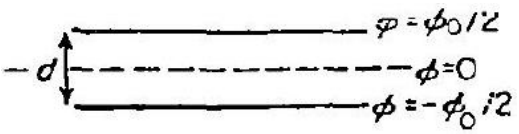
where R is the radius of the cap

Problem 11. Determine the correction due to edge effects on the value $C = S/4\pi d$ for the capacitance of a plane capacitor (S being the area of the plates, and $d \ll \sqrt{S}$ the distance between them).

Solution. Since the plates have free edges. the distribution of charge over them is not uniform. To determine the required correction in a first approximation, we consider points which are at distances x from the edge such that $d \ll x \ll \sqrt{}$ S. For example, taking the upper layer (at potential $\phi = \frac{1}{2}\phi_0$, Fig. 7a) and neglecting its distance $\frac{1}{2}d$ from the midplane (the equipotential surface $\phi = 0$), we have the problem of the field near the boundary between two parts of a plane having different potentials (Fig. 7b). The solution is elementary †, and the excess charge density (relative to the value of σ far from the edge) is $\Delta\sigma = E_n/4\pi = \phi_0/8\pi^2 x$, so that the total excess charge is $L\int \Delta\sigma \, \mathrm{d}x = (\phi_0 L/8\pi^2)\log(\sqrt{S}/d)$, where L is the perimeter of the plate. In calculating the logarithmically divergent integral, we have taken the limits as those of the region $d \ll x \ll \sqrt{S}$. Hence we find the capacitance

$$C = \frac{S}{4\pi d} + \frac{L}{8\pi^2}\log\frac{\mathrm{v}'S}{d}.$$

(a)



(b)

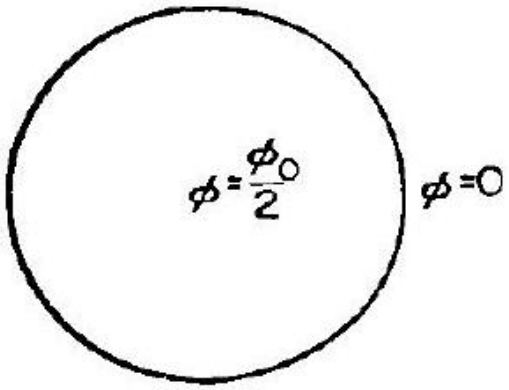


Fig. 7

A more exact calculation (determining the coefficient in the argument of the logarithm) demands considerably more elaborate methods, and the result depends the shape of the plates. If these are circular, with radius R, we obtain Kirchhoff's formula

$$C = \frac{R^2}{4d} + \frac{R}{4\pi}\left(\log\frac{16\pi R}{d} - 1\right).$$

4.2.5 §4. A conducting ellipsoid

The problem of the field of a charged conducting ellipsoid and that of an ellipsoid in a uniform external field are solved by the use of ellipsoidal coordinates. These are related to Cartesian coordinates by the equation

$$\frac{x^2}{a^2+u} + \frac{y^2}{b^2+u} + \frac{z^2}{c^2+u} = 1 \quad (a > b > c) \tag{4.1}$$

This equation, a cubic in u, has three different real roots ξ, η, ζ, which lie in the following ranges:

$$\xi \geqslant -c^2, \quad -c^2 \geqslant \eta \geqslant -b^2, \quad -b^2 \geqslant \zeta \geqslant -a^2. \tag{4.2}$$

These three roots are the ellipsoidal coordinates of the point x, y, z. Their geometrical significance is seen from the fact that the surfaces of constant ξ, η and ζ are respectively ellipsoids and hyperboloids of one and two sheets, all confocal with the ellipsoid

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1 \tag{4,3}$$

One surface of each of the three families passes through each point in space, and the three surfaces are orthogonal. The formulae for transformation from ellipsoidal to Cartesian coordinates are given by solving three simultaneous equations of the type (4.1), and are

$$\left.\begin{aligned} x &= \pm\sqrt{\left[\frac{(\xi+a^2)(\eta+a^2)(\zeta+a^2)}{(b^2-a^2)(c^2-a^2)}\right]} \\ y &= \pm\sqrt{\left[\frac{(\xi+b^2)(\eta+b^2)(\zeta+b^2)}{(c^2-b^2)(a^2-b^2)}\right]} \\ z &= \pm\sqrt{\left[\frac{(\xi+c^2)(\eta+c^2)(\zeta+c^2)}{(a^2-c^2)(b^2-c^2)}\right]} \end{aligned}\right\} \tag{4.4}$$

[0]‡ See §23. In formula (23.2) for the potential we must here put $\phi_{ab} = \frac{1}{2}\phi_0, \alpha = \pi$.

The element of length in ellipsoidal coordinates is

$$\left.\begin{gathered} \mathrm{d}l^2 = h_1^2\,\mathrm{d}\xi^2 + h_2^2\,\mathrm{d}\eta^2 + h_3^2\,\mathrm{d}\zeta^2 \\ h_1 = \sqrt{[(\xi-\eta)(\xi-\zeta)]/2R_\xi}, \quad h_2 = \sqrt{[(\eta-\zeta)(\eta-\xi)]/2R_\eta} \\ h_3 = \sqrt{[(\zeta-\xi)(\zeta-\eta)]/2R_\zeta}, \quad R_u^2 = (u+a^2)\,(u+b^2)\,(u+c^2) \\ u = \xi, \eta, \zeta. \end{gathered}\right\} \tag{4.5}$$

Accordingly, Laplace's equation in these coordinates is

$$\Delta\phi = \frac{4}{(\xi-\eta)(\zeta-\xi)(\eta-\zeta)} \times \left[(\eta-\zeta)R_\xi\frac{\partial}{\partial\xi}\left(R_\xi\frac{\partial\phi}{\partial\xi}\right) + (\zeta-\xi)R_\eta\frac{\partial}{\partial\eta}\left(R_\eta\frac{\partial\phi}{\partial\eta}\right) + (\xi-\eta)R_\zeta\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(R_\zeta\frac{\partial\phi}{\partial\zeta}\right)\right] = 0 \tag{4.6}$$

If two of the semiaxes a, b, c become equal, the system of ellipsoidal coordinates degenerates. Let $a = b > c$. Then the cubic equation (4.1) becomes a quadratic,

$$\frac{\rho^2}{a^2+u} + \frac{z^2}{c^2+u} = 1, \quad \rho^2 = x^2 + y^2 \tag{4.7}$$

with two roots whose values lie in the ranges $\xi \geqslant -c^2, -c^2 \geqslant \eta \geqslant -a^2$. The coordinate surfaces of constant ξ and η become respectively confocal oblate spheroids and confocal hyperboloids of revolution of one sheet (Fig. 8). As the third coordinate we can take the polar angle ϕ in the xy-plane ($x = \rho\cos\phi, y = \rho\sin\phi$). For $a = b$ the ellipsoidal coordinate ζ degenerates to a constant. $-a^2$. Its relation to the angle ϕ is given by the way in which it tends to $-a^2$ as b tends to a. namely

$$\cos\phi = \sqrt{\left[\left(a^2+\zeta\right) / \left(a^2-b^2\right)\right]} \text{ as } b \to a. \tag{4,8}$$

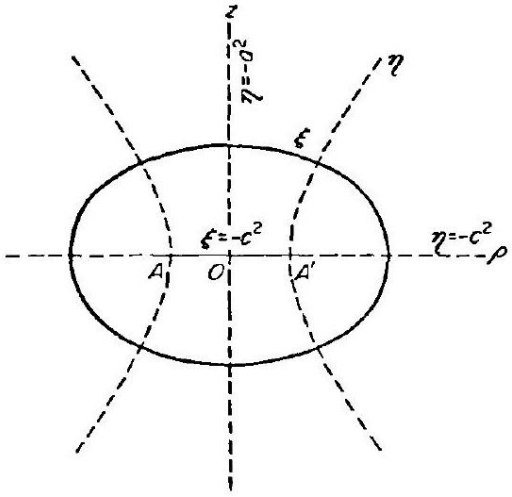


Fig. 8

This is easily seen from (4.4) or directly from (4.1). The relation between the coordinates z, ρ and ξ, η is given, according to (4.4), by

$$z = \pm\sqrt{\left[\frac{(\xi+c^2)\,(\eta+c^2)}{c^2-a^2}\right]}, \quad \rho = \sqrt{\left[\frac{(\xi+a^2)\,(\eta+a^2)}{a^2-c^2}\right]}. \tag{4.9}$$

The coordinates ξ, η, ϕ are called oblate spheroidal coordinates. †
Similarly, for $a > b = c$ ellipsoidal coordinates become prolate spheroidal coordinates. Two coordinates ξ and ζ are roots of the equation

$$\frac{x^2}{a^2+u} + \frac{\rho^2}{b^2+u} = 1, \quad \rho^2 = y^2 + z^2 \tag{4.10}$$

where $\xi \geqslant -b^2, -b^2 \geqslant \zeta \geqslant -a^2$. The surfaces of constant ξ and ζ are prolate spheroids and hyperboloids of revolution of two sheets (Fig. 9). The coordinate η degenerates to a constant. $-b^2$, for $c \to b$, and we have

$$\cos\phi = \sqrt{\left[\left(b^2+\eta\right) / \left(b^2-c^2\right)\right]}, \tag{4.11}$$

where ϕ is the polar angle in the yz-plane. The relation between the coordinates x, ρ and ξ, ζ is given by

$$x = \pm\sqrt{\left[\frac{(\xi+a^2)(\zeta+a^2)}{a^2-b^2}\right]}, \quad \rho = \sqrt{\left[\frac{(\xi+b^2)(\zeta+b^2)}{b^2-a^2}\right]}. \tag{4.12}$$

In a system of oblate spheroidal coordinates the foci of the spheroids and hyperboloids lie on a circle of radius $\sqrt{(a^2-c^2)}$ in the xy-plane; in Fig. 8 AA' is a diameter of this circle. Let us draw a plane passing through the z-axis and some point P. It intersects the focal circle at two points; let their distances from P be r_1, r_2. If the coordinates of P are ρ, z, then

$$r_1^2 = \left[\rho - \sqrt{\left(a^2-c^2\right)}\right]^2 + z^2, \quad r_2^2 = \left[\rho + \sqrt{\left(a^2-c^2\right)}\right]^2 + z^2.$$

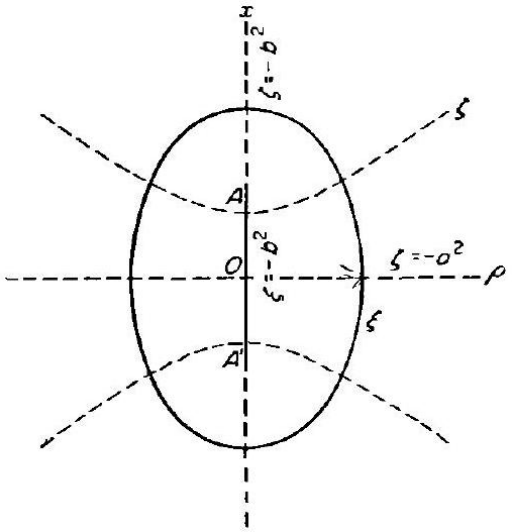


Fig. 9

The spheroidal coordinates ξ, η are given in terms of r_1, r_2 by

$$\xi = \frac{1}{4}(r_1+r_2)^2 - a^2, \quad \eta = \frac{1}{4}(r_2-r_1)^2 - a^2. \tag{4.13}$$

In a system of prolate spheroidal coordinates the foci are the points $x = \pm\sqrt{(a^2-b^2)}$ on the x-axis (the points A, A' in Fig. 9). If r_1 and r_2 are the distances of these foci from P, then

[0]† We here define spheroidal coordinates to be the limit of ellipsoidal coordinates. Other definitions are used in the literature, but are easily related to ours.

$$r_1^2 = \rho^2 + \left[x - \sqrt{\left(a^2 - b^2\right)}\right]^2, \quad r_2^2 = \rho^2 + \left[x + \sqrt{\left(a^2 - b^2\right)}\right]^2,$$

and the spheroidal coordinates ξ, ζ are given in terms of r_1, r_2 by the same formulae (4.13), with ζ in place of η.

Let us now turn to the problem of the field of a charged ellipsoid whose surface is given by the equation (4.3). In ellipsoidal coordinates this is the surface $\xi = 0$. It is therefore clear that, if we seek the field potential as a function of ξ only, all the ellipsoidal surfaces $\xi =$ constant, and in particular the surface of the conductor, will be equipotential surfaces.

Laplace's equation (4.6) then becomes

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\left(R_\xi \frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\xi}\right) = 0$$

whence

$$\phi(\xi) = A\int_\xi^\infty \frac{\mathrm{d}\xi}{R_\xi}$$

The upper limit of integration is taken so that the field is zero at infinity. The constant A is most simply determined from the condition that at large distances r the field must become a Coulomb field and $\phi \cong e/r$, where e is the total charge on the conductor. When $r \to \infty, \xi \to \infty$, and $\xi \cong r^2$, as we see from equation (4.1) with $u = \xi$. For large ξ we have $R_\xi \cong \xi^{3/2}$, and $\phi \cong 2A/\sqrt{\xi} = 2A/r$. Hence $2A = e$, and therefore

$$\phi(\xi) = \frac{1}{2}e\int_\xi^\infty \frac{\mathrm{d}\xi}{R_\xi} \tag{4.14}$$

The integral is an elliptic integral of the first kind. The surface of the conductor corresponds to $\xi = 0$, and so the capacitance of the conductor is given by

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\xi}{R_\xi} \tag{4.15}$$

The distribution of charge on the surface of the ellipsoid is determined by the normal derivative of the potential:

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi}\left[\frac{\partial\phi}{\partial n}\right]_{\xi=0} = -\frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{h_1}\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\xi}\right]_{\xi=0} = \frac{e}{4\pi}\frac{1}{\sqrt{(\eta\zeta)}}$$

From equations (4.4) we easily see that for $\xi = 0$

$$\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4} = \frac{\eta\zeta}{a^2b^2c^2}$$

Hence

$$\sigma = \frac{e}{4\pi abc}\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}\right)^{-\frac{1}{2}} \tag{4.16}$$

For a spheroid the integrals (4.14), (4.15) degenerate and can be expressed in terms of elementary functions. For a prolate spheroid ($a > b = c$) the field potential is

$$\phi = \frac{e}{\sqrt{(a^2 - b^2)}}\tanh^{-1}\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{\xi + a^2}} \tag{4.17}$$

and the capacitance is

$$C = \frac{\surd(a^2 - b^2)}{\cosh^{-1}(a/b)} \tag{4.18}$$

For an oblate spheroid ($a = b > c$) we have

$$\phi = \frac{e}{\surd(a^2 - c^2)} \tan^{-1} \sqrt{\frac{a^2 - c^2}{\xi + c^2}}, \quad C = \frac{\surd(a^2 - c^2)}{\cos^{-1}(c/a)}. \tag{4.19}$$

In particular, for a circular disc ($a = b, c = 0$)

$$C = 2a/\pi. \tag{4.20}$$

Let us now consider the problem of an uncharged conducting ellipsoid in a uniform external electric field $\boldsymbol{\epsilon}$. Without loss of generality we may take the field $\boldsymbol{\mathcal{C}}$ to be along one of the axes of the ellipsoid. In any other case this field may be resolved into components along the three axes, and the resultant field is a superposition of those arising from each component separately.

The potential of a uniform field $\boldsymbol{\mathcal{G}}$ along the $\boldsymbol{x}$-axis (the $\boldsymbol{a}$-axis of the ellipsoid) is, in ellipsoidal coordinates,

$$\phi_{\mathrm{o}} = -\mathbb{E}_x = -\mathbb{E}^- / \left[\left(\xi + a^2\right) \left(\eta + a^2\right) \left(\zeta + a^2\right) / \left(b^2 - a^2\right) \left(c^2 - a^2\right) \right]. \tag{4.21}$$

We write the field potential outside the ellipsoid as $\phi = \phi_{\mathrm{o}} + \phi'$, where ϕ' gives the required perturbation of the external field by the ellipsoid, and seek ϕ' in the form

$$\phi' = \phi_0 F(\xi). \tag{4.22}$$

In this function the factors depending on η and ζ are the same as in ϕ_{o}; this enables us to satisfy the boundary condition at $\xi = 0$ for arbitrary η, ζ (i.e. on the surface of the ellipsoid). Substituting (4.22) in Laplace's equation (4.6), we obtain for $F(\xi)$ the equation

$$\frac{\mathrm{d}^2 F}{\mathrm{d}\xi^2} + \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\xi} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi} \log \left[R_\xi \left(\xi + a^2\right) \right] = 0.$$

One solution of this equation is $F =$ constant, and the other is

$$F(\xi) = A \int_\xi^\infty \frac{\mathrm{d}\xi}{\left(\xi + a^2\right) R_\xi} \tag{4.23}$$

The upper limit of integration is taken so that $\phi' \to 0$ for $\xi \to \infty$. The integral is an elliptic integral of the second kind.

We must have $\phi =$ constant on the surface of the ellipsoid. For this condition to be satisfied with $\xi = 0$ and arbitrary η, ζ, the constant value of ϕ must be zero. Determining the coefficient A in $F(\xi)$ so that $F(0) = -1$, we obtain the following final expression for the field potential near the ellipsoid:

$$\phi = \phi_0 \left\{ 1 - \int_\xi^\infty \frac{\mathrm{d}s}{\left(s + a^2\right) R_s} \Big/ \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}s}{\left(s + a^2\right) R_s} \right\}. \tag{4.24}$$

Let us find the form of the potential ϕ' at large distances r from the ellipsoid. For large r, the coordinate ξ is large, and $\xi \cong r^2$, as follows at once from equation (4.1). Hence

$$\int_\xi^\infty \frac{\mathrm{d}s}{\left(s + a^2\right) R_s} \cong \int_{r^2}^\infty \frac{\mathrm{d}s}{s^{5/2}} = \frac{2}{3r^3},$$

and the potential $\phi' = {}^{\mathcal{F}}xV/4\pi n^{(x)} r^3$, where $V = \frac{4}{3}\pi abc$ is the volume of the ellipsoid and $n^{(x)}, n^{(y)}, n^{(z)}$ are defined by

$$\left.\begin{array}{ll} n^{(x)} = \frac{1}{2}abc\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}s}{(s+a^2)R_s}, & n^{(y)} = \frac{1}{2}abc\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}s}{(s+b^2)R_s} \\ n^{(z)} = \frac{1}{2}abc\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}s}{(s+c^2)R_s} & \end{array}\right\} \tag{4.25}$$

The expression for ϕ' is, as we should expect, the potential of an electric dipole: $\phi' = x\mathscr{P}_x/r^3$, where the dipole moment of the ellipsoid is

$$\mathscr{P}_x = \mathbb{F}_x V/4\pi n^{(x)} \tag{4.26}$$

Analogous expressions give the dipole moment when the field $\boldsymbol{\epsilon}$ is along the y or z axis. The positive constants $n^{(x)}, n^{(y)}, n^{(z)}$ depend only on the shape of the ellipsoid, and not on its volume; they are called the depolarizing factors. † If the coordinate axes do not necessarily coincide with those of the ellipsoid, formula (4.26) must be written in the tensor form

$$(4\pi/V)n_{ik}\mathscr{P}_k = \mathfrak{F}_i \tag{4.27}$$

The quantities $n^{(x)}, n^{(y)}, n^{(z)}$ are the principal values of the symmetrical tensor n_{ik} of rank two. Comparison with the definition (2.13) shows that $\alpha_{ik} = {n^{-1}}_{ik}/4\pi$ is the polarizability tensor of the conducting ellipsoid.

In the general case of arbitrary a, b, c, it follows from the definitions of $n^{(x)}, n^{(y)}, n^{(z)}$ that

$$n^{(x)} < n^{(y)} < n^{(z)} \text{ if } a > b > c \tag{4.28}$$

Further, by adding the integrals for $n^{(x)}, n^{(y)}, n^{(z)}$ and using as the variable of integration $u = {R_s}^2$. we find

$$n^{(x)} + n^{(y)} + n^{(z)} = \frac{1}{2}abc\int_{(abc)^2}^\infty \frac{\mathrm{d}u}{u^{3/2}}$$

whence

$$n^{(x)} + n^{(y)} + n^{(z)} = 1 \tag{4.29}$$

The sum of the three depolarizing factors is thus unity; in tensor notation, $n_{ii} = 1$. Since these coefficients are positive, none can exceed unity.

For a sphere ($a = b = c$) it is evident from symmetry that

$$n^{(x)} = n^{(y)} = n^{(z)} = \frac{1}{3} \tag{4.30}$$

For a cylinder with its axis in the x-direction ($a \to \infty$), we have ‡

$$n^{(x)} = 0. \quad n^{(y)} = n^{(z)} = \frac{1}{2} \tag{4.31}$$

The limiting case $a, b \to \propto$ (a flat plate) corresponds to the obvious values

$$n^{(x)} = n^{(y)} = 0, \quad n^{(z)} = 1$$

The elliptic integrals (4.25) can be expressed in terms of elementary functions if the ellipsoid is a spheroid. For a prolate spheroid ($a > b = c$) of eccentricity $e = \sqrt{(1 - b^2/a^2)}$,

[0]† The same coefficients occur in problems concerning a dielectric ellipsoid in an external electric field, or a magnetic ellipsoid in a magnetic field (§8). Tables and graphs of the coefficients for spheroids and ellipsoids have been given by E.C. Stoner (Philosophical Magazine [7] 36, 803. 1945) and J. A. Osborn (Physical Review 67, 351, 1945).

‡ These values for a sphere and a cylinder agree, of course, with those found in §3. Problems 1 and 2.

$$n^{(x)} = \frac{1-e^2}{2e^3}\left(\log\frac{1+e}{1-e} - 2e\right), \quad n^{(y)} = n^{(z)} = \frac{1}{2}\left(1 - n^{(x)}\right). \tag{4.32}$$

If the spheroid is nearly spherical ($e \ll 1$) we have approximately

$$n^{(x)} = \frac{1}{3} - \frac{2}{15}e^2, \quad n^{(y)} = n^{(z)} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}e^2. \tag{4.33}$$

For an oblate spheroid ($a = b > c$)

$$n^{(z)} = \frac{1+e^2}{e^3}\left(e - \tan^{-1} e\right), \quad n^{(x)} = n^{(y)} = \frac{1}{2}\left(1 - n^{(z)}\right) \tag{4.34}$$

where $e = \sqrt{(a^2/c^2 - 1)}$. If $e \ll 1$, then

$$n^{(z)} = \frac{1}{3} + \frac{2}{15}e^2, \quad n^{(x)} = n^{(y)} = \frac{1}{3} - \frac{1}{15}e^2 \tag{4.35}$$

PROBLEMS

Problem 1. Find the field of a charged conducting circular disc with radius a, expressing it in cylindrical coordinates. Find the distribution of charge on the disc.

Solution. The charge distribution is obtained by taking the limit of formula (4.16) as $c \to 0, z \to 0$, with $z/c = \sqrt{(1 - r^2/a^2)}$ (where $r^2 = x^2 + y^2$), in accordance with (4.3). This gives

$$\sigma = \frac{e}{4\pi a^2}\left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

The field potential is given in all space by formula (4.19), where we put $c = 0$ and express ξ in terms of r and z by means of equation (4.1) with $c = 0, u = \xi, a = b$:

$$\phi = \frac{e}{a}\tan^{-1}\left[\frac{2a^2}{r^2 + z^2 - a^2 + \sqrt{\left[\left(r^2 + z^2 - a^2\right)^2 + 4a^2z^2\right]}}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Near the edge of the disc, we replace r and z by coordinates ρ and θ such that $z = \rho\sin\theta, r = a - \rho\cos\theta$ (Fig. 10, p. 26; $\rho \ll a$), obtaining

$$\phi \cong \frac{e}{a}\left(\frac{1}{2}\pi - \sqrt{\frac{2\rho}{a}}\sin\frac{1}{2}\theta\right),$$

in agreement with the general result derived in §3, Problem 3.

Problem 2. Determine the electric quadrupole moment of a charged ellipsoid.

Solution. The quadrupole moment tensor of a charged conductor is defined as $D_{ik} = e\left(3\overline{x_ix_k} - \overline{r^2}\delta_{ik}\right)$, where e is the total charge, and the bar denotes an average such as

$$\overline{x_ix_k} = \frac{1}{e}\oint x_ix_k\sigma \, \mathrm{d}f$$

It is evident that the axes of the ellipsoid are also the principal axes of the tensor D_{ik}. Using formula (4.16) for σ, and for the element of surface of the ellipsoid the expression

$$\mathrm{d}f = \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{v_z} = \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{z/c^2}\sqrt{\left[\begin{array}{l} x^2 \\ a^4 \end{array} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}\right]}.$$

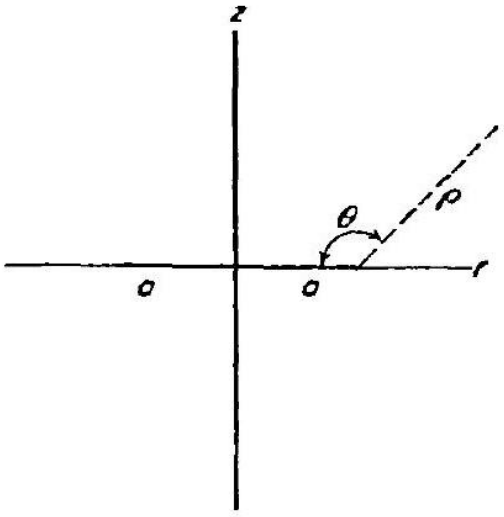


Fig. 10

where v is a unit vector normal to the surface, we obtain

$$\overline{z^2} = \frac{c}{4\pi ab}\int z\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y = \frac{1}{3}c^2$$

the integration over x and y covers twice the area of the cross-section of the ellipsoid by the xy-plane. Thus

$$D_{xx} = \frac{1}{3}e\left(2a^2 - b^2 - c^2\right), \quad D_{yy} = \frac{1}{3}e\left(2b^2 - c^2 - a^2\right), \quad D_{zz} = \frac{1}{3}e\left(2c^2 - a^2 - b^2\right)$$

Problem 3. Determine the distribution of charge on the surface of an uncharged conducting ellipsoid placed in a uniform external field.

Solution. According to formula (1.9) we have

$$\sigma = -\frac{1}{4\pi}\left[\frac{\partial\phi}{\partial n}\right]_{\xi=0} = -\left[\frac{1}{4\pi h_1}\frac{\partial\phi}{\partial\xi}\right]_{\xi=0};$$

by (4.5) the element of length along the normal to the surface of the ellipsoid is $h_1\ \mathrm{d}\xi$. Substituting (4.24) and using the fact that

$$v_x = \left[\frac{1}{h_1}\frac{\partial x}{\partial\xi}\right]_{\xi=0} = \left[\frac{\pi}{2a^2h_1}\right]_{\xi=0}$$

we have $\sigma = \mathcal{E}v_x/4\pi n^{(x)}$ when the external field is in the x-direction. When the direction of the external field is arbitrary this becomes

$$\sigma = \frac{1}{4\pi}v_i{n^{-1}}_{ik}\mathbb{E}_k = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{v_x}{n^{(x)}}\mathbb{C}_x + \frac{v_y}{n^{(y)}}\mathbb{G}_y + \frac{v_z}{n^{(z)}}\mathbb{E}_z\right].$$

Problem 4. The same as Problem 3, but for a plane circular disc with radius a lying parallel to the field. † Determine also the dipole moment of the disc.

Solution. Let us regard the disc as the limit of a spheroid when the semiaxis c tends to zero. The depolarizing factor along this axis (the z-axis) tends to 1 , and those along the x and y axes tend to zero: $n^{(z)} = 1 - \pi c/2a, n^{(x)} = n^{(y)} = \pi c/4a$, by (4.34). The component v_x of the unit vector along the normal to the surface of the spheroid tends to zero:

$$v_x = \frac{x}{a^2}\left(\frac{x^2+y^2}{a^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)^{-\frac{1}{2}} \to \frac{x}{a^2}\frac{c^2}{z} = \frac{xc}{a^2}\left(1-\frac{x^2+y^2}{a^2}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Hence the charge density is

$$\sigma = \frac{\boldsymbol{E}}{4\pi}\frac{v_x}{n^{(x)}} = \frac{\boldsymbol{G}\rho\cos\phi}{\pi^2\sqrt{(a^2-\rho^2)}}$$

where ρ and ϕ are polar coordinates in the plane of the disc.

† The problem for a disc lying perpendicular to the field is trivial: the field remains uniform in all space, and charges $\sigma = \pm\mathbb{C}/4\pi$ are induced on the two sides of the disc.

The dipole moment of the disc is obtained from formula (4.26), and is $\mathscr{P} = 4a^3\mathbb{C}/3\pi$. Thus it is proportional to a^3, and not to the "volume" a^2c of the disc.

Problem 5. Determine the field potential outside an uncharged conducting spheroid with its axis of symmetry parallel to a uniform external field.

Solution. For a prolate spheroid ($a > b = c$, with the field $\mathbb{C}$ in the x-direction) we find. on calculating the integral in formula (4.24),

$$\phi = -\mathbb{C}_x\left\{1-\frac{\tanh^{-1}\sqrt{[(a^2-b^2)/(\xi+a^2)]}-\sqrt{[(a^2-b^2)/(\xi+a^2)]}}{\tanh^{-1}\sqrt{(1-b^2/a^2)}-\sqrt{(1-b^2/a^2)}}\right\}.$$

The coordinate ξ is related to x and $\rho = \sqrt{(y^2+z^2)}$ by

$$\frac{\rho^2}{b^2+\xi}+\frac{x^2}{a^2+\xi} = 1$$

with $0 \leqslant \xi \leqslant \infty$ in the space outside the ellipsoid.

For an oblate spheroid ($a = b > c$) the field $\mathbb{C}$ is along the z-axis. We must therefore replace $s+a^2$ by $s+c^2$ and put $\phi_0 = -\mathbb{C}_z$ in the integrals in (4.24). Then

$$\phi = -\mathbb{C}_z\left\{1-\frac{\sqrt{[(a^2-c^2)/(\xi+c^2)]}-\tan^{-1}\sqrt{[(a^2-c^2)/(\xi+c^2)]}}{\sqrt{(a^2/c^2-1)}-\tan^{-1}\sqrt{(a^2/c^2-1)}}\right\}.$$

where the coordinate ξ is related to z and $\rho = \sqrt{(x^2+y^2)}$ by

$$\frac{\rho^2}{a^2+\xi}+\frac{z^2}{c^2+\xi} = 1$$

Problem 6. The same as Problem 5, but with the axis of symmetry perpendicular to the external field

Solution. For a prolate spheroid (with the field along the z-axis)

$$\phi = -\mathbb{C}_z\left\{1-\frac{\sqrt{(\xi+a^2)/(\xi+b^2)}-(a^2-b^2)^{-\frac{1}{2}}\tanh^{-1}\sqrt{[(a^2-b^2)/(\xi+a^2)]}}{a/b^2-(a^2-b^2)^{-\frac{1}{2}}\tanh^{-1}\sqrt{(1-b^2/a^2)}}\right\}.$$

For an oblate spheroid (with the field along the x-axis)

$$\phi = -\mathbb{C}x\left\{1-\frac{(a^2-c^2)^{-\frac{1}{2}}\tan^{-1}\sqrt{[(a^2-c^2)/(\xi+c^2)]}-\sqrt{(\xi+c^2)/(\xi+a^2)}}{(a^2-c^2)^{-\frac{1}{2}}\tan^{-1}\sqrt{(a^2/c^2-1)}-c/a^2}\right\}.$$

Problem 7. A uniform field $\mathscr{C}$ in the z-direction (in the half-space $z < 0$) is bounded by an earthed conducting plane at $z = 0$, containing a circular aperture. Determine the field and charge distribution on the plane.

Solution. The xy-plane with a circular aperture of radius a and centre at the origin may be regarded as the limit of the hyperboloids of revolution of one sheet

$$\frac{\rho^2}{a^2 - |\eta|} - \frac{z^2}{|\eta|} = 1, \quad \rho^2 = x^2 + y^2$$

as $|\eta| \to 0$. These hyperboloids are one of the families of coordinate surfaces in a system of oblate spheroidal coordinates with $c = 0$. The Cartesian coordinate z, according to (4.9), is given in terms of ξ and η by $z = \vee(\xi|\eta|)/a$, and $\sqrt{\xi}$ must be taken with the positive and negative sign in the upper and lower half-space respectively.

Let us seek a solution in the form $\phi = -\mathbb{C}_z F(\xi)$. For the function $F(\xi)$ we obtain

$$F(\xi) = \text{ constant } \times \int \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi^{\frac{3}{2}}(\xi + a^2)} = \text{ constant } \times \left[\frac{a}{\sqrt{\xi}} - \tan^{-1}\frac{a}{\sqrt{\xi}}\right]$$

the constant of integration is put equal to zero in accordance with the condition $\phi = 0$ for $z \to +\infty$, i.e. $\sqrt{\xi} \to +\infty$. The inverse tangent of a negative quantity must be taken as $\tan^{-1}(a/-\sqrt{\xi}) = \pi - \tan^{-1}(a/\sqrt{\xi})$, and not as $-\tan^{-1}(a/\sqrt{\xi})$ since the potential would then be discontinuous at the aperture ($\xi = 0$) The constant coefficient is chosen so that, for $z \to -\infty$ (i.e. for $\sqrt{\xi} \to -\infty$ and $^{-1}(a/\sqrt{\xi}) \to \pi$), $\phi \to -\mathbb{E}_z$, and so we finally have

$$\phi = -\frac{\mathbb{E}_z}{\pi}\left[\tan^{-1}\frac{a}{\sqrt{\xi}} - \frac{a}{\sqrt{\xi}}\right] = -\frac{\mathbb{E}}{\pi}\sqrt{|\eta|}\left[\frac{\sqrt{\xi}}{a}\tan^{-1}\frac{a}{\sqrt{\xi}} - 1\right]$$

On the conducting plane $\eta = 0$ and the potential is zero, as it should be.
At large distances $r = \sqrt{(z^2 + \rho^2)}$ from the aperture we have $\xi \cong r^2$, and the potential (in the upper halfspace) is

$$\phi \cong \frac{\mathbb{E}a^2}{3\pi}\frac{\sqrt{-\eta}}{\xi} = \mathbb{E}a^3 z/3\pi r^3$$

i.e. we have a dipole field, the moment of the dipole being $\mathscr{P} = \mathscr{E}a^3/3\pi$.
The field decreases as $1/r^3$. and therefore the flux of the field through an infinitely remote surface (in the halfspace $z > 0$) is zero. This means that all the lines of force passing through the aperture reach the upper side of the conducting plane.
The distribution of charge on the conducting plane is given by

$$\sigma = \mp\frac{1}{4\pi}\left[\frac{\partial\phi}{\partial z}\right]_{z=0} = \mp\frac{a}{4\pi\sqrt{\xi}}\frac{\partial\phi}{\partial\sqrt{-\eta}} = \pm\frac{\mathcal{E}}{4\pi^2}\left[\tan^{-1}\frac{a}{\sqrt{\xi}} - \frac{a}{\sqrt{\xi}}\right]$$

where the upper and lower signs refer to the upper and lower sides of the plane respectively. According to the formula

$$\frac{\rho^2}{a^2 + \xi} + \frac{z^2}{\xi} = 1$$

which relates ξ to ρ, z, we have $\sqrt{\xi} = \pm\sqrt{(\rho^2 - a^2)}$ on the plane $z = 0$. Thus the charge distribution on the lower side of the conducting plane is given by the formula

$$\sigma = -\frac{\mathcal{E}}{4\pi^2}\left(\pi - \sin^{-1}\frac{a}{\rho} + \frac{a}{\sqrt{(\rho^2 - a^2)}}\right)$$

As $\rho \to \propto$ we have $\sigma = -\mathfrak{C}/4\pi$, as we should expect. On the upper side

$$\sigma = -\frac{\mathbb{E}}{4\pi^2}\left(\frac{a}{\sqrt{(\rho^2 - a^2)}} - \sin^{-1}\frac{a}{\rho}\right)$$

The total induced charge on the upper side of the plane is finite:

$$e' = \int_a^\infty \sigma \cdot 2\pi\rho \cdot \, \mathrm{d}\rho = -\frac{1}{8}a^2\mathbb{G}$$

Problem 8. The same as Problem 7, but for a plane with a slit of widtb $2b$.
Solution. The xy-plane with a slit along the x-axis may be regarded as the limit of the hyperbolic cylinders

$$\frac{y^2}{b^2 - |\eta|} - \frac{z^2}{|\eta|} = 1$$

as $|\eta| \to 0$. These hyperbolic cylinders are one of the families of coordinate surfaces in a system of ellipsoidal coordinates with $a \to \infty, c \to 0$. The Cartesian coordinate $z = \sqrt{(\xi|\eta|)}/b$.

As in Problem 7, we seek a solution in the form $\phi = -\mathbb{C}z\boldsymbol{F}(\xi)$. obtaining for the function F

$$F = \text{ constant } \times \int \frac{\mathrm{d}\xi}{\xi^{\frac{3}{2}}\sqrt{(\xi + b^2)}}$$

Here the coefficient and the constant of integration are determined by the conditions that $F = 0$ and 1 for $z \to +\infty$ and $-\infty$ respectively (i.e. for $\sqrt{\xi} \to +\infty$ and $-\infty$), and the final result is

$$\phi = \frac{\mathcal{G}}{2b}\left[\sqrt{\left(\xi + b^2\right)} \mp \sqrt{\xi}\right]\sqrt{|\eta|}$$

where we now take $\sqrt{\xi}$ positive and the two signs $\mp$ correspond to the regions $z > 0$ and $z < 0$.
At large distances from the slit we have in the upper half-space $\xi \cong y^2 + z^2 = r^2$, and the potential is
$\phi \cong \frac{1}{4}b\mathbb{E}\sqrt{(|\eta|/\xi)} = \frac{1}{4}\mathbb{C}b^2z/r^2$, i.e. the field of a two-dimensional dipole of moment $\frac{1}{8}\mathbb{C}b^2$ per unit length of the slit (see the formula in §3, Problem 2).

The distribution of charge on the conducting plane is given by

$$\sigma = -\frac{\mathbb{E}}{8\pi}\left(\frac{|y|}{\sqrt{(y^2 - b^2)}} \mp 1\right).$$

The total induced charge on the upper side of the plane, per unit length of the slit, is

$$e' = 2\int_b^\infty \sigma \mathrm{d}y = -\mathbb{E}_b/4\pi$$

Near the edge of the slit we can take $\xi \to 0$ in the expression for $\phi(\xi, \eta)$, obtaining

$$\eta \cong -2b\rho\sin^2\frac{1}{2}\theta,$$

where ρ and θ are polar coordinates in the yz-plane, measured from the slit edge ($y = b + \rho\cos\theta, z = \rho\sin\theta$). Then

$$\phi \cong \mathscr{C}\sqrt{\left(\frac{1}{2}b\rho\right)}\sin\frac{1}{2}\theta,$$

in agreement with the result in §3, Problem 3, for the case $\theta_0 \ll 1$.

4.2.6 §5. The forces on a conductor

In an electric field certain forces act on the surface of a conductor. These forces are easily calculated as follows.

The momentum flux density in an electric field in a vacuum is given by the Maxwell stress tensor. †

$$-\sigma_{ik} = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{2}E^2\delta_{ik} - E_iE_k\right).$$

The force on an element df of the surface of the body is just the flux of momentum through it from outside, and is therefore $\sigma_{ik}\,\mathrm{d}f_k = \sigma_{ik}n_k\,\mathrm{d}f$ (the sign is changed because the normal vector $\mathbf{n}$ is outwards and not inwards). The quantity $\sigma_{ik}n_k$ is thus the force $\mathbf{F}_s$ per unit area of the surface. Since, at the surface of a conductor, the field $\mathbf{E}$ has no tangential component, we obtain

$$\mathbf{F}_s = \mathbf{n}E^2/8\pi, \tag{5.1}$$

or, introducing the surface charge density σ.

$$\mathbf{F}_s = 2\pi\sigma^2\mathbf{n} = \frac{1}{2}\sigma\mathbf{E}$$

We therefore conclude that a "negative pressure" acts on the surface of a conductor; it is directed along the outward normal to the surface, and its magnitude is equal to the energy density in the field.

The total force $\mathbf{F}$ on the conductor is obtained by integrating the force (5.1) over the whole surface ‡ :

$$\mathbf{F} = \oint \left(E^2/8\pi\right)\mathrm{d}\mathbf{f}. \tag{5.2}$$

Usually, however, it is more convenient to calculate this quantity from the general laws of mechanics, by differentiating the energy $\mathscr{U}$. The force, in the direction of a coordinate q, acting on a conductor is $-\partial\mathscr{U}/\partial q$, where the derivative signifies the rate of change of energy when the body is translated in the q-direction. The energy must be expressed in terms of the charges on the conductors (which give rise to the field), and the differentiation is performed with the charges constant. Denoting this by the suffix e, we write

$$F_q = -(\partial\mathscr{U}/\partial q)_e. \tag{5.3}$$

Similarly, the projection, on any axis, of the total moment of the forces on the conductor is

$$K = -(\partial\mathscr{U}/\partial\psi)_e, \tag{5.4}$$

where ψ is the angle of rotation of the body about that axis.

If, however, the energy is expressed as a function of the potentials of the conductors, and not of

[0]† See Fields, §33. The stress tensor σ_{ik} is usually defined with the opposite sign to the momentum flux density tensor. This definition has been used elsewhere in the Course of Theoretical Physics, but by an oversight the definition of σ_{ik} in Fields, §33, had the other sign.

‡ In the present case we are applying this formula to a surface which does not precisely coincide with that of the body, but is some distance away, in order to exclude the effect of the field structure near the surface (see §1).

their charges. the calculation of the forces from the energy requires special consideration. The reason is that, to maintain constant the potential of a moving conductor, it is necessary to use other bodies. For example, the potential of a conductor can be kept constant by connecting it to another conductor of very large capacitance, a "charge reservoir". On receiving a charge e_a, the conductor takes it from the reservoir, whose potential ϕ_a is unchanged on account of its large capacitance, although its energy is reduced by $e_a\phi_a$. When the whole system of conductors receives charges e_a, the energy of the reservoirs connected to them changes by a total of $-\Sigma e_a\phi_a$. Only the energy of the conductors, and not that of the reservoirs, appears in $\mathscr{U}$. In this sense we can say that $\mathscr{U}$ pertains to a system which is not energetically closed. Thus, for a system of conductors whose potentials are kept constant, the part of the mechanical energy is played not by $\mathscr{U}$, but by

$$\tilde{\mathscr{U}} = \mathscr{U} - \sum_a e_a\phi_a \tag{5.5}$$

Substituting (2.2), we find that $\mathscr{U}$ and $\tilde{\mathscr{U}}$ differ only in sign:

$$\tilde{\mathscr{U}} = -\mathscr{U}. \tag{5.6}$$

The force F_q is obtained by differentiating $\overline{\mathscr{U}}$ with respect to q for constant potentials, i.e.

$$F_q = -(\partial\tilde{\mathscr{U}}/\partial q)_\phi = (\partial\mathscr{U}/\partial q)_\phi. \tag{5.7}$$

Thus the forces acting on a conductor can be obtained by differentiating $\mathscr{U}$ either for constant charges or for constant potentials, the only difference being that the derivative must be taken with the minus sign in the first case and with the plus sign in the second.

The same result could be obtained more formally by starting from the differential identity

$$\mathrm{d}\mathscr{U} = \sum_a \phi_a \,\mathrm{d}e_a - F_q \,\mathrm{d}q, \tag{5.8}$$

in which $\mathscr{U}$ is regarded as a function of the charges on the conductors and the coordinate q. This identity states that $\partial\mathscr{U}/\partial e_a = \phi_a$ and $\partial\mathscr{U}/\partial q = -F_q$. Using the variables ϕ_a instead of e_a, we have

$$\mathrm{d}\tilde{\mathscr{U}} = -\sum_a e_a \,\mathrm{d}\phi_a - F_q \,\mathrm{d}q, \tag{5.9}$$

At the end of §2 we have discussed the energy of a conductor in a uniform external electric field. The total force on an uncharged conductor in a uniform field is, of course, zero. The expression for the energy (2.14) can, however, be used to determine the force acting on a conductor in a quasi-uniform field $\boldsymbol{E}$, i.e. a field which varies only slightly over the dimensions of the conductor. In such a field the energy can still be calculated, to a first approximation, from formula (2.14), and the force $\mathbf{F}$ is the gradient of this energy:

$$\mathbf{F} = -\operatorname{grad}\mathscr{U} = \frac{1}{2}\alpha_{ik}V\operatorname{grad}(\mathcal{E}_i\mathcal{E}_k). \tag{5.10}$$

The total torque $\mathbf{K}$ is in general non-zero even in a uniform external field. By the general laws of mechanics $\mathbf{K}$ can be determined by considering an infinitesimal virtual rotation of the body. The change in energy in such a rotation is related to $\mathbf{K}$ by $\delta\mathscr{U} = -\mathbf{K}\cdot\delta\psi$, $\delta\psi$ being the angle of the rotation. A rotation through an angle $\delta\psi$ in a uniform field is equivalent to a rotation of the field through an angle $-\delta\psi$ relative to the body. The change in the field is $\delta\boldsymbol{C} = -\delta\boldsymbol{\psi}\times\boldsymbol{C}$. and the change in energy is

$$\delta\mathscr{U} = (\partial\mathscr{U}/\partial\mathbb{C}) \cdot \delta\mathbb{E} = -\delta\psi \cdot \mathbb{E} \times \partial\mathscr{U}/\partial\mathbb{E}.$$

But $\partial\mathscr{U}/\partial\mathscr{C} = -\mathscr{P}$, as we see from a comparison of formulae (2.13) and (2.14). Hence $\delta\mathscr{U} = -\mathscr{P} \times \mathscr{C} \cdot \delta\psi$, whence

$$\mathbf{K} = \mathscr{P} \times \mathbb{E}, \tag{5.11}$$

in accordance with the usual expression given by the theory of fields in a vacuum.
If the total force and torque on a conductor are zero, the conductor remains at rest in the field, and effects involving the deformation of the body (called electrostriction) become important. The forces (5.1) on the surface of the conductor result in changes in its shape and volume. Because the force is an extending one, the volume of the body increases. A complete determination of the deformation requires a solution of the equations of the theory of elasticity, with the given distribution of forces (5.1) on the surface of the body. If, however, we are interested only in the change in volume, the problem can be solved very simply.

To do so, we must bear in mind that, if the deformation is slight (as in fact is true for electrostriction), the effect of the change of shape on the change of volume is of the second order of smallness. In the first approximation, therefore, the change in volume can be regarded as the result of deformation without change in shape, i.e. as a volume expansion under the action of some effective excess pressure ΔP which is uniformly distributed over the surface of the body and replaces the exact distribution given by (5.1). The relative change in volume is obtained by multiplying ΔP by the coefficient of uniform expansion of the substance. The pressure ΔP is given, according to a well-known formula, by the derivative of the electric energy $\mathscr{U}$ of the body with respect to its volume: $\Delta P = -\hat{c}\mathscr{U} \quad \partial V'\dagger$

Let the deforming field be due to the charged conductor itself. Then the energy $\mathscr{U} = \frac{1}{2}e^2/C$, and the pressure is $\Delta P = -\frac{1}{2}e^2\partial C^{-1}/CV$. For a given shape, the capacitance of the body (having the dimensions of length) is proportional to the linear dimension, i.e to $V^{1/3}$. Hence

$$\Delta P = e^2/6CV = e\phi/6V \tag{5.12}$$

If an uncharged conductor is situated in a uniform external field $^{\mathcal{U}}$, its energy is given by formula (2.14) The extending pressure is therefore

$$\Delta P = \frac{1}{2}\alpha_{ik}\mathcal{F}_i\mathcal{G}_k \tag{5.13}$$

PROBLEMS

Problem 1. A small conductor with capacitance c (equal in order of magnitude to its dimension) is at a distance r from the centre of a spherical conductor with large radius $a(\gg c)$. The distance $r - a$ from the conductor to the surface of the sphere is supposed large compared with c, but not large compared with a. The two conductors are joined by a thin wire, so that they are at the same potential ϕ. Determine the force of their mutual repulsion.
Solution. Since the conductor c is small. we can suppose that its potential is the sum of the potential $\phi a/r$ at a distance r from the centre of the large sphere and the potential e/c due to the charge e on the conductor itself. Hence $\phi = \phi a/r + e/c$, or $e = c\phi(1 - a/r)$. The required force of interaction F is the Coulomb repulsion between the charge e on the conductor and the charge $a\phi$ on the sphere:

$$F = \frac{ac\phi^2}{r^2}\left(1 - \frac{a}{r}\right)$$

This expression is correct to within terms of higher order in c. The force is greatest when $r = 3a/2$, and its value there is $F_{\max} = 4c\phi^2/27a$, decreasing on either side of this distance.

Problem 2. A charged conducting sphere is cut in half. Determine the force of repulsion between the hemispheres. †

Solution. We imagine the hemispheres separated by an infinitely narrow slit, and determine the force F on each of them by integrating over the surface the force $(E^2/8\pi)\cos\theta$, which is the component of (5.1) in a direction perpendicular to the plane of separation of the hemispheres. In the slit $E = 0$, and on the outer surface $E = e/a^2$, where a is the radius of the sphere and e the total charge on it. The result is $F = e^2/8a^2$.

Problem 3. The same as Problem 2, but for an uncharged sphere in a uniform external field $\mathbb{C}$ perpendicular to the plane of separation.

Solution. As in Problem 2, except that the field on the surface of the sphere is $E = 3\mathbb{E}\cos\theta$(§3, Problem 1). The required force is $F = 9a^2\mathbb{C}^2/16$.

Problem 4. Determine the change in volume and in shape of a conducting sphere in a uniform external electric field.

Solution. The change in volume $\Delta V/V = \Delta P/K$, where K is the modulus of volume expansion of the material, and ΔP is given by formula (5.13). For a sphere, $\alpha_{ik} = \delta_{ik}\alpha = 3\delta_{ik}/4\pi$ (§3, Problem 1), so that $\Delta V/V = 3\mathbb{C}^2/8\pi K$.

As a result of the deformation, the sphere is changed into a prolate spheroid. To determine the eccentricity, we may regard the deformation as a uniform pure shear in the volume of the body, just as, to determine the change in the total volume, we regarded it as a uniform volume expansion.

The condition of equilibrium for a deformed body may be formulated as requiring that the sum of the electrostatic and elastic energies should be a minimum. The former is, by (2.12) and (4.26),

$$\mathscr{U}_{\text{es}} = -\frac{V}{8\pi n}\mathbb{C}^2 \cong -\frac{3V\mathbb{C}^2}{8\pi} - \frac{3Va-b}{10\pi}\frac{a-b}{R}^2,$$

where R is the original radius of the sphere, a and b the semiaxes of the spheroid, and $n \cong \frac{1}{3} - 4(a-b)/15R$ is the depolarizing factor (see (4.33).)

Since the deformation is axially symmetrical about the direction of the field (the x-axis), only the components u_{xx} and $u_{yy} = u_{zz}$ of the strain tensor are non-zero. Since we are considering equilibrium with respect to a change in shape, we can regard the volume as unchanged, i.e. $u_{il} = 0$. Hence the elastic energy may be written

$$U_{\text{e1}} = \frac{1}{2}u_{\text{ik}}\sigma_{\text{ik}}V = \frac{1}{3}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})(u_{xx} - u_{yy})V,$$

† In Problems 2 and 3 we assume that the hemispheres are at the same potential.

where σ_{ik} is the elastic stress tensor ($TE, \$4$). We have $\sigma_{xx} - \sigma_{yy} = 2(u_{xx} - u_{yy})$. where μ is the modulus of rigidity of the material, and $u_{xx} - u_{yy} = (a-b)/R$ Hence

$$\mathscr{U}_{\text{e1}} = \frac{2}{3}\mu(a-b)^2 I' R^2.$$

Making the sum $\mathscr{U}_{\text{es}} + \mathscr{U}_{\text{el}}$ a minimum. we have $(a-b)/R = 9\mathbb{C}^2/40\pi\mu$.

Problem 5. Find the relation between frequency and wavelength for waves propagated on a charged plane surface of a liquid conductor (in a gravitational field). Obtain the condition for this surface to be stable (Ya. I. Frenkel', 1935).

Solution. Let the wave be propagated along the x-axis, with the z-axis vertically upwards. The vertical displacement of points on the surface of the liquid is $\zeta = ae^{i(kx-\omega\tau)}$. When the surface is at rest. the field above it is $E_z = E = 4\pi\sigma_0$, and its potential $\phi = -4\pi\sigma_0 z$, where σ_0 is the surface charge density. The potential of the field above the oscillating surface can be

written as $\phi = -4\pi\sigma_0 z + \phi_1$, with ϕ_1 = constant $\times e^{i(kx-\omega t)}e^{-kz}$, ϕ_1 being a small correction which satisfies the equation $\triangle\phi_1 = 0$ and vanishes for $z \to \infty$. On the surface itself. the potential must have a constant value, which we take to be zero, and so $\phi_1 = 4\pi\sigma_0\zeta$ for $z = 0$. According to (5.1), an additional negative pressure acts on the charged surface of the liquid; this pressure is, as far as terms of the first order in ϕ_1, $E^2/8\pi \cong {E_z}^2/8\pi \cong 2\pi{\sigma_0}^2 + [k\sigma_0\phi_1]_{z=0} = 2\pi{\sigma_0}^2 + 4\pi{\sigma_0}^2 k\zeta$. The constant term $2\pi{\sigma_0}^2$ is of no importance, since it can be included in the constant external pressure.

The consideration of the hydrodynamical motion in the wave is entirely analogous to the theory of capillary waves (FM, §61), differing only by the presence of the additional pressure mentioned above. At the surface of the liquid we have the boundary condition $\rho g\zeta + \rho[\partial\Phi/\partial t]_{z=0} - \alpha\partial^2\zeta/\partial x^2 - 4\pi{\sigma_0}^2 k\zeta = 0$, where α is the surfacetension coefficient, ρ the density of the liquid, and Φ its velocity potential. Φ and ζ are also related by $\partial\zeta/\partial t = [\partial\Phi/\partial z]_{z=0}$. Substituting in these two relations $\zeta = ae^{i(kx-\omega t)}$ and $\Phi = Ae^{i(kx-\omega t)}e^{-kz}$ (Φ satisfies the equation $\triangle\Phi = 0$) and eliminating a and A, we find the required relation between k and ω :

$$\omega^2 = k\left(g\rho - 4\pi{\sigma_0}^2 k + \alpha k^2\right)/\rho \tag{1}$$

If the surface of the liquid is to be stable, the frequency ω must be real for all values of k (since otherwise there would be complex ω with a positive imaginary part, and the factor $e^{-i\omega t}$ would increase indefinitely). The condition for the right-hand side of (1) to be positive is $\left(4\pi{\sigma_0}^2\right)^2 - 4g\rho\alpha < 0$, or ${\sigma_0}^4 < g\rho\alpha/4\pi^2$. This is the condition for stability.

Problem 6. Find the condition of stability for a charged spherical drop (Rayleigh, 1882).

Solution. The sum of the electrostatic and surface energies of the drop is $\mathscr{U} = e^2/2C + \alpha S$, where α is the surface-tension coefficient of the liquid, C the capacitance of the drop and S its surface area. Instability occurs (with increasing e) with respect to deformation of the sphere into a spheroid, and does so when $\mathscr{U}$ becomes a decreasing function of the eccentricity (for a given volume). The spherical shape always corresponds to an extremum of $\mathscr{U}$; the stability condition is therefore $[\partial^2\mathscr{U}/\partial(a-b)^2]_{a=b} > 0$, where a and b are the semiaxes of the spheroid, and the differentiation is carried out with ab^2 = constant. Using the formula for the surface of a spheroid and (4.18) for its capacitance, we find after a somewhat lengthy calculation $e^2 < 16\pi a^3\alpha$.

This condition ensures stability of the drop with respect to small deformations. It is found to be weaker than the condition for stability with respect to large deformations that divide the drop into two equal drops with charge $\frac{1}{2}e$ and radius $a/2^{1/3}$:

$$e^2 < 16\pi a^3\alpha\left(2^{1/3}-1\right)/\left(2-2^{1,3}\right) = 0.35\times 16\pi a^3\alpha$$

4.3 Magnetostatics

4.3.1 Magnetic Pressure

суть

(?? а кст какая его природа все-таки?)

Theory

Напомним, что поле между проводящими плоскостями было равно $H = i$, где i - линейная плотность поверхностного тока, а давление на каждую плоскость составляло

$$\mathscr{P} = iB_{\mathbf{BH}} = \frac{\mu_0 i^2}{2}$$

Такое же точно давление будет действовать на любую плоскую поверхность проводящего тела, если вне тела существует магнитное поле B, параллельное поверхности, а в самом теле $\mathbf{B} = 0$.

Действительно, величина i однозначно следует из теоремы о циркуляции, и все последующие соображения остаются в силе.

Нужно только переписать формулу для давления на поверхность проводника, исходя из того, что задано все-таки именно поле в вакууме:

$$\mathscr{P} = \frac{\mu_0}{2} H^2 = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{1}{2}(\mathbf{BH})$$

Существенно, во-первых, то обстоятельство, что магнитное давление обусловлено «непроникновением» магнитного поля в проводник.

Если последний пребывает в сверхпроводящем состоянии, это всегда верно, но и в обратном, гораздо более обыденном случае, это совершенно реально.

Как мы увидим далее, проникновение поля в проводящую среду процесс не мгновенный, и чем выше проводимость, тем более он затянут во времени.

Во-вторых, при выводе формулы $\mathscr{P} = \frac{1}{2}(\mathbf{BH})$ мы использовали упрощенную геометрию: внешнее поле, параллельное плоской поверхности проводника.

Это сужает круг явлений, которые мы могли бы обсуждать, либо создает опасность ошибок, проистекающих от расширительного толкования результата (7.1).

Прежде чем давать формальное описание сил, действующих в магнитном поле на проводящую среду, приведем чрезвычайно удобную форму для архимедовой силы, использующую операцию векторного дифференцирования.

Рассмотрим некоторую текучую среду, т.е. жидкость или газ, подчиняющуюся закону Паскаля, и выделим в ней малый объем - кубик со сторонами dx, dy, dz
(рис. 7.1).

Пусть мы можем пренебречь всеми объемными силами, например, силой тяжести принимаем во внимание только силу, связанную с неоднородностью давления, - а это и есть архимедова сила.

Как было показано в (??), эффекты, обусловленные неоднородностью давления, удобно выводить из объемной плотности силы $\mathbf{f} = d\mathbf{F}/dV$:

$$f_x = -\frac{\partial \mathscr{P}}{\partial x}$$

С силой в такой форме удобно работать; скажем, закон Архимеда можно мгновенно получить, уравновесив ею плотность силы тяжести $\rho\mathbf{g}$. Нам же она понадобится для сравнения именно с плотностью силы Ампера, которую мы предварительно перепишем следующим образом:

$$\mathbf{f} = [\mathbf{jB}] = -[\mathbf{B}[\nabla\mathbf{H}]] = (\mathbf{B}\nabla)\mathbf{H} - \nabla(\mathbf{BH})$$

Проводя формальные векторные операции с оператором дифференцирования ∇, следует заботиться о том, чтобы справа от него оставались лишь те величины, которые подлежат дифференцированию.

Этому правилу не удовлетворяет последний член в правой части; чтобы подчеркнуть это, он заключен в кавычки.

В стоящем справа от оператора скалярном произведении вектор $\mathbf{B}$ дифференцироваться не должен.

Если, однако, связь между $\mathbf{B}$ и $\mathbf{H}$ линейна - а это во всяком случае верно для всех диа- и парамагнитных проводников, то мы можем представить формулу для плотности силы

Ампера в виде

$$\mathbf{f} = -\nabla\frac{(\mathbf{BH})}{2} + (\mathbf{B}\nabla)\mathbf{H}$$

Второй член в правой части $\mathbf{f}$ называется «максвелловским натяжением силовых линий» (формально он и в самом деле имеет вид упругой силы), что же касается первого, то он оказался абсолютно идентичен архимедовой силе (7.2), если в нее подставить давление в виде (7.1).

Таким образом, формула (7.1) оказалась точной, но теперь мы должны сделать два важных замечания относительно границ ее применимости.

1.

«Натяжение силовых линий» обусловлено их кривизной.

Действительно, если силовые линии - прямые, то поле может меняться лишь поперек силовых линий, но не вдоль них, поэтому $(\mathbf{B}\nabla)\mathbf{H} \equiv 0$. Следовательно, мы можем свести силу Ампера к магнитному давлению, только когда имеем право пренебречь кривизной силовых линий.

Это не значит, что они должны быть непременно прямыми - просто радиус их кривизны должен быть много больше толщины слоя, в котором магнитная индукция $\mathbf{B}$ меняется на величину порядка ее самой.

Вот пример ситуации, когда натяжением пренебречь нельзя: магнитное поле в проводнике установилось таким образом, что токи в нем не текут.

Допустим, вне проводника проходит прямой провод с током, и поле в проводящей среде соответствует формуле (4.9).

Из (7.1), казалось бы, следует, что в проводнике возникает некоторый перепад давлений, а значит, и силы.

Но из формулы (4.6) следует, что при $\mathbf{j} = 0$ должно быть и $\mathbf{f} = 0$. Действительно, можно показать, что в этом случае два члена в правой части в точности компенсируют друг друга.

2.

Возможная причина недоразумений - независимость формул (7.1) и (7.3) от проводимости среды.

На первый взгляд может показаться, что и на диэлектрик должно действовать точно такое же давление. В этой связи полезно напомнить, что при выводе (7.3) мы существенным образом воспользовались двумя предположениями: теоремой о циркуляции: $\mathrm{rot}\,\mathbf{H} = \mathbf{j}$ и линейной зависимостью $\mathbf{B}(\mathbf{H})$.

Как уже было замечено в гл. 4, теорема циркуляции у нас пока не дописана; в нестационарном случае В правой части появится еще один член (и добавим, забегая вперед, - роль его будет тем важнее, чем ниже проводимость вещества).

Таким образом, для настоящего диэлектрика наш вывод справедлив только при условии абсолютной стационарности задачи, и, поскольку тока проводимости в непроводящем веществе просто не может быть, два члена в правой части (7.3) обязаны при этом точно друг друга компенсировать.

Тем самым определяется класс допустимых магнитных конфигураций в линейном диэлектрике.

Положение дел меняется, если мы имеем дело с магнитоактивной средой (линейная зависимость $\mathbf{B}(\mathbf{H})$ представляет не более, чем частный случай).

Тогда к силам Ампера, обязанным своей природой токам проводимости, добавятся силы, обусловленные намагниченностью образца. Это и будет темой последующего рассмотрения.

4.3.2 Dipole in a Magnetic Field

суть

Theory

Хотя векторная природа электрического и магнитного полей различна и магнитный дипольный момент (4.21) определяется иначе, нежели электродипольный момент (1.23), обращает на себя внимание тождественность выражений для поля (4.24) и (1.25).

Из рис. 4.4 можно усмотреть совершенную идентичность картины поля при переходе к приближению точечных диполей.

Только условия «точечности» будут различны - в одном случае необходимо с надлежащей точностью обеспечить квазинейтральность $\operatorname{div}\mathbf{E} = 0$, а в другом - неразрывность токов $\operatorname{div}\mathbf{j} = 0$.

Мы воспользуемся этим обстоятельством, чтобы избежать весьма трудоемкого вывода из определения (4.21) формул, аналогичных (1.27) и (1.28), а вместо этого сразу же воспроизведем их с соответствующими переобозначениями:

$$\mathbf{F} = \nabla(\mathbf{mB})$$
$$\mathbf{M} = [\mathbf{mB}]$$

Как известно из механики, консервативные силы связаны с потенциальной энергией соотношением $F_x = -dW/dx$ В одномерном случае, а в трехмерном мы должны повторить то же самое для F_y, F_z, так что $\mathbf{F} = -\nabla W$ - мы уже использовали это обстоятельство в электростатике.

Таким образом, (7.4) может быть представлена в эквивалентном виде: энергия магнитного диполя во внешнем поле равна

$$W = -(\mathbf{mB})$$

Это соотношение является базовым для определения единицы дипольного момента - он измеряется в джоулях на тесла (Дж/Тл).

(!!!!!)

Мы уже использовали эту единицу в гл. 5 для магнетона Бора.

Наведенный диполь

Если бы речь шла только о заданном диполе - например постоянном магните малого размера, формулами (7.4) и (7.6) можно было бы и ограничиться, но в случае, когда мы имеем дело с наведенным дипольным моментом, в них неявно заключена опасность ошибки.

Именно, если $\mathbf{m} \propto \mathbf{B}$ или вообще дипольный момент функционально как-то связан с полем, возникает вопрос, следует ли и его дифференцировать в (7.4).

Правильно будет этого не делать, потому что взаимодействие диполя с полем характеристика силовая, и она не может зависеть от природы диполя: на диполи с одинаковыми дипольными моментами должна действовать одинаковая сила безотносительно к их происхождению.

В таких случаях принято указывать в формуле, на какой именно сомножитель действует оператор ∇:

$$\mathbf{F} = \nabla(\mathbf{m}\check{\mathbf{B}})$$

но лучше привести (7.4) к такому виду, в котором $\mathbf{m}$ заведомо не дифференцируется.

Воспользуемся векторным тождеством $[\mathbf{m}, \operatorname{rot}\mathbf{B}] = [\mathbf{m}[\nabla\mathbf{B}]] = \nabla(\mathbf{m}\check{\mathbf{B}}) - (\mathbf{m}\nabla)\mathbf{B}$, запишем силу как:

$$\mathbf{F} = \nabla(\mathbf{m}\tilde{\mathbf{B}}) = (\mathbf{m}\nabla)\mathbf{B} + [\mathbf{m}, \operatorname{rot}\mathbf{B}]$$

В магнитоактивном веществе соотношение (7.7) естественно представить в форме объемной плотности силы

$$\mathbf{f} = (\mathbf{J}\nabla)\mathbf{B} + [\mathbf{J}, \mathrm{rotB}]$$

В соответствии с вышесказанным, величина $\mathbf{J}(\mathbf{r})$ здесь не дифференцируется.

Дальнейшее преобразование формулы (7.8) требует явного учета зависимости $\mathbf{J}(\mathbf{B})$. Мы ограничимся простым случаем линейной связи, т.е. диа- или парамагнетиками:

$$\mathbf{J} = \mu_0^{-1}\mathbf{B} - \mathbf{H} = \frac{\mu - 1}{\mu\mu_0}\mathbf{B}$$

Подставим это выражение в (7.8) и проведем векторное преобразование, аналогичное тому, что мы сделали при выводе (7.3):

$$(\mathbf{B}\nabla)\mathbf{B} + [\mathbf{B}, \mathrm{rot}\,\mathbf{B}] = \frac{1}{2}\nabla\mathbf{B}^2$$

В итоге получаем

$$\mathbf{f} = \frac{\mu - 1}{2\mu\mu_0}\nabla\mathbf{B}^2 = \frac{\mu - 1}{2}\nabla(\mathbf{BH})$$

Мы снова выразили силу, распределенную в среде, в форме градиента давления (7.2).

Но этот результат еще может быть дополнен плотностью силы Ампера (7.3), если магнетик одновременно является проводником.

Особенно интересно отметить, что эффективное «давление»

$$\langle\mathscr{P}\rangle = -\frac{\mu - 1}{2}(\mathbf{BH})$$

может быть как положительным при $\mu < 1$, так и отрицательным при $\mu > 1$.

Как следствие, диамагнетик выталкивается из области более сильного магнитного поля, а парамагнетик, напротив, втягивается в нее.

Этот эффект может быть с успехом продемонстрирован на примере растворов пара- или диамагнитных солей.

По существу, мы получили объяснение и того общеизвестного факта, что предметы из магнитомягкого железа притягиваются постоянным магнитом.

Конечно, конкретные формулы (7.9), (7.10) могут оказаться неприменимыми из-за нелинейности зависимости $J(B)$, но качественно это тот же самый эффект.

(Что касается магнитотвердых материалов, то здесь может оказаться существенной их собственная намагниченность.)

4.3.3 Force on a Magnetic Dipole by Boyer (1987)

Abstract

The classical magnetic force on a magnetic dipole depends upon the model for the dipole. The usual electric current loop model for a magnetic dipole leads to the force $\mathbf{F} = \boldsymbol{\nabla}(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B})$ on a magnetic dipole m in a magnetic field B. The separated magnetic charge model for a magnetic dipole leads to the force $\mathbf{F} = (\mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\nabla})\mathbf{B}$ on a magnetic dipole. The latter expression is analogous to the force experienced by an electric dipole in an electric field. Here, some elementary examples are given where the force expressions yield entirely different forces on a magnetic dipole. Electromagnetism textbooks usually do not emphasize the difference between these force expressions; however, occasionally the difference is important for understanding experimental results. In the 1930s and 1940s the difference in force expressions was involved in a determination of the nature of the neutron dipole moment. At present, in the 1980s, the difference in the force expressions is central to a controversy over an experiment to test the proposed Aharonov-Casher effect.

I. INTRODUCTION

It is emphasized in electromagnetism textbooks that many of the results of classical magnetostatics take the same form as in electrostatics. [1] For example, the magnetic field of a magnetic dipole takes the same form as the electric field of an electric dipole, even though the models for the dipoles are not at all analogous. Continuing in this vein, the magnetic force on a magnetic dipole is often treated [1] as though it took the same form as the electric force on an electric dipole. However, the force expressions are actually quite different. Recently, a controversy in the research literature related to an ongoing experiment has arisen precisely because of a failure to distinguish clearly between these two force expressions for a magnetic dipole. Accordingly, in this article, we wish to discuss this difference in force expressions. We will consider two different magnetic dipole models leading to two different classical force expressions for magnetic dipoles.

II. TWO MODELS FOR MAGNETIC DIPOLES

There are two natural models for a magnetic dipole. The first, and usual model, is the small electric current loop description that appears in all the classical electromagnetism textbooks. Here, in simplest form, a small current loop of area $\mathbf{A}$ and current I gives a magnetic dipole $\mathbf{m} = \mathbf{A}I$. The orientation of the dipole is given by the right-hand rule connected with the current flow.

The second model for a magnetic dipole is the magnetic charge analog of the usual electric dipole. Here, in simplest form, two magnetic monopoles $\pm g$ are separated by a small distance $\mathbf{l}$, giving a magnetic dipole moment $\mathbf{m} = g\mathbf{l}$. The displacement vector 1 points from the minus to the plus magnetic charge.

Both these models for magnetic dipoles lead to the same dipole magnetic field pattern

$$\mathbf{B} = \left(\mu_0/4\pi r^3\right)(3\hat{n}\hat{n}\cdot\mathbf{m} - \mathbf{m}), \quad r > 0, \tag{1}$$

far from the dipole or in the limit of vanishingly small spatial dimensions for the dipole. However, although the magnetic field pattern (1) is common to the two magnetic dipole models, [2] the force experienced by the magnetic dipole reflects the structure of the dipole, even in the point dipole
limit. Corresponding to the two different models for magnetic dipoles there are two different forces on the dipoles. The derivations for the force expressions correspond to those usually given in classical electromagnetism texts for the electric current loop model of a magnetic dipole and for the separated charge description of an electric dipole.

III. FORCE ON THE ELECTRIC CURRENT MODEL FOR A MAGNETIC DIPOLE

The force on the usual magnetic dipole modeled as a distribution of electric current is derived in the textbook by Jackson. [3] (An alternative elementary derivation involving not an arbitrary current distribution but an infinitesimal rectangular current loop is suggested in some textbooks. [4]) The force on a small current distribution is obtained by expanding the external magnetic field in a Taylor series about the center of the distribution at $\mathbf{r} = \mathbf{a} = 0$,

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= \int \mathbf{J}(\mathbf{r}) \times \mathbf{B}(\mathbf{r}) d^3r \\ &= \int \mathbf{J}(\mathbf{r}) \times \left[\mathbf{B}(\mathbf{a}) + (\mathbf{r}\cdot\nabla_{\mathbf{a}})\,\mathbf{B}(\mathbf{a}) + \cdots\right]_{\mathbf{a}=0} d^3r\end{aligned} \tag{2}$$

The notations $\boldsymbol{\nabla}_{\mathbf{a}}$ and $\mathbf{B}(\mathbf{a})$ have been used to emphasize the independence of these expressions from the integral in r.

For current distributions that do not extend to spatial infinity, it is possible to simplify the force expression (2). We use the identity

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot (fg\mathbf{J}) = g\mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\nabla} f + f\mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\nabla} g + fg\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{J}, \tag{3}$$

the charge continuity equation

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \tag{4}$$

and the divergence theorem to obtain

$$0 = \int \left(f\mathbf{J} \times \nabla g + g\mathbf{J} \cdot \nabla f - fg\frac{\partial \rho}{\partial t} \right) d^3r \tag{5}$$

We will assume that the electric charge distribution $\rho(\mathbf{r}, t)$ of the current distribution vanishes in its own rest frame,
$\rho(\mathbf{r}, t) = 0$. Then the expression (5) simplifies to

$$0 = \int (f\mathbf{J} \cdot \nabla g + g\mathbf{J} \cdot \nabla f) d^3r \tag{6}$$

For $f = 1$ and $g = x_i$, this gives

$$\int J_i(\mathbf{r}) d^3r = 0 \tag{7}$$

and, hence,

$$\left(\int \mathbf{J}(\mathbf{r}) d^3r \right) \times \mathbf{B}(0) = 0 \tag{8}$$

the first term in the integral (2) vanishes.
The second term in the integral (2) involves
$F_i = \sum_{j,k,l=1}^{3} \epsilon_{ijk} \left(\int J_j(\mathbf{r}) x_l d^3r \right) \left(\frac{\partial}{\partial a_l} B_k(\mathbf{a}) \right)_{\mathbf{a}=0}$,
where ϵ_{ijk} is the completely antisymmetric tensor on three indices with $\epsilon_{123} = 1$. Then Eq. (6) with $f = x_i$ and $g = x_i$ tells us

$$\int J_j x_l d^3r = -\int J_l x_j d^3r \tag{10}$$

so that F_i can be rewritten as

$$\begin{aligned} F_i &= \sum_{j,k,l=1}^{3} \epsilon_{ijk} \left(\frac{1}{2} \int (x_l J_j - x_j J_l) \, d^3r \right) \\ &\quad \times \left(\frac{\partial}{\partial a_l} B_k(\mathbf{a}) \right)_{\mathbf{a}=0} \\ &= \sum_{j,k,l,m=1}^{3} \epsilon_{ijk} \epsilon_{mlj} \left(\frac{1}{2} \int (\mathbf{r} \times \mathbf{J})_m d^3r \right) \\ &\quad \times \left(\frac{\partial}{\partial a_l} B_k(\mathbf{a}) \right)_{\mathbf{a}=0} \end{aligned} \tag{11}$$

The integral $\frac{1}{2} \int \mathbf{r} \times \mathbf{J} d^3r$ is the magnetic dipole moment

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2}\int \mathbf{r} \times \mathbf{J} d^3 r \tag{12}$$

(For the case of a planar current loop of area $\mathbf{A}$ and current I, the integral is exactly $\mathbf{m} = \mathbf{A}I$.) Now from the identity

$$\sum_{j=1}^{3} \epsilon_{ijk}\epsilon_{mlj} = \delta_{il}\delta_{km} - \delta_{im}\delta_{kl} \tag{13}$$

Eq. (11) becomes

$$\begin{aligned} F_i =& \sum_{k=1}^{3} \left[m_k \left(\frac{\partial}{\partial a_i} B_k(\mathbf{a}) \right)_{\mathbf{a}=0} \right. \\ & \left. - m_i \left(\frac{\partial}{\partial a_k} B_k(\mathbf{a}) \right)_{\mathbf{a}=0} \right] \\ =& \mathbf{m} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial a_i} \mathbf{B}(\mathbf{a}) \right)_{\mathbf{a}=0} \\ & - m_i \left(\nabla_{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{B} \right)_{\mathbf{a}=0} . \end{aligned} \tag{14}$$

Since $\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{B} = 0$ and $\mathbf{m}$ is independent of the spatial derivative, this gives the result [5]

$$F = \nabla(m \cdot B) \tag{15}$$

for the force on the electric current model of a magnetic dipole.

IV. FORCE ON THE MAGNETIC CHARGE MODEL FOR A MAGNETIC DIPOLE

The magnetic force on the magnetic charge model for a magnetic dipole follows the usual derivation for the electric force on an electric dipole. The magnetic force density f for a magnetic charge density $\eta(\mathbf{r}, t)$ is $f = \eta\mathbf{B}$, analogous to the electric force density $\mathbf{f} = \rho\mathbf{E}$ for an electric charge density $\rho(\mathbf{r}, t)$ in an electric field $\mathbf{E}$. The force on a static distribution of magnetic charge $\eta(\mathbf{r})$ is

$$\mathbf{F} = \int \eta(\mathbf{r})\mathbf{B}(\mathbf{r}) d^3 r \tag{16}$$

We expand the magnetic field as a Taylor series about the center of the charge distribution taken as $\mathbf{r} = \mathbf{a} = 0$,

$$\mathbf{F} = \int \eta(\mathbf{r}) \left[\mathbf{B}(\mathbf{a}) + \mathbf{r} \cdot \nabla_{\mathbf{a}} \mathbf{B}(\mathbf{a}) + \cdots \right]_{\mathbf{a}=\mathbf{0}} d^3 r \tag{17}$$

The integral of the first term on the right-hand side corresponds to the total magnetic charge of the distribution. We assume that the total magnetic charge of the distribution vanishes so that

$$\int \eta(\mathbf{r}) d^3 r = 0 \tag{18}$$

The integral of the second term involves the magnetic dipole moment

$$\mathbf{m} = \int \mathbf{r}\eta(\mathbf{r}) d^3 r \tag{19}$$

(In the case of two-point magnetic monopoles $\pm g$ separated by a distance l, this integral is exactly $m = gl$.) Then, from (17) and (19), the force is

$$\mathbf{F} = (\mathbf{m} \cdot \mathbf{V})\mathbf{B} \tag{20}$$

for the magnetic charge model of a magnetic dipole.

V. THE DIFFERENCE BETWEEN THE TWO FORCE EXPRESSIONS

Although the force expressions $\mathbf{F} = \boldsymbol{\nabla}[\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r})]$ and $\mathbf{F} = (\mathbf{m} \cdot \nabla)\mathbf{B}(\mathbf{r})$ corresponding to the different magnetic dipole models are different, many textbooks treat them as though they were the same. We can find how the expressions differ by using the vector identity

$$\begin{aligned}\nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}) =& \mathbf{m} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{m}) \\ &+ (\mathbf{m} \cdot \nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{m}\end{aligned} \tag{21}$$

together with the fact that m has no r dependence. Then we obtain

$$\nabla(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{m} \cdot \nabla)\mathbf{B} + \mathbf{m} \times (\nabla \times \mathbf{B}). \tag{22}$$

Comparing Eqs. (15), (20), and (22), it is clear that the two different force expressions for the two different magnetic dipole models agree if and only if

$$\mathbf{m} \times (\nabla \times \mathbf{B}) = 0. \tag{23}$$

For virtually all the examples in the textbooks $\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B} = 0$ and so no error is made in using the formulas interchangeably. However, the force expressions can differ when $\nabla \times \mathbf{B} \neq 0$. This occurs in steady-state magnetostatics where $\mathbf{J} \neq 0$ or where the displacement current $\partial \mathbf{E}/\partial t \neq 0$.

VI. EXAMPLES OF FORCES ON MAGNETIC DIPOLES

Since electromagnetism textbooks give examples of forces on magnetic dipoles where the force expressions agree, here we will give examples only for the situations where the force equations (15) and (20) for the two magnetic dipole models actually differ.

As a first example, we consider a situation with rectangular symmetry. Assume that a uniform current density $\mathbf{J} = \hat{k} J_0$ along the z axis exists in the region $|x| < a$, $-\infty < y < \infty$,

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \begin{cases} \hat{k} J_0, & |x| \leqslant a, \\ 0, & |x| > a. \end{cases} \tag{24}$$

Then, using Ampere's law, the associated magnetic field is in the y direction,

$$\mathbf{B} = \begin{cases} \hat{j} \mu_0 J_0 x, & |x| \leqslant a, \\ \hat{j} \mu_0 J_0 a (x/|x|), & |x| > a. \end{cases} \tag{25}$$

If a magnetic moment m is oriented in the x direction, $\mathbf{m} = i\hat{m}$, within the region $|x| < a$, then there is no force on the electric current loop model for a magnetic dipole,

$$\mathbf{F} = \nabla(m\hat{i} \cdot \mathbf{B}) = 0 \tag{26}$$

In contrast, there is a force on the magnetic charge model for a magnetic dipole,

$$\mathbf{F} = (m\hat{i} \cdot \nabla)\mathbf{B} = \hat{j} m \mu_0 J_0, \quad |x| < a. \tag{27}$$

On the other hand, if the magnetic moment m is oriented in the y direction, the situation is reversed. Now the electric current loop model experiences a force

$$\mathbf{F} = \boldsymbol{\nabla}(m\hat{j}\cdot\mathbf{B}) = \hat{i}m\mu_0 J_0, \quad |\boldsymbol{x}| < a \tag{28}$$

and the magnetic charge model experiences no force

$$\mathbf{F} = (m\hat{j}\cdot\nabla)\mathbf{B} = 0 \tag{29}$$

The basis for the discrepancy in the forces is easily understood by going back to the magnetic dipole models using a rectangular current loop or two separated point monopoles and seeing just where the forces balance exactly and where they do not.

Situations with cylindrical symmetry can also be treated. If a uniform current density $\mathbf{J} = \hat{k}J_0$ flows in a cylindrical region of space,

$$\mathbf{J} = \begin{cases} \hat{k}J_0, & \sqrt{x^2+y^2} \leqslant a \\ 0, & \sqrt{x^2+y^2} > a \end{cases} \tag{30}$$

then Ampere's law gives a magnetic field

$$\mathbf{B} = \begin{cases} (\mu_0 J_0/2)\,(\hat{j}x - \hat{i}y), & \sqrt{x^2+y^2} \leqslant a, \\ (\mu_0 J_0 a^2/2)\left[(\hat{j}x - \hat{i}y)/\left(x^2+y^2\right)\right], & \sqrt{x^2+y^2} > a. \end{cases} \tag{31}$$

Since this situation has azimuthal symmetry, we can take the magnetic dipole in the $x-z$ plane when evaluating the forces. Thus for a magnetic dipole in the radial direction m = im, at $x, 0 < x < a$, the electric current loop model gives a force

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \nabla(m\hat{i}\cdot\mathbf{B})_{y=0} \\ &= -\hat{j}\,(m\mu_0 J_0/2) = -\hat{\varphi}\,(m\mu_0 J_0/2) \end{aligned} \tag{32}$$

whereas the magnetic charge model gives a force

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= (m\hat{i}\cdot\nabla)\mathbf{B}\Big|_{y=0} \\ &= \hat{j}\,(m\mu_0 J_0/2) = \hat{\varphi}\,(m\mu_0 J_0/2) \end{aligned} \tag{33}$$

which is in the opposite direction. Similarly, a magnetic dipole in the azimuthal direction $\mathbf{m} = \hat{j}m$ gives opposite forces $\pm\hat{r}m\mu_0 J_0/2$ in the radial direction. In performing the calculations above, rectangular coordinates were intentionally retained until the last step despite the cylindrical symmetry. This was done because the magnetic dipole m cannot be regarded as a function of the field coordinate $\mathbf{r}$ when taking the gradient in $\mathbf{F} = \boldsymbol{\nabla}[\mathbf{m}\cdot\mathbf{B}(\mathbf{r})]$. If we were to write $\mathbf{m} = \hat{r}m$ or $\mathbf{m} = \hat{\varphi}m$ before taking the gradient, we could easily obtain erroneous results.

Another example of a discrepancy between the forces is furnished by considering a magnetic dipole between the plates of a parallel-plate capacitor that is being charged. In the region between the plates, $\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B} \neq 0$ and hence the forces on the two different magnetic dipole models are not equal. If the capacitor plates are circular of radius R and separated by a small distance $d, d \ll R$, then a current I to the capacitor leads to a displacement current in the region between the plates giving

$$\mathbf{B} = \hat{\varphi}\left(\mu_0 I r/2\pi R^2\right), \quad r < R \tag{34}$$

This expression for $\mathbf{B}$ has the same functional dependence $\hat{\varphi}r = \hat{j}x - \hat{i}y$ as in Eq. (31), and hence leads to forces of the same form as found above for a cylindrical current density. As we saw in Eqs. (32) and (33), the forces are different for the two different models of magnetic dipoles.

VII. THE NATURE OF THE NEUTRON MAGNETIC MOMENT

Interest in the two alternative models for magnetic dipoles is not merely pedagogical. In this article, we mention two research controversies related to the alternative magnetic dipole models and their associated forces.

The first controversy [6] involved the magnetic moment of the neutron. In 1936, Bloch [7] calculated the scattering of neutrons from ferromagnetic materials while using the magnetic charge model for the neutron magnetic dipole moment. The scattering was recalculated by Schwinger [8] using the electric current model for the neutron magnetic moment. Finally, in 1951, two experimental groups reported results [9,10] in agreement with the electric current model and in disagreement with the magnetic charge model. The electric current model is now the usual model for the neutron dipole moment. [11]

One of the two experiments [10] reported in 1951 involved the glancing reflection of neutrons from the plane surface of a ferromagnetic material magnetized parallel to the surface. The different predictions for the magnetic force contribution for the reflected neutrons correspond to our Eqs. (15) and (20). The situation is essentially that discussed in our example above involving rectangular symmetry and a current flowing in the z direction in the region $-a < x < a$. The force expression $\mathbf{F} = \boldsymbol{\nabla}(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B})$ predicts a repulsive or attractive magnetic force on a neutron polarized parallel or antiparallel to the magnetic z axis of the iron surface since $\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}$ has a gradient normal to the surface as $\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}$ increases by $\mathbf{m} \cdot (\mu_0 \mathbf{M})$, where $\mathbf{M}$ is the magnetization inside the material. However, the force expression $\mathbf{F} = (\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{\nabla})\mathbf{B}$ predicts zero magnetic force on a neutron polarized parallel to the iron surface since $\mathbf{B}$ does not change in the direction parallel to the surface. The experimental work confirmed the existence of the magnetic force contribution and hence established the electric current model for the neutron dipole moment. [11]

VIII. THE PROPOSED AHARONOV-CASHER EFFECT

The failure to distinguish clearly between the two different force expressions for magnetic dipoles has also led to a recent controversy regarding an ongoing experiment. In 1984, Aharonov and Casher [12] proposed the following experiment. Consider a magnetic moment $\mathbf{m}$, oriented parallel to the z axis, which passes an electric line charge of charge λ per unit length. The line charge is oriented along the z axis and the magnetic moment m moving with velocity $\mathbf{v} = \hat{j}v$ parallel'to the y axis can pass on either side of the line charge along $x = \pm d$. Aharonov and Casher [12] proposed that there is a quantum interference pattern shift proportional to the product $m\lambda$ of the magnetic moment m and the charge per unit length λ for particle beams that pass around opposite sides of the line charge. An experiment to detect the interference effect is currently under way by a University of Missouri-University of Melbourne group [13] using a beam of neutrons and a Bonse-Hart perfect silicon crystal interferometer.

The Aharonov-Casher proposal was suggested as having a "duality" [12] with the famous Aharonov-Bohm effect, where one is said to find quantum interference pattern shifts in the absence of classical forces. In the proposed Aharonov-Casher effect, the interference pattern was claimed to change due to the line charge λ despite the fact that the magnetic moment m experienced no classical force due to the line charge. The suggestion that no classical force acted on the magnetic dipole was made based upon an ad hoc Lagrangian proposed by Aharonov and Casher. [12]

From the discussion above we see that there are two possible force expressions for a magnetic dipole; which force is appropriate depends upon the model used for the magnetic dipole. When one derives forces from an ad hoc Lagrangian, it is not clear whether one has used the electric current model for a magnetic dipole or the magnetic charge model. However, one can easily calculate the classical electromagnetic forces for the two magnetic dipole models by using the force expressions (15) and (20).

The electric line charge λ produces an electrostatic field in its own rest frame,

$$\mathbf{E} = \hat{r}'\lambda/2\pi\epsilon_0 r', \tag{35}$$

where $\mathbf{r}' = \hat{i}x' + \hat{j}y'$ is the displacement from the line charge oriented along the z' axis. In an inertial frame in which the line charge is moving with velocity $-\mathbf{v} = -\hat{j}v$, the line charge λ located instantaneously at $x = 0, y = 0$ produces a magnetic field (to first order in v/c), [14]

$$\begin{aligned}\mathbf{B} &\cong -\frac{v}{c^2}\hat{j} \times \mathbf{E} \\ &= \frac{-\mu_0 v}{2\pi}\hat{j} \times \left(\frac{\hat{i}x + \hat{j}y}{x^2 + y^2}\right)\lambda \\ &= \frac{\hat{k}\mu_0 x v \lambda}{2\pi\left(x^2 + y^2\right)}\end{aligned} \tag{36}$$

where $\mu_0\epsilon_0 = c^{-2}$. A magnetic dipole $\mathbf{m} = \hat{k}m$ oriented along the z direction and at rest at the point (x, y, z) will experience a force in the electric current model for the magnetic dipole

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= \boldsymbol{\nabla}(\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}) \\ &= \left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{\mu_0 m x v \lambda}{2\pi\left(x^2 + y^2\right)} \\ &= \frac{\mu_0 m v \lambda}{2\pi}\frac{\hat{i}\left(y^2 - x^2\right) - \hat{j}2xy}{\left(x^2 + y^2\right)^2}\end{aligned} \tag{37}$$

On the other hand, in the magnetic charge model for the magnetic dipole, the force is calculated as

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= (\mathbf{m} \cdot \nabla)\mathbf{B} \\ &= m\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\hat{k}\mu_0 x v \lambda}{2\pi\left(x^2 + y^2\right)}\right) = 0.\end{aligned} \tag{38}$$

This second vanishing force agrees with the claim by Aharonov and Casher using their ad hoc Lagrangian.

Thus here in this situation under experimental investigation the two different models lead to two different forces. The usual model for magnetic dipoles in atomic and nuclear physics is the electric current model. Using this model there is a force on the magnetic dipole, contrary to the claim of Aharonov and Casher. Indeed using the electric current model for a magnetic dipole, the effect predicted by Aharonov and Casher can be understood in detail [15] as an effect based upon classical electromagnetic forces.

IX. CLOSING SUMMARY

Although classical electrostatics and classical magnetostatics have many similarities in their formal structure, they also have important differences. Electrostatics is based upon the existence of electric charges while magnetostatics is usually based upon electric currents with $\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{B}=0$ rather than upon magnetic charge distributions with $\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{B}\neq 0$. In electromagnetism textbooks, it is emphasized that the electric current model for a magnetic dipole gives rise to precisely the same form of magnetic field as an electric charge distribution model for an electric dipole gives for the electric field. However, it is not emphasized that the magnetic force experienced by the electric current model for a magnetic dipole has a form distinctly different from the electric force experienced by an electric charge distribution model for an electric dipole.

In this article, we have emphasized the differences in forces experienced by magnetic dipoles depending upon the detailed model for the dipole. The usual electric current model for a magnetic dipole m leads to a force $\mathbf{F}=\boldsymbol{\nabla}(\mathbf{m}\cdot\mathbf{B})$. A magnetic charge model for a magnetic dipole $\boldsymbol{m}$ leads to a force $\mathbf{F}=(\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{B}$; this is of the same form as for the electric force on an electric dipole. Here, we have given some elementary examples where these force expressions give different answers for the force on a magnetic dipole. The difference in the force expressions is relevant in the proposed Aharonov-Casher effect, which is currently under experimental investigation.

[1] See, for example, the remarks by D. J. Griffiths, Introduction to Electrodynamics (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1981), p. 221.

[2] The average fields for the two cases are different when averaged over a spherical volume including the dipole at the center. See J. D. Jackson, Classical Electrodynamics (Wiley, New York, 1975), 2nd ed., pp. 139141 and pp. 183-184. See also D. J. Griffiths, Am. J. Phys. 50, 698 (1982).

[3] J. D. Jackson, Classical Electrodynamics (Wiley, New York, 1975), 2nd ed., p. 185.

[4] See, for example, Ref. 1, p. 222, Problem 4. Note that this problem requires $\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B}=0$ for the stated solution.

[5] This is Jackson's result in Ref. 3, p. 185, Eq. (5.69).

[6] The controversy is described by F. Mezei, Physica B 137, 295 (1986). See also the account by J. D. Jackson, CERN Report 77-17 Theory this assistance and for his continued kindness in connection with the Aharonov-Casher proposal. Division, 1 September 1977.

[7] F. Bloch, Phys. Rev. 50, 259 (1936). See also Phys. Rev. 51, 994 (1937) for Bloch's description of the controversy in terms of alternative models for the neutron magnetic moment.

[8] J. Schwinger, Phys. Rev. 51, 544 (1937).

[9] C. G. Shull, E. O. Wollan, and W. A. Strauser, Phys. Rev. 81, 483 (1951).

[10] D. J. Hughes and M. J. Burgy, Phys. Rev. 81, 498 (1951). "Indeed J. D. Jackson has shown that all known intrinsic magnetic moments (of electron, muon, proton, neutron, nuclei) are caused to very high precision by circulating electric currents and not by magnetic charges; see Jackson's report mentioned in Ref. 6. I wish to thank Professor Jackson for sending me a copy of his CERN report.

[12] Y. Aharonov and A. Casher, Phys. Rev. Lett. 53, 319 (1984).

[13] This group consists of S. A. Werner, H. Kaiser, and M. Arif at Missouri and A. G. Klein, A. Commino, and G. I. Opat at Melbourne.

[14] See, for example, Ref. 3, p. 3, p. 552, Eq. (11.148).

[15] T. H. Boyer, Phys. Rev. A 36, 5083 (1987).

4.3.4 Energy of a Magnetic Field

суть

Theory

Понятие энергии магнитного поля можно ввести, следуя про- грамме, изложенной в гл. 2: (?!!!! как???)

оперируя экспериментальной информацией о свойствах магнитного поля, предложить такой мысленный эксперимент, в котором появился бы интеграл движения, включающий аддитивно механическую энергию и в отсутствие магнитного поля к ней сводящийся.

Тогда добавка, обусловлен- ная магнитным полем, и должна трактоваться как магнитная энергия. Невозможно, однако, предложить один мысленный эксперимент на все случаи жизни.

Поэтому новое понятие неизбежно проверяется снова и снова по мере накопления экспериментального материала, иногда дополняется или модифицируется.

В конечном счете все принципиальные моменты в физике оказываются — пусть даже косвенно — экспериментального происхождения. В данном случае особенно деликатным оказывается вопрос о магнитном поле в веществе, поскольку не всегда просто разде- лить энергию поля, энергию вещества и энергию взаимодействия поля с веществом. Хотя мы уже обсуждали подобного рода вопросы в гл.2, это краткое введение представляется все же не лишним.

А теперь представим себе тонкий бесконечно длинный идеально проводящий цилиндр (его обычно называют лайнером), по которому течет однородный азимутальный ток с постоянной линейной плотностью. Внутри цилиндр пуст; никаких источников энергии либо каналов диссипации в задаче нет.

Представим далее, что мы сжимаем лайнер, прикладывая

извне давление.P.

При сжатии от начального радиуса R на dR совершается следующая работа на единицу длины:

$$\Delta A = \mathscr{P} \cdot 2\pi R dR$$

Пусть смещение пронсходит очень медленно, практически без ускорения, и пусть мы можем пренебречь всеми механическими напряжениями в веществе лайнера.

Заметим, что ввиду высокой степени симметрии, магнитное поле вне лайнера - в точности равно нулю, а внутри него оно совершенно однородно и силовые Линии параллельны оси.

В этой ситуации совершенно неважно, как именно распределен ток по глубине оболочки - все равно имеет место механическое равновесие: $\mathscr{P} = (\mathbf{BH})/2$.

Последующие вычисления будут базироваться на законе Фарадея в его самой простой формулировке: магнитный поток через любой идеально проводящий контур - инвариант.

В нашей

постановке задачи это значит, что инвариантным является произведение поля на площадь поперечного сечения лайнера, т.е.

$B, H \propto R^{-2}$. Тем самым $\mathscr{P} \propto R^{-4}$, и мы можем через механическую работу определить энергию поля внутри лайнера.

Удобно сопоставить работу против сил магнитного давления при сжатии лайнера от

бесконечного до текущего радиуса с энергией поля на единицу длины лайнера:

$$\frac{dW_M}{dl} = \int_R^\infty \frac{1}{2} B(r)H(r) \cdot 2\pi r dr =$$

$$= \pi B(R)H(R) \int_R^\infty \left(\frac{R}{r}\right)^4 dr^2 = \pi R^2 \cdot \frac{1}{2} B(R)H(R)$$

Мы получили энергию в форме, уже привычной нам из электростатики.

Исходя из этого модельного результата, можно предложить следующее выражение для плотности магнитной энер-

$$w = \frac{(\mathbf{BH})}{2}$$

которое и подтверждается всем опытом современной электродинамики.

Мы получили его сразу в наиболее универсальном виде, который можно будет переносить непосредственно на поле В веществе.

В самом деле, мысленный эксперимент станет еще более фантастичным, но не менее корректным, если мы заполним лайнер некоторой идеально сжимаемой магнитоактивной средой, а в результате получится то же выражение (7.11) для плотности энергии магнитного поля, но теперь уже $\mathbf{B} \neq \mu_0 \mathbf{H}$.

В качестве следующего объекта для рассуждений возьмем изображенный на рис.

7.26 бесконечно длинный идеально проводящий соленоид с плотной намоткой (число витков на единицу длины $n = N/l \gg R^{-1}$, где R - радиус соленоида, l - его длина).

По обмотке соленоида течет ток I, при этом $H = nI$, внутри соленоид заполнен сердечником из однородного магнети-

ка.

Считается, что зависимость $B(H)$ известна; она, в частности, может быть и линейной $B = \mu_0 \mu H$, что несколько упрощает конечные формулы.

ЭнергиЯ магнитного поля на единицу длины соленоида

$$\frac{dW_M}{dl} = \frac{BH}{2} \cdot \pi R^2 = \frac{1}{2} \Phi_0 nI$$

где Φ_0 - поток магнитной индукЦии через отдельный виток; рассматривая соленоид как целое, учтем, что полный магнитный Поток через его обмотку есть $N\Phi_0$, а полная энергия катушКи

(контура) с током может быть представлена в виде

$$W = \frac{I\Phi}{2}$$

Мы снова отдали предпочтение универсальной форме записи, наименее чувствительной к деталям постановки задачи.

Но для очень широкого класса контуров без сердечника или с магнитомягким сердечником формулу (7.12) можно заменить более конкретной, предполагающей линейну ю зависимость $B(H)$:

$$\Phi = LI; \quad W = \frac{LI^2}{2}, \quad \text{где} \quad L \equiv \pi \mu_0 \mu (nR)^2 l = \pi \mu_0 \mu \frac{(NR)^2}{l}$$

Коэффициент L - не что иное, как индуктивность соленоида.

Она зависит, как нам уже известно, только от геометрии контура и магнитной проницаемости вещества сердечника (если таковой имеется).

Проведенное выше вычисление энергии катушКи с током и введенное понятие индуктивности требуют одной важной оговорки.

Мы уже отметили в связи с выводом формулы (4.13), что поле вне бесконечного соленоида - отнюдь не нулевое, а с хорошей точностью - поле прямого тока $H_{\mathbf{BH}} = I/(2\pi r)$. Сравним энерГию поля в соленоиде, например, (7.13), с энергией внешнего поля.

Мы немедленно сталкиваемся с парадоксом: хотя $H_{\text{вн}} \ll nI$, что обеспечено неравенством $n \gg R^{-1}$, энергия внешнего поля оказывается формально бесконечной (интеграл $\int H^2_{\mathbf{BH}} \cdot 2\pi r dr$ расходится логарифмически).

В зависимости от геометрии системы, возможны два выхода из

этой ситуации. 1.

Пусть вся электрическая цепь достаточно симметрична.

На рис.

7.3 представлен модельный пример пол- ной аксиальной симметрии.

Соленоид радиуса R включен последовательно с источником; цепь замкнута внешним цилиндрическим токопроводом радиуса $R_{\text{вн}}$, соосным с соленоидом.

В этом случае справедливость результатов (7.12),(7.13) можно обеспечить следующим сильным неравенством:

$$BH \cdot \pi R^2 \gg \mu_0 \int\limits_R^{R_{\text{вн}}} H^2_{\text{вн}} \cdot 2\pi r dr$$

Подставляя $H(I), H_{\mathbf{BH}}(I)$ и опуская, ввиду сильного неравенства, коэффициенты порядка единицы, получим

$$\mu (nR)^2 \gg \ln \frac{R_{\text{вн}}}{R}$$

(Читатель может проверить этот результат в качестве упражнеНИЯ.) 2.

Если, напротив, электрическая цепь совершенно не симметрична, то на больших расстояниях поле ее будет зависеть от координат примерно как поле диполя $H_{\mathbf{BH}} \propto r^{-3}$, так что на самом деле интеграл энергии сходится при учете реальной трехмерности задачи.

Но характерный пространственный масштаб спадания поля в общем случае не определен, так что для уверенности в правильности формулы (7.13) его следует приравнять максимально возможному - длине соленоида l.

Отсюда следует ОЦеНКа

$$\mu (nR)^2 \gg \left(\frac{l}{R}\right)^2$$

т.е.

в обоих случаях условие на плотность намотки оказывается несколько более жестким, чем предполагалось вначале.

Такого рода соотношения приходится постоянно держать в поле зрения при работе с сильноточными системами.

М ы хотим в данном случае обратить внимание на ограниченную применимость хрестоматийных формул (7.13), но это никоим образом не ставит под сомнение общий результат (7.11), да и формула (7.12) при правильном вычислении потока Ф через полный контур (а не только соленоид) остается в силе.

Дадим формальный вывод выражения для плотности энергии (7.11), базирующийся на аксиоматическом представлении о потенциальной энергии произвольной токовой конфигурации.

Известному представлению энергии электрического поля

$$W_{\ni J} = \frac{1}{2}\int\limits_V \rho(\mathbf{r})\varphi(\mathbf{r})dV$$

поставим в соответствие в качестве энергии магнитного поля следующее выражение:

$$W_{\mathbf{M}} = \frac{1}{2}\int\limits_V (\mathbf{j}, \mathbf{A}_*)\, dV = \frac{1}{2}\int\limits_V (\ \mathbf{A}_*, \operatorname{rot}\mathbf{H})\, dV$$

где интегралы берутся по объему всех входящих в систему проводников.

Мы распространим интегрирование на все пространство; это не меняет результата, потому что вне проводников $\mathbf{j} \equiv 0$. При этом потенциальная функция $\mathbf{A}_*$ должна порождать, В отличие от вектор-потенциала (4.15), действующее поле в веществе $\mathbf{B} = \langle\mathbf{b}\rangle$, так что, в соответствии с выводом макроскопических уравнений поля в 5.1,

$$\mathbf{A}_* = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\int\frac{\mathbf{j}dV}{R} + \int\frac{\langle\mathbf{j}_{\text{микро}}\rangle\, dV}{R}\right)$$

Для дальнейших выкладок нам понадобится следующая цепочка преобразований:

$$\operatorname{div}[\mathbf{H}, \mathbf{A}_*] = \nabla\left[\check{\mathbf{H}}, \mathbf{A}_*\right] + \nabla\left[\mathbf{H}, \check{\mathbf{A}}_*\right] = \mathbf{A}_*\cdot\operatorname{rot}\mathbf{H} - \mathbf{H}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{A}_*,$$

с учетом которых (7.14) можно переписать в виде

$$W_{\mathbf{M}} = \frac{1}{2}\int(\mathbf{A}_*, \operatorname{rot}\mathbf{H})\, dV = \frac{1}{2}\int\operatorname{div}[\mathbf{H}, \mathbf{A}_*]\, dV + \frac{1}{2}\int\mathbf{H}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{A}_* dV$$

Но теперь мы можем первый из интегралов в правой части преобразовать с помощью теоремы Гаусса в поток вектора $[\mathbf{H}, \mathbf{A}_*]$ через бесконечно удаленную поверхность.

Поскольку магнитное поле должно убывать как дипольное или быстрее, на бесконечности $H \propto r^{-3}, A_* \propto r^{-2}, S \propto r^2$, так что этот интеграл равен нулю.

Таким образом,

$$W_{\mathbf{M}} = \frac{1}{2}\int\mathbf{H}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{A}_* dV = \int\frac{(\mathbf{HB})}{2}dV$$

что эквивалентно выражению (7.11).

Тем самым мы фактически продемонстрировали, что энергия магнитного поля может быть, помимо прочего, представлена в виде (7.14), (7.15). Убедившись таким образом в правильности (7.14), попробуем дать вывод соотношений (7.12), (7.13), базирующийся уже не на отдельном частном примере, а на общем законе.

Для простоты ограничимся случаем контура без сердечника; обобщения принципиальной трудности не составят, но потребуют более громоздких вычислений.

В «вакуумном» случае $\mathbf{A}_* = \mu_0\,\mathbf{A}$. Как и при выводе базовых выражений для индуктивных коэффициентов (6.3), (6.4) будем считать контур тонким.

Тогда в интегралах (7.14), (7.15) $\mathbf{j}dV \Longrightarrow Id\mathbf{l}$, что позволяет переписать их в виде

$$W = \frac{\mu_0}{2}\int(\mathbf{jA})dV = \frac{\mu_0}{8\pi}\iint\frac{(\mathbf{jj}')}{R}dVdV' = \frac{\mu_0 II'}{8\pi}\oint\oint\frac{d\mathbf{l}d\mathbf{l}'}{R}$$

Далее ответ зависит от того, что мы понимаем под Штрихованными величинами в (7.17).

Если имеется в виду всего один контур, то мы получаем просто формулу (7.13), где индуктивность задается выражением (6.4), а если контуров два, то нам придется составить все комбинации, пронстекающие от суммирования во всем пространстве $\mathbf{j}$ и $\mathbf{j}'$, $\mathbf{A}$ и $\mathbf{A}'$:

$$W = \frac{1}{2}\left(L_1 I_1^2 + L_2 I_2^2 + 2L_{12} I_1 I_2\right)$$

(мы учли, что $L_{12} = L_{21}$).

В случае многиХ контуров, вводя обозначение $L_{ii} \equiv L_i$, можем привести (7.18) к универсальному ВиДу:

$$W = \frac{1}{2}\sum_{i,k} L_{ik} I_i I_k$$

Подъемная сила электромагнита Темой данного параграфа будет элементарный расчет подъ- емной силы электромагнита с сердечником из мягкого железа. Для определенности рассмотрим электромагнит типа простого ярма (рис.

7.4 а).

Сечение ярма и якоря 9 будем считать везде одинаковым и настолько малым, чтобы имело смысл пользоваться приближением однородной маг- нитной цепи.

Пусть магнитная проницаемость сердечника и яко- ря равна $\mu \gg 1$, длина по обходу (характерная длина силовой линии) l, число витков обмотки N, ток через обмотку I (детали геометрии сердечника и обмотки

при $\mu \gg 1$ и $l \gg S^{1/2}$ не имеют значения.

Подчеркнем, что наща цель - не инженерный расчет, а установление на простейшем примере общих принципов рассмотрения таких систем. В данном случае мы не можем пользоваться на только результатом (7.10), но и самой идеей его получения.

Причина в том, что электромагнит - система динамическая, и корректное ее рассмотрение должно включать источник тока.

Припишем последнему ЭДС $\mathscr{E}$, а обмоткам - сопротивление R.

ДлЯ рассмотрения таких систем весьма продуктивен принЦиП Виртуальных перемещений, который мы уже использовали в ре- Шении задачи 2 гл.

2. Оторвем якорь от ярма, отодвинув его на расстояние dx (рис.

7.46) и подсчитаем, какая при этом должна быть совершена механическая работа.

Полный энергетический баланс выглядит следуюЩим образом:

$$-Fdx = \Delta A_y - \Delta A_I - dW_L$$

тепла; dW_L - приращение магнитной энергии контура.

Величины ΔA_x и ΔA_I должны вычисляться за время перемеЩения на фоне постоянной мощности, потребляемой электромагнитом.

Введем в рассмотрение также приращения тока в контуре dI и магнитного потока через сердечник $d\Phi$ в момент перемещения.

Эти два приращения должны быть связаны законом Ома и законом Фарадея:

$$dI = -\frac{1}{R}\frac{d\Phi}{dt}$$

Прирашение работы источника равно

$$\Delta A_y = \mathscr{E}(I + dI)dt - \mathscr{C} I dt = \mathscr{C} dI dt = -\mathscr{C}\frac{dt}{R}\frac{d\Phi}{dt} = -Id\Phi$$

Приращение джоулевых потерь относительно таковых в стационарном режиме

$$\Delta A_I = R(I + dI)^2 dt - RI^2 dt \approx 2RIdIdt = -2Id\Phi$$

И, наконец, приращение энергии магнитного поля, в отличие от диссипативных величин ΔA_x и ΔA_I, определяется только начальным и конечным состояниями:

$$dW_L = d\left(\frac{LI^2}{2}\right) = \frac{1}{2}I^2 dL = \frac{1}{2}Id\Phi$$

Последняя цепочка равенств заслуживает особого внимания.

Во-первых, при дифференцировании энергии поля мы положили $dI = 0$, поскольку она при изменении конфигурации зависит лишь от положения якоря при установившемся токе $I_0 = \mathscr{E}/R$.

(Напротив, приращение тепловыделения и дополнительная работа источника обусловлены как раз приращением тока в контуре в процессе перемещения.) Во-вторых, величина dW_L формально совпадает с последующим ответом и потому иногда предлагается в качестве его обоснования.

Как рецепт такой прием вполне допустим, но необходимо понимать, что за ним не стоит иного содержания, кроме проделанных выше выкладок.

Итак,

$$-Fdx = \frac{1}{2}Id\Phi \Longrightarrow -F = \frac{I}{2}\frac{d\Phi}{dx} = \frac{dW_L}{dx}$$

Далее для вычисления Φ заменим dx малой, но конечной величиной x и воспользуемся магнитной цепью с учетом того обстоятельства, что поток через контур в N раз больше потока через сердечник:

$$\Phi = \frac{NI \cdot N}{l/\left(\mu_0 \mu S\right) + 2x/\left(\mu_0 S\right)} = \mu_0 \mu S \frac{N^2 I}{l + 2\mu x}$$

Максимальной величине F - подъемной силе - соответствует предел $x \to 0$:

$$F = -\left.\frac{I}{2}\frac{d\Phi}{dx}\right|_{x\to 0} = \mu_0 S\left(\frac{\mu N I}{l}\right)^2$$

В заключение зададимся вопросом общего характера.

Если сила Лоренца принципиально перпендикулярна скорости любой заряженной частицы, как вообще может совершаться работа при проникновении поля в вещество? Чему соответствует потенциальная энергия магнитоактивной среды?

Разрешение этого парадокса состоит в непременном учете эффектов электромагнитной индукции.

При любой перестройке поля изменение магнитной индукции $\partial\mathbf{B}/\partial t$ порождает электрическое поле E, и работу совершает именно это поле.

Но сценарий перестройки не входит в ответ, и конечные результаты оказываются универсальными, что и позволяет в очередной раз расширить формулировку закона сохранения энергии.

4.4 2 Basic Concepts of Electrodynamics. Maxwell's Equations

4.4.1 2.1. Electrostatics

Закон Кулона. Электродинамика занимается изучением взаимодействий разнообразных микроскопических и макроскопических объектов, вызванных наличием у них фундаментального свойства, количественной мерой которого выступает электрический заряд. Заряд может быть двух знаков - положительным и отрицательным, причем тела, имеющие заряды одинаковых знаков, отталкиваются, а

тела с зарядами противоположных знаков - притягиваются. Закон взаимодействия в вакууме неподвижных тел малых размеров установил опытным путем французский физик III. Кулон еще в 18 -м веке:

$$\mathscr{F}_{12} = k\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}\frac{r_{12}}{r_{12}} \tag{2.1}$$

Здесь q_1 и q_2 - заряды двух тел, расстояние между которыми определяется радиусом-вектором $\boldsymbol{r}_{12}$ (рис. 2.1), $\mathscr{F}_{12}$ - сила, действующая на тело 2 со стороны тела 1 . Имеем $\mathscr{F}_{12} = -\mathscr{F}_{21}$, т. е. кулоновская сила подчиняется третьему закону Ньютона. Коэффициент k определяется выбором единиц измерения электрического заряда и других физических величин.

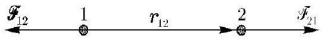


Рис. 2.1

Если сила $\mathscr{F}_{12} = 1$ дина и $r_{12} = 1$ см (система CGS), то $k = 1$, а заряд $q = |q_1| = |q_2|$ имеет величину, равную одной единице CGSE, размерность которой $\text{см}^{3/2}\Gamma^{1/2}\text{с}$.

В Международной системе единиц (СИ) единица заряда определена вне связи с механическими величинами через единицу силы тока - ампер как количество электричества, протекающего через сечение проводника за
одну секунду при силе тока 1 А . Эта единица называется кулон (К) в честь первооткрывателя закона электростатического взаимодействия. В качестве единиц длины и силы используются метр и ньютон, 1Н $= 10^5$ дин. Поэтому коэффициент $k = 1/4\pi\varepsilon_0$ оказывается размерной величиной. Электрическая постоянная

$$\varepsilon_0 = \frac{10^7}{4\pi c^2}$$

где c - скорость света в вакууме в м/с, также размерна. Эта величина («диэлектрическая проницаемость вакуума») не имеет разумного физического смысла и введена лишь для согласования электромагнитных величин (ампер, кулон), используемых из практических соображений, с механическими величинами. Единицы заряда в двух системах связаны между собой соотношением 1 К $\approx 3 \times 10^9$CGSE. При этом два одинаковых заряда по 1 К, находящиеся на расстоянии 1 m, взаимодействуют с огромной силой

$$\mathscr{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\mathbf{H} \approx 9 \times 10^9\text{Н}$$

Мы в этой книге будем преимущественно пользоваться физической, или CGS-системой (ее еще называют абсолютной гауссовой системой единиц), которая наиболее удобна при изучении фундаментальных законов физики. С обшими принципами построения систем единиц и их размерностями, а также эталонами различных единиц можно познакомиться по книгам [Сена (1988)], [Камке и Кремер (1980)].

Впоследствии, уже в 20 -м веке, закон Кулона был подтвержден с очень высокой точностью путем измерения уровней энергии атомов. Было также выяснено, что электрический заряд, как и многие другие физические величины, квантуется - его величина всегда кратна некоторой минимальной порции $e_0 \approx 4,8 \times 10^{-10}$ CGSE единиц, называемой элементарным зарядом. Элементарным зарядом обладают электроны и позитроны, протоны, антипротоны и многие другие элементарные и составные частицы. Еще более «элементарные» частицы - кварки - имеют дробные заряды $e_0/3$ и $2e_0/3$ обоих знаков. Но кварки, по-видимому, существуют только в составе более сложных частиц и не могут находиться в свободном состоянии.

Элементарный заряд - очень маленькая порция, и часто заряды макроскопических тел содержат огромное число элементарных зарядов, например, порядка 10^{22} - таково число «свободных» электронов в 1 cm^3 металлического тела. В таком случае распределение электрического заряда в пространстве можно характеризовать объемной плотностью

$$\rho(\boldsymbol{r}) = \frac{\Delta q}{\Delta V} \tag{2.2}$$

где Δq - заряд, находящийся в макроскопически малом объеме ΔV, т.е. в таком объеме, в котором находится большое число $N \gg 1$ элементарных
зарядов. Линейные размеры этого объема должны быть малы по сравнению с другими масштабами задачи. Такой объем приближенно можно считать точечным и рассматривать объемную плотность заряда как функцию точки.

Как мы видели в разделе 1.3, объемную плотность можно приписать и точечным зарядам, если использовать дельта-функцию Дирака: распределение зарядов $e_1, e_2, \ldots$ в точках $r_1, r_2, \ldots$ описывается функцией

$$\rho(\boldsymbol{r}) = \sum_{a=1}^{N} e_a \delta\left(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_a\right) \tag{2.3}$$

Фундаментальным свойством электрического заряда является его точное сохранение во всех процессах, происходящих в природе: химических и ядерных реакциях, взаимопревращениях элементарных частиц и т. д. Во всех таких процессах суммарный электрический заряд всех частиц до и после процесса одинаков.

Электрическое поле. С физической точки зрения существование силы (2.1) допускает две различные трактовки. Можно считать, что одно заряженное тело воздействует на другое непосредственно, без участия какой-либо промежуточной среды (дальнодействие). Но возможен и другой подход - заряженное тело изменяет свойства окружающего пространства, создавая в нем электрическое поле. Второе тело через посредство своего электрического заряда воспринимает воздействие этого поля, которое и приводит к силовому взаимодействию. Обе точки зрения совершенно равноправны при рассмотрении неподвижных зарядов, т. е. в электростатике. Вся плодотворность и неизбежность понятия поля проявляется при изучении многочисленных и разнообразных явлений, связанных с движением заряженных тел и изменением во времени их электрических и магнитных взаимодействий. Поэтому мы с самого начала примем полевую точку зрения и введем количественную векторную характеристику электрического поля - его напряженность $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$. Поле $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ определяет силу $\mathscr{F}$, действующую на неподвижное тело малых размеров с зарядом q, находящееся в точке r:

$$\mathscr{F} = q\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) \tag{2.4}$$

Это определение напряженности электрического поля справедливо и для переменных электрических полей $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)$. Поле, создаваемое точечным зарядом, согласно закону Кулона (2.1) и определению электрического поля (2.4) выразится в виде

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{e}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r} \tag{2.5}$$

(физическая система единиц, e - электрический заряд).

Сформулируем еще один опытный закон - принцип суперпозиции полей в вакууме: поле, создаваемое несколькими источниками, равно геометрической сумме полей $\boldsymbol{E}_i$, создаваемых каждым из объектов в отдельности независимо от наличия других источников поля:

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2 + \ldots \tag{2.6}$$

Это - очень общий закон, которому подчиняется и электрическое, и магнитное поле неподвижных и произвольным образом движущихся тел.

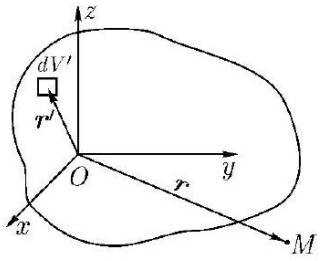


Рис. 2.2

Уравнения электростатики. Вычислим электрическое поле E, создаваемое ограниченной в пространстве системой зарядов, которая описывается объемной плотностью ρ. Используем принцип суперпозиции полей. Выделим малый элемент объема dV' (рис. 2.2) и запишем на основании закона Кулона в форме (2.5) поле, создаваемое зарядами этого элемента в точке с радиусом-вектором r:

$$d\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')\,\rho\,(\boldsymbol{r}')\,dV'}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^3}$$

Интегрируя затем по всему распределению, находим

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \int \frac{(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')\,\rho\,(\boldsymbol{r}')\,dV'}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^3} \tag{2.7}$$

Это выражение описывает электрическое поле любой ограниченной системы зарядов в произвольной точке, причем объемная плотность $\rho\,(r')$ может иметь дельтаобразные особенности. Объемный интеграл при этом сходится во всех точках $\boldsymbol{r}$, в которых отсутствуют точечные заряды, и точка $\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r}$ не является для него особой.

Выражение (2.7) можно упростить, воспользовавшись тождеством

$$\frac{r - r'}{|r - r'|^3} = -\nabla \frac{1}{|r - r'|}, \quad (r \neq r')$$

где ∇ - оператор Гамильтона набла. Вынося его за знак интеграла, поскольку дифференцирование и интегрирование производятся по разным переменным, $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{r}'$, будем иметь

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\nabla\varphi(\boldsymbol{r}) \tag{2.8}$$

где скалярная функция точки

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \int \frac{\rho\,(\boldsymbol{r}')\,dV'}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} + C \tag{2.9}$$

называется электростатическим потенциалом. Эта величина определяется с точностью до постоянной. Таким образом, в электростатике напряженность поля $\boldsymbol{E}$ - потенциальный (безвихревой) вектор (см. раздел 1.2):

$$\operatorname{rot} E = 0 \tag{2.10}$$

Значение $\operatorname{div} \boldsymbol{E}$ и одновременно уравнение, которому удовлетворяет электростатический потенциал $\varphi(r)$, можно получить, применив операцию div к обеим частям равенства (2.8):

$$\operatorname{div} \boldsymbol{E} = -\nabla^2 \varphi = -\Delta \varphi \tag{2.11}$$

Внесем оператор Лапласа Δ под знак интеграла (2.9) и воспользуемся тождеством (1.225)

$$\Delta \frac{1}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} = -4\pi \delta (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')$$

Это дает

$$\operatorname{div} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = 4\pi \rho(\boldsymbol{r}) \tag{2.12}$$

и

$$\Delta \varphi(\boldsymbol{r}) = -4\pi \rho(\boldsymbol{r}) \tag{2.13}$$

Последнее уравнение называется уравнением Пуассона. Оно позволяет находить электростатический потенциал методом интегрирования дифференциального уравнения в частных производных, отличным от прямого вычисления интеграла (2.9). Уравнения (2.10) и (2.12) являются дифференциальными уравнениями для определения вектора $\boldsymbol{E}$ в электростатике. Их интегральная форма получается применением к (2.10) и (2.12) соответственно теорем Стокса и Остроградского-Гаусса:

$$\oint_l \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = \int_S \operatorname{rot} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{S} = 0 \tag{2.14}$$

$$\oint_S \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{S} = 4\pi \int_V \rho dV = 4\pi q. \tag{2.15}$$

Уравнения (2.10), (2.12)-(2.15) являются следствиями закона Кулона. Но они более общи, чем конкретные выражения (2.7), (2.9) для напряженности поля и электростатического потенциала.

Из соотношения (2.14) следует, что работа электростатического поля над зарядом e вдоль любого замкнутого контура равна нулю: $R = \oint_l \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = 0$. Соответственно, работа по перемещению заряда из точки A в точку B не зависит от пути:

$$R_{AB} = \int_l e\boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = -e \int_A^B \nabla \varphi \cdot d\boldsymbol{l} = e (\varphi_A - \varphi_B) \tag{2.16}$$

Из (2.15) следует, что поток вектора напряженности электрического поля через любую замкнутую поверхность равен умноженному на 4π электрическому заряду, находящемуся внутри поверхности (электростатическая теорема Гаусса).

Граничные условия. Рассмотрим поверхности, на которых величина ρ имеет особенности (т. е. испытывает скачок или обращается в бесконечность). Такие поверхности могут быть созданы материальными средами (диэлектриками, проводниками и др.). На особых поверхностях дифференциальные уравнения (2.10), (2.12) неприменимы, и их надо заменить некоторыми условиями «сшивания» компонент напряженности поля, которые выводятся из интегральной формы указанных уравнений.

Пример 2.1. С помошью уравнения (2.14) показать, что касательные к любой поверхности компонентьь напряжснности электрического поля непрерывны.

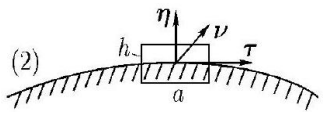


Рис. 2.3

Решение. Строим контур (рис. 2.3) в виде малого прямоугольника размером $a \times h$, плоскость которого перпендикулярна рассматриваемой поверхности S. Векторы τ, ν, n образуют тройку взаимно перпендикулярных ортов. Вычисляя циркуляцию вектора $\boldsymbol{E}$ вдоль контура и пользуясь (2.14), находим

$$\oint_l \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} \approx (E_{2\tau} - E_{1\tau})\, a + C_h = 0$$

где C_h - интеграл по боковым участкам контура. При $h \to 0$, имеем $C_h \to 0$, если поле ограничено на рассматриваемой поверхности (что мы будем предполагать). Устремляя затем $a \to 0$, приходим к точному соотношению

$$\boldsymbol{E}_{2\tau} = \boldsymbol{E}_{1\tau} \tag{2.17}$$

Это соотношение относится к двумерным векторам - проекциям поля $\boldsymbol{E}$ на поверхность в некоторой точке.

Пример 2.2. С помощью уравнения (2.15) показать, что нормальная к любой поверхности компонента E_n удовлетворяет условио

$$E_{2n} - E_{1n} = 4\pi\sigma \tag{2.18}$$

Здесь величина σ - поверхностная плотность заряда - отлична от нуля, только если объемная плотность заряда ρ имеет на рассматриваемой поверхности дельтаобразную особенность:

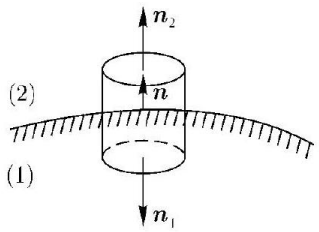


Рис. 2.4

$$\rho(\boldsymbol{r}) = \widetilde{\rho}(\boldsymbol{r}) + \sigma(u, v)\delta(z)$$

где $\widetilde{\rho}(\boldsymbol{r})$ - ограниченная составляющая объемной плотности, координата z отсчитывается по нормали к поверхности, u, v - координаты, характеризующие положение точки на поверхности. Такая особенность возникает, если конечный заряд распределен в предельно тонком поверхностном слое, т.е. на математическом языке $\sigma = \lim_{h\to 0}(h\rho)$.

Решение. Строим вспомогательный объем в виде малого цилиндра с основанием ΔS и высотой h (рис. 2.4). Нормаль $\boldsymbol{n}$ направлена из области 1 в область 2 . Применив к выбранному объему равенство (2.15), получаем последовательно

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{S} \approx E_{n2}\Delta S + E_{n1}\Delta S + \Phi_h = \\ = (E_{2n} - E_{1n})\,\Delta S + \Phi_h \approx 4\pi(\widetilde{\rho} h \Delta S + \sigma \Delta S)$$

Здесь Φ_h - поток через боковую поверхность. Устремляя $h \to 0$ так, чтобы основания цилиндра совместились с рассматриваемой поверхностью, получаем точное граничное условие (2.18).

В применении к электростатическому потенциалу, пользуясь уравнением (2.8), получаем следующие граничные условия:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial \tau} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial \tau}, \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial n} = 4\pi\sigma \tag{2.19}$$

Ввиду того, что потенциал φ определен с точностью до постоянной, первое условие (2.18) можно заменить условием непрерывности потенциала на поверхности [1]S:

$$\varphi_1 = \varphi_2 \tag{2.20}$$

Задачи

2.1. Плоская плита больших поперечных размеров и толщиной a равномерно заряжена по объему с плотностью $\rho = \text{const}$. Пренебрегая краевыми эффектами, вычислить потенциал φ и напряженность $\boldsymbol{E}$ электрического поля. Рассмотреть предельный случай бесконечной плоскости, выразить потенциал и напряженность поля через поверхностную плотность заряда, проверить выполнимость граничных условий.

2.2. Заряд распределен в пространстве по периодическому закону $\rho(x, y, z) = \rho_0 \cos \alpha x \cos \beta y \cos \gamma z$, образуя бесконечную пространственную периодическую решетку. Вычислить потенциал φ электрического поля.

2.3*. Распределение заряда предыдущей задачи ограничено в направлении оси Oz плоскостями $z = \pm z_0, z_0 = \pi/2\gamma$ и образует плоскую плиту толщиной $2z_0$. Вычислить электростатический потенциал во всем пространстве. Произвести предельный переход $z_0 \to 0$ при условии постоянства заряда, приходящегося на единицу поверхности плиты ($z_0\rho_0 = \text{const}$) и ввести поверхностную плотность заряда $\sigma(x, y)$.

2.4. Бесконечно длинный круговой цилиндр радиуса R равномерно заряжен по объему или по поверхности так, что на единицу его длины приходится заряд κ. Вычислить потенциал φ и напряженность электрического поля E.

2.5. Найти потенциал φ и напряженность E электрического поля равномерно заряженной прямолинейной бесконечной нити. Ее заряд κ на единицу длины.

2.6*. В предыдущей задаче нить заряжена неравномерно: $\kappa(z) = \kappa_0 \cos \gamma z$. Вычислить электростатический потенциал. В какой области

пространства потенциал будет приближенно совпадать с потенциалом равномерно заряженной нити? Проанализировать предельные случаи.

2.7. Найти потенциал φ и напряженность E электрического поля равномерно заряженного прямолинейного отрезка длиной $2a$, занимающего часть оси Oz от $-a$ до a; заряд отрезка q.

2.8. Найти форму эквипотенциальных поверхностей равномерно заряженного отрезка, рассмотренного в предыдущей задаче.

2.9. Найти потенциал φ и напряженность E электрического поля шара, равномерно заряженного по объему. Радиус шара R, полный заряд q.

2.10. Сделать то же самое для случая, когда заряд распределен равномерно по поверхности шара.

2.11. Внутри шара радиуса R, равномерно заряженного по объему с плотностью ρ, имеется незаряженная шарообразная полость, радиус которой R_1, а центр отстоит от центра шара на расстояние $a\,(R > R_1 + a)$. Найти электрическое поле $\boldsymbol{E}$ в полости.

[01] См., однако, случай двойного слоя (пример 2.6), когда условие (2.20) не выполняется.

2.12. Пространство между двумя концентрическими сферами, радиусы которых R_1 и $R_2\,(R_1 < R_2)$, заряжено с объемной плотностью $\rho = \alpha/r^2$. Найти полный заряд q, потенциал φ и напряженность $\boldsymbol{E}$ электрического поля. Рассмотреть предельный случай $R_2 \to R_1$, считая при этом $q = \text{const}$.
2.13. Заряд распределен сферически симметричным образом: $\rho = \rho(r)$. Записать φ и $\boldsymbol{E}$ в виде однократных интегралов по r, разбив распределение зарядов на сферические слои.
2.14. На основе результата предыдущей задачи получить решения задач 2.9 и 2.12 .
2.15. В атоме водорода, находящемся в невозбужденном состоянии, заряд электрона распределен с плотностью

$$\rho(r) = -\frac{e_0}{\pi a^2}\exp\left(-\frac{2r}{a}\right)$$

где $a = 0,529 \times 10^{-8}$ см - боровский радиус атома, e_0 - элементарный заряд. Найти потенциал φ_e и напряженность электрического поля E_{er} электронного заряда, а также полные потенциал φ и напряженность поля E в атоме, считая, что протонный заряд сосредоточен в начале координат. Построить на компьютере графики величин φ, E.

УкАЗАнИЕ. Полезно произвести интегрирование по сферическим слоям.
2.16. Рассматривая атомное ядро как равномерно заряженный шар, найти максимальное значение напряженности его электрического поля $E_{\max}$. Радиус ядра $R = 1,5 \times 10^{-13} A^{1/3}$ cm, заряд Ze_0(A - атомный номер, Z - зарядовое число, e_0 - элементарный заряд). Сравнить $E_{\max}$ со значением поля ядра E_B на расстоянии боровского радиуса (последний для атома с зарядовым числом Z равен a/Z).
2.17. В задаче 2.10 записать выражение для объемной плотности заряда через дельта-функцию и вычислить потенциал и электрическое поле путем интегрирования по сферическим слоям.
2.18. Найти потенциал φ и напряженность $\boldsymbol{E}$ электрического поля на оси равномерно заряженного круглого тонкого диска радиуса R; заряд диска q. Убедиться в том, что на поверхности диска нормальная составляющая $\boldsymbol{E}$ испытывает скачок $4\pi\sigma$. Рассмотреть поле на больших расстояниях от диска.
2.19. Выразить потенциал φ равномерно заряженного круглого тонкого кольца с зарядом q и радиусом R через полный эллиптический интеграл первого рода

$$K(k) = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{d\beta}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\beta}}$$

УкАзАниЕ. При интегрировании по азимуту сделать замену $\alpha' = \pi - 2\beta$.
2.20. Получить из общей формулы предыдущей задачи потенциал φ электрического поля: а) на оси кольца; б) на больших расстояниях от кольца; в) вблизи нити кольца (асимптотические значения эллиптического интеграла взять из справочников).

Пример 2.3. С помощью тождества Грина (1.97) доказать от противного теорему единтвенности: решение электростатической задачи внутри заданного ограниченного объема V единственно, если в объеме V задано распределение заряда $\rho(r)$, а на его поверхности S - либо потенциал φ, либо его нормальная производная $\partial\varphi/\partial n$.

Решение. Предположим, что существуют два различных решения электростатической задачи, φ_1 и φ_2, удовлетворяющие уравнению Пуассона

$$\Delta\varphi_{1,2} = -4\pi\rho \quad \text{внутри объема } V \tag{1}$$

и граничным условиям на S
(2) $\varphi_{1,2} = f$ (условия Дирихле) либо $\frac{\partial\varphi_{1,2}}{\partial n} = F$ (условия Неймана),
где f и F - заданные функции координат. Положим в (1.97) $\varphi = \psi = \varphi_1 - \varphi_2$:

$$\int\limits_V \left(\varphi\Delta\varphi + |\nabla\varphi|^2\right) dV = \oint\limits_S \varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n}dS \tag{3}$$

Из (1) следует, что $\Delta\varphi = 0$. Интеграл в правой части (3) также обращается в нуль как следствие (2). В итоге получаем

$$\int\limits_V |\nabla\varphi|^2 dV = 0 \tag{4}$$

что возможно только при условии $\nabla\varphi = 0$, т. е. $\varphi = \text{const}$. В случае условий Дирихле const $= 0$, т. е. $\varphi_1 = \varphi_2$. В случае условий Неймана const $\neq 0$, но два электростатических потенциала, отличающиеся на постоянную, физически эквивалентны. Решение единственно.

Пример 2.4. С помощью тождества Грина (1.98) выразить электростатический потенциал $\varphi(\boldsymbol{r})$ внутри объема V через известную плотность $\rho(\boldsymbol{r})$ в этом объеме, а также значения φ и д / /дп на поверхности S, ограничивающей объем.

Решение. В тождестве (1.98) полагаем функцию φ равной искомому потенциалу, а $\psi = 1/R$ - обратному расстоянию $R = |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|$ от рассматриваемой точки до элемента интегрирования dV'. Используем уравнение Пуассона $\Delta\varphi(\boldsymbol{r}) = -4\pi\rho(\boldsymbol{r})$ и уравнение $\Delta'\psi\left(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'\right) = -4\pi\delta\left(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'\right)$, которому удовлетворяет функция ψ (см. формулу (1.225)). Получаем из (1.225)

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \int\limits_V \frac{\rho\left(\boldsymbol{r}'\right)}{R}dV' + \frac{1}{4\pi}\oint\limits_S \left[\frac{1}{R}\frac{\partial\varphi}{\partial n'} - \varphi\frac{\partial}{\partial n'}\frac{1}{R}\right] dS'$$

Пример 2.5. Система зарядов занимает ограниченную область пространства размером l. Пользуясь представлением электростатического потенциала в виде объемного интеграла (2.9), вычислить приближенное значение потенциала на расстояниях $r \gg l$ от системы с точностью до членов порядка $(l/r)^2$. Какие величины, характеризуюиие систему зарядов, нужныи для этого?

Решение. Разлагая подынтегральное выражение в (2.9) в ряд по малому отношению $r'/r \leqslant l/r$, будем иметь

$$\frac{1}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} = \frac{1}{r}\left(1 - 2\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}'}{r^2} + \frac{r'^2}{r^2}\right)^{-1/2} \approx$$
$$\approx \frac{1}{r} + \frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}'}{r^3} + \frac{1}{2r^5}x_\alpha x_\beta\left(3x'_\alpha x'_\beta - r'^2\delta_{\alpha\beta}\right)$$

Здесь последнее слагаемое записано в тензорной форме с суммированием по повторяющимся индексам. Подставляя результат в интеграл (2.9), находим

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \frac{q}{r} + \frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}{r^3} + \frac{Q_{\alpha\beta}x_\alpha x_\beta}{2r^5} \tag{2.21}$$

где использованы следующие обозначения:

$$q = \int \rho\left(\boldsymbol{r}'\right) dV' \tag{2.22}$$

- полный заряд системы;

$$\boldsymbol{p} = \int \rho\left(\boldsymbol{r}'\right)\boldsymbol{r}' dV' \tag{2.23}$$

- дипольный момент системы зарядов;

$$Q_{\alpha\beta} = \int \rho(\boldsymbol{r}') \left(3x'_\alpha x'_\beta - r'^2 \delta_{\alpha\beta}\right) dV' \quad (Q_{\alpha\alpha} = 0) \tag{2.24}$$

- тензор квадрупольного момента системы зарядов. Разложение потенциала (2.21) может быть продолжено. Оно называется разложением по мультипольным моментам (мультиполям).

Пример 2.6. Двойной электрический слой представляет собой две поверхности, находяиииеся на малом расстоянии s друг от друга, одна из которых имеет положительный поверхностный заряд с плотностью σ, а другая - отрицательный заряд с плотностью - σ, так что в целом слой электронейтрален. Записать выражение для электростатического потенчиала, создаваемого двойным слоем. Показать, что значения потенциала по обе стороны двойного слоя связаны соотношением

$$\varphi_2 - \varphi_1 = 4\pi\kappa, \quad \frac{\partial\varphi_2}{\partial n} = \frac{\partial\varphi_1}{\partial n} \tag{2.25}$$

где $\kappa = \sigma s$ - дипольный момент на единиу поверхности.

Решение. Введем вектор плотности дипольного момента $\kappa = \kappa s\boldsymbol{n}$, где орт нормали $\boldsymbol{n}$ должен быть направлен от отрицательной поверхности к положительной (см. рис. 2.5). Будем рассматривать двойной слой как одну поверхность и используем выражение для потенциала диполя, приходящегося на элемент dS поверхности, согласно (2.21): $d\varphi_M = \boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{r} dS/r^3$, где $\boldsymbol{r}$ соединяет элемент dS с точкой наблюдения M. Легко убедиться, что величина $\boldsymbol{n} \cdot r dS/r^3 = \pm d\Omega$ представляет собой элемент телесного угла, под которым из точки наблюдения M видна площадка dS (знак плюс - если видна положительная, а минус - отрицатель-

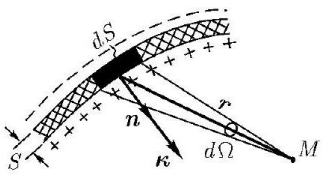


Рис. 2.5 ная сторона поверхности). На основе принципа суперпозиции получаем

$$\varphi_M = \int\limits_\Omega (\pm\kappa) d\Omega \tag{2.26}$$

Если поверхность ориентирована так, что знак всех ее элементов один и тот же, то $\varphi_M = \pm\kappa\Omega$. Если точка наблюдения находится на одной из сторон поверхности двойного слоя, то, очевидно, $\varphi_M = \pm 2\pi\kappa$. Это приводит к скачку потенциала (2.25) при переходе через двойной слой. Непрерывность $E_n = -\partial\varphi/\partial n$ следует из равенства нулю полной поверхностной плотности заряда двойного слоя.

2.21. Записать в сферических координатах выражения для потенциалов электрического диполя с моментом $\boldsymbol{p}$ и электрического квадруполя для случая аксиально-симметричного распределения зарядов. Вычислить также напряженности поля $\boldsymbol{E}_d, \boldsymbol{E}_q$ для этих систем.

2.22*. Произвести разложение электростатического потенциала вне ограниченной системы зарядов по мультиполям и найти выражения для мультипольных моментов в сферических координатах. Использовать производящую функцию (1.182) для полиномов Лежандра и теорему сложения (1.195) для сферических функций.

2.23*. Обобщить результат предыдущей задачи таким образом, чтобы разложение

электростатического потенциала по сферическим функциям Лежандра годилось для точек наблюдения, находящихся внутри системы зарядов.

2.24. Тонкое круглое кольцо радиуса R состоит из двух равномерно и противоположно заряженных полуколец с зарядами q и $-q$. Найти потенциал φ и напряженность E электрического поля на оси кольца и вблизи нее. Каков характер поля на больших расстояниях от кольца?

2.25. Сфера радиуса R заряжена по поверхности по закону $\sigma = \sigma_0 \cos\vartheta$. Найти потенциал φ электрического поля, используя разложение по мультиполям в сферических координатах.

2.26*. Источники электрического поля расположены аксиально симметричным образом. Вблизи оси симметрии системы источники поля отсутствуют. Выразить потенциал φ и напряженность E электрического поля вблизи оси симметрии через значения потенциала и его производных на этой оси.

2.27. Найти потенциал φ электрического поля равномерно заряженного круглого тонкого кольца, используя разложение по мультиполям в сферических координатах. Заряд кольца q, радиус R.

2.28. Найти потенциал φ электрического поля на больших расстояниях от следующих систем зарядов: а) заряды $q, -2q, q$ расположены по оси Oz на расстоянии a друг от друга (линейный квадруполь); б) заряды $\pm q$ расположены в вершинах квадрата со стороной a так, что соседние заряды имеют разные знаки, причем в начале координат находится заряд $+q$, а стороны квадрата параллельны осям Ox и Oy (плоский квадруполь).

2.29^. Найти потенциал φ электрического поля на больших расстояниях от следующих систем зарядов: а) линейный октуполь (рис. 2.6а); б) пространственный октуполь (рис. 2.6).

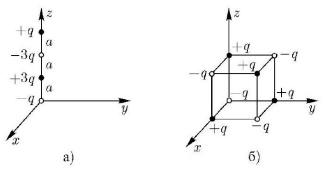


Рис. 2.6

2.30. Точечный заряд q находится в точке со сферическими координатами $r_0, \vartheta_0, \alpha_0$. Разложить по мультиполям потенциал φ этого заряда.

2.31. Эллипсоид с полуосями a, b, c равномерно заряжен по объему; полный заряд эллипсоида q. Найти потенциал φ на больших расстояниях
от эллипсоида с точностью до квадрупольного члена. Рассмотреть частные случаи эллипсоида вращения с полуосями $^2a = b, c$ и шара ($a = b = c$).

УказАниЕ. При интегрировании по объему эллипсоида воспользоваться обобщенными сферическими координатами $x = ar\sin\vartheta\cos\alpha, y = br\sin\vartheta\sin\alpha, z = cr\cos\vartheta$.

2.32. Два коаксиальных равномерно заряженных тонких круглых кольца с радиусами $a, b (a > b)$ и зарядами $q, -q$ соответственно, расположены в одной плоскости. Найти потенциал φ на больших расстояниях от этой системы зарядов. Сравнить его с потенциалом линейного квадруполя (см. задачу 2.28).

2.33*. Показать, что распределение заряда $\rho = -(\boldsymbol{p}' \cdot \nabla)\,\delta(\boldsymbol{r})$ описывает элементарный диполь с моментом p', помещенный в начало координат. Пояснить результат, воспользовавшись наглядным представлением дельта-функции.

УказАниЕ. Исходить из разложения по мультиполям в декартовых координатах.

2.34. Доказать, что распределение зарядов

$$\rho = q \prod_{i=1}^{n} (\boldsymbol{a}_i \cdot \nabla)\, \delta(\boldsymbol{r})$$

создает потенциал

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = q \prod_{i=1}^{n} (a_i \cdot \nabla)\, \frac{1}{r}$$

2.35. Используя результаты задачи 2.28 и учитывая, что квадрупольный момент является тензором II ранга, найти потенциал φ электрического поля на больших расстояниях от линейного квадруполя, направление оси которого определяется полярными углами γ, β. Каким еще способом можно решить задачу?

2.36*. Пространственный октуполь (рис. 2.6 б) повернут вокруг оси Oz на угол β. Найти поле φ на больших от него расстояниях путем преобразования компонент октупольного момента. Сравнить с другими методами решения.

2.37. Найти потенциал φ электрического поля на больших расстояниях от плоского квадруполя, расположенного в плоскости, проходящей через

ось Oz (рис. 2.7). Компоненты квадрупольного момента получить непосредственно, а также путем поворота плоского квадруполя, рассмотренного в задаче 2.28 .

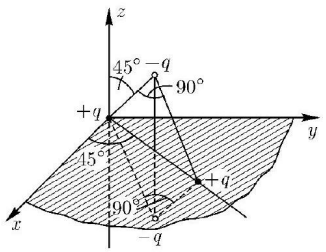


Рис. 2.7

2.38. Шар радиуса R равномерно поляризован, дипольный момент единицы объема $\boldsymbol{P}$. Найти потенциал φ электрического поля.

2.39. Двумерное распределение заряда характеризуется плотностью $\rho(\boldsymbol{r})$, не зависящей от координаты z. Если $\rho \neq 0$ только в ограниченной области S плоскости xy, то можно разложить потенциал φ вне распределения зарядов по мультиполям (двумерные мультиполи). Найти это разложение.

Указание. Разбить систему зарядов на заряженные нити и использовать принцип суперпозиции, а также разложение

$$\ln\left(1 + u^2 - 2u\cos\alpha\right) = -2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k\alpha}{k} u^k, \quad |u| < 1$$

2.40. Разложить по двумерным мультиполям потенциал φ линии с зарядом κ на единицу длины. Заряженная линия параллельна оси Oz и проходит через точку (r_0, α_0) плоскости xy.

2.41. Найти потенциал φ электрического поля на большом расстоянии от двух близких параллельных линейных зарядов κ и $-\kappa$, расположенных на расстоянии a друг от друга (линейный диполь).

2.42. На диске радиуса R имеется двойной электрический слой мощностью $\tau = \text{const}$. Найти потенциал φ и напряженность $\boldsymbol{E}$ электрического поля на оси симметрии,

[02] Атомные ядра, обладающие квадрупольным моментом, можно в некотором приближении рассматривать как эллипсоиды вращения.

перпендикулярной плоскости диска.
2.43. Найти напряженность E электрического поля двойного электрического слоя мощностью $\tau = \text{const}$, занимающего полуплоскость $y = 0$, $x > 0$. Сравнить с магнитным полем бесконечного прямолинейного тока, текущего вдоль оси Oz. Решить задачу двумя способами: а) прямым суммированием напряженностей, создаваемых малыми элементами двойного слоя; б) определив сначала электростатический потенциал φ.
2.44. Найти уравнения силовых линий системы двух точечных зарядов: $+q$ в точке $z = a$, и $\pm q$, находящегося в точке $z = -a$; начертить силовые линии. Имеются ли в поле точки равновесия?

УказаниЕ. Вследствие симметрии силовые линии располагаются в плоскостях $\alpha = \text{const}$, а E_z и E_R не зависят от α (цилиндрические координаты). Переменные в дифференциальном уравнении силовых линий разделяются после замены

$$u = \frac{z + a}{r}, \quad v = \frac{z - a}{r}$$

2.45. Используя результат предыдущей задачи, найти уравнение силовых линий точечного диполя, находящегося в начале координат.
2.46. Найти уравнение силовых линий линейного квадруполя, рассмотренного в задаче 2.28, а и нарисовать их на компьютере.
2.47. Доказать, что поток напряженности электрического поля точечного заряда q через некоторую незамкнутую поверхность S равен $q\Omega$. Здесь Ω - телесный угол, под которым виден контур, ограничивающий поверхность S, из точки, где находится заряд $q(\Omega > 0$, если из этой точки видна отрицательная сторона поверхности).
2.48. Заряд q_1 находится на оси симметрии круглого диска радиуса a на расстоянии a от плоскости диска. Какой величины q_2 заряд нужно поместить в симметричную относительно диска точку, чтобы поток электрического поля через диск в сторону заряда q_1 был равен Ф?
2.49*. Найти уравнение силовых линий системы n коллинеарных зарядов $q_1, q_2, \ldots, q_n$, расположенных в точках $z_1, z_2, \ldots, z_n$ оси z, не интегрируя дифференциальных уравнений силовых линий. Применить теорему, доказанную в задаче 2.47, к силовой трубке, образованной вращением силовой линии вокруг оси симметрии.
2.50. Используя результат предыдущей задачи, найти уравнение силовых линий системы двух точечных зарядов (ср. с задачей 2.44) и линейного квадруполя (ср. с задачей 2.46).
2.51. Равномерно заряженные нити, несущие заряды κ_1 и $-\kappa_2$ на единицу длины, параллельны между собой и отстоят друг от друга на расстояние h. Найти, при каком соотношении между κ_1 и κ_2 в числе поверхностей равного потенциала этой системы будут круговые цилиндры конечного радиуса. Определить радиусы и положение осей цилиндров.
2.52. Точечные заряды q_1 и $-q_2$ находятся на расстоянии h друг от друга. Показать, что в числе поверхностей равного потенциала этой системы имеется сфера конечного радиуса. Определить координаты ее центра и радиус. Найти значение потенциала φ на поверхности этой сферы, если $\varphi(\infty) = 0$.
2.53. Каким распределением зарядов создается потенциал, имеющий в сферических координатах вид: $\varphi(r) = (q/r)\exp(-\alpha r)$, где α, q - постоянные?
2.54. Каким должно быть распределение зарядов, чтобы созданный ими потенциал имел в сферических координатах вид

$$\varphi(r) = \frac{e_0}{a}\left(\frac{a}{r} + 1\right)\exp\left(-\frac{2r}{a}\right)$$

где e_0, a - постоянные?
Энергия и силы в электростатическом поле. Вычислим энергию взаимодействия системы

точечных электрических зарядов. Один заряд e_1, находящийся в точке с радиусом-вектором $\boldsymbol{r}_1$, создает в пространстве потенциал $\varphi(\boldsymbol{r}) = e_1/|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|$. При перемещении второго заряда e_2 из бесконечности в точку с радиусом-вектором r_2 нужно затратить работу $R = -e_2\varphi_{12} = -e_1\varphi_{21} = -(1/2)(e_1\varphi_{21} + e_2\varphi_{12})$, где $\varphi_{ab} = e_b/|\boldsymbol{r}_a - \boldsymbol{r}_b|$ потенциал, создаваемый зарядом e_b в точке $\boldsymbol{r}_a$ (для зарядов одного знака работа внешнего источника отрицательна). Эта работа превращается в потенциальную энергию взаимодействия зарядов: $W = -A$. Обобщая это рассмотрение на случай N зарядов, получим их энергию взаимодействия (потенциальную энергию в терминах классической механики):

$$W = \frac{1}{2}\sum_{a\neq b=1}^{N}\frac{e_a e_b}{|\boldsymbol{r}_a - \boldsymbol{r}_b|} = \frac{1}{2}\sum_{a=1}^{N} e_a\varphi(\boldsymbol{r}_a) \tag{2.27}$$

где $\varphi(\boldsymbol{r}_a)$ - потенциал, создаваемый в точке нахождения заряда e_a всеми остальными зарядами. Слагаемые с $a = b$ должны быть исключены.

Обобщим теперь полученные выражения на случай непрерывного распределения зарядов в пространстве, описываемого объемной плотностью $\rho(\boldsymbol{r})$. Поскольку в элементе объема dV находится заряд $de = \rho(\boldsymbol{r})dV$,
последняя сумма в (2.27) должна быть заменена интегралом:

$$W = \frac{1}{2}\int \rho(\boldsymbol{r})\varphi(\boldsymbol{r})dV \tag{2.28}$$

где интегрирование проводится по всему объему, занимаемому системой зарядов.

Пример 2.7. Две системыт зарядов с объемными плотностями ρ_1 и ρ_2 создают в заданной точке пространства потенциаль $\varphi_1(\boldsymbol{r})$ и $\varphi_2(\boldsymbol{r})$. С помощью (2.28) получить выражсеня для собственных энергий систем W_{11}, W_{22} и их взаимной энергии W_{12}. Как вычислить силь взаимодействия между системами?

Решение. Подставляя в (2.28) $\rho = \rho_1 + \rho_2, \varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ и используя (2.9), находим $W = W_{11} + W_{22} + W_{12}$, где отдельные слагаемые можно записать в разных формах:

$$W_{ii} = \frac{1}{2}\int \rho_i\varphi_i dV = \frac{1}{2}\int \frac{\rho_i(\boldsymbol{r})\rho_i(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}dVdV' \tag{2.29}$$

$$W_{ik} = \frac{1}{2}\int (\rho_i\varphi_k + \rho_k\varphi_i)\,dV = \int \rho_i\varphi_k dV = \\ = \int \rho_k\varphi_i dV = \int \frac{\rho_i(\boldsymbol{r})\rho_k(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}dVdV' \tag{2.30}$$

Энергия взаимодействия зависит от обобщенных координат $q_\alpha^{(i)}, q_\beta^{(k)}$ обеих систем, определяющих положение и ориентацию заряженных тел. По общим правилам механики, производная от потенциальной энергии взаимодействия по координате, взятая с противоположным знаком, определяет силу, стремящуюся увеличить эту координату:

$$\mathscr{F}_\alpha^{(i)} = -\frac{\partial W_{ik}}{\partial q_\alpha^{(i)}}, \quad \mathscr{F}_\beta^{(k)} = -\frac{\partial W_{ik}}{\partial q_\beta^{(k)}} \tag{2.31}$$

Выразим энергию системы зарядов через напряженность электрического поля $\boldsymbol{E}$. Для этого распространим интегрирование в (2.28) на все бесконечное пространство, поскольку области с $\rho = 0$ дают нулевой вклад, и преобразуем подынтегральное выражение:

$$\rho\varphi = \frac{1}{4\pi}(\mathrm{div}(\varphi\boldsymbol{E}) - \boldsymbol{E}\cdot\nabla\varphi) = \frac{1}{4\pi}\left(\mathrm{div}(\varphi\boldsymbol{E}) + E^2\right) \tag{2.32}$$

Интеграл от $\mathrm{div}(\varphi \boldsymbol{E})$ преобразуем по теореме Остроградского-Гаусса:

$$\int \mathrm{div}(\varphi \boldsymbol{E}) dV = \oint_{S \to S_\infty} \varphi \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{S} \to 0$$

На бесконечно удаленной поверхности, согласно (2.21), потенциал убывает не медленнее, чем $1/r$, а поле E - не медленнее $1/r^2$. Поэтому поверхностный интеграл обращается в нуль. После подстановки (2.32) в (2.28) будем иметь

$$W = \frac{1}{8\pi} \int E^2 dV \tag{2.33}$$

где интегрирование производится по всему пространству.
Обратим внимание на возможность различной трактовки выражений (2.28) и (2.33). В первый интеграл вклад дают только те области, в которых есть заряды ($\rho \neq 0$) и, таким образом, следует считать, что энергия присуща электрическим зарядам. Вторая формула позволяет интерпретировать энергию как свойство электрического поля. Энергия присутствует всюду в пространстве, где $E \neq 0$, с объемной плотностью

$$w = \frac{1}{8\pi} E^2 \tag{2.34}$$

Только вторая трактовка правильно обьясняет, как будет ясно из последующих глав книги, нестационарные электромагнитные явления.

Необходимо также отметить, что выражения (2.27) и (2.28), (2.33) неэквивалентны. Это становится очевидным - при подстановке в (2.28) и (2.9) плотности

$$\rho(\boldsymbol{r}) = \sum_{a=1}^{N} e_a \delta\left(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_a\right)$$

описывающей систему точечных зарядов. Используя две указанные формулы, получим

$$W = \frac{1}{2} \sum_{a \neq b = 1}^{N} \frac{e_a e_b}{|\boldsymbol{r}_a - \boldsymbol{r}_b|} + \frac{1}{2} \sum_{a=1}^{N} \frac{e_a^2}{|\boldsymbol{r}_a - \boldsymbol{r}_a|}$$

Здесь только первая сумма, в которой $a \neq b$, соответствует выражению (2.27), описывающему энергию взаимодействия системы зарядов. Вторая сумма содержит собственные энергии точечных зарядов. Каждый член в ней расходится ввиду расходимости кулоновского потенциала при $r \to 0$. Очевидная бессмысленность этого результата означает, что классическая
электродинамика становится неприменимой на малых расстояниях. Трудность с расходимостью собственной энергии точечного объекта является фундаментальной и проявляется не только в классической электродинамике, но и в современной теории элементарных частиц, основу которой составляют квантовая механика и теория относительности. На современном этапе развития науки мы можем находить собствен-

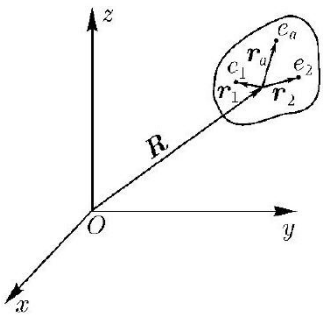


Рис. 2.8 ные энергии элементарных частиц лишь путем измерений. Энергия же их электрического взаимодействия дается формулой (2.27). При распределении зарядов по объему или поверхности с конечной плотностью никаких трудностей с определением энергий не возникает и их можно вычислить согласно (2.28) и (2.33).

Пример 2.8. Система, состоящая из N точечных зарядов, находится во внешнем поле, источники которого расположены далеко от рассматриваемой системы (рис. 2.8). Поэтому потенциал внешнего поля в пределах ограниченной системы протяженностью l изменяется медленно. Вычислить энергию взаимодействия системы с внеиним полем с точностью до квадрупольного члена.

Решение. Записываем энергию взаимодействия через потенциал внешнего поля в виде (см. (2.30))

$$W = \sum_{a=1}^{N} e_a \varphi\left(\boldsymbol{R} + \boldsymbol{r}_a\right)$$

Пользуясь условием гладкости потенциала, разлагаем его в степенной ряд:

$$\varphi\left(\boldsymbol{R} + \boldsymbol{r}_a\right) \approx \varphi(\boldsymbol{R}) + x_\alpha^a \frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha} + \frac{1}{2} x_\alpha^a x_\beta^a \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \ldots$$

Если в пределах рассматриваемой системы нет источников внешнего поля, то потенциал φ в этой области удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\alpha \partial x_\alpha} = 0$$

Это позволяет записать последний член разложения потенциала в виде

$$\left(x_\alpha^a x_\beta^a - \frac{1}{3} r_a^2 \delta_{\alpha\beta}\right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}$$

Подставляя эти разложения в исходное выражение для энергии, находим

$$W = q\varphi - \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{E} + \frac{Q_{\alpha\beta}}{6} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \ldots \tag{2.35}$$

Здесь φ и $\boldsymbol{E}$ берутся при аргументе $\boldsymbol{R}$, а $q, \boldsymbol{p}, Q_{\alpha\beta}$ представляют собой мультипольные моменты системы точечных зарядов:

$$q = \sum_{a=1}^{N} e_a, \quad \boldsymbol{p} = \sum_{a=1}^{N} e_a \boldsymbol{r}_a, \quad Q_{\alpha\beta} = \sum_{a=1}^{N} e_a \left(3 x_\alpha^a x_\beta^a - r_a^2 \delta_{\alpha\beta}\right) \tag{2.36}$$

Разложение здесь производится по отношению l/L размера системы к масштабу L неоднородности внешнего поля.

Задачи

2.55. Вычислить силу $\mathscr{F}$ и крутящий момент N, приложенные к диполю с моментом p во внешнем поле $\boldsymbol{E}$.

2.56. Вычислить электростатическую энергию шара с радиусом R и с зарядом q, распределенным равномерно а) по объему; б) по поверхности; в) по закону, указанному в задаче 2.12 .

2.57. Плоскости двух тонких коаксиальных равномерно заряженных колец одинакового радиуса R находятся на расстоянии a друг от друга. Работа, которую надо совершить, чтобы перенести точечный заряд q из бесконечности в центр каждого из колец, равна

соответственно A_1 и A_2. Найти заряды q_1, q_2 на кольцах.

2.58. Вычислить энергию взаимодействия U электронного облака с ядром в атоме водорода. Распределение заряда в атоме приведено в задаче 2.15 .

2.59. В некотором приближении можно считать, что электронные облака обоих электронов в атоме гелия имеют одинаковый вид и характеризуются объемной плотностью

$$\rho = -\frac{8e_0}{\pi a^3}\exp\left(-\frac{4r}{a}\right)$$

где a - боровский радиус атома, e_0 - элементарный заряд. Найти энергию U взаимодействия электронов в атоме гелия в этом приближении (нулевое приближение теории возмущений).

2.60^. Доказать, что равновесие системы неподвижных точечных зарядов, взаимодействующих только посредством электрических сил в отсутствие каких-либо связей, неустойчиво (теорема Ирншоу).

УказАниЕ. Использовать для доказательства первую теорему Ляпунова [Айзерман (1974), с. 222]: Если потенциальная энергия $U(q_\alpha)$ консервативной системы в положении равновесия не имеет минимума и если это обстоятельство устанавливается из рассмотрения членов второй степени в разложении $U(q_\alpha)$ в ряд по степеням q_α, то данное положение равновесия неустойчиво.

2.61. Центры двух шаров с зарядами q_1 и q_2 находятся на расстоянии a друг от друга ($a > R_1 + R_2$, где R_1, R_2 радиусы шаров). Заряды распределены сферически симметричным образом. Найти энергию взаимодействия U шаров и действующую между ними силу $\mathscr{F}$.

2.62. Мыльный пузырь, висящий на открытой трубке, стягивается под действием поверхностного натяжения (коэффициент поверхностного натяжения α). Считая, что диэлектрическая прочность воздуха (напряженность поля, при которой происходит пробой) равна E_0, выяснить, можно ли, сильно заряжая пузырь, предотвратить его сжатие. Каков минимальный равновесный радиус R пузыря?

2.63*. Два параллельных коаксиальных тонких кольца с радиусами a, b несут на себе равномерно распределенные заряды q_1, q_2. Расстояние между плоскостями колец c. Найти энергию взаимодействия U колец и действующую между ними силу $\mathscr{F}$.

2.64. Найти силу $\mathscr{F}$ и вращательный момент N, приложенные к электрическому диполю с моментом $\boldsymbol{p}$ в поле точечного заряда q.

2.65. Диполь с моментом p_1 находится в начале координат, а другой диполь с моментом p_2 - в точке с радиусом-вектором $\boldsymbol{r}$. Найти энергию U взаимодействия этих диполей и действующую между ними силу $\mathscr{F}$. При какой ориентации диполей эта сила максимальна?

2.66. Система зарядов характеризуется объемной плотностью $\rho(\boldsymbol{r})$ и занимает ограниченную область в окрестности некоторой точки O. Система помещена во внешнее электрическое поле, которое в окрестности этой точки может быть представлено в виде

$$\varphi_1(\boldsymbol{r}) = \sum_{l,m}\sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}a_{lm}r^l Y_{lm}(\vartheta,\alpha)$$

Найти энергию U взаимодействия системы с внешним полем φ_1, выразив ее через a_{lm} и мультипольные моменты Q_{lm} системы (ср. с примером 2.8).

Рекомендуемая литература: [Смайт (1954)], [Камке и Кремер (1980)], [Ландау и Лифшиц, Теория поля], [Алексеев (1977)], [Стрэттон (1948)], [Пановский и Филипс (1963)], [Зоммерфельд (1958)], [Медведев (1977)], [Френкель (1956)], [Батыгин и

Топтыгин (1970)], [Бредов и др. (1985)], [Сена (1988)], [Тамм (1976)], а также [Фейнман и др., в. 5 и задачи].

4.4.2 2.2. Magnetostatics

Плотность тока и магнитное поле. Закон Био-Савара. Как следует из опыта, при движении заряженных частиц кроме электрического между ними возникает дополнительное взаимодействие, которое называется магнитным. Первые опыты по изучению магнитных взаимодействий производились с макроскопическими телами (постоянные магниты, проводники с током). Но впоследствии (уже в 20 -м веке) были изучены магнитные взаимодействия отдельных микроскопических частиц (электронов, ионов и др.). Мы ниже сформулируем законы магнитных взаимодействий сначала для частиц, а затем получим из них соответствующие законы, относящиеся к макроскопическим объектам. Все формулы будут написаны в абсолютной гауссовой системе единиц.

При изучении магнитных явлений фундаментальную роль играет понятие магнитного поля. Частица малых размеров, движушаяся с постоянной скоростью $v \ll c$, где $c \approx 3 \times 10^{10}$ cm/c - скорость света в вакууме, создает напряженность магнитного поля

$$\boldsymbol{h} = \frac{e}{c}\frac{\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{R}}{R^3} \tag{2.37}$$

где e - заряд частицы, $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'$ - радиус-вектор, проведенный из точки местонахождения частицы в точку наблюдения. Если движется множество частиц с одинаковой скоростью, то по принципу суперпозиции частицы, находящиеся в макроскопически малом объеме dV, создадут поле

$$d\boldsymbol{H} = \sum_{(dV)} \frac{e}{c}\frac{\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{R}}{R^3} = \frac{\rho dV}{c}\frac{\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{R}}{R^3} = \frac{\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{R}}{cR^3}dV \tag{2.38}$$

Здесь ρ - плотность электрического заряда, $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) = \rho(\boldsymbol{r})\boldsymbol{v}$ - плотность электрического тока, т. е. заряд, переносимый движущимися частицами в единицу времени через площадку единичной площади, ориентированную перпендикулярно скорости зарядов $\boldsymbol{v}$. Если же частицы движутся с неодинаковыми скоростями, например, участвуют в хаотическом тепловом движении, то под v нужно понимать усредненную по тепловому движению (дрей-
фовую) скорость. Объемная плотность электрического тока может создаваться и отдельными точечными частицами. Использовав выражение (2.3) для плотности заряда точечных частиц, получим

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) = \sum_a e_a \boldsymbol{v}_a \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_a) \tag{2.39}$$

Если ток течет по квазилинейному проводнику сечением S, поперечный размер которого мал по сравнению с его длиной, то можно ввести силу тока $J = jS$ и сделать замену

$$\boldsymbol{j}dV \to Jd\boldsymbol{l} \tag{2.40}$$

где $d\boldsymbol{l}$ - направленный элемент средней линии проводника. Напряженность магнитного поля, создаваемого элементом проводника с током, примет вид

$$d\boldsymbol{H} = \frac{J}{c}\frac{d\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{R}}{R^3} \tag{2.41}$$

Именно это выражение рассматривают обычно как опытный закон БиоСавара [3], хотя прямой опыт с отрезком проводника в случае постоянного тока провести невозможно - проводник должен быть замкнутым. Производя интегрирование по всему распределению токов, получим

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{c}\int \frac{\boldsymbol{j}\,(\boldsymbol{r}')\times\boldsymbol{R}}{R^3}dV', \quad \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = \frac{J}{c}\oint \frac{d\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{R}}{R^3} \tag{2.42}$$

Первое из этих выражений применимо для объемного тока, второе - для замкнутого квазилинейного проводника. Заметим, что напряженность магнитного поля выражается через векторное произведение истинных (полярных - см. раздел 1.1) векторов и представляет собой аксиальный вектор (псевдовектор).

Единица силы тока в системе СИ - ампер (А). При токе силой в 1 А через поперечное сечение проводника переносится за секунду электрический заряд величиной в 1 Кл (кулон). В абсолютной гауссовой системе единиц сила тока имеет размерность $\mathrm{cm}^{3/2}$ г $^{1/2}/\mathrm{c}^2$.1 А $= 3\times10^9$ $\mathrm{cm}^{3/211/2}/\mathrm{c}^2$. Плотность тока имеет размерность силы тока, деленной на квадрат длины в соответствующей системе единиц.

Сила Лоренца и формула Ампера. Мы пока не указали способ измерения напряженности магнитного поля. Используем для этой цели фундаментальный опытный факт - выражение для силы, действующей на движущуюся заряженную частицу при наличии электрического и магнитного полей (силы Лоренца) [4]:

$$\mathscr{F}_L = e\boldsymbol{E} + \frac{e}{c}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{H} \tag{2.43}$$

Здесь первое слагаемое в правой части - уже известная сила Кулона, действующая на неподвижную частицу в электрическом поле. Второе слагаемое - дополнительная сила, действующая на движущуюся частицу при наличии магнитного поля. Выражение (2.43) для силы Лоренца - это одна из самых красивых формул классической физики. Она производит глубокое впечатление своей простотой и общностью: любая заряженная частица, движущаяся с произвольной скоростью, будет испытывать в электромагнитном поле действие силы (2.43). Она позволяет свести измерение напряженностей $\boldsymbol{E},\boldsymbol{H}$ к измерению механических величин $\mathscr{F},\boldsymbol{v}$. Напряженность $\boldsymbol{E}$ определяется силой, действующей на неподвижную ($v=0$) пробную частицу; напряженность H - добавочной силой, которая действует на движущуюся частицу.

Просуммировав (2.43) по всем частицам в объеме dV при $\boldsymbol{E}=0$, как это было сделано выше, получим магнитную силу, которая действует на элемент объема любой среды, в которой течет ток с плотностью j:

$$d\mathscr{F} = \sum_{(dV)}\frac{e}{c}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{H} = \frac{1}{c}\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{H}dV \tag{2.44}$$

Сила, действующая на элемент квазилинейного тока, получается путем замены (2.40) и имеет вид

$$d\mathscr{F} = \frac{J}{c}d\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{H} \tag{2.45}$$

(формула Ампера) [5]. Полная сила в обоих случаях получается в результате интегрирования по всей области, в которой текут токи.

Сохранение электрического заряда и уравнение непрерывности. Из предыдущего рассмотрения следует, что магнитные явления - создание магнитного поля и его

[03] Био Ж. Б., Савар Ф. - французские физики. Закон, названный их именами, они открыли экспериментальным путем в 1820 г.

воздействие на частицы и токи - являются в своей основе электрокинетическими, т. е. проявляются при движении заряженных

частиц. В то же время в разделе 2.1 уже было отмечено, что электрический заряд сохраняется во всех многообразных изученных до сих пор явлениях природы. В связи с этим нам необходимо выяснить, какие следствия, касающиеся взаимосвязи двух величин, плотности электрического заряда и плотности электрического тока, вытекают из закона сохранения заряда. Рассмотрим этот вопрос для общего случая, когда обе плотности зависят и от координат, и от времени.

Выделив произвольный объем V, ограниченный поверхностью S, можем записать как следствие сохранения заряда

$$\oint_S j \cdot d\boldsymbol{S} = -\frac{dq}{dt}$$

где $q(t)$ - электрический заряд в объеме V. Его изменение может происходить только вследствие выхода частиц из объема. Интеграл в левой части равенства как раз и представляет заряд, покидающий объем в единицу времени. Выразив заряд q через плотность, получим интегральную форму закона сохранения заряда:

$$-\frac{d}{dt}\int\limits_V \rho(r,t)dV = \oint_S \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t)\cdot d\boldsymbol{S} \tag{2.46}$$

Применение теоремы Остроградского-Гаусса приводит к соотношению

$$\int\limits_V \left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div} j\right) dV = 0$$

справедливому при произвольном выборе объема интегрирования. Это означает, что в любой точке пространства [6] выполняется уравнение непрерывности

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}\boldsymbol{j} = 0 \tag{2.47}$$

Уравнения такого типа имеют огромное значение в физике, так как они выражают в дифференциальной форме закон сохранения любой субстанции.

В статической (неподвижной) системе зарядов $\rho = \text{const}$, $\boldsymbol{j} = 0$, магнитное поле отсутствует. Постоянному (во времени) магнитному полю соответствует стационарный случай, когда распределение зарядов в пространстве не изменяется ($\rho = \text{const}$), но течет постоянный ток $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) \neq 0$. При этом

должно выполняться условие стационарности, вытекающее из (2.47):
$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{j} = 0 \tag{2.48}$$

$$

Стационарные (постоянные) токи либо текут по замкнутым контурам, либо уходят на бесконечность.

Уравнения магнитостатики. Векторный потенциал. Получим дифференциальные уравнения, которым удовлетворяет напряженность магнитного поля. Для этого используем закон Био-Савара в форме (2.42) и уравнение непрерывности для стационарного случая (2.48). Прежде всего замечаем, что из (2.42) следует:

[04] Лоренц Г. А. - выдающийся нидерландский физик, создатель классической электронной теории.

[5] Ампер А. М. - французский физик, один из основоположников электродинамики.

[06] за исклю исклением, быть может, конечного числа точек.

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = \operatorname{rot} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) \tag{2.49}$$

где

$$A(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{c} \int \frac{\boldsymbol{j}\,(\boldsymbol{r}')}{R} dV' \tag{2.50}$$

- векторный потенциал магнитного поля. Если ток течет по квазилинейному проводнику, векторный потенциал должен вычисляться по формуле

$$A(\boldsymbol{r}) = \frac{J}{c} \oint \frac{dl'}{R}$$

Применив к равенству (2.49) операцию $\operatorname{div} = \nabla\cdot$, получим

$$\operatorname{div} \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = 0 \tag{2.51}$$

при любом распределении токов в пространстве. Вектор $\boldsymbol{H}$ является, таким образом, соленоидальным. Физический смысл этого условия - отсутствие в природе магнитных зарядов, аналогичных электрическим [7].

Применим теперь операцию $\operatorname{rot} = \nabla\times$ к обеим частям равенства (2.49). В правой части равенства появятся $\operatorname{div} \boldsymbol{A}$ и $\Delta \boldsymbol{A}$, поскольку $\operatorname{rot}\operatorname{rot} \boldsymbol{A} = \operatorname{gradiv} \boldsymbol{A} - \triangle A$.

Пример 2.9. Доказать, что для ограниченного в пространстве распределения токов

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = 0 \tag{2.52}$$

Решение. Вносим оператор ∇ под знак интеграла, меняя порядок дифференцирования по r и интегрирования по dV', и пользуемся тождеством $\nabla R = -\nabla' R$, где $R = |r - r'|$. Получаем с помощью (2.48)

$$\nabla \cdot \frac{\boldsymbol{j}\,(\boldsymbol{r}')}{R} = \frac{\nabla' \cdot \boldsymbol{j}\,(\boldsymbol{r}')}{R} - \nabla' \cdot \frac{\boldsymbol{j}\,(\boldsymbol{r}')}{R} = -\nabla' \cdot \frac{\boldsymbol{j}\,(\boldsymbol{r}')}{R}$$

В результате имеем

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} = -\frac{1}{c} \int \nabla' \cdot \frac{\boldsymbol{j}\,(\boldsymbol{r}')}{R} dV = -\frac{1}{c} \oint_{S_\infty} \frac{\boldsymbol{j} \cdot d\boldsymbol{S}}{R} \to 0$$

Обращение в нуль интеграла по бесконечно удаленной поверхности требует, чтобы плотность тока на больших расстояниях убывала быстрее, чем r^{-1}.

Пример 2.10. Получить неоднородное дифференциальное уравнение для векторного потенциала A путем непосредственного применения оператора Лапласа к интегралу (2.50).

Решение. Вносим оператор Лапласа, действующий на координаты r, под знак интеграла и пользуемся тождеством (1.225). Получаем уравнение Пуассона

$$\Delta \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = -\frac{4\pi}{c} \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) \tag{2.53}$$

Использовав (2.53), а также (2.52), находим из (2.49)

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = \frac{4\pi}{c} \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) \tag{2.54}$$

[07] Некоторые теории элементарных частиц предполагают существование магнитных монополей, т. е. частиц, имеющих магнитные заряды. Но все попытки обнаружить их на опыте пока не увенчались успехом.

Уравнения магнитостатики для напряженности поля (2.51), (2.54) и для векторного потенциала (2.53) являются более общими, чем конкретные интегральные выражения (2.42) и (2.50), из которых они получены. На основе дифференциальных уравнений можно решить более широкий круг задач и представить решения в формах, отличных от (2.42), (2.50). В некоторых случаях более удобной является интегральная форма уравнений для поля $\boldsymbol{H}$:

$$\oint_S \boldsymbol{H} \cdot d\boldsymbol{S} = 0, \quad \oint_l \boldsymbol{H} \cdot d\boldsymbol{l} = \frac{4\pi}{c} J \tag{2.55}$$

Эти уравнения выводятся точно так же, как соответствующие уравнения для электростатического поля. В первом уравнении S - произвольная замкнутая поверхность, во втором l - произвольный замкнутый контур. Ток $J-$
это полный ток, который протекает через произвольную поверхность, опирающуюся на замкнутый контур l. Поэтому второе уравнение (2.55) иногда называют теоремой о полном токе. Первое уравнение означает, что магнитный поток через любую замкнутую поверхность равен нулю.

Векторный потенциал $\boldsymbol{A}$ является вспомогательной величиной, через которую выражается согласно (2.49) наблюдаемая физическая величина напряженность магнитного поля. Поэтому векторный потенциал определяется неоднозначно - заданному полю $\boldsymbol{H}$ соответствует целое семейство векторных потенциалов, отличающихся на градиент произвольной дифференцируемой скалярной функции:

$$\boldsymbol{A}'(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) + \nabla\chi(\boldsymbol{r}) \tag{2.56}$$

Поскольку $\nabla \times \nabla\chi = 0$, то векторные потенциалы $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{A}'$ представляют одну и ту же напряженность магнитного поля $\boldsymbol{H}$.

Граничные условия. На поверхности, где плотность тока испытывает скачок или обращается в бесконечность, на нормальные и тангенциальные компоненты поля должны быть наложены некоторые граничные условия. Они выводятся точно так же, как граничные условия для электростатического поля. Но поскольку уравнения магнитостатики отличаются от уравнений электростатики, то отличаются и граничные условия:

$$H_{2n} - H_{1n} = 0, \quad H_{2\tau} - H_{1\tau} = \frac{4\pi}{c} i_\nu \tag{2.57}$$

Направления ортов $\boldsymbol{n}, \boldsymbol{\nu}, \boldsymbol{\tau}$ указаны на рис. 2.3. Величина $i_\nu = \lim_{h\to 0} j_\nu h$ - плотность поверхностного тока. Она отлична от нуля, если в тонком слое течет ток конечной силы. Такой слой можно рассматривать как бесконечно тонкую поверхность, на которой должны быть выполнены условия (2.57). Оба условия можно записать и в векторной форме:

$$\boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{H}_2 - \boldsymbol{H}_1) = 0, \quad \boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{H}_2 - \boldsymbol{H}_1) = \frac{4\pi}{c} \boldsymbol{i} \tag{2.58}$$

Задачи

2.67. Может ли электрический ток с объемной плотностью $\boldsymbol{j}(r) = \boldsymbol{j}_0 \cos(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r})$, где $\boldsymbol{j}_0, \boldsymbol{k}$ - постоянные векторы, обеспечить стационарное (не зависящее от времени) распределение зарядов в пространстве?

2.68. Найти распределение в пространстве электрического тока, создающего магнитное поле

$$H_r = H_0\left(\frac{1}{3} - \frac{r^2}{5a^2}\right)\cos\vartheta, \quad H_\vartheta = H_0\left(\frac{2r^2}{5a^2} - \frac{1}{3}\right)\sin\vartheta,$$
$$H_\alpha = 0 \text{ при } r \leqslant a;$$
$$H_r = \frac{2H_0a^3}{15r^3}\cos\vartheta, \quad H_\vartheta = \frac{H_0a^3}{15r^3}\sin\vartheta,$$
$$H_\alpha = 0 \text{ при } r \geqslant a.$$

2.69. Показать, что однородному и постоянному магнитному полю $\boldsymbol{H}$ можно сопоставить векторный потенциал $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{H} \times \boldsymbol{r}/2$. Удовлетворяет ли он условию $\operatorname{div}\boldsymbol{A} = 0$?

2.70. Внутри тонкой проводящей цилиндрической оболочки радиуса b находится коаксиальный с ней провод радиуса a. По этим проводникам текут постоянные токи одинаковой величины J в противоположных направлениях. Определить магнитное поле $\boldsymbol{H}$, создаваемое такой системой во всех точках пространства. Решить задачу двумя способами: интегрированием дифференциальных уравнений магнитостатики и с помощью интегральной формы этих уравнений.

2.71. Определить напряженность магнитного поля $\boldsymbol{H}$, создаваемую постоянным током J, текущим по бесконечному цилиндрическому проводнику кругового сечения радиуса a. Решить задачу наиболее простым способом - с помощью уравнения магнитостатики в интегральной форме (2.55), а также путем введения векторного потенциала $\boldsymbol{A}$.

2.72. Решить предыдущую задачу для полого цилиндрического проводника (внутренний радиус a, наружный b).

2.73. Прямолинейная бесконечно длинная полоса имеет ширину a. Вдоль полосы течет ток J, равномерно распределенный по ее ширине. Найти магнитное поле $\boldsymbol{H}$. Проверить результат, рассмотрев предельный случай поля на больших расстояниях.

2.74. Противоположно направленные токи равной величины J текут по двум тонким бесконечно длинным пластинам, совпадающим с двумя гранями бесконечной призмы прямоугольного сечения. Ширина пластин a, расстояние между ними b. Найти силу взаимодействия на единицу длины f.

2.75. Найти векторный потенциал $\boldsymbol{A}$ и магнитное поле $\boldsymbol{H}$, создаваемые двумя прямолинейными параллельными токами J, текущими в противоположных направлениях. Расстояние между токами $2a$.

2.76. Определить магнитное поле $\boldsymbol{H}$, создаваемое двумя параллельными плоскостями, по которым текут токи с одинаковыми поверхностными плоскостями $i = \text{const}$. Рассмотреть два случая: а) токи текут в противоположных направлениях; б) токи направлены одинаково.

2.77. Определить магнитное поле H в цилиндрической полости, вырезанной в бесконечно длинном цилиндрическом проводнике. Радиусы полости и проводника соответственно a и b, расстояние между их параллельными осями $d(b > a + d)$. Ток J распределен равномерно по сечению.

2.78*. Найти векторный потенциал $\boldsymbol{A}$ и магнитное поле $\boldsymbol{H}$, создаваемые в произвольной точке тонким кольцом радиуса a с током J. Результаты выразить через эллиптические интегралы.

УказАние. Использовать метод решения задачи 2.19 .

2.79*. Показать, что если магнитное поле обладает аксиальной симметрией и описывается в цилиндрических координатах векторным потенциалом с компонентами $A_\alpha(r, z), A_r = A_z = 0$, то уравнение магнитных силовых линий имеет вид $rA_\alpha(r, z) = \text{const}$.

УказАНиЕ. Рассмотреть поток магнитного поля внутри трубки, образованной вращением одной из силовых линий вокруг оси симметрии (ср. с решением задачи 2.49).

2.80. Выразить напряженность $\boldsymbol{H}$ и векторный потенциал $\boldsymbol{A}$ аксиально симметричного

магнитного поля вне его источников через напряженность магнитного поля $H(z)$ на оси симметрии.

2.81. Исходя из закона Био-Савара (2.41), показать, что для замкнутого контура с током J напряженность магнитного поля в некоторой точке выражается формулой $\boldsymbol{H} = -(J/c)\,\mathrm{grad}\,\Omega$, где Ω - телесный угол, под которым контур виден из этой точки (ср. с задачей 2.47).

2.82*. Доказать теорему единственности решения магнитостатической задачи: уравнения магнитостатики (2.51), (2.54) и граничные условия (2.57) определяют напряженность магнитного поля ограниченной в пространстве системы постоянных токов единственным образом.

2.83. Показать, что магнитное поле бесконечно длинного цилиндрического соленоида с густой намоткой (n витков на единицу длины, ток J) дается формулами

$$\boldsymbol{H} = \frac{4\pi}{c} nJ\boldsymbol{e}_z \quad \text{внутри соленоида,} \qquad \boldsymbol{H} = 0 \quad \text{снаружи,}$$

где ось Oz направлена вдоль соленоида.

УКАзАНиЕ. Использовать теорему единственности решения магнитостатической задачи.

2.84. Определить магнитное поле $\boldsymbol{H}$ на оси конечного соленоида с густой намоткой, имеющего форму цилиндра. Высота цилиндра h, радиус a, число витков на единицу длины n, сила тока J.

2.85*. Сфера радиуса a заряжена зарядом e равномерно по поверхности и вращается вокруг одного из своих диаметров с угловой скоростью ω. Найти магнитное поле внутри и вне сферы.

Пример 2.11. Исходя из интегрального представления векторного потенциала (2.50), найти его приближенное значение на больиих расстояниях от ограниченной в пространстве системыи постоянных токов, занимаюших область размером l. Показать, что с точностью до членов порядка l/r

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{r}}{r^3}, \qquad \text{где} \qquad \boldsymbol{m} = \frac{1}{2c}\int \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})dV \tag{2.59}$$

Вектор $\boldsymbol{m}$ называется магнитным дипольным моментом системы токов.

Решение. Подставив разложение

$$\frac{1}{R} \approx \frac{1}{r} + \frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}'}{r^3}$$

в (2.50), получим

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{cr}\int \boldsymbol{j}\,(\boldsymbol{r}')\,dV' + \frac{1}{cr^3}\int (\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}')\,\boldsymbol{j}\,(\boldsymbol{r}')\,dV' \tag{1}$$

Первый интеграл в левой части обращается в нуль, что следует из тождества

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{j}\,(\boldsymbol{r}') = \mathrm{div}'\,[(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r}')\,\boldsymbol{j}\,(\boldsymbol{r}')]$$

где $\boldsymbol{a}$ - произвольный постоянный вектор, a div $'$ берется по координатам $\boldsymbol{r}'$ и использовано условие стационарности токов (2.48). Интегрируя обе части равенства по объему и перейдя к интегрированию по бесконечно удаленной поверхности, получим $\int \boldsymbol{j}\,(\boldsymbol{r}')\,dV' = 0$. Это означает, что члена, аналогичного кулоновскому потенциалу, в магнитостатике не существует.

Для преобразования второго интеграла в (1) используем тождество

$$[\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')] \times \boldsymbol{r} = \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')(\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r}') - \boldsymbol{r}' \operatorname{div}'[\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')(\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r}')]$$

Умножим обе части этого равенства скалярно на произвольный вектор и проинтегрируем по всему пространству:

$$\boldsymbol{a} \cdot \int [\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')]\, dV' \times \boldsymbol{r} =$$

$$= \boldsymbol{a} \cdot \int \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')(\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r}')\, dV' - \int (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{r}') \operatorname{div}'[\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')(\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r}')]\, dV' \tag{2}$$

Последний интеграл преобразуем с помощью тождества

$$(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{r}') \operatorname{div}'[\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')(\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r}')] - \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')(\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r}')$$

После интегрирования по всему пространству и применения теоремы Остроградского-Гаусса слагаемое в правой части, содержащее div', обращается в нуль. В итоге из равенства (2) ввиду произвольности вектора a следует

$$\int [\boldsymbol{r}' \times \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')]\, dV' \times \boldsymbol{r} = 2 \int \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')(\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r}')\, dV' \tag{3}$$

Использовав это тождество в (1), получим представление для векторного потенциала, приведенное в условии примера.

2.86. Вычислить магнитный момент m вращающейся сферы, рассмотренной в задаче 2.82. Сделать то же самое для случая, когда заряд распределен равномерно по объему. Вычислить магнитное поле на большом расстоянии от сферы и сравнить с результатом точного решения указанной задачи.

2.87. Показать, что магнитный момент плоского контура с током можно вычислить по формуле

$$m = \frac{J}{c} S \boldsymbol{n} \tag{2.60}$$

где J - ток в контуре, S - площадь, ограниченная контуром с током, $\boldsymbol{n}$ - орт нормали к плоскости контура.

2.88. Пусть система заряженных частиц с одинаковым отношением заряда к массе e/m совершает финитное (ограниченное в пространстве) движение в некотором внешнем поле. Показать, что магнитный момент такой системы частиц пропорционален ее моменту импульса:

$$m = \eta L \tag{2.61}$$

где $\eta = e/2mc$ - гиромагнитное отношение, $\boldsymbol{L} = \sum_a \boldsymbol{r}_a \times \boldsymbol{p}_a$ - момент импульса системы частиц.

2.89. Система состоит из двух частиц с разными отношениями e/m. Выразить ее магнитный момент через полный механический момент $\boldsymbol{L}$ в системе центра масс. Рассмотреть случай частица-античастица ($e_2 = -e_1, m_2 = m_1$).

2.90. В возбужденном состоянии атома водорода электрон создает орбитальный ток

$$j_r = j_\vartheta = 0, \quad j_\alpha = \frac{e\hbar r^3}{3^8 \pi m_e a^7} \exp\left(-\frac{2r}{3a}\right) \sin\vartheta \cos^2\vartheta$$

где использованы уже применявшиеся в задаче 2.54 обозначения. Вычислить магнитный момент орбитального тока.

2.91*. Плотность тока, создаваемая в основном состоянии атома водорода спиновым [8] магнитным моментом электрона, описывается функцией $\boldsymbol{j} = (c/e)\,\mathrm{rot}\,[\rho(r)\boldsymbol{\mu}_s]$, где $\boldsymbol{\mu}_s$ - постоянный вектор, $\rho(r)$ - объемная плотность распределения заряда в атоме, не зависящая от углов и экспоненциально убывающая при больших r. Показать, что магнитное поле в начале координат равно $-(8/3e)\pi\rho(0)\boldsymbol{\mu}_s$. Какой магнитный момент создает указанный ток?

2.92. Вычислить магнитное поле в начале координат и магнитный момент, создаваемые током

$$j_r = j_\vartheta = 0, \quad j_\alpha = \frac{e\hbar r^3}{2\cdot 3^8\pi m_e a^7}\exp\left(-\frac{2r}{3a}\right)\sin^3\vartheta$$

в одном из возбужденных состояний атома водорода (сферические координаты).

2.93. Однородно заряженный эллипсоид вращения (полный заряд e) с полуосями a, a, b вращается вокруг оси симметрии с угловой скоростью ω. Вычислить его магнитный момент и магнитное поле на больших расстояниях.

2.94. Тонкий диск радиуса a с равномерно распределенным зарядом e вращается вокруг своей оси с угловой скоростью ω. Вычислить магнитный момент и напряженность поля всюду на оси диска.

Пример 2.12. Исследовать возможность введения псевдоскалярного потенциала магнитного поля $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = -\nabla\psi(\boldsymbol{r})$. На примере квазилинейного замкнутого проводника с током исследовать роль неодносвязности области определения ψ, получить уравнение и граничные условия для потенциала.

Решение. Представление $\boldsymbol{H} = -\nabla\psi$ приводит к соотношению $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} = 0$ и, следовательно, согласно (2.54) возможно только в областях, где плотность тока $j = 0$. В этих областях из уравнения (2.51) следует уравнение Лапласа для потенциала:

$$\Delta\psi = 0 \tag{2.62}$$

Но наличие областей, в которых $j \neq 0$ и потенциал не существует, делает пространство

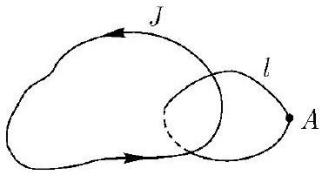


Рис. 2.9 неодносвязным и приводит к неоднозначности ψ.

Пусть поле создается квазилинейным проводником с током. Выберем произвольный замкнутый контур, охватывающий проводник с током (рис. 2.9), и вычислим значение потенциала в точке A после обхода по этому контуру:

$$\tilde{\psi}_A = \psi_A + \oint_l d\psi$$

Если бы $\psi(\boldsymbol{r})$ был однозначной непрерывной функцией координат, то $\oint d\psi = 0$. Но фактически

$$\oint_l d\psi = \oint \nabla\psi\cdot d\boldsymbol{l} = -\oint \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{l} = -\frac{4\pi}{c}J$$

и, таким образом,

[08] О спиновых моментах см. ответ к задаче 2.88.

$$\psi_A - \widetilde{\psi}_A = \frac{4\pi}{c} J \tag{2.63}$$

Последнее соотношение показывает, что $\psi(\boldsymbol{r})$ - неоднозначная функция координат и после обхода по любому замкнутому контуру, охватывающему контур с током, приобретает приращение $4\pi J/c$, где J - полный ток, протекающий через произвольную поверхность, которая опирается на контур интегрирования.

Условие (2.63) сходно с граничным условием (2.25) на поверхности двойного электрического слоя мощностью $\kappa_m = J/c$. Поэтому на контур с током можно натянуть произвольную поверхность и считать, что на ней
должно выполняться условие (2.63). Второе граничное условие - непрерывность потенциала на двойном слое - также выполняется, поскольку нормальная компонента магнитного поля непрерывна на любой поверхности:

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial n} = \frac{\partial \psi_1}{\partial n} \tag{2.64}$$

2.95. Найти псевдоскалярный потенциал ψ магнитного поля, создаваемого бесконечно длинным прямым проводом с током J. Вычислить компоненты магнитного поля.
2.96*. Найти псевдоскалярный потенциал ψ магнитного поля замкнутого линейного контура с током. Решить задачу: а) путем интегрирования уравнения Лапласа для потенциала; б) используя известное выражение (2.50′) для векторного потенциала.

Указание. При решении задачи первым способом воспользоваться представлением решения уравнения Лапласа в виде интеграла по замкнутой поверхности, см. пример 2.4.

Энергия и силы в постоянном магнитном поле. Вычислим работу по перемещению контура l с током J во внешнем магнитном поле $\boldsymbol{H}$. Пусть каждый элемент контура dl сместится на малый вектор ds. На элемент тока действует сила Ампера (2.45), поэтому работа δA по перемещению всего контура запишется в виде

$$\delta A = \frac{J}{c} \oint_l \delta s \cdot [d\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{H}] = \frac{J}{c} \int\limits_{\delta S} \boldsymbol{H} \cdot d\boldsymbol{S} = \frac{J}{c} \delta\Phi$$

где $d\boldsymbol{S} = \delta s \times d\boldsymbol{l}, \delta S$ - полная поверхность, которую опишет весь контур с током при его малом смещении (и, возможно, деформации). Интеграл в предыдущей цепочке равенств представляет собой приращение магнитного потока

$$\Phi = \int\limits_S \boldsymbol{H} \cdot d\boldsymbol{S} = \int\limits_S \operatorname{rot} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{S} = \oint_l \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{l} \tag{2.65}$$

через контур с током при его перемещении. Это изменение, $\delta\Phi$, равно как раз потоку через дополнительную поверхность, прочерченную контуром (рис. 2.10). Вычисленная работа представляет собой, очевидно, приращение энергии контура во внешнем поле:

$$\delta A = \delta W \tag{2.66}$$

Элементарная работа позволяет вычислить обобщенные силы $\mathscr{F}_\alpha$, действующие на контур с током, так как она связана с приращением обобщенных координат δq_α известным из механики соотношением:

$$\delta A = \sum_\alpha \mathscr{F}_\alpha \delta q_\alpha$$

Но аналогию с механикой можно углубить, если ввести в рассмотрение потенциальную функцию контура с током во внешнем поле

$$U = -\frac{J}{c}\Phi \tag{2.67}$$

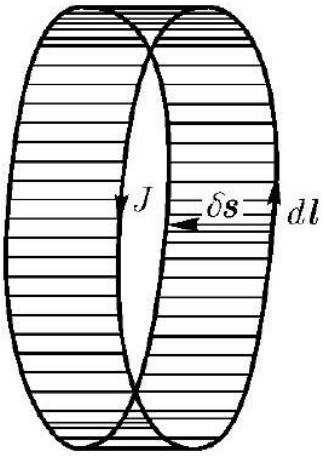


Рис. 2.10

Работа магнитных сил совершается за счет убыли потенциальной функции: $\delta A = -\delta U$, а обобщенные силы вычисляются по обычным формулам механики:

$$\mathscr{F}_\alpha = -\frac{\partial U}{\partial q_\alpha} \tag{2.68}$$

Следует иметь в виду, что потенциальная функция играет роль потенциальной энергии только при бесконечно медленных перемещениях контура. При конечных скоростях возникает явление электромагнитной индукции (см. следующий раздел), которое изменяет силу тока в контуре и приводит к появлению наряду с механическими электродвижущих сил.

Рассмотрим теперь взаимодействие двух контуров, a-го и b-го, в отсутствие прочих контуров. Роль внешнего поля играет поле другого контура, и потенциальная функция их взаимодействия примет вид

$$U_{ab} = U_{ba} = -\frac{J_a}{c}\Phi_{ab} = -\frac{J_b}{c}\Phi_{ba} = -\frac{J_a J_b}{c^2}\oint_{l_a}\oint_{l_b}\frac{dl_a \cdot dl_b}{R}$$

Здесь

$$\Phi_{ba} = \oint_{l_b} \boldsymbol{A}_a \cdot dl_b$$

- магнитный поток поля a-го контура через b-й контур и использована формула (2.50') для векторного потенциала; R - расстояние между $d\boldsymbol{l}_a$ и dl_b. Удобно записывать потенциальную функцию в симметричной форме:

$$U_{\text{int}} = \frac{1}{2}\left(U_{ab} + U_{ba}\right) = -\frac{1}{2c^2}\sum_{a\neq b=1}^{2} L_{ab} J_a J_b \tag{2.69}$$

где

$$L_{ab} = \oint_{l_a}\oint_{l_b}\frac{d\boldsymbol{l}_a \cdot d\boldsymbol{l}_b}{R} \quad (L_{ba} = L_{ab}) \tag{2.70}$$

- коэффициент взаимной индукции двух контуров. Он определяется (в отсутствие намагничивающихся материальных сред) только формой и расположением контуров с током, а также направлениями их обхода (направлениями токов). Силы взаимодействия контуров вычисляются через U_{int} согласно (2.68). Магнитный поток, создаваемый контуром a через контур b, также выражается через коэффициент взаимной индукции:

$$\Phi_{ba} = \frac{1}{c} L_{ba} J_a$$

Если толщины проводников не малы по сравнению с их длинами, то в полученных выше формулах нужно сделать замену $Jdl \to jdV$ и интегрировать по объему каждого из проводников. Это приведет к выражениям

$$U_{int} = -\frac{1}{2\text{c}^2} \sum_{a \neq b=1}^{2} \int_{V_a} \int_{V_b} \frac{j_a(\boldsymbol{r}_a) \cdot \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}_a)}{R} dV_a dV_b = -\frac{1}{2c^2} \sum_{a \neq b=1}^{2} L_{ab} J_a J_b \tag{2.71}$$

где коэффициент взаимной индукции

$$L_{ab} = \frac{1}{J_a J_b} \int_{V_a} \int_{V_b} \frac{\boldsymbol{j}_a(\boldsymbol{r}_a) \cdot \boldsymbol{j}_b(\boldsymbol{r}_b)}{R} dV_a dV_b \tag{2.72}$$

и т. д. Все эти выражения пригодны и для произвольного числа токов, если провести суммирование по всем токам.

Формулы (2.71), (2.72) позволяют построить потенциальную функцию взаимодействия отдельных элементов одного и того же тока:

$$U = -\frac{1}{2\text{c}} \int_V \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) dV = -\frac{1}{2c^2} \int_V \frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')}{R} dV dV' = -\frac{1}{2c^2} LJ^2 \tag{2.73}$$

Эти выражения можно рассматривать как результат взаимодействия отдельных токовых нитей, на которые можно разделить любой ток конечной толщины. Величина

$$L = \frac{1}{J^2} \int_V \frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')}{R} dV dV' \tag{2.74}$$

называется коэффициентом самоиндукции. При его вычислении необходимо учитывать конечность сечения проводника, иначе соответствующий интеграл разойдется.

Потенциальная функция только знаком отличается от энергии, которую нужно затратить, чтобы создать в пространстве соответствующие токовые распределения. Поэтому полную магнитную энергию W постоянных токов можно записать в виде

$$W = -U = \frac{1}{2\text{c}} \int_V \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) dV = \frac{1}{2c^2} \int_V \frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')}{R} dV dV' \tag{2.75}$$

Эти выражения пригодны для постоянных токов в самом общем случае, они включают в себя как собственные энергии любого числа проводников с током, так и их энергии взаимодействия.

Магнитная энергия допускает полевую интерпретацию после преобразования выражений (2.75) аналогично тому, как это делалось в электростатике. Положив $\boldsymbol{j} = (c/4\pi) \operatorname{rot} \boldsymbol{H}$ согласно (2.54) и воспользовавшись тождеством

$$\boldsymbol{A}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{H}=\operatorname{div}[\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{A}]+\boldsymbol{H}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{A}$$

будем иметь

$$W=\frac{1}{8\pi}\int\limits_V\boldsymbol{H}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{A}dV+\frac{1}{8\pi}\oint_{S'}[\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{A}]\cdot d\boldsymbol{S}$$

где S - поверхность, ограничивающая объем интегрирования V. В случае системы токов конечных размеров можно интегрировать по всему безграничному пространству. Интеграл по бесконечно удаленной поверхности обратится в нуль, и магнитная энергия будет выражена только через напряженность магнитного поля $\boldsymbol{H}$:

$$W=\int wdV,\quad\text{где}\quad w=\frac{1}{8\pi}H^2 \tag{2.76}$$

- объемная плотность магнитной энергии. Согласно последнему выражению, магнитная энергия, в отличие от (2.75), сосредоточена не только в областях, где текут токи, но разлита по всему пространству с объемной плотностью w. Аналогия с формулой (2.33) электростатики очевидна.

Пример 2.13. Пусть в пределах ограниченной в пространстве системыи постоянных токов с плотностью $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$ внешнее магнитное поле слабо неоднородно. Выразить потениильную функиию системы через ее магнитный момент.

Решение. Использовав формулы (2.65), (2.67), запишем искомую потенциальную функцию:

$$U=-\frac{J}{c}\oint\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{l}\to-\frac{1}{c}\int\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{R}+\boldsymbol{r})dV \tag{1}$$

где $\boldsymbol{r}$ отсчитывается от некоторой точки внутри системы токов (см. рис. 2.8). Представим векторный потенциал внешнего поля в виде

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{R}+\boldsymbol{r})\approx\boldsymbol{A}(\boldsymbol{R})+(\boldsymbol{r}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}(\boldsymbol{R})$$

где оператор ∇ действует на $\boldsymbol{R}$. После подстановки этого выражения в (1) первый интеграл обращается в нуль, что было получено при решении примера 2.11. Второй интеграл преобразуем с помощью тождества (3) из решения того же примера, заменив в указанном тождестве вектор r вектором ∇. Это дает:

$$\frac{1}{c}\int\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})(\boldsymbol{r}\cdot\nabla)dV=\frac{1}{2c}\int[\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})]dV\times\nabla=\boldsymbol{m}\times\nabla$$

Подставляя этот результат в (1), находим потенциальную функцию:

$$U=-[\boldsymbol{m}\times\nabla]\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{R})=-\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{H} \tag{2.77}$$

где $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{R})=\nabla\times\boldsymbol{A}(\boldsymbol{R})$ - напряженность внешнего магнитного поля.

Задачи

2.97. Найти силу $\boldsymbol{F}$ и вращательный момент $\boldsymbol{N}$, действующие на замкнутый тонкий проводник с током в однородном магнитном поле $\boldsymbol{H}$. Форма контура, образованного проводником, произвольна. Решить задачу двумя способами: прямым суммированием сил и моментов сил, приложенных к элементам тока, и с помощью потенциальной функции. Результат выразить через магнитный момент m.

2.98. Найти потенциальную функцию U двух малых токов, магнитные моменты которых $\boldsymbol{m}_1, \boldsymbol{m}_2$. Определить силу взаимодействия $\boldsymbol{F}$ этих токов и приложенные к ним вращательные моменты N. Рассмотреть частный случай $m_1 \| \boldsymbol{m}_2$.
2.99. Показать, что силы, действующие между малыми токами, стремятся установить магнитные моменты этих токов параллельно друг другу и линии, соединяющей центры.
2.100. Найти потенциальную функцию u_{21} (на единицу длины) двух параллельных бесконечно длинных прямых токов $\mathscr{J}_1, \mathscr{J}_2$ и силу f их взаимодействия на единицу длины.
2.101. Квадратная рамка с током $\mathscr{J}_2$ расположена так, что две ее стороны параллельны длинному прямому проводу с током $\mathscr{J}_1$ (рис. 2.11). Сторона квадрата a. Определить действующую на рамку силу $\boldsymbol{F}$ и вращательный момент N относительно оси OO'.
2.102. Рамка с током $\mathscr{J}_2$ состоит из души окружности с углом $2(\pi - \varphi)$ и соединяющей ее концы хорды (рис. 2.12). Радиус дуги a. Нормально к плоскости рамки через центр окружности проходит длинный прямой провод с током $\mathscr{J}_1$. Найти момент сил N, приложен-

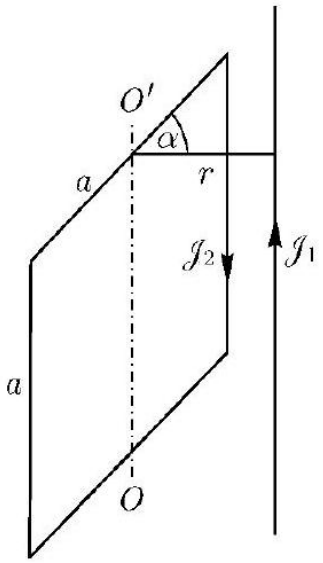


Рис. 2.11 ный к рамке.
2.103. Внутри тонкой проводящей цилиндрической оболочки радиуса b находится коаксиальный провод радиуса a. Найти самоиндукцию $\mathscr{L}$ на единицу длины.
2.104. Линия состоит из двух коаксиальных тонких цилиндрических оболочек с радиусами a и $b (a < b)$. Найти самоиндукцию $\mathscr{L}$ на единицу длины.

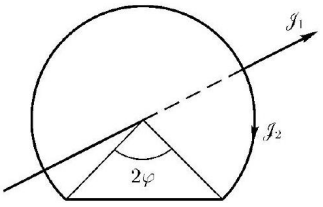


Рис. 2.12
2.105. Длинный прямой провод и кольцо радиуса a лежат в одной плоскости. Расстояние от центра кольца до провода b. Найти коэффициент взаимной индукции L_{12} и силу взаимодействия F, если сила тока в проводе $\mathscr{J}_1$, в кольце $\mathscr{J}_2$.
2.106*. Два тонких кольца с радиусами a и b расположены так, что их плоскости перпендикулярны отрезку прямой длиной l, соединяющему центры колец. Найти

коэффициент взаимной индукции L_{12}. Результат выразить через эллиптические интегралы. Рассмотреть, в частности, предельный случай $l \gg a, b$.

2.107. Найти силу взаимодействия F между двумя кольцевыми токами, рассмотренными в предыдущей задаче.

2.108. Найти самоиндукцию $\mathscr{L}$ единицы длины бесконечного цилиндрического соленоида с густой намоткой и с произвольной (не обязательной круговой) формой сечения. Площадь сечения S, число витков на единицу длины n.

2.109. Найти самоиндукцию L соленоида конечной длины h и радиуса $a (h \gg a)$, с точностью до членов a/h. Ток, текущий в обмотке, заменить эквивалентным поверхностным током.

2.110. Найти самоиндукцию L тороидального соленоида. Радиус тора b, число витков N, сечение тора - круг радиуса a. Определить самоиндукцию единицы длины соленоида в предельном случае $b \to \infty$ $\left(\frac{N}{b} = \text{const}\right)$. Решить ту же задачу для тороидального соленоида, сечение которого - прямоугольник со сторонами a и h.

2.111. Определить самоиндукцию $\mathscr{L}$ единицы длины двухпроводной линии. Линия состоит из двух параллельных прямых проводов, радиусы которых a и b, расстояние между осевыми линиями h. По проводам текут равные по величине, но противоположно направленные токи $\mathscr{J}$.

2.112*. Показать, что самоиндукцию тонкого замкнутого проводника с круговой формой сечения можно приближенно вычислить по формуле [9]

$$L = \frac{l}{2} + L'$$

где l - длина проводника, L' - коэффициент взаимной индукции двух линейных контуров. Один из контуров совпадает с осевой линией рассматриваемого квазилинейного проводника, другой - с линией, по которой пересекается с поверхностью проводника произвольная незамкнутая поверхность S, опирающаяся на его осевую линию (рис. 2.13).

2.113. Определить самоиндукцию L тонкого проволочного кольца радиуса b. Радиус провода $a \ll b$.

УказаниЕ. Использовать формулу, приведенную в условии предыдущей задачи.

2.114. Определить коэффициент взаимной индукции L_{12} двух параллельных отрезков длиной a, расположенных на расстоянии l друг от друга и совпадающих с двумя сторонами прямоугольника. [10]

2.115. Определить коэффициент взаимной индукции L_{12} двух одинаковых квадратов со стороной a, находящихся на расстоянии l друг от друга и совпадающих с двумя противоположными гранями прямоугольного параллелепипеда. Найти силу взаимодействия F между ними.

2.116. Вычислить самоиндук-

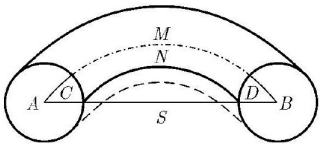


Рис. 2.13

цию L проволочного квадрата со стороной b. Радиус провода $a \ll b$.

УКАЗАНИЕ. Можно использовать результаты задач 2.112, 2.114.

Рекомендуемая литература: [Медведев (1977)], [Бредов и др. (1985)], [Смайт (1954)],

[09] Первый и второй члены в выражении L могут быть названы соответственно внутренней и внешней самоиндукцией, так как они определяют магнитную энергию, запасенную внутри проводника и вне его.

[Зоммерфельд (1958)], [Ландау и Лифшиц, Теория поля], [Френкель (1956)], [Джексон (1965)], [Джексон (1975)], [Алексеев (1977)], [Пановский и Филипс (1963)], [Сена (1988)], [Батыгин и Топтыгин (1970)], [Тамм (1976)], [Камке и Кремер (1980)], [Стрэттон (1948)], а также [Фейнман и др., в. 5 и задачи].

4.4.3 2.3. Maxwell's Equations. Free Electromagnetic Field

Закон электромагнитной индукции. В предыдущих разделах рассматривались закономерности, свойственные неподвижным электрическим зарядам и постоянным токам (за исключением закона сохранения электрического заряда, который был сформулирован для общего случая). Здесь будет рассмотрена общая картина нестационарных электромагнитных явлений и уравнения, описывающие эти явления. Их основная особенность

состоит в том, что переменные во времени электрическое и магнитное поля, в отличие от полей статических, не могут существовать независимо. Между ними возникает связь, приводящая к формированию единого электромагнитного поля, которое описывается двумя напряженностями, $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$ и $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)$. В наиболее наглядной форме эта связь была обнаружена в опытах английского физика М. Фарадея (1831 г.). Если замкнутый проводник поместить в переменное магнитное поле, то в проводнике возникает электрический ток, пропорциональный изменению магнитного потока через контур проводника. Ток возникает и при движении проводника в постоянном, но неоднородном магнитном поле, а также при вращении замкнутого проводника в таком поле. Во всех случаях необходимо, чтобы изменялся магнитный поток Ф через контур.

Возникновение тока означает, что в проводнике индуцируется электрическое поле, которое вызывает и поддерживает ток. Мерой эффекта может служить циркуляция напряженности электрического поля в замкнутом проводнике, которая называется электродвижущей силой (ЭДС) индукции:

$$\mathscr{E}_{ind} = \oint_l \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l} \tag{2.78}$$

Основываясь на объективном характере законов природы, мы должны предположить, что при изменении магнитного поля в данной области пространства в ней возникает индуцированное электрическое поле независимо от наличия проводника, в котором это поле может вызвать ток. Количественная связь между магнитным и электрическим полями, найденная Фарадеем, имеет вид

$$\mathscr{E}_{ind} = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt} \tag{2.79}$$

и называется законом электромагнитной индукции.

Получим из этого соотношения интегральную связь между напряженностями $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$. Предполагая, что произвольный контур l неподвижен и на него надета поверхность S, ограниченная этим контуром, будем иметь из (2.78), (2.79)

$$\oint_l \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l} = -\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int\limits_S \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{S} = -\frac{1}{c}\int\limits_S \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}\cdot d\boldsymbol{S} \tag{2.80}$$

[010] Искомый коэффициент взаимной индукции здесь не имеет непосредственного физического смысла, так как токи в этих отрезках не могут быть замкнутыми. Однако через него легко выразить индуктивность замкнутых контуров, имеющих параллельные прямолинейные участки (см. следующие две задачи).

Если интеграл в левой части преобразовать по теореме Стокса в интеграл по поверхности, то получим

$$\int\limits_S \left(\operatorname{rot} \boldsymbol{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} \right) \cdot d\boldsymbol{S} = 0$$

Наконец, учитывая произвольный выбор поверхности S, получаем дифференциальное уравнение

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} = 0 \tag{2.81}$$

Соотношения (2.80) и (2.81) представляют собой интегральную и дифференциальную формы закона электромагнитной индукции Фарадея.

Уравнения Максвелла. Дифференциальную форму закона электромагнитной индукции (2.81) можно рассматривать как обобщение электростатического уравнения (2.10), $\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = 0$, позволяющее описывать нестационарные явления. Нетрудно убедиться в том, что и уравнение магнитостатики (2.54) для $\operatorname{rot} \boldsymbol{H}$ неприменимо для описания явлений, изменяющихся со временем. Применяя операцию div к обеим частям этого уравнения, получим $\operatorname{div} \boldsymbol{j} = 0$, что не согласуется с уравнением непрерывности (2.47) в общем случае.

Обобщение уравнений электромагнитного поля, позволяющее на их основе описывать весьма широкий круг нестационарных электромагнитных явлений, произвел выдающийся английский физик Д.К.Максвелл в 1860 -х годах:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t} \tag{2.82}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}, t) = \frac{1}{c} \frac{\partial \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}, t) \tag{2.83}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = 4\pi \rho(\boldsymbol{r}, t) \tag{2.84}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}, t) = 0 \tag{2.85}$$

Уравнения для дивергенций (2.12) и (2.51) сохранили свой вид и при описании нестационарных явлений. В уравнение (2.54) Максвеллом был добавлен член с производной от напряженности электрического поля

$$\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{2.86}$$

который называется током смещения. Он входит в правую часть уравнения (2.83) в сумме с током j, создаваемым заряженными частицами (током проводимости), и вместе с ним участвует в создании магнитного поля. Именно наличие тока смещения позволяет обеспечить сохранение электрического заряда: применив div к обеим частям (2.83), и использовав (2.84), получим уравнение непрерывности (2.47). При заданных источниках поля ρ
и $\boldsymbol{j}$ уравнения Максвелла линейны, что приводит к принципу суперпозиции полей в вакууме. Электрическое и магнитное поля по отдельности могут существовать только если они постоянны. Эти случаи были рассмотрены в разделах 2.1 и 2.2 .

Пример 2.14. Показать, что уравнения Максвелла (2.84) и (2.85) можно рассматривать как универсальные (одинаковые для всех задач) начальные условия для уравнений соответственно (2.83) и (2.82).

Решение. Применив к обеим частям (2.83) операцию div и использовав уравнение непрерывности (2.47), получим

$$\frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{div} \boldsymbol{E} - 4\pi\rho) = 0$$

Отсюда следует, что разность $\operatorname{div} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) - 4\pi\rho(\boldsymbol{r}, t)$ не зависит от времени. Если она равна нулю при $t = t_0$, то $\operatorname{div} \boldsymbol{E} = 4\pi\rho$ во все моменты времени. Аналогичный вывод получается для $\operatorname{div} \boldsymbol{H} = 0$.

На поверхностях, на которых ρ и j имеют особенности, напряженности поля должны удовлетворят граничным условиям, вытекающим из интегральной формы уравнений Максвелла. Поскольку производные $\partial \boldsymbol{E}/\partial t$ и $\partial \boldsymbol{H}/\partial t$ ограничены (скорость изменения во времени любой величины конечна), то граничные условия в общем случае ничем не отличаются от полученных ранее условий (2.17), (2.18), (2.58) и имеют вид

$$\boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{E}_2 - \boldsymbol{E}_1) = 0 \tag{2.87}$$

$$\boldsymbol{n} \cdot (E_2 - E_1) = 4\pi\sigma \tag{2.88}$$

$$\boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{H}_2 - \boldsymbol{H}_1) = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{i} \tag{2.89}$$

$$\boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{H}_2 - \boldsymbol{H}_1) = 0 \tag{2.90}$$

Величины σ и $\boldsymbol{i}$ представляют собой поверхностные плотности электрического заряда и тока соответственно.

Возможны разные постановки электродинамических задач. Наиболее простым является случай, когда источники поля ρ и j можно считать заданными, т. е. распределения зарядов и токов в пространстве и во времени известны заранее. В этом случае задача сводится к интегрированию системы линейных уравнений (2.82) (2.85) с граничными условиями (2.87) (2.90). Но такая постановка задачи не всегда возможна, так как очень часто движение заряженных частиц заранее неизвестно.

В этом случае уравнения Максвелла нужно дополнить уравнениями движения частиц и решать их совместно. Поскольку координаты и скорости частиц будут в общем случае сложным образом зависеть от напряженностей
поля, система уравнений станет нелинейной. Принцип суперпозиции полей не будет выполняться. Такая постановка задачи, являясь более точной, оказывается и значительно более сложной.

Системы единиц измерения электрических и магнитных величин. До сих пор мы пользовались абсолютной гауссовой системой единиц. Она наилучшим образом подходит для изложения фундаментальных законов, так как в уравнения Максвелла явным образом входит одна из мировых констант - скорость света c в вакууме, она же - предельная скорость движения любых материальных тел, распространения сигналов и взаимодействий (см. главы 3, 4). Это облегчает установление связи между электродинамикой и теорией относительности, специальной и общей.

Наряду с гауссовой системой, в прикладной электродинамике часто используется так называемая международная система единиц (SI, или СИ). В указанной системе электромагнитное поле в вакууме описывается четырьмя векторами $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{D}, \boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{H}$. Уравнения Максвелла в этой системе единиц приобретают вид

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = -\frac{\partial \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t} \tag{2.91}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}, t) = \frac{\partial \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t} + \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}, t) \tag{2.92}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}, t) = \rho(\boldsymbol{r}, t) \tag{2.93}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t) = 0 \tag{2.94}$$

Векторы $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{D}$ и $\boldsymbol{B}, \boldsymbol{H}$ попарно связаны следующими соотношениями:

$$\boldsymbol{D} = \epsilon_0 \boldsymbol{E}, \quad \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H} \tag{2.95}$$

где

$$\epsilon_0 = \frac{10^7}{4\pi c^2} \text{ фарада / метр и} \quad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ генри / метр} \tag{2.96}$$

- электрическая и магнитная постоянные (подробнее см. в [Сивухин (1977)]. Эти возникающие в СИ величины по отдельности лишены какого-либо разумного физического смысла; лишь их комбинация $(\epsilon_0 \mu_0)^{-1/2} = c$ представляет собой скорость света в вакууме.

Простота записи уравнений Максвелла в СИ обманчива. Кроме уже указанных недостатков (четыре вектора вместо двух, использование «электрической и магнитной проницаемостей вакуума» - реликта эпохи «светоносного эфира») имеются и другие: разные размерности всех четырех
векторов, описывающих один и тот же объект - электромагнитное поле; введение кроме трех основных величин (длина, время, масса), имеющихся в гауссовой системе, еще четвертой величины с независимой размерностью (сила тока, измеряемая в амперах). Последняя единица выбрана из чисто практических соображений.

На основе приведенных выше соображений мы будем пользоваться и в дальнейшем гауссовой системой единиц. Запись основных формул электродинамики и перевод единиц измерения из одной системы в другую можно без затруднений произвести с помощью таблиц, приведенных в Дополнении 1 и частично заимствованных из книги [Сивухин (1977), & 85].

Анализ системы уравнений Максвелла. В следующих ниже примерах и задачах мы рассмотрим основные свойства системы уравнений Максвелла и вытекающие из них выводы об особенностях электромагнитных явлений.

Пример 2.15. С помощью уравнений Максвелла (2.82)-(2.85) обобщить полученные ранее выражения (2.34), (2.76) для плотностей энергии электрического и магнитного полей на случай переменного электромагнитного поля. Для этого использовать принцип сохранения полной энергии любой изолированной физической системы и учесть, что величина $\rho \boldsymbol{v} \cdot \mathscr{F}_L = \boldsymbol{j} \cdot \mathscr{F}_L = \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{E}$, где $\mathscr{F}_L$ - сила Лоренца (2.43), представляет собой работу электромагнитного поля над заряжснными частицами, движуиимися со скоростью $\boldsymbol{v}$ (в единице объема за единицу времени). Найти выражение для плотности потока энергии электромагнитного поля и записать баланс энергии поля в форме уравнения непрерывности с источником.

Решение. С помощью уравнений (2.82), (2.83) составим билинейное выражение

$$\boldsymbol{H} \cdot \operatorname{rot} \boldsymbol{E} - \boldsymbol{E} \cdot \operatorname{rot} \boldsymbol{H} = -\frac{1}{c} \left(\boldsymbol{H} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} + \boldsymbol{E} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \right) - \frac{4\pi}{c} \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{E}.$$

Пользуясь тождеством (1.87) и поделив обе части последнего равенства на $4\pi/c$, запишем его в виде уравнения непрерывности с источником:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \operatorname{div} \gamma = -\boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{E} \tag{2.97}$$

где

$$w = \frac{1}{8\pi} \left(E^2 + H^2 \right), \quad \gamma = \frac{c}{4\pi} \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}$$

Для физической интерпретации этого соотношения придадим ему интегральную форму, проинтегрировав обе части по объему V, ограниченному
поверхностью S:

$$-\frac{d}{dt}\int\limits_V wdV = \oint\limits_S \gamma \cdot d\boldsymbol{S} + \int\limits_V j \cdot \boldsymbol{E}dV \tag{2.99}$$

Последний интеграл в правой части представляет собой работу, производимую электромагнитным полем над частицами (магнитный вектор работы не производит). По закону сохранения энергии, эта работа производится за счет убыли энергии поля

$$W = \int\limits_V \frac{1}{8\pi}\left(E^2 + H^2\right) dV \tag{2.100}$$

в рассматриваемом объеме. Таким образом, величина w, определяемая выражением (2.98), представляет плотность энергии электромагнитного поля в самом общем случае. При $j = 0$ внутри объема убыль энергии поля может происходить только в результате ее вытекания из объема через его поверхность. Поэтому вектор γ (вектор Пойнтинга) [11] следует отождествить [12] с плотностью потока электромагнитной энергии.

Пример 2.16. Доказать теорему единственности решения уравнений Максвелла: пусть источники поля (функиии $\rho(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{t})$ и $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}, t)$) заданы. Пусть такжсе заданы начальные условия, т. е. значения $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, 0)$ и $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}, 0)$ внутри некоторого объема V, а на его поверхности S заданы граничные условия компоненты одного из векторов ($\boldsymbol{E}_\tau$ или $\boldsymbol{H}_\tau$) во все моменть времени. В этих условиях решение уравнений Максвелла внутри указанного объема единственно.

Решение. Доказательство проводим от противного, предполагая наличие двух разных решений $\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{H}_1$ и $\boldsymbol{E}_2, \boldsymbol{H}_2$. Составляем разности $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_1 - \boldsymbol{E}_2, \boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_1 - \boldsymbol{H}_2$. Они удовлетворяют уравнениям Максвелла (2.82)-(2.85), в которых $\rho = \boldsymbol{j} = 0$, а также начальным условиям $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{H} = 0$ при $t = 0$ внутри объема V и граничным условиям $\boldsymbol{E}_\tau = 0$ или $\boldsymbol{H}_\tau = 0$ на поверхности S. Используем уравнение (2.99), в котором следует положить $j = 0$:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_V \frac{1}{8\pi}\left(E^2 + H^2\right) dV = -\frac{c}{4\pi}\oint\limits_S [\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}]_n dS$$

Нормальная составляющая векторного произведения $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}$ выражается через касательные компоненты $\boldsymbol{E}_\tau, \boldsymbol{H}_\tau$ на поверхности S и обращается в нуль в силу граничных условий. Поэтому из предыдущего равенства получаем

$$\int\limits_V \left(E^2 + H^2\right) dV = \text{ const.}$$

Но поскольку $E = H = 0$ при $t = 0$, то постоянная в правой части равенства тоже равна нулю. Это возможно лишь если $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{H} = 0$ тождественно во всем объеме. Теорема доказана.

Пример 2.17. Обобиить формулы (2.8), (2.49), связывающие напряженности поля со скалярным и векторным потенциалами $\varphi, \boldsymbol{A}$, на общий случай электромагнитного поля,

[011] ПойнтингД. Г. - английский физик, ввел понятие о потоке электромагнитной энергии в 1884 г. Впервые идеи о движении энергии и о потоке энергии развил в физике сплошных сред русский физик Н. А. Умов в 1874 г. Поэтому вектор γ в русскоязычной литературе иногда называют вектором Умова - Пойнтинга.

[12] Вопрос об однозначности определения плотности потока энергии обсуждается в разделе 4.3. См. также задачу 2.117 .

зависящего от времени. Указать семейство потенциалов, описывающих заданное электромагнитное поле $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}$.

Решение. Из уравнения Максвелла (2.85) следует, что вектор $\boldsymbol{H}$ является соленоидальным в самом общем случае и, следовательно, его представление (2.49) через векторный потенциал сохраняется и для нестационарного поля:

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}, t) = \nabla \times \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t) \tag{2.101}$$

Но формула (2.8) для переменного поля теряет силу, поскольку $\operatorname{rot} \boldsymbol{E} \neq 0$ в общем случае. Обобщение (2.8) мы получим, использовав в (2.82) равенство (2.101). Меняя последовательность дифференциальных операций, будем иметь $\operatorname{rot}(\boldsymbol{E} + \partial \boldsymbol{A}/c\partial t) = 0$, откуда следует, что безвихревой вектор, стоящий в скобках последнего выражения, можно выразить в виде градиента скалярного потенциала $-\nabla\varphi(\boldsymbol{r}, t)$. Это дает

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = -\nabla\varphi(\boldsymbol{r}, t) - \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t} \tag{2.102}$$

Заданным напряженностям поля соответствует обширное семейство возможных потенциалов. Обозначив

$$\boldsymbol{A}'(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t) + \nabla\chi(\boldsymbol{r}, t) \tag{2.103}$$

где $\chi(\boldsymbol{r}, t)$ - любая дифференцируемая скалярная функция, получим $\boldsymbol{H}' = \nabla \times \boldsymbol{A}' = \nabla \times \boldsymbol{A} = \boldsymbol{H}$. Это означает, что преобразование векторного потенциала (2.103) не изменяет магнитного вектора. Чтобы электрический вектор также не изменился, необходимо и достаточно одновременно преобразовать скалярный потенциал:

$$\varphi'(\boldsymbol{r}, t) = \varphi(\boldsymbol{r}, t) - \frac{1}{c}\frac{\partial \chi(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t} \tag{2.104}$$

Преобразование потенциалов (2.103), (2.104) называется калибровочным (градиентным). Таким образом, заданному электромагнитному полю $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}$ отвечает множество электромагнитных потенциалов $\boldsymbol{A}, \varphi$, связанных калибровочным преобразованием, которые можно получить со всевозможными функциями $\chi(r, t)$.

Пример 2.18. Вследствие неоднозначности выбора электромагнитных потениалов $\boldsymbol{A}, \varphi$ на них могут быть наложены дополнительные условия. Наиболее распространены следующие условия калибровки потенчиалов:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \qquad \text{(лоренцевская калибровка);} \tag{2.105}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} = 0 \qquad \text{(кулоновская калибровка).} \tag{2.106}$$

Получить из уравнений Максвелла уравнения для электромагнитных потенциалов для случаев калибровок Лорениа и Кулона. В какой мере условия (2.105), (2.106) ограничивают возможность калибровочного преобразования потенциалов?

Решение. Подставив в уравнения (2.83), (2.84) напряженности поля (2.101), (2.102), выраженные через потенциалы, получим систему уравнений

$$\Delta \boldsymbol{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j} - \nabla\left(\nabla \cdot \boldsymbol{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)$$

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\nabla \cdot \boldsymbol{A}$$

Использовав лоренцевскую калибровку (2.105), найдем

$$\Delta \boldsymbol{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j} \tag{2.107}$$

$$\Delta \varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -4\pi\rho \tag{2.108}$$

Оба потенциала удовлетворяют неоднородным уравнениям Даламбера. При использовании кулоновской калибровки

$$\Delta \boldsymbol{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}j - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\nabla\varphi \tag{2.109}$$

$$\Delta \varphi = -4\pi\rho \tag{2.110}$$

Потенциалы $\boldsymbol{A}', \varphi'$ будут удовлетворять условию Лоренца (2.105) наряду с A, φ, если функция χ является решением однородного уравнения Даламбера:

$$\Delta \chi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = 0 \tag{2.111}$$

При кулоновской калибровке функция χ должна удовлетворять уравнению Лапласа. Таким образом, условия калибровки лишь ограничивают класс функций, участвующих в калибровочном преобразовании. В статических полях условия Лоренца и Кулона совпадают.

Задачи

2.117. Единственным ли образом определяется плотность потока энергии электромагнитного поля из уравнения (2.97)? Указать другие выражения, отличные от (2.98), но совместимые с (2.97), (2.99).

2.118. Шар радиуса a с зарядом e, равномерно распределенным по объему, вращается с переменной угловой скоростью $\boldsymbol{\Omega}(t)$ вокруг одного из своих диаметров. Записать плотности $\rho(\boldsymbol{r}, t), \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}, t)$, проверить, удовлетворяется ли уравнение непрерывности (2.47).

2.119. Сделать то же самое для шара, заряженного равномерно по поверхности.

2.120. Пусть электромагнитное поле разложено на гармонические составляющие (т. е. в интеграл Фурье (1.250) по времени): и аналогично вектор $\boldsymbol{H}$. Записать уравнения Максвелла для гармоник Фурье. Указать связь между гармониками Фурье $\boldsymbol{E}_\omega$ и $\boldsymbol{E}_{-\omega}$, а также между гармониками напряженностей поля и электромагнитных потенциалов.

2.121. Пусть через единичную площадку проходит электромагнитное возмущение конечной длительности. Выразить спектральную плотность потока энергии электромагнитного поля $\boldsymbol{\Gamma}_\omega$ через гармоники Фурье $\boldsymbol{E}_\omega$ и $\boldsymbol{H}_\omega$. Величина $\boldsymbol{\Gamma}_\omega$ нормирована условием

$$\int_0^\infty \boldsymbol{\Gamma}_\omega d\omega = \boldsymbol{\Gamma} = \frac{c}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{E}(t) \times \boldsymbol{H}(t) dt$$

где Г представляет собой полную плотность потока энергии через единичную площадку за все время прохождения возмущения.

УказаниЕ. При интегрировании по времени использовать представление (1.219) дельта-функции.

2.122. Электромагнитное поле разложено на плоские волны, т. е. в интеграл Фурье (1.252) по трем координатам:

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int \boldsymbol{E}_{\mathbf{k}}(t)e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}_d}d^3k,\quad \boldsymbol{E}_{\mathbf{k}}(t)=\int \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}_d}d^3r \tag{2.112}$$

Здесь интегрирование производится по всему безграничному пространству координат и по всему пространству волновых векторов k. Записать уравнения Максвелла для пространственных гармоник Фурье.

2.123. Показать, что компоненты Фурье разложения безвихревого вектора на плоские волны параллельны $\boldsymbol{k}$ (продольны), а компоненты Фурье соленоидального вектора - перпендикулярны k (поперечны).

2.124. Разложить по плоским волнам потенциал $\varphi(r)$ и напряженность поля $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ неподвижного точечного заряда e.

2.125. Электромагнитное поле разложено на плоские монохроматические волны, т. е. в интеграл Фурье по трем координатам и по времени:

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int \boldsymbol{E}_{\boldsymbol{k}\omega}e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}d^3kd\omega \tag{2.113}$$

$$\boldsymbol{E}_{k\omega}=\int \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)e^{-i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}d^3rdt$$

Записать уравнения Максвелла для гармоник Фурье.

2.126. Записать уравнения Даламбера и условие Лоренца для компонент Фурье потенциалов $\varphi(\boldsymbol{r},t),\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)$. Рассмотреть все три варианта разложений Фурье (2.112), (2.113) и (2.114).

Свободное электромагнитное поле. Важнейшим свойством уравнений Максвелла является возможность существования электромагнитного поля в отсутствие источников, т.е. при $\rho=j=0$. Система уравнений в этом случае приобретает вид

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=-\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} \tag{2.114}$$

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} \tag{2.115}$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=0 \tag{2.116}$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)=0 \tag{2.117}$$

Она имеет разнообразные ненулевые решения волнового типа, некоторые из которых мы рассмотрим ниже. Именно это свойство уравнений позволило Максвеллу предсказать новый важный физический эффект: возможность существования и распространения со скоростью света электромагнитных волн в свободном пространстве. Это привело к окончательному установлению электромагнитной природы света, позволило раскрыть в дальнейшем связь между электромагнитными и оптическими явлениями. Теоретические открытия Максвелла и его последователей стимулировали экспериментальное изучение электромагнитных волн. Наибольшее значение в этом плане имели исследования немецкого физика Г. Герца, который в 1888 г. экспериментально доказал существование электромагнитных волн, предсказанных теорией Максвелла, измерил их скорость и изучил разнообразные волновые явления (интерференцию, дифракцию, поляризацию). Основываясь на работах Герца, русский физик А. С. Попов и итальянский физик, инженер и предприниматель Г. Маркони в 1890-х годах осуществили первые передачи радиосигналов, положившие начало современным радио, телевидению и мобильной телефонии. За свои открытия Маркони получил Нобелевскую премию в 1909 г.

Пример 2.19. Из системыя (2.115)-(2.118) вывести уравнения II порядка, которым удовлетворяют векторы $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ по отдельности.

Решение. Применяем к (2.115) операцию rot и используем уравнение (2.116), а также тождество (1.83) и уравнение (2.117). Получаем волновое уравнение, или однородное уравнение Даламбера:

$$\Delta \boldsymbol{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} = 0 \tag{2.118}$$

Аналогичным путем получаем такое же уравнение для магнитного поля:

$$\Delta \boldsymbol{H} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{H}}{\partial t^2} = 0 \tag{2.119}$$

Задачи

2.127. Путем перехода к переменным $\xi = x - ct, \eta = x + ct$ показать, что волновое уравнение (2.119) имеет одномерное решение вида

$$\boldsymbol{E}(x,t) = \boldsymbol{E}_1 F(x-ct) + \boldsymbol{E}_2 \Phi(x+ct)$$

где $\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{E}_2$ - постоянные векторы, F, Φ - произвольные дважды дифференцируемые функции одного аргумента. Каков физический смысл этого решения? Как его записать в такой форме, чтобы поверхность постоянной фазы (плоскость, на которой $\boldsymbol{E}$ сохраняет постоянное значение) была перпендикулярна заданному единичному вектору n?

2.128. Пользуясь уравнениями Максвелла (2.115)-(2.118), показать, что плоские волны, рассмотренные в предыдущей задаче, удовлетворяют условиям поперечности

$$\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{E} = 0, \quad \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{H} = 0 \tag{2.120}$$

Показать также, что в плоских волнах, распространяющихся в одну сторону, электрический и магнитный векторы взаимно перпендикулярны и связаны соотношениями

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{E}, \quad \boldsymbol{E} = \boldsymbol{H} \times \boldsymbol{n}, \quad E = H. \tag{2.121}$$

Найти связь между плотностью электромагнитной энергии и плотностью потока энергии (вектором Пойнтинга) в таких волнах.

2.129* . Плоскую монохроматическую [13] волну удобно описывать комплексными функциями

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t)}, \quad \boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_0 e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t)} \tag{2.122}$$

понимая под физическими значениями полей действительные части этих функций. Здесь $\boldsymbol{E}_0, \boldsymbol{H}_0$ - постоянные векторы (комплексные амплитуды), величины ω (круговая частота) и k (волновой вектор) - действительные постоянные (при распространении волн в вакууме).

а) Показать, что частота и волновой вектор плоской монохроматической волны в вакууме связаны дисперсионной зависимостью [14] $\omega^2 = c^2 k^2$, а амплитуды удовлетворяют условиям $\boldsymbol{H}_0 = \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{E}_0, \boldsymbol{E}_0 = -\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{H}_0$, где $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{k}/k$ - единичный вектор, определяющий направление перемещения плоскости постоянной фазы $\varphi(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} - \omega t = \text{const}$.

б) Показать, что расстояние между соседними максимумами электрического или магнитного полей в направлении n равно длине волны $\lambda = 2\pi/k$.

в) Показать, что среднее по периоду $T = 2\pi/\omega$ колебаний значение энергетических

величин, квадратичных по монохроматическим компонентам полей вида $A = A_0(\boldsymbol{r})e^{-i\omega t}, B = B_0(\boldsymbol{r})e^{-i\omega t}$ можно вычислять, пользуясь формулами

$$\overline{A^2} = \overline{[\mathrm{Re}(A)]^2} = \frac{1}{2}|A|^2, \quad \overline{AB} = \overline{\mathrm{Re}(A)\,\mathrm{Re}(B)} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\,(AB^*) \tag{2.123}$$

г) Показать, что усредненные по периоду плотность энергии в плоской монохроматической волне и вектор Пойнтинга связаны соотношением $\gamma = cwn, w = |E_0|^2/8\pi$.

2.130 *. В общем случае из комплексной амплитуды $\boldsymbol{E}_0 = \boldsymbol{E}_{01} + i\boldsymbol{E}_{02}$, где $\boldsymbol{E}_{01}, \boldsymbol{E}_{02}$ - действительные векторы, можно выделить два взаимно перпендикулярных действительных вектора $\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2$, таких, что

$$

$$\boldsymbol{E}_0 = (\mathscr{E}_1 + i\mathscr{E}_2)\,e^{i\alpha}, \quad \mathscr{E}_1 \cdot \mathscr{E}_2 = 0 \tag{2.124}$$

$$

а $\alpha(-\pi < \alpha \leqslant \pi)$ - некоторая начальная фаза.

а) Выразить начальную фазу через первоначально заданные векторы $\boldsymbol{E}_{01}, \boldsymbol{E}_{02}$.

б) Показать, что наблюдаемое поле (действительная часть комплексного вектора $\boldsymbol{E}$) записывается в виде

$$\boldsymbol{E} = \mathscr{E}_1 \cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t + \alpha) - \mathscr{E}_2 \sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t + \alpha) \tag{2.125}$$

в) Показать, что конец вектора $\boldsymbol{E}$ описывает в данной точке пространства либо эллипс (эллиптическая поляризация), либо окружность (круговая, или циркулярная, поляризация), либо колеблется вдоль некоторой прямой (линейная поляризация). В случае эллиптической или круговой поляризаций возможны два противоположных направления вращения, а при линейной поляризации - колебания в двух взаимно перпендикулярных направлениях. Поэтому при заданном направлении распространения волны имеется два различных независимых типа поляризации.

г) Как определить направление вращения вектора $\boldsymbol{E}$ относительно направления распространения волны?

2.131. Две плоские монохроматические линейно поляризованные волны одной частицы распространяются вдоль оси Oz. Первая волна поляризована вдоль Ox и имеет амплитуду a, вторая поляризована вдоль Oy, имеет амплитуду b и опережает первую по фазе на χ. Исследовать поляризацию результирующей волны в зависимости от a/b.

2.132. Исследовать в предыдущей задаче зависимость поляризации от сдвига фаз χ для случая $a = b$.

2.133. Циркулярно поляризованные волны распространяются вдоль оси Oz. Записать комплексные орты $e^{(\sigma)}, \sigma = 1, 2$, соответствующие волнам с правой и левой спиральностями и нормированные условием $\boldsymbol{e}^{(\sigma)} \cdot e^{(\sigma')*} = \delta_{\sigma\sigma'}$.

2.134. Две циркулярно поляризованные волны $E_{1,2} = E_0\boldsymbol{e}^{(1,2)} \exp[i(\boldsymbol{k}.\,\cdot\boldsymbol{r} - \omega t \pm \alpha)\,]$ имеют разные Начальные фазы. Орты поляризации $e^{(1,2)}$
определены в предыдущей задаче. Найти амплитуду результирующей волны и определить ее поляризацию.

Частичная поляризаия волн. Если волны, распространяющиеся в заданном направлении $\boldsymbol{n}$, генерируются многими независимыми источниками, то их начальные фазы как правило случайны, и даже при высокой степени монохроматичности (малый

[013] «Одноцветную» волну, колеблющуюся с одной единственной частотой.

[14] В общем стучае такой связи между частотами и волновыми векторами гармоник Фурье (2.114) не существует.

разброс частот $\Delta\omega$) результирующее поле $\boldsymbol{E}(t)$ будет случайной функцией времени. Такое поле будет лишь частично поляризованным. Его принято характеризовать тензором поляризации

$$J_{\alpha\beta} = \overline{E_\alpha(t)E^*_\beta(t)}, \quad \alpha,\beta = 1,2 \tag{2.126}$$

где значения компонент поля берутся в одной точке, а усреднение производится по времени наблюдения достаточной длительности. При стационарных источниках усредненные таким образом произведения компонент поля не будут зависеть от времени. Будем называть сумму диагональных компонент поляризационного тензора

$$J_{\alpha\alpha} = I \tag{2.127}$$

интенсивностью поля, поскольку эта величина характеризует плотность его энергии. Заметим, что по определению (2.127) $J_{\alpha\beta} = J^*_{\beta\alpha}$, т. е. поляризационный тензор эрмитов (см. раздел 1.1).

Пример 2.20. Пользуясь соображениями симметрии, записать тензор поляризаии полностью неполяризованных волн. Записать также все возможные тензоры поляризачии для полностью поляризованных монохроматических волн.

Решение. В отсутствие поляризации все направления электрического и магнитного векторов в плоскости, перпендикулярной направлению распространения, равновероятны. Этому случаю соответствует изотропный тензор

$$J_{\alpha\beta} = \frac{I}{2}\delta_{\alpha\beta} \tag{2.128}$$

Полностью поляризованной монохроматической волне с амплитудой (2.125) в осях, направленных вдоль действительных векторов $\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2$, отвечает тензор

$$J_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \mathscr{E}_1^2 & \pm i\mathscr{E}_1\mathscr{E}_2 \\ \mp i\mathscr{E}_1\mathscr{E}_2 & \mathscr{E}_2^2 \end{pmatrix} \tag{2.129}$$

Такой тензор при произвольных $\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2$ и двух знаках недиагональных компонент описывает волны с эллиптической поляризацией и двумя возможными направлениями вращения. Циркулярно поляризованным волнам отвечают тензоры

$$J_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}I\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}, \quad J_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}I\begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix} \tag{2.130}$$

описывающие волны разной спиральности. Наконец, двум направлениям линейной поляризации соответствуют тензоры

$$J_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}I\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}I\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.131}$$

Обратим внимание на характерную особенность этих тензоров: их определители $|J_{\alpha\beta}| = J_{11}J_{22} - |J_{12}|^2$ обращаются в нуль для поляризованных волн. При частичной же поляризации $|J_{\alpha\beta}| > 0$ и достигает наибольшего значения $I^2/4$ для полностью неполяризованных волн.

Пример 2.21. Представить тензор $J_{\alpha\beta}$ частично поляризованных волн в виде суммы двух тензоров,

$$J_{\alpha\beta} = J^{(n)}_{\alpha\beta} + J^{(p)}_{\alpha\beta} \tag{1}$$

из которых

$$J^{(n)}_{\alpha\beta} = \frac{I_n}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

описывает полностью неполяризованнуо, а

$$J^{(p)}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} B & D \\ D^* & C \end{pmatrix} \tag{3}$$

- полностью поляризованную волну: Из условий

$$B \geqslant 0, \quad C \geqslant 0, \quad BC - |D|^2 = 0 \tag{4}$$

найти интенсивности I_n, I_p полностью неполяризованной и полностью поляризованной волн, а также степень поляризаии волны

$$P = \frac{I_p}{I_p + I_n} \tag{2.132}$$

и степень ее деполяризаиии

$$\rho = 1 - P \tag{2.133}$$

Решение. Из (1), (2), (3) находим

$$B = 2J_{11} - I_n, \quad C = 2J_{22} - I_n, \quad D = 2J_{12}, \quad D^* = 2J_{21}$$

Из равенства нулю определителя тензора (3) получаем

$$I_n = J_{11} + J_{22} \pm \sqrt{(J_{11} - J_{22})^2 + 4\,|J_{12}|^2} \tag{2.134}$$

Решение со знаком минус перед корнем дает

$$B = J_{11} - J_{22} + \sqrt{(J_{11} - J_{22})^2 + 4\,|J_{12}|^2} \geqslant 0$$
$$C = J_{22} - J_{11} + \sqrt{(J_{11} - J_{22})^2 + 4\,|J_{12}|^2} \geqslant 0$$

тогда как решение со знаком плюс дает $B \leqslant 0, C \leqslant 0$ и должно быть отброшено. Интенсивность полностью поляризованной волны

$$I_p = \frac{1}{2}(B + C) = \sqrt{(J_{11} - J_{22})^2 + 4\,|J_{12}|^2} = \sqrt{(J_{11} + J_{22})^2 - 4\,|J_{\alpha\beta}|} \tag{2.135}$$

Степень поляризации

$$P = \frac{I_p}{I_p + I_n} = \sqrt{1 - \frac{4\,|J_{\alpha\beta}|}{(J_{11} + J_{22})^2}} \tag{2.136}$$

Свертка $J_{\alpha\alpha} = J_{11} + J_{22}$ и определитель $|J_{\alpha\beta}|$ - величины, инвариантные относительно поворотов (см. (1.263) и (1.265)), поэтому разделение полной интенсивности на I_n и I_p не зависит от выбора осей в плоскости, перпендикулярной направлению распространения волн.

Задачи

2.135*. Представить тензор поляризации в виде разложения по его собственным векторам (см. пример 1.1). Как связано такое разложение с представлением этого тензора, рассмотренным в примере 2.21?

2.136. Плоская монохроматическая волна с интенсивностью I распространяется вдоль оси Oz и поляризована по эллипсу с полуосями a, b. Большая полуось a составляет угол ϑ с осью Ox. Составить тензор поляризации и рассмотреть возможные частные случаи.

2.137. Электромагнитная волна является суперпозицией двух некогерентных «почти монохроматических» волн равной интенсивности I
с приблизительно одинаковыми частотами и волновыми векторами. Обе волны поляризованы линейно, направления поляризации задаются в плоскости, перпендикулярной их волновому вектору, ортами $e^{(1)}(1,0)$ и $e^{(2)}(\cos\vartheta, \sin\vartheta)$. Построить тензор поляризации I_{ik} результирующей частично поляризованной волны и определить степень ее поляризации. Выяснить характер поляризации этой волны (см. задачу 2.136).

2.138. Решить предыдущую задачу для случая, когда интенсивности волн различны ($I_1 \neq I_2$), а направления поляризаций составляют угол $\pi/4$.

2.139. Тензор поляризации электромагнитной волны, который является эрмитовым, может быть представлен в виде

$$I_{ik} = \frac{1}{2} I \left(\delta_{ik} + \sum_{l=1}^{3} \xi_l \hat{\tau}_{ik}^{(l)} biggr \right) = \frac{1}{2} I \begin{pmatrix} 1+\xi_3 & \xi_1 - i\xi_2 \\ \xi_1 + i\xi_2 & 1-\xi_3 \end{pmatrix}$$

где I - полная интенсивность волны, ξ_i - вещественные параметры, удовлетворяющие условию $\xi^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 \leqslant 1$ (параметры Стокса), $\widehat{\tau}^{(l)}$ - матрицы:

$$\widehat{\tau}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \widehat{\tau}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \widehat{\tau}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Выяснить физический смысл параметров ξ_i. Для этого выразить степень деполяризации ρ волны через ξ_i и определить поляризации двух основных волн, на которые распадается частично поляризованная волна, в следующих трех случаях:

а) $\xi_1 \neq 0, \xi_2 = \xi_3 = 0$

б) $\xi_2 \neq 0, \xi_1 = \xi_3 = 0$

в) $\xi_3 \neq 0, \xi_1 = \xi_2 = 0$

2.140. Назовем волновым пакетом суперпозицию плоских монохроматических волн в свободном пространстве

$$\Psi(\boldsymbol{r}, t) = \int \psi(\boldsymbol{k}) \exp[i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t)] d^3k$$

где $\Psi(\boldsymbol{r}, t)$ - любая декартова компонента векторов $\boldsymbol{E}$ или $\boldsymbol{H}$. а) Найти условие, при котором Ψ является решением однородного волнового уравнения Даламбера независимо от вида амплитудной функции $\psi(\boldsymbol{k})$. б) Построить одномерный волновой пакет для момента времени $t = 0$. В качестве амплитудной функции взять распределение Гаусса $\psi(k) = a_0 \exp\left[-(k-k_0)^2/\Delta k^2\right]$, $k = k_x$, где $a_0, k_0, \Delta k$ - постоянные. Найти связь между шириной Δx волнового пакета и его же шириной Δk в пространстве волновых чисел.

2.141. Одномерный волновой пакет (см. предыдущую задачу) $\Psi(x)$ имеет в момент $t = 0$ форму

1. $\Psi(x) = A_0 e^{-\alpha|x|/2}$; 2. $\Psi(x) = \begin{cases} A_0 & \text{при } |x| < a, \\ 0 & \text{при } |x| > a, \end{cases}$

где A_0, a - постоянные. Вычислить произведение $\overline{\Delta x^2} \cdot \overline{\Delta k^2}$, где $\overline{\Delta x^2} = \overline{x^2} - \bar{x}^2$ и аналогично для k. Усреднения следует производить по распределению интенсивности волны в x - и k - пространствах, т. е. по формулам

$$\bar{x} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x|\Psi(x)|^2 dx \left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x)|^2 dx\right]^{-1}$$
$$\bar{k} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} k|\psi(k)|^2 dk \left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\psi(k)|^2 dk\right]^{-1}$$

и т. д. □

2.142. Волновой пакет Ψ образован суперпозицией плоских монохроматических волн с разными частотами в свободном пространстве. Амплитудная функция имеет вид распределения Гаусса $\psi(\omega) = a_0 \exp[-(\omega - -\omega_0)^2/\Delta\omega^2]$, где $a_0, \omega_0, \Delta\omega$ - постоянные. Найти зависимость амплитуды пакета от времени в точке $x = 0$. Получить связь между длительностью волнового импульса Δt и интервалом частот $\Delta\omega$.

2.143. Волновой пакет $\Psi(x,t)$ образован суперпозицией плоских монохроматических волн с разными частотами в свободном пространстве. Форма пакета при $x = 0, \Psi(0,t) = u(t)$, известна. Найти амплитудную функцию $\psi(k)$.

2.144. Некоторый объект, освещаемый светом с длиной волны λ, рассматривается в микроскоп. Найти минимальный возможный размер объекта $\Delta x_{\min}$, допускаемый условием $\Delta x \Delta k \geqslant 1$.

2.145. Положение некоторого объекта определяется с помощью радиолокации. С какой предельной точностью можно провести это измерение, если расстояние до объекта l, длина волны λ?

Аналитический сигнал. Разложение Фурье типа (2.112) действительной функции $U'(t)$ можно записать в виде интеграла только по положительным частотам:

$$U'(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} u(\omega)e^{-i\omega t}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{\infty} a(\omega)\cos[\varphi(\omega) - \omega t]d\omega \qquad (2.137)$$

где $u(\omega) = a(\omega)\exp[i\varphi(\omega)]$, причем в силу условия $u(-\omega) = u^*(\omega), a(\omega)$ и $\varphi(\omega)$ - действительные четные функции частоты. Обобщим последний интеграл в (2.138) и будем рассматривать комплексную функцию

$$U(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{\infty} a(\omega)\exp[i(\varphi(\omega) - \omega t)]d\omega = U'(t) + iU''(t) \qquad (2.138)$$

Мнимая часть

$$U''(t) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{\infty} a(\omega)\sin[i(\varphi(\omega) - i\omega t)]d\omega \qquad (2.139)$$

однозначно определяется действительной частью $U'(t)$, так как она получается из последней путем замены фазы $\varphi(\omega)$ каждой фурье-гармоники на $\varphi(\omega) - \pi/2$.

Величина $U(t)$ называется аналитическим сигналом. Она часто используется в теории волновых полей, теории колебаний, радиотехнике и т. д. Характерной особенностью функции $U(t)$ является то, что она содержит гармоники Фурье только с положительными частотами. Поэтому, если $U(t)$ ограничена при всех действительных t (т. е. интеграл по

ω в (2.139) сходится), то она останется ограниченной и при комплексных значениях $t = t' + it''$, лежащих в нижней полуплоскости ($t'' < 0$). Это объясняется тем, что при замене в (2.139) t на $t' + it''$ под интегралом возникает дополнительный множитель $\exp(\omega t'')$, который при $t'' < 0$ только усилит сходимость интеграла по ω. Следовательно, функция $U(t)$, рассматриваемая при комплексных t, аналитична (не имеет особых точек) в нижней полуплоскости.

Задачи

2.146*. Пользуясь аналитичностью функции $U(t)$ в нижней полуплоскости комплексного t, найти интегральную связь [15] между ее действительной и мнимой частями:

$$U'(t) = -\frac{1}{\pi}\mathscr{P}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{U''(t')}{t'-t}dt', \quad U''(t) = \frac{1}{\pi}\mathscr{P}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{U'(t')}{t'-t}dt' \tag{2.140}$$

Здесь символ $\mathscr{P}$ обозначает главное значение интеграла (без этого указания вычислить интегралы невозможно ввиду наличия полюсов в точке $t' = t$).

2.147. Выразить энергию Γ плоской немонохроматической волны, прошедшей через единичную площадку за ограниченное время существования волны, через аналитический сигнал, отождествив $E(t)$ с $U'(t)$. Записать спектральную плотность энергии $\Gamma_\omega \left(\Gamma = \int_0^\infty \Gamma_\omega d\omega\right)$.

2.148. Квазимонохроматический сигнал $U'(t) = A(t)\cos[\Phi(t) - \omega_0 t]$ представляет собой косинусоиду с медленно меняющимися амплитудой $A(t)$ и добавочной фазой $\Phi(t)$. Выразить A и Φ через аналитический сигнал $U(t)$, действительной частью которого служит $U'(t)$.

2.149. Затухающий источник излучения создает сигнал $U'(t) = A_0\Theta(t)e^{-\gamma t/2}\sin\omega_0 t$, где $\Theta(t)$ - ступенчатая функция, γ - постоянная затухания, $A_0 = \text{const}$. При каких условиях сигнал будет квазимонохроматическим? Найти распределение энергии по частотам, пользуясь понятием аналитического сигнала. Оценить полосу частот этого сигнала и произведение $\Delta\omega\Delta t$.

2.150. Показать, что электромагнитное поле в свободном пространстве можно описать одним лишь векторным потенциалом $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t)$, положив $\varphi = 0$.

Гамильтонова форма уравнений свободного электромагнитного по

ля. Свободное электромагнитное поле представляет собой линейную колебательную систему с бесконечным числом степеней свободы. Колебания происходят в каждой точке пространства, причем колебания в соседних точках взаимно связаны через посредство волнового уравнения, в которое входят производные по координатам. Линейную колебательную систему в механике можно описывать при помощи нормальных (или главных) координат, в которых она становится эквивалентной набору независимых гармонических осцилляторов. Такое представление, возможное и для электромагнитного поля, весьма удобно при решении некоторых задач классической электродинамики (см. [Гинзбург (1987)]) и совершенно необходимо при рассмотрении поля как квантовой системы.Положим $\varphi = 0$ (см. задачу 2.150) и будем описывать поле векторным потенциалом $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$, удовлетворяющим уравнениям

[015] Формулы (2.141) называются в математике преобразованиями Гильберта. Они играют важную роль в физике и называются в физической литературе дисперсионными соотношениями (см. вторую часть этой книги).

$$\Delta \boldsymbol{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} = 0, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{A} = 0 \tag{2.142}$$

Наложим на $\boldsymbol{A}$ в качестве граничных условий условия периодичности:

$$\boldsymbol{A}(x, y, x, t) = \boldsymbol{A}(x + L, y, z, t) = \boldsymbol{A}(x, y + L, z, t) = \boldsymbol{A}(x, y, z + L, t) \tag{2.143}$$

Все пространство оказалось разделено на области размером $V = L^3$, в которых поле ведет себя подобным образом. Из физических соображений понятно, что физические процессы внутри объема мало зависят от условий на его границах, если объем велик.

Разложим векторный потенциал на плоские волны с определенными волновым вектором $\boldsymbol{k}$ и поляризацией $\sigma = 1, 2$:

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}\sigma} q_{\mathbf{k}\sigma}(t) \boldsymbol{A}_{\mathbf{k}\sigma}(\boldsymbol{r}), \quad \text{где} \quad \boldsymbol{A}_{\mathbf{k}\sigma}(\boldsymbol{r}) = e_{\mathbf{k}\sigma} A^0 e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \tag{2.144}$$

где A^0 - нормировочный множитель, который будет выбран в дальнейшем, $e_{\mathbf{k}\sigma}$ - единичные векторы поляризации плоских волн, удовлетворяющие условиям поперечности $k \cdot e_{\mathbf{k}\sigma} = 0$ и условиям взаимной ортогональности $\boldsymbol{e}^*_{\mathbf{k}\sigma'} \cdot e_{\mathbf{k}\sigma} = \delta_{\sigma\sigma'}$. Из условий периодичности (2.143) получаем $\exp(ik_x L) = \exp(ik_y L) = \exp(ik_z L) = 1$, т. е.

$$k_x = \frac{2\pi}{L} n_1, \quad k_y = \frac{2\pi}{L} n_2, \quad k_z = \frac{2\pi}{L} n_3 \tag{2.145}$$

где $n_1, n_2, n_3 = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ независимы и принимают только целочисленные значения. Таким образом, сумма в (2.144) должна быть распространена на все возможные значения n_1, n_2, n_3, которые составляют бесконечное, но счетное множество. Базисные функции $A_{\mathrm{k}\sigma}(r)$ образуют полную ортогональную систему функций, удовлетворяющих условию нормировки

$$\int_V \boldsymbol{A}^*_{\mathbf{k}\sigma}(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{A}_{\mathbf{k}\sigma}(\boldsymbol{r}) dV = \left(A^0\right)^2 V \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} \delta_{\sigma\sigma'} \tag{2.146}$$

Последнее равенство легко проверяется с помощью явного вида (2.144) базисных функций.

Из ортогональности функций (2.146) и волнового уравнения (2.142) получаем систему уравнений для амплитуд Фурье:

$$\ddot{q}_{\mathbf{k}\sigma} + \omega^2_{\mathbf{k}} q_{\mathbf{k}\sigma} = 0, \quad \text{где} \quad \omega_k = ck \geqslant 0. \tag{2.147}$$

Они удовлетворяют уравнениям независимых гармонических осцилляторов и представляют собой главные (но комплексные) координаты электромагнитного поля. Общее решение уравнения (2.147) имеет вид

$$q_{\mathbf{k}\sigma}(t) = b_{\mathbf{k}\sigma} e^{-i\omega_k t} + c_{\mathbf{k}\sigma} e^{i\omega_k t} \tag{2.148}$$

где b, c - комплексные постоянные. Из вещественности $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t)$, т. е. из равенства $\boldsymbol{A}^*(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t)$ путем приравнивания коэффициентов при экспонентах с одинаковыми показателями вытекают следующие соотношения между коэффициентами:

$$e_{\mathbf{k}\sigma} b_{\mathbf{k}\sigma} = e^*_{-\mathbf{k}\sigma} c^*_{-\mathbf{k}\sigma}$$

Если выбрать орты поляризации так, чтобы удовлетворялись условия

$$e_{\mathbf{k}\sigma} = e^*_{-\mathbf{k}\sigma} \tag{2.149}$$

то получим $b_{\mathbf{k}\sigma} = c^*_{-\mathbf{k}\sigma}, c_{\mathbf{k}\sigma} = b^*_{-\mathbf{k}\sigma}$ и для комплексной амплитуды Фурье

$$q_{\mathbf{k}\sigma}(t) = b_{\mathbf{k}\sigma} e^{-i\omega_k t} + b^*_{-\mathbf{k}\sigma} e^{i\omega_k t} \tag{2.150}$$

Эти соотношения позволяют записать (2.144) в виде

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}\sigma} \left[b_{\mathbf{k}\sigma}(t) \boldsymbol{A}_{\mathbf{k}\sigma}(\boldsymbol{r}) + b^*_{\mathbf{k}\sigma}(t) \boldsymbol{A}^*_{\mathbf{k}\sigma}(\boldsymbol{r}) \right], \quad \text{где} \quad b_{\mathbf{k}\sigma}(t) = b_{\mathbf{k}\sigma} e^{-i\omega_k t} \tag{2.151}$$

удовлетворяет уравнению движения осциллятора (2.147). Отметим, что разложение по плоским волнам здесь отличается по форме от аналогичного разложения в задаче 2.122 и обладает некоторыми методическими преимуществами.

Пример 2.22. Построить функиию Гамильтона свободного электромагнитного поля в главных координатах и записать уравнения поля в гамильтоновой форме.

Решение. Вычислим энергию поля

$$W = \frac{1}{8\pi} \int\limits_V \left(E^2 + H^2 \right) dV \tag{2.152}$$

в основной области V. Для этого вычислим напряженности поля с помощью (2.144):

$$\boldsymbol{E} = -\frac{1}{c} \dot{\boldsymbol{A}} = -\frac{1}{c} \sum_{\mathbf{k}\sigma} \dot{q}_{\mathbf{k}\sigma} \boldsymbol{A}_{\mathbf{k}\sigma} = -\frac{1}{c} \sum_{\mathbf{k}\sigma} \dot{q}^*_{\mathbf{k}\sigma} \boldsymbol{A}^*_{\mathbf{k}\sigma} \tag{2.153}$$

$$\boldsymbol{H} = \operatorname{rot} \boldsymbol{A} = i \sum_{\mathbf{k}\sigma} q_{\mathbf{k}\sigma} \left[\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{A}_{\mathbf{k}\sigma} \right] = -i \sum_{\mathbf{k}\sigma} q^*_{\mathbf{k}\sigma} \left[\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{A}^*_{\mathbf{k}\sigma} \right] \tag{2.154}$$

Пользуясь условием ортогональности (2.146), получим из (2.152)

$$W = \frac{(A^0)^2 V}{8\pi c^2} \sum_{\mathbf{k}\sigma} \left(\dot{q}^*_{\mathbf{k}\sigma}(t) \dot{q}_{\mathbf{k}\sigma}(t) + c^2 k^2 q^*_{\mathbf{k}\sigma}(t) q_{\mathbf{k}\sigma}(t) \right) \tag{2.155}$$

или, подставляя сюда на основе (2.150) $q_{\mathbf{k}\sigma}(t) = b_{\mathbf{k}\sigma}(t) + b^*_{-\mathbf{k}\sigma}(t)$, будем иметь

$$W = \frac{(A^0)^2 V}{2\pi c^2} \sum_{\mathbf{k}\sigma} \omega_k^2 b^*_{\mathbf{k}\sigma}(t) b_{\mathbf{k}\sigma}(t) \tag{2.156}$$

Полная энергия поля в объеме V выразилась в виде суммы энергий отдельных собственных колебаний, выраженных через комплексные главные координаты. Введем действительные переменные $Q_{\mathbf{k}\sigma}, P_{\mathbf{k}\sigma}$:

$$b_{\mathbf{k}\sigma} = \frac{1}{2} \left(Q_{\mathbf{k}\sigma} + \frac{i P_{\mathbf{k}\sigma}}{\omega_k} \right) \tag{2.157}$$

Из их определения (2.157) следует, что эти переменные тоже удовлетворяют уравнению движения гармонического осциллятора (2.147). Энергия системы, выраженная через обобщенные координаты и импульсы, называется функцией Гамильтона системы. Обозначив функцию Гамильтона через $\mathscr{H}$ и подставляя в (2.156) комплексные координаты, выраженные через действительные переменные (2.157), находим

$$\mathscr{H} = \frac{(A^0)^2 V}{8\pi} \sum_{\mathbf{k}\sigma} \left(P^2_{\mathbf{k}\sigma} + \omega_k^2 Q^2_{\mathbf{k}\sigma} \right) \tag{2.158}$$

На этом этапе удобно выбрать постоянную нормировки A^0 так, чтобы эффективные массы осцилляторов поля стали единичными:

$$A^0 = \sqrt{\frac{4\pi c^2}{V}} \tag{2.159}$$

В итоге гамильтонова функция поля принимает канонический вид

$$\mathscr{H} = \sum_{\mathbf{k}\sigma} \mathscr{H}_{\mathbf{k}\sigma}, \quad \text{где} \quad \mathscr{H}_{\mathbf{k}\sigma} = \frac{1}{2}\left(P^2_{\mathbf{k}\sigma} + \omega_k^2 Q^2_{\mathbf{k}\sigma}\right) \tag{2.160}$$

Канонические уравнения, или уравнения Гамильтона, получаются из функции Гамильтона (2.160) обычным путем:

$$\dot{Q}_{\mathbf{k}\sigma} = \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial P_{\mathbf{k}\sigma}} = P_{\mathbf{k}\sigma}, \quad \dot{P}_{\mathbf{k}\sigma} = -\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial Q_{\mathbf{k}\sigma}} = -\omega^2_{\mathbf{k}} Q_{\mathbf{k}\sigma} \tag{2.161}$$

и приводят к правильному уравнению движения

$$\ddot{Q}_{\mathbf{k}\sigma} + \omega^2_{\mathbf{k}} Q_{\mathbf{k}\sigma} = 0 \tag{2.162}$$

Это доказывает, что Q, P являются каноническими переменными для осцилляторов поля.

С учетом выбранной нормировки координатные базисные функции принимают вид

$$A_{\mathbf{k}\sigma}(\boldsymbol{r}) = e_{\mathbf{k}\sigma}\sqrt{\frac{4\pi c^2}{V}} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \tag{2.163}$$

Задачи

2.151*. Если размер L основной области поля велик по сравнению с длинами волн рассматриваемых колебаний, то волновой вектор и частота меняются квазинепрерывным образом и на малый ($\Delta\omega \ll \omega$) интервал частот приходится много осцилляторов поля. Показать, что число собственных колебаний поля, приходящихся на малый интервал частот $d\omega$ или волновых векторов dk, с учетом двух независимых поляризаций при каждом значении k записывается в виде

$$dN = \frac{2V}{(2\pi)^3} k^2 dk d\Omega_{\mathbf{k}} = \frac{2V}{(2\pi c)^3}\omega^2 d\omega d\Omega_{\mathbf{k}} \tag{2.164}$$

где $d\Omega_{\mathbf{k}}$ - телесный угол, внутри которого ориентирован волновой вектор.

2.152. Два единичных вектора поляризации, в общем случае комплексных, удовлетворяют условиям ортогональности $e^{(s')*} \cdot e^{(s)} = \delta_{ss'}$ и поперечности $\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{e}^{(s)} = 0$, где $s, s' = 1, 2, \boldsymbol{n}$ - единичный вектор в направлении распространения волны. Доказать соотношения

$$e^{(s)}_\alpha e^{(s)*}_\beta = \delta_{\alpha\beta} - n_\alpha n_\beta, \quad \left(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}^{(s)}\right)\left(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{e}^{(s)*}\right) = [\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{n}]\cdot[\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{n}] \tag{2.165}$$

где производится суммирование по повторяющемуся индексу s.

Рекомендуемая литература: [Медведев (1977)], [Бредов и др. (1985)], [Зоммерфельд (1958)], [Пановский и Филипс (1963)], [Френкель (1956)], [Новожилов и Яппа (1978)], [Батыгин и Топтыгин (1970)], [Тамм (1976)], [Гинзбург (1975)], [Джексон (1965)], [Сивухин (1980)], [Алексеев (1977)], [Ландау и Лифшиц, Теория поля].

4.4.4 2.4. Answers and Solutions

2.1.

$$\begin{array}{lll} \varphi_1 = -2\pi\rho z^2, & \boldsymbol{E}_1 = 4\pi\rho z\boldsymbol{e}_z & (|z| < a/2) \\ \varphi_2 = -\pi\rho a(2|z| - a/2), & \boldsymbol{E}_2 = 2\pi\rho a z\boldsymbol{e}_z/|z| & (|z| > a/2) \end{array}$$

Ось Oz направлена по нормали к поверхности плиты. При переходе к заряженной плоскости $a \to 0$, но произведение $\rho a = \sigma$ остается фиксированным. Внутренняя область исчезает, на плоскости $z = 0$ выполняется граничное условие (2.18).

2.2. $\varphi(x, y, z) = \frac{4\pi\rho_0}{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2} \cos\alpha x \cos\beta y \cos\gamma z$.

2.3.

$$\varphi_1 = \frac{4\pi\rho_0}{k^2}\left[\cos\gamma z + \frac{\gamma \operatorname{ch}\lambda z}{\lambda(\operatorname{ch}(\pi\lambda/2\gamma) + \operatorname{sh}(\pi\lambda/2\gamma))}\right]\cos\alpha x \cos\beta y, \quad |z| < z_0$$

$$\varphi_2 = \frac{4\pi\rho_0\gamma}{k^2\lambda}\frac{\exp[\lambda(\pi/2\gamma - |z|)]}{1 + \tanh(\pi\lambda/2\gamma)}\cos\alpha x \cos\beta y, \quad |z| > z_0$$

Здесь $k^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2, \lambda = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$. При предельном переходе к заряженной плоскости имеем во всем пространстве $\varphi = (2\pi\sigma(x, y)/\lambda)\times \quad \times\exp(-\lambda|z|)$, где $\sigma(x, y) = \sigma_0 \cos\alpha x \cos\beta y, \sigma_0 = \lim_{z_0\to 0}(4z_0\rho_0/\pi)$. Экспоненциальное убывание заряда вдоль оси Oz объясняется тем, что плоскость содержит разноименно заряженные участки.

2.4. Самый простой метод решения задачи - с помощью электростатической теоремы Гаусса. При решении методом интегрирования уравнения Пуассона нужно записать оператор Лапласа в цилиндрических координатах и воспользоваться тем, что вследствие симметрии системы потенциал зависит только от r.

При объемном распределении заряда

$$\begin{array}{lll} \varphi_1 = \kappa\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right), & E_1 = \frac{2\kappa r}{R^2} & (r \leqslant R) \\ \varphi_2 = -2\kappa\ln\frac{r}{R}, & E_2 = \frac{2\kappa}{r} & (r \geqslant R) \end{array}$$

При поверхностном распределении заряда $\varphi_1 = 0, \varphi_2 = -2\kappa\ln(r/R)$.

2.5. $\varphi = -2\kappa\ln(r/R), E = 2\kappa/r, R$ - произвольная постоянная.

2.6. $\varphi(r, z) = 2\kappa_0 K_0(\gamma r)\cos\gamma z$, где $K_0(\gamma r)$ - модифицированная функция Бесселя (1.163). Произвольная постоянная выбрана так, что $\varphi|_{r\to\infty} \to 0$. При $\gamma r \ll 1, \varphi(r, z) \approx -2\kappa(z)\ln\gamma r$, т. е. найденный потенциал переходит в потенциал заряженной нити с локальным значением линейной плотности заряда (см. задачу 2.5).

2.7. $\varphi(x, y, z) = -\frac{q}{2a}\ln\left|\frac{z-a+\sqrt{(z-a^2)+x^2+y^2}}{z+a+\sqrt{(z+a)^2+x^2+y^2}}\right|$.

2.8. Введем обозначения

$$z_1 = z + a, \quad z_2 = z - a, \quad r_{1,2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z_{1,2}^2}, \quad C = \frac{z_1 + r_1}{z_2 + r_2}$$

Из результата предыдущей задачи следует, что

$$r_1 + r_2 = 2a\frac{C + 1}{C - 1} = \text{const} \tag{1}$$

(нужно учесть, что $z_1 - z_2 = 2a$).

Равснство (1) показываст, что эквипотснциальныс повсрхности прсдставляют собой эллипсоиды вращения, фокусы которых совпадают с концами отрезка.

2.9.

$$\begin{array}{ll} \varphi_1(r) = \frac{q}{R}\left(\frac{3}{2} - \frac{r^2}{2R^2}\right), & \boldsymbol{E}_1 = \frac{q\boldsymbol{r}}{R^3} \quad (r \leqslant R); \\ \varphi_2(r) = \frac{q}{r}, & \boldsymbol{E}_2 = \frac{q\boldsymbol{r}}{r^3} \quad (r \geqslant R). \end{array}$$

2.10.

$$\begin{array}{ll} \varphi_1(r) = \frac{q}{R}, & \boldsymbol{E}_1 = 0 \quad (r < R) \\ \varphi_2(r) = \frac{q}{R}, & \boldsymbol{E}_2 = \frac{q\boldsymbol{r}}{r^3} \quad (r > R) \end{array}$$

2.11. Электрическое поле в полости однородно:

$$\boldsymbol{E} = \frac{4}{3}\pi\rho\boldsymbol{r} - \frac{4}{3}\pi\rho(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{a}) = \frac{4}{3}\pi\rho\boldsymbol{a}$$

2.12. $q = 4\pi\alpha\,(R_2 - R_1)$;

$$\begin{array}{lll} E_1 = 0, & \varphi_1 = \frac{q}{R_2 - R_1}\ln\frac{R_2}{R_1} & \text{при } r \leqslant R_1; \\ E_2 = \frac{q(r-R_1)}{(R_2-R_1)r^2}, & \varphi_2 = \frac{q}{R_2-R_1}\left(1 - \ln\frac{r}{R_2} - \frac{R_1}{r}\right) & \text{при } R_1 \leqslant r \leqslant R_2; \\ E_3 = \frac{q}{r^2}; & \varphi_3 = \frac{q}{r} & \text{при } r \geqslant R_2. \end{array}$$

При $R_2 \to R_1 \equiv R$ и фиксированном значении заряда q, получаем поле сферы, равномерно заряженной по поверхности.

2.13.

$$\varphi(r) = \frac{4\pi}{r}\int\limits_0^r \rho\,(r')\,r'^2 dr' + 4\pi\int\limits_r^\infty \rho\,(r')\,r' dr'$$

$$\boldsymbol{E}(r) = \frac{4\pi\boldsymbol{r}}{r^3}\int\limits_0^r \rho\,(r')\,r'^2 dr'$$

2.15. Поле электронного облака в атоме:

$$\varphi_e(r) = -\frac{e_0}{r}\left(1 - e^{-\frac{2r}{a}}\right) + \frac{e_0}{a}e^{-\frac{2r}{a}} \tag{2.166}$$

$$E_{er} = -\frac{e_0}{r^2}\left[1 - \left(\frac{2r}{a} + 1\right)e^{-\frac{2r}{a}} + \frac{2e_0}{a^2}e^{-\frac{2r}{a}}\right] \tag{2.167}$$

Потенциал полного электрического поля в атоме

$$\varphi(r) = \varphi_e(r) + \frac{e_0}{r}$$

2.16. Напряженность поля максимальна на поверхности ядра:

$$E_{\max} = \frac{Ze_0}{R^2} = 6,4 \cdot 10^{18}\frac{Z}{A^{2/3}} \text{ в / см}$$

$$\frac{E_B}{E_{\max}} = \left(\frac{RZ}{a}\right)^2 \approx 3 \times 10^{-10}A^{2/3}Z^2$$

2.18. $\varphi = \frac{2q}{R^2}\left(\sqrt{R^2 + z^2} - |z|\right)$;

$$E_x = E_y = 0, \quad E_z = \frac{2q}{R^2}\left(\frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}}\right)$$

где z - координата точки, наблюдения, отсчитываемая от плоскости диска.

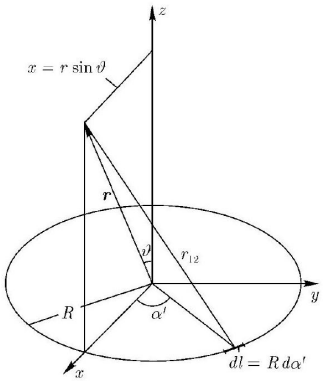


Рис. 2.14

2.19. Вследствие симметрии системы потенциал φ не будет зависеть от азимутального угла α, поэтому можно без нарушения общности провести плоскость xz через точку наблюдения. Тогда (рис. 2.14)

$$r_{12} = \sqrt{r^2 + R^2 - 2rR\sin\vartheta\cos\alpha'}$$

И

$$\varphi(r,\vartheta) = 2xR\int\limits_0^{\pi} \frac{d\alpha'}{\sqrt{r^2 + R^2 - 2rR\sin\vartheta\cos\alpha'}}$$

где $x = \frac{q}{2\pi R}$.

Произведя подстановку $\alpha' = \pi - 2\beta$ и введя обозначение

$$k^2 = \frac{4rR\sin\vartheta}{r^2 + R^2 + 2rR\sin\vartheta}$$

получим

$$\varphi(r,\vartheta) = \frac{4xR}{\sqrt{r^2 + R^2 + 2rR\sin\vartheta}}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\boldsymbol{\beta}}{\sqrt{1 - k^2\sin^2\boldsymbol{\beta}}} = \frac{2kx}{\sqrt{rR\sin\vartheta}}K(k)$$

2.20. а) $\varphi = \frac{q}{\sqrt{R^2+z^2}}$, где z - расстояние от плоскости кольца до точки наблюдения.

б) Обозначив через r' расстояние от точки наблюдения до нити кольца, получим при $r' \ll R$:

$$1 - k^2 \approx \frac{r'^2}{4R^2}, \quad K(k) = \ln\frac{8R}{r'} \quad \text{и} \quad \varphi(\boldsymbol{r}) = -2x\ln r' + \text{ const}$$

как и должно быть в случае линейного заряда.

2.21.

$$\varphi_d = \frac{p\cos\vartheta}{r^2}, \quad E_{dr} = \frac{2p\cos\vartheta}{r^3}, \quad E_{d\vartheta} = \frac{p\sin\vartheta}{r^3}, \quad E_{d\alpha} = 0;$$

$$\varphi_q = \frac{Q}{4r^3}\left(3\cos^2\vartheta - 1\right) = \frac{QP_2(\cos\vartheta)}{2r^3},$$

$$E_{qr} = \frac{3QP_2(\cos\vartheta)}{2r^4}, \quad E_{q\vartheta} = \frac{3Q\cos\vartheta\sin\vartheta}{2r^4}, \quad E_{q\alpha} = 0.$$

Здесь $P_2(\cos\vartheta)$ - полином Лежандра.

2.22.

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \frac{Q_{lm} Y_{lm}(\vartheta, \alpha)}{r^{l+1}}$$

где Q_{lm} - мультипольный момент порядка l, m:

$$Q_{lm} = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \int \rho\left(r'\right) r'^{l} Y_{lm}^{*}\left(\vartheta', \alpha'\right) dV'$$

Здесь интегрирование производится по всему объему, занимаемому системой зарядов.
2.23. Разбиваем область интегрирования по r' в (2.9) сферической поверхностью с радиусом r на внутреннюю и внешнюю области. Во внутренней области используем разложение (1.182) с заменой a на r' и получаем такую же сумму, как в предыдущей задаче, за исключением того, что мультипольные моменты $Q_{lm}(r)$ становятся функциями r. Во внешней области в разложении (1.182) нужно сделать замены $a \to r, r \to r'$. В итоге получим

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \left(\frac{Q_{lm}(r)}{r^{l+1}} + r^{l} Q'_{lm}(r) \right) Y_{lm}(\vartheta, \alpha)$$

где

$$Q'_{lm}(r) = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \int \frac{\rho\left(\boldsymbol{r}'\right)}{r'^{l+1}} Y_{lm}^{*}\left(\vartheta', \alpha'\right) dV'$$

Интегрирование по r' в последнем интеграле проводится в пределах от r до ∞.
2.24. Если положительно заряженное полукольцо занимает область $x > 0$ в плоскости xy, то при $x, y \ll \frac{R^2+z^2}{R}$ получаем, разлагая подынтегральную функцию в интеграле $\int \frac{\kappa}{r_{12}} dl$ в ряд:

$$\varphi = \frac{4qRx}{\pi \left(R^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

откуда

$$E_x = -\frac{4qR}{\pi \left(R^2 + z^2\right)^{\frac{3}{2}}}, \quad E_y = 0, \quad E_z = \frac{12qRxz}{\pi \left(R^2 + z^2\right)^{\frac{5}{2}}}$$

При $z \gg R$ получается поле электрического диполя, момент которого направлен по оси x и равен $\frac{4}{\pi} qR$.
2.25.

$$\begin{array}{ll} \varphi_1 = \frac{4\pi}{3} \sigma_0 r \cos\vartheta & (r \leqslant R) \\ \varphi_2 = \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{\sigma_0 R^3}{r^2} \cos\vartheta & (r \geqslant R) \end{array}$$

Внутри сферы - однородное электрическое поле с напряженностью $E_{1z} = -4\pi\sigma_0/3$. Вне сферы - поле диполя с моментом $4\pi\sigma_0 R^3/3$.
2.26. Вследствие аксиальной симметрии поля уравнение Лапласа, записанное в цилиндрических координатах (полярная ось направлена вдоль оси симметрии системы), принимает вид

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \tag{1}$$

Будем искать решение уравнения (1) в форме степенного ряда по r:

$$\varphi(r,z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z)r^n,\quad a_0(z)=\varphi(0,z)\equiv\Phi(z) \tag{2}$$

где $\Phi(z)$ - потенциал на оси симметрии системы.
Подставив (2) в (1), перегруппировав члены и приравняв нулю коэффициенты получившегося ряда, найдем рекуррентные соотношения для определения коэффициентов $a_n(z)$, откуда:

$$\varphi(r,z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n!)^2}\Phi^{(2n)}(z)\left(\frac{r}{2}\right)^{2n}=\Phi(z)-\frac{r^2}{4}\Phi''(z)+\ldots$$

$$E_r=-\frac{\partial\varphi}{\partial r}=\frac{r}{2}\Phi''(z)+\ldots,\quad E_\alpha=0,\quad E_z=-\frac{\partial\varphi}{\partial z}=-\Phi'(z)+\ldots$$

2.27. Нужно вычислить мультипольные моменты

$$Q_{lm}=\sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}\int\kappa R^l Y^*_{lm}\left(\frac{\pi}{2},\alpha\right)Rd\alpha$$

$$Q'_{lm}=\sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}\int\frac{\chi}{R^{l+1}}Y^*_{lm}\left(\frac{\pi}{2},\alpha\right)Rd\alpha$$

где $\kappa=q/2\pi R$. Используя формулы (1.184), (1.189), (1.192), найдем:

$$\varphi(r,\vartheta)=\tfrac{q}{r}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\tfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\left(\tfrac{R}{r}\right)^{2n}P_{2n}(\cos\vartheta)\quad\text{при } r>R$$

$$\varphi(r,\vartheta)=\tfrac{q}{R}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\tfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\left(\tfrac{r}{R}\right)^{2n}P_{2n}(\cos\vartheta)\quad\text{при } r<R$$

Обе формулы справедливы также при $r=R\left(\vartheta\neq\frac{\pi}{2}\right)$.
2.28. а) $\varphi\approx qa^2\frac{3z^2-r^2}{r^5}=2qa^2\frac{P_2(\cos\vartheta)}{r^3}$;
б) $\varphi\approx\frac{3qa^2\sin^2\vartheta\cos\alpha\sin\alpha}{r^3}$
2.29. а) $\varphi\approx\frac{6qa^3P_3(\cos\vartheta)}{r^4}=qa^3\frac{15\cos^3\vartheta-9\cos\vartheta}{r^4}$;
б) $\varphi\approx\frac{15qabcxyz}{r^7}=\frac{15qabc\sin^2\vartheta\cos\vartheta\sin\alpha\cos\alpha}{r^4}$
2.30. $\varphi(r,\vartheta,\alpha)=q\sum\limits_{l,m}\frac{4\pi}{2l+1}\frac{r^l}{r_0^{l+1}}Y^*_{lm}\left(\vartheta_0,\alpha_0\right)Y_{lm}(\vartheta,\alpha)\quad$ при $r<r_0$;

$$\varphi(r,\vartheta,\alpha)=q\sum_{l,m}\frac{4\pi}{2l+1}\frac{r_0^l}{r^{l+1}}Y^*_{lm}\left(\vartheta_0,\alpha_0\right)Y_{lm}(\vartheta,\alpha)\quad\text{при } r>r_0$$

2.31. $\varphi(x,y,z)\approx\frac{q}{r}+q\frac{a^2\left(3x^2-r^2\right)+b^2\left(3y^2-r^2\right)+c^2\left(3z^2-r^2\right)}{10r^5}$. В случае эллипсоида вращения, $a=b$ и

$$\varphi(r,\vartheta)=\frac{q}{r}+q\frac{c^2-a^2}{5}\cdot\frac{P_2(\cos\vartheta)}{r^3}$$

В случае шара, $a=b=c$ и

$$\varphi=\frac{q}{r}$$

2.32. В сферических координатах с полярной осью вдоль оси симметрии системы и полюсом в центре колец

$$\varphi(r,\vartheta)=-\frac{q\left(a^2-b^2\right)}{2}\cdot\frac{P_2(\cos\vartheta)}{r^3}$$

Это - потенциал линейного квадруполя, у которого заряды $-q$ находятся на расстоянии $\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{2}$ от центрального заряда $2q$.

2.33*. Вычислим мультипольные моменты:

$$q = -\int (\boldsymbol{p}' \cdot \nabla)\, \delta(\boldsymbol{r}) dV = -\oint (\boldsymbol{p}' \cdot \boldsymbol{n})\, \delta(\boldsymbol{r}) dS = 0$$

так как $\delta(\boldsymbol{r}) = 0$ всюду, кроме $r = 0$;

$$p_\alpha = -\int x_\alpha\, (\boldsymbol{p}' \cdot \nabla)\, \delta(\boldsymbol{r}) dV = -\int x_\alpha p'_n \frac{\partial \delta(\boldsymbol{r})}{\partial x_n} dV = \int p'_n \frac{\partial x_\alpha}{\partial x_n} \delta(\boldsymbol{r}) dV$$

Последнее преобразование состояло в интегрировании по частям. По повторяющемуся индексу n подразумевается суммирование. Возникший при этом поверхностный интеграл обращается в нуль, так как $\delta(\boldsymbol{r}) = 0$ при $\boldsymbol{r} \neq 0$. По определению δ-функции

$$p_\alpha = p'_n \frac{\partial x_\alpha}{\partial x_n} = p'_n \delta_{\alpha n} = p'_\alpha$$

Все мультипольные моменты более высокого порядка пропорциональны компонентам r при $r = 0$ и поэтому обращаются в нуль. Рассмотрим, например, компоненты квадрупольного момента. Действительно,

$$Q_{\alpha\beta} = -\int x_\alpha x_\beta p'_n \frac{\partial \delta(\boldsymbol{r})}{\partial x_n} dV = \int \delta(\boldsymbol{r}) p'_n \frac{\partial x_\alpha x_\beta}{\partial x_n} dV = p'_\alpha x_\beta + p'_\beta x_\alpha \big|_{r=0} = 0$$

2.34. После n-кратного интегрирования по частям, получим

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = q(-1)^n \int \delta(\boldsymbol{r}') \prod_i (\boldsymbol{a}_i \cdot \nabla') \frac{1}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} dV' = q \prod_i (\boldsymbol{a}_i \cdot \nabla) \frac{1}{r}$$

2.35. Проще всего, воспользовавшись формулой $\varphi = \frac{qa^2\left(3z'^2 - r^2\right)}{r^5}$ (см. ответ к задаче 2.28), выразить в ней z' через x, y, z (рис. 2.15). Получим

$$\varphi = \frac{qa^2}{r^3} \left[3(\cos\vartheta \cos\gamma + \sin\vartheta \sin\gamma \cos(\alpha - \beta))^2 - 1\right]$$

Тот же результат можно получить, воспользовавшись тем, что совокупность компонент квадрупольного момента представляет собой тензор II ранга. В системе осей x', y', z' компоненты квадрупольного момента

$$Q'_{xx} = Q'_{yy} = Q'_{xy} = Q'_{xz} = Q'_{yz} = 0, \quad Q'_{zz} = 2qa^2$$

Матрица коэффициентов преобразования имеет вид

$$\alpha = \begin{pmatrix} \cos\gamma\cos\beta & -\sin\beta & \sin\gamma\cos\beta \\ \cos\gamma\sin\beta & \cos\beta & \sin\gamma\sin\beta \\ -\sin\gamma & 0 & \cos\gamma \end{pmatrix}$$

С помощью этой матрицы вычисляем компоненты $Q_{\alpha\beta}$ в системе xyz по формулам

$$Q_{\alpha\beta} = \sum_{\gamma,\delta} \alpha_{\alpha\gamma} \alpha_{\beta\delta} Q'_{\gamma\delta}$$

а затем используем формулу (2.21).

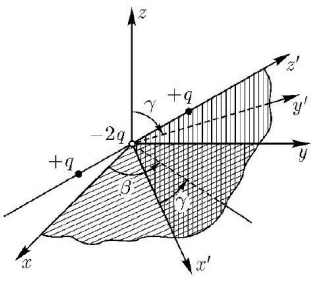


Рис. 2.15

2.36. $\varphi = \frac{15qabc}{2r^4}\sin^2\vartheta\cos\vartheta\sin 2(\alpha-\beta)$.

2.37. $\varphi = \frac{qa^2}{4r^3}\left(3\sin^2\vartheta\sin 2\alpha - 3\cos 2\vartheta - 1\right)$.

2.38. По принципу суперпозиции можно написать

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \int\limits_V \frac{\boldsymbol{P}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}dV' = \int \boldsymbol{P}\cdot\operatorname{grad}'\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}dV'$$

Преобразуя это выражение с помощью теоремы Остроградского-Гаусса, получим $\varphi(\boldsymbol{r}) = \int\limits_S \frac{P_n}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}dS$, где S - внутренняя поверхность поляризованного шара, а $P_n = P\cos\vartheta$. Используя результаты задачи 2.25, найдем:

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= \tfrac{4\pi Pr}{3}\cos\vartheta \quad (r \leqslant R)\\ \varphi_2 &= \tfrac{4\pi PR^3}{3r^2}\cos\vartheta \quad (r \geqslant R)\end{aligned}$$

2.39. $\varphi(\boldsymbol{r}) = -2\kappa\ln r + 2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{A_n\cos n\alpha + B_n\sin n\alpha}{nr^n}$, где $\kappa = \int\rho(\boldsymbol{r}')\,dS'$ - полный заряд единицы длины распределения, $A_n = \int\rho(\boldsymbol{r}')\,r'^n\cos n\alpha' dS'$ и $B_n = \int\rho(\boldsymbol{r}')\,r'^n\sin n\alpha' dS'$ - двумерные мультипольные моменты n-го порядка.

Из этих формул, в частности, следует, что потенциал диполя в двумерном случае имеет вид $\varphi = \frac{2\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}{r^2}$, где $\boldsymbol{p} = \int\rho(\boldsymbol{r}')\,\boldsymbol{r}'dS$ - дипольный момент распределения на единицу длины, $\boldsymbol{r}$ - радиус-вектор в плоскости xy.

2.40. $\varphi(r,\alpha) = -2\kappa\ln r + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{r_0}{r}\right)^n\cos n(\alpha-\alpha_0)$ при $r > r_0$,

$$\varphi(r,\alpha) = -2\kappa\ln r + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{r}{r_0}\right)^n\cos n(\alpha-\alpha_0) \quad \text{при } r < r_0$$

2.41. $\varphi(\boldsymbol{r}) \approx \frac{2\times a}{r}\cos\alpha = \frac{2\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}{r^2}$, где $\boldsymbol{p}$ - дипольный момент на единицу длины, $\boldsymbol{r}$ - радиус-вектор в плоскости $xy(r \gg a)$, ось z направлена вдоль одного из линейных зарядов.

2.42. На оси симметрии диска (ось z направлена от отрицательной стороны диска к положительной):

$$\varphi(z) = \tau\Omega = 2\pi\tau\left(1 - \frac{|z|}{\sqrt{R^2+z^2}}\right)\frac{z}{|z|}$$

$$E_x = E_y = 0, \quad E_z = \frac{2\pi a^2\tau z}{|z|\left(a^2+z^2\right)^{3/2}}$$

2.43. а) В цилиндрических координатах:

$$E_\alpha = \frac{2\tau}{r}, \quad E_r = E_z = 0$$

б) $\varphi = 2\tau(\pi-\alpha)$, $E_\alpha = -\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha} = \frac{2\tau}{r}$; $E_r = E_z = 0$. Поле $\boldsymbol{E}$ совпадает с магнитным полем прямолинейного тока $\mathscr{J} = \tau c$.

2.44. Уравнение силовых линий

$$(z+a)\left[(z+a)^2+r^2\right]^{-\frac{1}{2}} \pm (z-a)\left[(z-a)^2+r^2\right]^{\frac{1}{2}} = C$$

где C - постоянная. На рис. 2.16 а изображена картина силовых линий для случая разноименных зарядов. В случае одноименных зарядов в поле имеет нейтральная точка $r = 0, z = 0$ (рис. 2.16 б).

2.45. Целесообразно перейти к сферическим координатам. Устремляя a к нулю, разлагая в ряд и отбрасывая члены порядка a^2 и выше, получим $r = C\sin^2\vartheta$.

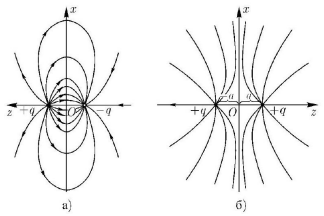


Рис. 2.16

2.46. $r = C\sqrt{\sin^2\vartheta|\cos\vartheta|}, C = \text{const}$. Не следует забывать, что в случае квадруполя конечных размеров, полученная формула пригодна только для больших расстояний (рис. 2.17).

2.48. $q_2 - \frac{\Phi+\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)\pi q}{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)\pi}$.

2.49*. Рассмотрим силовую трубку, полученную вращением некоторой силовой линии вокруг оси z. Применив электростатическую теорему Гаусса к объему, ограниченному боковой поверхностью этой трубки и двумя плоскостями $z = \text{const}$, не содержащему внутри себя зарядов, найдем, что поток через любое нормальное к оси сечение трубки $\Phi(z) = \sum\limits_i q_i\Omega_i(z)$ (см. задачу 2.47) не зависит от z (при изменении z между z_k и z_{k+1}). Здесь $\Omega(z) = 2\pi\left(\pm 1 - \cos_{\alpha_i}\right)$ - телесный угол, под которым видна отрицательная сторона такого сечения из точки z_i, где находится заряд q_i; α_i - угол между направлением оси z и радиусом-вектором точки контура нормального сечения с координатами (r, z). Знак «+» нужно брать при $z > z_i$, знак «-» при $z < z_i$. Если при изменении z нормальное сечение трубки перейдет через заряд q_k, то $\Phi(z)$ скачком изменится на $\pm 4\pi q_k$, однако при этом не изменится $\sum\limits_i q_i\cos\alpha_i$. Выразив $\cos\alpha_i$ через z, z_i и r, получим искомое уравнение семейства силовых линий:

$$\sum_i \frac{q_i\,(z-z_i)}{\sqrt{r^2+(z-z_i)^2}} = C, \quad C = \text{ const}.$$

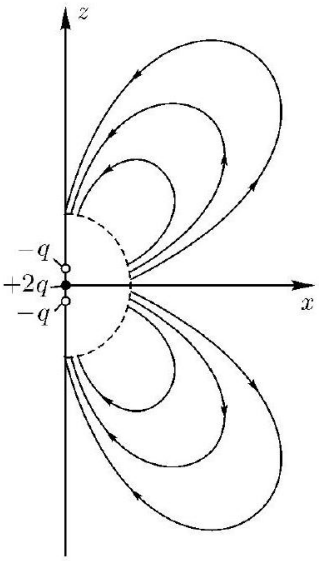


Рис. 2.17

2.51. Выберем цилиндрическую систему координат, ось z которой совпадает с осью цилиндра (рис. 2.18). Вместо условия $\varphi|_S = \text{const}$ на поверхности S цилиндра удобнее использовать вытекающие из него условие $\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}\big|_S = 0$. В результате дифференцирования получим

$$\frac{\kappa_1 x_1}{R^2 + x_1^2 - 2Rx_1\cos\alpha} = \frac{\kappa_2 x_2}{R^2 + x_2^2 - 2Rx_2\cos\alpha}$$

Освободимся от знаменателей и приравняем по отдельности члены с $\cos\alpha$ и без него. В результате получим, что при $\kappa_1 = \kappa_2$ эквипотенциальной поверхностью будет любая цилиндрическая поверхность, ось которой параллельна заряженным нитям и лежит с ними в одной плоскости, а радиус удовлетворяет условию $R^2 = x_1 x_2$. При $x_1 = 0$ сушествует решение $\kappa_2 = 0$. Этот случай соответствует цилиндрическим эквипотенциальным поверхностям в поле одной нити.

2.52. Воспользуемся рис. 2.19 . Радиус R искомой сферы и положение ее центра определяются уравнениями

$$R^2 = z_1 z_2, \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{q_1^2}{q_2^2}$$

Потенциал на поверхности этой сферы равен нулю.

2.53.

$$\Delta\varphi = q\Delta\frac{e^{-\alpha r}}{r} = q\Delta\frac{1}{r} + q\Delta\frac{e^{-\alpha r}-1}{r} =$$
$$= -4\pi q\delta(\boldsymbol{r}) + \frac{q}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(r\frac{e^{-\alpha r}-1}{r}\right) = -4\pi q\delta(\boldsymbol{r}) + \frac{q\alpha^2 e^{-\alpha r}}{r}$$

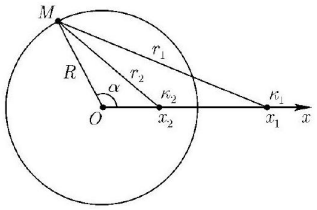


Рис. 2.18

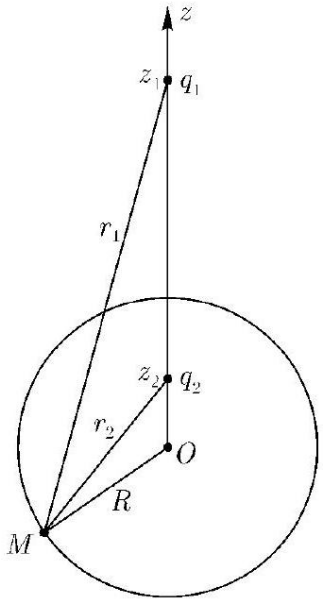


Рис. 2.19

Таким образом, имеется точечный заряд q в начале координат и сферически симметрично распределенный объемный заряд с плотностью $\rho = -\frac{q\alpha^2 e^{-\alpha r}}{4\pi r}, \int \rho dV = -q$.

2.54. Точечный заряд e_0 в начале координат, окруженный объемным зарядом с плотностью $\rho(r) = -\frac{e_0}{\pi a^3} e^{-\frac{2r}{a}}$. Такой вид имеет распределение заряда в атоме водорода (ср. с задачей 2.15).

2.55. $\mathscr{F} = (\boldsymbol{p} \cdot \nabla)\boldsymbol{E}, \quad \boldsymbol{N} = \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{E}$.

2.56. $\frac{3q^2}{5R}, \quad \frac{q^2}{2R}, \quad \frac{q^2}{R_2 - R_1}\left(1 - \frac{R_1}{R_2 - R_1} \ln \frac{R_2}{R_1}\right)$.

2.57. $q_{1,2} = \frac{R\sqrt{R^2+a^2}}{qa^2}\left(\sqrt{R^2+a^2}A_{1,2} - RA_{1,2}\right)$.

2.58. $U = \int \frac{e_0}{r}\rho(r)dV = -\frac{e_0^2}{a}$.

2.59. $U = 5e_0^2/4a$.

2.60. Необходимым условием минимума потенциальной энергии является обращение в нуль всех первых производных и положительность всех
вторых производных потенциальной энергии по обобщенным координатам при некоторых значениях координат (в точке равновесия системы):

$$\frac{\partial U}{\partial q_\alpha} = 0, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial q_\alpha^2} > 0, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, 3N$$

где $3N$ - число степеней свободы N точечных частиц. Под q_α можно понимать их декартовы координаты. Выделим некоторую частицу и припишем ей координаты q_1, q_2, q_3. Электростатический потенциал всех остальных частиц в этой точке $\varphi(q_1, q_2, q_3)$ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial q_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial q_2^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial q_3^2} = 0$$

Следовательно, потенциальная энергия $U = e\varphi(q_1, q_2, q_3)$ не может иметь вторые производные одного знака в точке нахождения данного заряда. Это рассуждение относится к любому заряду. Таким образом, потенциальная энергия не имеет минимума, и равновесие системы точечных зарядов неустойчиво.

2.61. $U = \frac{q_1 q_2}{a}, \quad F = \frac{q_1 q_2}{a^2}$.

2.62. $R = \frac{32\pi\alpha}{E_0^2}$.

2.63.

$$U = \oint_{l_1}\oint_{l_2} \frac{\kappa_1\kappa_2 dl_1 dl_2}{r_{12}} = \frac{q_1q_2}{4\pi^2 ab}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{abdl_1dl_2}{\sqrt{c^2+a^2+b^2-2ab\cos(\alpha_1-\alpha_2)}}$$

где интегрирование выполняется по всем элементам обоих колец dl_1 и dl_2, α_1 и α_2 - углы, указываюшие расположение элементов. Интегрируя по $d\alpha_2$ и делая замену $\alpha_1 = \pi - 2\alpha$, получим

$$U = \frac{q_1q_2k}{\pi\sqrt{ab}}K(k)$$

где

$$k = \frac{2\sqrt{ab}}{\sqrt{c^2+(a+b)^2}}, \qquad \text{a} \qquad K(k) = \int\limits_0^2 \frac{d\alpha}{\sqrt{1-k^2\sin^2\alpha}}$$

- полный эллиптический интеграл первого рода.

При вычислении силы $F = -\frac{\partial U}{\partial c} = -\frac{U}{k}\frac{\partial k}{\partial c}$ нужно воспользоваться формулой

$$2k^2\frac{dK(k)}{d(k^2)} = \frac{E(k)}{1-k^2} - K(k)$$

(см. справочник), где

$$E(k) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2\sin^2\alpha d\alpha}$$

- полный эллиптический интеграл второго рода. Окончательно,

$$F = \frac{q_1q_2ck^3}{4\pi(ab)^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{E(k)}{1-k^2}$$

2.64. $\boldsymbol{F} = -\frac{3q\boldsymbol{r}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r})}{r^5} + \frac{q\boldsymbol{p}}{r^3}, \quad \boldsymbol{N} = \frac{q\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{r}}{r^3}$.
2.65. $U = p_1p_2\frac{\sin\vartheta_1\sin\vartheta_2\cos\varphi - 2\cos\vartheta_1\cos\vartheta_2}{r^3}$, где $\vartheta_1 = \angle(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p}_1)$, $\vartheta_2 = \angle(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p}_2)$, φ - угол между плоскостями $(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p}_1)$ и $(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p}_2)$,

$$F = 3p_1p_2\frac{\sin\vartheta_1\sin\vartheta_2\cos\varphi - 2\cos\vartheta_1\cos\vartheta_2}{r^4}$$

Сила максимальна при $\vartheta_1 = \vartheta_2 = \varphi = 0$, т. е. при параллельных диполях.
2.66.

$$U_{21} = \int \rho(\boldsymbol{r}')\varphi_1(\boldsymbol{r}')\,dV' =$$

$$= \sum_{l,m}\sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}}a_{lm}\int r'^l Y_{lm}(\vartheta',\alpha')\,dV' = \sum_{l,m}a_{lm}Q_{lm}$$

2.67. Да, при условии $\boldsymbol{j}_0\cdot\boldsymbol{k} = 0$. В противном случае $\partial\rho/\partial t \neq 0$.
2.68.

$$j_r = j_\vartheta = 0, \quad j_\alpha = \frac{H_0 cr}{4\pi a^2}\sin\vartheta \quad \text{при } r < a;$$
$$j = 0 \quad \text{при } r > a.$$

2.70.

$$H_r = H_z = 0, \quad H_\alpha = \begin{cases} 2Jr/ca^2 & \text{при } r < a \\ 2J/cr & \text{при } a \leqslant r \leqslant b \\ 0 & \text{при } r > b \end{cases}$$

2.71. Рассмотрим решение задачи методом векторного потенциала. Если направить ось z вдоль оси цилиндра, то прямоугольные компоненты $\boldsymbol{A}$ будут удовлетворять уравнениям:

$$\Delta A_x = 0, \quad \Delta A_y = 0, \quad \Delta A_z = -\frac{4\pi}{c} j_z \tag{1}$$

причем $j_z = 0$ при $r > a$, $j_z = \frac{\mathscr{J}}{\pi a^2}$ при $r \leqslant a$.
Поскольку в уравнении для A_x и A_y заданный ток $\mathscr{J}$ не входит, эти компоненты можно считать равными нулю; A_z будет зависеть только от расстояния r до оси z. Интегрируя уравнение для A_z и используя условия непрерывности A_z и H_α на границе $r = a$ и ограниченности H при $r = 0$, получим:
при $r < a$

$$A_z = C - \frac{\mathscr{J}}{c}\left(\frac{r}{a}\right)^2, \quad H_\alpha = \frac{2\mathscr{J}}{ca^2} r \tag{2}$$

при $r > a$

$$A_z = C - \frac{\mathscr{J}}{c}\left(1 + 2\ln\frac{r}{a}\right), \quad H_\alpha = \frac{2\mathscr{J}}{cr}$$

Константа C - произвольна.
2.72. При $r < a$

$$A_z = C_1, \quad \boldsymbol{H} = 0$$

при $a \leqslant r \leqslant b$

$$A_z = \frac{2\mathscr{J}a^2}{c\,(b^2 - a^2)}\left(\ln\frac{r}{a} - \frac{r^2}{2a^2}\right) + C_2, \quad H_\alpha = \frac{2\mathscr{J}}{c\,(b^2 - a^2)}\left(r - \frac{a^2}{r}\right)$$

при $r > b$

$$A_z = \frac{2\mathscr{J}}{c}\ln\frac{b}{r} + C_3, \quad H_\alpha = \frac{2\mathscr{J}}{cr}.$$

Остальные компоненты $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{H}$ равны нулю. Две любые константы, входящие в A_z, можно выразить через третью, использовав условия непрерывности векторного потенциала на границах.
2.73.

$$H_x = -\frac{2\mathscr{J}}{ca}\left(\operatorname{arctg}\frac{a - 2x}{2y} + \operatorname{arctg}\frac{a + 2x}{2y}\right)$$
$$H_y = -\frac{\mathscr{J}}{ca}\ln\frac{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2}{\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + y^2}, \quad H_z = 0$$

Ось y перпендикулярна полосе и проходит через ее середину.
2.74. Пластины отталкиваются с силой

$$f = \frac{4\mathscr{J}^2}{c^2 a^2}\left(a\,\mathrm{arctg}\,\frac{a}{b} - \frac{1}{2}b\ln\frac{a^2+b^2}{b^2}\right)$$

2.75.

$$A_z = \frac{2\mathscr{J}}{c}\ln\frac{r_2}{r_1} = \frac{\mathscr{J}}{c}\ln\frac{(a+x)^2+y^2}{(a-x)^2+y^2}$$
$$H_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} = -\frac{8\mathscr{J}}{c}\cdot\frac{axy}{r_1^2 r_2^2}$$
$$H_y = -\frac{\partial A_z}{\partial x} = -\frac{2\mathscr{J}}{c}\left(\frac{a-x}{r_1^2}+\frac{a+x}{r_2^2}\right)$$

Координаты проводников с током в перпендикулярной к ним плоскости равны $(a,0)$ для тока $+\mathscr{J}$ и $(-a,0)$ для тока $-\mathscr{F}$; r_1 и r_2 - расстояния от точек $(a,0)$ и $(-a,0)$ до точки наблюдения.

2.76. а) Между плоскостями $H = \frac{4\pi}{c}i$, в остальном пространстве $H = 0$; б) между плоскостями $H = 0$, в остальном пространстве $H = \frac{4\pi}{c}i$. В обоих случаях магнитное поле направлено перпендикулярно току и параллельно токонесущим плоскостям.

2.77. $H_y = \frac{2\mathscr{J}d}{c(b^2-a^2)}, H_x = H_z = 0$; ось y нормальна к плоскости, проведенной через оси цилиндров.

2.78. В цилиндрической системе координат, ось z которой перпендикулярна плоскости кольца и проходит через его центр.

$$A_\alpha = \frac{2\mathscr{J}}{c}\left(\frac{a}{r}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\left(\frac{2}{k}-k\right)K(k) - \frac{2}{k}E(k)\right], \quad A_z = A_r = 0$$

где $K(k)$ и $E(k)$ - полные эллиптические интегралы Лежандра, $k^2 = \frac{4ar}{(a+r)^2+z^2}$

Компоненты магнитного поля:

$$H_r = \frac{2\mathscr{J}}{c}\cdot\frac{z}{r\sqrt{(a+r)^2+z^2}}\left[-K(k) + \frac{a^2+r^2+z^2}{(a-r)^2+z^2}E(k)\right]$$
$$H_z = \frac{2\mathscr{J}}{c}\cdot\frac{1}{\sqrt{(a+r)^2+z^2}}\left[K(k) + \frac{a^2-r^2-z^2}{(a-r)^2+z^2}E(k)\right], \quad H_\alpha = 0$$

На оси витка ($r = 0$) эти выражения переходят в

$$H_T = 0, \quad H_z = \frac{2\pi a^2\mathscr{F}}{c\,(a^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

2.79. В любом сечении такой трубки поток магнитного поля один и тот же. Поэтому уравнение поверхности трубки:

$$N = \int\limits_S \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{S} = f(r,z) = \text{ const.}$$

Линии пересечения этих поверхностей с плоскостями $\alpha = \text{const}$ и дают искомые линии магнитного поля.

2.80. Компоненты магнитного поля:

$$H_z = -\frac{\partial\psi}{\partial z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} H^{(2n)}(z) \left(\frac{r}{2}\right)^{2n} = H(z) - \frac{r^2}{4}H''(z) + \dots$$

$$H_r = -\frac{\partial\psi}{\partial r} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n-1)!n!} H^{(2n-1)}(z) \left(\frac{r}{2}\right)^{2n-1} = -\frac{r}{2}H'(z) + \dots$$

$$H_\alpha = 0$$

Векторный потенциал выражается через напряженность магнитного поля с помощью теоремы Стокса и соотношения $\boldsymbol{H} = \operatorname{rot} \boldsymbol{A}$:

$$A_\alpha(r,z) = \frac{1}{r}\int_0^r H_z r dr = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+1)!} H^{(2n)} z \left(\frac{r}{2}\right)^{2n+1} = \frac{r}{2}H(r) - \dots$$

2.82. Предположим, что существуют два различных поля, $\boldsymbol{H}_1$ и $\boldsymbol{H}_2$, удовлетворяющие уравнениям (2.51), (2.54) и (2.57) при заданных объемных и поверхностных токах. Разность напряженностей $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_1 - \boldsymbol{H}_2$ удовлетворяет уравнениям

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = 0, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{H} = 0$$

и вектор $\boldsymbol{H}$ всюду непрерывен. Полагая $\boldsymbol{H} = \operatorname{rot} \boldsymbol{A}$, получаем

$$H^2 = \boldsymbol{H} \cdot \operatorname{rot} \boldsymbol{A} = \operatorname{div}[\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{H}] + \boldsymbol{A} \cdot \operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \operatorname{div}[\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{H}]$$

Проинтегрируем теперь обе части последнего равенства по всему пространству. После применения теоремы Остроградского-Гаусса получим

$$\int H^2 dV = \oint [\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{H}] \cdot d\boldsymbol{S} \to 0$$

если произведение AH убывает на больших расстояниях быстрее чем r^{-2}. Последнее условие заведомо выполняется для ограниченной системы токов (см. пример 2.11). Таким образом, $\boldsymbol{H} = 0$ всюду в пространстве, и решение задачи единственно.

2.84.

$$H_z = \frac{2\pi n J}{c} (\cos\theta_1 + \cos\theta_2)$$

где

$$\cos\theta_1 = \frac{h-z}{\sqrt{a^2 + (h-z)^2}}, \quad \cos\theta_2 = \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}}$$

(см. рис. 2.20).

2.85. Решим задачу с использованием векторного потенциала. Плотность поверхностного тока от вращения сферы в сферической системе координат с полярной осью вдоль ω имеет вид

$$i = e_\alpha \frac{e\omega}{4\pi a} \sin\vartheta \tag{1}$$

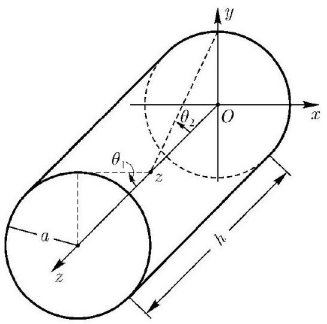


Рис. 2.20

Векторный потенциал удовлетворяет уравнению Лапласа, а на поверхности сферы - граничному условию, следующему из (2.57). В силу симметрии тока векторный потенциал можно выбрать так, чтобы была отлична от нуля только компонента A_α, не зависящая от α. Уравнение для нее записываем с использованием формул (1.279):
(2) $\Delta A_\alpha - \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} A_\alpha = 0$.

Ищем решение в форме

$$A_\alpha = F(r) \sin \vartheta \tag{3}$$

удовлетворяющей условию $\operatorname{div} \boldsymbol{A} = 0$. Определяя $F(r)$ с помощью уравнения (2) и граничных условий, находим A_α и $\boldsymbol{H} = \operatorname{rot} \boldsymbol{A}$:

$$\boldsymbol{H} = \frac{2e\boldsymbol{\omega}}{3ca} \quad \text{при } r < a; \quad \boldsymbol{H} = \frac{3\boldsymbol{r}(\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{r})}{r^5} - \frac{\boldsymbol{m}}{r^3} \quad \text{при } r > a.$$

Здесь

$$m = \frac{ea^2\omega}{3c}$$

- магнитный момент системы (см. задачу 2.86).
  2.86. Запишем с помощью дельта-функции ток вращающейся сферы (см. формулу (1) в решении предыдущей задачи) через его объемную плотность:

$$j = e_\alpha \frac{e\omega}{4\pi a^3} \sin \vartheta \delta(r - a)$$

С помощью формулы (2.59) находим магнитный момент $\boldsymbol{m} = ea^2\boldsymbol{\omega}/3c$, полученный в предыдущей задаче другим способом. При распределении заряда равномерно по объему получим $m = ea^2\omega/5c$. Магнитное поле, найденное по приближенной формуле (2.59), во внешней области $r > a$ совпадает с точным решением.
2.88. Подставив в (2.59) выражение (2.39) для плотности тока, создаваемой точечными частицами, получим

$$\boldsymbol{m} = \sum_a \frac{e_a}{2c} [\boldsymbol{r}_a \times \boldsymbol{v}_a] = \sum_a \frac{e_a}{2m_a c} [\boldsymbol{r}_a \times \boldsymbol{p}_a]$$

где $\boldsymbol{p}_a = m_a \boldsymbol{v}_a$ - импульс отдельной частицы. При $e_a/m_a = e/m$ получаем формулу (2.61), определяющую магнитный момент системы частиц, обусловленный их движением в пространстве.

Следует иметь в виду, что магнитный момент является важнейшей физической характеристикой, присущей как многим макроскопическим телам (постоянным магнитам, земному шару, Солнцу и звездам), так и почти всем микрочастицам, заряженным (электроны, протоны, атомные ядра) и электронейтральным (нейтроны,

атомы). Внутренние моменты микрочастиц называются спиновыми, они не связаны с их движением как целого и обусловлены особенностями (во многих случаях неизвестными) их внутренней структуры. Между спиновыми магнитным $\boldsymbol{m}_s$ и механическим $\boldsymbol{L}_s$ моментами выполняется соотношение типа (2.61),

$$\boldsymbol{m}_s = \eta_s \boldsymbol{L}_s$$

однако коэффициент пропорциональности η_s не совпадает с $\eta = e/2mc$ и различен для разных частиц. Спиновый магнитный момент представляет собой квантовое явление, не объясняемое классической электродинамикой.

2.89. $m = \frac{1}{2c}\left(\frac{e_1}{m_1^2} + \frac{e_2}{m_2^2}\right)\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\boldsymbol{L}$.

2.90. $\boldsymbol{m} = \mu_B e_z$, где $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e c} \approx 0,9 \times 10^{-20}$ эрг/Гс - магнетон Бора.

2.91. $m = \mu_s$.

2.92. $\boldsymbol{H}(0) = \frac{4\mu_B}{405a^3}e_z, \quad \boldsymbol{m} = 6\mu_B e_z$.

2.93. $\boldsymbol{m} = \frac{ea^2}{5c}\boldsymbol{\omega}, \quad \boldsymbol{H} = \frac{3\boldsymbol{r}(\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{r})}{r^5} - \frac{\boldsymbol{m}}{r^3}$.

2.94. $\boldsymbol{m} = \frac{ea^2}{4c}\boldsymbol{\omega}, \quad \boldsymbol{H} = \left[\left(1+\frac{a^2}{z^2}\right)^{1/2} + \left(1+\frac{a^2}{z^2}\right)^{-1/2} - 2\right]\frac{2e|z|}{a^2 c}\boldsymbol{\omega}$.

2.95. В точках, где $j = 0$, можно положить $\boldsymbol{H} = -\operatorname{grad}\psi$. Тогда уравнение $\operatorname{rot}\boldsymbol{H} = 0$ выполняется при всех ψ, а уравнение $\operatorname{div}\boldsymbol{H} = 0$ дает

$$\Delta\psi = 0$$

Последнее уравнение должно быть решено при дополнительном условии

$$\oint_l \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{l} = \frac{4\pi}{c}\mathscr{J}$$

где l - любой замкнутый контур, охватывающий ток $\mathscr{J}$. Вводим цилиндрические координаты r, α, z и ищем решение в виде $\psi = \psi(\alpha)$.

Окончательно получим

$$\psi = -\frac{2\mathscr{J}}{c}\alpha, \quad H_\alpha = \frac{2\mathscr{J}}{cr}, \quad H_r = H_z = 0.$$

2.96. а) Чтобы скалярный потенциал ψ магнитного поля был однозначной функцией, выберем некоторую поверхность S, опирающуюся на контур с током, и будем считать,

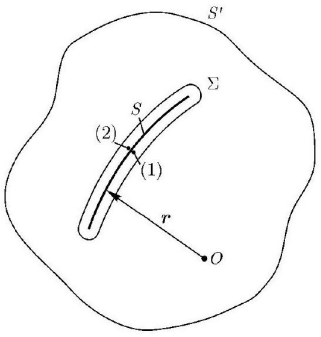


Рис. 2.21 что при переходе через эту поверхность ψ терпит разрыв:

$$\psi(2) - \psi(1) = \frac{4\pi}{c}\mathscr{J} \tag{1}$$

Точки 1 и 2 лежат бесконечно близко друг к другу по разные стороны поверхности, причем направление из 1 в 2 составляет с направлением тока правовинтовую систему (рис. 2.21).

Решение уравнения Лапласа можно записать в виде (см. пример 2.4):
(2)
$\psi = \frac{1}{4\pi} \oint \left[\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\right] dS.$
В выражении (2) интегрирование нужно проводить по бесконечно удаленной замкнутой поверхности S', а также по всем замкнутым поверхностям Σ_i, лежащим на конечном расстоянии от начала координат, внутри которых ψ или $\frac{\partial \psi}{\partial n}$ имеют разрывы. В рассматриваемом случае интеграл по бесконечно удаленной поверхности равен нулю, так как источник поля (контур с током) имеет ограниченные размеры. Поверхности, на которых нормальная производная $\frac{\partial \psi}{\partial n} = -H_n$ имеет разрыв, отсутствуют, так как H_n - непрерывная величина. Поэтому в (2) интеграл должен быть взят по одной поверхности Σ до совпадения с S.

Будем стягивать Σ до совпадения с S. Вследствие непрерывности величин $\frac{1}{r}$, $\frac{\partial \psi}{\partial n}$ и $\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)$ на поверхности S, формула (2) примет вид

$$\psi = -\frac{1}{4\pi} \int [\psi(1) - \psi(2)] \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) dS \tag{3}$$

где интегрирование теперь ведется по незамкнутой поверхности S.
Используя равенство (1), получим

$$\psi = \frac{\mathscr{J}}{c} \int \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) dS = -\frac{\mathscr{J}}{c} \int \frac{\boldsymbol{r} \cdot d\boldsymbol{S}}{r^3} \tag{4}$$

Интеграл $\int \frac{r \cdot dS}{r^3}$ представляет собою телесный угол Ω, под которым виден контур с током из точки наблюдения, поэтому формулу (4) можно записать в виде

$$\psi = -\frac{\mathscr{J}}{c}\Omega$$

знак Ω положителен, если радиус-вектор r, проведенный из точки наблюдения в некоторую точку поверхности S, и направление тока в контуре составляют правовинтовую систему.
б) Преобразуем интеграл (2.50′) по контуру в интеграл по поверхности, опирающейся на контур; используя формулу (1.99), получим

$$\boldsymbol{A} = \frac{\mathscr{F}}{c} \int d\boldsymbol{S} \times \nabla\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\mathscr{J}}{c} \int \nabla_M \left(\frac{1}{r}\right) \times d\boldsymbol{S}$$

где ∇_M означает дифференцирование по координатам точки наблюдения M. Вычисляя $\boldsymbol{H} = \operatorname{rot} \boldsymbol{A}$, находим:

$$\boldsymbol{H} = \frac{\mathscr{L}}{c} \int (d\boldsymbol{S} \cdot \nabla_M) \nabla_M \left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\mathscr{L}}{c} \nabla_M \int d\boldsymbol{S} \cdot \nabla_M \left(\frac{1}{r}\right). \tag{5}$$

(При преобразовании использовано равенство $\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = 0$; предполагается, что точка $r = 0$ не лежит на поверхности интегрирования.) Сравнивая (5) с формулой $\boldsymbol{H} = -\operatorname{grad} \psi$, получаем

$$\psi = -\frac{\mathscr{J}}{c} \int d\boldsymbol{S} \cdot \nabla_M \left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{\mathscr{J}}{c} \int \frac{\boldsymbol{r} \cdot d\boldsymbol{S}}{r^3} = -\frac{\mathscr{F}}{c}\Omega.$$

2.97. $\boldsymbol{F} = 0, \boldsymbol{N} = \boldsymbol{m} \times \boldsymbol{H}$, где $\boldsymbol{m} = \frac{\mathscr{J}}{c} \int n \cdot dS$ - магнитный момент контура с током.
2.98. $U = \frac{\boldsymbol{m}_1 \cdot \boldsymbol{m}_2}{r^3} - \frac{3(\boldsymbol{m}_1 \cdot \boldsymbol{r})(\boldsymbol{m}_2 \cdot \boldsymbol{r})}{r^5}$;

$$\boldsymbol{F}_2 = -\boldsymbol{F}_1 = \frac{3}{r^5}\left[(\boldsymbol{m}_1\cdot\boldsymbol{r})\,\boldsymbol{m}_2 + (\boldsymbol{m}_2\cdot\boldsymbol{r})\,\boldsymbol{m}_1 + (\boldsymbol{m}_1\cdot\boldsymbol{m}_2)\,\boldsymbol{r}\right] - \\ - \frac{15}{r^7}(\boldsymbol{m}_1\cdot\boldsymbol{r})\,(\boldsymbol{m}_2\cdot\boldsymbol{r})\,\boldsymbol{r}$$

где $\boldsymbol{r}$ - радиус-вектор, проведенный от первого тока ко второму, $\boldsymbol{F}_1, \boldsymbol{F}_2$ силы, действующие на первый и второй токи;

$$\boldsymbol{N}_1 = \frac{3\,(\boldsymbol{m}_2\cdot\boldsymbol{r})\,(\boldsymbol{m}_1\times\boldsymbol{r})}{r^5} + \frac{\boldsymbol{m}_2\times\boldsymbol{m}_1}{r^3}$$
$$\boldsymbol{N}_2 = \frac{3\,(\boldsymbol{m_1}\cdot\boldsymbol{r})\,(\boldsymbol{m}_2\times\boldsymbol{r})}{r^5} + \frac{\boldsymbol{m}_1\times\boldsymbol{m}_2}{r^3}$$

где $\boldsymbol{N}_1, N_2$ - вращательные момент, приложенные к первому и второму токам соответственно. Следует отметить, что $N_1 \neq N_2$, но

$$\boldsymbol{N}_1 + \boldsymbol{N}_2 + (\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}_2) = 0$$

Если магнитные моменты параллельны ($\boldsymbol{m}_1 = m_1\boldsymbol{n}, \boldsymbol{m}_2 = m_2\boldsymbol{n}, \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0$, n и $\boldsymbol{r}_0$ - единичные векторы), то получим

$$\boldsymbol{F}_2 = \frac{3m_2m_2\left[2\boldsymbol{n}\cos\vartheta - \boldsymbol{r}_0\left(5\cos^2\vartheta - 1\right)\right]}{r^4}$$

где ϑ - угол между $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{r}_0$

2.100. Потенциальная функция тока $\mathscr{J}_2$ в поле тока $\mathscr{J}_1$:

$$u_{21} = \frac{2\mathscr{J}_1\mathscr{J}_2}{c^2}\ln a + \text{const}$$

где a - расстояние между токами.

Сила, действующая на единицу длины второго тока:

$$f = -\frac{u_{21}}{a} = -\frac{2\mathscr{J}_1\mathscr{J}_2}{c^2 a}$$

При параллельных токах ($\mathscr{J}_1$ и $\mathscr{J}_2$ одинакового знака) имеет место притяжение.

2.101. Сила $\boldsymbol{F}$ и вращательный момент $\boldsymbol{N}$ определяются дифференцированием потенциальной функции:

$$U(r,\alpha) = -\frac{\mathscr{J}_1\mathscr{J}_2 a}{c^2}\ln\frac{4r^2 + a^2 + 4ar\cos\alpha}{4r^2 + a^2 - 4ar\cos\alpha}$$

2.102. $N = \frac{4\mathscr{F}\mathscr{F}'a}{c}(\sin\varphi - \varphi\cos\varphi)$.

2.103. $\mathscr{L} = \frac{1}{2} + 2\ln\frac{b}{a}$.

2.104. $\mathscr{L} = 2\ln\frac{b}{a}$.

2.105. $L_{12} = 4\pi\left(b - \sqrt{b^2 - a^2}\right)$;

$$F = \frac{\mathscr{J}_1\mathscr{J}_2}{c^2}\cdot\frac{\partial L_{21}}{\partial b} = \frac{4\pi\mathscr{J}_1\mathscr{J}_2}{c^2}\left(1 - \frac{b}{\sqrt{b^2 - a^2}}\right)$$

2.106*. В этой задаче удобно использовать формулу (2.70). Вычисляя интеграл так же, как в задаче 2.19, получим

$$L_{12} = 4\pi\sqrt{ab}\left[\left(\frac{2}{k} - k\right)K(k) - \frac{2}{k}E(k)\right]$$

где

$$K(k)=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}},\quad E(k)=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}d\psi$$

$$k^2=\frac{4ab}{(a+b)^2+l^2}$$

При $l\gg a,b$, параметр k мал:

$$k^2\approx\frac{4ab}{l^2},\quad k\approx\frac{2\sqrt{ab}}{l}\ll 1$$

поэтому можно использовать приближенные формулы для E и K (см. справочник Градштейна и Рыжика (1971), 8.113, 8.114:)

$$K(k)=\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{1}{4}k^2+\frac{9}{64}k^4\right),\quad E(k)=\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{4}k^2-\frac{3}{64}k^4\right)$$

Оставляя в выражении для L_{12} только члены, пропорциональные k^3, получим в первом неисчезающем приближении

$$L_{12}=\frac{2\pi^2a^2b^2}{l^3}$$

Последний результат легко получить и из равенства $L_{12}=\frac{c\Phi_{12}}{\mathscr{J}_1}$, рассматривая кольца с током как магнитные диполи.

2.107. В обозначениях предыдущей задачи

$$F=\frac{4\pi\mathscr{J}_1\mathscr{J}_2}{c^2}\cdot\frac{l}{\sqrt{(a+b)^2+l^2}}\left[-K(k)+\frac{a^2+b^2+l^2}{(a+b)^2+l^2}E(k)\right]$$

2.108. $\mathscr{L}=4\pi n^2S$. Для соленоида большой, но конечной длины h, пренебрегая краевым эффектом, получим полную индуктивность

$$L=4\pi n^2Sh$$

2.109. Вычисляем магнитную энергию по формуле

$$W=\frac{1}{2c^2}\int\frac{i_1\cdot i_2}{R}dS_1dS_2$$

Здесь dS_1 и dS_2 - элементы поверхности соленоида, R - расстояние между ними, через $\boldsymbol{i}\,(i_1=i_2=i=\boldsymbol{n}\mathscr{T})$ обозначена плотность поверхностного тока, которым заменен ток, текущий в обмотке соленоида, n - число витков на единицу длины.

Интеграл удобно вычислять в цилиндрических координатах:

$$W=\frac{\pi n^2a^2\mathscr{J}^2}{c^2}\int\limits_0^h dz_1\int\limits_0^h dz_2\oint\frac{\cos\alpha d\alpha}{\sqrt{(z_1-z_2)^2+4a^2\sin^2\frac{\alpha}{2}}}=$$
$$=\frac{2\pi^2a^2n^2\mathscr{J}^2h\left(1-\frac{8a}{3\pi h}\right)}{c^2}$$

где отброшены все члены порядка $\left(\frac{a}{h}\right)^2$ и выше. Отсюдд

$$L=4\pi^2a^2n^2h\left(1-\frac{8a}{3\pi h}\right)$$

Если пренебречь членом a/h по сравнению с единицей, то получится результат предыдущей задачи:

$$L = 4\pi^2 a^2 n^2 h = 4\pi n^2 Sh$$

2.110. Для кругового сечения

$$L = 4\pi N^2 \left(b - \sqrt{b^2 - a^2}\right)$$

Самоиндукция на единицу длины $\mathscr{L} = \frac{1}{2\pi b}$ для бесконечного соленоида получится, если сделать предельный переход $b \to \infty$ при заданном числе витков на единицу длины $n = \frac{N}{2\pi b}$:

$$\mathscr{L} = 4\pi^2 n^2 a^2 = 4\pi n^2 S$$

(ср. с задачей 2.108).
Для прямоугольного сечения

$$L = 2N^2 h \ln \frac{2b + a}{2b - a}.$$

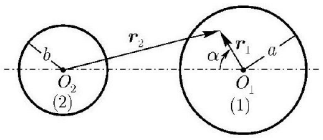


Рис. 2.22

При $b \gg a$ опять имеем $\mathscr{L} = 4\pi n^2 S$.
2.111. Вычислим магнитную энергию единицы длины линии по формуле (2.75). Векторный потенциал прямого провода с током был получен в задаче 2.71. Для провода 1 (рис. 2.22) запишем его в виде

$$A_{1z} = C - \frac{\mathscr{J} r_1^2}{ca^2} \quad \text{при} \quad r_1 < a \tag{1}$$
$$A_{1z} = C - \frac{\mathscr{J}}{c}\left(1 + 2\ln\frac{r_1}{a}\right) \quad \text{при } r_1 > a$$

Векторный потенциал, создаваемый проводом 2, получится при замене в (1) $\mathscr{F}$ на $-\mathscr{J}$, a на b и r_1 на r_2.

Находим магнитную энергию:

$$W\frac{\mathscr{J}}{2\pi ca^2}\int\limits_1 (A_{1z} + A_{2z})\, dS_1 - \frac{\mathscr{J}}{2\pi cb^2}\int\limits_2 (A_{1z} + A_{2z})\, dS_2 \tag{2}$$

Интегралы, входящие в (2), можно вычислить, использовав справочник Градштейна и Рыжика (1971). Учитывая затем связь между коэффициентом индуктивности и магнитной энергией системы, получим окончательно:

$$\mathscr{L} = 1 + 2\ln\frac{h^2}{ab}$$

2.112*. Полная магнитная энергия тока, протекающего по проводнику, складывается из двух частей:

$$W = W_1 + W_2 \tag{1}$$

где

$$W_1 = \frac{1}{8\pi}\int H_1^2 dV$$

- энергия, запасенная внутри проводника и интегрирование ведется по объему проводника,

$$W_2 = \frac{1}{8\pi}\int H_2^2 dV$$

- энергия, запасенная в остальном пространстве.

Предположим, что можно ввести параметр r_0, имеющий размерность длины и удовлетворяющий условию

$$a \ll r_0 \ll R, \tag{2}$$

где a - радиус проводника, R - радиус кривизны осевой линии проводника (который в общем случае меняется от точки к точке). Тогда на расстояниях, меньших r_0, магнитное поле можно считать совпадающим с полем бесконечного прямого провода. В частности, внутри провода:

$$H_1 = \frac{2\mathscr{J} r}{ca^2}$$

(см. задачу 2.71). Это позволяет найти «внутреннюю» энергию W_1:

$$W_1 = \frac{l\mathscr{J}^2}{4c^2} \tag{3}$$

Для определения «внешней энергии» W_2 построим вспомогательную поверхность S, опирающуюся на произвольный контур, лежаший на поверхности проводника, и введем скалярный потенциал ψ. Скалярный потенциал будет испытывать на S скачок

$$\psi_+ - \psi_- = \frac{4\pi}{c}\mathscr{J} \tag{4}$$

Интеграл, через который выражается W_2, можно преобразовать следующим образом:

$$\int (\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{H})dV = -\int \boldsymbol{H}\,\mathrm{grad}\,\psi dV = -\int \mathrm{div}(\psi\boldsymbol{H})dV = -\oint \psi \boldsymbol{H}_n dS$$

(здесь опущен индекс 2 и использовано уравнение $\mathrm{div}\,\boldsymbol{H} = 0$). В последнем интеграле интегрирование должно проводиться по обеим сторонам вспомогательной поверхности S и по поверхности проводника S' (см. рис. 2.23, на котором изображено сечение проводника некоторой плоскостью). Интеграл по бесконечно удаленной поверхности обращается в нуль вследствие конечных размеров проводника с током. Таким образом,

$$W - 2 = -\frac{1}{8\pi}\int\limits_{S'} \psi H_n dS + \frac{1}{8\pi}\int\limits_{S} \psi_+ H_n dS - \frac{1}{8\pi}\int\limits_{S} \psi_- H_n dS \tag{5}$$

Первый из этих интегралов обращается в нуль, так как в силу условия (2) магнитное поле на поверхности S' совпадает с полем прямолинейного провода и имеет, следовательно,

только касательную составляющую. Для преобразования других двух интегралов нужно использовать равенство (4) и условие непрерывности компоненты H_n. Получим

$$W_2 = \frac{\mathscr{J}}{2c} \int\limits_S H_n dS \tag{6}$$

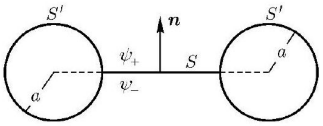


Рис. 2.23

На больших расстояниях от провода ($r > r_0$) магнитное поле не зависит от распределения тока по сечению проводника, поэтому можно считать, что ток течет по оси. На малых расстояниях ($a \leqslant r < r_0$) это поле совпадает с магнитным полем бесконечного круглого цилиндра, и тоже можно считать, что ток течет по оси. Таким образом, интеграл в формуле (6) представляет собою поток магнитной индукции, создаваемой током, текущим по оси проводника, через поверхность, которая опирается на замкнутый контур, лежащий на поверхности проводника. Используя выражение потока через коэффициент взаимной индукции, получим

$$W_2 = \frac{\mathscr{J}^2}{2c^2} L' \tag{7}$$

С помощью формул (1), (3), (7), используя связь между коэффициентом самоиндукции и магнитной энергией системы, получим требуемую формулу для коэффициента самоиндукции:

$$L = \frac{l}{2} + L' \tag{8}$$

2.113. Используя результат предыдущей задачи, получим

$$L' = 4\pi b \left(\ln \frac{8b}{a} - 2 \right)$$

Полная самоиндукция

$$L = 4\pi b \left(\ln \frac{8b}{a} - \frac{7}{4} \right)$$

2.114. $L_{12} = 2l - 2\sqrt{a^2 + l^2} + 2a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 + l^2}}{l}$.

2.115. Используя результат задачи 2.114, получим

$$L_{12} = 8 \left[l - 2\sqrt{a^2 + l^2} + \sqrt{2a^2 + l^2} + a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 + l^2}}{l} \right] -$$

$$-a \ln \frac{a + \sqrt{2a^2 + l^2}}{\sqrt{a^2 + l^2}}$$

$$F = \frac{8 \mathscr{J}_1 \mathscr{J}_2}{c^2} \left[\frac{a^2 + 2l^2}{l\sqrt{a^2 + l^2}} - \frac{l\sqrt{2a^2 + l^2}}{a^2 + l^2} - 1 \right]$$

2.116. $L = 2b \left[4 \ln \frac{2b}{a(1+\sqrt{2})} + 4\sqrt{2} - 7 \right]$.

2.117. $\gamma' = \frac{c}{4\pi} \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H} + \nabla \times \boldsymbol{K}$, где $\boldsymbol{K}$ - любой вектор, зависящий от напряженностей

электромагнитного поля.
2.118. $\rho = \frac{3e}{4\pi a^3}\Theta(a-r); \boldsymbol{j} = \boldsymbol{\rho} \times \boldsymbol{r}$, где Θ - ступенчатая функция (1.212).
2.119. $\rho = \frac{e}{4\pi a^2}\delta(a-r); \boldsymbol{j} = \rho\boldsymbol{\Omega} \times r$.
2.120.

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot} \boldsymbol{E}_\omega &= \frac{i\omega}{c}\boldsymbol{H}_\omega \\
\operatorname{rot} \boldsymbol{H}_\omega &= -\frac{i\omega}{c}\boldsymbol{E}_\omega + \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}_\omega \\
\operatorname{div} \boldsymbol{E}_\omega &= 4\pi\rho_\omega \\
\operatorname{div} \boldsymbol{H}_\omega &= 0 \\
\boldsymbol{E}_\omega &= -\nabla\varphi_\omega + \frac{i\omega}{c}\boldsymbol{A}_\omega \\
\boldsymbol{H}_\omega &= \nabla \times \boldsymbol{A}_\omega
\end{aligned}$$

В интегралах (2.112) изменение знака частоты эквивалентно изменению знака мнимой единицы i. Поэтому $\boldsymbol{E}_{-\omega} = \boldsymbol{E}_\omega^*$. Такое соотношение между гармониками Фурье справедливо для любой действительной функции.
2.121. $\boldsymbol{\Gamma}_\omega = \frac{c}{4\pi^2}\operatorname{Re}[\boldsymbol{E}_\omega \times \boldsymbol{H}_\omega^*]$.
2.122.

$$\begin{aligned}
i\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{E}_\mathrm{k} &= -\frac{1}{c}\dot{\boldsymbol{H}}_\mathrm{k} \\
i\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{H}_\mathrm{k} &= \frac{1}{c}\dot{\boldsymbol{E}}_\mathrm{k} + \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}_\mathrm{k} \\
i\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{E}_\mathrm{k} &= 4\pi\rho_\mathrm{k} \\
\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{H}_\mathrm{k} &= 0
\end{aligned}$$

2.124. Фурье-образ потенциала точечного заряда был найден в задаче 1.137:

$$\varphi_\mathrm{k} = \frac{4\pi e}{k^2}, \quad \boldsymbol{E}_\mathrm{k} = -i\boldsymbol{k}\varphi_\mathrm{k}$$

Другой способ решения задачи - использование интеграла Фурье $\varphi(\boldsymbol{r}) = \int \varphi_\mathrm{k} \exp(i\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r}) d^3k$. Применив оператор Лапласа под интегралом, найдем $\Delta\varphi(\boldsymbol{r}) = \int (-k^2\varphi_\mathbf{k}) \exp(i\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r}) d^3k$, откуда $(\Delta\varphi)_\mathbf{k} = -k^2\varphi_\mathbf{k}$. С другой
стороны, выполнив преобразование Фурье обеих частей уравнения Пуассона $\Delta\varphi(\boldsymbol{r}) = -4\pi e\delta(\boldsymbol{r})$, будем иметь $(\Delta\varphi)_\mathbf{k} = -4\pi e$. В итоге получаем уже приведенный выше ответ.
2.125.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{E}_{\mathbf{k}\omega} &= \frac{\omega}{c}\boldsymbol{H}_{\mathbf{k}\omega} \\
\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{H}_{\mathbf{k}\omega} &= -\frac{\omega}{c}\boldsymbol{E}_{\mathbf{k}\omega} - i\frac{4\pi}{c}j_{\mathbf{k}\omega} \\
i\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{E}_{\mathbf{k}\omega} &= 4\pi\rho_{\mathbf{k}\omega} \\
\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{H}_{\mathbf{k}\omega} &= 0
\end{aligned}$$

2.126. Разложение на гармонические составляющие:

$$\begin{aligned}
\Delta\boldsymbol{A}_\omega + \frac{\omega^2}{c^2}\boldsymbol{A}_\omega &= -\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}_\omega \\
\Delta\varphi_\omega + \frac{\omega^2}{c^2}\varphi_\omega &= -4\pi\rho_\omega \\
\operatorname{div} \boldsymbol{A}_\omega - \frac{i\omega}{c}\varphi_\omega &= 0
\end{aligned}$$

Разложение на плоские волны:

$$\ddot{\boldsymbol{A}}_{\mathbf{k}} + k^2c^2\boldsymbol{A}_{\mathbf{k}} = 4\pi c\boldsymbol{j}_{\mathrm{k}}$$
$$\ddot{\varphi}_{\mathbf{k}} + k^2c^2\varphi_{\mathbf{k}} = 4\pi c^2\rho_{\mathbf{k}}$$
$$ic\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{A}_{\mathbf{k}} + \dot{\varphi}_{\mathbf{k}} = 0$$

Разложение на плоские монохроматические волны:

$$\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right)\boldsymbol{A}_{\mathbf{k}\omega} = \frac{4\pi}{c}j_{\mathbf{k}\omega}$$
$$\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right)\varphi_{\mathbf{k}\omega} = 4\pi\rho_{\mathbf{k}\omega}$$
$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{A}_{\mathbf{k}\omega} - \frac{\omega}{c}\varphi_{\mathbf{k}\omega} = 0$$

2.127. В переменных ξ, η одномерное волновое уравнение принимает вид $\partial^2\boldsymbol{E}/\partial\xi\partial\eta = 0$, откуда следует приведенное решение. Оно описывает
две плоские волны произвольной формы, распространяющиеся в противоположных направлениях оси Ox со скоростью c. Решение, описывающее распространение плоских волн в направлении n, имеет вид

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{E}_1F(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r} - ct) + \boldsymbol{E}_2\Phi(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r} + ct)$$

2.128. $\gamma = cw\boldsymbol{n}, w = \left(E^2 + H^2\right)/8\pi = E^2/4\pi$. Энергия переносится в пространстве со скоростью c.
2.130. $\operatorname{tg} 2\alpha = 2\boldsymbol{E}_{01}\cdot\boldsymbol{E}_{02}/\left(E_{01}^2 + E_{02}^2\right)$.

Для определения направлений вращения запишем (2.126) в проекциях на оси координат, выбрав постоянно используемую правую систему координат с осью Ox вдоль $\mathscr{E}_1$ и осью Oz в направлении распространения волны k. Аргумент тригонометрических функций запишем так, чтобы он увеличивался с ростом t. Будем иметь

$$E_x = \mathscr{E}_1\cos(\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \alpha)$$
$$E_y = \pm\mathscr{E}_2\sin(\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \alpha)$$

где $\mathscr{E}_1 \geqslant 0$ и $\mathscr{E}_2 \geqslant 0$, знак плюс во второй формуле отвечает правой тройке векторов $\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2, k$, а знак минус - левой тройке. При знаке плюс волна имеет правую спиральность, т. е. направление вращения вектора $\boldsymbol{E}$ и направление распространения образуют правый винт. При знаке минус спиральность левая (винт с левой нарезкой). По историческим причинам в оптике принята противоположная терминология: вращение вектора $\boldsymbol{E}$ в направлении правого винта называют левым, а противоположное вращение - правым.
2.131. По методике предыдущей задачи, записываем

$$\boldsymbol{E}_0 = \boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2 = a\boldsymbol{e}_x + be^{i\chi}\boldsymbol{e}_y = \left(\mathscr{E}_1 + i\mathscr{E}_2\right)e^{i\alpha}$$

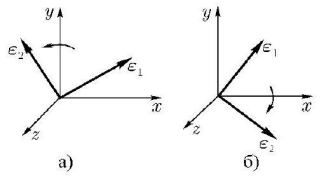
и находим

$$\mathscr{E}_1 = a\cos\alpha\boldsymbol{e}_x + b\cos(\chi - \alpha)\boldsymbol{e}_y$$
$$\mathscr{E}_2 = -a\sin\alpha\boldsymbol{e}_x + b\sin(\chi - \alpha)\boldsymbol{e}_y$$
$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{b^2\sin 2\chi}{a^2 + b^2\cos 2\chi}, \quad -\pi < \alpha \leqslant \pi$$

(последнее равенство получено из условия $\mathscr{E}_1\cdot\mathscr{E}_2 = 0$). Спиральность результирующей волны определяется знаком произведения $\mathscr{E}_2\cdot e_{y'}$, где $e_{y'} = \boldsymbol{n}\times\mathscr{E}_1/\mathscr{E}_1$ - третий орт, составляющий правую тройку с $\boldsymbol{e}_{x'} = \mathscr{E}_1/\mathscr{E}_1$ и $\boldsymbol{n}$. Используя полученные

выражения, находим $\mathscr{E}_2 \cdot e_{y'} = ab\sin\chi/\mathscr{E}_1$. Согласно
результатам предыдущей задачи, при $ab > 0$ и $\sin\chi > 0, 0 < \chi < \pi$, спиральность правая, при $\sin\chi < 0, -\pi < \chi < 0$ - левая. При $\chi = 0$ и при $\chi = \pm\pi$ поляризации линейные в двух взаимно перпендикулярных плоскостях.

2.132. При $\chi = 0$ поляризация линейная, плоскость поляризации проходит через биссектрису угла между осями Ox, Oy. При $\chi = \pi$ поляризация



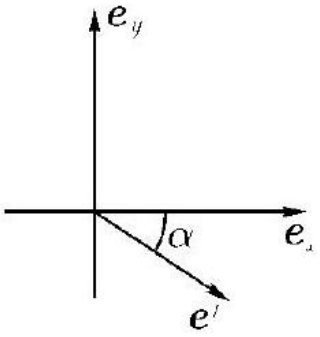


Рис. 2.25

Рис. 2.24

тоже линейная, плоскость поляризации проходит через биссектрису угла между Ox и $-Oy$. При $\chi = \pi/2$ поляризация круговая с правой спиральностью (рис. 2.24 а).

При $\chi = -\frac{\pi}{2}$ поляризация круговая с левой спиральностью (рис. 2.24б). В остальных случаях она эллиптическая, причем при $0 < \chi < \pi$ спиральность правая, при $-\pi < \chi < 0$ - левая.

2.133. $e^{(1)} = e^{(2)*} = \frac{e_x + ie_y}{\sqrt{2}}$.

2.134. $\mathscr{E} = \sqrt{2}E_0\boldsymbol{e}'$. Поляризация линейная, орт $\boldsymbol{e}'$ составляет угол α с осью Ox (рис. 2.25).

2.135. $J_{\alpha\beta} = I^{(1)}e^{(1)}_\alpha e^{(1)*}_\beta + I^{(2)}e^{(2)}_\alpha e^{(2)*}_\beta$,

где $I^{(1)}, I^{(2)}$ - главные значения эрмитова тензора (действительные величины), а $e^{(1)}, e^{(2)}$ - его собственные векторы, в общем случае комплексные и описывающие эллиптическую поляризацию. Они удовлетворяют условиям $e^{(\sigma)} \cdot e^{(\sigma')*} = \delta_{\sigma\sigma'}, e^{(\sigma)}_\alpha e^{(\sigma)*}_\beta = \delta_{\alpha\beta}$ (сумма по повторяющемуся индексу). Введенные в примере 2.21 величины выражаются через $I^{(1)} \geqslant I^{(2)}$:

$$I_n = 2I^{(2)}, \quad I_p = I^{(1)} - I^{(2)}, \quad P = \frac{I^{(1)} - I^{(2)}}{I^{(1)} + I^{(2)}}, \quad \rho = \frac{2I^{(2)}}{I^{(1)} + I^{(2)}}$$

2.136. Введем прямоугольные оси $x' \| a$ и $y' \| b$. В этих осях комплексная амплитуда поля будет иметь вид

$$\boldsymbol{E}_0 = ae_{x'} \pm ibe_{y'}$$

где знак «+» отвечает правой эллиптической поляризации, а знак «-» левой. Интенсивность $I = a^2 + b^2$. Фаза выбрана равной нулю для x'-компоненты поля. Выражая теперь орты $e_{x'}, e_{y'}$ через e_x, e_y, получим для компонент I_{ik}:

$$I_{11} = a^2 \cos^2\vartheta + b^2 \sin^2\vartheta$$
$$I_{22} = a^2 \sin^2\vartheta + b^2 \cos^2\vartheta$$
$$I_{12} = \left(a^2 - b^2\right) \sin\vartheta \cos\vartheta \mp 2iab = I_{21}^*.$$

Верхний знак отвечает правой эллиптической поляризации, нижний - левой. При $b = 0$ поляризация линейна и тензор I_{ik} имеет вид

$$I_{ik} = I \begin{pmatrix} \cos^2\vartheta & \sin\vartheta\cos\vartheta \\ \sin\vartheta\cos\vartheta & \sin^2\vartheta \end{pmatrix}$$

При $a = b = \sqrt{I/2}$ поляризация круговая и

$$I_{ik} = \frac{I}{2} \begin{pmatrix} 1 & \mp i \\ \pm i & 1 \end{pmatrix}$$

2.137. Амплитуда суммарной волны

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E_1} + \boldsymbol{E}_2 = E\left(\boldsymbol{e}^{(1)} + \boldsymbol{e}^{(2)} e^{i\alpha}\right)$$

где α - сдвиг фаз, меняющийся беспорядочно, $|\boldsymbol{E}|^2 = I$. Компоненты тензора поляризации по определению (см.(2.127)) равны

$$I_{ik} = \overline{E_i E_k^*} = \overline{I\left(\boldsymbol{e}^{(1)} + \boldsymbol{e}^{(2)} e^{i\alpha}\right)_i \left(\boldsymbol{e}^{(1)} + \boldsymbol{e}^{(2)} e^{-i\alpha}\right)_k}.$$

При усреднении по времени получим $\overline{e^{\pm i\alpha}} = 0$, поэтому тензор поляризации будет иметь вид

$$I_{ik} = I \begin{pmatrix} 1 + \cos^2\vartheta & \sin\vartheta\cos\vartheta \\ \sin\vartheta\cos\vartheta & 1 - \cos^2\vartheta \end{pmatrix}$$

Отсюда, используя результат примера 2.21, получим

$$P = |\cos\vartheta|$$

Этот же результат можно получить, диагонализуя тензор I_{ik}. Его главные значения $I_1 = 1 + |\cos\vartheta|, I_2 = 1 - |\cos\vartheta|$. Отсюда опять $P = (I_1 - -I_2)\,/\,(I_1 + I_2) = |\cos\vartheta|$. Базисные векторы $\boldsymbol{e}_1 = \left(\cos\frac{\vartheta}{2}, \sin\frac{\vartheta}{2}\right)$ и $\boldsymbol{e}_1 = \left(-\sin\frac{\vartheta}{2}, \cos\frac{\vartheta}{2}\right)$. Они вещественны в рассматриваемом случае.

Результирующая волна состоит из неполяризованной части с интенсивностью $I(1 - |\cos\vartheta|)$ и линейно поляризованной вдоль направления $e_1 = \left(\cos\frac{\vartheta}{2}, \sin\frac{\vartheta}{2}\right)$ части с интенсивностью $I|\cos\vartheta|$:

$$(I_{ik}) = I(1 - |\cos\vartheta|)\,(\delta_{ik}) + I|\cos\vartheta| \begin{pmatrix} \cos^2\frac{\vartheta}{2} & \sin\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\vartheta}{2} \\ \sin\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\vartheta}{2} & \sin^2\frac{\vartheta}{2} \end{pmatrix}$$

Результирующая волна полностью поляризована (но не монохроматична) при $\vartheta = 0$. При $\vartheta = \pi/2$ - полная деполяризация.

2.138. Тензор поляризации

$$I_{ik} = \begin{pmatrix} I_1 + I_2/2 & I_2/2 \\ I_2/2 & I_2/2 \end{pmatrix}$$

(ось x_1 совпадает с направлением поляризации первой волны).

Степень поляризации

$$P = \frac{2\sqrt{I_1^2 + I_2^2}}{I_1 + I_2 + \sqrt{I_1^2 + I_2^2}}$$

Результирующая волна состоит из неполяризованной волны с интенсивностью $(I_1 + I_2)(1 - P)/2$ и линейно поляризованной волны. Направление линейной поляризации составляет угол

$$\vartheta = \operatorname{arctg} \frac{2I_2\sqrt{I_1^2 + I_2^2}}{I_1(I_1 + I_2) + (3I_1 + 2I_2)\sqrt{I_1^2 + I_2^2}}$$

с направлением поляризации первой волны.

2.139. $\rho = \frac{1-\xi}{1+\xi}$; при $\xi = 0$ волна не поляризована, при $\xi = 1$ - полностью поляризована.

Положим $\xi_i = \xi\eta_i$, где $\eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2 = 1$. Тогда

$$I_{ik} = \frac{I}{2}(1 - \xi)\delta_{ik} + \frac{I\xi}{2}\left(1 + \sum_{l=1}^{3} \eta_l \tau_{ik}^{(l)}\right)$$

Первый член в этом выражении соответствует полностью неполяризованному состоянию, а второй - полностью поляризованному. В случае а) $\eta_3 = 1$, $\eta_1 = \eta_2 = 0$.

Сравнивая

$$I''_{ik} = I\xi \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

с выражением $I_{ik} = In_i n_k^*$, видим, что в данном случае $n_1 = 1, n_2 = 0$, т. е., тензор I''_{ik} описывает волну, поляризованную в направлении оси x (волна распространяется в направлении z).

Аналогичным образом легко убедиться, что в случае б) $\eta_1 = 1, \eta_2 = \eta_3 = 0$ и волна линейно поляризована в направлении, составляющем 45° с осью x, а в случае в) $\eta_2 = 1, \eta_1 = \eta_3 = 0$ и волна поляризована по кругу.

2.140. Волновой пакет удовлетворяет однородному уравнению Даламбера при условии $\omega^2 = c^2k^2$. Гауссовой амплитудной функции соответствует пакет

$$\Psi(x, 0) = A(x, 0)\exp(ik_0 x), \quad \text{где } A(x, 0) = a_0\sqrt{\pi}\Delta k \exp\left[-\frac{x^2\Delta k^2}{4}\right]$$

Амплитуда волнового пакета $A(x, 0)$ имеет форму кривой Гаусса. Она становится исчезающе малой при $|x\Delta k| \gg 1$. Отсюда следует, что ширина пакета Δx связана с шириной Δk в пространстве волновых векторов соотношением $\Delta x \cdot \Delta k \approx 1$. Это соотношение имеет универсальный характер и справедливо как для электромагнитных волн, так и для волн любой другой природы. Оно играет особую роль для волн вероятности в квантовой механике, приводя к соотношению неопределенностей для координаты и импульса микрочастицы.

2.141. 1. $\overline{\Delta x^2} \cdot \overline{\Delta k^2} = 1/2$, 2. $\overline{\Delta x^2} \cdot \overline{\Delta k^2} \to \infty$.

2.142.

$$\Psi(0, t) = A(0, t)\exp(-i\omega_0 t), \quad \text{где} \quad A(0, t) = a_0\sqrt{\pi}\Delta\omega \exp\left[-\frac{t^2\Delta\omega^2}{4}\right]$$
$$\Delta t \cdot \Delta\omega \approx 1$$

2.143.

$$\psi(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u(t) e^{ikct} dt$$

2.144.

$$\Delta x_{\min} = \frac{\lambda}{2\pi \sin\theta}$$

где θ - половина угла конуса раствора лучей, направленных из объектива микроскопа к рассматриваемому объекту.
2.145. Волновой импульс, посылаемый

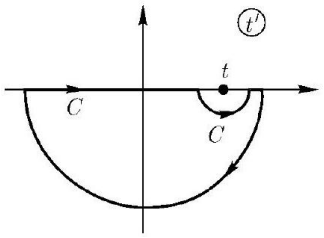


Рис. 2.26 радиолокатором, имеет ширину Δx, связанную с поперечным разбросом волновых векторов $k_\perp$ соотношением $\Delta x \cdot k_\perp \geqslant 1$. С другой стороны, очевидно, $\Delta x/l \approx k_\perp/k$. Из этих двух соотношений находим неточность в определении положения объекта:

$$\Delta x \geqslant \sqrt{l\lambda}$$

2.146. Рассматриваем интеграл (1) по замкнутому контуру C (рис. 2.26), в котором точка $t' = t$ обойдена по малой полуокружности снизу. Ввиду отсутствия особых точек подынтегрального выражения внутри контура интегрирования, этот интеграл обращается в нуль:

$$\oint_C \frac{U(t')}{t' - t} dt' = 0 \tag{1}$$

Интеграл по дуге большого круга обращается в нуль ввиду быстрого убывания $U(t')$ при $|t'| \to \infty$ в нижней полуплоскости. Интеграл по малой полуокружности c вычисляется непосредственно и дает полувычет подынтегральной функции:

$$\int_c \frac{U(t')}{t' - t} dt' = i\pi U(t) \tag{2}$$

Оставшийся интеграл по действительной оси с исключенной точкой должен вычисляться в смысле главного значения, т. е. из интегрирования исключается отрезок $(t - \rho, t + \rho)$ действительной оси, причем $\rho \to 0$. В итоге из (1)
и (2) получаем

$$i\pi U(t) + \mathscr{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{U(t')}{t' - t} dt' = 0 \tag{3}$$

и после разделения действительной и мнимой частей будем иметь равенства, приведенные в условии задачи.
2.147. $\Gamma\omega = ca^2(\omega)/4\pi^2$

2.148. $A(t) = |U(t)|, \Phi(t) = \omega_0 t + \operatorname{arctg}\left(i\frac{U^*-U}{U^*+U}\right)$.
2.149. $|a(\omega)|^2 = \frac{A_0^2}{(\omega-\omega_0)^2+\gamma^2/4}$.

Сигнал будет узкополосным (квазимонохроматическим) при $\gamma \ll \omega_0$. Если определить Δt как время, за которое интенсивность сигнала $I \propto |U(t)|^2$ уменьшается в e раз, а $\Delta\omega$ - как расстройку, при которой спектральная мощность уменьшается тоже в e раз, то $\Delta t \cdot \Delta\omega = \sqrt{e-1}/2$. Полученная в этой задаче форма спектра называется лоренцевским контуром.
2.150. Выберем лоренцевскую калибровку потенциалов (2.105). Функция χ (см. пример 2.19) удовлетворяет однородному уравнению Даламбера (2.111). Такому же уравнению удовлетворяют φ и $\partial\chi/\partial t$. Поэтому с помощью калибровочного преобразования можно выбрать такую χ, чтобы обратить в нуль скалярный потенциал: $\varphi' = \varphi - (1/c)(\partial\chi/\partial t) = 0$.
2.151. Приведенные в ответе формулы получаются из очевидного выражения $\Delta N = 2\Delta n_1 \Delta n_2 \Delta n_3$ для числа собственных колебаний поля.
2.152. Разложим действительные орты $\varepsilon_\alpha (\alpha = 1, 2, 3)$ некоторой декартовой системы координат по трем взаимно ортогональным ортам $e^{(1)}$, $e^{(2)}$, $\boldsymbol{n}$: $\varepsilon_\alpha = e_\alpha^{(1)*} e^{(1)} + e_\alpha^{(2)*} e^{(2)} + n_\alpha \boldsymbol{n}$. Составив скалярные произведения, получим $\delta_{\alpha\beta} = \varepsilon_\alpha \cdot \varepsilon_\beta = e_\alpha^{(1)} e_\beta^{(1)*} + e_\alpha^{(2)} e_\beta^{(2)*} + n_\alpha n_\beta$.

5 Radiation of Fields

(пока из лл8, но может быть очень многое про это еще из статей буду добирать.)

(в отдельной записи про излучение и рассеяния - добавляются дополнительные детали, тут - полная суть. она более развитая, чем в теории поля.)

5.1 Main Models of Radiation

(пока не писал, да и что-то не усвоил, см. ЛЛ2)

5.2 5 Radiation and Scattering of Electromagnetic Waves

5.2.1 5.1. The Green's Function and Retarded Potentials

Излучение электромагнитных волн удобно изучать с помощью электромагнитных потенциалов, удовлетворяющих неоднородным уравнениям Даламбера

$$\left.\begin{aligned} \Delta\boldsymbol{A} - \tfrac{1}{c^2}\tfrac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} &= -\tfrac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}, t) \\ \Delta\varphi - \tfrac{1}{c^2}\tfrac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} &= -4\pi\rho(r, t) \end{aligned}\right\} \tag{5.1}$$

и условию Лоренца

$$\operatorname{div}\boldsymbol{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0 \tag{5.2}$$

Мы получим решения этих уравнений в безграничном пространстве, предполагая, что источники поля j, ρ распределены в конечной области пространства и представляют собой известные функции координат и времени. Следует подчеркнуть, что такая постановка задачи с самого начала носит приближенный характер. В действительности создаваемое заряженными частицами поле влияет на их движение, поэтому правые части уравнений (5.1), строго говоря, представляют собой нелинейные функционалы от искомых потенциалов. Но во многих случаях (хотя и не всегда - см. раздел 5.4) обратное влияние собственного поля на движение зарядов оказывается малым и им можно пренебречь. При этом задача линеаризуется. Именно такую задачу мы и будем решать.

Функции Грина волнового уравнения. Определим функцию Грина $G(\boldsymbol{r}, t; \boldsymbol{r}', t')$ как решение волнового уравнения для безграничного пространства с дельтаобразной правой частью:

$$\Delta G - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} = -4\pi\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')\,\delta(t - t') \tag{5.3}$$

Решение неоднородного волнового уравнения можно записать с помощью функции Грина в виде интеграла:

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t) = \frac{1}{c}\int G(\boldsymbol{r}, t; \boldsymbol{r}', t')\, j(\boldsymbol{r}', t')\, d^3r'dt' \tag{5.4}$$

Применяя к $\boldsymbol{A}(r, t)$ оператор Даламбера и пользуясь (5.3), убеждаемся, что уравнение (5.1) удовлетворяется.

Пример 5.1. Показать, что функиия Грина волнового уравнения зависит только от разностей $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}', \tau = t - t'$.

Решение. Правая часть уравнения (5.3) зависит только от $\boldsymbol{R}$ и τ, а производные в левой части при фиксированных $\boldsymbol{r}'$ и t' можно брать по $\boldsymbol{R}$ и τ. При этом уравнение (5.3) примет вид

$$\Delta G - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 G}{\partial \tau^2} = -4\pi\delta(\boldsymbol{R})\delta(\tau) \tag{5.5}$$

где оператор Δ действует на координаты $\boldsymbol{R}$. Из вида уравнения следует, что $G(\boldsymbol{r}, t; \boldsymbol{r}', \boldsymbol{t}') = G(\boldsymbol{R}, \tau)$.

Пример 5.2. Из уравнения (5.5) найти наиболее общий вид фурье-образа $\widetilde{G}(\boldsymbol{k}, \omega)$ разложения функии Грина по плоским монохроматическим волнам (см. формульы (2.114)).

Решение. Разлагая обе части уравнения (5.5) по плоским монохроматическим волнам в соответствии со второй формулой (2.114), получаем алгебраическое уравнение

$$\left(k^2 - \omega^2/c^2\right)\widetilde{G}(\boldsymbol{k}, \omega) = 4\pi$$

Формальное решение последнего уравнения имеет вид

$$\widetilde{G}(\boldsymbol{k}, \omega) = \frac{4\pi}{k^2 - \omega^2/c^2} \tag{5.6}$$

Оно является формальным потому, что имеет сингулярность при $k^2 = \omega^2/c^2$ и требует дополнительной информации для выполнения обратного преобразования Фурье, т. е. задания правила интегрирования сингулярной функции. Кроме того, решение (5.6) не является общим: в нем пропущено решение однородного волнового уравнения, имеющее вид $F(\boldsymbol{k}, \omega)\delta(k^2 - \omega^2/c^2)$, где функция F должна быть ограниченной при $\omega^2 = k^2c^2$. Указанная функция
является решением однородного волнового уравнения в силу равенства типа $x\delta(x) = 0$. Таким образом, наиболее общий вид фурье-образа функции Грина следующий:

$$\widetilde{G}(\boldsymbol{k}, \omega) = \frac{4\pi}{k^2 - \omega^2/c^2} + F(\boldsymbol{k}, \omega)\delta\left(k^2 - \omega^2/c^2\right) \tag{5.7}$$

из которого в зависимости от правила интегрирования сингулярной дроби и вида функции F получаются разные функции Грина (см. пример 5.3 и задачи $5.2 - 5.4$).

Пример 5.3. Запаздывающей функиией Грина $G^R(R, \tau)$ волнового уравнения называется решение уравнения (5.5), удовлетворяющее условию

$$G^R(R,\tau)=0 \quad \text{при} \quad \tau<0 \tag{5.8}$$

Указать правило обхода полюсов при вычислении интеграла Фурье по частоте, приводящее к выполнению указанного условия, и вычислить $G^R(R,\tau)$.

Решение. Решение однородного уравнения представляет собой набор плоских монохроматических волн и не может удовлетворять условию (5.8). Поэтому полагаем в (5.7) $F=0$ и при интегрировании по $d\omega$ деформируем путь интегрирования в комплексной плоскости, обходя полюсы подинтегрального выражения $\omega=\pm\omega_k=\pm ck$ сверху (рис. 5.1). При $\tau>0$ замыкаем путь интегрирования дугой большого радиуса в нижней полуплоскости, на которой подынтегральное выражение экспоненциально мало, и получаем сумму вычетов относительно двух полюсов:

$$G^R(\boldsymbol{k},\tau)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{2\pi}\widetilde{G}(k,\omega)\exp(-i\omega\tau)=$$
$$=\frac{4\pi c^2\sin(\omega_k\tau)}{\omega_k},\quad \tau>0$$

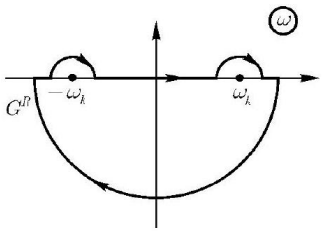


Рис. 5.1

При $\tau<0$ замыкаем контур интегрирования дугой большого радиуса в верхней полуплоскости и получаем нуль ввиду отсутствия полюсов внутри контура: $G(k,\tau)=0$ при $\tau<0$.

При интегрировании по волновым векторам используем сферические координаты с полярной осью вдоль $\boldsymbol{R}$. Представив $d^3k=k^2dkd\Omega_k$, вычисляем интеграл

$$\int\exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{R})d\Omega_k=2\pi\int\limits_0^{\pi}\exp(ikR\cos\vartheta)\sin\vartheta d\vartheta=\frac{4\pi}{kR}\sin(kR)$$

В итоге будем иметь

$$G^R(R,\tau)=\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}G^R(k,\tau)=\frac{2c}{\pi R}\int\limits_0^{\infty}\sin(kR)\sin(kc\tau)dk$$

Представив произведение синусов в виде разности косинусов, и воспользовавшись представлением (1.219) дельта-функции, получим окончательно

$$G^R(R,\tau)=\frac{1}{R}\delta\left(\tau-\frac{R}{c}\right) \tag{5.9}$$

Условие (5.8) обеспечено аргументом дельта-функции. Решение (5.9) представляет собой бесконечно тонкий сферический волновой пакет, испущенный в момент t' из точки $R=0$ и распространяющийся со скоростью c.

Другие функции Грина, также удовлетворяющие уравнению (5.5), см. в задачах 5.2-5.9.

Запаздывающие потенциалы. Запаздывающая функция Грина играет важную роль в классической электродинамике, так как она обеспечивает принцип причинности: причина (движение зарядов в источнике) должна предшествовать следствию (изменению поля в точке наблюдения). С помощью (5.4) и (5.9) находим запаздывающие потенциалы:

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{c}\int\frac{\boldsymbol{j}\left(\boldsymbol{r}',t-\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|/c\right)}{\left|r-\boldsymbol{r}'\right|}dV' \tag{5.10}$$

$$\varphi(\boldsymbol{r},t)=\int\frac{\rho\left(r',t-\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|/c\right)}{\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|}dV' \tag{5.11}$$

Временной аргумент распределения зарядов и токов показывает, что поле в точке r в момент t определяется значениями величин j и ρ в точке r' в предшествующий момент $t'=t-R/c$. Электромагнитные возмущения в вакууме распространяются со скоростью c.

Пример 5.4. Записать фурье-образы разложения запаздываюших потенциалов $\boldsymbol{A}^R_\omega(\boldsymbol{r}),\varphi^R_\omega(r)$ и напряженностей электромагнитного поля на монохроматические компоненты.

Решение. При апериодическом движении частиц имеем по определению компонент Фурье (см. формулу (1.250))

$$\boldsymbol{A}^R_\omega(\boldsymbol{r})=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{A}^R(\boldsymbol{r},t)e^{i\omega t}dt=\frac{1}{c}\int\frac{\exp\left(i\omega\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|/c\right)}{\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|}dV'\int\limits_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{j}\left(\boldsymbol{r}',\tau\right)e^{i\omega\tau}d\tau$$

где $\tau=t-\left|r-r'\right|/c$, или в окончательной форме

$$\boldsymbol{A}^R_\omega(\boldsymbol{r})=\frac{1}{c}\int\frac{\exp\left(i\omega\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|/c\right)}{\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|}j_\omega\left(\boldsymbol{r}'\right)dV' \tag{5.12}$$

и, аналогично,

$$\varphi^R_\omega(\boldsymbol{r})=\int\frac{\exp\left(i\omega\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|/c\right)}{\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|}\rho_\omega\left(\boldsymbol{r}'\right)dV' \tag{5.13}$$

Множитель

$$G^R_\omega(R)=\frac{1}{R}\exp(i\omega R/c) \tag{5.14}$$

под интегралами (5.12) и (5.13) представляет собой гармонику Фурье запаздывающей функции Грина. Напряженности поля выразятся в виде

$$\boldsymbol{H}_\omega(\boldsymbol{r})=\nabla\times\boldsymbol{A}^R_\omega(\boldsymbol{r}),\quad\boldsymbol{E}_\omega=-\frac{i\omega}{c}\boldsymbol{A}^R_\omega(\boldsymbol{r})-\nabla\varphi^R_\omega(\boldsymbol{r}) \tag{5.15}$$

Если движение частиц периодично с периодом $T=2\pi/\omega$, то потенциалы и напряженности поля можно разложить в ряды Фурье. Удобно разложение по экспонентам с мнимыми показателями типа (1.245). Разложение будет содержать частоты $\omega_m=m\omega,m=0,\pm1,\pm2,\ldots$:

$$\boldsymbol{A}^R_m(\boldsymbol{r})=\frac{1}{c}\int\frac{\exp\left(i\omega_m\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|/c\right)}{\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|}\boldsymbol{j}_m\left(r'\right)dV'$$

$$\varphi^R_m(\boldsymbol{r})=\int\frac{\exp\left(i\omega_m\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|/c\right)}{\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|}\rho_m\left(\boldsymbol{r}'\right)dV' \tag{5.16}$$

где $j_m = (1/T)\int_0^T \boldsymbol{j}\,(r',t)\,e^{i\omega_m t}dt$ и аналогично для ρ_m. Напряженности поля примут вид

$$\boldsymbol{H}_m(\boldsymbol{r}) = \nabla \times \boldsymbol{A}_m^R(\boldsymbol{r}), \quad \boldsymbol{E}_m = -\frac{i\omega_m}{c}\boldsymbol{A}_m^R(\boldsymbol{r}) - \nabla\varphi_m^R(\boldsymbol{r}) \tag{5.17}$$

Излучение электромагнитных волн системой заряженных частиц в свободном пространстве - это процесс, при котором электромагнитное поле отрывается от источника и распространяется в виде волн на произвольные расстояния. Поэтому для расчета процесса излучения необходимо исследовать поле на большом расстоянии от источника, превышающем как размеры источника ($r \gg l$), так и длину излучаемой волны ($r \gg \lambda$, волновая зона). Структура поля в волновой зоне упрощается и становится похожей на поле плоской волны с характерными соотношениями (2.122) между векторами $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$:

$$\boldsymbol{H} = n \times \boldsymbol{E}, \quad \boldsymbol{E} = \boldsymbol{H} \times \boldsymbol{n}, \quad E = H \tag{5.18}$$

причем в данном случае $n = r/r$, если источник излучаемых волн находится вблизи начала координат. Справедливость соотношений (5.18) в волновой зоне будет подтверждена ниже прямым расчетом.

Энергия $dI/d\Omega$, излучаемая в направлении n в единицу телесного угла (дифференциальная интенсивность излучения) выразится через вектор Пойнтинга γ в виде

$$\frac{dI}{d\Omega} = \gamma \cdot \boldsymbol{n}r^2 = \frac{cr^2}{4\pi}\boldsymbol{H}^2(\boldsymbol{r},t) \tag{5.19}$$

Суммарная по всем направлениям (полная) интенсивность излучения получается интегрированием (5.19) по телесному углу:

$$I(r,t) = \frac{cr^2}{4\pi}\int \boldsymbol{H}^2(\boldsymbol{r},t)d\Omega = \frac{cr^2}{4\pi}\int \boldsymbol{E}^2(\boldsymbol{r},t)d\Omega \tag{5.20}$$

Зависимость I от r связана только с эффектом запаздывания, и через любую сферу с центром в источнике излучения в конечном счете пройдет вся излученная им энергия.

Спектральный состав излучения. Если движение частиц периодично, то средняя за период интенсивность излучения в данном направлении $\overline{dI}/d\Omega = (1/T)\int_0^T (dI/d\Omega)dt$ при подстановке в (5.19) разложения Фурье магнитного поля примет вид

$$\frac{\overline{dI}}{d\Omega} = \frac{cr^2}{4\pi T}\int_0^T \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)\cdot\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)dt = \frac{cr^2}{4\pi}\left|\sum_{m=-\infty}^{\infty}\boldsymbol{H}_m(\boldsymbol{r})\right|^2 = \frac{cr^2}{2\pi}\sum_{m=1}^{\infty}|\boldsymbol{H}_m(\boldsymbol{r})|^2$$

(нулевая гармоника поля излучения отсутствует, $\boldsymbol{H}_{-m} = \boldsymbol{H}_m^*$). Из структуры полученного выражения следует, что отдельные слагаемые можно интерпретировать как дифференциальные интенсивности излучения на соответствующих частотах $\omega_m = m\omega, m = 1, 2, \ldots$:

$$\frac{dI_m}{d\Omega} = \frac{cr^2}{2\pi}|\boldsymbol{H}_m(\boldsymbol{r})|^2 \tag{5.21}$$

Если движение частиц апериодично и излучение продолжается конечное время, выключаясь при $t \to \pm\infty$, то спектр излучения оказывается непрерывным. Полная энергия $dE^{\mathrm{rad}}/d\Omega$, излученная в заданном направлении n, выразится интегралом

$$\frac{d\mathscr{E}^{\mathrm{rad}}}{d\Omega} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dI(t)}{d\Omega} dt$$

Разложим поле излучения в интеграл Фурье и воспользуемся снова формулой (5.19). Находим

$$\frac{dE^{\mathscr{C}ad}}{d\Omega} = \frac{cr^2}{4\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)\cdot\boldsymbol{H}(r,t)dt = \frac{cr^2}{8\pi^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\boldsymbol{H}_\omega(\boldsymbol{r})|^2 \, d\omega =$$

$$= \frac{cr^2}{4\pi^2} \int\limits_{0}^{\infty} |\boldsymbol{H}_\omega(\boldsymbol{r})|^2 \, d\omega$$

Величину

$$\frac{d^2 I_\omega}{d\omega d\Omega} = \frac{cr^2}{4\pi^2} |\boldsymbol{H}_\omega(\boldsymbol{r})|^2 \tag{5.22}$$

не зависящую от r в волновой зоне, можно интерпретировать как энергию, излучаемую за все время процесса в данном направлении на частоте ω (в расчете на единицу телесного угла и на единичный интервал частот). Формулы (5.21) и (5.22) похожи, но числовые коэффициенты и размерности их различны.

Рекомендуемая литература: [Колоколов и др. (2000)], [Джексон (1975)], [Иваненко и Соколов (1951)], [Бредов и др. (1985)], [Гальцов и др. (1991)], [Ландау и Лифшиц, Теория поля], [Соколов и Тернов (1983)].

Задачи

5.1. Показать, что запаздывающие потенциалы (5.10), (5.11) удовлетворяют условию Лоренца (5.3).

5.2. Опережающей функцией Грина $G^A(R,\tau)$ называется решение уравнения (5.5), которое удовлетворяет условию $G^A(R,\tau) = 0$ при $\tau > 0$. Указать форму контура интегрирования в плоскости комплексной частоты ω, приводящее к этому условию, и построить в явном виде опережающую функцию Грина $G^A(R,\tau)$.

5.3. Показать, что запаздывающую (5.9) и опережающую (см. предыдущую задачу) функции Грина можно записать в лоренц-инвариантной форме $G^{R,A}(\boldsymbol{R},\tau) = 2c\Theta(\pm\tau)\delta\left(X_i X^i\right)$, где $X^i = (c\tau, \boldsymbol{R})$, Θ - ступенчатая функция (1.212).

УкАзАниЕ. Использовать свойство дельта-функции (1.209).

5.4. Показать, что фурье-образы запаздывающей и опережающей функций Грина можно записать в форме

$$\widetilde{G}^{R,A}(\boldsymbol{k},\omega) = -4\pi\frac{\mathscr{P}}{k_i k^i} \pm i4\pi^2\epsilon\left(k^0\right)\delta\left(k_i k^i\right)$$

где $\epsilon(x) = \Theta(x) - \Theta(-x)$ - знаковая функция, $k^i = (\omega/c, \boldsymbol{k})$.

УказАниЕ. Воспользоваться правилами (1.223) интегрирования сингулярных выражений.

5.5. Записать компоненты Фурье $\boldsymbol{A}^A_\omega(\boldsymbol{r}), \varphi^A_\omega(\boldsymbol{r})$ опережающих потенциалов, которые получаются по формуле (5.4) при подстановке в нее опережающей функции Грина G^A

(см. задачу 5.2). Сравнить их с (5.12), (5.13). Какой физический смысл можно приписать тем и другим?

5.6. Показать, что гармоники Фурье $G_\omega^{R,A}(R)$ запаздывающей и опережающей функций Грина удовлетворяют уравнению

$$\left(\widehat{H}_\omega \pm i\omega 0\right) G_\omega^{R,A}(R) = -4\pi\delta(\boldsymbol{R}) \tag{1}$$

где оператор

$$\hat{H}_\omega = \Delta + (\omega/c)^2$$

действует на координаты $\boldsymbol{R}$. Бесконечно малая мнимая добавка $\pm i\omega 0$ дает правила обхода полюсов в плоскости комплексного ω.

УкАзАниЕ. Перейти в уравнении (1) к разложению Фурье по координатам и сравнить результат с полученными ранее фурье-образами (см. формулу (5.6) и задачу 5.2). Учесть правила обхода полюсов, изображенные на рис. 5.1 и 5.3 .

5.7^. Показать, что решение уравнения (1) предыдущей задачи можно записать в виде

$$G_\omega^{R,A}(\boldsymbol{R}) = \pm\frac{4\pi i}{\omega}\int\limits_0^\infty d\tau \exp\left[\pm\frac{i}{\omega}\left(\widehat{H}_\omega \pm i\omega 0\right)\tau\right]\delta(\boldsymbol{R})$$

Показать также, что подынтегральное выражение

$$\psi^{R,A}(\boldsymbol{R},\tau) = \exp\left[\pm\frac{i}{\omega}\left(\hat{H}_\omega \pm i\omega 0\right)\tau\right]\delta(\boldsymbol{R})$$

удовлетворяет «уравнению Шредингера»

$$\mp i\frac{\partial\psi^{R,A}}{\partial t} = \left(\widehat{H}_\omega \pm i\omega 0\right)\psi^{R,A}$$

и начальному условию $\psi^{R,A}(\boldsymbol{R},0) = \delta(\boldsymbol{R})$, где $t = \tau/\omega$ играет роль времени.

5.8*. Вычислить функцию $\psi^{R,A}(\boldsymbol{R},\tau)$, определенную в предыдущей задаче.

5.9. Определим функции $G^\pm(\boldsymbol{R},\tau)$ следующими равенствами:
$G^+(\boldsymbol{R},\tau) = \frac{1}{2}\left(G^R(\boldsymbol{R},\tau) + G^A(\boldsymbol{R},\tau)\right)$, $\quad G^-(\boldsymbol{R},\tau) = G^A(\boldsymbol{R},\tau) - G^R(\boldsymbol{R},\tau)$.
Найти их фурье-образы и указать дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют эти функции.

5.10. Записать уравнения, которым удовлетворяют электромагнитные потенциалы $\varphi(r,t)$ и $\boldsymbol{A}(r,t)$, если вместо условия Лоренца (5.3) на них наложено условие $\operatorname{div}\boldsymbol{A} = 0$ (кулоновская калибровка). Представить уравнения в такой форме, чтобы в каждое из них входил один из потенциалов и источников поля.

5.11. Записать уравнения, которым удовлетворяют безвихревая (потенциальная) и соленоидальная части векторов электромагнитного поля $\boldsymbol{E}(r,t), \boldsymbol{H}(r,t)$. Показать, что потенциальная часть электрического поля описывает мгновенное (незапаздывающее) кулоновское поле, которое
создается распределением зарядов в тот же момент времени, для которого определяется $\boldsymbol{E}^\parallel(\boldsymbol{r},t)$.

5.12*. Разложить запаздывающую функцию Грина (5.14) в ряд по сферическим гармоникам $Y_{lm}(\vartheta,\alpha)$, где углы ϑ,α определяют направление вектора r.

5.13. Представить фурье-образы запаздывающих потенциалов $\boldsymbol{A}_\omega(r)$, $\varphi_\omega(r)$ в волновой зоне ($kr \gg 1$) в виде разложения по сферическим гармоникам Лежандра $Y_{lm}(\vartheta,\alpha)$. Как связаны коэффициенты разложения потенциалов, если сами потенциалы удовлетворяют условию Лоренца (5.2)?

УказаниЕ. Использовать разложение функции Грина $G_\omega^R(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$ из предыдущей задачи.

5.14*. Построим три последовательности векторных шаровых функций (шаровых векторов) $\mathscr{Y}_{lm}^{(k)}(\vartheta,\alpha)$, определив их через сферические функции Лежандра соотношениями

$$\mathscr{Y}_{lm}^{(1)}(\vartheta,\alpha)=[l(l+1)]^{-1/2}\nabla_{\vartheta\alpha}Y_{lm}(\vartheta,\alpha)$$
$$\mathscr{Y}_{lm}^{(2)}(\vartheta,\alpha)=[l(l+1)]^{-1/2}\widehat{l}Y_{lm}(\vartheta,\alpha),\quad l=1,2,\ldots,\quad \mathscr{Y}_{00}^{(1)}=\mathscr{Y}_{00}^{(2)}=0$$
$$\mathscr{Y}_{lm}^{(3)}(\vartheta,\alpha)=nY_{lm}(\vartheta,\alpha)$$

где $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{r}/r, \widehat{\boldsymbol{l}}=-i\boldsymbol{r}\times\nabla=-i\boldsymbol{n}\times\nabla_{\vartheta\alpha}, \nabla_{\vartheta\alpha}=\boldsymbol{e}_\vartheta\partial/\partial\vartheta+(\boldsymbol{e}_\alpha/\sin\vartheta)(\partial/\partial\alpha)$. $\widehat{l}$ - эрмитов оператор момента импульса в квантовой механике. Доказать, что шаровые векторы с разными k взаимно перпендикулярны и образуют полную ортонормированную систему функций на сфере:

$$\int \mathscr{Y}_{l'm'}^{(k')*}(\vartheta,\alpha)\cdot\mathscr{Y}_{lm}^{(k)}(\vartheta,\alpha)d\Omega=\delta_{ll'}\delta_{mm'}\delta_{kk'}$$

Показать также, что при инверсии координат (замена $\boldsymbol{n}\to-n$)$\mathscr{Y}_{lm}^{(1)}$ и $\mathscr{Y}_{lm}^{(3)}$ приобретают множитель $(-1)^{l+1}$, а $\mathscr{Y}_{lm}^{(2)}$ - множитель $(-1)^l$.

5.15. Показать, что в волновой зоне ($r\gg\lambda$) при выполнении условия Лоренца (5.3) скалярный потенциал ограниченной излучающей системы связан с ее векторным потенциалом соотношением

$$\varphi(r,t)=\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)}{r}+\frac{q}{r}$$

где $q=\text{const}$ - полный электрический заряд системы.

5.2.2 5.2. Radiation from Non-Relativistic Systems of Charges and Currents

Исследование излучения упрощается, если время распространения электромагнитных возмущений в пределах излучающей системы мало по сравнению с характерным временем T движения заряженных частиц в системе:

$$l/c\ll T \tag{5.23}$$

При периодическом движении T - это период, поэтому неравенству (5.23) можно придать форму

$$l\ll\lambda \tag{5.24}$$

где λ - длина волны излучения. Наконец, $l/T\approx v$ - характерная скорость частиц, и условие (5.23) сводится к требованию, чтобы скорость частиц была нерелятивистской:

$$v\ll c \tag{5.25}$$

Проанализируем поле излучения системы зарядов, удовлетворяющих условиям (5.23)-(5.25). Для этого достаточно вычислить векторный потенциал в волновой зоне ($r\gg\lambda$) и учесть лишь члены, обратно пропорциональные расстоянию r до системы, так как только они дадут вклад в излучаемую системой энергию.

Исходим из запаздывающего потенциала (5.10) и разлагаем $|r - r'|$ в ряд по отношению размеров системы к расстоянию $r : |r - r'| \approx r - n \cdot r'$, где $n = r/r$. Представим плотность тока, стоящего под знаком интеграла, в виде разложения

$$\boldsymbol{j}\left(r', t - \frac{r}{c} + \frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}'}{c}\right) = j\left(r', t - \frac{r}{c}\right) + \dot{j}\left(r', t - \frac{r}{c}\right)\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}'}{c} + \ldots \tag{5.26}$$

где точкой обозначена производная по времени. В знаменателе же подынтегрального выражения оставляем член нулевого приближения, заменяя $|r - r'|$ на r.

Электрическое дипольное излучение. Взяв из разложения (5.26) первый неисчезающий член, будем иметь

$$A(r,t) = \frac{1}{cr}\int j\left(r', t - \frac{r}{c}\right) dV'$$

Далее пользуемся тождеством

$$a\cdot\boldsymbol{j} = \boldsymbol{j}\cdot\nabla'(a\cdot r') = \nabla'\cdot[\boldsymbol{j}(a\cdot r')] - a\cdot r'(\nabla'\cdot\boldsymbol{j})$$

где a - постоянный вектор, и получаем

$$a\cdot\int j\left(r', t - \frac{r}{c}\right) dV' = a\cdot\frac{\partial}{\partial t}\int r'\rho\left(r', t - \frac{r}{c}\right) dV'$$

Здесь мы использовали уравнение непрерывности (2.47). Пользуясь определением электрического дипольного момента (2.23), можем записать $\int r'\dot{\rho}(r', t - r/c)\, dV' = \dot{\boldsymbol{p}}(t - r/c)$ и

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t) = \frac{\dot{\boldsymbol{p}}(t - r/c)}{cr} \tag{5.27}$$

Пример 5.5. Вьячислить напряэженности поля $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t), \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}, t)$ в волновой зоне электрического дипольного излучателя. Ввтчислить такжне энергию, излучаемую в единицу времени в направлении $\boldsymbol{n}$ (в расчете на единичу телесного угла) и суммарную по всем направлениям излучаемую энергию.

Решение. Удерживаем только члены порядка r^{-1}, которые получаются при дифференцировании аргумента $\dot{p}$, но не знаменателя:

$$\boldsymbol{H} = \operatorname{rot}\boldsymbol{A} = \frac{\ddot{p}\times\boldsymbol{n}}{c^2 r}, \quad \boldsymbol{n} = \frac{r}{r} \tag{5.28}$$

Электрический вектор $\boldsymbol{E}$ можно выразить через магнитный вектор $\boldsymbol{H}$ с помощью формул (5.19) для плоской волны:

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{H}\times\boldsymbol{n} = \frac{(\ddot{\boldsymbol{p}}\times\boldsymbol{n})\times n}{c^2 r} \tag{5.29}$$

Характерно, что в волновой зоне вектор Пойнтинга направлен по радиусу от источника и обратно пропорционален квадрату расстояния:

$$\gamma = \frac{c}{4\pi}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H} = \frac{c}{4\pi}H^2\boldsymbol{n}$$

Поэтому через элемент поверхности сферы $r^2 d\Omega$ внутри данного телесного угла $d\Omega$ пройдет одна и та же энергия (с учетом запаздывания) независимо от расстояния r. Дифференциальная интенсивность излучения примет вид

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{c}{4\pi}H^2 r^2 = \frac{[\ddot{\boldsymbol{p}}\times\boldsymbol{n}]^2}{4\pi c^3} = \frac{\ddot{\boldsymbol{p}}^2\sin^2\theta}{4\pi c^3} \tag{5.30}$$

где θ - угол между направлениями $\ddot{\boldsymbol{p}}$ и $\boldsymbol{n}$ в момент $t - r/c$. При интегрировании по всему телесному углу получим полную интенсивность излучения

$$I = \frac{2\ddot{p}^2}{3c^3} \tag{5.31}$$

Для отдельной заряженной частицы $\boldsymbol{p} = e\boldsymbol{r}$, и (5.31) дает формулу Лармора

$$I = \frac{2e^2\dot{\boldsymbol{v}}^2}{3c^3} \tag{5.32}$$

Из нее следует, что излучать может только ускоренно движущаяся частица, $\boldsymbol{v} \neq 0$

Рассмотренное излучение называется электрическим дипольным излучением, поскольку все величины выражаются через производные от электрического дипольного момента. При периодическом движении интенсивности излучения отдельных гармоник Фурье можно вычислить с помощью формул (5.21) и (5.28). Они имеют вид

$$I_m = \frac{4\omega_m^4}{3c^3} |\boldsymbol{p}_m|^2 \tag{5.33}$$

Если диполь колеблется с одной частотой ω, т.е. $\boldsymbol{p}(t) = \boldsymbol{p}_0 \cos \omega t = (p_0/2)\,(e^{-i\omega t} + e^{i\omega t})$, то $p_1 = p_0/2$ и интенсивность излучения, усредненная по периоду колебаний, $\bar{I} = I_1 = \omega^4 p_0^2/3c^3$.

Квадрупольное и магнитно-дипольное излучение. При равенстве нулю или постоянстве дипольного момента электрическое дипольное излучение отсутствует, и для расчета поля излучения нужно учесть следующие члены разложения (5.26). Такая ситуация возникает, например, в случае системы заряженных частиц с одинаковым отношением $e_a/m_a = \eta$:

$$\boldsymbol{p} = \sum_a e_a \boldsymbol{r}_a = \eta \sum_a m_a \boldsymbol{r}_a = \eta \boldsymbol{R} \sum_a m_a$$

Здесь $\boldsymbol{R}$ - радиус-вектор центра масс; в отсутствие внешних сил $\dot{\boldsymbol{R}} = \boldsymbol{V} = \text{const}$, $\ddot{\boldsymbol{R}} = 0$, дипольное излучение обращается в нуль.

Пример 5.6. Вычислить векторный потениал ограниченной системы зарядов в отсутствие электрического дипольного момента с учетом членов следуюшего порядка малости по параметру l/ д в (5.26). Результат выразить через магнитный дипольный и электрический квадрупольный моменты.. Вычислить дифференциальную и полную интенсивности магнитно-дипольного и электрического квадрупольного излучения.

Решение. Преобразуем второй член в правой части (5.26) с помощью тождества

$$(\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{r}')\,\dot{\boldsymbol{j}} = (1/2)\left[(\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{r}')\,\dot{\boldsymbol{j}} + (\boldsymbol{n} \cdot \dot{\boldsymbol{j}})\boldsymbol{r}'\right] + (1/2)\left(\boldsymbol{r}' \times \dot{\boldsymbol{j}}\right) \times \boldsymbol{n}$$

Подстановка этого выражения в (5.10) дает векторный потенциал вида

$$\boldsymbol{A} = \frac{\dot{\boldsymbol{m}} \times \boldsymbol{n}}{cr} + \frac{1}{2c^2 r}\frac{\partial}{\partial t}\int \left[(\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{r}')\,\boldsymbol{j} + (\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{j})\boldsymbol{r}'\right] dV' \tag{5.34}$$

Здесь $\dot{m}$ - производная от магнитного момента (2.59) системы по времени. Второй интеграл в (5.34) преобразуем с помощью тождества $\int \boldsymbol{P} dV = -\int \boldsymbol{r}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{P} dV$ и уравнения непрерывности, где $\boldsymbol{P}$ - произвольный вектор, отличный от нуля в конечной области, а интегрирование производится по всему пространству. В результате получим

$$\boldsymbol{A} = \frac{\dot{\boldsymbol{m}} \times \boldsymbol{n}}{cr} + \frac{1}{2c^2 r}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int \boldsymbol{r}'\,(\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{r}')\,\rho dV' \tag{5.35}$$

Интеграл в последнем равенстве можно записать через электрический квадрупольный момент (2.24). Введя тензорные обозначения, будем иметь

$$\int x_\alpha \left(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}'\right)\rho dV' = (1/3)Q_{\alpha\beta}n_\beta + (1/3)n_\alpha \int \rho r'^2 dV'$$

В итоге находим векторный потенциал в волновой зоне:

$$\boldsymbol{A} = \frac{\dot{\boldsymbol{m}}\times\boldsymbol{n}}{cr} + \frac{\ddot{\boldsymbol{Q}}}{6c^2 r} + \frac{\boldsymbol{n}}{6c^2 r}\int \ddot{\rho}\left(\boldsymbol{r}', t - r/c\right) r'^2 dV', \quad \text{где } Q_\alpha = Q_{\alpha\beta}n_\beta \tag{5.36}$$

При вычислении напряженностей поля последнее слагаемое в (5.36) не дает вклада, поле излучения выражается только через магнитный дипольный и электрический квадрупольный моменты:

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{c^2 r}\left\{(\dddot{\boldsymbol{m}}\times\boldsymbol{n})\times\boldsymbol{n} + \frac{1}{6c}\dddot{\boldsymbol{Q}}\times\boldsymbol{n}\right\} \tag{5.37}$$

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{c^2 r}\left\{\boldsymbol{n}\times\dddot{\boldsymbol{m}} + \frac{1}{6c}(\dddot{\boldsymbol{Q}}\times\boldsymbol{n})\times\boldsymbol{n}\right\}$$

Поле магнитного диполя получается из поля электрического диполя заменой $\ddot{p} \to \dddot{\boldsymbol{m}}, \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{H}, \boldsymbol{H} \to -\boldsymbol{E}$. При гармоническом движении зарядов $\ddot{\boldsymbol{p}} = -\omega^2 p, \dddot{\boldsymbol{m}} = -\omega^2\boldsymbol{m}, \dddot{\vec{Q}} = i\omega^3\boldsymbol{Q}$, поэтому интенсивности электрического и магнитного дипольных излучений пропорциональны ω^4, тогда как электрическое квадрупольное излучение пропорционально ω^6.

Имея напряженности поля, нетрудно вычислить дифференциальную интенсивность квадрупольного и магнитно-дипольного излучения в данном направлении $n : x$

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{1}{4\pi c^3}(\dddot{\boldsymbol{m}}\times n)^2 + \frac{1}{144\pi c^5}(\ddot{\dot{\boldsymbol{Q}}}\times n)^2 - \frac{1}{12\pi c^4}\dddot{\boldsymbol{m}}\cdot(\ddot{\dot{\boldsymbol{Q}}}\times\boldsymbol{n}) \tag{5.38}$$

При интегрировании (5.38) по направлениям вектора n следует записать все произведения векторов в тензорных обозначениях и воспользоваться формулами для усреднения компонент единичного вектора, полученными при решении задачи 1.33 . Суммарная по всем направлениям интенсивность излучения запишется в виде

$$I = \frac{2}{3c^3}\dddot{m}^2 + \frac{1}{180c^5}\dddot{Q}^2_{\alpha\beta} \tag{5.39}$$

По сравнению с интенсивностью электрического дипольного излучения (5.31) слагаемые в (5.39) содержат малый множитель $(l/\lambda)^2$. Поэтому они будут играть существенную роль только в отсутствие электрического дипольного излучения.

Вектор Герца и излучение антенн. Если излучателем является макроскопическое тело с размерами $l \geqslant \lambda$, то разложение поля излучения по мультиполям неприменимо, и следует пользоваться точными выражениями (5.10), (5.11) для запаздывающих потенциалов. Количество неизвестных функций можно уменьшить, если вместо потенциалов $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t), \varphi(\boldsymbol{r}, t)$, связанных условием Лоренца (5.2), ввести одну векторную функцию $\boldsymbol{Z}(r, t)$ (вектор Герца, или поляризационный потенциал) через которую выражаются электромагнитные потенциалы. Вектор Герца может быть двух типов: электрическим $\boldsymbol{Z}^{(e)}$ и магнитным $\boldsymbol{Z}^{(m)}$. Первый случай реализуется, когда источник состоит из электрических дипольных излучателей, распределенных с обьемной плотностью P, которая называется вектором электрической поляризации. Электромагнитные потенциалы связаны с электрическим вектором Герца соотношениями

$$\varphi = -\operatorname{div}\boldsymbol{Z}^{(e)}, \quad \boldsymbol{A} = \frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{Z}^{(e)}}{\partial t} \tag{5.40}$$

Распределение зарядов и токов электронейтральной системы выражается через вектор электрической поляризации по формулам

$$\rho = -\operatorname{div} \boldsymbol{P}, \quad j = \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t} \tag{5.41}$$

Уравнение непрерывности при этом выполняется, а полный заряд ограниченной системы должен быть равен нулю:

$$q = \int\limits_{V\to\infty} \rho dV = -\oint_{S\to\infty} \boldsymbol{P}\cdot d\boldsymbol{S} = 0$$

Полный электрический дипольный момент выражается в виде интеграла от вектора $\boldsymbol{P}$ по объему системы.

Для того, чтобы электромагнитные потенциалы удовлетворяли уравнениям (5.1) и соотношениям (5.40), вектор Герца следует подчинить неоднородному уравнению Даламбера:

$$\Delta \boldsymbol{Z}^{(e)} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{Z}^{(e)}}{\partial t^2} = -4\pi \boldsymbol{P} \tag{5.42}$$

Применяя к обеим частям (5.42) попеременно операторы - div и $\partial/c\partial t$, получим уравнения для потенциалов (5.1). Решение уравнения (5.42) можно записать по аналогии с запаздывающими потенциалами:

$$\boldsymbol{Z}^{(e)}(\boldsymbol{r},t) = \int \frac{\boldsymbol{P}\left(\boldsymbol{r}', t-\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|/c\right)}{\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|} dV' \tag{5.43}$$

Магнитный вектор Герца следует вводить, когда источник содержит магнитные дипольные излучатели, распределенные с плотностью $M(r,t)$, которая называется вектором магнитной поляризации. В этом случае вместо (5.41) имеем

$$\rho = 0, \quad j = c\operatorname{rot} M \tag{5.44}$$

интеграл по объему системы от $\boldsymbol{M}$ даст полный магнитный дипольный момент, а магнитный вектор Герца должен определяться из неоднородного волнового уравнения

$$\Delta \boldsymbol{Z}^{(m)} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{Z}^{(m)}}{\partial t^2} = -4\pi \boldsymbol{M} \tag{5.45}$$

Электромагнитные потенциалы выражаются формулами

$$\varphi = 0, \quad \boldsymbol{A} = \operatorname{rot} \boldsymbol{Z}^{(m)} \tag{5.46}$$

Пример 5.7. Принцип взаимности. Два независилых источника излучения характеризуются распределениями токов $\boldsymbol{j}_1, \boldsymbol{j}_2$ и создают монохроматические поля одинаковой частоты ω. Показать, что токи и напряженности полей связаныя соотношением

$$\int j_1 \cdot \boldsymbol{E}_2 dV = \int \boldsymbol{j}_2 \cdot \boldsymbol{E}_1 dV \tag{5.47}$$

где интегрирование производится по всему пространству.

Решение. В силу принципа суперпозиции поле каждого из источников удовлетворяет своей системе уравнений Максвелла:

$$\begin{array}{ll} \operatorname{rot} \boldsymbol{H}_1 = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}_1 - \frac{i\omega}{c}\boldsymbol{E}_1, & \operatorname{rot} \boldsymbol{H}_2 = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}_2 - \frac{i\omega}{c}\boldsymbol{E}_2, \\ \operatorname{rot} \boldsymbol{E}_1 = \frac{i\omega}{c}\boldsymbol{H}_1, & \operatorname{rot} \boldsymbol{E}_2 = \frac{i\omega}{c}\boldsymbol{H}_2. \end{array}$$

Проведя простые преобразования, подобных тем, которые производились при решении примера 2.15, и использовав теорему Остроградского - Гаусса, получим

$$\int \boldsymbol{j}_1 \cdot \boldsymbol{E}_2 dV = \int \boldsymbol{j}_2 \cdot \boldsymbol{E}_1 dV + \frac{c}{4\pi} \oint_{S\to\infty} (\boldsymbol{H}_1 \times \boldsymbol{E}_2 - \boldsymbol{H}_2 \times \boldsymbol{E}_1) \cdot d\boldsymbol{S}$$

На бесконечно удаленной поверхности выражение, стоящее под знаком интеграла, обращается в нуль в силу соотношений (5.18), так как векторы $\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2$ от источников, находящихся на конечном расстоянии друг от друга, совпадают. Это приводит к (5.47).

Путем несложных вычислений нетрудно показать, что для электрического диполя, колеблющегося с частотой ω $\int jdV = i\omega p$, поэтому для двух электрических диполей малых размеров соотношение (5.47) принимает вид

$$\boldsymbol{p}_1 \cdot \boldsymbol{E}_2 = \boldsymbol{p}_2 \cdot \boldsymbol{E}_1 \tag{5.48}$$

Если дипольные излучатели представляют собой квазилинейные проводники, длины которых малы по сравнению с длиной волны излучения, то путем замены $jdV \to Jdl$ получим из (5.47)

$$J_1 U_2(1) = J_2 U_1(2) \tag{5.49}$$

где $U_i(k) = \int \boldsymbol{E}_k \cdot d\boldsymbol{l}_i$ - разности потенциалов, создаваемые источниками i на концах проводников k, J_i - силы токов в излучателях. Равенство (5.49) не зависит от того, в каком режиме - активном (как передатчик) или пассивном (как приемник) работает данный диполь. Меняются только силы токов, угловые диаграммы направленности в обоих режимах одни и те же.

Это свойство, как оказывается, сохраняется и для произвольных антенных систем. Диаграммы направленности любой антенны при работе на прием и передачу совпадают.

Рекомендуемая литература: [Медведев (1977)], [Бредов и др. (1985)], [Пановский и Филипс (1963)], [Ландау и Лифшиц, Теория поля], [Батыгин и Топтыгин (1970)], [Алексеев (1977)], [Джексон (1975)], [Стрэттон (1948)].

Задачи

5.16*. Вычислить электромагнитные потенциалы и напряженности поля на расстояниях, удовлетворяющих условию $l \ll r \ll \lambda$. Учесть электрические дипольный, квадрупольный и магнитный дипольный члены.

5.17. Для электрического дипольного излучателя вычислить в волновой зоне электрическое поле по формуле $\boldsymbol{E} = -(1/c)\partial \boldsymbol{A}/\partial t$ и показать, что его можно записать в виде $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{H} \times \boldsymbol{n}$, где $\boldsymbol{H}$ дается формулой (5.28).

5.18. Вычислить напряженности поля точечного электрического дипольного осциллятора с моментом $p = p_0 \cos \omega t$ на расстояниях, удовлетворяющих условию $l \ll r$ при любом соотношении между r и λ.

5.19. Найти уравнения силовых линий электрического и магнитного полей электрического осциллятора предыдущей задачи. Проследить за качественным изменением картины поля в зоне, прилегающей к осциллятору, и в волновой зоне.

5.20. Найти выражение для потери момента импульса в единицу времени $-dL/dt$ системой, излучающей как электрический диполь.

УКАЗАНИЕ. Можно использовать результаты задачи (4.143) (формулы (6), (7)).

5.21*. Найти электромагнитное поле $\boldsymbol{H}, \boldsymbol{E}$ заряда e, движущегося равномерно по окружности радиуса a. Движение нерелятивистское, угловая скорость ω. Расстояние до точки наблюдения $r \gg a$. Найти средние по времени угловое распределение $\overline{dI}/d\Omega$ и полную интенсивность $\bar{I}$ излучения, а также исследовать его поляризацию.

5.22. Две одинаковые металлические пластины радиуса R находятся на взаимном расстоянии $h \ll R$ и образуют обкладки плоского конденсатора. Разность потенциалов на обкладках изменяется по закону $U(t) = U_0 \cos \omega t$, причем $R \ll 2\pi c/\omega$. Вычислить среднюю по времени интенсивность излучения.

5.23. При переходе электрона в атоме водорода из состояния $2p$ в $1s$ эффективная плотность электронного заряда изменяется по закону

$$\rho(r, \vartheta, \alpha, t) = \frac{\sqrt{2}e}{\sqrt{3}a_B^4} r e^{-3r/2a_B} Y_{00} Y_{10}(\vartheta, \alpha) e^{-i\omega_0 t}$$

где $a_B = \hbar^2/m_e e^2$ - боровский радиус, $\omega_0 = 3e^2/8\hbar a_B$ - частота перехода между электронными состояниями, Y_{lm} - сферические функции Лежандра. Вычислить в электрическом дипольном приближении среднюю по времени
интенсивность излучения. Сравнить полученный результат с результатом квантового расчета (см. раздел 6.2, задача 6.49).

5.24. Плоский квадруполь образован четырьмя точечными зарядами $\pm q$, расположенными в вершинах квадрата со стороной a и вращается со скоростью ω вокруг оси, проходящей через центр квадрата перпендикулярно его плоскости. Вычислить угловое распределение интенсивности излучения, усредненного по времени, и полную интенсивность при условии $a \ll 2\pi c/\omega$.

5.25. На покоящуюся частицу с зарядом e и массой m в момент $t = 0$ начинает действовать электрическое поле $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 e^{-\alpha t} \cos \omega_0 t$, где амплитуда $\boldsymbol{E}_0$ и α - постоянные. Найти спектральную плотность излучения $dI_\omega/d\omega$.

5.26. Дипольные моменты некоторой ограниченной системы зарядов изменяются со временем по закону $p(t) = \boldsymbol{p}_0 e^{-t^2/\tau^2}, \boldsymbol{m}(t) = \boldsymbol{m}_0 e^{-t^2/\tau^2}$, где $p_0, \boldsymbol{m}_0, \tau$ - постоянные величины. Вычислить спектральную плотность излучения $dI_\omega/d\omega$ в дипольном приближении (указать критерий применимости приближения).

5.27. В прямоугольной проволочной рамке размером $a \times b$ течет ток $J(t) = J_0 \cos \omega t$, причем $a, b \ll 2\pi c/\omega$. Вычислить среднюю по времени интенсивность излучения.

5.28. В замкнутой проволочной петле, охватывающей площадь S, на промежутке времени $-\infty < t < \infty$ течет переменный ток $J(t) = J_0 \tau t/\left(\tau^2 + \ + t^2\right), \tau, J_0$ - постоянные. Вычислить в дипольном приближении спектральную плотность излучения. Указать критерий применимости приближения.

5.29. Частица имеет внутренние магнитный $\boldsymbol{m}$ и механический s моменты, связанные соотношением $m = \eta s$. Она влетает в однородное магнитное поле $\boldsymbol{H}$, причем угол между $\boldsymbol{m}$ и $\boldsymbol{H}$ равен β. Вычислить среднюю по времени интенсивность излучения, вызванную прецессией магнитного момента.

5.30. Заряд q и масса m распределены равномерно по объему шара с радиусом R. Шар вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг своего диаметра, составляющего угол β с внешним однородным магнитным полем $\boldsymbol{H}$. Вычислить коэффициент пропорциональности между магнитным и механическим моментами шара и среднюю по времени интенсивность излучения, вызванную прецессией магнитного момента.

5.31. Исследовать влияние интерференции на излучение электромагнитных волн системой зарядов в следующем примере: два одинаковых
электрических заряда e движутся равномерно с нерелятивистской скоростью и с частотой ω по круговой орбите радиуса a, оставаясь при этом на противоположных концах диаметра. Найти поляризацию, угловое распределение $\frac{\overline{dI}}{d\Omega}$ и интенсивность $\bar{I}$ излучения. Как изменится интенсивность излучения, если убрать один из зарядов (ср. с результатом задачи 5.21).

5.32. Насколько расположение зарядов в предыдущей задаче должно отличаться от диаметрального, чтобы интенсивности электрического дипольного и квадрупольного

излучений были равны?

5.33. Колебания двух электрических дипольных осцилляторов имеют одинаковую частоту ω, но сдвинуты по фазе на $\frac{\pi}{2}$. Амплитуды дипольных моментов равны по величине p и направлены под углом φ друг к другу. Расстояние между осцилляторами мало по сравнению с длиной волны. Найти поле $\boldsymbol{H}$ в волновой зоне, угловое распределение $\frac{\overline{dI}}{d\Omega}$ и полную интенсивность $\bar{I}$ излучения.

5.34. Исследовать состояние поляризации поля излучения системы осцилляторов, рассмотренных в предыдущей задаче, используя методику, изложенную в разделе 2.3 (задачи 2.130, 2.131).

5.35*. Найти среднюю по времени плотность $\bar{\gamma}$ потока энергии на больших расстояниях от заряда, рассмотренного в задаче 5.21, учитывая члены порядка $\frac{1}{r^3}$. Найти вращательный момент $\boldsymbol{N}$, приложенный к полностью поглощающему сферическому экрану большого радиуса, около центра которого движется этот заряд.

5.36. Электрический и магнитный диполи взаимно перпендикулярны, колеблются с частотой ω_0 и находятся в одном месте пространства. Найти угловое распределение $\overline{dI/d\Omega}$ и полную интенсивность $\bar{I}$ излучения, усредненные по времени.

5.37*. При выполнении условия $l \ll \lambda$ вычислить векторный потенциал излучающей системы в волновой зоне с учетом членов порядка $(l/\lambda)^2$. Вычислить также интенсивность излучения в предположении $\ddot{p} \neq 0, \ddot{m} \neq 0, \ddot{Q}_{\alpha\beta} \neq 0$

5.38*. Частица с зарядом e колеблется вдоль оси Oz по закону $z(t) = a \sin \omega t$. Вычислить интенсивности $dI_m/d\Omega$ излучения на кратных частотах $\omega_m = m\omega, m = 1, 2, \ldots$, не предполагая отношение a/λ малым.

5.39. Вычислить угловое распределение $dI/d\Omega$ полного излучения со всеми частотами осциллятора предыдущей задачи. Вычислить также суммарную по всем направлениям интенсивность излучения I.

УказАНИЕ. Использовать соотношение из теории функций Бесселя:

$$\sum_{m=1}^{\infty} m^2 J_m^2(mx) = \frac{x^2\,(4+x^2)}{16\,(1-x^2)^{7/2}}$$

5.40 *. Простейшая модель излучения нейтронных звезд (пульсаров) это модель наклонного ротатора: шар, имеющий магнитный момент $\boldsymbol{m}$, вращается в вакууме с угловой скоростью ω вокруг оси, составляющей угол φ с направлением m.

1. Вычислить угловое распределение $\overline{dI/d\Omega}$ и полную интенсивность $\bar{I}$ излучения, усредненные по времени.

2. Оценить численно по порядку величины магнитный момент пульсара, взяв из наблюдений характерное значение магнитного поля на поверхности нейтронных звезд $H_0 \approx 2 \times 10^{12}$ Э и из теории радиус звезды $R \approx 10$ км.

3. Оценить численно интенсивность излучения пульсара $\bar{I}$ и сравнить его со светимостью Солнца $L_\odot \approx 4 \times 10^{33}$ эрг/с, взяв из наблюдений для пульсара в Крабовидной туманности период вращения $T \approx 0,033$ с.

4. Сравнить полученную выше интенсивность излучения пульсара со скоростью уменьшения энергии вращения звезды, которую следует оценить на основе наблюдательных данных об увеличении периода вращения пульсара в Крабовидной туманности $\dot{T}/T \approx 1,3 \times 10^{-11}\text{с}^{-1}$.

5.41. Равномерно заряженная по объему капля пульсирует с неизменной плотностью. Поверхность капли при этом описывается уравнением

$$R(\vartheta) = R_0\,[1 + aP_2(\cos\vartheta)\cos\omega t]$$

где $a \ll 1$. Заряд капли q. Найти угловое распределение $\overline{dI/d\Omega}$ и полную интенсивность $\bar{I}$ излучения, усредненные по времени.

5.42. Электрический заряд q распределен сферически симметричным образом в ограниченной области и совершает радиальные колебания. Найти электромагнитное поле $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}$ вне распределения зарядов.

5.43. Найти в векторной форме выражения для напряженностей электромагнитных полей электрического p и магнитного m дипольных осцилляторов на расстояниях от них, больших по сравнению с их размерами.

УкАЗАНИЕ. При дифференцировании по $\boldsymbol{r}$ учитывать, что дипольные моменты должны быть взяты в ретардированный момент $t' = t - r/c$ и, следовательно, зависят от $\boldsymbol{r}$.

5.44*. Центры двух электрических дипольных осцилляторов с частотой ω и одинаковыми амплитудами $p_0 \| Ox$ находятся на оси Oz, на равных расстояниях от начала координат и на расстоянии $\lambda/4$ друг от друга. Колебания осцилляторов сдвинуты по фазе на $\pi/2$. Найти угловое распределение излучения $\overline{dI/d\Omega}$.

5.45. Показать, что полный электрический дипольный момент ограниченной системы зарядов и токов равен интегралу по объему от вектора электрической поляризации, введенного посредством равенств (5.41).

5.46. Показать, что полный магнитный дипольный момент ограниченной системы зарядов и токов равен интегралу по объему от вектора магнитной поляризации, введенного посредством равенств (5.44).

5.47. Показать, что напряженности поля выражаются через векторы Герца $\boldsymbol{Z}^{(e)}, \boldsymbol{Z}^{(m)}$ следующим образом:

$$\boldsymbol{E} = \operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{Z}^{(e)} - \operatorname{rot}\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{Z}^{(m)}}{\partial t} - 4\pi\boldsymbol{P}$$

$$\boldsymbol{H} = \operatorname{rot}\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{Z}^{(e)}}{\partial t} + \operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{Z}^{(m)} - 4\pi\boldsymbol{M}$$

5.48. Пусть два независимых ограниченных монохроматических источника одинаковой частоты создают поля $\boldsymbol{E}_1, \boldsymbol{H}_1$ и $\boldsymbol{E}_2, \boldsymbol{H}_2$. Показать, что для любой замкнутой поверхности S, внутри которой расположены эти источники, выполняется соотношение

$$\int\limits_S [\boldsymbol{E}_1 \times \boldsymbol{H}_2] \cdot d\boldsymbol{S} = \int\limits_S [\boldsymbol{E}_2 \times \boldsymbol{H}_1] \cdot d\boldsymbol{S}$$

5.49. Показать, что для электрических дипольных монохроматических излучателей соотношение взаимности (5.47) принимает вид $\boldsymbol{p}_1 \cdot \boldsymbol{E}_2 = \boldsymbol{p}_2 \cdot \boldsymbol{E}_1$.

5.50. Найти выражения электрических дипольного Z_p и квадрупольного $\boldsymbol{Z}_Q$, а также магнитного дипольного $\boldsymbol{Z}_m$ членов разложения электрического вектора Герца, справедливые при произвольной зависимости токов и зарядов от времени. Указанные величины должны быть применимы на расстояниях $r \gg a, \lambda \gg a$ (выполнение условия $r \gg \lambda$ не обязательно). Здесь a - размер системы, верхний индекс (е) у вектора Герца опущен.

5.51. Моменты двух одинаковых электрических диполей направлены по одной прямой и осциллируют в противофазе с частотой ω (амплитуда p_0). Расстояние между центрами $a \ll \lambda$. Найти электромагнитное поле
на расстояниях $r \gg a$. Найти угловое распределение излучения $\frac{d\bar{I}}{d\Omega}$ и его полную интенсивность $\bar{I}$.

5.52ˆ. В линейной антенне длиной l возбуждена стоячая волна тока $\mathscr{I}$ с амплитудой $\mathscr{I}_0$, частотой ω и узлами на концах антенны. Число полуволн тока, укладывающихся на длине антенны, равно m. Найти угловое распределение излучения $\frac{d\bar{I}}{d\Omega}$.

5.53. Найти полное излучение $\bar{I}$ и сопротивление излучения $R = \frac{2\bar{I}}{\mathscr{I}_0^2}$ антенны, рассмотренной в предыдущей задаче.

УказАние. Результат выражается через интегральный косинус

$$\mathrm{Ci}(x) = C + \ln x + \int\limits_0^x \frac{\cos t - 1}{t} dt$$

где $C = 0,577$ - постоянная Эйлера.

5.54. В линейной антенне длиной l распространяется бегущая волна [1] тока $\mathscr{I} = \mathscr{I}_0 e^{i(k\xi - \omega t)}$, где $k = \frac{\omega}{c}, \xi$ - координата точки на антенне. Найти угловое распределение $\frac{d\bar{I}}{d\Omega}$ и полную интенсивность $\bar{I}$ излучения.

5.55*. В круглой проволочной петле радиуса a возбуждена стоячая волна тока вида $\mathscr{I} = \mathscr{I}_0 \sin n\alpha' e^{-i\omega t}$. Найти электромагнитное поле $\boldsymbol{H}, \boldsymbol{E}$ в волновой зоне.

5.56. В линейной антенне (см. задачу 5.52) течет затухающий ток

$$J = J_0 \sin\left[k_m(\xi + l/2)\right] e^{-\gamma t} \cos\omega_m t \Theta(t), \quad -l/2 \leqslant \xi \leqslant k/2$$

где $\omega_m = ck_m = m\pi c/l, \Theta$ - ступенчатая функция, $m = 1, 2, \ldots$ - число полуволн, укладывающееся на длине антенны. Вычислить спектральную плотность излучения $d^2 I_\omega / d\omega d\Omega$ в плоскости симметрии, перпендикулярной оси антенны.

5.57. В плоскости xz расположено N антенн, параллельных оси Ox, каждая длиной l. Расстояние между соседними антеннами a задано. В каждой антенне течет ток $J = J_0 \sin k_m z \cos\omega_m t$. Вычислить угловое распределение излучения $dI/d\Omega$, усредненного по времени.

5.58. Решить предыдущую задачу для случая, когда антенны расположены очень густо и создают тонкую пластину шириной $2b$ и длиной l с поверхностной плотностью тока i_0.

5.59. Отражение системы B зарядов $\rho(\boldsymbol{r}, t)$ и токов $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}, t)$ в плоскости $z = 0$ состоит в том, что а) каждая точка $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ переходит в положение $\boldsymbol{r}' = (x, y, -z)$; б) плотность заряда меняет знак: $\rho(\boldsymbol{r}, t) = -\rho'(\boldsymbol{r}', t)$, где ρ' - плотность заряда в отраженной системе B'. Выяснить, как при отражении преобразуются плотность тока $j(r, t)$, электрические p, Q и магнитный $\mathfrak{m}$ моменты системы, а также электромагнитное поле $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}$.

5.60. Доказать, что электромагнитное поле произвольной системы B зарядов вблизи идеально проводящей плоскости может быть получено как суперпозиция полей системы B и системы B', отраженной в этой плоскости (см. предыдущую задачу). Рассмотреть, в частности, излучение электрического дипольного осциллятора с моментом $\boldsymbol{p}(t) = \boldsymbol{p}_0 f(t)$ ($|\boldsymbol{p}_0| = 1, f(t)-$ произвольная функция), находящегося на расстоянии $b \ll \lambda$ от такой плоскости и образующего с ней угол $\varphi_0 = \mathrm{const}$ (ограничиться электрическим дипольным приближением).

УказАние. На идеально проводящей плоскости должны выполняться граничные условия

$$H_n = 0 \quad \text{и} \quad E_\tau = 0.$$

5.61. Электрический диполь с амплитудой момента p_0 и частотой ω находится на расстоянии $\frac{a}{2}$ от идеально проводящей плоскости ($a \ll \lambda$, вектор p_0 параллелен плоскости).

[01] Нагрузки на концах антенны должны быть подобраны таким образом, чтобы отраженной волны не возникало.

Найти электромагнитное поле $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}$ на расстояниях $r \gg \lambda$ и угловое распределение излучения $\frac{d\bar{I}}{d\Omega}$.

5.62. а) Показать, что если функция $u(r, \vartheta, \alpha)$ удовлетворяет уравнению Гельмгольца $\Delta u + k^2 u = 0$, то потенциал Герца для монохроматического поля электрического типа ($H_r = 0$) с частотой $\omega = kc$ в свободном от источников поля пространстве может быть представлен в форме: $\boldsymbol{Z} = u\boldsymbol{r} + + \operatorname{grad}\chi, \chi = \frac{1}{k^2}\frac{\partial}{\partial r}(ru)$; б) найти выражения составляющих напряженности электромагнитного поля $\boldsymbol{H}, \boldsymbol{E}$ по осям сферической системы координат через $u(r, \vartheta, \alpha)$ (функция u называется потенциалом Дебая).

Указание. Доказывая, что $\Delta\boldsymbol{Z} + k^2\boldsymbol{Z} = 0$, обратить внимание на то, что существует соотношение $\Delta\chi + k^2\chi + 2u = 0$.

5.63. Показать, что поле точечного электрического дипольного осциллятора с моментом $p_0 e^{-i\omega t}$, находящегося в точке $r_0\,(r_0 \| p_0)$, может
быть описано потенциалом Дебая (см. задачу 5.62) вида $u = \frac{p_0}{r_0} \cdot \frac{e^{ikR}}{R}$, где $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0$.

5.64. Точечный электрический дипольный осциллятор с моментом $p_0 e^{-i\omega t}$ находится на расстоянии b от центра идеально проводящего шара радиуса a. Момент направлен вдоль линии, соединяющей диполь с центром шара. Воспользовавшись потенциалом Дебая u (см. задачу 5.62), найти электромагнитное поле $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}$. Найти угловое распределение излучения $\frac{d\bar{I}}{d\Omega}$.

5.2.3 5.3. Radiation of Relativistic Particles

Электромагнитное поле движущейся заряженной частицы.

Пример 5.8. Вычислить электромагнитные потенцилы частицы, движуиейся произвольным образом, на основе общих выражсний для запаздывающих потенциалов (5.10), (5.11), представив плотности заряда ρ и тока j через дельта-функкйию.

Решение. Пусть заряд частицы e, ее радиус-вектор $\boldsymbol{s}(t)$, скорость $\boldsymbol{v}(t) = \dot{\boldsymbol{s}}(t)$ и ускорение $\dot{\boldsymbol{v}}(t) = \ddot{\boldsymbol{s}}(t)$ известны. Плотности заряда и тока выражаются через них в виде

$$\rho(\boldsymbol{r}, t) = e\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{s}(t)), \quad \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}, t) = e\boldsymbol{v}(t)\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{s}(t)) \tag{5.50}$$

Для вычисления потенциалов удобно использовать общую формулу (5.4) с запаздывающей функцией Грина (5.9):

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t) &= \frac{e}{c}\int G^R\left(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}', t - t'\right)\boldsymbol{v}\left(t'\right)\delta\left(\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{s}\left(t'\right)\right)dV'dt' = \\ &= \frac{e}{c}\int \frac{\boldsymbol{v}\left(t'\right)}{R\left(t'\right)}\delta\left(t' - t + \frac{R\left(t'\right)}{c}\right)dt'\end{aligned} \tag{5.51}$$

где $\boldsymbol{R}(t') = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{s}(t')$. Интегрирование по объему произведено с помощью $\delta\left(\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{s}\left(t'\right)\right)$. Последующее интегрирование по времени выполняем с использованием формулы (1.209), где в данном случае $g\left(t'\right) = t' + \frac{R(t')}{c} - t$, $dg\left(t'\right)/dt' = 1 - \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}/c, \boldsymbol{n} = \boldsymbol{R}\left(t'\right)/R\left(t'\right)$. Используя эти равенства, получаем

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t) = \left.\frac{e\boldsymbol{v}}{cR(1 - \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}/c)}\right|_{t'} \tag{5.52}$$

Таким же путем находим скалярный потенциал:

$$\varphi(\boldsymbol{r}, t) = \left.\frac{e}{R(1 - \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}/c)}\right|_{t'} \tag{5.53}$$

Значение t', при котором берутся правые части (5.52) и (5.53), должно определяться из условия $g(t') = 0$, т. е. из уравнения

$$c(t - t') = |r - s(t')| \tag{5.54}$$

где $s(t')$ - координаты частицы, r - координаты точки наблюдения. Разность $t - t' = |r - s(t')|/c$ представляет собой время распространения электромагнитного возмущения от частицы до точки наблюдения поля.

Пример 5.9. Вычислить напряженности электромагнитного поля $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}$, которые создает произвольным образом движущаяся заряженная частица.

Решение. Вычисляем $\boldsymbol{H} = \nabla \times \boldsymbol{A}$, пользуясь представлением (5.51). Оператор ∇ действует на координаты r, которые входят только в $R = |r - s|$ под интегралом по dt'. Выполним дифференцирование под интегралом, пользуясь формулой

$$\nabla f(R) = \frac{\partial f}{\partial R}\nabla R = \frac{\partial f}{\partial R}\boldsymbol{n}$$

Получим

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}, t) = \frac{e}{c}\int (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{n})\left\{\frac{1}{R^2}\delta(t' + R/c - t) - \frac{1}{cR}\delta'(t' + R/c - t)\right\} dt'$$

Далее переходим к интегрированию по $dg = \left(\frac{dg}{dt'}\right)dt' = \left(1 - \boldsymbol{n}\cdot\frac{\boldsymbol{v}}{c}\right)dt'$ и, пользуясь правилами интегрирования выражений с дельта-функциями (1.209), (1.210), находим

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}, t) = \frac{\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{n}}{cR^2(1 - \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}/c)} + \frac{e}{c(1 - \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}/c)}\frac{d}{dt'}\frac{\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{n}}{cR(1 - \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}/c)} \tag{5.55}$$

где правая часть берется при значении t', определяемом уравнением (5.54). При вычислении производной по t' имеем

$$\frac{d\boldsymbol{v}(t')}{dt'} = \dot{\boldsymbol{v}}(t'), \quad \frac{dR(t')}{dt'} = -\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}, \quad \frac{d\boldsymbol{n}(t')}{dt'} = -\frac{\boldsymbol{v}}{R} + \frac{\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v})}{R} = \frac{\boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{v})}{R}$$

Выполнив дифференцирование в (5.55) с помощью этих формул, после приведения подобных членов получим окончательное выражение для магнитного поля:

$$\boldsymbol{H} = \frac{e(1 - v^2/c^2)(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{n})}{cR^2(1 - \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}/c)^3} + \frac{e\{c\dot{\boldsymbol{v}} \times \boldsymbol{n} + \boldsymbol{n} \times [(\boldsymbol{v} \times \dot{\boldsymbol{v}}) \times \boldsymbol{n}]\}}{c^2R(1 - \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}/c)^3} \tag{5.56}$$

Вычисление электрического поля $\boldsymbol{E} = -\nabla\varphi - \partial\boldsymbol{A}/c\partial t$ производится аналогичным образом: представляем скалярный потенциал в виде

$$\varphi(r, t) = \int \frac{e}{R(t')}\delta(t' + R(t')/c - t)\, dt' \tag{5.57}$$

и дифференцируем величины (5.51), (5.57) под знаком интеграла. Это позволяет получить электрическое поле

$$\boldsymbol{E} = \frac{e(1 - v^2/c^2)(\boldsymbol{n} - \boldsymbol{v}/c)}{R^2(1 - \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}/c)^3} + \frac{e\boldsymbol{n} \times [(\boldsymbol{n} - \boldsymbol{v}/c) \times \dot{\boldsymbol{v}}]}{c^2R(1 - \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}/c)^3} \tag{5.58}$$

В формулах для напряженностей поля (5.56), (5.58) все величины, входящие в правые части, берутся в момент t', который определяется из уравнения (5.54).

Сравнение напряженностей (5.56) и (5.58) показывает, что они связаны соотношением

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{n}\,(t')\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) \tag{5.59}$$

т. е. вектор $\boldsymbol{H}$ перпендикулярен $\boldsymbol{E}$ и линии, которая соединяет заряд в момент t' с точкой наблюдения (но вектор $\boldsymbol{E}$ имеет проекцию на эту линию). Каждая из напряженностей состоит из двух слагаемых: первое изменяется в пространстве как R^{-2} и не содержит ускорения заряда, а второе пропорционально ускорению $\dot{\boldsymbol{v}}$ и убывает как R^{-1}. Слагаемые первого типа образуют квазистационарное поле, так как оно присуще и равномерно движущемуся заряду, а закон убывания с расстоянием - такой же, как у статического поля. Слагаемые второго типа описывают волновое поле излучения, поскольку оно медленно спадает с расстоянием и создает конечный поток электромагнитной энергии через замкнутую поверхность большого радиуса, окружающую частицу. Поле излучения возникает только при ускоренном движении заряженной частицы ($\boldsymbol{v}\neq 0$).

Пример 5.10. Выразить через скорость и ускорение поток энергии $dI/d\Omega$ излучения в единичный телесный угол от частицы, движуиейся произвольным образом. Произвести анализ углового распределения, рассмотрев подробно три случая: а) излучение нерелятивистской ($v\ll c$)
частицы; б) излучение ультрарелятивистской ($\gamma=\mathscr{E}/mc^2\gg 1$) частицы при $\dot{\boldsymbol{v}}\|\boldsymbol{v}$; в) то же при $\dot{\boldsymbol{v}}\perp\boldsymbol{v}$. В последних двух случаях представить интенсивность излучения в направлении, составляющем мальий угол θ со скоростью частицы, в упрощенной форме, произведя разложение по θ. Истолковать полученные результаты на основе закона преобразования функции распределения (см. задачу 3.34).

Решение. Поток энергии в единичный телесный угол вычисляется через напряженности поля в волновой зоне по формуле (5.19). Используя вместо $\boldsymbol{H}^2$ равную ей величину $\boldsymbol{E}^2$, получим с помощью (5.58)

$$\frac{dI}{d\Omega}=\frac{e^2[\boldsymbol{n}\times[(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{v}/\boldsymbol{c})\times\dot{\boldsymbol{v}}]]^2}{4\pi c^3(1-\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}/c)^6} \tag{5.60}$$

где все величины в правой части берутся в момент времени $t-R/c$.
Поток энергии в единицу телесного угла (5.60) зависит от R только через временной аргумент. Это означает, что поток энергии через площадки $R^2d\Omega$ внутри выбранного телесного угла $d\Omega$, находящиеся на разных расстояниях от частицы, в соответствующие моменты времени (с учетом конечной скорости переноса энергии) будет одинаковым - электромагнитные возмущения распространяются от генерировавшей их заряженной частицы на бесконечность. Они образуют поле излучения, которое, возникнув, отрывается от своего источника.

Квазистационарное поле (т. е. слагаемые в (5.56), (5.58), не содержащие $\dot{\boldsymbol{v}}$ и пропорциональные R^{-2}) таким свойством не обладает. С ростом R поток энергии квазистационарного поля внутри данного телесного угла убывает как R^{-2}. Следовательно, квазистационарное поле остается все время связанным с частицей и не создает потока на бесконечности.
а) Нерелятивистская частица, $v\ll c$. Пренебрегая членами порядка v/c, получим из (5.60)

$$\frac{dI}{d\Omega}=\frac{e^2}{4\pi c^3}\left[\dot{\boldsymbol{v}}^2-(\boldsymbol{n}\cdot\dot{\boldsymbol{v}})^2\right]=\frac{e^2\dot{\boldsymbol{v}}^2}{4\pi c^3}\sin^2\theta \tag{5.61}$$

где θ - угол между ускорением в момент t' и направлением наблюдения. Излучение распределено симметрично относительно направления $\dot{v}$ и максимально в направлении, перпендикулярном $\dot{v}$. Интегрирование (5.61) по телесному углу дает формулу Лармора (5.32).

б) Ультрарелятивистская частица, $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2} \gg 1$, ускорение направлено вдоль скорости: $\dot{\boldsymbol{v}} \| \boldsymbol{v}$. Обозначив через θ угол между $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{v}$, получаем из (5.60)

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{e^2 \dot{\boldsymbol{v}}^2 \sin^2\theta}{4\pi c^3 [1 - (v/c)\cos\theta]^6} \tag{5.62}$$

Высокая степень знаменателя, весьма малого при $\cos\theta \approx 1$, приводит к сильной анизотропии излучения. В наиболее интересной области малых углов произведем разложение $\sin\theta \approx \theta, \cos\theta \approx 1 - \theta^2/2$. Учитывая, что $v \approx c$, получим

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{16 e^2 \dot{\boldsymbol{v}}^2 \gamma^{10} (\gamma\theta)^2}{\pi c^3 \left(1 + \gamma^2\theta^2\right)^6} \tag{5.63}$$

Излучение сосредоточено в конусе с углом раствора порядка нескольких $1/\gamma$. Это свойство излучения ультрарелятивистских частиц объясняется релятивистским преобразованием углов и уже было отмечено в разделе 3.1.

в) Ультрарелятивистская частица, ускорение перпендикулярно скорости, $\dot{\boldsymbol{v}} \perp \boldsymbol{v}$. Общая формула (5.60) дает

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{e^2 \dot{\boldsymbol{v}}^2}{4\pi c^3} \left\{ \frac{1}{[1 - (v/c)\cos\theta]^4} - \frac{(1 - v^2/c^2)\sin^2\theta\cos^2\varphi}{[1 - (v/c)\cos\theta]^6} \right\} \tag{5.64}$$

Здесь φ - угол между плоскостями $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{n})$ и $(\boldsymbol{v}, \dot{\boldsymbol{v}})$. Распределение (5.64), как и (5.62), сконцентрировано в направлении вперед. При малых θ оно имеет вид

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{4 e^2 \dot{\boldsymbol{v}}^2 \gamma^8}{\pi c^3 \left(1 + \gamma^2\theta^2\right)^4} \left[1 - \frac{4\gamma^2\theta^2\cos^2\varphi}{\left(1 + \gamma^2\theta^2\right)^2} \right] \tag{5.65}$$

Потеря энергии и импульса заряженной частицей. Величина $\frac{dI}{d\Omega}$ представляет собой поток электромагнитной энергии внутри единичного телесного угла, который может измерить неподвижный в лабораторной системе наблюдатель. Она отличается от скорости потерь энергии частицей за счет излучения в единичный телесный угол $d^2\mathscr{E}/dt'd\Omega$, где dt' - интервал «ретардированного» времени, в течение которого некоторая порция излучения была испущена. Их различие вызвано тем, что интервалы dt и dt' различны, хотя оба определены в лабораторной системе. Они связаны соотношением, вытекающим из (5.54). Дифференцируя это равенство, получим

$$dt = \left(1 - \frac{\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{v}\,(t')}{c} \right) dt' \tag{5.66}$$

Приравнивая энергию, испущенную частицей за время dt', и энергию, прошедшую мимо наблюдателя за время dt, будем иметь с помощью (5.66)

$$-\frac{d^2\mathscr{E}}{dt'd\Omega} = \frac{dI}{d\Omega}\frac{dt}{dt'} = \left(1 - \frac{n \cdot v\,(t')}{c} \right) \frac{dI}{d\Omega} \tag{5.67}$$

Величина $dI/d\Omega$ согласно (5.60) зависит от аргумента t'. Это соотношение устанавливает связь между потерей энергии частицей и интенсивностью излучения, регистрируемой наблюдателем.

Проинтегрировав (5.67) по всему телесному углу, получим полную (или суммарную по всем направлениям) потерю энергии излучающей частицей:

$$-\frac{d\mathscr{E}}{dt'} = \int \left(1 - \frac{\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{v}\,(t')}{c} \right) \frac{dI}{d\Omega} d\Omega \tag{5.68}$$

Она не совпадает с полной интенсивностью

$$I = \int \frac{dI}{d\Omega} d\Omega \tag{5.69}$$

Величина $-d\mathscr{E}/dt'$ является более удобной характеристикой излучения релятивистской частицы, чем полная интенсивность I, так как она релятивистски инвариантна. Интенсивность не является инвариантной величиной.

Пример 5.11. Доказать релятивистскую инвариантность величины $-d\mathscr{E}/dt'$. Выразить скорость потери импульса $-dp/dt'$ излучающей частицей через суммарную по всем направлениям скорость потери энергши $-d\mathscr{E}/dt'$.

Решение. Сравним скорость потери энергии в мгновенно сопутствующей системе S_0, в которой частица в данный момент покоится, и в лабораторной системе S, в которой скорость частицы v. В системе S_0 интенсивность излучения (совпадающая со скоростью потерь энергии $-d\mathscr{E}_0/dt'_0$) дается формулой (5.61). Поскольку она - четная функция угла, то потери импульса частицей в этой системе не происходит, $dp_0 = 0$. Потеря же энергии за время $dt'_0 = d\tau$ равна $-d\mathscr{E}_0$.

Потерю энергии частицей в лабораторной системе вычислим, пользуясь преобразованием Лоренца (3.9) для 4-вектора $p^k = (d\mathscr{E}/c, dp) : -d\mathscr{E} = -d\mathscr{E}_0 \left(1 - v^2/c^2\right)^{-1/2}$. Она происходит за время $dt' = d\tau \left(1 - v^2/c^2\right)^{-1/2}$. Отсюда для скорости потерь энергии находим

$$-d\mathscr{E}/dt' = -d\mathscr{E}_0/d\tau \tag{5.70}$$

что и доказывает релятивистскую инвариантность этой величины.
Потерю импульса вычисляем опять с помощью преобразования Лоренца:

$$d\boldsymbol{p} = \frac{v d\mathscr{E}_0}{c^2\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Отнесем эту потерю к «времени частицы» dt' в лабораторной системе:

$$-\frac{dp}{dt'} = \frac{v}{c^2}\left(-\frac{d\mathscr{E}_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}dt'}\right)$$

Но $\sqrt{1 - v^2/c^2}dt' = d\tau$ - дифференциал собственного времени частицы, поэтому с учетом (5.70) получаем простую связь между потерями энергии и импульса в одной и той же - лабораторной - системе отсчета:

$$-\frac{dp}{dt'} = \frac{v}{c^2}\left(-\frac{d\mathscr{E}}{dt'}\right) \tag{5.71}$$

Эта формула справедлива при любой скорости частицы.
Пример 5.12. Выразить скорости потерь энергии и импульса релятивистской частицей в единицу собственного времени в ковариантной форме через четырехмерные скорость и ускорение, а также через соответствующие трехмерные величины.

Решение. Используем определение 4 -ускорения (3.23) и выражаем инвариантную величину $d\mathscr{E}/dt'$ через релятивистский инвариант - квадрат 4 -ускорсния:

$$-\frac{d\mathscr{E}}{dt'} = -\frac{2e^2}{3c^3}w^k w_k \tag{5.72}$$

При $v \to 0$ (5.72) переходит в формулу Лармора (5.32). Объединяя (5.71) с (5.72) и вводя интервал собственного времени $d\tau = \sqrt{1 - v^2/c^2}dt'$ и 4-скорость (3.23), записываем обе указанные формулы в виде равенства 4-векторов:

$$-\frac{dp^i}{d\tau} = -\frac{2e^2}{3c^5} w^k w_k u^i \tag{5.73}$$

где $p^i = (\mathscr{E}/c, \boldsymbol{p})$ - четырехмерный вектор энергии-импульса релятивистской частицы. 4-ускорение можно выразить через трехмерные величины:

$$w^k = \frac{du^k}{d\tau} = \gamma \frac{d}{dt'} \gamma(c, \boldsymbol{v}) = \left(\gamma^4 \frac{\boldsymbol{v} \cdot \dot{\boldsymbol{v}}}{c}, \gamma^2 \dot{\boldsymbol{v}} + \gamma^4 \frac{\boldsymbol{v}(\boldsymbol{v} \cdot \dot{\boldsymbol{v}})}{c^2} \right)$$

Записав квадрат 4-ускорения,

$$w^k w_k = -\gamma^6 \left[\dot{\boldsymbol{v}}^2 - \frac{(\boldsymbol{v} \times \dot{\boldsymbol{v}})^2}{c^2} \right]$$

находим релятивистское обобщение формулы Лармора (5.72) через трехмерные величины:

$$-\frac{d\mathscr{E}}{dt'} = -\frac{2e^2\gamma^6}{3c^2} \left[\dot{v}^2 - \frac{(\boldsymbol{v} \times \dot{\boldsymbol{v}})^2}{c^2} \right] \tag{5.74}$$

Спектральное распределение излучения релятивистских частиц.

Выразим спектральную плотность излучения в заданном направлении (5.22) через скорость и радиус-вектор релятивистской частицы. В волновой зоне имеем $R(\tau) \approx r - \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{s}(\tau)$, где $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{r}/\boldsymbol{r}, \boldsymbol{s}(\tau)$ - радиус-вектор частицы. С помощью (5.12'), проводя сначала интегрирование по dV', получим в волновой зоне

$$\boldsymbol{A}_\omega(\boldsymbol{r}) = \frac{e}{c} \frac{\exp(ikr)}{r} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{v}(\tau) \exp(i\omega\tau - i\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{s}(\tau)) d\tau \tag{5.75}$$

где $\boldsymbol{k} = \omega \boldsymbol{n}/\boldsymbol{c}$ - волновой вектор излучаемой волны. Гармонику Фурье напряженности магнитного поля находим по формуле (5.15):

$$\boldsymbol{H}_\omega = i\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{A}_\omega = \frac{ie\omega}{c^2} \frac{\exp(ikr)}{r} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{v}(\tau) \exp(i\omega\tau - i\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{s}(\tau)) d\tau \tag{5.76}$$

Связь (5.18) между напряженностями электрического и магнитного полей в волновой зоне вытекает из уравнений Максвелла. Подставив (5.76) в общее выражение (5.22), получим спектральную плотность излучения в заданном направлении:

$$\frac{d^2 I_\omega}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2\omega^2}{4\pi^2 c^3} \left| \int\limits_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{v}(\tau) \exp(i\omega\tau - i\boldsymbol{k} \cdot s(\tau)) d\tau \right|^2 \tag{5.77}$$

Пример 5.13. Произвести полуколичественный анализ спектрального распределения излчения ультрарелятивистской ($\gamma \gg 1$) частицы. Рассмотреть два предельных случая: а) полный угол отклонения частицы во внешнем поле велик по сравнению с углом излучения $1/\gamma$; б) полный угол отклонения частицы мал или порядка угла излучения $1/\gamma$. Оценить для обоих случаев характерные спектральные интервалы излуения.

Решение. а) Полный угол отклонения частицы велик по сравнению с углом излучения. Пример такой ситуации - излучение ультрарелятивистской частицы в магнитном поле. В данном направлении n частица излучает с малого участка траектории, на котором направление скорости изменяется на угол порядка $1/\gamma$. Длина этого участка (длина формирования излучения, или когерентная длина) $l_{\text{coh}} \approx \rho/\gamma$, где ρ - мгновенный радиус

кривизны. За время излучения $\tau \approx l_{coh}/v \approx \rho/v\gamma$ фаза волны, согласно (5.76), изменится на $\Delta\varphi = \omega\tau - n \cdot \Delta s(\tau)\omega/c$, где $\Delta s(\tau)$ - смешение частицы за время τ. Поскольку угол между n и v не превышает $1/\gamma$ по порядку величины, то $n \cdot \Delta s(\tau)/c \approx v\tau/c \approx \rho/c\gamma$ и $\Delta\varphi \approx (\omega\rho/v\gamma)(1 - v/c) \approx \omega\rho/2\gamma^3 c$. Излучаться могут волны только таких частот, для которых $\Delta\varphi < 1$; при $\Delta\varphi > 1$ волны внутри конуса излучения имеют большие сдвиги фаз и гасят друг друга. Интервал излучаемых частот определяется условием

$$\Delta\omega < \omega_c = \frac{c}{\rho}\gamma^3 \tag{5.78}$$

При $\omega \gg \omega_c$ интенсивность излучения сильно уменьшается.
Если частица движется в однородном магнитном поле перпендикулярно его напряженности, то, согласно результатам раздела 4.2, $\rho = cp/eH \approx \gamma mc^2/eH$. При этом

$$\omega_c = \frac{eH}{mc}\gamma^2 \tag{5.79}$$

Движение в однородном магнитном поле строго периодично, поэтому спектр состоит из дискретных линий, расстояние между которыми равно частоте вращения релятивистской частицы $\Omega = ecH/\mathscr{E} = eH/mc\gamma$. При $\gamma \gg 1$ спектр становится квазинепрерывным. Максимальное излучение приходится на частоты порядка ω_c (см. задачи 5.83, 5.85).
б) Полный угол отклонения частицы за все время ускорения мал или порядка угла излучения. Все излучение происходит в узкий конус и определяется всем участком траектории, на котором изменяется скорость частицы. Такая ситуация возникает, например, при рассеянии ультрарелятивистской частицы на малый угол в кулоновском поле ядра.

Пусть внешнее поле существует в области размером a (это может быть, например, радиус экранировки кулоновского поля). Частица будет испытывать ускорение в течение времени $\Delta t' \approx a/v \approx a/c$. Для неподвижного в лабораторной системе наблюдателя этот процесс будет длиться в течение времени

$$\Delta t \approx \frac{\Delta t}{\Delta t'}\Delta t' \approx \left(1 - \frac{n \cdot v}{c}\right)\frac{a}{c} \approx \frac{a}{\gamma^2 c}$$

Спектральный интервал оценим с помощью соотношения $\Delta\omega \cdot \Delta t \approx 1$:

$$\Delta\omega \approx \omega_c \approx \frac{c}{a}\gamma^2 \tag{5.80}$$

Характерная частота, как и (5.79), пропорциональна квадрату энергии частицы.

Излучение при столкновениях частиц. Заряженные частицы при столкновениях движутся с ускорением и, вследствие этого, излучают электромагнитные волны (тормозное излучение). Закон движения сталкивающихся частиц и излучаемая ими при столкновении энергия определяются видом взаимодействия и прицельным расстоянием ρ (если потенциальная энергия взаимодействия сталкивающихся частиц зависит только от расстояния между ними). Энергию, излучаемую во всех направлениях при рассеянии потока частиц некоторым рассеивающим центром, удобно характеризовать дифференциальным эффективным излучением

$$\frac{d\kappa}{d\Omega} = 2\pi \int_0^\infty \frac{dE^{\mathrm{rad}}(\rho)}{d\Omega}\rho d\rho \tag{5.81}$$

и полным эффективным излучением

$$\kappa = 2\pi \int\limits_0^\infty \mathscr{E}^{rad}(\rho)\rho d\rho \tag{5.82}$$

Здесь $d\mathscr{E}^{\mathrm{crad}}(\rho)/d\Omega$ - энергия, излучаемая в направлении $\boldsymbol{n}$ в единицу телесного угла при одиночном столкновении с прицельным параметром ρ, усредненная по азимуту в плоскости, перпендикулярной потоку частиц.

Если главную роль при столкновении играет электрическое дипольное излучение, то (5.81) принимает вид

$$\frac{d\kappa}{d\Omega} = \frac{1}{4\pi c}\left[A + BP_2(\cos\theta)\right] \tag{5.83}$$

где $P_2(\cos\theta)$ - полином Лежандра, θ - угол между направлением наблюдения $\boldsymbol{n}$ и направлением Oz потока падающих частиц,

$$A = \frac{2}{3}\int\limits_0^\infty 2\pi\rho d\rho \int\limits_{-\infty}^\infty \ddot{\boldsymbol{p}}^2 dt, \quad B = \frac{1}{3}\int\limits_0^\infty 2\pi\rho d\rho \int\limits_{-\infty}^\infty \left(\ddot{\boldsymbol{p}}^2 - 3\ddot{p}_z^2\right) dt \tag{5.84}$$

Пример 5.14. Вывести формулья (5.83), (5.84) из обиего выражения (5.30) для электрического дипольного излучения.

Решение. Выбираем ось Oz координатной системы вдоль пучка частиц и ось Ox в плоскости, определяемой вектором $\boldsymbol{n}$ и осью Oz (рис. 5.2). Имеем $n = e_x \sin\theta + e_z\cos\theta$ и

$$\begin{aligned}
&\overline{(\boldsymbol{n}\times\ddot{\boldsymbol{p}})^2} = \ddot{\boldsymbol{p}}^2 - \overline{(\boldsymbol{n}\cdot\ddot{\boldsymbol{p}})^2} = \\
&= \ddot{\boldsymbol{p}}^2 - \ddot{p}_\perp^2\overline{\cos^2\phi}\sin^2\theta - \ddot{p}_z\cos^2\theta - 2\ddot{p}_\perp\ddot{p}_z\overline{\cos\phi}\sin\theta\cos\theta = \\
&= \ddot{p}^2 - \frac{1}{2}\ddot{p}_\perp^2\sin^2\theta - \ddot{p}_z^2\cos^2\theta
\end{aligned}$$

где чертой обозначено усреднение по азимутальному углу ϕ. В полученный результат вводим $\ddot{p}_\perp^2 = \ddot{p}^2 - \ddot{p}_z^2$ и $\cos^2\theta = \left(2P_2(\cos\theta)+1\right)/3$. Подставляя преобразованное таким образом выражение $(\boldsymbol{n}\times\ddot{\boldsymbol{p}})^2$ в (5.30) и интегрируя по прицельным параметрам и по времени, приходим к (5.83), (5.84).

Пример 5.15. Вывести формулу для спектральной плотности эффективного излучения при рассеянии пучка частиц, испущенного вдоль оси Oz.

Решение. Произведя разложение Фурье

$$\ddot{\boldsymbol{p}}(t) = -\int\limits_{-\infty}^\infty \omega^2 \boldsymbol{p}_\omega e^{-i\omega t}\frac{d\omega}{2\pi}$$

получим с помощью (1.219)

$$\int\limits_{-\infty}^\infty \ddot{p}^2(t)dt = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \omega^4\left|\boldsymbol{p}_\omega\right|^2 d\omega$$

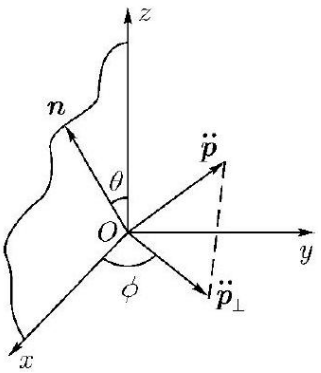


Рис. 5.2

Выполняя аналогичные преобразования интеграла $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \ddot{p}_z^2(t)dt$ и подставляя эти результаты в (5.83), (5.84), находим

$$\frac{d\kappa}{d\Omega} = \int\limits_0^\infty \frac{d^2\kappa\omega}{d\omega d\Omega} d\omega$$

где

$$\frac{d^2\kappa\omega}{d\omega d\Omega} = \frac{1}{4\pi^2 c^3}\left[A(\omega) + B(\omega)P_2(\cos\theta)\right] \tag{5.85}$$

- спектральная плотность эффективного излучения,

$$A(\omega) = \frac{2\omega^4}{3}\int\limits_0^\infty |\boldsymbol{p}_\omega|^2 \, 2\pi\rho d\rho, \quad B(\omega) = \frac{\omega^4}{3}\int\limits_0^\infty \left(|\boldsymbol{p}_\omega|^2 - 3\,|p_{z\omega}|^2\right) 2\pi\rho d\rho \tag{5.86}$$

Излучение при распадах и превращениях частиц. Распады частиц и их превращения в другие частицы сопровождаются внезапным (точнее, происходящим за короткое время) исчезновением заряженных частиц, совершавших некоторое заданное движение, или появлением движущихся с некоторыми (часто релятивистскими) скоростями новых частиц. При этом возникает тормозное излучение, которое называют внутренним в отличие от излучения, сопровождающего столкновение частицы с внешним объектом. Длительность процесса превращения частиц можно оценить по порядку величины с помощью квантовомеханического соотношения неопределенности энергия-время:

$$\tau \approx \frac{\hbar}{\Delta\mathscr{E}} \tag{5.87}$$

где $\Delta\mathscr{E}$ - характерная энергия данного процесса.
Методами классической электродинамики можно рассчитать спектр внутреннего тормозного излучения в приближении $\tau \to 0$, т.е. для относительно низких частот

$$\omega \ll 2\pi/\tau \tag{5.88}$$

Это ограничение относится к неподвижному в лабораторной системе объекту, в котором происходит превращение частиц. Если объект движется с релятивистской скоростью, нужно произвести преобразование Лоренца интервала времени и частоты, что приведет к условию

$$\omega\tau \ll \frac{2\pi}{1 - (v/c)\cos\theta}, \tag{5.89}$$

где θ - угол между направлениями скорости и наблюдения волны.
Еще одно ограничение на частоту накладывают законы сохранения энергии и импульса при испускании фотонов (см. главу 6), которые учитываются в квантовой тоерии. Они ограничивают частоту некоторым значением $\omega_{\max}$. Генерацию квантов с энергиями $\hbar\omega$ порядка максимальной $\hbar\omega_{\max}$ нужно рассчитывать методами квантовой механики.

Рекомендуемая литература: [Байер и др. (1973)], [Бредов и др. (1985)], [Джексон (1975)], [Батыгин и Топтыгин (1970)], [Соколов и Тернов (1983)], [Пановский и Филипс (1963)], [Гинзбург (1987)], [Алферов и др. (1989)], [Алексеев (1977)], [Тернов и Михайлин (1986)], [Болотовский и др. (1978)], [Медведев (1977)], [Ландау и Лифшиц, Теория поля].

Задачи

5.65. Показать, что компоненты Фурье потенциалов Лиенара - Вихерта при апериодическом движении частицы можно представить в виде

$$\boldsymbol{A}_\omega(\boldsymbol{r}) = \frac{e}{c}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\boldsymbol{v}(\tau)\exp(i\omega\tau + i\omega R(\tau)/c}{R(\tau)}d\tau \tag{5.90}$$

$$\varphi_\omega(\boldsymbol{r}) = e\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(i\omega\tau + i\omega R(\tau)/c)}{R(\tau)}d\tau \tag{5.91}$$

где $R(\tau) = |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{s}(\tau)|$. Если движение частицы периодично с периодом $T = 2\pi/\omega_0$, то гармоники Фурье с частотой $n\omega_0$(n - целое) выразятся в виде

$$\boldsymbol{A}_n = \frac{e}{cT}\int\limits_0^T \frac{\boldsymbol{v}(\tau)}{R(\tau)}\exp\left[in\omega_0(\tau + R(\tau)/c)\right]d\tau \tag{5.92}$$

Скалярный потенциал $\varphi_n(\boldsymbol{r})$ отличается от последнего выражения отсутствием множителя $v(\tau)/c$.

УКАЗАНИЕ. Исходить из выражения (5.12') и произвести интегрирование по dV'.

5.66*. Произвести разложение по степеням R/c в общих формулах для запаздывающих потенциалов (5.10), (5.11) и найти таким путем разложение потенциалов Лиенара-Вихерта по степеням $1/c$.

5.67. Вычислить потенциалы поля равномерно движущегося точечного заряда из потенциалов Лиенара-Вихерта (5.52), (5.53), выразив в последних ретардированное время t' через время t наблюдения поля. Вычислить также напряженности поля равномерно движущегося точечного заряда.

5.68. Точечный заряд e движется с малой скоростью v и ускорением $\dot{\boldsymbol{v}}$ в ограниченной области. Найти приближенные выражения для электромагнитного поля $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}$ частицы в точках, расстояние r до которых от частицы
велико по сравнению с размером области движения заряда. Определить положение границы квазистационарной и волновой зон.

5.69. Определить угловое распределение $dI/d\Omega$ излучения заряда, рассмотренного в предыдущей задаче. Найти полное излучение I.

5.70. Найти связь (5.67) между скоростью потерь энергии частицей на единицу телесного угла в данном направлении и интенсивностью излучения геометрическим способом, рассмотрев форму области пространства, в которой локализована электромагнитноа энергия, излученная частицей за время dt'.

5.71. Доказать, что если частица совершает периодическое движение, то средняя за

период скорость потерь энергии совпадает со средней интенсивностью излучения.

5.72. Показать, что если ускорение частицы вызвано действием на нее внешнего электромагнитного поля с напряженностями $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}$, то суммарную по всем направлениям скорость потерь энергии можно записать в виде

$$-\frac{d\mathscr{E}}{dt'} = -\frac{2e^2\gamma^2}{3m^2c^2}\left[\left(\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{H}\right)^2 - \frac{1}{c^2}(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{v})^2\right] \tag{5.93}$$

Проанализировать этот результат, рассмотрев случаи продольного и поперечного (относительно скорости v) ускорения.

5.77. Найти мгновенное угловое распределение интенсивности излучения $\frac{dI}{d\Omega}$ релятивистской частицы, скорость которой в ретардированный момент времени перпендикулярна ее ускорению. Начертить полярную диаграмму для случаев $v \ll c$ и $v \sim c$. Определить направления, в которые не происходит излучения.

5.78. Частица с зарядом e и массой m движется со скоростью v по окружности в постоянном однородном магнитном поле $\boldsymbol{H}$. Найти угловое распределение $\frac{\overline{dI}}{d\Omega}$ интенсивности излучения, усредненное по периоду обращения частицы в магнитном поле. Какой характер принимает это угловое распределение в ультрарелятивистском случае $v \sim c$?

УказАниЕ. Использовать результаты предыдущей задачи. Перейти к сферическим координатам с полюсом в центре круговой траектории и полярной осью вдоль $\boldsymbol{H}$. При вычислении интеграла по азимутальному углу воспользоваться формулами из справочников.

5.79ˆ. Найти компоненты Фурье поля излучения $\boldsymbol{A}_n, \boldsymbol{H}_n$ заряда e, движущегося по круговой орбите радиуса a с релятивистской скоростью v. Исследовать характер поляризации компонент Фурье.

Указание. Использовать формулы (1.145), (1.146), (1.150).

5.80. Объяснить наличие высших гармоник в спектре поля заряда, движущегося с постоянной скоростью по круговой орбите (см. предыдущую задачу). Как будут меняться интенсивности этих гармоник, когда $\beta = \frac{v}{c} \to 0$? Какой вид будет иметь поле излучения в этом случае?

5.81*. Заряд e движется по окружности радиуса a со скоростью $v = \beta c$. Найти спектральное разложение интенсивности излучения $\frac{dI_n}{d\Omega}$ в данном направлении.

Вычислить также суммарное по всем направлениям излучение на отдельных гармониках. При интегрировании по углам использовать интегралы от функций Бесселя

$$\int_0^\pi d\vartheta \sin\vartheta \cot^2\vartheta J_n^2(n\beta\sin\vartheta) = 2\int_0^{2n\beta}\frac{J_{2n}(x)}{x}dx - \frac{1}{n\beta}\int_0^{2n\beta} J_{2n}(x)dx$$

$$\int_0^\pi d\vartheta \sin\vartheta \cot^2\vartheta J_n'^2(n\beta\sin\vartheta) = \frac{2}{n\beta}J_{2n}'^2(2n\beta) - \frac{2}{\beta^2}\int_0^{2n\beta}\frac{J_{2n}(x)}{x}dx + \\ + \frac{1}{n\beta}\int_0^{2n\beta} J_{2n}(x)dx$$

5.82. Получить угловое распределение полного излучения заряженной частицы, движущейся по круговой орбите в однородном магнитном поле, путем суммирования излучений на отдельных гармониках, найденных в предыдущей задаче. Подробно исследовать ультрарелятивистский случай ($\gamma = \mathscr{E}/mc^2 \gg 1$), записать упрощенную формулу для углового распределения излучения.

УказАние. Использовать формулу из теории функций Бесселя

$$\sum_{m=1}^{\infty} m^2 J_m'^2(mx) = \frac{4+3x^2}{16\left(1-x^2\right)^{5/2}}$$

и аналогичную формулу из условия задачи 5.39.

5.83**. Вычислить спектральную мощность излучения в заданном направлении n, создаваемую ультрарелятивистской заряженной частицей при движении по окружности в однородном магнитном поле. Ввиду присутствия в спектре огромного числа $N \sim \gamma^3 \gg 1$ близких гармоник считать частоту ω непрерывной величиной. Произвести приближенный расчет в первом неисчезающем приближении по γ^{-2} и θ^2, где γ - релятивистский фактор, θ - угол между плоскостью орбиты и направлением излучения. Результат выразить через модифицированные функции Бесселя

$$K_{2/3}(\xi) = \sqrt{3}\int_0^{\infty} x \sin\left[\frac{2}{3}\xi\left(x+\frac{1}{3}x^3\right)\right] dx$$

$$K_{1/3}(\xi) = \sqrt{3}\int_0^{\infty} \cos\left[\frac{2}{3}\xi\left(x+\frac{1}{3}x^3\right)\right] dx$$

Проанализировать спектральное и угловое распределение при малых и больших частотах. Излучение ультрарелятивистских частиц в магнитном поле называют синхротронным излучением.

5.84. Вычислить на основе формулы (3), полученной в предыдущей задаче, суммарную по всем направлениям спектральную мощность синхротронного излучения. Проанализировать результат для больших и малых частот. При интегрировании по углу θ использовать формулы из теории функций Бесселя

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \left(1+x^2\right)^2 K_{2/3}^2\left[(y/2)\left(1+x^2\right)^{3/2}\right] =$$

$$= \frac{\pi}{y\sqrt{3}}\left\{\int_y^{\infty} K_{5/3}(x)dx + K_{2/3}(y)\right\}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx x^2 \left(1+x^2\right) K_{1/3}^2\left[(y/2)\left(1+x^2\right)^{3/2}\right] =$$

$$= \frac{\pi}{y\sqrt{3}}\left\{\int_y^{\infty} K_{5/3}(x)dx - K_{2/3}(y)\right\}$$

5.85*. Вычислить спектральную мощность синхротронного излучения в заданном направлении n, создаваемую ультрарелятивистской заряженной
частицей при движении по спирали в однородном магнитном поле. Угол между направлением скорости частицы и магнитным полем равен $\pi/2 - \alpha$, так что значению $\alpha = 0$ соответствует движение по окружности. Использовать те же приближения, что в задаче 5.83. Определить также период между импульсами излучения, которые зарегистрирует удаленный наблюдатель, и граничную частоту ω_c спектра.

5.86. Найти спектр синхротронного излучения, который зарегистрирует наблюдатель от облака моноэнергичных космических электронов с энергией $\mathscr{E}_0 \gg mc^2$. Электроны находятся в однородном магнитном поле и их функция распределения по импульсам изотропна:

$$f(p)d^3p = \frac{N_0}{4\pi}\delta\left(p - p_0\right) dpd\Omega_p$$

Направление магнитного поля составляет угол Θ с направлением наблюдения n. Размер облака электронов мал по сравнению с расстоянием до него.

5.87*. Пусть в облаке космических электронов, рассмотренном в предыдущей задаче, частицы распределены по энергиям по степенному закону (что часто наблюдается в космических источниках радиоизлучения):

$$f(\mathscr{E})d\mathscr{E} = (\nu - 1)N_0\mathscr{E}_*^{\nu-1}d\mathscr{E}/\mathscr{E}^{\nu}, \quad \mathscr{E} \geqslant \mathscr{E}_*, \quad \nu > 1$$

Вычислить спектр синхротронного излучения этого источника в той области частот, которая зависит от граничной энергии $\mathscr{E}_*$ только через нормировочный множитель. Найти связь спектра излучения со спектральным индексом ν энергетического спектра релятивистских электронов.

5.88. Крабовидная туманность в нашей Галактике считается одним из главных источников синхротронного излучения в широком диапазоне частот. Согласно наблюдениям, показатель спектра синхротронного излучения имеет значения $\alpha \approx 0,3$ при $f = \omega/2\pi < 10^{14}\Gamma_{\text{ц и}}\, \alpha \approx 1,0$ при $f > 10^{14}\Gamma_{\text{ц.}}$. Предполагается, что в туманности существует магнитное поле $H \approx 10^{-4}$ Э. Оценить показатели энергетического спектра электронов и найти значение энергии $\mathscr{E}_*$, при котором происходит излом спектра.

5.89*. Ультрарелятивистская частица влетает в электрический «ондулятор» - устройство, в котором на частицу действует периодически изменяющееся электрическое поле $\boldsymbol{E}(t) = \boldsymbol{E}_0 \cos\omega_0 t$, перпендикулярное ее начальной скорости, $v_0 \perp \boldsymbol{E}_0$. Поле предполагается достаточно слабым, так что траектория частицы лишь немного отличается от прямой линии. Вычислить угловое распределение $d\mathscr{C}^{\text{rad}}/d\Omega$ и полную энергию $\mathscr{E}$ гад, излучаемую частицей за время пролета ондулятора длиной L. Оценить по

порядку величины характерные частоты излучаемых волн для электронов с энергией $\mathscr{E} = 5$ ГэВ, движущихся в радиочастотном поле с $\lambda_0 = 2\pi/\omega_0 = 3$ cm.

5.90. В магнитном ондуляторе длиной L создано поперечное статическое магнитное поле в виде циркулярно поляризованной волны

$$\boldsymbol{H}(z) = H_0\left(\boldsymbol{e}_x \sin\frac{2\pi}{\lambda_0}z + \boldsymbol{e}_y \cos\frac{2\pi}{\lambda_0}z\right), \quad \lambda_0 \ll L$$

В ондулятор в момент $t = 0$ влетает ультрарелятивистский электрон с начальными значениями координат и скорости $x = a, y = z = 0, \dot{x} = 0, \dot{y} =$ - $-\beta_\perp c, \dot{z} = \beta_\parallel c$, где $\beta_\perp = \lambda_0\omega_H/2\pi c\gamma \ll 1$, но $\beta_\perp \gg \gamma^{-1}, \beta_\parallel^2 = \beta^2 - \beta_\perp^2 \approx 1$, $\omega_H = eH_0/mc, a = \beta_\perp c/\omega_0, \omega_0 = 2\pi\beta_\parallel c/\lambda_0$. Вычислить спектральное распределение полной энергии, излученной электроном. Произвести сравнение со спектром синхротронного излучения, полученным в задачах 5.84, 5.86.

5.91*. На круговой орбите одновременно находится N электронов (см. задачу 5.79). Исследовать влияние интерференции полей, создаваемых этими электронами, на интенсивность излучения n-й гармоники Фурье. Рассмотреть частные случаи: а) совершенно беспорядочного распределения электронов на орбите; б) правильного расположения электронов на расстоянии $2\pi/N$ друг от друга.

5.92. Рассмотреть в предыдущей задаче излучение гармоник Фурье сгустком электронов, размеры которого малы по сравнению с радиусом орбиты. Провести расчет для двух функций распределения частиц внутри сгустка: а) равномерное распределение в пределах сектора с угловым размером φ,

$$f(\psi) = \begin{cases} 1/\varphi, & -\varphi/2 \leqslant \psi \leqslant \varphi/2 \\ 0, & |\psi| > \varphi/2 \end{cases}$$

б) гауссово распределение,

$$f(\psi) = \frac{1}{\varphi\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{\psi^2}{\varphi^2}\right), \quad \varphi \ll 2\pi$$

Вычислить когерентную и некогерентную мощности излучения сгустка.

5.93. Нерелятивистская частица с зарядом q и массой m испытывает лобовое столкновение (прицельный параметр $\rho = 0$) с рассеивающим центром, взаимодействие с которым описывается потенциальной энергией $U(r)$. На некотором расстоянии $r_{\min}$ от центра частица испытывает отражение. Выразить энергию $\mathscr{E}^{\text{rad}}$ электромагнитного излучения частицы через потенциальную энергию $U(r)$ и полную нерелятивистскую энергию $\mathscr{E}$ частицы.

5.94. Вычислить $\mathscr{E}^{\text{rad}}$ (см. предыдущую задачу) для случая кулоновского отталкивания: $U(r) = Zeq/r, eq > 0$. Какая доля энергии частицы расходуется на излучение?

5.95ˆ. Две частицы с зарядами e_1, e_2 и массами $m_1, m_2 \left(\frac{e_1}{m_1} \neq \frac{e_2}{m_2}\right)$ совершают эллиптическое движение (см. задачу 4.66). Найти полную, усредненную по времени, интенсивность излучения $\bar{I}$.

5.96. Найти среднюю за период потерю момента импульса $\overline{\frac{d\boldsymbol{K}}{dt}}$ системой двух частиц, совершающих эллиптическое движение (см. предыдущую задачу).

УказАниЕ. Общая формула для потери момента импульса была получена в задаче 5.20 .

5.97ˆ. Найти дифференциальное эффективное излучение $\frac{d\boldsymbol{kn}}{d\Omega}$ при рассеянии потока частиц с зарядами e_1, массами m_1 и скоростью v_0 на одноименно заряженной частице с зарядом e_2 и массой m_2.

УкАзАниЕ. При вычислении интегралов A и B, входящих в формулу (5.83), перейти от интегрирования по dt к интегрированию по $dr, dt = \frac{dr}{\dot{r}}$, где $\dot{r} = \sqrt{1 - \frac{2a}{r} - \frac{s^2}{r^2}}$, s - прицельное расстояние, $2a$ - минимальное расстояние, на которое могут сближаться частицы (оно достигается при $s = 0$). Интегрировать сначала по ds, затем по dr. При вычислении B необходимо использовать уравнение траектории относительного движения, которое можно найти в ответе к задаче 4.66.

5.98*. Частица с зарядом e_1 и массой m сталкивается с другой частицей, масса которой много больше m, а заряд e_2; прицельное расстояние s. Кинетическая энергия налетающей частицы велика по сравнению с потенциальной энергией взаимодействия частиц $\frac{e_1 e_2}{r}$. Вследствие этого скорость v налетающей частицы может считаться постоянной в течение всего столкновения; она не обязательно мала по сравнению со скоростью света. Найти угловое распределение полного излучения $\frac{d\Delta W_n}{d\Omega}$. Рассмотреть, в частности, случай $\beta = \frac{v}{c} \ll 1$.

УказАниЕ. Воспользоваться общей формулой для углового распределения полного излучения 5.60. Ускорение частицы $\dot{v}$ выразить через действующую на нее кулонову силу и скорость $\boldsymbol{v}$ частицы с помощью формул $\boldsymbol{v} = \frac{c^2 \boldsymbol{p}}{\mathscr{E}}$ и $\dot{\boldsymbol{p}} = e_1 e_2 \frac{\boldsymbol{r}}{r^3}$.

5.99. Определить полное излучение энергии ΔW и импульса Δp частицей, рассмотренной в предыдущей задаче, за все время ее движения. Сделать это как непосредственно - путем интегрирования углового, распределения, найденного в предыдущей задаче, так и с помощью формул, полученных в задачах (5.68), (5.71).

5.100*. Частица с зарядом e_1 и массой m сталкивается с тяжелой частицей, заряд которой e_2. Прицельное расстояние s велико, так что кинетическая энергия частицы в течение всего времени движения велика по сравнению с ее потенциальной энергией. Скорость

частицы $v \ll c$. Найти спектр тормозного излучения частицы $\frac{d\Delta W_\omega}{d\omega}$.

5.101*. Поток частиц с зарядами e_1 и массами m_1 рассеивается на частице с зарядом e_2 и массой $m_2\,(e_1/m_1 = e_2/m_2)$. Выразить дифференциальное эффективное излучение $d\kappa_n/d\omega$ через компоненты $Q_{\alpha\beta}$ квадрупольного момента системы. Результат представить в форме, аналогичной 5.83, 5.84.

5.102*. Найти полное эффективное излучение κ при рассеянии потока заряженных частиц (заряд e, масса m, скорость v_0) одинаковой с ними частицей.

5.103. Поток частиц с зарядом e и скоростью $v \ll c$ рассеивается на абсолютно твердой сфере радиуса a. Найти эффективное излучение $d\kappa\omega$ в интервале частот $d\omega$. Чему равно полное эффективное излучение κ? Чему равно дифференциальное сечение $d\sigma/d\hbar\omega$ генерации фотонов с частотой ω в расчете на единицу энергии $\hbar\omega$ фотона?

5.104*. Решить предыдущую задачу для рассеяния релятивистских частиц.

5.105. Найти интенсивность излучения гармоник Фурье с частотами $\omega_n = n\omega_0$, кратными основной частоте ω_0, при нерелятивистском эллиптическом движении двух заряженных частиц (см. задачу 5.95).

УкАзАниЕ. При движении по эллипсу относительные координаты частиц можно представить в параметрической форме

$$x = a(\cos u - \epsilon), \quad y = a\sqrt{1-\epsilon^2}\sin u, \quad \omega_0 t = u - \epsilon \sin u$$

где u - параметр, $\omega_0 = (2|\mathscr{E}|)^{3/2}/e_1^2 e_2^2 \mu^{1/2}$ - частота обращения по эллипсу, $\epsilon = \sqrt{1 - 2|\mathscr{E}|L^2/e_1^2 e_2^2 \mu}$ - его эксцентриситет, $a = |e_1 e_2|\,/2|\mathscr{E}|$ - большая полуось, $\mathscr{E} < 0$ - полная нерелятивистская энергия системы (энергия связи), L - момент импульса, μ - приведенная масса.

5.106. Дипольный момент малой («точечной») системы зарядов, находящийся в начале координат, мгновенно изменяется от значения p_1 до $p_2 = p_1 + \Delta p$. Вычислить электромагнитное поле во всем пространстве и спектральную плотность излучения в заданном направлении $d^2 I_\omega/d\omega d\Omega$.

УкАзАниЕ. Записать плотность дипольного момента (вектор электрической поляризации) в форме

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{p}_1 \Theta(-t) + \boldsymbol{p}_2 \Theta(t)$$

где $\Theta(t)$ - ступенчатая функция, и использовать формулы (5.41) и электрический вектор Герца для вычисления поля.

5.107. Положительный точечный заряд а) двигался равномерно со скоростью v вдоль оси Oz и мгновенно остановился при $t = 0$ в начале координат; б) покоился в начале координат и внезапно при $t = 0$ приобрел постоянную скорость v. Нарисовать картину электрического поля для момента $t > 0$. Как распределено в пространстве магнитное поле?

5.108. При бета-распаде атомных ядер происходит изменение их энергии и зарядового числа ядра на единицу с испусканием электрона (позитрона) и нейтрино: $N_Z \to N_{Z\pm1} + e^{\mp} + \nu$. Рождающийся электрон может иметь релятивистскую энергию. Рассматривая этот процесс как внезапный старт заряженной частицы с постоянной скоростью, вычислить величины $d^2 I_\omega/d\omega d\Omega, dI_\omega/d\omega$ и число фотонов N_ω с заданной частотой, приходящихся на единичный интервал энергии квантов.

5.109*. Бета-электрон (см. предыдущую задачу) обладает не только зарядом, но и спиновым магнитным моментом (в системе покоя электрона это - магнетон Бора μ_B, см. раздел 4.2). Уточнить результаты предыдущей задачи путем учета внезапного появления не только заряда электрона, но и его магнитного момента. Ввиду релятивистского движения электрона следует также учесть правило преобразования

моментов (см. задачу 4.37). Вычислить величины $d^2I_\omega/d\omega d\Omega, dI_\omega/d\omega$, считая магнитный момент в системе покоя электрона направленным вдоль скорости (продольно поляризованные электроны) и рассматривая его как классическую величину.

5.110. Возбужденное атомное ядро может передать энергию возбуждения орбитальному электрону, в результате чего атом ионизуется. Предполагая процесс конверсии мгновенным, а конверсионный электрон свободным и нерелятивистским, найти число квантов N_ω с заданной частотой в расчете на единичный интервал энергии.

5.111*. Ядро с зарядом Ze захватывает орбитальный электрон и превращается в другое ядро с зарядом $(Z-1)e : N_Z \to N_{Z-1} + \nu$. Разность энергий ядерных уровней передается нейтрино. Предполагая, что электрон
в атоме движется по круговой орбите радиуса a с частотой ω_0, найти число квантов N_ω с заданной частотой на единицу энергии, обусловленное внезапным исчезновением электрона вместе с его зарядом и магнитным моментом.

У КазАниЕ. Захват электрона может произойти из любой точки его орбиты. Направление спина электрона неупорядоченно. Поэтому нужно провести усреднение по начальным фазам движения электрона и по направлениям его спина.

5.112. Пион распадается на мюон и мюонное нейтрино: $\pi^\pm \to \mu^\pm + \nu_\mu$. Кинетическая энергия образовавшихся частиц $T = (m_\pi - m_\mu)\, c^2 \approx 34\text{МВ}$ в системе покоя пиона. Найти число квантов N_ω заданной частоты в расчете на единицу энергии. Из законов сохранения (в предположении нулевой массы нейтрино) определить максимальную возможную энергию кванта $\hbar\omega_{\max}$.

5.113. Каон распадается по схеме $K^+ \to \pi_+ + \pi_+ + \pi^-$, причем пионы можно считать нерелятивистскими. Вычислить распределение интенсивности излучения по частотам и по углам в системе покоя каона. Вычислить также распределение мягких квантов по частотам независимо от угла вылета.

5.2.4 5.4. Interaction of Charged Particles with Radiation

Взаимодействие заряженной частицы с собственным электромагнитным полем. В разделе 2.1 мы уже столкнулись с трудностью определения собственной электростатической энергии заряженной частицы. Для точечной частицы эта энергия оказывается бесконечной. Введение конечного «классического» радиуса частицы (см. задачу 3.120)

$$r_0 = \frac{e^2}{mc^2} \tag{5.94}$$

и связанного с этим предположения о наличии у нее внутренней структуры позволяет сделать собственную энергию конечной. Но при этом возникают противоречия с теорией относительности (см. задачи 5.114-5.117). К тому же объект размером r_0 не описывается классической теорией: квантовые эффекты становятся существенными уже на значительно больших расстояниях, равных комптоновской длине волны

$$\Lambda = \frac{\hbar}{mc} \approx 137 r_0 \tag{5.95}$$

К сожалению, квантовая теория не разрешает трудностей, связанных с вычислением собственной энергии. В ней появляются, кроме бесконечной
собственной энергии, другие бесконечные величины, например, добавка к заряду частицы.

При ускоренном движении частицы возникает ее дополнительное взаимодействие с собственным полем. Ускоренное движение порождает излучение электромагнитных волн, что приводит к потере частицей энергии и импульса. Следовательно, само движение частицы будет зависеть от излучения ею электромагнитных волн, и

корректная постановка задачи о движении заряженной частицы требует включения в уравнение движения членов, учитывающих влияние излучения на движение.

Во многих случаях, однако, это влияние оказывается малым, что и позволяет считать движение излучающей частицы заданным. Количественный критерий малости реакции излучения можно получить, сравнивая потери энергии на излучение за некоторое время Δt с изменением кинетической энергии частицы под действием внешних сил за то же время. Оценим обе энергии в системе отсчета, в которой частица в течение рассматриваемого промежутка времени совершает нерелятивистское движение. С помощью формулы Лармора (5.32) получаем

$$\Delta\mathscr{E} \approx 2e^2\dot{\boldsymbol{v}}^2\Delta t/3c^3 \approx 2e^2\boldsymbol{v}\Delta\boldsymbol{v}/3c^3$$

где Δv - изменение скорости за время Δt. С другой стороны, $\Delta\mathscr{E}^{kin} \approx \approx m\Delta\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}$. Неравенство $\Delta\mathscr{E}^{\mathrm{rad}} \ll \Delta\mathscr{E}^{kin}$ дает

$$\Delta t \approx \left|\frac{\boldsymbol{v}}{\dot{\boldsymbol{v}}}\right| \gg \frac{2e^2}{3mc^3} = \frac{2r_0}{3c} = \tau_0 \tag{5.96}$$

где τ_0 - время распространения электромагнитных возмущений на расстояние порядка классического радиуса частицы. Наибольшее значение время τ_0 имеет для самой легкой элементарной частицы - электрона: $\tau_e = 0,63\times10^{-23}$с.

При квазипериодическом движении частицы ее средние скорость и ускорение возвращаются к исходным значениям через каждый период $T_0 = 2\pi/\omega_0$, и потерю энергии на излучение за период нужно сравнивать со средней кинетической энергией: $\Delta\mathscr{E}^{\mathrm{rad}} \approx (2e^2l^2\omega_0^4/3c^3)\,T_0$, $\overline{\mathscr{E}}^{kin} \approx m\omega_0^2l^2$, где l - размер области движения частицы. Сравнение дает $T_0 \gg \tau_0$ или $\omega_0\tau_0 \ll 1$, т. е. в неравенствах (5.96) нужно заменить время Δt на период T_0.

Таким образом, при нерелятивистском движении реакцию излучения можно рассматривать как малый эффект, если движение частицы достаточно плавное и ее состояние слабо меняется за время τ или на расстояниях $c\tau \approx r_0$. При нерелятивистском движении это условие фактически

всегда выполняется. Но в ультрарелятивистском случае (см., например, задачу 5.138) сила радиационного торможения может стать главным фактором, определяющим движение частицы.

Перенормировка массы. Сила радиационного торможения в релятивистском случае. Приведем теперь вывод явного и релятивистски ковариантного выражения для силы радиационного торможения [Соколов и Тернов (1983)], [Байер и др. (1973)], [Гальцов и др. (1991)]. Этот вопрос тесно связан с релятивистски-инвариантным представлением собственной электромагнитной массы частицы.

Исходим из ковариантного уравнения движения (4.53) точечной частицы, имеющей заряд e и некоторую массу m_0:

$$m_0\frac{d^2x_i}{d\tau^2} = \frac{e}{c}F_{ik}u^k + \mathscr{F}_i \tag{5.97}$$

где производная берется по инвариантному собственному времени τ. В правую часть кроме внешней электромагнитной силы (первое слагаемое) добавлена сила $\mathscr{F}_i$ воздействия на частицу создаваемого ею собственного электромагнитного поля. Запишем эту силу через 4 -потенциал $\mathscr{A}_i$ собственного поля частицы в той же форме, что и внешнюю силу:

[02] Подробное изложение этих вопросов можно найти в книгах [Берестецкий и др. (1989)], [Ахиезер и Берестецкий (1981)], [Боголюбов и Ширков (1980)].

$$\mathscr{F}_i = \frac{e}{c}\frac{dx^k}{d\tau}\left(\frac{\partial \mathscr{A}_k}{\partial x^i} - \frac{\partial \mathscr{A}_i}{\partial x^k}\right) \tag{5.98}$$

Потенциал $\mathscr{A}_i$ удовлетворяет уравнениям (5.1), которые можно записать в четырехмерной форме:

$$\Box \mathscr{A}_i(x) = -\frac{4\pi}{c} j_i(x) = -4\pi e \int d\tau' \frac{dx_i(\tau')}{d\tau'} \delta^4\left(x - x(\tau')\right) \tag{5.99}$$

Здесь под x понимается совокупность четырех текущих координат пространства-времени, а под $x(\tau') \equiv x'$ - четырехмерные координаты частицы в функции ее собственного времени. Для плотности тока использовано представление (4.110). Решение уравнения (5.99) запишем в форме (5.4) через запаздывающую функцию Грина:

$$\mathscr{A}_i(x) = \frac{1}{c^2}\int G^R(x-y) j_i(y) d^4y = \frac{e}{c}\int d\tau' \frac{dx_i(\tau')}{d\tau'} G^R\left(x - x(\tau')\right) \tag{5.100}$$

С помощью последнего уравнения находим силу, действующую на тастицу со стороны ее собственного поля:

$$\mathscr{F}_i(x) = \frac{e^2}{c^2}\int \frac{dx^k(\tau)}{d\tau}\left(\frac{dx_k(\tau')}{d\tau'}\frac{\partial}{\partial x^i} - \frac{dx_i(\tau')}{d\tau'}\frac{\partial}{\partial x^i}\right) G^R\left(x(\tau) - x(\tau')\right) d\tau' \tag{5.101}$$

Здесь x, входящий в аргумент силы $\mathscr{F}$, имеет смысл четырехмерных координат частицы, которые рассматриваются как функции ее собственного времени.

Следующий важный этап вычисления силы самодействия связан с представлением запаздывающей функции Грина в виде суммы двух слагаемых и их интерпретации (см. задачи 5.3, 5.9):

$$G^R(x-x') = G^+(x-x') - \frac{1}{2}G^-(x-x'), \quad \text{где} \quad G^+(x-x') = c\delta\left(s^2\right) \tag{5.102}$$

$$G^-(x-x') = 2c\left[\Theta(x_0' - x_0) - \Theta(x_0 - x_0')\right]\delta\left(s^2\right) = -2c\frac{x_0 - x_0'}{|x_0 - x_0'|}\delta\left(s^2\right)$$

$$s^2 = (x_k - x_k')\left(x^k - x'^k\right) \tag{5.103}$$

Функция G^-, согласно результатам задачи 5.9, удовлетворяет однородному уравнению Даламбера, несингулярна, и связанное с ней поле можно интерпретировать как поле излучения частицы. Соответствующая часть силы самодействия будет представлять собой реакцию излучения. Функция G^+ удовлетворяет уравнению с дельтаобразным источником и ответственна за квазистационарное поле, связанное с частицей и создающее ее электромагнитную массу. Обе эти функции зависят от разностей $x_k(\tau) - x_k(\tau') = s_k$. При фиксированном τ' имеем

$$\frac{\partial}{\partial x^k} = \frac{\partial}{\partial s^k} = 2(x_k - x_k')\frac{\partial}{\partial(s^2)} \tag{5.104}$$

Поскольку τ и τ' - разные моменты собственного времени частицы, они должны быть близки друг другу и их разность даже для протяженной частицы имеет порядок величины τ_0, определяемой согласно (5.96). Для точечной частицы, очевидно, $\tau_0 \to 0$. Поэтому целесообразно произвести разложение всех величин под интегралом (5.101) по малой разности $\tau' - \tau = \nu$ и перейти к интегрированию по ν:

$$x_k - x'_k \approx -\nu\frac{dx_k}{d\tau} - \frac{\nu^2}{2}\frac{d^2x_k}{d\tau^2} - \frac{\nu^3}{6}\frac{d^3x_k}{d\tau^3} + \mathscr{O}\left(\nu^4\right), \quad s^2 \approx c^2\nu^2 + \mathscr{O}\left(\nu^4\right) \tag{5.105}$$

С помощью этих разложений находим

$$G^R\left(x - x'\right) = \left(1 - \frac{\nu}{|\nu|}\right)\frac{\delta(\nu)}{s|\nu|} \tag{5.106}$$

$$\frac{\partial}{\partial x^k} = -\frac{1}{c^2}\left(\frac{dx_k}{d\tau} + \frac{\nu}{2}\frac{d^2x_k}{d\tau^2} + \frac{\nu^2}{6}\frac{d^3x_k}{d\tau^3}\right)\frac{d}{d\nu}$$

и вычисляем силу самодействия по формуле (5.101), произведя один раз интегрирование по частям:

$$\mathscr{F}_i = -\left\{\frac{e^2}{2c^2}\int\frac{\delta(\nu)}{|\nu|}d\nu\right\}\frac{d^2x_i}{d\tau^2} + \frac{2e^2}{3c^3}\left(\frac{d^3x_i}{d\tau^3} - \frac{1}{c^2}\frac{dx_i}{d\tau}\frac{dx^k}{d\tau}\frac{d^3x_k}{d\tau^3}\right) \tag{5.107}$$

Первое отрицательное слагаемое, содержащее расходящийся интеграл, можно интерпретировать как часть силы инерции, в которую входит бесконечная электромагнитная масса

$$\Delta m = \frac{e^2}{2c^2}\int\frac{\delta(\nu)}{|\nu|}d\nu \tag{5.108}$$

частицы. Вместе с массой m_0 «голой» (т. е. не взаимодействующей с полем излучения) частицы она образует полную наблюдаемую на опыте массу $m = m_0 + \Delta m$ частицы. Именно так интерпретируется аналогичная расходящаяся величина в квантовой электродинамике, а сама процедура ее включения в наблюдаемую массу называется «перенормировкой массы». Такая интерпретация возможна, поскольку «голая» масса является величиной ненаблюдаемой, и ей можно приписать бесконечную отрицательную составляющую. Но сам факт появления расходящейся величины является, несомненно, свидетельством несовершенства теории.

Второе слагаемое в (5.108) представляет собой силу торможения частицы, вызванную потерей импульса на излучение:

$$\mathscr{F}_i^{rad} = \frac{2e^2}{3c^3}\left(\frac{d^3x_i}{d\tau^3} - \frac{1}{c^2}\frac{dx_i}{d\tau}\frac{dx^k}{d\tau}\frac{d^3x_k}{d\tau^3}\right) \tag{5.109}$$

Уравнение движения частицы с учетом радиационной силы (уравнение Дирака-Лоренца) записывается в виде

$$m\frac{d^2x_i}{d\tau^2} = \frac{e}{c}F_{ik}\frac{dx^k}{d\tau} + \frac{2e^2}{3c^3}\left(\frac{d^3x_i}{d\tau^3} - \frac{1}{c^2}\frac{dx_i}{d\tau}\frac{dx^k}{d\tau}\frac{d^3x_k}{d\tau^3}\right) \tag{5.110}$$

где m - наблюдаемая на опыте конечная масса частицы. Лоренцеву силу радиационного трения можно записать в более компактной форме, продифференцировав по собственному времени тождество $u^k w_k = 0$, где u^k и w_k - соответственно четырехмерные скорость и ускорение:

$$\mathscr{F}_i = \frac{2e^2}{3c^3}\left(\frac{dw_i}{d\tau} + \frac{1}{c^2}u_i\left(w_k w^k\right)\right) \tag{5.111}$$

Пример 5.16. Исследовать роль отдельных членов в правой части уравнения (5.110). Для этого рассмотреть ситуацию, когда частица подвергается воздействию внешнего поля F_{ik} в течение конечного времени и вычислить изменение Δp_i ее 4 -импульса за

время действия поля. Установить связь между силой радиационного трения и потерей частицейэнергии и импульса на излучение.

Решение. Пусть при $\tau \leqslant \tau_1$ и $\tau \geqslant \tau_2$ частица движется без ускорения. Интегрируя уравнение (5.110) по интервалу $[\tau_1, \tau_2]$, будем иметь $\Delta p_i = (\Delta p_i)^{\text{ext}} + (\Delta p_i)^{\text{rad}}$, где первое слагаемое

$$(\Delta p_i)^{ext} = \int_1^2 \frac{e}{c} F_{ik} dx^k$$

представляет собой изменение 4-импульса за счет внешнего поля. Второе слагаемое запишем, использовав формулу (5.111) для радиационной силы:

$$(\Delta p_i)^{rad} = \int_1^2 \mathscr{F}_i d\tau = \frac{2e^2}{3c^3} w_i \Big|_1^2 + \frac{2e^2}{3c^5} \int_1^2 w_k w^k u_i d\tau$$

Первое слагаемое в правой части равно нулю ввиду обращения в нуль ускорения. Оставшийся интеграл совпадает с результатом интегрирования величины (5.73) и представляет собой, таким образом, изменение 4 -импульса частицы вследствие излучения.

Пример 5.17. Записать силу радиационного трения в нерелятивистском случае. Какие трудности возникают в исследовании движения частицыы при включении в уравнение движения радиационной сильт?

Решение. В нерелятивистском приближении $d/d\tau = d/dt, \gamma = 1$. Использовав формулу (5.111), находим в соответствии с общим соотношением (4.60), связывающим четырехмерную и трехмерную силы, $\mathscr{F}_i = (\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v}/c, \boldsymbol{F})$, где

$$\boldsymbol{F} = \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{\boldsymbol{v}} \tag{5.112}$$

- нерелятивистская трехмерная сила радиационного трения.

Запишем уравнение движения частицы в отсутствие внешних полей, но с учетом радиационной силы:

$$m\dot{v} = \frac{2e^2}{3c^3} \ddot{\boldsymbol{v}} \tag{5.113}$$

Важной особенностью этого уравнения, как и значительно более сложного уравнения (5.110), является более высокий (третий) порядок производных от координат по времени по сравнению с обычными уравнениями движения релятивистской (и нерелятивистской) классической механики. Интегрируя уравнение (5.113), получаем его общее решение

$$\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} e^{t/\tau_0}$$

где a, b - постоянные интегрирования, τ_0 определена согласно (5.96). Обратим внимание на то, что показатель экспоненты положителен, и второе слагаемое представляет «самоускоряющееся» решение: скорость нарастает в отсутствие ускоряющей силы. Но Нельзя забывать о том, что уравнение (5.113), имея второй порядок относительно скорости, требует задания двух начальных условий, т. е. скорости и ускорения. В отсутствие внешних сил ускорение равно нулю, поэтому $\boldsymbol{v}(0) = \boldsymbol{v}_0, \boldsymbol{v}(0) = 0$. Определяя из этих условий постоянные интегрирования, находим $b = 0$ и получаем правильное для этого простейшего случая решение $\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{v}_0 = \text{const}$.

Пример 5.18. Выразить силу радиационного трения через скорость частицы и внеинее электромагнитное поле. Для этого использовать уравнение движения частиы в пренебрежении излучением, считая радиаиионную силу малой. Рассмотреть подробно случаи нерелятивистского и ультрарелятивистского движения.

Решение. Из уравнения движения (4.53) находим

$$w_i = \frac{du_i}{d\tau} = \frac{e}{mc} F_{ik} u^k, \quad \frac{d^2 u_i}{d\tau^2} = \frac{e}{mc} \frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l} u^k u^l + \frac{e^2}{(mc)^2} F_{ik} F^{kl} u_l$$

и, используя эти результаты, получаем из (5.111) радиационную силу, выраженную через внешнее поле:

$$\mathscr{F}_i = \frac{2e^3}{3mc^4} \frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l} u^k u^l + \frac{2e^4}{3m^2c^5} \left(F_{ks} u^s\right) \left(F^{kl} u_l\right) u_i \tag{5.114}$$

В нерелятивистском пределе подставляем в (5.114) $u^k = (c, \boldsymbol{v})$ и с помощью таблиц (4.68) получаем трехмерную радиационную силу

$$\boldsymbol{F} = \begin{cases} \frac{2e^3}{3mc^3} \dot{\boldsymbol{E}} + \frac{2e^4}{3m^2c^4} \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H} & \text{при} \quad E \gg vH/c \\ \frac{2e^3}{3mc^4} \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{H} + \frac{2e^4}{3m^2c^5} \boldsymbol{H} \times (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{H}) & \text{при} \quad E \ll vH/c \end{cases} \tag{5.115}$$

Здесь

$$\dot{\boldsymbol{E}} = \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla) \boldsymbol{E}$$

и аналогично записывается $\dot{\boldsymbol{H}}$. Малость радиационной силы по сравнению с силой Лоренца в обоих случаях приводит к ограничению внешнего поля

$$H \ll \frac{|e|}{r_0^2} \tag{5.116}$$

Но это ограничение практически неважно, так как квантовые поправки становятся существенными при меньших значениях поля.

В ультрарелятивистском случае $u^k = \gamma(c, v), \gamma \gg 1$, поэтому в (5.114) нужно учесть только слагаемое, содержащее произведение трех 4-скоростей. Из (5.114) с помощью (4.68) находим трехмерную силу

$$\boldsymbol{F} = -\frac{2e^4\gamma^2}{3m^2c^4} \left\{ (\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{v})^2 - (c\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{H})^2 \right\} \boldsymbol{v} \tag{5.117}$$

направленную противоположно скорости частицы. Здесь всюоду, кроме γ, следует считать $|\boldsymbol{v}| = c$. Выбрав ось Oz вдоль $\boldsymbol{v}$, получим более простое выражение для радиационной силы:

$$F_z = -\frac{2e^4\gamma^2}{3m^2c^4} \left\{ (E_x - H_y)^2 + (E_y + H_x)^2 \right\} \tag{5.118}$$

Как следует из (5.117), (5.118), эта сила пропорциональна квадрату энергии частицы и квадрату внешнего поля.

Рассеяние электромагнитных волн частицами. Кроме взаимодействия с полем собственного излучения, заряженные частицы могут взаимодействовать с электромагнитными волнами, созданными внешними источниками. Это приводит к ускоренному движению частиц, и возникает вторичное (рассеянное) излучение. Процесс рассеяния характеризуется дифференциальным

$$d\sigma_s = \frac{dI(\theta, \alpha)}{\overline{\gamma_0}} \quad \text{и полным} \quad \sigma_s = \int d\sigma_s \tag{5.119}$$

сечениями рассеяния. Здесь $dI(\theta,\alpha)=\bar{\gamma}r^2d\Omega$ - средняя (по времени) интенсивность излучения в телесный угол $d\Omega;\bar{\gamma},\overline{\gamma_0}$ - средние плотности потока энергии в рассеянной и падающей волнах, определяемые через вектор Пойнтинга.

Плодотворным подходом к исследованию процессов взаимодействия частиц с электромагнитными волнами является метод осцилляторов поля, тесно связанный с разложением Фурье, суть которого для свободного поля была изложена в конце раздела 2.3. Применение этого метода к более сложным случаям см. в задаче 5.143 и последующих.

Рекомендуемая литература: [Алексеев (1977)], [Бредов и др. (1985)], [Ландау и Лифшиц, Теория поля], [Гинзбург (1987)], [Френкель (1956)], [Соколов и Тернов (1983)], [Джексон (1975)], [Новожилов и Яппа (1978)], [Батыгин и Топтыгин (1970)], [Байер и др. (1973)].

Задачи

5.114*. Найти импульс электромагнитного поля частицы с зарядом e, движущейся равномерно со скоростью v. Частицу рассматривать в ее системе покоя S' как твердый шарик с радиусом r_0 (в системе, где скорость частицы равна v, имеет место лоренцево сокращение). Ввести электромагнитную массу m_0 покоя частицы, связанную соотношением Эйнштейна с энергией ее поля в состоянии покоя. Какие при этом возникают трудности?

5.115. Найти энергию W_m магнитного поля, а также полную электромагнитную энергию W частицы, рассмотренной в предыдущей задаче.

5.116*. Найти силу $\boldsymbol{F}$, с которой заряженная сферически симметричная частица действует сама на себя (сила самодействия) при ускоренном поступательном движении с малой скоростью $v\ll c$. Запаздывание и лоренцево сокращение не учитывать.

УКАзАниЕ. Вычислить равнодействующую сил, приложенных к малым элементам de заряда частицы, воспользовавшись выражением для напряженности поля точечного заряда (5.58).

5.117*. Найти уточненное выражение для силы $\boldsymbol{F}$ самодействия заряженной сферически симметричной частицы (см. предыдущую задачу). При решении учитывать эффект конечной скорости распространения взаимодействия с точностью до первого порядка по времени $t'-t$ распространения взаимодействия между элементами частицы. Рассмотреть, в частности, предельный случай точечной частицы. Оценить вклад отбрасываемых членов более высокого порядка по $t'-t$ в этом предельном случае.

5.118*. В задачах (5.114)-(5.117) было показано, что «наивное» определение собственной энергии и импульса заряженной частицы конечных размеров (модель Абрагама-Лоренца, см. формулы (1) и (2) из решения задачи (5.114)) приводит к неправильной связи между ними. Ввести ковариантное определение указанных величин, использовав для этого тензор энергии-импульса электромагнитного поля (4.126) и произведя интегрирование по некоторой пространственноподобной гиперповерхности, выбранной таким образом, чтобы в системе покоя частицы выполнялись условия

$$\mathscr{E}_0=\frac{1}{8\pi c}\int E'^2dV',\quad p_0=0$$

Показать, что в этом случае энергия и импульс частицы образуют 4-вектор с компонентами $p^i=(\gamma mc,\gamma m\boldsymbol{v})$, где

$$m=\frac{\gamma}{8\pi c}\int\left(E^2-H^2\right)d^3x=\frac{1}{8\pi c}\int E'^2dV'$$

- инвариантная масса. В первом интеграле интегрирование производится по трехмерному объему в произвольной инерциальной системе, во втором в системе покоя частицы.

5.119. Какое время T прожил бы резерфордовский атом водорода, если бы электрон в атоме двигался и излучал как классическая частица? Считать, что электрон, теряя энергию, движется к протону по пологой спирали, так что в каждый момент времени он излучает как заряд на круговой орбите (радиус орбиты медленно меняется со временем). При каком условии справедливо это предположение? Начальный радиус атома $a = 0,5 \cdot 10^{-8}$ см.

5.120. Релятивистская частица с зарядом e и массой m движется по круговой орбите в постоянном однородном магнитном поле H, теряя энергию на излучение. Найти закон изменения энергии и радиуса орбиты со временем $\mathscr{E}(t)$ и $r(t)$. В начальный момент времени $t = 0$ энергия частицы равна $\mathscr{E}_0$ (ср. с задачей 5.119).

5.121. Электрон в бетатроне разгоняется на орбите постоянного радиуса a вихревым электрическим полем. Последнее индуцируется временным магнитным полем частоты ω. Найти критическое значение энергии электрона $\mathscr{E}_{\text{кр}}$, при котором потери на излучение сравняются с энергией, приобретаемой электроном за счет работы вихревого электрического поля.

5.122ˆ. Частица с зарядом e и массой m притягивается к некоторому центру квазиупругой силой $-m\omega_0^2 r$. В некоторый момент времени $t = 0$ в этом гармоническом осцилляторе возникают свободные колебания. Учитывая реакцию излучения, но считая ее малой, найти закон затухания
этих колебаний. Определить форму спектра такого осциллятора и ширину спектральной линии («естественная ширина»). Как связаны между собой неопределенность энергии $\hbar\omega$ излучаемых фотонов и время жизни осциллятора?

5.123. Газ состоит из атомов с массой m. Неподвижный атом этого газа излучает свет с частотой ω_0 (естественной шириной линии испускания пренебрегаем). Из-за теплового движения атомов и эффекта Доплера наблюдатель, неподвижный относительно сосуда с газом, зарегистрирует частоту, отличающуюся от ω_0. Найти форму $\frac{dI_\omega}{d\omega}$ спектра излучения газа, нагретого до температуры T.

УкАзАниЕ. Скорости атомов газа распределены по закону Максвелла

$$\frac{dN}{N} = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} dv_x dv_y dv_z$$

где $\frac{dN}{N}$ - доля молекул, скорость $\boldsymbol{v}$ которых заключена в промежутке $dv_x dv_y dv_z$, $k = 1,38 \cdot 10^{-16}$ эрг/град - постоянная Больцмана. Так как выполняется условие $v \ll c$, можно в формуле, выражающей допплеровское изменение частоты (см. задачу 3.35), отбросить все члены, порядок которых выше $\frac{v}{c}$.

5.124. Излучающий атом, описываемый моделью гармонического осциллятора, движется в газе; при этом атом испытывает столкновения с другими атомами, скачком меняющие характер его колебаний. Вероятность того, что время свободного движения атома имеет продолжительность от τ до $\tau + d\tau$, выражается формулой $dW(\tau) = \frac{\Gamma}{2} e^{-\frac{\Gamma\tau}{2}} d\tau$ (среднее значение промежутка времени между столкновениями $\bar{\tau} = \frac{2}{\Gamma}$). Найти, пренебрегая естественной шириной линии, форму спектра излучения такого осциллятора $\frac{dI\omega}{d\omega}$.

5.125ˆ. На трехмерный изотропный осциллятор падает группа волн, характеризуемая спектральным распределением интенсивности S_ω и полной интенсивностью $S = \int\limits_0^\infty S\omega d\omega$ (S - количество энергии, протекающее через 1 см ^{2} за все время прохождения группы). Ширина спектрального распределения группы велика по сравнению с естественной шириной спектральной линии осциллятора γ. Скорость электрона $v \ll c$. Найти

энергию,
поглощенную осциллятором из световой волны, учитывая торможение излучением. Как сказывается на результате характер поляризации и направление распространения волн, входящих в группу?

5.126. Найти полное количество энергии ΔW, поглощенной одномерным осциллятором с собственной частотой ω_0 из группы волн со спектральным распределением S_ω, в следующих трех случаях: а) линейно поляризованная плоская группа волн, у которой направление колебаний вектора E составляет угол ϑ с осью осциллятора; б) неполяризованная плоская группа волн, распространяющаяся под углом θ к оси осциллятора; в) изотропное поле излучения (на осциллятор с равной вероятностью падают плоские волны с любым направлением поляризации и любым направлением распространения).

5.127*. Линейно поляризованная волна падает на изотропный гармонический осциллятор. Скорость электрона $v \ll c$. Найти дифференциальное $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ и полное σ сечения рассеяния волны с учетом силы лучистого трения. Рассмотреть, в частности, случаи сильно связанного и слабо связанного электрона.

5.128. Плоская электромагнитная волна, поляризованная по кругу, рассеивается свободным зарядом. Определить рассеянное поле $\boldsymbol{H}$, исследовать характер его поляризации. Найти дифференциальное $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ и полное σ сечения рассеяния.

5.129. Неполяризованная плоская волна рассеивается свободным нерелятивистским электроном. Вычислить дифференциальное и полное сечение рассеяния. Найти степень ρ деполяризации рассеянной волны в зависимости от угла ϑ рассеяния.

5.130 *. Линейно поляризованная волна рассеивается свободным зарядом. Заряд движется с релятивистской скоростью v в направлении распространения волны. Найти дифференциальное сечение рассеяния. Рассмотреть также случай рассеяния неполяризованной волны.

УказАниЕ. Воспользоваться формулой (5.60) и выразить $\dot{\boldsymbol{v}}$ через $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}$.

5.131*. Изотропный гармонический осциллятор с частотой ω_0, зарядом e и массой m помещен в слабое однородное постоянное магнитное поле $\boldsymbol{H}$. Определить движение осциллятора. Исследовать характер поляризации излучения осциллятора [3].

5.132. Система частиц состоит из N одномерных гармонических осцилляторов, положения равновесия которых находятся в точках с радиусами-векторами $r_j, j = 1, 2, \ldots, N$. Вычислить дифференциальное сечение рассеяния плоской монохроматической волны малой амплитуды ($eE_0/m\omega c \ll 1$) этой системой частиц. Проанализировать различные соотношения между длиной волны и линейным размером области, в которой находятся частицы.

5.133. Электромагнитная волна малой амплитуды ($eE_0/m\omega c \ll 1$) рассеивается на свободном нерелятивистском электроне. Вычислить среднюю за период волны силу, действующую на электрон. Рассмотреть различные поляризации падающей волны.

5.134. Частица с зарядом e движется с релятивистской скоростью v в поле плоской монохроматической волны, распространяющейся в направлении n. Плотность w энергии электромагнитной волны известна. Найти среднюю за период волны силу, действующую на частицу. Как выразится сила при наличии немонохроматического пакета плоских волн, распространяющихся в одном направлении?

УКазАНИЕ. В системе покоя частицы использовать силу (3) из решения предыдущей задачи. Затем преобразовать ее (и все величины, от которых она зависит) в систему, движущуюся со скоростью $\boldsymbol{v}$ относительно исходной. С помощью результатов задачи 3.67 убедиться в том, что томсоновское сечение не преобразуется.

[03] Такой гармонический осциллятор представляет собой модель атома во внешнем магнитном поле. В задаче, таким образом, предлагается развить классическую теорию эффекта Зеемана.

5.135ˆ. Бесконечная плоская поверхность испускает электромагнитное излучение, плотность энергии которого w, а диаграмма направленности задается функцией $\psi(\mu) = 3\mu^2/2\pi, \mu = \cos\theta > 0$, где θ - угол между нормалью к поверхности и направлением излучения. Найти предельную скорость, до которой может ускориться электрон в поле излучения. Почему электрон не может приобрести бесконечную энергию?

5.136* ⋆. Горячее плоское пятно радиуса a испускает излучение с плотностью w_0 вблизи поверхности пятна и с изотропной диаграммой направленности. Электрон находится на оси симметрии, перпендикулярной плоскости пятна. Вывести и исследовать дифференциальное уравнение, которое описывает изменение релятивистского фактора γ с расстоянием. Получить его численные решения. Определить предельный лоренц-фактор, до которого возможно ускорение.

5.137. Светимостью L в астрономии называется полная энергия, излучаемая источником в единицу времени. Светимость измеряется в эрг/с или в единицах светимости Солнца $L_\odot = 3,86 \times 10^{33}$ эрг/с. Критическая (эддингтоновская) светимость L_c - это предельная светимость, при которой сила гравитации еще может уравновесить силу радиационного давления
на плазменную оболочку звезды. При $L > L_c$ давление излучения приводит к разлету плазменной оболочки. Вычислить критическую светимость сферической звезды, выразив ее через массу звезды в предположении, что давление излучения действует на квазинейтральную водородную (электронно-протонную) плазму.

5.138*. На электрон в разреженной плазме действует сильная ($eE_0/mc\omega \gg 1$) электромагнитная волна, поляризованная по кругу, в которой
$E_x = E_0 \sin\omega\left(t - \frac{z}{c}\right), \quad E_y = E_0 \cos\omega\left(t - \frac{z}{c}\right), \quad H_x = E_y, \quad H_y = -E_x.$
Рассмотреть рассеяние волны электроном в стационарном режиме, в котором его скорость в направлении распространения волны $v_z = 0$ и электрон движется по круговой орбите, лежащей в плоскости xy, а частота его обращения равна частоте волны ω. Движению электрона в продольном направлении препятствует электрическое поле, возникающее вследствие поляризации плазмы. Стационарность движения достигается за счет того, что вся энергия, получаемая от волны, рассеивается электроном. Показать, что такой режим движения электрона существует, и найти сечение рассеяния сильной волны электроном. На основе численного расчета построить кривую зависимости полного сечения рассеяния от амплитуды падающей волны в нелинейном режиме.

5.139ˆ. *Пусть сильная электромагнитная волна, поляризованная по кругу (см. предыдущую задачу) распространяется в направлении однородного и постоянного магнитного поля. Исследовать стационарный режим движения электрона, в том числе подробно исследовать случай резонанса, когда направление вращения электрона волной и частота волны совпадают с направлением и частотой обращения электрона в магнитном поле. Выполнить численный расчет сечения рассеяния сильной волны электроном в магнитном поле, построить резонансную кривую зависимости сечения рассеяния от частоты волны и от величины продольного магнитного поля.*

5.140. Свободный электрон находится в поле плоской монохроматической волны произвольной силы. Вычислить без учета реакции излучения интенсивность рассеянного излучения и сечение рассеяния. Рассмотреть различные поляризации падающей на электрон плоской волны.

5.141*. Релятивистская частица с зарядом e и массой m движется в постоянном и однородном электрическом поле $\boldsymbol{E} = \text{const}$ под произвольным углом. Вычислить без учета реакции излучения спектральную плотность излучения в данном направлении $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{k}/\boldsymbol{k}$.

5.142. Нерелятивистская заряженная частица, движущаяся со скоростью $\boldsymbol{v}_0$, подвергается воздействию электрического поля $E(t) = E_0 T_0 \delta(t)$ в направлении своего

движения. Проанализировать решения уравнения движения частицы с учетом силы радиационного торможения. Можно ли выбрать постоянные интегрирования так, чтобы избавиться от самоускорения? Вычислить полную энергию, излученную частицей.

5.143. Разложить по плоским волнам потенциал $\varphi(\boldsymbol{r})$ и электрическое поле $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ неподвижного точечного заряда e.

5.144. Точечный заряд движется в вакууме со скоростью $v = \text{const}$. Разложить поле $\varphi, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}$ заряда на плоские монохроматические волны.

5.145*. Найти потенциалы $\varphi(r,t), \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)$ поля равномерно движущегося точечного заряда e (см. ответ к задаче 4.34), используя разложения этих потенциалов по плоским волнам, полученные в предыдущей задаче.

УКазАниЕ. Для вычисления интеграла по $(d\boldsymbol{k})$ сделать замену переменных $k_x \to \frac{k_x}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, k_y \to k_y, k_z \to k_z$ (ось $x \| v$) и воспользоваться разложением поля неподвижного точечного заряда на плоские волны (см. задачу 5.143).

5.146*. Нейтральная точечная система зарядов движется в вакууме равномерно со скоростью v. Найти электромагнитное поле $\varphi(\boldsymbol{r},t), \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)$, воспользовавшись разложением Фурье по плоским монохроматическим волнам, если электрический $\boldsymbol{p}$ и магнитный $\mathfrak{m}$ дипольные моменты в лабораторной системе отсчета заданы.

УкАзАНиЕ. Плотности электрического заряда и тока системы выражаются формулами:

$$\boldsymbol{j} = c\,\mathrm{rot}[\mathbf{m}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{v}t)] + \frac{\partial}{\partial t}[\boldsymbol{p}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{v}t)]$$
$$\rho = -\,\mathrm{div}[\boldsymbol{p}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{v}t)]$$

5.147. Получить потенциалы поля равномерно движущегося магнитного диполя (момент $\mathfrak{m}_0$ в системе покоя диполя). Скорость диполя v. Ограничиться двумя частными случаями: а) когда $\mathfrak{m}_0 \| v$, б) когда $\mathfrak{m}_0 \perp \boldsymbol{v}$. Воспользоваться формулами преобразования моментов, полученными в задаче 4.37 .

5.148. Получить поле равномерно движущегося электрического диполя (момент p_0 в системе покоя) с помощью результатов задачи 5.146 (см. ответ к задаче 4.36).

5.149*. Электромагнитное поле излучения описывается осцилляторными координатами $q_{\boldsymbol{k}_\lambda}$ (см. формулу 2.144). Написать дифференциальные уравнения, которыми описывается взаимодействие поля излучения в переменных $q_{\boldsymbol{k}_\lambda}$ с заряженной нерелятивистской частицей.

5.150. Найти изменение в единицу времени энергии $\frac{dW}{dt}$ поля излучения в результате взаимодействия частицы с полем. Выразить эту величину через осцилляторные координаты $q_{\boldsymbol{k}_\lambda}$ и силы $F_{\boldsymbol{k}_\lambda}(t)$ (см. решение предыдущей задачи).

5.151*. Частица с зарядом e совершает простое гармоническое колебание по заданному закону $r = r_0 \sin\omega_0 t$, где $r_0 = \text{const}$. Используя метод осцилляторов поля (см. задачу 5.149), найти угловое распределение и полную интенсивность I излучения [4].

5.152. Заряд e движется с постоянной угловой скоростью ω_0 по окружности радиуса a_0. Используя метод осцилляторов поля, исследовать характер поляризации поля излучения заряда, найти угловое распределение и полную интенсивность излучения (ср. с задачей 5.21).

5.153*. Линейно поляризованная волна с частотой ω падает на гармонический осциллятор, собственная частота которого ω_0. Используя метод осцилляторов поля, найти дифференциальное $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ и полное σ сечения рассеяния (лучистое трение не учитывать). Исследовать поляризацию рассеянного излучения.

5.154. Найти дифференциальное $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ и полное σ сечения рассеяния линейно поляризованной, поляризованной по кругу и неполяризованной монохроматических волн на свободном заряде, используя метод осцилляторов поля (ср. с задачами 5.127 и 5.128).

5.155. На свободном заряде рассеивается: а) неполяризованная волна с частотой ω; б) волна, поляризованная по кругу. Исследовать характер поляризации поля излучения, используя метод осцилляторов поля (см. задачи 5.127 и 5.128).

5.2.5 5.5. Answers and Solutions

5.2. $G^A(R,\tau)=\delta(\tau+R/c)/R$. Контур интегрирования см. на рис. 5.3. 5.5.

$$\boldsymbol{A}^A_\omega(\boldsymbol{r})=\frac{1}{c}\int\frac{\exp\left[-i\omega\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|/c\right]}{\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|}\boldsymbol{j}_\omega\left(\boldsymbol{r}'\right)dV'$$
$$\varphi^A_\omega(\boldsymbol{r})=\int\frac{\exp\left[-i\omega\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|/c\right]}{\left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|}\rho_\omega\left(\boldsymbol{r}'\right)dV'$$

Гармоники Фурье запаздывающих потенциалов содержат экспоненты $\exp[i(kR-\omega t)], k=\omega/c$, что соответствует расходящимся сферическим волнам, переносящим возмущения от излучающей системы зарядов в окружающее пространство. Гармоники Фурье опережающих потенциалов содержат экспоненты $\exp[-i(kR+\omega t)]$, которые описывают сходящиеся к центру сферические волны. Такие волны могли бы создаваться некоторым источником, находящимся на бесконечности, но не заданной системой зарядов. Поэтому опережающие потенциалы непригодны для описания процесса излучения в безграничном пространстве.

5.8. $\psi^{R,A}(R,\tau)=-i^{1/2}\left(\frac{\omega}{4\pi\tau c^2}\right)^{3/2}\exp\left[\pm\frac{i\tau}{\omega}\left(\omega^2\pm i\omega 0\right)+\frac{i\omega}{4\tau c^2}R^2\right]$.

5.9. $\widetilde{G}^+(k)=-4\pi\frac{\mathscr{P}}{k_ik^i},\widetilde{G}^-(k)=-i8\pi^2\epsilon\left(k^0\right)\delta\left(k_ik^i\right)$,

$$\left.\begin{array}{l}\Delta G^+-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2G^+}{\partial t^2}=-\frac{4\pi}{c}j(\boldsymbol{r},t)\\ \Delta G^--\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2G^-}{\partial t^2}=0\end{array}\right\}$$

5.10. $\Delta\varphi(\boldsymbol{r},t)=-4\pi\rho(\boldsymbol{r},t)$,

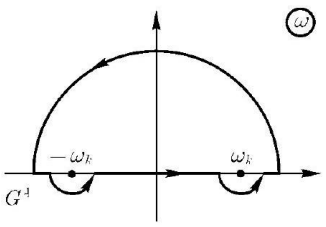
$\Delta\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2}=-\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t)+\frac{1}{c}\int\left\{\frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}',t)}{R^3}-\frac{3\boldsymbol{R}(\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}',t)\cdot\boldsymbol{R})}{R^5}\right\}dV'$,

где $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'$. В уравнение для φ время входит как параметр. Поэтому скалярный потенциал описывает кулоновское поле, определяемое мгновенным (незапаздывающим) распределением зарядов.

5.11. Имеем по определению соленоидальных и потенциальных величин:

$$\nabla\cdot\boldsymbol{H}^\perp=\nabla\cdot\boldsymbol{E}^\perp=\nabla\cdot\boldsymbol{j}^\perp=0$$
$$\nabla\times\boldsymbol{H}^\parallel=\nabla\times\boldsymbol{E}^\parallel=\nabla\times\boldsymbol{j}^\parallel=0$$

В силу уравнения Максвелла $\nabla\cdot\boldsymbol{H}=0$ все магнитное поле соленоидально, т.е. $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{H}^\perp,\boldsymbol{H}^\parallel=0$. Потенциальное электрическое поле удовлетворяет уравнениям



[04] Задача, конечно, может быть решена значительно проще (см. раздел 5.2). Предлагаемый метод решения интересен своей тесной связью с методом решения аналогичной задачи в квантовой электродинамике.

Рис. 5.3

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E}^{\parallel}(\boldsymbol{r},t) = 4\pi\rho(\boldsymbol{r},t), \quad \nabla \times \boldsymbol{E}^{\parallel}(\boldsymbol{r},t) = 0$$

Это - уравнения электростатики, в которые время входит как параметр. Они описывают мгновенное кулоновское взаимодействие. Соленоидальные составляющие удовлетворяют уравнениям

$$\nabla \times \boldsymbol{H}^{\perp} = \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}^{\perp}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}^{\perp}, \quad \nabla \times \boldsymbol{E}^{\perp} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{H}^{\perp}}{\partial t}$$

5.12. Воспользуемся дифференциальным уравнением для функции $G_{\omega}^{R}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')$:

$$\left(\Delta_r + k^2\right) G_{\omega}^{R} = -4\pi\delta\left(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right) =$$

$$= -\frac{4\pi}{r^2}\delta\left(r-r'\right)\delta\left(\cos\vartheta - \cos\vartheta'\right)\delta\left(\alpha-\alpha'\right), \quad k = \frac{|\omega|}{c} \tag{1}$$

Поскольку сферические функции Лежандра $Y_{lm}(\vartheta,\alpha)(l=0,1,2\ldots, m=-l,-l+1,\ldots+l)$ образуют полную ортонормированную систему (см. раздел 1.3), то они удовлетворяют условию

$$\sum_{l,m} Y_{lm}^{*}\left(\vartheta',\alpha'\right) Y_{lm}(\vartheta,\alpha) = \delta\left(\cos\vartheta - \cos\vartheta'\right)\delta\left(\alpha-\alpha'\right) \tag{2}$$

Таким образом, в правую часть уравнения (1) можно ввести сумму (2). В левой части уравнения присутствует оператор Лапласа

$$\Delta_r = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\Delta_{\vartheta,\varphi} \tag{3}$$

причем, согласно результату задачи 1.119,

$$\left\{\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta} + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\right\} Y_{lm}(\vartheta,\alpha) =$$
$$= \Delta_{\vartheta,\varphi}Y_{lm}(\vartheta,\varphi) = -l(l+1)Y_{lm}(\vartheta,\alpha).$$

Это позволяет искать решение уравнения (1) в виде ряда

$$G_{\omega}^{R} = \sum_{l=0}^{\infty} f_l\left(r,r'\right) \sum_{m=-l}^{l} Y_{lm}^{*}\left(\vartheta',\alpha'\right) Y_{lm}(\vartheta,\alpha) \tag{4}$$

и для неизвестных функций $f_l\left(r,r'\right)$ получить уравнение

$$\left[\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}r^2\frac{d}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2} + k^2\right] f_l = -\frac{4\pi}{r^2}\delta\left(r-r'\right) \tag{5}$$

Решениями однородного уравнения (5) являются всевозможные сферические функции Бесселя, определение и некоторые свойства которых см. в разделе 1.3. При фиксированном конечном r' решение уравнения (5) должно быть ограничено при $r \to 0$ и описывать расходящуюся сферическую волну при $r \to \infty$. Для удовлетворения этим условиям ищем решение в форме

$$f_l\left(r,r'\right) = \begin{cases} Bj_l(kr), & r < r' \\ Ch_l^{(1)}(kr), & r > r' \end{cases} \tag{6}$$

где сферические функции Бесселя j_l и Ханкеля $h_l^{(1)}$ обладают нужными асимптотиками.

Коэффициенты B, C нужно находить из граничных условий при $r = r'$. Очевидно, что сама функция $f_l(r, r')$ должна быть непрерывна при $r = r'$, $f_l(r, r')|_{r=r'+0} = f_l(r, r')|_{r=r'-0}$ - в противном случае уравнение (5) нарушится. Условие на первую производную можно получить, проинтегрировав обе части (5) по малому интервалу $[r' - \epsilon, r' + \epsilon]$ и перейдя к пределу $\epsilon \to 0$. Это даст (с учетом непрерывности и конечности $f_l(r, r')$)

$$\left.\frac{df_l}{dr}\right|_{r=r'+0} - \left.\frac{df_l}{dr}\right|_{r=r'-0} = -\frac{4\pi}{r'^2} \tag{8}$$

С помощью (6)-(8), использовав также значение определителя Вронского для сферических функций Бесселя

$$W\left(j_l(z), h_l^{(1)}(z)\right) = j_l(z)h_l^{(1)'}(z) - h_l^{(1)}(z)j_l'(z) = \frac{i}{z^2}$$

получим

$$f_l(r, r') = 4\pi ik \begin{cases} j_l(kr)h_l^{(1)}(kr'), & r < r' \\ j_l(kr')\, h_l^{(1)}(kr), & r > r' \end{cases} \tag{9}$$

Эту функцию и следует подставлять в разложение (4).

5.13.

$$\boldsymbol{A}_\omega(\boldsymbol{r}) = \frac{e^{ikr}}{r}\sum_{l,m}\boldsymbol{Q}_{lm}Y_{lm}(\vartheta,\alpha), \quad \varphi_\omega(\boldsymbol{r}) = \frac{e^{ikr}}{r}\sum_{l,m}Q'_{lm}Y_{lm}(\vartheta,\alpha)$$

где

$$\begin{aligned} \boldsymbol{Q}_{lm} &= 4\pi(-i)^{l+2}\int j_\omega(r', \vartheta', \alpha')\, j_l(kr')\, Y_{lm}^*(\vartheta', \alpha')\, r^2 dr' d\Omega' \\ Q'_{lm} &= 4\pi(-i)^{l+2}\int \rho(r', \vartheta', \alpha')\, j_l(kr')\, Y_{lm}^*(\vartheta', \alpha')\, r'^2 dr' d\Omega' \\ Q'_{lm} &= \frac{\boldsymbol{r}}{r}\cdot Q_{lm} \end{aligned}$$

5.16.

$$\varphi(\boldsymbol{r}, t) = \frac{q}{r} + \frac{\boldsymbol{p}(t')\cdot\boldsymbol{r}}{r^3} + \frac{Q_{\alpha\beta}(t')\, x_\alpha x_\beta}{2r^5}, \quad \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = -\nabla\varphi(\boldsymbol{r}, t)$$
$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t) = \frac{\dot{\boldsymbol{p}}(t')}{cr} + \frac{\boldsymbol{m}(t')\times\boldsymbol{n}}{r^2}, \quad \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}, t) = \nabla\times\boldsymbol{A} = \frac{\dot{\boldsymbol{p}}\times\boldsymbol{n}}{cr^2} + \frac{3\boldsymbol{n}(\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n})}{r^3} - \frac{\boldsymbol{m}}{r^3}$$

Электрическое поле выражается статическими формулами с зависящими от времени дипольным и квадрупольным моментами. Магнитное поле содержит дополнительный член, обязанный закону Био-Савара: если элементарный диполь $\boldsymbol{p}(t) = e(t)\boldsymbol{l}$, то $\boldsymbol{H}_{BS} = \dot{\boldsymbol{p}}\times\boldsymbol{n}/cr^2 = J(t)[\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{r}]/cr^3$ представляет собой поле элементарного тока $J(t) = \dot{q}(t)$, текущего в отрезке l.

5.18. В сферических координатах с полярной осью вдоль p_0 имеем

$$E_r = \frac{2p_0}{r^2}\cos\vartheta\left[\frac{1}{r}\cos(kr-\omega t)+k\sin(kr-\omega t)\right]$$
$$E_\vartheta = \frac{p_0}{r}\sin\vartheta\left[\left(\frac{1}{r^2}-k^2\right)\cos(kr-\omega t)+\frac{k}{r}\sin(kr-\omega t)\right]$$
$$H_\alpha = -\frac{p_0k^2}{r}\sin\vartheta\left[\cos(kr-\omega t)-\frac{1}{kr}\sin(kr-\omega t)\right],\quad E_\alpha = H_r = H_\vartheta = 0$$

5.19. Магнитные силовые линии имеют вид окружностей, плоскости которых нормальны к оси z, а центры лежат на этой оси: Электрические силовые линии описываются следующими уравнениями.

$$C_1 = \sin^2\vartheta\left[\frac{1}{r}\cos(kr-\omega t)+k\sin(kr-\omega t)\right],\quad C_2=\alpha$$

где C_1, C_2 - постоянные.

5.20. Плотность потока момента импульса:

$$\Re = \frac{(\boldsymbol{n}\times\ddot{\boldsymbol{p}})(\boldsymbol{n}\cdot\dot{\boldsymbol{p}})}{2\pi c^3 r^2}$$

При вычислении величины $-\frac{d\boldsymbol{L}}{dt}=\int\Re r^2 d\Omega$ полезно воспользоваться формулой $\overline{n_in_k}=\frac{1}{3}\delta_{ik}$ (см. гл. I).

В результате получим:

$$-\frac{d\boldsymbol{L}(t)}{dt} = \frac{2}{3c^2}\dot{\boldsymbol{p}}\times\ddot{\boldsymbol{p}}|_{t'=t-\frac{r}{c}}$$

5.21.

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{c}\cdot\frac{\partial\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{Z}}{\partial t} = ea\left[e_\vartheta\left(-i\frac{\omega^2}{c^2r}+\frac{\omega}{cr^2}\right)+\right.$$
$$\left.+e_\alpha\left(\frac{\omega^2}{c^2r}+i\frac{\omega}{cr^2}\right)\cos\vartheta\right]e^{i(kr-\omega t+\alpha)}$$
$$\boldsymbol{E} = \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{Z} = ea\left[e_r\left(-\frac{i\omega}{cr^2}+\frac{1}{r^3}\right)2\sin\vartheta+\right.$$
$$\left.+e_\vartheta\left(\frac{\omega^2}{c^2r}+i\frac{\omega}{cr^2}-\frac{1}{r^3}\right)\cos\vartheta+e_\alpha\left(i\frac{\omega^2}{c^2r}-\frac{\omega}{cr^2}-\frac{i}{r^3}\right)\right]e^{i(kr-\omega t+\alpha)}$$

В волновой зоне $r\gg\lambda=\frac{2\pi c}{\omega}$ выражения $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ упрощаются:

$$\boldsymbol{H} = ea\frac{\omega^2}{c^2r}\left(-i\boldsymbol{e}_\vartheta+\boldsymbol{e}_\alpha\cos\vartheta\right)e^{i(kr-\omega t+\alpha)}$$
$$\boldsymbol{E} = ea\frac{\omega^2}{c^2r}\left(e_\vartheta\cos\vartheta+i\boldsymbol{e}_\alpha\right)e^{i(kr-\omega t+\alpha)} = \boldsymbol{H}\times\boldsymbol{n}$$

При излучении в верхнюю полусферу ($\cos\vartheta>0$) получается левая эллиптическая поляризация, в частности, при $\vartheta=0$ - левая круговая поляризация. При излучении в нижнюю полусферу ($\cos\vartheta<0$) - правая эллиптическая поляризация, переходящая в круговую при $\vartheta=\pi$. Волны, излучаемые в экваториальной плоскости, имеют линейную поляризацию. Угловое распределение и полная интенсивность излучения:

$$\frac{\overline{dI}}{d\Omega} = \bar\gamma\cdot nr^2 = \frac{e^2\omega^4a^2}{8\pi c^3}\left(1+\cos^2\vartheta\right),\quad \bar I = \frac{2\omega^4e^2a^2}{3c^3}$$

Рассмотренный случай осуществляется, например, при движении заряда в однородном магнитном поле.

5.22. $\bar{I} = U_0^2 R^4 \omega^4 / 48c^3$.

5.23. $\bar{I} = 2^{17} \left(e a_B\right)^2 \omega_0^4 / 3^{11} c^3$.

5.24. $\frac{\overline{dI}}{d\Omega} = \frac{4q^2 a^4 \omega^6}{\pi c^5} \sin^2\vartheta \left(\cos^2\vartheta + 1/2\right), \quad \bar{I} = \frac{112 q^2 a^4 \omega^6}{15 c^5}$.

5.25. $\frac{dI_\omega}{d\omega} = \frac{2e^4 E_0^2}{3\pi m^2 c^3} \frac{\omega^2+\alpha^2}{\left[(\omega+\omega_0)^2+\alpha^2\right]\left[(\omega-\omega_0)^2+\alpha^2\right]}$.

5.26. $\frac{dI\omega}{d\omega} = \frac{2\tau^2\omega^4}{3c^3}\left(p_0^2 + m_0^2\right) e^{-(\omega\tau)^2/2}$.

Критерий применимости: размер системы $l \ll c\tau$.

5.27. $\bar{I} = \frac{S^2 J_0^2 \omega^4}{3c^5}, S = ab$.

5.28. $\frac{dI_\omega}{d\omega} = \frac{2\pi J_0^2 S^2 \tau^2 \omega^4}{3c^5} e^{-2\omega_\tau}$.

Критерий применимости: размер системы $\sqrt{S} \ll c\tau$.

5.29. $\bar{I} = 2\eta^4 H^4 m^2 \sin^2\beta / 3c^3$.

5.30. $\eta = \frac{q}{2mc}, \bar{I} = \frac{q^2\omega^2}{600c}\left(\frac{qHR}{mc^2}\right)^4 \sin^2\beta$.

5.31. $p = \mathfrak{m} = 0, \boldsymbol{Q} \neq 0$,
$\boldsymbol{H} = \frac{1}{c}\dot{\boldsymbol{A}} \times \boldsymbol{n} = -\frac{4ea^2\omega^3}{c^3 r} \sin\vartheta \left[\boldsymbol{e}_\vartheta \cos\left(2\omega t' - 2\alpha\right) + \boldsymbol{e}_\alpha \cos\vartheta \sin\left(2\omega t' - 2\alpha\right)\right]$.

Частота колебаний распределения заряда и тока и, следовательно, частота поля вдвое превышает частоту ω обращения каждого из зарядов по орбите. Поляризация излучения - эллиптическая, приближающаяся к круговой при $\vartheta \to 0, \pi$ и переходящая в линейную при $\vartheta = \frac{\pi}{2}$.

$$\frac{\overline{dI}}{d\Omega} = \frac{2e^2 a^4 \omega^6}{\pi c^5} \sin^2\vartheta \left(1 + \cos^2\vartheta\right), \quad \bar{I} = \frac{32}{5} \cdot \frac{e^2 a^4 \omega^6}{c^5}$$

Если убрать один из зарядов, то интенсивность излучения возрастет по порядку величины в $\left(\frac{\lambda}{a}\right)^2$ раз, т. е. весьма значительно, так как выполняется условие $\frac{a}{\lambda} \ll 1$.

5.32. Если угол между радиусами-векторами зарядов равен $\pi - \varphi$, то

$$\varphi = \sqrt{\frac{12}{5}} \cdot \frac{a\omega}{c}$$

5.33. Направим ось x вдоль амплитуды момента осциллятора, опережающего по фазе, а в качестве плоскости xy выберем плоскость, в которой лежат моменты обоих осцилляторов. Обозначив через ϑ, α полярные углы орта n, указывающего направление распространения волны, получим:

$$\boldsymbol{H}(r,t) = \boldsymbol{H} e^{-i\omega t'} = \frac{\omega^2 p}{c^2 r} \left\{e_\vartheta[\sin\alpha + i\sin(\alpha - \varphi)] + \right.$$

$$\left. + \boldsymbol{e}_\alpha[\cos\alpha + i\cos(\alpha - \varphi)]\cos\vartheta\right\}^{-i\omega t'} \tag{1}$$

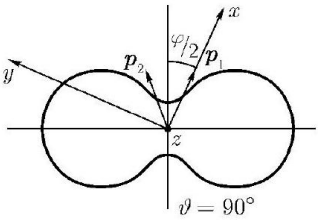
$$\frac{\overline{dI}}{d\Omega} = \frac{p^2\omega^4}{8\pi c^3}\left\{2 - \left[\cos^2\alpha + \cos^2(\alpha - \varphi)\right]\sin^2\vartheta\right\}, \quad \bar{I} = \frac{2p^2\omega^4}{3c^3}$$

Излучение максимально в направлениях $\vartheta = 0$ и $\vartheta = \pi$, перпендикулярных моментам обоих осцилляторов, и неравномерно распределено по азимуту. Это иллюстрируется на рис. 5.4 полярными диаграммами для случая $\varphi = 45°$. На рис. 5.4 а показано угловое распределение по α в плоскости $\vartheta = 90°$, на рис. 5.4 б - угловое распределение по ϑ в плоскости $\alpha = \frac{\varphi}{2} = 22,5°$.

5.34. Сдвинув начало отсчета фазы на γ, получим новую амплитуду поля $\boldsymbol{H} e^{-i\gamma} = \boldsymbol{H}_1 - i\boldsymbol{H}_2$. Потребовав, чтобы $\boldsymbol{H}_1 \cdot \boldsymbol{H}_2 = 0$, найдем, что

$$\operatorname{tg} 2\gamma = 2\frac{\sin\alpha\sin(\alpha-\varphi)+\cos\alpha\cos(\alpha-\varphi)\cos^2\vartheta}{\sin^2\alpha-\sin^2(\alpha-\varphi)+[\cos^2\alpha-\cos^2(\alpha-\varphi)]\cos^2\vartheta} \tag{2}$$

Определив с помощью (2) $\cos\gamma$ и $\sin\gamma$, найдем $\boldsymbol{H}_1$ и $\boldsymbol{H}_2$ в зависимости от $\vartheta, \alpha, \varphi$.



а)

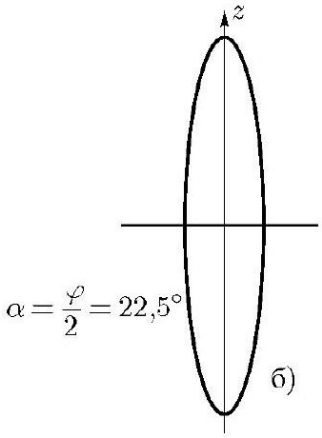


Рис. 5.4

Рассмотрим некоторые частные случаи. При $\vartheta = 90°$ поляризация линейная; плоскость поляризации перпендикулярна плоскости xy. При $\vartheta = 0, \pi$ поляризация эллиптическая, причем отношение полуосей эллипса равно $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$; в частности, при $\varphi = \frac{\pi}{2}$ и $\vartheta = 0, \pi$ поляризация круговая. Легко исследуются также случаи $\alpha = \frac{\varphi}{2}, \frac{\varphi}{2} \pm \frac{\pi}{2}, \frac{\varphi}{2} + \pi$. Во всех этих случаях поляризация, вообще говоря, эллиптическая. При $\alpha = \frac{\varphi}{2}, \frac{\varphi}{2} + \pi$ в направлениях, определяемых условием

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = |\cos\vartheta|$$

поляризация получается круговой.

При $\alpha = \frac{\varphi}{2} \pm \frac{\pi}{2}$ направления с круговой поляризации определяются уравнением $\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2} = |\cos\vartheta|$.

5.35. $\bar{\gamma} = \frac{e^2a^2\omega^4}{8\pi c^3 r^2}(1+\cos^2\vartheta)\,e_r + \frac{e^2a^2\omega^3}{4\pi c^2 r^3}\sin\vartheta e_\alpha, \boldsymbol{N} = \frac{2}{3}\frac{e^2a^2\omega^3}{c^3}e_z$. Последний результат можно получить либо учитывая, что теряемый излучающей системой в единицу времени момент импульса $\frac{d\boldsymbol{L}}{dt} = -\frac{2}{3c^3}\dot{\boldsymbol{p}} \times \ddot{\boldsymbol{p}}$ (см. задачу 5.20) равен вращательному моменту N, приложенному к экрану,

либо непосредственно по формуле N

$$N = \frac{1}{c}\int\limits_{r\gg a} r \times \bar{\gamma} r^2 d\Omega$$

5.36. $\frac{dI}{d\Omega} = \frac{\omega_0^4}{4\pi c^3}\left\{p^2\left(1-\sin^2\vartheta\cos^2\alpha\right) + \mathfrak{m}^2\sin^2\vartheta + \mathfrak{m}p\sin\vartheta\sin\alpha\right\}$; $I = \frac{2\omega_0^4}{3c^3}(p^2+\mathfrak{m}^2)$. Здесь использована система координат, ось x которой направлена вдоль p, а ось z - вдоль $\mathfrak{m}$.

Усреднив интенсивности излучения по периоду колебания, получим

$$\frac{\overline{dI}}{d\Omega} = \frac{\omega_0^4}{8\pi c^3}\left\{p_0^2\left(1-\sin^2\vartheta\cos^2\alpha\right)+\mathfrak{m}_0^2\sin^2\vartheta\right\}, \quad \bar{I} = \frac{\omega_0^4}{3c^3}\left(p_0^2+\mathfrak{m}_0^2\right)$$

5.37.

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) = \frac{\dot{\boldsymbol{p}}}{cr} + \frac{\dot{\boldsymbol{m}}\times\boldsymbol{n}}{cr} + \frac{\ddot{\boldsymbol{Q}}}{6c^2r} + \frac{\boldsymbol{n}}{6c^2r}\int r'^2\ddot{\rho}dV' + \\ + \frac{1}{2c^3r}\int \boldsymbol{r}'\left(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}'\right)^2\dddot{\rho}\,dV' - \frac{1}{c^3r}\int \boldsymbol{r}'\left(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}'\right)\left(\boldsymbol{n}\cdot\ddot{\boldsymbol{j}}\right)dV'$$

$$I = \frac{2}{3c^3}\left(\ddot{\boldsymbol{p}}^2+\ddot{\boldsymbol{m}}^2\right) + \frac{1}{180c^5}\dddot{Q}_{\alpha\beta}^2 + \frac{2}{15c^5}\ddot{\boldsymbol{p}}\cdot\dddot{\boldsymbol{L}}$$

где

$$\boldsymbol{L} = \int \dot{\rho}r'^2\boldsymbol{r}'dV' + \int\left[r'^2j - 3\boldsymbol{r}'\left(\boldsymbol{r}'\cdot j\right)dV'\right.$$

все остальные обозначения общепринятые и все величины, зависящие от времени, берутся в запаздывающий момент $t' = t - r/c$. Обращаем внимание читателя на последнее слагаемое в выражении для I [Баранова и Зельдович (1977)], которое отсутствует в большинстве учебников по электродинамике.

5.38. Использовав разложение (5.16) потенциалов в ряд Фурье и вычислив гармонику Фурье напряженности магнитного поля (5.17), получим

$$\boldsymbol{H}_m = i\frac{em\omega^2}{2\pi c^2}\frac{e^{ik_mr}}{r}\int\limits_0^T \boldsymbol{n}\times\boldsymbol{v}(\tau)\exp i\left(m\omega\tau - \boldsymbol{k}_m\cdot\boldsymbol{s}(\tau)\right)d\tau$$

где $\boldsymbol{k}_m = m\omega\boldsymbol{n}/c, \boldsymbol{s}(\tau) = \boldsymbol{e}_z z(\tau)$. Интеграл по времени выражается через функцию Бесселя согласно (1.150). В итоге получим

$$\frac{dI_m}{d\Omega} = \frac{c}{2\pi}\left|\boldsymbol{H}_m\right|^2 r^2 = \frac{e^2\omega^2}{2\pi c}\operatorname{tg}^2\theta m^2 J_m^2(m\beta\cos\theta)$$

где $\beta = a\omega/c, \theta$ - угол между направлением излучения $\boldsymbol{n}$ и осью Oz. Здесь учтено, что гармоники с номерами m и $-m$ дают одинаковый вклад в излучение. При $\beta \ll 1$ получим

$$\frac{dI_1}{d\Omega} \approx \frac{e^2a^2\omega^4}{8\pi c^3}\sin^2\theta$$

- дипольное излучение,

$$\frac{dI_2}{d\Omega} \approx \frac{e^2a^4\omega^6}{2\pi c^5}\sin^2\theta\cos^2\theta$$

- квадрупольное излучение, содержащее по сравнению с дипольным малый множитель $(a\omega/c)^2$.

5.39.

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{e^2\omega^2\beta^2\left(4+\beta^2\cos^2\theta\right)}{32\pi c\left(1-\beta^2\cos^2\theta\right)^{7/2}}\sin^2\theta$$

$$I = \frac{e^2\omega^2\beta^2\left(4-3\beta^2\right)}{12c\left(1-\beta^2\right)^{3/2}}, \quad \beta < 1$$

5.40. 1. Напряженности поля в волновой зоне вычисляем по формулам (5.37), полагая в них $\boldsymbol{Q} = 0$. Угловое распределение излучения

$$\frac{\overline{dI}}{d\Omega} = \frac{1}{4\pi c^3}\overline{\boldsymbol{n} \times \ddot{\boldsymbol{m}}|^2} \tag{1}$$

Для вычисления правой части используем уравнение движения магнитного момента $\dot{\boldsymbol{m}} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{m}$. Получаем $(\boldsymbol{n} \times \ddot{\boldsymbol{m}})^2 = \omega^4 \boldsymbol{m}_\perp^2 \left(1 - \sin^2\vartheta \cos^2(\omega t - \alpha)\right)$, где $m_\perp$ - составляющая, перпендикулярная оси вращения; ϑ - полярный угол, отсчитываемый от направления ω; ωt и α - азимуты векторов $m_\perp$ и $\boldsymbol{n}$ в плоскости, перпендикулярной $\boldsymbol{\omega}$. После подстановки в (1) и усреднения по времени находим

$$\frac{\overline{dI}}{d\Omega} = \frac{\omega^4 m^2 \sin^2\varphi}{8\pi c^3}\left(1 + \cos^2\vartheta\right), \quad \bar{I} = \frac{2\omega^4 m^2 \sin^2\varphi}{3c^3} \tag{2}$$

2. Предполагая магнитное поле пульсара дипольным, находим по порядку величины $m \approx H_0 R^3 \approx 2 \times 10^{30}\cdot$ см ^{3}.

3. Подставляя в (2) требуемые величины и $\sin^2\varphi \approx 1$, находим $\bar{I} \approx \approx 1,3 \times 10^{38}$ эрг/с, что составляет $\approx 3 \times 10^4 L_\odot$.

4. Уменьшение энергии вращения вычисляем по формуле $\dot{\mathscr{E}}_{\text{rot}} = I\omega\dot{\omega} = -2\mathscr{E}_{\text{rot}}\dot{T}/T$, где $I = (2/5)MR^2$ - момент инерции шара, $M \approx 1,3 M_\odot \approx \approx 2,6 \times 10^{33}$ г- масса звезды (порядка массы Солнца). Получаем $\dot{\mathscr{E}}_{\text{rot}} \approx \approx -5 \times 10^{38}$ эрг/с.

Близость оценок магнитодипольного излучения пульсара и уменьшения механической энергии вращения свидетельствует в пользу разумности модели. Наблюдаемая светимость от Крабовидной туманности $\approx \approx 4\times10^{37}$ эрг/с в рентгеновском диапазоне и $\approx 2\times10^{36}$ эрг/с в оптическом. Эти данные также не противоречат модели и указывают на то, что около 10% энергии длинноволнового первичного излучения перерабатывается в окружающей звезду плазме во вторичное рентгеновское излучение.

5.41. $\frac{\overline{dI}}{d\Omega} = \frac{9}{800\pi}\cdot\frac{\omega^6 q^2 R_0^4 a^2}{c^5}\sin^2\vartheta\cos^2\vartheta$,

$$\bar{I} = \frac{3}{500}\cdot\frac{\omega^6 q^2 R_0^4 a^2}{c^5}$$

5.42. $\boldsymbol{E} = \frac{q\boldsymbol{r}}{r^3}, \quad \boldsymbol{H} = 0.$

5.43. Поле магнитного диполя:

$$\boldsymbol{E}_{\mathfrak{m}}(r,t) = -\frac{1}{c}\dot{\boldsymbol{A}}_{\mathfrak{m}} = \frac{\boldsymbol{n} \times \ddot{\mathfrak{m}}(t')}{c^2 r} + \frac{\boldsymbol{n} \times \dot{\mathfrak{m}}(t')}{c^2 r},$$
$$\boldsymbol{H}_{\mathfrak{m}}(r,t) = \operatorname{rot}\boldsymbol{A}_{\mathfrak{m}} = \frac{3\boldsymbol{n}(\mathfrak{m}\cdot\boldsymbol{n}) - \mathfrak{m}}{r^3} + \frac{3\boldsymbol{n}(\dot{\mathfrak{m}}\cdot\boldsymbol{n}) - \dot{\mathfrak{m}}}{cr^2} + \frac{\boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{n} \times \ddot{\mathfrak{m}})}{c^2 r}.$$

Поле электрического диполя получится из поля магнитного диполя путем замены $\mathfrak{m} \to \boldsymbol{p}, \boldsymbol{H}_{\mathfrak{m}} \to \boldsymbol{E}_e, \boldsymbol{E}_{\mathfrak{m}} \to -\boldsymbol{E}_e$.

5.44. $\frac{\overline{dI}}{d\Omega} = \frac{\omega^2 p_0^2}{8\pi c^3}\left(1 - \sin^2\vartheta\cos^2\alpha\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos^2\frac{\vartheta}{2}\right)$,

где ϑ, α - полярные углы, характеризующие направление излучения (см. полярные диаграммы на рис. 5.5). Опережающий осциллятор расположен выше по оси z.

5.50. Разлагая вектор Герца $\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{r},t)$ на монохроматические компоненты и используя разложение, полученное в задаче 5.12, найдем,

$$\boldsymbol{Z}_p(\boldsymbol{r},t) = \frac{\boldsymbol{p}(t')}{r} \tag{1}$$

где $t' = t - \frac{r}{c}$,

$$\boldsymbol{Z}_Q(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{2r^2}\boldsymbol{Q}\left(t'\right)+\frac{1}{2rc}\dot{\boldsymbol{Q}}\left(t'\right) \tag{2}$$

$$\boldsymbol{Z}_{\mathfrak{m}}(\boldsymbol{r},t)=\frac{\mathfrak{m}\left(t'\right)\times\boldsymbol{n}}{r}+\frac{c}{r^2}\left[\int\mathfrak{m}\left(t'\right)dt'\right]\times\boldsymbol{n} \tag{3}$$

Эти формулы справедливы при $r\gg a$, где a - размер системы. Произвольная постоянная, возникающая при вычислении интеграла, входящего в (3), не сказывается на величине напряженностей поля.

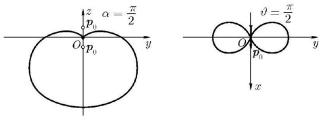


Рис. 5.5

5.51. Дипольные моменты системы равны нулю, электрический квадрупольный момент имеет одну отличную от нуля компоненту Q_{zz} (если направить ось z вдоль $\boldsymbol{p}_0$).

Вследствие этого вектор Q будет параллелен оси z и равен $Q\left(t'\right)=Q_0\cos\vartheta\cos\omega t'e_z$ при соответствующем выборе начала отсчета времени, здесь $Q_0=2p_0a$.

Удобно проводить вычисления в комплексной форме, воспользовавшись выражением (2) из решения задачи 5.50 и спроектировав Z на оси сферической системы координат. Отделив вещественную часть, получим
в результате:

$$H_\alpha=\frac{Q_0\sin2\vartheta}{4}\left[\left(\frac{k^3}{r}-\frac{3k}{r^3}\right)\sin(\omega t-kr)-\frac{3k^2}{r^2}\cos(\omega t-kr)\right]$$

$$E_r=\frac{Q_0\left(3\cos^2\vartheta-1\right)}{2}\left[\left(\frac{3}{r^4}-\frac{k^2}{r^2}\right)\cos(\omega t-kr)-\frac{3k}{r^3}\sin(\omega t-kr)\right]$$

$$E_\vartheta=\frac{Q_0\sin2\vartheta}{4}\left[\left(\frac{6}{r^4}-\frac{3k^2}{r^2}\right)\cos(\omega t-kr)+\left(\frac{k^3}{r}-\frac{6k}{r^3}\right)\sin(\omega t-kr)\right]$$

$$\frac{dI}{d\Omega}=\frac{Q_0^2\omega^6}{32\pi c^5}\sin^2\vartheta\cos^2\vartheta,\quad \bar{I}=\frac{Q_0^2\omega^6}{60c^5}$$

где $Q_0=2p_0a$.

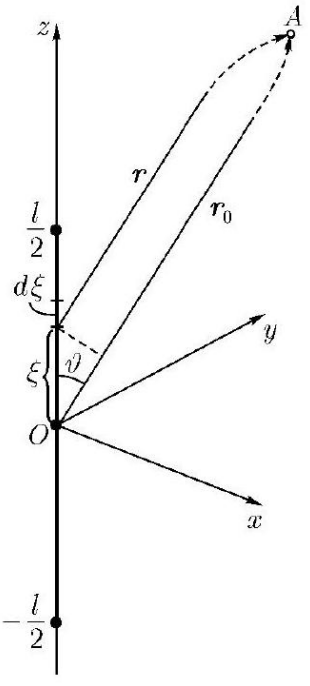


Рис. 5.6

5.52. Выберем координатную систему, как показано на рис. 5.6. Распределение тока в антенне выражается формулой

$$\mathscr{I} = \mathscr{I}_0 \sin\left[k\left(\xi + \frac{l}{2}\right)\right] e^{-i\omega t}$$

где

$$k = \frac{\omega}{c} = \frac{m\pi}{l}$$

Электрический дипольный момент единицы длины антенны $P = \frac{i}{\omega}\mathscr{I}$, согласно (5.41). Элемент $d\xi$ антенны можно рассматривать как электрический дипольный осциллятор с моментом $dp = Pd\xi$. Поскольку выполняется неравенство $d\xi \ll \lambda$, то создаваемое элементом $d\xi$ в точке A магнитное поле можно вычислить по формулам (5.27) и 5.28 :

$$d\boldsymbol{H}_0(\boldsymbol{r}_0, t) = -\frac{\omega^2}{c^2 r}\boldsymbol{e}_\alpha \sin\vartheta P\left(t - \frac{r}{c}\right) d\xi$$

где

$$r = r_0 - \xi\cos\vartheta$$

Так как мы интересуемся только полем в волновой зоне, то величину $\frac{\sin\vartheta}{r}$, которая мало меняется в области $r \gg l$, можно вынести из-под знака интеграла.

Таким образом

$$H_r = H_\vartheta = 0, \quad H_\alpha = -\frac{i\omega\sin\vartheta}{c^2 r_0}\mathscr{I}_0 e^{i(kr_0-\omega t)}\int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} e^{ik\xi\cos\vartheta}\sin m\pi\left(\frac{\xi}{l}+\frac{1}{2}\right)d\xi.$$

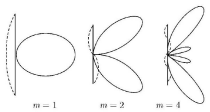


Рис. 5.7

Выполнив интегрирование, найдем угловое распределение по формуле $\overline{\frac{dI}{d\Omega}} = \frac{c}{4\pi}\overline{H_\alpha^2} r_0^2$:

$$\frac{dI}{d\Omega} = \begin{cases} \frac{\mathscr{I}_0^2}{2\pi c} \cdot \frac{\cos^2\left(\frac{m\pi}{2}\cos\vartheta\right)}{\sin^2\vartheta} & \text{при } m \text{ нечетном} \\ \frac{\mathscr{I}_0^2}{2\pi c} \cdot \frac{\sin^2\left(\frac{m\pi}{2}\cos\vartheta\right)}{\sin^2\vartheta} & \text{при } m \text{ четном.} \end{cases}$$

Характер углового распределения виден из полярных диаграмм, приведенных на рис. 5.7. Штриховой линией показано распределение тока по длине антенны, сплошной - угловое распределение излучения.

5.53.

$$\bar{I} = \frac{\mathscr{I}_0^2}{2c}[\ln(2\pi m) + C - Ci(2\pi m)]$$

$$R = 2\frac{\bar{I}}{\mathscr{I}_0^2} = \frac{1}{c}[\ln(2\pi m) + C - Ci(2\pi m)]$$

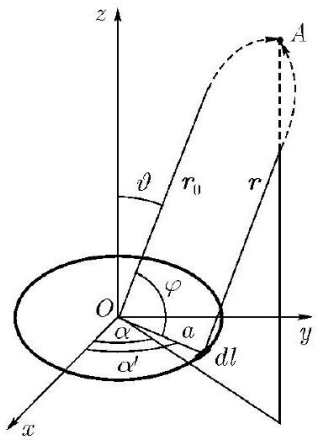


Рис. 5.8

$$5.54.\ \frac{\overline{dI}}{d\Omega} = \frac{\mathscr{F}_0^2}{2\pi c}\frac{\sin^2\vartheta \sin^2\left[\frac{kl}{2}(1-\cos\vartheta)\right]}{(1-\cos\vartheta)^2},$$

$$\bar{I} = \frac{\mathscr{Y}_0^2}{c}\left[C - 1 + \ln\frac{4\pi l}{\lambda} - Ci\left(\frac{4\pi l}{\lambda}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\sin(4\pi l/\lambda)}{4\pi l/\lambda}\right],$$

где $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ - длина излучаемой волны, ϑ полярный угол, отсчитываемый от координатной оси ξ.

Легко убедиться, что бегущая волна излучает интенсивнее, чем стоячая волна с теми же значениями $l, \lambda, \mathscr{I}_0$.

5.55. Если расстояние r точки наблюдения $A(r_0, \vartheta, \alpha)$ (рис. 5.8) от петли велико ($r \gg a$), то можно считать, что радиусы-векторы r от всех элементов кольца dl параллельны, причем $= r_0 - a\cos\varphi = r_0 - a\sin\vartheta\cos(\alpha' - \alpha)$. Элемент dl обладает электрическим дипольным моментом $dp = Pdl = \frac{i}{\omega}\mathscr{I}dl$, где через P обозначен электрический дипольный момент единицы длины провода, и создает в точке A магнитное поле (см. (5.28):

$$d\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}_0, t) = -\frac{\omega^2}{c^2}\frac{d\boldsymbol{p}(t')\times\boldsymbol{n}}{r} = -i\frac{\omega a}{c^2}\cdot\frac{\mathscr{I}_0}{r_0}e^{-i\omega t + ikr_0 - iak\sin\vartheta\cos(\alpha'-\alpha)}\times$$
$$\times \sin n\alpha'\left[\cos(\alpha'-\alpha)\,e_\vartheta + + \cos\vartheta\sin(\alpha'-\alpha)\,e_\alpha\right]d\alpha'$$

В знаменателе последнего выражения пренебрегаем величиной порядка a по сравнению с r_0. Этого нельзя делать в показателе степени, так как величина ak, вообще говоря, не мала и существенно влияет на фазу.

Задача нахождения поля сводится к интегрированию:

$$H_\vartheta = -\frac{i\omega a}{c^2}\frac{\mathscr{F}_0}{r_0}e^{i(kr_0-\omega t)}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos(\alpha'-\alpha)\sin n\alpha' e^{-ika\sin\vartheta\cos(\alpha'-\alpha)}d\alpha'$$

Выражение для H_α отличается от выражения H_ϑ заменой в предэкспоненциальном множителе $\cos(\alpha'-\alpha)$ на $\sin(\alpha'-\alpha)$.

Вводя переменную интегрирования $\beta = \alpha' - \alpha$, получим:

$$H_\vartheta = -\frac{i\omega a}{c^2}\cdot\frac{\mathscr{I}_0}{r_0}e^{i(kr_0-\omega t)}\left(\cos n\alpha\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos\beta\sin n\beta e^{-ika\sin\vartheta\cos\beta}d\beta+\right.$$

$$\left.+\sin n\alpha\int\limits_{-\pi}^{\pi}\cos\beta\cos n\beta e^{-ika\sin\vartheta\cos\beta}d\beta\right)$$

Первый из интегралов, стоящих в скобке, обращается в нуль вследствие нечетности подынтегральной функции, второй может быть преобразован к промежутку $0,\pi$ (четная подынтегральная функция) и выражен через производную от функции Бесселя (см. раздел 1.3). Таким образом,

$$H_\vartheta\left(r_0,t\right) = -E_\alpha = \frac{2\pi\omega a}{c^2}\cdot\frac{\mathscr{I}_0}{r_0}e^{i\left(kr_0-\omega t-n\frac{\pi}{2}\right)}\sin n\alpha J_n'(ka\sin\vartheta)$$

Путем аналогичных вычислений с использованием формулы $J_{n-1}(x)+\ +J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x}J_n(x)$, получим

$$H_\alpha\left(r_0,t\right) = E_\vartheta = \frac{2\pi\omega an\mathscr{I}_0e^{i\left(kr_0-\omega t-n\frac{\pi}{2}\right)}}{c^2r_0}\cos n\alpha\frac{J_n(ka\sin\vartheta)}{ka\operatorname{tg}\vartheta}$$

5.56. Вводим электрический вектор Герца согласно (5.43) и вычисляем магнитное поле по формуле, приведенной в задаче 5.47:

$$\boldsymbol{H} = \operatorname{rot}\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{Z}^{(e)}}{\partial t} = \operatorname{rot}\frac{1}{c}\int\frac{\dot{\boldsymbol{P}}\left(\boldsymbol{r}',t-R/c\right)}{R}dV' =$$

$$= \operatorname{rot}\frac{e_zJ_0}{c}\int\limits_{-l/2}^{l/2}\frac{1}{R}\sin\left[k_m(\xi+l/2)\right]\cos\omega_m(t-R/c)\exp[-\gamma(t-r/c)]d\xi$$

Пользуясь рисунком 5.6, находим $R\approx r_0-\xi\cos\vartheta\approx r_0$, так как в плоскости симметрии $\vartheta=\pi/2$. При вычислении интеграла по $d\xi$ отличный от нуля результат получается только для нечетных m. После вычисления ротора и интеграла Фурье получим для нечетных значений m компоненту Фурье магнитного поля

$$\boldsymbol{H}_\omega = \frac{J_0\left[\omega_m^2+\gamma(i\omega-\gamma)\right]}{r_0c^2k_m\left[\omega_m^2+(i\omega-\gamma)^2\right]}\left[\boldsymbol{n}_0\times\boldsymbol{e}_z\right]e^{i\omega r_0/c}$$

и спектральную плотность излучения в плоскости симметрии $\vartheta=\pi/2$:

$$\frac{d^2I_\omega}{d\omega d\Omega} = \frac{J_0^2\left[\left(\omega_m^2-\gamma^2\right)^2+\gamma^2\omega^2\right]}{4\pi^2c\omega_m^2\left[\left(\omega_m^2-\omega^2+\gamma^2\right)^2+4\gamma^2\omega^2\right]}$$

При m четном спектральная плотность излучения в плоскости симметрии обращается в нуль. При $\gamma^2\ll\omega_m^2$ спектр излучения имеет типичную резонансную форму с острым максимумом на частоте $\omega^2=\omega_m^2+\gamma^2$.

5.57. Магнитное поле создается N источниками. Вычисляя его через вектор Герца, как в предыдущей задаче, будем иметь

$$\boldsymbol{H}\left(\boldsymbol{r}_0,t\right)=-\operatorname{Re}\left\{i\frac{n_0\times e_z J_0 k_m}{cr_0}\exp\left[i\omega_m(t-R/c)\right]\right.$$
$$\left.\cdot\sum_{s=0}^{N-1}\exp\left[isk_m a\sin\vartheta\cos\varphi\right]\int\limits_{-l/2}^{l/2}\sin\left[k_m(\xi+l/2)\right]\exp\left[ik_m\xi\cos\vartheta\right]d\xi\right\}$$

Интеграл берется без затруднений, а сумма вычисляется по формуле для геометрической прогрессии. Интенсивность излучения, усредненная по времени, вычисляется по формуле

$$\overline{\frac{dI}{d\Omega}}=\frac{cr_0^2}{8\pi}|\boldsymbol{H}|^2=\frac{J_0^2}{2\pi c\sin^2\vartheta}\frac{\sin^2\left[(N/2)k_m a\sin\vartheta\cos\varphi\right]}{\sin^2\left[(1/2)k_m a\sin\vartheta\cos\varphi\right]}\left\{\begin{array}{l}\cos^2[(m\pi/2)\cos\vartheta],\\ \sin^2[(m\pi/2)\cos\vartheta]\end{array}\right\}$$

где верхнее значение в фигурных скобках относится к m нечетному, а нижнее - к m четному.

5.58. $\overline{\frac{dI}{d\Omega}}=\frac{2i_0^2}{2\pi ck_m^2}\frac{\sin^2[k_m b\sin\vartheta\cos\varphi]}{\sin^4\vartheta\cos^2\varphi]}\left\{\begin{array}{l}\cos^2[(m\pi/2)\cos\vartheta],\\ \sin^2[(m\pi/2)\cos\vartheta],\end{array}\right\}$

где верхнее значение в фигурных скобках относится к m нечетному, а нижнее - к m четному.

5.59. Так как $j=\rho\boldsymbol{v}=\rho\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}$, то $(j_x,j_y,j_z)\to(-j_x,-j_y,j_z)$, при этом отраженные токи вычисляются в отраженных точках: $\boldsymbol{j}_x(\boldsymbol{r})=-j_x'\left(\boldsymbol{r}'\right)$ и т. д.

Аналогично, используя обычные определения и формулы (5.1), (5.2), записанные в декартовых координатах, получим:

$$(p_x,p_y,p_z)\to(-p_x,-p_y,p_z),\quad (Q_x,Q_y,Q_z)\to(-Q_x,-Q_y,-Q_z)$$
$$(\mathfrak{m}_x,\mathfrak{m}_y,\mathfrak{m}_z)\to(\mathfrak{m}_x,\mathfrak{m}_y,-\mathfrak{m}_z),\quad (E_x,E_y,E_z)\to(-E_x,-E_y,E_z)$$
$$(H_x,H_y,H_z)\to(H_x,H_y,-H_z)$$

5.60. Граничные условия $H_n=0$ и $E_\tau=0$ на поверхности ($z=0$) проводника выполняются - это прямо следует из результатов задачи 5.59. В частном случае электрического дипольного осциллятора электромагнитное поле в полупространстве $z>0$ совпадает с полем электрического дипольного осциллятора с моментом $p=2e_z f(t)\sin\varphi_0$. Оно обращается в нуль при $\varphi_0=0$ (диполь параллелен плоскости) и максимально при $\varphi_0=\frac{\pi}{2}$ (диполь перпендикулярен плоскости). Полная энергия, излучаемая в последнем случае в полупространство $z>0$, вчетверо превышает энергию излучения такого же осциллятора, находящегося вдали от проводящей плоскости.

5.61.

$$E_\vartheta=H_\alpha=\frac{\omega^3 p_0 a}{2c^3 r}\cos 2\vartheta\cos\alpha\cos\omega t'$$
$$E_\alpha=-H_\vartheta=-\frac{\omega^3 p_0 a}{2c^3 r}\cos\vartheta\sin\alpha\cos\omega t'$$
$$\overline{\frac{dI}{d\Omega}}=\frac{p_0^2 a^2\omega^6}{32\pi c^6}\left(\cos^2 2\vartheta\cos^2\alpha+\cos^2\vartheta\sin^2\alpha\right)$$

5.62. б) $H_r=0,\quad H_\vartheta=-\frac{ik}{\sin\vartheta}\cdot\frac{\partial u}{\partial\alpha},\quad H_\alpha=ik\frac{\partial u}{\partial\vartheta},$
$E_r=k^2ur+\frac{\partial^2(ru)}{\partial r^2},\quad E_\vartheta=\frac{1}{r}\frac{\partial^2(ru)}{\partial r\partial\vartheta},\quad E_\alpha=\frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial^2(ru)}{\partial r\partial\alpha}.$

5.64.

$$u = \frac{p_0}{b}\cdot\frac{e^{ikR}}{R} - ikp_0\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\frac{h_l^{(1)}(kb)}{b}\left.\frac{\frac{d[rj_l(kr)]}{dr}}{\frac{d\left[rh_l^{(1)}(kr)\right]}{dr}}\right|_{r=a}\cdot h_l^{(1)}(kr)P_l(\cos\vartheta).$$

Поля $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ выражаются отсюда по формулам, полученным в задаче 5.62. Для нахождения углового распределения излучения нужно воспользоваться асимптотическим выражением сферических функций Ханкеля (см. (1.173)). При этом получится:

$$E_\alpha = H_\vartheta = 0$$
$$H_\alpha = ik\frac{\partial u}{\partial\vartheta} = F(\vartheta)\frac{e^{ikr}}{r} = E_\vartheta,$$

где

$$F(\vartheta) = \frac{p_0k^2}{b}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{2l+1}{i^{l-1}}\left.\frac{j_l(kb)\frac{d\left[rh_l^{(1)}(kr)\right]}{dr} - h_l^{(1)}(kb)\frac{d[rj_l(kr)]}{dr}}{\frac{d\left[rh_l^{(1)}(kr)\right]}{dr}}\right|_{r=a}\times$$

$$\frac{\overline{dI}}{d\Omega} = \frac{c}{8\pi}\left|H_\alpha\right|^2 r^2 = \frac{c}{8\pi}|F(\vartheta)|^2$$

5.66.

$$\varphi(\boldsymbol{r},t) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{c^n n!}\frac{\partial^n}{\partial t^n}\int R^{n-1}\rho\left(\boldsymbol{r}',t\right)dV' = e\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{c^n n!}\frac{d^nR_0^{n-1}}{dt^n}$$

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) = e\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{c^n n!}\frac{d^n\left(\boldsymbol{v}(t)R_0^{n-1}\right)}{dt^n},\qquad \text{где } R = \left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right|, R_0 = \left|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0(t)\right|.$$

Все величины в правых частях этих равенств берутся в тот же момент времени, что и в левых. Запаздывающее взаимодействие формально сводится к мгновенному. Полученными разложениями можно пользоваться при достаточно медленном ($v \ll c$) и плавном (ограничены ускорение и его производные всех порядков) движении для не слишком больших R_0.

5.67. См. ответ к задаче 4.34 .

5.68. При малых v/c формулы (5.56), (5.58) принимают вид:

$$\boldsymbol{E} = \left.\frac{e\boldsymbol{r}}{r^3} + 3\frac{e\boldsymbol{r}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v})}{cr^4} - \frac{e\boldsymbol{v}}{cr^2} + \frac{e\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{v}})}{c^2r^3}\right|_{t'=t-\frac{r}{c}}$$

$$\boldsymbol{H} = \left.\frac{e\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{r}}{cr^3} + \frac{e\dot{\boldsymbol{v}}\times\boldsymbol{r}}{c^2r^2}\right|_{t'=t-\frac{r}{c}}$$

Здесь $\boldsymbol{r}$ - расстояние от какой-либо точки области, в которой происходит движение заряда, до точки наблюдения.

Первые три члена в выражении $\boldsymbol{E}$ и первый член в $\boldsymbol{H}$ пропорциональны $1/r^2$ и преобладают на сравнительно малых расстояниях от заряда (в квазистационарной зоне). Электрическое поле в этой зоне сводится в основном к кулонову полю $\boldsymbol{E} = \frac{e\boldsymbol{r}}{r^3}$; магнитное поле описывается формулой Био-Савара $\boldsymbol{H} = \frac{e\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{r}}{cr^3}$. На больших расстояниях от заряда (в волновой зоне) доминируют последние члены в $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$, убывающие по закону $1/r$. Эти члены описывают поле излучения и имеют вид:

$$\boldsymbol{E} = \frac{e\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{n}\times\dot{\boldsymbol{v}})}{c^2r},\quad \boldsymbol{H} = \frac{e\dot{\boldsymbol{v}}\times\boldsymbol{n}}{c^2r}$$

где $n = \frac{r}{r}$.
Положение границы квазистационарной и волновой зон определяется условием

$$\frac{e/r_{\text{гр}}^2}{e|\dot{\boldsymbol{v}}|/c^2 r_{\text{р}}} \sim 1$$

откуда

$$r_{\text{гр}} \approx a\left(\frac{c^2}{v^2}\right)$$

если учесть, что $|\dot{\boldsymbol{v}}| \sim \frac{v^2}{a}$, где a - величина порядка размера той области, в которой происходит движение заряда.
5.69. $\frac{dI}{d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c^3}(\dot{\boldsymbol{v}} \times \boldsymbol{n})^2, \quad I = \frac{2e^2}{3c^3}\dot{\boldsymbol{v}}^2$, где $\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{r}}{r}$.
5.70. Энергия, излученная зарядом в течение промежутка времени dt', заключена между двумя сферами. Первая из этих сфер имеет центр в точке O, где заряд находился в момент t', вторая - в точке O', где он находился
в момент $t' + dt'$ (рис. 5.9). Радиус первой сферы R, радиус второй $R + cdt'$. Рассмотрим элемент объема $dV = dSdR = R^2 d\Omega(c - \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{v})dt'$. В этом объеме заключена электромагнитная энергия $dW = \frac{E^2}{4\pi}dV = \frac{cE^2}{4\pi}(1 - \frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}}{c}) R^2 d\Omega dt'$. Отсюда для скорости потери энергии $-\frac{d^2\mathscr{E}}{dt'd\Omega} = \frac{d^2W}{dt'd\Omega}$ получим значение (5.67).

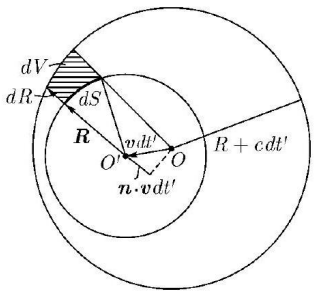


Рис. 5.9

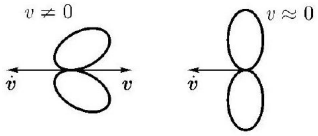


Рис. 5.10
5.72. Чисто продольное ускорение реализуется при $\boldsymbol{E}\|\boldsymbol{v}, \boldsymbol{H} = 0$. При этом

$$-\left(\frac{d\mathscr{E}}{dt'}\right)_{\|} = \frac{2e^4E^2}{3m^2c^3}$$

не зависит от самой энергии. Если $\boldsymbol{E} = 0, \boldsymbol{H} \neq 0$, то ускорение перпендикулярно скорости и

$$-\left(\frac{d\mathscr{E}}{dt'}\right)_{\perp} = \frac{2e^4\gamma^2H^2v^2}{3m^2c^5}$$

При одинаковых напряженностях поля ($E = H$) отношение

$$\frac{(d\mathscr{E}/dt')_{\perp}}{(d\mathscr{E}/dt')_{\|}} = \gamma^2\frac{v^2}{c^2}$$

велико для ультрарелятивистской частицы. Это показывает, что при произвольном ультрарелятивистском движении частицы главную роль играет ее излучение за счет

поперечной составляющей силы.

5.73. $\frac{dI(t)}{d\Omega} = \frac{c}{4\pi}E^2R^2 = \frac{e^2\dot{v}^2\sin^2\vartheta}{4\pi c^3(1-\beta\cos\vartheta)^6}$,

где ϑ - угол между направлением скорости v и направлением излучения $n, \beta = v/c$. Угловая диаграмма излучения приведена на рис. 5.10. Когда скорость v частицы мала, излучение вперед и назад имеет одинаковую интенсивность. Когда v сравнимо с c, преобладает излучение вперед тем в большей степени, чем ближе v к c. Максимум излучения наблюдается в направлении ϑ_0, определяемом уравнением

$$\cos\vartheta_0 = \frac{1}{4\beta}\left(\sqrt{1+24\beta^2}-1\right)$$

При $\beta \to 0 \vartheta_0 \to \pi/2$; при $\beta \to 1 \vartheta_0 \to 0$. Таким образом, в ультрарелятивистском пределе излучение происходит в основном под малыми углами к направлению скорости частицы. Полагая $\vartheta \ll 1$, представим $\frac{dI}{d\Omega}$ в виде

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{e^2\dot{v}^2\vartheta^2}{2\pi c^3\left[\left(\frac{mc^2}{\mathscr{E}}\right)^2+\vartheta^2\right]^6}$$

Из этой формулы видно, что ультрарелятивистская частица излучает главным образом внутри конуса с углом раствора $\psi = \frac{mc^2}{\mathscr{E}}$.

Полная интенсивность излучения:

$$I = \int\frac{dI}{d\Omega}d\Omega = \frac{2e^2\dot{v}^2}{3c^3}\frac{1+\beta^2/5}{(1-\beta^2)^4}$$

Полная скорость потери энергии:

$$-\frac{d\mathscr{E}}{dt'} = \frac{2e^2}{3c^3}\cdot\frac{\dot{v}^2}{(1-\beta^2)^3}$$

5.74. Полное тормозное излучение в направлении $d\Omega$ за все время пролета частицы:

$$\frac{d\Delta W}{d\Omega} = \int\frac{dI}{d\Omega}dt = \int\left(-\frac{d\mathscr{E}}{d\Omega dt'}\right)dt' =$$
$$= \frac{e^2v_0^2}{16\pi c^3\tau}\cdot\frac{\sin^2\vartheta}{\cos\vartheta}\left[\frac{1}{\left(1-\frac{v_0}{c}\cos\vartheta\right)^4}-1\right]$$

где ϑ - угол между направлением скорости частицы и направлением излучения n.

Наблюдаемая длительность импульса зависит от угла ϑ между скоростью частицы и направлением излучения:

$$\Delta t = \tau\left[1-\frac{v_0}{2c}\cos\vartheta\right]$$

5.75. $-\frac{d\mathscr{E}}{dt'} = \frac{2e^4H^2p^2}{3m^4c^5}$.

5.76. $-\frac{d\mathscr{E}}{dt'} = \frac{2e^4H^2\sin^2\theta}{3m^2c(1-\beta^2)}$. При $\theta \gg \sqrt{1-v^2/c^2}$ неподвижный наблюдатель, находящийся далеко от электрона, зарегистрирует отдельные импульсы излучения, испущенные в те моменты времени, когда скорость электрона направлена на наблюдателя (в пределах конуса с углом раство-

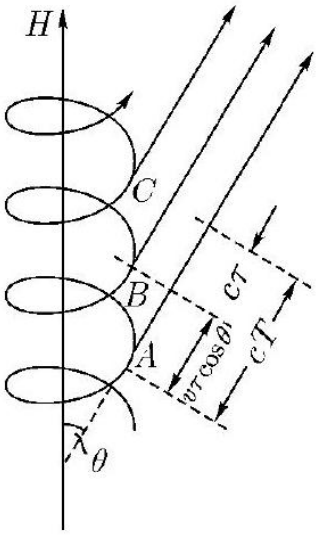


Рис. 5.11 ра $\psi \approx \sqrt{1-v^2/c^2}$, см. задачу 5.73). Время между импульсами (рис. 5.11)

$$\tau = T\left(1 - \frac{v_\parallel \cos\theta}{c}\right) \approx T\sin^2\theta$$

где $T = 2\pi\mathscr{E}/ecH$ - период циклотронного вращения, $\mathscr{E}$ - энергия частицы, $v_\parallel = v\cos\theta$ - проекция скорости на направление поля. Таким образом, вследствие поступательного движения электрона со скоростью $v_\parallel$излучение, испускаемое за время T, пройдет через неподвижную сферу за время τ. Отсюда

$$I = -\frac{d\mathscr{E}}{dt'}\frac{T}{\tau} = \frac{2e^4H^2}{3m^2c\,(1-v^2/c^2)}$$

При $\theta \leqslant \psi \ll 1$ будем иметь

$$I = \frac{2e^4H^2}{3m^2c\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}\frac{\theta^2}{\left[\frac{1}{2}\left(\frac{mc^2}{\mathscr{E}}\right)^2 + \theta^2\right]}$$

5.77. $\frac{dI}{d\Omega} = \frac{e^2|\dot{\boldsymbol{v}}|^2}{4\pi c^3}\cdot\frac{(1-\beta\cos\vartheta)^2-\left(1-\beta^2\right)\sin^2\vartheta\cos^2\alpha}{(1-\beta\cos\vartheta)^6}$, где $\beta = \frac{v}{c}$.

Полярная ось направлена вдоль скорости, азимут α отсчитывается от направления ускорения. Угловое распределение излучения приведено на рис. 5.12. Излучения не происходит в направлениях, определяемых уравнением $\gamma\left(1-\frac{v}{c}\cos\vartheta\right) = \sin\vartheta|\cos\alpha|$. В частности, при $\alpha = 0,\pi$ (рис. 5.12а), излучения нет в направлении $\vartheta = \arccos\frac{v}{c}$. При $\alpha = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ (рис. 5.12б), интенсивность излучения отлична от 0 при всех ϑ.

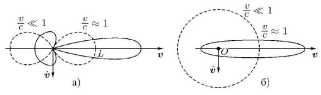


Рис. 5.12

5.78.

$$\frac{\overline{dI}}{d\Omega} = -\frac{\overline{d\mathscr{E}}}{d\Omega dt'} = \frac{e^4H^2\beta^2}{8\pi^2m^2c^3}\left(1-\beta^2\right)\times$$
$$\times\int\limits_0^{2\pi}\frac{(1-\beta^2)\cos^2\vartheta+(\beta-\sin\vartheta\cos\alpha)^2}{(1-\beta\sin\vartheta\cos\alpha)^5}d\alpha =$$
$$= \frac{e^4H^2\beta^2\left(1-\beta^2\right)}{8\pi m^2c^3}\cdot\frac{1+\cos^2\vartheta-\frac{1}{4}\beta^2\left(1+3\beta^2\right)\sin^4\vartheta}{\left(1-\beta^2\sin^2\vartheta\right)^{7/2}}$$

где $\beta=\frac{v}{c}$.
Начало отсчета азимутального угла α, входящего в подынтегральное выражение, выбрано так, чтобы направление вектора n характеризовалось полярными углами $\vartheta, \frac{\pi}{2}$. В ультрарелятивистском случае $v \approx c$ излучение сосредоточивается вблизи плоскости орбиты в интервале углов $\Delta\vartheta \approx \sqrt{1-\beta^2}$.
5.79.
(1)

$$\begin{cases} A_{n\vartheta} = \frac{e\beta e^{ikR_0}}{2\pi R_0}\cos\vartheta\int\limits_0^{2\pi}\cos\alpha' e^{i(n\alpha'-n\beta\sin\vartheta\sin\alpha')}d\alpha' \\ A_{n\alpha} = \frac{e\beta e^{ikR_0}}{2\pi R_0}\int\limits_0^{2\pi}\sin\alpha' e^{i(n\alpha'-n\beta\sin\vartheta\sin\alpha')}d\alpha' \end{cases}$$

где волновой вектор $k = n\frac{\omega}{c}$, начало координат - в центре орбиты, ось z перпендикулярна плоскости орбиты, направление k характеризуется полярными углами $\vartheta, \frac{\pi}{2}; R_0$ - расстояние от центра орбиты до точки наблюдения. Отсюда

$$\begin{cases} H_{n\alpha} = i\frac{\omega}{c}nA_{n\vartheta} \approx i\frac{\beta ene^{ikR_0}}{aR_0}\operatorname{ctg}\vartheta J_n(n\beta\sin\vartheta) \\ H_{n\vartheta} = -i\frac{\omega}{c}nA_{n\alpha} = \frac{e\beta^2ne^{ikR_0}}{aR_0}J_n'(n\beta\sin\vartheta) \end{cases} \tag{2}$$

Поляризация излучения оказывается, вообще говоря, эллиптической, с главными осями в направлениях $\boldsymbol{e}_\alpha$ и $\boldsymbol{e}_\vartheta$ и отношением полуосей $H_{n\vartheta}$ и $H_{n\alpha}$, равным $\beta\operatorname{tg}\vartheta\frac{J_n'(n\beta\sin\vartheta)}{J_n(n\beta\sin\vartheta)}$. Направление обхода эллипса определяется знаком этого отношения. При $\vartheta = 0$ поляризация круговая, при $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ - линейная. При достаточно больших n и β линейная поляризация получается также в тех направлениях, которым соответствуют нули или полюсы функции $\frac{J_n'}{J_n}$.
5.80. Наличие высших гармоник в спектре поля объясняется тем, что время распространения поля между равными точками орбиты конечно и сравнимо, вообще говоря, с периодом обращения заряда по орбите, если скорость заряда сравнима со скоростью света c. Вследствие этого, время прохождения через точку наблюдения поля, излучаемого частицей в течение полупериода, когда частица приближалась к этой точке, меньше, чем время прохождения через нее поля, излученного в течение второго полупериода. Простой гармонической зависимости координат частицы от времени соответствует, следовательно, некоторая сложная периодическая зависимость поля от времени, изображаемая суперпозицией ряда гармоник Фурье.

Следует ожидать, что при $\beta \to 0$ высшие гармоники исчезнут. Действительно, при $x \approx 0, n > 0$ имеем (см. приложение 3): $J_n(x) \approx \frac{x^n}{2^n n!}$, $J_n'(x) \approx \frac{x^{n-1}}{2^n(n-1)!}$. Из этих формул видно, что, когда $\beta \to 0$, существенны лишь гармоники с наименьшим возможным значением $|n| = 1$. При этом (ср. с ответом к задаче 5.21):

$$H_\alpha = H_{1\alpha} + H_{-1\alpha} = -\frac{e\beta^2}{a} \cdot \frac{\cos\vartheta \sin(kR_0)}{R_0}$$
$$H_\vartheta = H_{1\vartheta} + H_{-1\vartheta} = \frac{e\beta^2}{a} \cdot \frac{\cos(kR_0)}{R_0}$$

5.81.

$$\frac{dI_n}{d\Omega} = \frac{c}{2\pi} |\boldsymbol{H}_n|^2 R_0^2 = \frac{cn^2e^2\beta^2}{2\pi a^2} \left[\operatorname{ctg}^2\vartheta J_n^2(n\beta\sin\vartheta) + \beta^2 J_n'^2(n\beta\sin\vartheta)\right]$$

Если движение по окружности происходит под действием постоянного однородного магнитного поля H, то

$$a = \frac{mc^2\beta}{eH\sqrt{1-\beta^2}}$$
$$I_n = \frac{cne^2\beta}{a^2}\left\{2\beta^2 J_{2n}'(2n\beta) - \left(1-\beta^2\right)\int_0^{2n\beta} J_{2n}(x)dx\right\}$$

5.82. Суммирование гармоник приводит к угловому распределению излучения $\overline{dI/d\Omega}$, усредненному по времени и вычисленному ранее другим способом (см. задачу 5.78). В сильно релятивистском случае ($\gamma \gg 1$) возникает резкая анизотропия излучения, которое концентрируется в плоскости орбиты: отношение

$$\frac{(\overline{dI/d\Omega})_{\vartheta=\pi/2}}{(\overline{dI/d\Omega})_{\vartheta=0}} \approx \frac{7}{8}\gamma^5 \gg 1$$

Введя угол $\theta = \pi/2 - \vartheta \ll 1$ между направлением наблюдения и плоскостью орбиты, запишем угловое распределение в виде

$$\overline{\frac{dI}{d\Omega}} = \frac{e^4H^2\gamma^3\left(7+12\gamma^2\theta^2\right)}{16\pi m^2c^3\left(1+\gamma^2\theta^2\right)^{7/2}}$$

5.83. Используем формулу (5.77), выбрав систему координат так, чтобы орбита частицы располагалась в плоскости xy, а луч зрения - в плоскости xz (рис. 5.3). Частица при $\tau = 0$ находится в начале координат. Имеем

$$\boldsymbol{s}(\tau) = \boldsymbol{e}_x\rho\sin(v\tau/a) - \boldsymbol{e}_y[\cos(v\tau/a) - 1]$$
$$\boldsymbol{v}(\tau) = \dot{\boldsymbol{s}}(\tau) = \boldsymbol{e}_x v\cos(v\tau/a) + \boldsymbol{e}_y v\sin(v\tau/a)$$

где $a = cp/eH$ - ларморов радиус (см. раздел 4.2). С самого начала учитываем релятивистский эффект излучения вперед, в пределах угла $\theta_0 \approx \gamma^{-1} \ll 1$, и оставляем степени угла θ между лучом зрения $\boldsymbol{n}$ и осью Ox не выше второй. В этом приближении имеем

$$\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{v}(\tau) = \boldsymbol{e}^{(1)}v\theta\cos(v\tau/a) + \boldsymbol{e}^{(2)}v\sin(v\tau/a)$$
$$\omega\tau - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{s}(\tau) = \omega\tau - \frac{\omega a}{c}\left(1-\frac{\theta^2}{2}\right)\sin(v\tau/a) \qquad (1)$$

Здесь $e^{(1)} = e_y, e^{(2)} = \boldsymbol{n}\times e_y, \boldsymbol{n}$ - образуют тройку взаимно перпендикулярных единичных векторов.

Поскольку диаграмма направленности излучения очень узкая, волновой пакет, излучаемый в направлении n, собирается с малой дуги окружности порядка a/γ, проходимой частицей за время $\Delta\tau \approx a/v\gamma$. По этой причине основной вклад в интегралы по времени дают времена порядка $\Delta\tau$, и можно произвести разложение тригонометрических функций в равенствах (1) в ряд. В предэкспоненте достаточно учесть первые неисчезающие члены, но в показателе экспоненты следует учесть в разложении синуса и кубический член. Кроме того, нужно провести разложение по $\gamma^{-2} \ll 1$. После указанных разложений интегралы по времени сводятся к интегралам, указанным в условии задачи, путем замены переменных

$$x = \frac{c\tau}{a\left(\gamma^{-2}+\theta^2\right)^{1/2}}, \quad \xi = \frac{\omega a}{3c}\left(\gamma^{-2}+\theta^2\right)^{3/2} \tag{2}$$

В итоге получим из (5.77) спектрально-угловое распределение излучения:

$$\frac{d^2 I'_\omega}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2}{3\pi^2 c}\left(\frac{a\omega}{c}\right)^2\left(\gamma^{-2}+\theta^2\right)^2\left[K^2_{2/3}(\xi) + \frac{\theta^2}{\gamma^{-2}+\theta^2}K^2_{1/3}(\xi)\right] \tag{3}$$

Найденная величина представляет собой спектральную плотность излучения частицы с малого элемента траектории, на котором формируется импульс излучения в заданном направлении n. Она имеет размерность энергия × время. Более удобной измеряемой величиной является спектральная мощность излучения, усредненного по времени, которая получается
путем деления найденной спектральной плотности на период T обращения частицы по окружности (т.е. на время между короткими вспышками, которые видит наблюдатель):

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi\gamma}{\omega_c} = \frac{2\pi mc\gamma}{eH} \tag{4}$$

(см. задачу 4.52. Период T записан здесь через использованные в указанной задаче угловые скорости $\omega_H = eH/mc$ и $\Omega = \omega_H/\gamma$. Первая из них обозначалась там через ω_c и называлась циклотронной частотой.) Таким путем получаем

$$\frac{d^2 I_\omega}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2\omega_H}{6\pi^3 c\gamma}\left(\frac{a\omega}{c}\right)^2\left(\gamma^{-2}+\theta^2\right)^2\left[K^2_{2/3}(\xi) + \frac{\theta^2}{\gamma^{-2}+\theta^2}K^2_{1/3}(\xi)\right] \tag{5}$$

Эта довольно сложная функция упрощается в предельных случаях. В частности, при $\xi \gg 1$ с помощью (1.170) находим:
(6) $\frac{d^2 I_\omega}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2\omega}{4\pi^2 c}\left(\gamma^{-2}+\theta^2\right)^{1/2}\left(1+\frac{\theta^2}{\gamma^{-2}+\theta^2}\right)\exp\left[-\frac{2a\omega}{3c}\left(\gamma^{-2}+\theta^2\right)^{3/2}\right]$.

При $\xi \to 0$ спектральная мошность стремится к нулю, наибольшего значения она достигает при $\xi \approx 1$. Полагая в последнем условии $\theta = 0$, найдем значение критической частоты, за которым происходит экспоненциальный завал спектра:

$$\omega_c = \frac{3eH}{mc}\gamma^2 \tag{7}$$

Разумеется, это значение определяется лишь по порядку величины. Оно находится в согласии с оценкой (5.78). Поскольку угловая скорость вращения частицы (основная частота) $\omega_0 = \Omega = ecH/\mathscr{E} = eH/mc\gamma$ (см. задачу 4.52), то полученному выше значению критической частоты отвечает гармоника Фурье с номером

$$n_c = \frac{\omega_c}{\omega_0} = 3\gamma^3 \gg 1 \tag{8}$$

5.84. $\frac{dI\omega}{d\omega} = \frac{\sqrt{3}e^2\omega_H}{2\pi c}\frac{2\omega}{\omega_c}\int\limits_{2\omega/\omega_c}^{\infty} K_{5/3}(x)dx$. С помощью асимптотических формул (1.168), (1.170) находим спектральное распределение синхротронного излучения в предельных случаях:

$$\frac{dI_\omega}{d\omega} = \begin{cases} \frac{3^{3/2}}{2\pi}\Gamma(5/3)\frac{e^2\omega_H}{c}\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{1/3}, & \omega \ll \omega_c \\ \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^2\omega_H}{c}\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{1/2}\exp\left(-\frac{2\omega}{\omega_c}\right), & \omega \gg \omega_c \end{cases}$$

5.85. Ультрарелятивистская частица, движущаяся по спирали, будет испускать излучение вдоль образующей конуса с углом раствора $\pi - 2\alpha$ в пределах угла излучения γ^{-1}. Повторяя в измененной геометрии расчет, аналогичный тому, который был произведен в задаче 5.83, получим спектральную моцность излучения в определенном направлении:

$$\frac{d^2I_\omega}{d\omega d\Omega} = \frac{1}{6\pi^3}\frac{e^2\omega_H}{\gamma c\cos^2\alpha}\left(\frac{a\omega}{c\cos\alpha}\right)^2\left(\gamma^{-2}+\theta^2\right)^2 \cdot\left[K_{2/3}^2(\xi) + \frac{\theta^2}{\gamma^{-2}+\theta^2}K_{1/3}^2(\xi)\right] \tag{1}$$

Здесь θ - угол между направлением наблюдения и образующей конуса излучения, причем $\pi/2 - \alpha \gg \theta, \xi = (a\omega/3c\cos\alpha)\left(\gamma^{-2}+\theta^2\right)^{3/2}$. Период между импульсами излучения был определен в задаче 5.76:

$$T = \frac{2\pi\mathscr{E}}{ecH}\cos^2\alpha = \frac{2\pi\gamma}{\omega_H}\cos^2\alpha \tag{2}$$

Он использован при вычислении (1). Критическая частота определяется из условия $\xi = 1$ при $\theta = 0$:

$$\omega_c = \frac{3c\gamma^3\cos\alpha}{a} \tag{3}$$

5.86. Спектральная мощность излучения облака электронов записывается в виде интеграла от произведения функции распределения на спектральную функцию одного электрона, найденную в задаче 5.85:

$$\frac{dP_\omega}{d\omega} = \int \frac{d^2I_\omega}{d\omega d\Omega}f(p)d^3p$$

Фактически интегрировать нужно только по направлениям импульсов электронов, что эквивалентно интегрированию по углу θ и может быть произведено таким же образом, как в задаче 5.84, с помощью приведенных
в условии той задачи формул. При интегрировании следует считать угол α постоянным и заменить его в соответствии с условием задачи на $\pi/2 - \Theta$. В результате будем иметь

$$\frac{dP_\omega}{d\omega} = \frac{\sqrt{3}}{8\pi^2}\frac{N_0e^2\omega_H}{c\sin^2\Theta}\frac{2\omega}{\omega_c}\int\limits_{2\omega/\omega_c}^{\infty} K_{5/3}(x)dx$$

где $\omega_c = 3eH\gamma_0^2\sin\Theta/mc$. Предельные случаи малых и больших частот приведены в ответе к задаче 5.84 .

5.87. Спектральную мощность излучения моноэнергичного облака электронов

предыдущей задачи следует проинтегрировать по энергиям $d\mathscr{E} = mc^2 d\gamma$ электронов с соответствующей функцией распределения:

$$\frac{dP_\omega}{d\omega} = \frac{\sqrt{3}}{8\pi^2}(\nu-1)N_0\gamma_*^{\nu-1}\frac{e^2\omega_H}{c\sin^2\Theta}\int\limits_{\gamma_*}^{\infty}\frac{d\gamma}{\gamma^\nu}\frac{2\omega}{\omega_c}\int\limits_{2\omega/\omega_c}^{\infty}K_{5/3}(x)dx \tag{1}$$

Переходя от интегрирования по энергиям к интегрированию по переменной $d\eta = d\left(2\omega/\omega_c\right) = -2\eta d\gamma/\gamma$, имеем

$$\begin{aligned}\int\limits_{\gamma_*}^{\infty}\frac{d\gamma}{\gamma^\nu}\eta\int\limits_{\eta}^{\infty}K_{5/3}(x)dx = \\ = \frac{1}{2}\left(\frac{3\omega_H\sin\Theta}{2\omega}\right)^{(\nu-1)/2}\int\limits_0^{\eta_*}\eta^{(\nu-1)/2}d\eta\int\limits_{\eta}^{\infty}K_{5/3}(x)dx\end{aligned} \tag{2}$$

Интеграл сводится к табличному при $\eta_* \gg 1$, т. е. при частотах $\omega \gg \gg \gamma_*^2\omega_H\sin\Theta$. В этом случае предел η_* заменяем на ∞ и после интегрирования по частям используем формулу 11.4.22 в [Абрамовиц и Стиган (1979)] В результате получим

$$\begin{aligned}\frac{dP_\omega}{d\omega} = \frac{3^\nu(\nu-1)}{8\pi^2(\nu+1)}\Gamma\left(\frac{3\nu+19}{12}\right)\Gamma\left(\frac{3\nu-1}{12}\right)N_0\gamma_*^{\nu-1} \\ \cdot(\sin\Theta)^{(\nu-5)/2}\frac{e^2\omega_H}{c}\left(\frac{\omega_H}{\omega}\right)^{(\nu-1)/2}\end{aligned} \tag{3}$$

При наблюдении космических радиоисточников часто удается определить спектральный индекс радиоизлучения α : $dP_\omega/d\omega \propto \omega^{-\alpha}$. Из сравнения с (3) это позволяет найти спектральный индекс излучающих электронов:

$$\nu = 2\alpha + 1, \quad \alpha = \frac{\nu-1}{2} \tag{4}$$

5.88. $\nu \approx 1,6$ при $\mathscr{E} < \mathscr{E}_*$ и $\nu \approx 3,0$ при $\mathscr{E} > \mathscr{E}_*$. Энергию излома спектра можно оценить, имея в виду, что максимум излучения электрона с энергией $\mathscr{E}$ приходится на частоту $\omega \approx 3\omega_H\left(\mathscr{E}/mc^2\right)^2$ (точнее, на $0,45\omega_H\left(\mathscr{E}/mc^2\right)^2$, согласно численному расчету). Для оценки можно считать, что каждый электрон создает дискретную линию излучения с такой частотой. Тогда $\omega_* \approx 0,45\omega_H\gamma_*^2$. Подставляя численные значения, находим $\mathscr{E}_* \approx 5\times10^{11}$ эВ.

5.89. Для расчета излучения

$$\frac{d^2\mathscr{E}rad}{dt'd\Omega} = -\frac{d^2\mathscr{E}}{dt'd\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c^3}\frac{[\boldsymbol{n}\times[(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{v}/c)\times\dot{\boldsymbol{v}}]]^2}{(1-\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}/c)^5} \tag{1}$$

(использованы формулы (5.67) и (5.60)) необходимо вычислить $\boldsymbol{v}(t)$ и $\dot{\boldsymbol{v}}(t)$. Используя уравнение движения релятивистской частицы (4.58), записанное через скорость (см., например, ответ к задаче 4.41), будем иметь

$$\begin{cases} m\gamma\dot{\boldsymbol{v}}_\perp + m\gamma^3\left(\boldsymbol{v}_\perp/c^2\right)\left(v_\parallel\dot{v}_\parallel + \boldsymbol{v}_\perp\cdot\dot{\boldsymbol{v}}_\perp\right) = e\boldsymbol{E}_0\cos\omega_0 t \\ m\gamma\dot{v}_\parallel + m\gamma^3\left(v_\parallel/c^2\right)\left(v_\parallel\dot{v}_\parallel + \boldsymbol{v}_\perp\cdot\dot{\boldsymbol{v}}_\perp\right) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

где обе части уравнения движения спроецированы на направления, перпендикулярное и параллельное первоначальной скорости частицы v_0. В дальнейшем предполагаем $v_\perp \ll$

$v_\parallel, v_\parallel \approx v_0 \approx c, \gamma = (1 - v_0^2/c^2)^{-1/2} \gg 1$. Из второго уравнения (2) следует $\dot{v}_\parallel \approx -\boldsymbol{v}_\perp \cdot \dot{\boldsymbol{v}}_\perp / c$, т. е. $\dot{v}_\parallel \approx v_\perp \dot{v}_\perp / c \ll \dot{v}_\perp$. Из первого уравнения (2) теперь с точностью до членов $(v_\perp/c)^2 \ll 1$ получаем

$$\boldsymbol{v}_\perp(t) = u \sin \omega_0 t, \quad \boldsymbol{u} = \frac{e\boldsymbol{E}_0}{m\omega_0\gamma} \tag{3}$$

Подстановка полученных значений $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}$ в (1) дает

$$\frac{d^2\mathscr{E}^r \mathrm{rad}}{dt' d\Omega} = \frac{e^2\omega_0^2 \cos^2 \omega_0 t'}{4\pi c^3} \cdot \frac{u^2(1 - \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}/c)^2 + 2(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u})(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{u})(1 - \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}/c) - \gamma^{-2}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{u})^2}{(1 - \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}/c)^5} \tag{4}$$

Угловое распределение полного излучения получится в результате интегрирования (4) по dt' в пределах $[0, L/c]$, где $L/c \gg 2\pi/\omega_0$ - время движения частицы в ондуляторе. Это приведет к замене $\cos^2 \omega_0 t'$ на $1/2$ и умножению (4) на L/c. Выбираем ось Oz декартовой системы координат вдоль длины ондулятора и отсчитываем полярный угол θ вектора n от оси Oz, а его азимутальный угол φ от направления $\boldsymbol{E}_0$. Это позволяет записать $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v} = v_0 \cos\theta, \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{u} = u \sin\theta\cos\varphi$ и

$$\frac{d\mathscr{E}rad}{d\Omega} = \frac{e^4 E_0^2 L}{8\pi c^4 m^2 \gamma^2} \frac{(1 - \beta_0 \cos\theta)^2 - \gamma^{-2}\sin^2\theta\cos^2\varphi}{(1 - \beta_0\cos\theta)^5} \tag{5}$$

В релятивистском случае характерные углы $\theta \approx \gamma^{-1} \ll 1$, поэтому угловое распределение можно упростить:

$$\frac{d\mathscr{E}^{\mathscr{E}rad}}{d\Omega} = \frac{e^4 E_0^2 L}{\pi c^4 m^2 \gamma^2} \frac{1}{(\gamma^{-2} + \theta^2)^3} \tag{5}$$

Интегрирование (5) по $d\Omega = 2\pi\theta d\theta$ дает полное излучение:

$$\mathscr{E}^{\mathrm{rad}} = \frac{e^4 E_0^2 L}{2c^4 m^2}\gamma^2 \tag{6}$$

Характерные частоты, на которых происходит ондуляторное излучение, можно оценить из следующих соображений. Преобразовав с помощью формул (4.70) исходное поле $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 \cos\omega_0 t$ в систему отсчета, движушуюся вдоль оси ондулятора с невозмущенной скоростью частицы v_0, получим

$$\boldsymbol{E}' = \gamma \boldsymbol{E}_0 \cos(\omega'\tau + k'\zeta), \quad \boldsymbol{H}' = -\frac{1}{c}\boldsymbol{v}_0 \times \boldsymbol{E}' \tag{7}$$

где $\omega' = \gamma\omega_0, k' = \omega' v_0/c^2$ - частота и волновой вектор преобразованного поля, τ и ζ - время и координата в сопутствуюшей системе, в которой движение частицы нерелятивистское. В этой системе с точностью до членов порядка $\gamma^{-2} \ll 1$ выполняются соотношения, свойственные плоским монохроматическим волнам в вакууме: закон дисперсии $\omega'^2 - c^2 k'^2 \approx 0$, связь между напряженностями $\boldsymbol{E}' \perp \boldsymbol{H}', E' \approx H'$. Это означает, что в сопутствующей частице системе на нее воздействует поле плоской монохроматической волны (или на квантовом языке «эквивалентные фотоны», см. раздел 6.3). Излучение частицы можно интерпретировать как рассеяние этой волны.

Частота волны ω', испускаемой частицей в сопутствующей системе, при переходе в лабораторную систему испытывает еще один доплеровский
сдвиг (см. формулу, приведенную в условии задачи 3.35) и приобретает величину

$$\omega = \frac{\omega'}{\gamma\left(1 - v_0\cos\theta/c\right)} \approx \frac{2\omega_0}{\gamma^{-2} + \theta^2} \approx \omega_0\gamma^2 \tag{8}$$

При $\mathscr{E} = 5$ ГэВ релятивистский фактор электрона $\gamma \approx 10^4$, излучаемые частоты $\omega \approx 2\pi c/\lambda_0\gamma^2 \approx 6 \times 10^{18}\text{c}^{-1}$, или длины волн $\lambda \approx \lambda_0/\gamma^2 = 3 \times 10^{-8}$ cm - рентгеновский диапазон.

5.90. Система уравнений движения с указанными в условии задачи начальными условиями легко решается и дает

$$\boldsymbol{s}(t) = a\left(\boldsymbol{e}_x\cos\omega_0 t - \boldsymbol{e}_y\sin\omega_0 t\right) + \beta_\parallel c t\boldsymbol{e}_z$$

Траектория представляет собой спираль, скорость электрона составляет с осью ондулятора угол $\Theta = \beta_\perp \ll 1$. Характер излучения зависит от соотношения между Θ и характерным углом θ между скоростью частицы и направлением излучения. При $1 \gg \Theta \gg \theta \approx \gamma^{-1}$ излучение, как и в задаче 5.85, направлено вдоль образующей конуса, определяемого скоростью электрона, в пределах угла γ^{-1}. Наблюддатель будет видеть короткие вспышки длительностью $a/c\beta_\perp\gamma$. Расчет спектрально-углового распределения мощности излучения можно произвести таким же образом, как в задачах 5.83, 5.85, предполагая в силу условия $L \gg \lambda_0$ ондулятор бесконечно длинным. Затем следует произвести интегрирование по телесному углу (как в задаче 5.84) и умножить результат на время движения электрона через ондулятор L/c. В результате будем иметь

$$\frac{d\mathscr{E}^{rad}}{d\omega} = \frac{\sqrt{3}e^2\omega_0 L}{2\pi c^2\beta_\perp^2}\frac{2\omega}{\omega_c}\int\limits_{2\omega/\omega_c}^{\infty} K_{5/3}(x)dx$$

где $\omega_c = 3\omega_0\gamma^3\beta_\perp$.

При $\Theta \approx \gamma^{-1}$ излучение заполняет весь конус, и использованный метод расчета спектра теряет силу.

5.91. При решении задачи 5.79 были получены выражения (2) для n-й гармоники поля излучения от одного заряда. Выражения этих гармоник для разных зарядов, очевидно, отличаются друг от друга только начальными фазами. Обозначив через ψ_l сдвиг фазы поля l-го электрона относительно поля того электрона, которому приписан первый номер, запишем результирующее поле в вещественной форме:

$$H_{n\vartheta} = \frac{e\beta^2 n}{aR_0}J_n'(n\beta\sin\vartheta)\sum_{l=1}^{N}\cos n\left(\omega t - \frac{\omega R_0}{c} + \psi_l\right)$$

Выражение для $H_{n\alpha}$ аналогично. Среднее значение интенсивности излучения за период $T = \frac{2\pi}{\omega}$ равно:

$$dI_{nN} = \frac{c}{4\pi}\cdot\frac{1}{T}\int\limits_0^T\left(H_{n\vartheta}^2 + H_{n\alpha}^2\right)dtR_0^2d\Omega = S_N dI_n$$

где dI_n - интенсивность излучения от одного электрона, найденная в предыдущей задаче, а S_N - коэффициент, учитывающий интерференцию полей электронов («фактор когерентности»):

$$S_N = N + \sum_{\substack{l,l'=1\\(l\neq l')}}^{N}\cos n\left(\psi_l - \psi_{l'}\right)$$

Рассмотрим частные случаи:
а) при совершенно беспорядочном расположении электронов на орбите

$$\sum \cos n\,(\psi_l - \psi_{l'}) = 0$$

б) при равномерном расположении электронов на орбите

$$\psi_l = \frac{2\pi}{N}(l-1)$$

И

$$S_N = N\sum_{l=2}^{N}\cos 2\pi(l-1)\frac{n}{N} = \frac{N}{2}\left[\sum_{l=1}^{N} e^{2\pi(l-1)\frac{n}{N}i} + \sum_{l=1}^{N} e^{-2\pi(l-1)\frac{n}{N}i}\right] =$$

$$= N(-1)^n\frac{\sin n\pi}{\operatorname{tg}\frac{n\pi}{N}} = \begin{cases} 0, \text{ если } \dfrac{n}{N} - \text{ не целое число,} \\ N^2, \text{ если } \dfrac{n}{N} - \text{ целое число;} \end{cases}$$

Появление множителя N^2 не является, вообще говоря, безусловным признаком большой интенсивности излучения, так как при этом возрастает и номер гармоники. Пусть $n = kN$, где k - целое число. В нерелятивистском случае, при $2kN\beta \ll 1$, пользуясь асимптотическими формулами (1.155) для функций Бесселя, получаем даже при $k = 1$

$$I_{NN} = \frac{2e^2cN(N+1)(\beta N)^{N+2}}{a^2(2N+1)(2N)!}$$

что дает

$$I_{11} = \frac{2e^2c\beta^4}{3a^2}, \quad I_{22} = \frac{8e^2c\beta^6}{5a^2}, \quad I_{33} = \frac{243e^2c\beta^8}{70a^2}$$

т. е. добавление каждого электрона увеличивает мультипольность излучения и добавляет малый множитель β^2.

В противоположном, сильно релятивистском случае надо воспользоваться результатами задач 5.83, 5.84, заменив $\omega \to n\omega_0, I_n = \omega_0 dI_\omega/d\omega$. При $n = N$ (т. е. $k = 1$) будем иметь

$$I_{NN} = \frac{e^2c}{\pi\sqrt{3}a^2\gamma^2}N^3\int_{x_N}^{\infty} K_{5/3}(x)dx$$

где $x_N = 2N/3\gamma^3$. В предельных случаях имеем

$$I_{NN} \approx \begin{cases} \frac{3^{1/6}\Gamma(2/3)}{\pi}\frac{e^2c}{a^2}N^{7/3}, & N \ll 3\gamma^3/2 \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^2c}{a^2\gamma^{1/2}}N^{5/2}\exp\left(-\frac{2N}{3\gamma^3}\right), & N \gg 3\gamma^3/2 \end{cases}$$

Сравнивая эти результаты со случаем беспорядочного расположения электронов на орбите, приходим к выводу, что при $N \approx \gamma^3$ фактор когерентного усиления излучения имеет порядок величины γ^2.
5.92. Если электроны образуют сгусток, представим фактор когерентности в виде

$$S_N = N + \sum_{l=1}^{N}\left\{\cos n\psi_l\sum_{l'=1}^{N'}\cos n\psi_{l'} + \sin n\psi_l\sum_{l'=1}^{N}\sin n\psi_{l'}\right\}$$

где штрих у суммы означает отсутствие члена с $l' = l$. При симметричном распределении электронов в сгустке относительно нулевого азимута среднее от синуса равно нулю, и фактор когерентности преобразуется в

$$S_N = N + N(N-1)(\overline{\cos n\psi})^2 \approx N + N^2(\overline{\cos n\psi})^2$$

где первое слагаемое соответствует некогерентному излучению, а второе когерентному. Производя усреднение, будем иметь

$$I_{nN} = NI_n + N^2 I_n \times \begin{cases} \frac{\sin^2(n\varphi/2)}{(n\varphi/2)^2} \\ \exp\left(-(n\varphi)^2/2\right) \end{cases}$$

Здесь верхняя строка соответствует равномерному, а нижняя - гауссову распределению электронов в сгустке. I_n - интенсивность излучения одного электрона.
5.93.

$$\mathscr{E}^{\text{rad}} = \frac{2\sqrt{2}q^2}{3m^{3/2}c^3} \int\limits_{r_{min}}^{\infty} \left(\frac{dU}{dr}\right)^2 \frac{dr}{\sqrt{\mathscr{E} - U(r)}}$$

где $U\left(r_{\min}\right) = \mathscr{E}$.
5.94. $\frac{\mathscr{E}rad}{\mathscr{E}} = \frac{16q}{45Ze}\left(\frac{v}{c}\right)^3$.
5.95. Выберем начало координат в центре инерции системы зарядов. Тогда электрический дипольный момент системы

$$\boldsymbol{p} = e_1\boldsymbol{r}_1 + e_2\boldsymbol{r}_2 = \mu\left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2}\right)\boldsymbol{r} \tag{1}$$

где $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2, \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$.
Поскольку отношения e/m зарядов различны, то $p \neq 0$ и система будет излучать в основном как электрический диполь $\left(\frac{v}{c} \ll 1\right)$. Мгновенная интенсивность

$$I(t) = \frac{2\ddot{\boldsymbol{p}}^2}{3c^3} = \frac{2\mu^2}{3c^3}\left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2}\right)^2 \ddot{r}^2\left(t'\right)$$

Согласно уравнению движения зарядов, $\mu\ddot{r} = \frac{e_1 e_2 r}{r^3}$, так что $I = \frac{2e_1^2 e_2^2}{3c^3}\left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2}\right)^2 \frac{1}{r^4}$. При вычислении средней по времени интенсивности излучения $\bar{I} = \frac{1}{T}\int\limits_0^T I dt'$ заменим интегрирование по t' интегрированием по углу α согласно уравнению $dt' = \frac{\mu r^2 d\alpha}{K}$ (K - момент импульса системы) и воспользуемся уравнением траектории. В результате получим:

$$\bar{I} = \frac{2^{\frac{3}{2}}}{3c^3}\left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2}\right)^2 \frac{\mu^{\frac{5}{2}}\left|e_1 e_2\right|^3 \left|\mathscr{E}\right|^{\frac{3}{2}}}{K^5}\left(3 - \frac{2|\mathscr{E}|K^2}{\mu e_1^2 e_2^2}\right)$$

5.96. $\frac{\overline{d\boldsymbol{K}}}{dt} = -\frac{2^{\frac{7}{2}}\mu^{\frac{3}{2}}|\mathscr{E}|^{\frac{3}{2}}}{3c^3}\left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2}\right)^2 \frac{\boldsymbol{K}}{K^3}$.
5.97. Поступая так же, как при решении задачи 5.95, запишем вторую производную дипольного момента в виде:

$$\ddot{\boldsymbol{p}} = \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2}\right)\frac{e_1 e_2 \boldsymbol{r}}{r^3} \tag{1}$$

Вычисление A не вызывает затруднений. Для вычисления B нужно знать $\ddot{p}_z$ - проекцию $\ddot{\boldsymbol{p}}$ на направление первоначального движения рассеиваемых частиц - в виде

функции координат r, α (полярные координаты в плоскости относительного движения частиц). При этом следует учитывать, что в уравнении траектории относительного движения $-1 + \varepsilon\cos\alpha = a\left(\varepsilon^2 - 1\right)/r$, угол α отсчитывается от оси симметрии (ось z') траектории. Таким образом, $y' = r\sin\alpha, z' = r\cos\alpha$. Угол между осями z и z' равен $\pi - \alpha_0\left(\cos\alpha_0 = \frac{1}{\varepsilon}\right)$, поэтому $z = -z'\cos\alpha_0 - y'\sin\alpha_0 = -r\left(\frac{1}{\varepsilon}\cos\alpha + \frac{\sqrt{\varepsilon^2-1}}{\varepsilon}\sin\alpha\right)$. Используя (1) и заметив, что $\sin\alpha$ - нечетная функция, получим:

$$\int\limits_0^\infty\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\ddot{p}_z^2 dtsds = e_1^2e_2^2\left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2}\right)^2\int\limits_0^\infty\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos^2\alpha + (\varepsilon^2-1)\sin^2\alpha}{\varepsilon^2 r^4}dtsds$$

С помощью уравнения траектории выразим $\cos^2\alpha$ и $\sin^2\alpha$ через r и ε и сделаем подстановку $\varepsilon^2 = u, sds = \frac{a^2}{2}du$. После этого выписанный интеграл преобразуется к виду:

$$\frac{a}{v_0}\int\limits_{2a}^{\infty}\frac{dr}{r^3}\int\limits_1^{\left(\frac{r}{a}-1\right)^2} + -\frac{a^2}{r^2}u + \left(4\frac{a^2}{r^2} - 2\frac{a}{r} + 1\right) + + \left(-5\frac{a^2}{r^2} + 6\frac{a}{r} - 2\right)\frac{1}{u} + 2\left(\frac{a}{r} - 1\right)^2\frac{1}{u^2}\Bigg]\frac{du}{\sqrt{\left(\frac{r}{a}-1\right)^2 - u}}$$

При вычислении интеграла по du возникает логарифмический член, который преобразуется интегрированием по частям. Для вычисления внешнего интеграла по dr целесообразно сделать подстановку $x = \frac{2a}{r}$, которая приводит этот интеграл к сумме нескольких B-функций: $B(k,l) = \int\limits_0^1 x^{k-1}(1 - -x)^{l-1}dx = \frac{\Gamma(k)\Gamma(l)}{\Gamma(k+l)}$

Окончательно получаем:

$$A = \frac{8\pi}{9}e_1e_2\left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2}\right)^2\mu v_0, \quad B = 0$$

5.98. В рассматриваемом приближении $v = \text{const}$, а траектория частицы представляет собой прямую. Пусть движение частицы происходит в плоскости xz параллельно оси z. В этих координатах

$$n = (n_x, n_y, n_z), \quad \text{где} \quad n_x = \sin\vartheta\cos\alpha, \quad n_y = \sin\vartheta\sin\alpha$$
$$n_z = \cos\vartheta, \quad \boldsymbol{r} = (s, 0, vt'), \quad r = \sqrt{s^2 + v^2t'^2}$$
$$\boldsymbol{v} = (0, 0, v)$$

Из известной формулы $\boldsymbol{v} = \frac{c^2p}{\mathscr{E}}$, где $\mathscr{E} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}, \beta = \frac{v}{c}$, получим $\dot{\boldsymbol{v}} = \frac{c^2\dot{\boldsymbol{p}}}{\mathscr{E}} - \frac{c^2\boldsymbol{p}\dot{\mathscr{E}}}{\mathscr{E}^2}$. Согласно уравнению движения частицы, $\dot{\boldsymbol{p}} = \frac{e_1e_2\boldsymbol{r}}{r^3}$. Закон сохранения энергии требует, чтобы $\mathscr{E} + \frac{e_1e_2}{r} = \text{const}$. Дифференцируя последнее равенство по t', получим:

$$\dot{\mathscr{E}} = \frac{e_1e_2\dot{r}}{r^2} = \frac{e_1e_2\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v}}{r^3}$$

так что

$$\dot{\boldsymbol{v}} = \frac{e_1e_2c^2}{\mathscr{E}}\left[\boldsymbol{r} - \frac{\boldsymbol{p}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v})}{\mathscr{E}}\right] = \frac{e_1e_2c^2}{\mathscr{E}r^3}\left[s\boldsymbol{e}_x + vt'\left(1-\beta^2\right)\boldsymbol{e}_z\right]$$

Подставив найденные выражения в (5.60), получим:

$$\frac{d\Delta W_{\boldsymbol{n}}}{d\Omega} = \frac{e_1^4 e_2^2 c^4}{4\pi c^3 \mathscr{E}^2 \left(1-\beta n_z\right)^5} \left\{ s^2 \left[\left(1-\beta n_z\right)^2 - n_x^2 \left(1-\beta^2\right) \right] \times \right.$$
$$\left. \times \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dt'}{\left(s^2+v^2 t'^2\right)} + c^2\beta^2 \left(1-\beta^2\right)^2 \left(1-n_z\right)^2 \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{t'^2 dt'}{\left(s^2+v^2t'^2\right)^3} \right\}$$

Интегрирование дает:

$$\frac{d\Delta W_n}{d\Omega} = \frac{e_1^4 e_2^2 \left(1-\beta^2\right)}{32 m^2 c^3 s^3 v \left(1-\beta n_z\right)^5} \left[4 - 3n_x^2 - n_z^2 - 6\beta n_z + \right. \tag{1}$$
$$\left. + \beta^2 \left(-2 + 3n_x^2 + 5n_z^2\right) + \beta^4 \left(1-n_z^2\right) \right]$$

В нерелятивистском пределе $\beta \to 0$ и

$$\frac{d\Delta W_n}{d\Omega} = \frac{e_1^4 e_2^2}{32 m^2 c^4 s^3 v} \left(4 - 3n_x^2 - n_z^2\right)$$

В ультрарелятивистском случае $\beta \approx 1$ и

$$\frac{d\Delta W_{\boldsymbol{n}}}{d\Omega} = \frac{3 e_1^4 e_2^2 (1-\beta)}{2^9 m^2 c^4 s^3 \sin^4 \frac{\vartheta}{2}}$$

При $\vartheta \leqslant \sqrt{1-\beta}$ последняя формула несправедлива, и нужно пользоваться точным выражением (1).

5.99. $\Delta W = \frac{\pi e_1^4 e_2^2}{12 m^2 c^3 s^3 v} \cdot \frac{4-\beta^2}{1-\beta^2}$, $\quad \Delta \boldsymbol{p} = \frac{\boldsymbol{v} \Delta W}{c^2}$.

5.100. $\frac{d\Delta W_\omega}{d\omega} = \frac{8 e_1^4 e_2^2 \omega^2 c}{3\pi v^4} \left[K_1^2 \left(\frac{\omega s}{v}\right) + K_0^2 \left(\frac{\omega s}{v}\right) \right]$.

5.101. Формулу (5.81) для дифференциального эффективного излучения можно записать в виде:

$$\frac{d\kappa \boldsymbol{n}}{d\Omega} = 2\pi \int\limits_0^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\overline{dI}}{d\Omega} dt s ds \tag{1}$$

Интенсивность излучения $\frac{dI}{d\Omega} = \frac{c}{4\pi} H^2 r^2$, где $\boldsymbol{H} = \frac{1}{c} \dot{\boldsymbol{A}} \times \boldsymbol{n}$. В формуле (1) усреднение интенсивности излучения должно быть произведено по всем направлениям в плоскости, перпендикулярной к направлению потока падающих частиц. Для выполнения усреднения удобно представить векторное произведение, входящее в выражение $\boldsymbol{H}$, в форме $H_\alpha = \frac{1}{c} e_{\alpha\beta\gamma} \dot{A}_\beta n_\gamma$,

где $e_{\alpha\beta\gamma}$ - антисимметричный единичный псевдотензор, по повторяющимся индексам выполняется суммирование. Компоненты векторного потенциала A_β выражаются через компоненты квадрупольного момента $Q_{\beta\varepsilon}$.

$$A_\beta = \frac{1}{2c^2 r} \ddot{Q}_{\beta\varepsilon} n_\varepsilon$$

Таким образом,

$$H_\alpha = \frac{1}{2c^3 r} e_{\alpha\beta\gamma} \dddot{Q}_{\beta\varepsilon} n_\gamma n_\varepsilon$$

и

$$\frac{\overline{dI}}{d\Omega} = \frac{1}{16\pi c^5} \dddot{Q}_{\beta\varepsilon} \dddot{Q}_{\beta'\varepsilon'} e_{\alpha\beta\gamma} e_{\alpha\beta'\gamma'} \overline{n_\gamma n_\varepsilon n_{\gamma'} n_{\varepsilon'}}$$

Воспользуемся полярной системой координат с полярной осью направленной вдоль падающего потока и с полюсом в точке, где находится частица с зарядом e_2 и массой m_2. Усреднение должно выполняться при фиксированном значении составляющей $n_z \equiv n_3 = \cos\vartheta$ (ϑ - направление излучения). Легко убедиться, что

$$\begin{cases} \overline{n_i n_k} = \frac{1}{2}\delta_{ik}\left(1 - n_3^2\right) \\ \overline{n_i n_k n_l n_m} = \frac{1}{8}\left(\delta_{ik}\delta_{lm} + \delta_{il}\delta_{km} + \delta_{im}\delta_{kl}\right)\left(1 - n_3^2\right)^2 \\ \overline{n_i} = \overline{n_i n_k n_l} = 0 \end{cases} \tag{2}$$

где индексы i, k, l принимают значения $1, 2$.
Воспользовавшись (2), а также формулой

$$e_{\alpha\beta\gamma}e_{\alpha\beta'\gamma'} = \delta_{\beta\beta'}\delta_{\gamma\gamma'} - \delta_{\beta\gamma'}\delta_{\gamma\beta'}$$

получим

$$\begin{aligned} \frac{\overline{dI}}{d\Omega} = \frac{1}{16\pi c^5}\Big\{ & \left(\dddot{Q}_{\beta 3}^2 - \dddot{Q}_{33}^2\right)\cos^4\vartheta + \\ & + \frac{1}{2}\left(\dddot{Q}_{\beta\beta'}^2 - 3\dddot{Q}_{\beta 3}^2 + 6\dddot{Q}_{33}^2 - 2\dddot{Q}_{33}\ddot{Q}_{\beta\beta}\right)\sin^2\vartheta\cos^2\vartheta + \\ & + \frac{1}{8}\left[2\dddot{Q}_{\beta\beta'}^2 - \left(\ddot{Q}_{\beta\beta}\right)^2 - 3\dddot{Q}_{33}^2 + 2\dddot{Q}_{33}\ddot{Q}_{\beta\beta}\right]\sin^4\vartheta\Big\} \end{aligned} \tag{3}$$

Подставляя (3) в (1), найдем окончательно:

$$\frac{d\kappa n}{d\Omega} = A + BP_2(\cos\vartheta) + CP_4(\cos\vartheta) \tag{4}$$

где P_2, P_4 - полиномы Лежандра,

$$\begin{cases} A = \frac{1}{120c^5}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty}\left[3\dddot{Q}_{\beta\beta'}^2 - \left(\ddot{Q}_{\beta\beta}\right)^2\right] sdsdt, \\ B = \frac{1}{168c^5}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty}\left[-3\dddot{Q}_{\beta\beta'}^2 + 2\left(\ddot{Q}_{\beta\beta}\right)^2 + 9\dddot{Q}_{\beta 3}^2 - 6\dddot{Q}_{33}\ddot{Q}_{\beta\beta}\right] sdsdt, \\ C = \frac{1}{280c^5}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty}\Big[-2\dddot{Q}_{\beta\beta'}^2 + 2\dddot{Q}_{\beta 3}^2 - \left(\ddot{Q}_{\beta\beta}\right)^2 - \\ -35\dddot{Q}_{33}^2 + 10\ddot{Q}_{33}\ddot{Q}_{\beta\beta}\Big] sdsdt. \end{cases} \tag{5}$$

5.102. Полное эффективное излучение

$$\kappa = \int \frac{d\kappa \boldsymbol{n}}{d\Omega} d\Omega$$

Используя формулы (4) и (5), полученные в предыдущей задаче, можно написать

$$\kappa = 4\pi A = \frac{\pi}{30c^5}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty}\left[3\dddot{Q}_{\alpha\beta}^2 - \dddot{Q}_{\beta\beta}^2\right] sdsdt \tag{1}$$

Обозначим через x_α декартовы компоненты относительного радиуса-вектора частиц, а через $v_\alpha = \dot{x}_\alpha$ - декартовы компоненты относительной скорости частиц. Тогда, учитывая уравнение относительного движения частиц, найдем

$$\ddot{x}_\alpha = \frac{2e^2 x_\alpha}{mr^3}, \quad \dddot{x}_\alpha = \frac{2e^2}{m}\cdot\frac{rx_\alpha - 3x_\alpha v_r}{r^6}$$

где

$$v_r = \dot{r}$$

Подставляя эти выражения в формулу (1) и вводя азимутальную компоненту относительной скорости частиц v_α ($v^2 = v_\alpha^2 + v_r^2$), получим:

$$\kappa = \frac{4\pi e^6}{15m^2c^5} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{0}^{\infty} \frac{v^2 + 11v_\alpha^2}{r^4} s ds dt \tag{2}$$

Вследствие сохранения энергии и момента импульса, $v^2 = v_0^2 - \frac{4e^2}{mr}$ и $v_\alpha = \frac{v_0 s}{r}$. Выполняя в (2) интегрирование (при этом следует заменить интегрирование по dt интегрированием по dr, согласно формуле $dt = \frac{dr}{v_r} = \frac{dr}{\sqrt{v^2 - v_\alpha^2}}$, причем интегрировать можно в любом порядке), получим окончательно:

$$\kappa = \frac{4\pi}{9} \cdot \frac{e^4 v_0^3}{mc^5}$$

5.103. Условие (5.88) выполняется при всех частотах ω, так как время столкновения $\tau = 0$. При рассеивании на твердой сфере угол падения равен углу отражсния, поэтому $|\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1|^2 = 2v \sin\frac{\vartheta}{2}$, гдс ϑ - угол расссяния. Угол ϑ связан с прицельным расстоянием s соотношением: $s = a \sin\frac{\vartheta}{2}$ при $s \leqslant a$. При $s > a$ частица не испытывает рассеяния. Отсюда получаем:

$$d\kappa_\omega = \frac{2e^2}{3\pi c^3} 4v^2 \int\limits_0^a \sin^2\frac{\vartheta}{2} 2\pi s ds d\omega = \frac{4e^2a^2v^2}{3c^3} d\omega$$

Найденное дифференциальное эффективное излучение не зависит от частоты. Поэтому полное эффективное излучение

$$\kappa = \int\limits_0^\infty d\kappa_\omega = \infty$$

Эта расходимость объясняется тем что сфера считалась абсолютно твердой. На самом деле абсолютно твердых тел не существует, $\tau \neq 0$ и при больших значениях ω найденное для $d\kappa\omega$ выражение незаконно.

К тому же при расчете не учитывалось уменьшение энергии частиц за счет излучения. Фактически излученная энергия не может превысить начальной кинетической энергии частицы.

Сечение генерации фотонов получается путем деления эффективного излучения $d\kappa\omega/d\omega$ на энергию фотона $\hbar\omega$ и еще на $\hbar$ (чтобы отнести его к интервалу энергий):

$$\frac{d\sigma}{d(\hbar\omega)} = \frac{1}{\hbar^2\omega} \frac{d\kappa\omega}{d\omega} = \frac{e^2}{\hbar c} \left(\frac{v}{c}\right)^2 \frac{4a^2}{3\hbar\omega}$$

5.104.

$$\frac{d\sigma}{d(\hbar\omega)} = \frac{e^2}{\hbar c} \left(\frac{1}{\beta} \ln\frac{1+\beta}{1-\beta} - 2\right) \frac{2a^2}{\hbar\omega}, \quad \beta = \frac{v}{c}$$

5.105.

$$I_n = \frac{64\mathscr{E}^4 n^2}{3e_1^2 e_2^2 c^3} \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2}\right)^2 \left[J_n'^2(n\epsilon) + \frac{1-\epsilon^2}{\epsilon^2} J_n^2(n\epsilon)\right]$$

5.106.

$$\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{r},t)=\frac{\boldsymbol{p}_2}{r}\Theta(\tau)+\frac{\boldsymbol{p}_1}{r}\Theta(-\tau),\quad \tau=t-\frac{r}{c};$$
$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)=\frac{\Delta\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{r}}{cr^3}\left\{\delta(\tau)+\frac{r}{c}\delta'(\tau)\right\};$$
$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=\begin{cases} r^{-3}\left(\boldsymbol{n}\left(\boldsymbol{p}_1\cdot\boldsymbol{n}\right)-\boldsymbol{p}_1\right), & \tau<0;\\ \boldsymbol{H}\times\boldsymbol{n}, & \tau=0,\\ r^{-3}\left(\boldsymbol{n}\left(\boldsymbol{p}_2\cdot\boldsymbol{n}\right)-\boldsymbol{p}_2\right), & \tau>0.\end{cases}$$

Результаты как нельзя лучше иллюстрируют конечность скорости распространения электромагнитных возмущений. При внезапном изменении дипольного момента распространяется сферическая волна бесконечно малой толщины с радиусом ct. Магнитное поле отлично от нуля (и сингулярно) только на этой сфере. Электрическое поле на световой сфере также сингулярно и связано с магнитным обычным соотношением (5.18) для волновой зоны. Но, в отличие от магнитного, существует и статическое электрическое поле. В области $r > ct$, куда не дошло возмущение, сохраняется статическое электрическое поле диполя с моментом $\boldsymbol{p}_1$. В области $r < ct$ установилось статическое поле диполя с моментом p_2.

5.107. а) При $r > ct$ - статическое электрическое поле точечного заряда с радиальными силовыми линиями (рис. 5.13а). При $r < ct-$
поле движущегося со скоростью $v = \text{const}$ заряда, вычисленное в задачах 4.34, 4.35. б) Указанные выше два поля меняются местами (рис. 5.13 б). В тонком слое в окрестности $r = ct$ происходит перестройка электрического поля и имеется сингулярное переменное магнитное поле (см. предыдущую задачу).

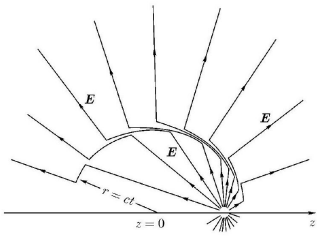


Рис. 5.13 а

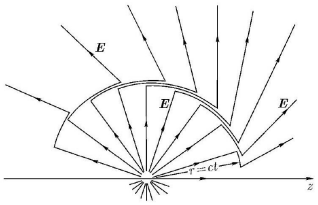


Рис. 5.136

5.108. Используем формулу (5.77), полагая в ней $\boldsymbol{v}(\tau) = 0$ при $\tau < 0$, $\boldsymbol{v}(\tau) = \boldsymbol{v} = \text{const}, \boldsymbol{s}(\tau) = \boldsymbol{v}\tau$, где скорость $\boldsymbol{v}$ определяется энергией и направлением вылета бета-электрона. Получаем

$$\frac{dI_\omega}{d\Omega}=\frac{e^2v^2}{4\pi^2c^3}\frac{\sin^2\theta}{(1-\beta\cos\theta)^2},\quad I_\omega=\frac{e^2}{\pi c}\left(\frac{1}{\beta}\ln\frac{1+\beta}{1-\beta}-2\right)$$

Здесь θ - направление излучения относительно скорости электрона. Бесконечно осциллирующую экспоненту $\exp i\omega(1-\beta\cos\theta)\tau|_{\tau\to\infty}$ следует считать равной нулю, так как ее усреднение по любому малому интервалу $\Delta\omega$ спектра дает нуль.

Число квантов N_ω в расчете на единичный интервал их энергии определяется соотношением $N_\omega \hbar\omega d(\hbar\omega) = I_\omega d\omega$, т. е.

$$N_\omega = \frac{e^2}{\pi c\hbar^2\omega}\left(\frac{1}{\beta}\ln\frac{1+\beta}{1-\beta} - 2\right)$$

Число квантов растет неограниченно при $\omega \to 0$ («инфракрасная катастрофа»), но их суммарная энергия остается конечной. Наибольшая энергия кванта, допускаемая законом сохранения энергии, равна энергии бетаперехода ядра E_0 за вычетом энергии покоя электрона (и энергии покоя нейтрино, если она отлична от нуля): $\hbar\omega_{\max} = E_0 - mc^2$.

5.109. По правилу преобразования дипольных моментов (задача 4.37) имеем в лабораторной системе

$$\boldsymbol{m} = \frac{\boldsymbol{\mu}}{\gamma}, \quad p = \frac{1}{c}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\mu} \tag{1}$$

где $\boldsymbol{\mu}$ - магнитный момент в системе покоя электрона. Магнитный и электрический дипольные моменты создают векторы магнитной и электрической поляризации:

$$\boldsymbol{M} = \frac{1}{\gamma}\boldsymbol{\mu}\Theta(t)\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{v}t), \quad \boldsymbol{P} = \frac{1}{c}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\mu}\Theta(t)\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{v}t) \tag{2}$$

С помощью формул (5.41), (5.44) находим ток, созданный движущимся электроном: $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t) = \left\{e\boldsymbol{v} - \frac{1}{\gamma}\boldsymbol{\mu}\times\nabla - \frac{1}{c}(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\right\}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{v}t)\Theta(t) + \frac{1}{c}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\mu}\delta(t)\delta(\boldsymbol{r})$.
Первое слагаемое в фигурных скобках - ток, созданный зарядом электрона. Далее вычисляем векторный потенциал в волновой зоне. Для этого используем формулу (5.4), записав ее для фурье-образа,

(4) $\boldsymbol{A}_\omega = \frac{1}{c}\int G_\omega(R)e^{i\omega t'}\boldsymbol{j}\,(\boldsymbol{r}',t')\,d^3r'dt', \quad G_\omega(R) = \frac{e^{ikR}}{R}, \quad \boldsymbol{R} = \boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'$.

Путем интегрирования по частям переносим производные с дельта-функции на гладкую функцию $G_\omega(R)$ и дифференцируем только экспоненту. В итоге получим

$$\boldsymbol{A}_\omega(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{ic\omega(1-\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}/c)}\left\{e\boldsymbol{v} - \frac{i\omega}{\gamma}\boldsymbol{\mu}\times\boldsymbol{n} - \frac{i\omega}{c^2}(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\mu})(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v})\right\} \cdot\frac{e^{ikr}}{r} + \frac{1}{c^2}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\mu}\frac{e^{ikr}}{r} \tag{5}$$

Если считать $\boldsymbol{\mu}$ обычным вектором, параллельным скорости, то $\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\mu} = 0$. В этой модели

$$\frac{d^2I_\omega}{d\omega d\Omega} = \frac{1}{4\pi^2c^3(1-\beta\cos\theta)^2}\left\{e^2(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{v})^2 + \frac{\omega^2}{\gamma^2}(\boldsymbol{\mu}\times\boldsymbol{n})^2\right\} \tag{6}$$

$$\frac{dI_\omega}{d\omega} = \left(\frac{e^2}{\pi c} + \frac{\omega^2\mu^2}{\pi c^3\beta^2\gamma^2}\right)\left[\frac{1}{\beta}\ln\frac{1+\beta}{1-\beta} - 2\right] \tag{7}$$

Второй член в круглых скобках, дающий вклад в излучение от магнитного момента, пропорционален квадрату частоты. Подставляя $\mu = \mu_B = e\hbar/m_ec$ магнетон Бора, получаем отношение двух слагаемых $(\hbar\omega/2m_ec)^2\,(c/v\gamma)^2$. Роль магнитного момента становится заметной при $\hbar\omega \sim m_ec^2$.

Надо, однако, иметь в виду, что спин электрона представляет собой квантовое явление. Поэтому даже в классической электродинамике нужно трактовать магнитный момент μ как оператор $\widehat{\mu} = \mu_B\widehat{\sigma}$, где $\widehat{\sigma}$ - матричный вектор Паули (см. Дополнение 3), и в конечном результате произвести квантовомеханическое усреднение интенсивности излучения по спиновым состояниям электрона. Обозначая такое усреднение угловыми скобками, получим

$$\left\langle [\widehat{\boldsymbol{\mu}} \times \boldsymbol{v}]^2 \right\rangle = \mu_B^2 \left\langle [\widehat{\boldsymbol{\sigma}} \times \boldsymbol{v}]^2 \right\rangle = \mu_B^2 \left\langle \left[v^2 \widehat{\boldsymbol{\sigma}}^2 - (\widehat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{v})^2 \right] \right\rangle = 2 \left(\mu_B v \right)^2 \tag{8}$$

Здесь использованы соотношения $\widehat{\sigma}_x^2 = \widehat{\sigma}_y^2 = \widehat{\sigma}_z^2 = 1, \widehat{\sigma}_\alpha \widehat{\sigma}_\beta + \widehat{\sigma}_\beta \widehat{\sigma}_\alpha = 2\delta_{\alpha\beta}$. Как следует из (8), квантовомеханическое среднее не совпадает с классическим средним, которое даст $\boldsymbol{\mu} \times \boldsymbol{v} = 0$ при $\boldsymbol{\mu} \| \boldsymbol{v}$. Это объясняется тем, что квантовый магнитный момент не имеет определенного направления в пространстве. Аналогичным образом будем иметь $\langle [\boldsymbol{\mu} \times \boldsymbol{n}]^2 \rangle = 2\mu_B^2$. В итоге выражения (6), (7) пополнятся членами, содержащими электрический дипольный момент.

5.110. Если энергия, переданная электрону, значительно превышает энергию связи электрона в атоме, то электрон до конверсионного перехода можно считать неподвижным. В этом приближении

$$N_\omega = \frac{2}{3\pi} \frac{e^2}{\hbar c} \frac{\beta^2}{\hbar \omega}$$

5.111.

$$N_\omega = \frac{1}{2\pi} \frac{e^2}{\hbar c} \left[\frac{4}{3} \left(\frac{a\omega_0}{c} \right)^2 \frac{\omega^2 \left(\omega^2 + \omega_0^2 \right)}{\left(\omega^2 - \omega_0^2 \right)^2} + \left(\frac{\hbar \omega}{m_e c^2} \right)^2 \right] \frac{1}{\hbar \omega} \tag{1}$$

Для сравнения полученного результата с опытными данными Джексон (1975) отождествляет ω_0 с частотой перехода $2p \to 1s$ (так как вращение по круговой орбите возможно только при ненулевом орбитальном моменте) и пользуется соотношениями для водородоподобного атома: расстояние между уровнями $\hbar\omega_0 = 3Z^2 e^2 / 8a_B, a = a_B / Z, a_B = \hbar^2 / m_e e^2$. Кроме того, он вводит поправочный фактор, учитывающий уменьшение энергии нейтрино с ростом энергии испущенного кванта: $\left(1 - \hbar\omega / E_0\right)^2$, где E_0 - энергия ядерного перехода (равная энергии нейтрино при $\hbar\omega = 0$. Последний фактор существен только для жестких квантов, испускание которых возможно за счет магнитного момента (второе слагаемое в (1)). В итоге рабочая формула принимает вид

(2) $N_\omega = \frac{3}{32\pi} Z^2 \left(\frac{e^2}{\hbar c} \right)^3 \left[\frac{\omega^2 \left(\omega^2 + \omega_0^2 \right)}{\left(\omega^2 - \omega_0^2 \right)^2} \right] \frac{1}{\hbar \omega} + \frac{1}{2\pi} \frac{e^2}{\hbar c} \frac{\hbar \omega}{\left(m_e c^2 \right)^2} \left(1 - \frac{\hbar \omega}{E_0} \right)^2$.

5.112. $\hbar\omega_{\max} \approx 17$М3 В.

$$N_\omega = \frac{2}{3\pi} \frac{e^2}{\hbar c} \frac{\beta^2}{\hbar \omega} + \frac{1}{2\pi} \frac{e^2}{\hbar c} \frac{\hbar \omega}{\left(m_\mu c^2 \right)^2}$$

5.113.

$$\frac{d^2 I_\omega}{d\omega d\Omega} = \frac{2e^2}{\pi^2 c} \frac{T_-}{m_\pi c^2} \sin^2 \theta, \quad N_\omega = \frac{16}{3\pi} \frac{e^2}{\hbar c} \frac{T_-}{m_\pi c^2 \hbar \omega}$$

где $T_- = m_\pi v^2 / 2$ - кинетическая энергия отрицательного пиона, θ - угол между направлениями его импульса и вылета кванта.

5.114. Импульс поля движущейся частицы

$$\boldsymbol{G} = \int \boldsymbol{g} dV$$

где $\boldsymbol{g} = \frac{1}{4\pi c} \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}$, а интеграл берется по всему пространству. Магнитное поле движущейся частицы $\boldsymbol{H} = \frac{\boldsymbol{v}}{c} \times \boldsymbol{E}$, так как в системе покоя частицы (S') магнитное поле отсутствует. Отсюда

$$\boldsymbol{g} = \frac{1}{4\pi c}\left[\boldsymbol{v}E^2 - \boldsymbol{E}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{E})\right]$$

С помощью преобразований Лоренца (4.69) находим

$$E_x = E'_x, \quad E_y = \frac{E'_y}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad E_z = \frac{E'_z}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

(ось x направлена вдоль v). Элемент объема $dV = dV'\sqrt{1-\beta^2}$ (вследствие лоренцева сокращения). Таким образом,

$$G = \frac{v}{4\pi c^2\sqrt{1-\beta^2}}\int\left(E'^2_y + E'^2_z\right)dV' = \frac{v}{4\pi c^2\sqrt{1-\beta^2}}\cdot\frac{2}{3}\int E'^2 dV' \tag{1}$$

Последнее преобразование следует из сферической симметрии поля в системе S'.

Если принять, что масса покоя частицы имеет чисто электромагнитное происхождение, т. е. представляет собой массу ее электрического поля, определяемую соотношением Эйнштейна $W' = m_0c^2$, то она должна равняться

$$m_0 = \frac{1}{c^2}\cdot\frac{1}{8\pi}\int E'^2 dV' \tag{2}$$

При этом импульс поля должен бы быть равен $\frac{m_0 v}{\sqrt{1-\beta^2}}$, однако из формулы (1) видно, что это не так [5]. Импульс поля зависит от скорости v точно так же, как это должно быть в случае частицы:

$$\boldsymbol{G} = \frac{m'_0\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{3}$$

Но «масса» $m'_0 = \frac{4}{3}m_0 \neq m_0$ не совпадает с массой покоя частицы m_0, определяемой формулой (2).

Наличие коэффициента $\frac{4}{3}$ в выражении $\boldsymbol{G}$ означает, что энергия и импульс электромагнитного поля частицы не образуют 4-вектора и не могут быть отождествлены с ее энергией и импульсом.

Отметим, что определяемая формулой (2) электромагнитная масса обращается в бесконечность в случае точечной частицы.

5.115. $W_m = \frac{1}{8\pi}\int H^2 dV = \frac{1}{2}\cdot\frac{m'_0 v^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$, где величина m'_0 определена в решении предыдущей задачи.

Полная энергия электромагнитного поля частицы

$$W = \frac{1}{8\pi}\int\left(E^2 + H^2\right)dV = m'_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{1}{4}\sqrt{1-\beta^2}\right)$$

не обнаруживает зависимости от скорости $\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$, которая должна иметь место для энергии частицы (ср. с задачей 5.114).

5.116. Отбросим члены порядка $\frac{v}{c}$ и выше, и рассмотрим действие некоторого элемента de_1 на другой элемент de_2. Кулонова часть электрического поля сферически симметрична и не дает вклада в силу самодействия; квазистационарное магнитное поле тоже не дает вклада. Таким образом, достаточно рассмотреть только ту часть

[5] Энергия поля при таком предположении должна бы быть равна $\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$, но как показано в следующей задаче это также не имеет места.

напряженности $d\boldsymbol{E}$ электрического поля элемента de_1, которая зависит от ускорения. На элемент de_2 действует сила

$$d\boldsymbol{F} = -de_2 d\boldsymbol{E} = \frac{de_1 de_2}{c^2 r}\left[\dot{\boldsymbol{v}} - \boldsymbol{r}_0\left(\boldsymbol{r}_0 \cdot \dot{\boldsymbol{v}}\right)\right]$$

где $\boldsymbol{r}_0 = \frac{\boldsymbol{r}}{r}, \boldsymbol{r}$ - радиус-вектор, направленный от элемента de_1 к элементу de_2. На частицу в целом действует сила

$$\boldsymbol{F} = \int d\boldsymbol{F} = -\frac{4}{3}\cdot\frac{W_0}{c^2}\dot{\boldsymbol{v}}$$

где $W_0 = \frac{1}{2}\int \frac{de_1 de_2}{r}$ - энергия электромагнитного поля покоящейся частицы; множитель $4/3$ получается при интегрировании по направлениям $\boldsymbol{r}_0$.

Определив массу покоя частицы как $m_0' = \frac{4W_0}{3c^2}$ (см. задачу 5.114), получим для силы самодействия выражение:

$$\boldsymbol{F} = -m_0'\dot{\boldsymbol{v}}$$

Таким образом, сила самодействия частицы, если пренебречь запаздыванием, совпадает с силой инерции.

5.117. Сила, действующая на элемент заряда de_2 со стороны элемента de_1, определяется ускорением $\dot{\boldsymbol{v}}$ последнего в момент времени t':

$$d\boldsymbol{F}(t) = -\left.\frac{de_1 de_2}{c^2 r}\left[\dot{\boldsymbol{v}} - \boldsymbol{r}_0\left(\boldsymbol{r}_0 \cdot \dot{\boldsymbol{v}}\right)\right]\right|_{t'=t-\frac{r}{c}}$$

Разлагая ускорение $\dot{\boldsymbol{v}}$ по степеням $t' - t = -\frac{r}{c}$, получим:

$$\dot{\boldsymbol{v}}\left(t'\right) = \dot{\boldsymbol{v}}(t) + \left(t' - t\right)\ddot{\boldsymbol{v}}(t) = \dot{\boldsymbol{v}}(t) - \frac{r}{c}\ddot{\boldsymbol{v}}(t)$$

Интегрирование по элементам de_1, de 2 даст (см. предыдущую задачу) искомую силу самодействия:

$$\boldsymbol{F} = -m_0'\dot{\boldsymbol{v}} + \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\ddot{\boldsymbol{v}}$$

Второй член в правой части представляет собой силу лучистого трения. Он не зависит от структуры частицы и в предельном случае точечной частицы не изменяет своего вида. Собственная энергия W_0 и, следовательно, электромагнитная масса m_0 в этом предельном случае обращаются в бесконечность. Неучтенные члены порядка $(t' - t)^n$, где $n \geqslant 2$, очевидно, пропорциональны r_0^{n-1} (r_0 - радиус частицы) и в пределе точечной частицы исчезают.

5.118. Используем симметричный тензор (4.126) энергии-импульса электромагнитного поля. Интеграл

$$p^i = \frac{1}{c}\int T^{ik} d^3 S_k, \qquad \text{где} \qquad d^3 S_k = n_k d^3 S \tag{1}$$

- ковариантный элемент трехмерной гиперповерхности, представляет собой 4-вектор. Компоненты тензора T^{00} и $T^{\alpha 0}/(\alpha = 1, 2, 3)$ образуют соответственно плотность энергии (4.127) и плотность импульса (4.128) электромагнитного поля. Пусть в системе покоя S' частицы интеграл (1)
  превращается в интеграл по трехмерному объему dV', т. е. по гиперповерхности $t' = \text{const}$. В этой системе E' - кулоновское поле частицы, $H' = 0$, $d^3 S_k = n_k' dV'$, где единичный 4-вектор нормали $n_k' = (1, 0, 0, 0)$. Поэтому интеграл (1) дает значения энергии и импульса частицы в ее системе покоя:

$$p'^0 = \frac{1}{8\pi c}\int E'^2 dV' = \frac{\mathscr{E}}{c}, \quad p'^\alpha = (\boldsymbol{p}_0)^\alpha = 0 \tag{2}$$

В произвольной инерциальной системе S поле выражается согласно (4.69), (4.70), в частности,

$$\boldsymbol{H} = (\gamma/c)\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{E}' = \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{E}/c, \quad \text{так как} \quad \boldsymbol{E}_\perp = \gamma\boldsymbol{E}'_\perp. \tag{3}$$

Орт нормали n_k выражается через n'_k с помощью преобразований Лоренца: $n_k = (\gamma, -\gamma\boldsymbol{v}/c)$. Инвариантный элемент гиперповерхности согласно (3.13) можно записать в виде $d^3S = dV' = \gamma d^3x$, где d^3x - элемент трехмерного объема в системе S. Используя эти результаты, а также (4.127), (4.128), находим

$$\frac{1}{c}T^{0k}n_k = \frac{\gamma}{c}\left(T^{00} - \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{g}\right) = \frac{\gamma}{8\pi c}\left[E^2 + H^2 - 2\left(\frac{\boldsymbol{v}}{c}\times\boldsymbol{E}\right)\cdot\boldsymbol{H}\right] = \tag{4}$$
$$= \frac{\gamma}{8\pi c}\left[E^2 - H^2\right].$$

Таким образом,

$$p^0 = \frac{\gamma}{8\pi c}\int\left(E^2 - H^2\right)d^3S = \gamma mc \tag{5}$$

откуда электромагнитная масса частицы

$$m = \frac{1}{8\pi c^2}\int\left(E^2 - H^2\right)d^3S = \frac{\gamma}{8\pi c^2}\int\left(E^2 - H^2\right)d^3x \tag{6}$$

• релятивистский инвариант. Аналогичным путем находим

$$\frac{1}{c}T^{\alpha k}n_k = \frac{\gamma v^\alpha}{8\pi c^2}\left(E^2 - H^2\right) \tag{7}$$

и получаем правильное выражение для импульса частицы $\boldsymbol{p} = \gamma m\boldsymbol{v}$. Приведенное рассмотрение позволяет вычислить инвариантную электромагнитную массу частицы, но не дает настоящего решения проблемы: для точечной
частицы масса оказывается расходящейся величиной (см. (5.108)), а внутренняя структура протяженной частицы должна описываться квантовой механикой.

5.119. $T = \frac{m^2c^3a_0^3}{4e^4} \approx 10^{-11}$ сек.

Сделанные предположения о характере движения электрона выполняются, если потеря энергии за период τ обращения по орбите мала по сравнению с полной энергией электрона, т. е. $\tau\left|\frac{d\mathscr{E}}{dt}\right| \ll |\mathscr{E}|$, откуда $a\frac{c}{v} \gg r_0 = \frac{e^2}{mc^2}$ (r_0 - классический радиус электрона). Это условие начинает нарушаться только на очень малых расстояниях порядка 10^{-13}см, на которых вообще неприменима классическая электродинамика, так как она в этой области внутренне противоречива.

Следовательно, результат задачи - очень малое время жизни атома - определенно указывает на неправильность классических представлений о движении электрона в атоме (представление о траектории и т. п.). В процессе преодоления этой и других фундаментальных трудностей классической физики и была создана квантовая механика.

5.120. $\mathscr{E}(t) = mc^2\,\mathrm{cth}\left[\frac{2e^4H^2}{3m^3c^5}t + \frac{1}{2}\ln\frac{\mathscr{E}_0+mc^2}{\mathscr{E}_0-mc^2}\right]$.

При $t\to\infty, \mathscr{E}(t)\to mc^2$, т. е. частица останавливается.
Радиус орбиты можно выразить через $\mathscr{E}(t)$ по формуле

$$r(t) = \frac{cp}{eH} = \frac{1}{eH}\sqrt{\mathscr{E}^2(t) - m^2c^4}$$

При $t \to \infty, r(t) \to 0$, т.е. частица движется по закручивающейся спирали.

5.121. $\mathscr{E}_{\text{кр}} = mc^2\sqrt[3]{\frac{3a^2\omega}{2cr_0}}$, где $r_0 = \frac{e^2}{mc^2}$.

5.122. Уравнение движения гармонического осциллятора при учете силы лучистого трения имеет вид

$$\ddot{\boldsymbol{r}} + \omega_0^2\boldsymbol{r} = \frac{2}{3}\cdot\frac{e^2}{mc^3}\dddot{r} \tag{1}$$

Уравнению (1) соответствует кубическое характеристическое уравнение

$$k^2 + \omega_0^2 = \frac{2}{3}\cdot\frac{e^2}{mc^3}k^3 \tag{2}$$

Условие малости силы лучистого трения по сравнению с квазиупругой силой позволяет решить (2) последовательными приближениями, отбросив в нулевом приближении правую часть; при этом $k \approx k_0 = \pm i\omega_0$. В первом приближении, подставив в правую часть (2) вместо k значение k_0 и введя обозначение

$$\gamma = \frac{2}{3}\cdot\frac{e^2\omega_0^2}{mc^3} \tag{3}$$

получим $k \approx k_1 = \pm i\omega_0 - \frac{\gamma}{2}$. Можно ограничиться одним из решений, например, тем, которому соответствует знак «-»:

$$r = r_0 e^{-\frac{\gamma t}{2}}\cdot e^{-i\omega_0 t} \quad (t > 0) \tag{4}$$

Это решение справедливо при $\gamma \ll \omega_0$ и имеет характер затухающих колебаний. □

Энергия осциллятора убывает как квадрат модуля его амплитуды:

$$W = W_0 e^{-\gamma t} \tag{5}$$

Величину $\frac{1}{\gamma}$ естественно называть временем жизни возбужденного состояния осциллятора.

Напряженность электрического поля излучения пропорциональна r, так что

$$\boldsymbol{E} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\boldsymbol{E}_\omega e^{-i\omega t}d\omega = \begin{cases}\boldsymbol{E}_0 e^{-(i\omega_0+\gamma/2)t} & \text{при} \quad t > 0\\ 0 & \text{при} \quad t < 0\end{cases}$$

и

$$\boldsymbol{E}_\omega = \frac{\boldsymbol{E}_0}{2\pi}\int\limits_0^\infty e^{-(\gamma/2+i\omega_0)t+i\omega t}dt = \frac{\boldsymbol{E}_0}{2\pi\left[i\left(\omega-\omega_0\right)-\frac{\gamma}{2}\right]}$$

Отсюда находим спектральное распределение интенсивности излучения:

$$\frac{dI_\omega}{d\omega} = \frac{I_0\gamma}{2\pi}\frac{1}{\left(\omega-\omega_0\right)^2+\gamma^2/4} \tag{6}$$

где $I_0 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dI_\omega$ - полная интенсивность излучения. Спектральное распределение (6) имеет характер резонансной кривой (рис. 5.14).

Ширина спектральной линии характеризуется величиной $\Delta\omega = \gamma$.
Естественная ширина линии очень мала (на графике длин волн она равнялась бы $\Delta\lambda = \Delta\frac{2\pi c}{\omega} = \frac{4\pi}{3}r_0 = 1,17 \cdot 10^{-12}$ см).

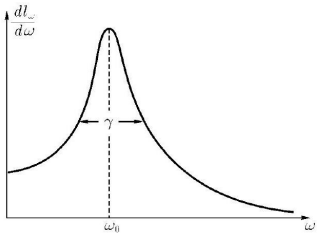


Рис. 5.14
Если считать, что излучение происходит не непрерывно, а дискретными порциями (это предположение, очевидно, выходит за рамки классической электродинамики), то неопределенность энергии фотонов $\Delta\mathscr{E} = \hbar\Delta\omega = \hbar\gamma$ связана со временем жизни возбужденного состояния $\tau = \frac{1}{\gamma}$ соотношением

$$\Delta\mathscr{E} \cdot \tau = \hbar \tag{7}$$

Это - частный случай весьма общего квантовомеханического соотношения неопределенности для энергии-времени.
5.123. $\frac{dI_\omega}{d\omega} = I_0 e^{-\left(\frac{\omega-\omega_0}{\gamma_\mu}\right)^2}$,

где $\gamma_\text{д} = \sqrt{\frac{2T\omega_0^2}{mc^2}}$ - допплерова ширина спектральной линии, а через I_0 обозначена интенсивность при $\omega = \omega_0$. Ширина линии зависит от температуры и может служить мерой температуры газа.
5.124. $\frac{dI_\omega}{d\omega} = \frac{I\Gamma}{2\pi} \cdot \frac{1}{(\omega-\omega_0)^2+\frac{\Gamma^2}{4}}$,

где $I = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dI_\omega$.
5.125. Если волна поляризована вдоль оси x, то

$$x_\omega = \frac{eE_{x\omega}}{m}\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma} \tag{1}$$

где

$$\gamma = \frac{2}{3} \cdot \frac{e^2\omega_0^2}{mc^3}$$

Энергия, поглощенная осциллирующим электроном,

$$\Delta W = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} eE_x(t)\dot{x}(t)dt = \frac{2\pi e^2}{m}\int\limits_0^\infty |E_{x\omega}|^2 \frac{2\omega^2\gamma}{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+\omega^2\gamma^2}d\omega,^6$$

так как $(\dot{x})_\omega = -i\omega x_\omega$. Подынтегральная функция в последнем выражении описывает спектральное распределение интенсивности поглощения. Из вида этой функции следует, что мерой ширины линии поглощения является величина γ, как и в случае испускания. Так как, по условию, ширина спектрального распределения группы велика по сравнению с естественной шириной линии γ, то

$$\Delta W = \frac{2\pi e^2}{m}|E_{x\omega_0}|^2 2\omega_0^2\gamma \int\limits_{-\omega_0}^{\infty} \frac{d\xi}{\left(2\omega_0\xi\right)^2+\omega_0^2\gamma^2}$$

где $\xi = \omega - \omega_0$. Нижний предел можно заменить на $-\infty$, так как $\gamma \ll \omega_0$. В результате интегрирования получим окончательно:

$$\Delta W = \frac{2\pi^2 e^2}{m} |E_{x\omega_0}|^2 = 2\pi^2 r_0 c S_{\omega_0}$$

где $r_0 = \frac{e^2}{mc^2}$ - классический радиус электрона. Результат не зависит от γ. Зависимость от частоты только косвенная: величина ΔW пропорциональна спектральной плотности S_{ω_0} при резонансной частоте ω_0 осциллятора.

Из вывода ясно, что тот же результат мы получили бы и в случае падения на изотропный осциллятор неполяризованной и неплоской группы волн. В этом случае S_ω представляла бы собой сумму интенсивностей всех поляризованных волн частоты ω, входящих в эту группу.

5.126. а) $\Delta W = 2\pi^2 r_0 c S_{\omega_0} \cos^2\vartheta$;

б) $\Delta W = \pi^2 r_0 c S_{\omega_0} \sin^2\theta$

в) $\Delta W = \frac{2}{3}\pi^2 r_0 c S_{\omega_0}$

5.127. Уравнение движения гармонического осциллятора в данном случае принимает вид:

$$\ddot{\boldsymbol{r}} + \omega_0^2 r = \frac{2e^2}{3mc^3}\dddot{\boldsymbol{r}} + \frac{e}{m}\boldsymbol{E}_0 e^{-i\omega t} \tag{1}$$

если пренебречь неоднородностью электрического поля в области, занятой осциллятором, и действием магнитной силы - эффектами порядка $\frac{v}{c}$.

Решение уравнения (1), соответствующее вынужденным колебаниям, выражается формулой:

$$r = \frac{e}{m} \cdot \frac{\boldsymbol{E}}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma}$$

Отсюда для усредненной по времени интенсивности света, рассеянного в данном направлении, найдем:

$$\frac{\overline{dI}}{d\Omega} = \frac{1}{4\pi c^3}\overline{|e\ddot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{n}|^2} = \frac{cE_0^2 r_0^2}{8\pi} \cdot \frac{\omega^4 \sin^2\vartheta}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \omega^2\gamma^2}$$

где ϑ - угол между направлением n распространения рассеянного излучения и направлением поляризации падающей волны. Плотность потока энергии (усредненная по времени) в падающей волне $\bar{\gamma}_0 = \frac{cE_0^2}{8\pi}$. Дифференциальное сечение рассеяния:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{\bar{\gamma}_0}\frac{\overline{dI}}{d\Omega} = r^2 \frac{\omega^4 \sin^2\vartheta}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \omega^2\gamma^2}$$

Полное сечение рассеяния получается отсюда интегрированием по углам:

$$\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega = \frac{8\pi}{3} r_0^2 \frac{\omega^4}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \omega^2\gamma^2}$$

В случае сильно связанного электрона, когда $\omega_0 \gg \omega$,

[06] Как легко проверить,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} A(t) \cdot B(t) dt = 2\pi \int_0^{\infty} \left(A\omega B_\omega^* + A_\omega^* B\omega\right) d\omega$$

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} \cdot \frac{r_0^2 \omega^4}{\omega_0^4}$$

Характерна зависимость сечения от частоты: $\sigma \sim \omega^4$.
В случае слабо связанного электрона при малом лучистом трении $\gamma \approx 0, \omega_0 \approx 0$ и

$$\sigma = \frac{8\pi r_0^2}{3}$$

5.128. $\boldsymbol{H} = -\frac{Ae^2}{mc^2 r} \left(\boldsymbol{e}_\alpha \cos\vartheta - i\boldsymbol{e}_\vartheta\right) e^{-i(\omega t' - \alpha)}$, где ϑ, α - полярные углы направления n распространения рассеянной волны (направление распространения падающей волны вдоль оси z), A - амплитуда падающей волны.

Из выражения $\boldsymbol{H}$ видно, что рассеянная волна оказывается, вообще говоря, эллиптически поляризованной. Волны, рассеянные вперед и назад, поляризованы по кругу. Волна, рассеянная в плоскости xy, поляризована линейно. Дифференциальное и полное сечения рассеяния

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = r_0^2 \frac{(1 + \cos^2\vartheta)}{2}, \quad \sigma = \frac{8\pi}{3} r_0^2$$

5.129. $\rho = \cos^2\vartheta$.
5.130. В случае линейно поляризованной волны:

$$d\sigma_{\text{пол}} = r_0^2 \frac{(1-\beta^2)(1-\beta)^2}{(1-\beta\cos\vartheta)^6} \left[(1-\beta\cos\vartheta)^2 - \left(1-\beta^2\right)\sin^2\vartheta\cos^2\alpha\right]$$

где ϑ, α - полярные углы направления распространения рассеянной волны, ось z параллельна скорости v заряда, $\beta = \frac{v}{c}$, азимутальный угол α отсчитывается от направления вектора $\boldsymbol{E}$ в падающей волне.

В случае неполяризованной волны:

$$d\sigma_{\text{непол}} = r_0^2 \frac{(1-\beta^2)(1-\beta)^2}{(1-\beta\cos\vartheta)^6} \left[\frac{1+\beta^2}{2}\left(1+\cos^2\vartheta\right) - 2\beta\cos\vartheta\right]$$

5.131. Решая уравнение движения осциллятора в магнитном поле $\boldsymbol{H} \| z$ так, как это делалось в задаче 4.52, получим при

$$\omega_0 \gg \frac{eH}{2mc} = \omega_L$$
$$\boldsymbol{r} = A_1\left(\boldsymbol{e}_x + i\boldsymbol{e}_y\right) e^{-i(\omega_0 - \omega_L)t} + A_2\left(\boldsymbol{e}_x - i\boldsymbol{e}_y\right) e^{-i(\omega_0 + \omega_L)t} + A_3 \boldsymbol{e}_z e^{-i\omega t}$$

где A_1, A_2, A_3 - постоянные интегрирования, определяемые из начальных условий.

Из выражения $\boldsymbol{r}$ видно, что осциллятор, помещенный в магнитное поле, становится анизотропным, частота его колебаний расщепляется на 3 частоты: ω_0 и $\omega_0 \pm \omega_L$. При наблюдении излучения в любом направлении поляризация каждой из монохроматических компонент оказывается, вообще говоря, эллиптической. В частности, вдоль оси z (вдоль поля $\boldsymbol{H}$) наблюдаются две спектральные линии, поляризованные по кругу в противоположные стороны. В перпендикулярном к полю направлении наблюдаются все три монохроматические компоненты, поляризованные линейно. При этом вектор электрического поля несмещенной спектральной линии колеблется в направлении магнитного поля, вектора же электрического поля у обеих смещенных линий колеблются в перпендикулярном направлении.
5.132. Условие малости амплитуды вдали от резонансной частоты ($|\omega - \omega_0| \sim \omega_0$) означает, что поле волны в области колебаний отдельного осциллятора можно считать

однородным. При резонансе ($\omega \approx \omega_0$) требуется более жесткое условие $eE_0/mc\gamma \ll 1$, где γ - не лоренц-фактор частицы, а ширина резонансной линии (см. задачи 5.122-5.124). Если эти условия выполняются, то поле, действующее на j-ю частицу, можно записать в виде $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 \exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}_j - \omega t)$, а ее радиус-вектор $s_j(t)$, отсчитываемый от положения равновесия, определится из уравнения движения в пренебрежении магнитной силой ($v/c \ll 1$) : $s_j = \boldsymbol{a}\exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}_j - \omega t)$, где амплитуда колебаний

$$\boldsymbol{a} = \frac{eE_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma)} \tag{1}$$

Вычисляя поле рассеянных волн в волновой зоне по принципу суперпозиции с помощью формул для электрического дипольного излучения (см.
раздел 5.2), находим
$\boldsymbol{H} = \sum_{j=1}^{N} \frac{es_j(t-R_j/c)\times\boldsymbol{n}'}{c^2 R_j} \approx -\frac{\exp[-i\omega(t-r/c)]}{r}\frac{\omega^2\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{n}'}{c^2}\sum_j e^{-i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}_j}$.
Здесь $R_j = |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_j| \approx r - \boldsymbol{n}'\cdot\boldsymbol{r}_j, \boldsymbol{p} = e\boldsymbol{a}, \boldsymbol{r}$ - радиус-вектор, который отсчитывается от некоторого начала координат внутри области, занятой частицами. Вектор $\boldsymbol{q} = \omega\boldsymbol{n}'/c - \boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}' - \boldsymbol{k}$ представляет собой изменение волнового вектора волны при рассеянии. Вычисляя дифференциальное сечение рассеяния по формуле (5.119), находим

$$\frac{d\Sigma}{d\Omega} = F(q)\frac{d\sigma}{d\Omega} \tag{3}$$

где

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\omega^4(\boldsymbol{n}'\times\boldsymbol{p})^2}{c^4|\boldsymbol{E}_0|^2} \tag{4}$$

- сечение рассеяния отдельным осциллятором либо свободным электроном (при $\omega_0 = \gamma = 0$), которое было вычислено ранее (см. задачи 5.127-5.129). Множитель

$$F(\boldsymbol{q}) = \left|\sum_{j=1}^{N} e^{-i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}_j}\right|^2 \tag{5}$$

представляет собой фактор когерентности, показывающий, в какой мере рассеяние системой зарядов отличается от рассеяния на отдельной частице. Он сильно зависит от соотношения между обратным переданным рассеивателю волновым вектором q^{-1} и размерами области, в которой движутся частицы. Предельные случаи:

1. Переданный волновой вектор мал, для всех j имеем $|\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}_j| \ll 1$. Заменяя в (5) экспоненты единицами, имеем $F = N^2$, где N - полное число рассеивателей. Это - случай полностью когерентного рассеяния, когда поля от отдельных частиц складываются в одной фазе (сравнимый со случаем когерентного излучения сгустком частиц, задача 5.92). Сечение пропорционально квадрату числа рассеивателей:

$$\frac{d\Sigma}{d\Omega} = N^2\frac{d\sigma}{d\Omega} \tag{6}$$

Если рассеиваются длинные волны, $\lambda \gg r_j$, то формула (6) справедлива при всех углах рассеяния. Если же $\lambda \leqslant r_j$, то (6) справедливо только при рассеянии на малые углы, при которых $qr_j \ll 1$, несмотря на то, что $kr_j \geqslant 1$. Поскольку $q = 2k\sin(\theta/2)$, где θ - угол рассеяния, то область углов когерентного рассеяния дается неравенством

$$\theta \ll \theta_c \approx \frac{1}{kl} \tag{7}$$

где l - размер рассеивающей системы.

2. Переданный волновой вектор велик, $|q \cdot r_j| \gg 1$. Запишем (5) в виде

$$F = \sum_{j=1}^{N} \exp\left[i\boldsymbol{q} \cdot (\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_j)\right] + \sum_{j \neq m} \exp\left[i\boldsymbol{q} \cdot (\boldsymbol{r}_j - \boldsymbol{r}_m)\right]$$

Первая сумма, очевидно, равна N. Значения же второй суммы зависят, вообще говоря, от расположения зарядов. Если оно случайно, то при достаточно большом N произойдет взаимное гашение осциллирующих слагаемых, и $F = N$. Поэтому будем иметь

$$\frac{d\Sigma}{d\Omega} = N\frac{d\sigma}{d\Omega} \tag{8}$$

Здесь складываются не амплитуды, а интенсивности волн, рассеянных отдельными частицами, эффект пропорционален числу рассеивателей, а не их квадрату.

Следует иметь в виду, что мы не учитывали вторичного рассеяния уже рассеянных волн. Это означает, что пробег волн (или фотонов) между рассеяниями должен превосходить размер рассеивающей системы. Другими словами, ее «оптическая толша» должна быть малой.

5.133. Сила определяется импульсом, передаваемым частице падающей волной в единицу времени. Из соображений симметрии ясно, что сила, как и передаваемый импульс, ориентированы вдоль направления распространения k/k первичной волны. Передаваемый импульс равен разности проекций на k импульсов первичной волны и всех рассеянных волн, интенсивность которых определяется падающей волной и сечением рассеяния. В итоге будем иметь общую формулу для силы, усредненной по периоду волны:

$$\overline{\mathscr{F}} = \frac{\bar{\gamma}_0}{c} \int (1 - \cos\theta) \left(\frac{d\sigma_s(\theta, \alpha)}{d\Omega}\right) d\Omega \tag{1}$$

Хотя дифференциальное сечение рассеяния зависит от поляризации первичной волны и для волн с линейной, круговой поляризациями и неполяризованной волны принимает соответственно вид

$$\frac{d\sigma_s(\theta, \alpha)}{d\Omega} = r_0^2 \left(1 - \sin^2\theta \cos^2\alpha\right), \quad \frac{d\sigma_s(\theta, \alpha)}{d\Omega} = \frac{1}{2} r_0^2 \left(1 + \cos^2\theta\right) \tag{2}$$

$$\frac{d\sigma_s(\theta, \alpha)}{d\Omega} = \frac{1}{2} r_0^2 \left(1 + \cos^2\theta\right)$$

где r_0 - классический радиус частицы, θ, α - углы, определяющие направление распространения рассеянной волны, сила нечувствительна к поляризации и для всех трех случаев будем иметь

$$\mathscr{F} = w_0 \sigma_T \tag{3}$$

где $w_0 = \bar{\gamma}_0/c = (1/8\pi)\left|E_0\right|^2$ - плотность энергии в первичной волне,

$$\sigma_T = 8\pi r_0^2/3 \tag{4}$$

- томсоновское сечение рассеяния волны свободным зарядом.

$$5.134.\ \boldsymbol{F} = w\sigma_T \left(1 - \frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}}{\boldsymbol{c}}\right)\left\{\boldsymbol{n} - \gamma^2\left(1 - \frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}}{\boldsymbol{c}}\right)\frac{\boldsymbol{v}}{c}\right\}.$$

Это выражение для силы справедливо и для немонохроматического излучения, распространяющегося в направлении n.

5.135. Из соображений симметрии ясно, что результирующая сила, действующая на электрон, будет направлена по нормали к поверхности. Усредняя по всем возможным направлениям излучения силу, найденную в предыдущей задаче, получим

$$\langle F_n\rangle = \frac{3}{4}w\sigma_T\gamma^2\left(1 + \beta^2 - \frac{32}{15}\beta\right)$$

Сила положительна при $\beta < \beta_*$ и отрицательна при $\beta > \beta_*$, где β_* - корень уравнения

$$\beta^2 - \frac{32}{15}\beta + 1 = 0$$

удовлетворяющий условию $0 \leqslant \beta_* \leqslant 1$, т. е. $\beta_* \approx 0,7$. Частица ускоряется до приобретения скорости $v_* \approx 0,7c$, после чего движется с этой скоростью, больше не ускоряясь. Это объясняется тем, что по мере роста скорости частицы все большее число фотонов в системе покоя частицы участвует во встречных столкновениях с ней. Из-за этого ускоряющая сила уменьшается и при $v = v_*$ обращается в нуль. При $v > v_*$ встречные столкновения преобладают над догоняющими, и частица замедляется. Изменение направления движения квантов связано с преобразованием углов (аберрация света).

5.136. К электрону, находящемуся на расстоянии z от пятна, приходит излучение, распространяющееся внутри телесного угла $\Omega_0 = 2\pi\,(1 - \mu_0)$, где $\mu_0 = \cos\theta_0 = (1 + a^2/z^2)^{-1/2}$ (см. рис. 5.15). При изотропном испускании из каждой точки пятна распределение излучения по углам

$$\psi(\mu)d\Omega = \frac{\Theta\,(\mu - \mu_0)\,d\mu}{1 - \mu_0} \tag{1}$$

зависит от координаты z. Плотность энергии излучения также зависит от координаты по закону

$$w(z) = w_0\frac{\Omega(z)}{\Omega(0)} = w_0\,(1 - \mu_0(z)) \tag{2}$$

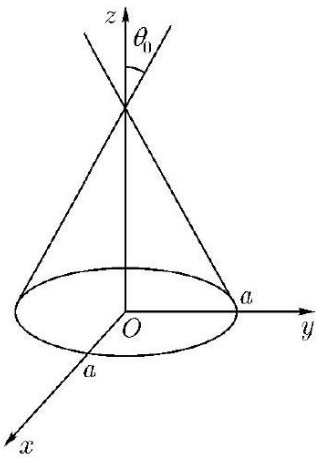


Рис. 5.15

В выражение силы, найденной в задаче 5.133, следует подставить (2) и усреднить ее с функции распределения (1). Это даст
(3) $f(\gamma,z) =< F_z >= \frac{1}{6}\gamma^2 w_0\sigma_T\,(1-\mu_0)\,[\beta^2\,(1+\mu_0-2\mu_0^2)-6\beta+3\,(1+\mu_0)]$.

Составив уравнение, описывающее изменение энергии частицы, и перейдя к дифференцированию по $dz = vdt$, получим

$$\frac{d\gamma}{dz} = \frac{f(\gamma,z)}{mc^2} \tag{4}$$

В этом уравнении переменные не разделяются, но можно исследовать знак производной $d\gamma/dz$ и асимптотику. На больших расстояниях от пятна, $z \gg z_0 \gg a$, уравнение (4) может быть решено в аналитической форме. Максимальный возможный лоренц-фактор определяется из трансцендентного уравнения
$\gamma\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{\gamma^2}}-\arcsin\frac{1}{\gamma}\right) = \gamma_0\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{\gamma_0^2}}-\arcsin\frac{1}{\gamma_0}\right)+\frac{w_0\sigma_T a^2}{2mc^2 z_0}$,
где γ_0 - лоренц-фактор при $z = z_0$, который нужно определять из численного решения уравнения (4). Он существенно зависит от плотности w_0 излучения.

5.137. Используем результат задачи 5.133. Плотность энергии излучения убывает с расстоянием от центра звезды обратно пропорционально r^2 : $w(r) = L/4\pi cr^2$. Сила светового давления, действуюшая на электрон:

$$F_r = \sigma_T w(r) = \frac{2e^4 L}{3m_e^2 c^5}\frac{1}{r^2}$$

На протон действует сила, которая меньше в $(m_e/m_p)^2$ раз. Гравитационная сила в основном действует на протон и имеет ту же зависимость от расстояния: $F_g = GMm_e/r^2$, где $G = 6,67\times10^{-8}$ см$^3/\cdot$с^2 - гравитационная постоянная, M - масса звезды. Вследствие кулоновского взаимодействия между протонами и электронами обе силы действуют на квазинейтральную плазму в целом. Из равенства сил находим

$$L_c = \frac{4\pi cm_p GM}{\sigma_T} \approx 10^{38}\frac{M}{M_\odot}\ \text{эрг /с}$$

где $M_\odot \approx 2\times10^{33}$ г- масса Солнца.

5.138. Исходим из уравнения Дирака - Лоренца (5.110), записанного через импульс и ускорение:

$$\frac{dp_i}{d\tau} = \frac{e}{mc}F_{ik}p^k + \frac{2e^2}{3mc^3}\left\{\frac{d^2p_i}{d\tau^2}+\frac{1}{c^2}p_i\left(w_k w^k\right)\right\} \tag{1}$$

Тензор F_{ik} должен содержать как поле волны, так и поляризационное поле E_z, препятствующее продольному движению электрона. Исследуем стационарное состояние, в котором энергия частицы $\mathscr{E} = mc^2\gamma = \text{const}$, а трехмерный импульс вращается в плоскости xy с частотой волны ω:

$$\boldsymbol{p}(t) = p\,[\boldsymbol{e}_x\cos(\omega t-\varphi)-\boldsymbol{e}_y\sin(\omega t-\varphi)]\,,\quad p_z = 0 \tag{2}$$

где t - координатное время, φ - сдвиг фазы вращения электрона относительно электрического поля волны.

Компонента $i = 0$ уравнения (1) при подстановке в него приведенных выше величин дает уравнение баланса энергии:

$$e\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{v} \equiv eE_0 v\sin\varphi = \frac{2e^2\omega^2}{3c}\beta^2\gamma^4 \tag{3}$$

Здесь в левой части равенства присутствует мощность, получаемая электроном от волны; правая часть в точности равна потере энергии (5.72) на
излучение частицей, вращающейся по окружности с заданной частотой. В компонентах $i = 1, 2, 3$ переходим к дифференцированию по координатному времени $d\tau = \gamma^{-1}dt$ и выделяем проекцию на направление ускорения частицы, умножая обе части уравнения (1) скалярно на соответствующий орт $\boldsymbol{e}(t) = e_x \sin(\omega t - \varphi) + e_y \cos(\omega t - \varphi)$. Это позволяет выразить импульс через амплитуду волны и сдвиг фазы:

$$\omega p = eE_0 \cos\varphi \tag{4}$$

Последнее уравнение выражает собой баланс центробежной и электрической сил без участия радиационной силы, так как угловое распределение излучения симметрично относительно плоскости круговой орбиты. Наконец, проекция уравнения (1) на ось Oz позволяет выразить продольное электрическое поле E_z через поле волны:

$$E_z = E_0 \beta \sin\varphi \tag{5}$$

Уравнения (3) и (4) позволяют вычислить зависимость сечения от амплитуды волны и проанализировать предельные случаи. Для этого введем безразмерные параметры [Зельдович (1975)] $b = eE_0/mc\omega, \kappa = 3c/r_0\omega$ и исключим фазу φ из указанных уравнений:

$$\left(\gamma^2 - 1\right)\left(\frac{\gamma^6}{\kappa^2} + 1\right) = b^2 \tag{6}$$

Полученное алгебраическое уравнение определяет энергию частицы $\mathscr{E} = mc^2\gamma$ как функцию параметров b, κ. В области применимости классической электродинамики $\kappa \gg 1$. Это неравенство нарушается только при энергиях квантов $\hbar\omega > 137mc^2 \approx 70\text{М В}$, т. е. в далекой квантовой области. Полное сечение рассеяния согласно (5.119) определяется отношением излучаемой в единицу времени энергии, которая определяется правой частью равенства (3), к плотности потока энергии в падающей волне $\gamma_0 = cE_0^2/4\pi$:

$$\sigma = \frac{8\pi e^2\omega^2}{3c^2E_0^2}\beta^2\gamma^4 = \sigma_T \frac{\gamma^2\kappa^2}{\gamma^6 + \kappa^2} \tag{7}$$

Предельные случаи: а) $\gamma \ll \kappa^{1/3}$; из (6) получаем $\gamma^2 \approx 1 + b^2$ и, следовательно, $b \ll \kappa^{1/3}$. Это - случай, когда реакция излучения в (1) играет малую роль. Имеем из(7)

$$\sigma \approx \sigma_T \quad \text{при } b \ll 1, \quad \sigma \approx \sigma_T b^2 \quad \text{при } b \gg 1. \tag{8}$$

б) $\gamma \gg \kappa^{1/3}$; при этом $\gamma \approx (\kappa b)^{1/4}$ и $b \gg \kappa^{1/3}$. Этим неравенствам отвечает превышение реакции излучения над внешней силой. Оценка сечения: □

$$\sigma \approx \sigma_T \frac{\kappa}{b} \tag{9}$$

Наибольшего значения сечение достигает при $b \approx \kappa^{1/3}$:

$$\sigma_{\max} \approx \sigma_T \kappa^{2/3} \approx \sigma_T \left(\frac{\lambda}{2\pi r_0}\right)^{2/3} \tag{10}$$

Классическая теория применима, если характерная энергия кванта составляет малую долю от энергии электрона: $\hbar\omega_c \ll mc^2\gamma$. Под характерной энергией следует понимать энергию квантов в максимуме излучения, т. е. при частотах $\omega_c \approx \omega\gamma^3$ (см. формулу (8) из решения задачи 5.83, в которой следует заменить $\omega_0 \to \omega$). Из полученных выше неравенств находим границу, разделяющую классическую и квантовую области: $E_0 \approx$

e/Λ_C^2, где Λ_C - комптоновская длина волны электрона.

5.139. Общая схема решения такая же, как в предыдущей задаче. Уравнение (3) сохраняет свой вид, уравнение движения (4) из предыдущей задачи превращается в

$$\omega p = \pm eH\beta + eE_0 \cos\varphi$$

где знак плюс относится к необыкновенной волне, для которой знаки $\omega_H = eH/mc$ и ω совпадают, знак минус - к обыкновенной волне с противоположными знаками частот. В необыкновенной волне направления вращения электрона волной и магнитным полем совпадают. В обозначениях предыдущей задачи будем иметь из уравнений движения

$$\gamma\beta = \pm\frac{\omega_H}{\omega}\beta + b\cos\varphi, \quad \kappa b\beta\sin\varphi = \beta^2\gamma^4, \quad \sigma = \sigma_T\frac{\gamma^2\left(\gamma^2-1\right)}{b^2}$$

Вычисление сечения и энергии электрона в зависимости от входных параметров (ω_H, ω, E_0) в общем случае можно произвести только численным путем. Анализ предельных случаев см. в оригинальной работе [Зельдович и Илларионов (1971)].

5.140. Движение электрона в плоской волне произвольной силы и с произвольной поляризацией без учета реакции излучения было исследовано в задачах 4.57, 4.58. Излучение частицы, совершающей заданное
движение, вычисляется по формулам раздела 5.3. См. оригинальную работу [Сарачик и Шепперт (1970)].

5.141.

$$\frac{d^2\mathscr{E}rad}{d\omega d\Omega} = \frac{m^2c\omega^2}{4\pi^2E^2}\left\{\left[\left(1-\frac{\nu^2}{z^2}\right)\gamma_\perp^2 - 1\right]R_\nu^2(z) + \gamma_\perp^2 R_\nu'^2(z)\right\}$$

где

$$\gamma_\perp = \frac{\sqrt{m^2c^2+p_\perp^2}}{mc}, \quad \nu = \frac{cp_\perp k_\perp}{eE}\cos\varphi, \quad z = \frac{mc}{eE}k_\perp\gamma_\perp$$

Индекс $\perp$ обозначает компоненту, перпендикулярную постоянному электрическому полю $\boldsymbol{E} = \text{const}, \varphi$ - угол между $\boldsymbol{p}_\perp$ и $\boldsymbol{k}_\perp$. Ход расчета, анализ частных случаев и обсуждение физических аспектов проблемы см. в оригинальной статье [Никишов и Ритус (1969)].

5.142. Решая одномерное уравнение с учетом радиационной силы

$$m\dot{v} = \frac{2e^2}{3c^3}\ddot{v} + eE_0\delta\left(t/T_0\right) \tag{1}$$

находим ускорение частицы

$$\dot{v}(t) = w(t) = \left(w_0 - \frac{eE_0T_0}{m\tau_0}\Theta\left(t/T_0\right)\right)e^{t/\tau_0} \tag{2}$$

где w_0 - постоянная интегрирования, τ_0 дается формулой (5.96). Накладывая начальное условие $w = 0$ при $t < 0$, т. е. до начала действия силы, получаем $w_0 = 0$ и самоускорение

$$w(t) = -\frac{eE_0T_0}{m\tau_0}e^{t/\tau_0} \tag{3}$$

т. е. физически бессмысленный результат при $t > 0$. Но если наложить «конечное условие», т.е. потребовать обращения в нуль ускорения после окончания действия силы, $w(t) = 0$ при $t > 0$, то $w_0 = \frac{eE_0T_0}{m\tau_0}$ и решение принимает вид

$$w(t) = w_0 e^{t/\tau_0} \quad \text{при } t < 0, \quad v(t) = \begin{cases} v_0 + \tau_0 w_0 e^{t/\tau_0}, & t < 0 \\ v_0 + \tau_0 w_0, & t > 0 \end{cases} \tag{4}$$

В полученном решении отсутствует самоускорение, но имеется другой недостаток: нарушен принцип причинности, частица начинает «чувствовать»
действие силы до ее включения. Этот результат можно интерпретировать как «несжимаемость» частицы размером r_0, благодаря чему возмущение передается на такое расстояние мгновенно, как только «передний край» частицы его почувствует. Полное излучение, вычисленное с ускорением частицы (4), имеет значение

$$\mathscr{C} = \frac{e^2 w_0^2 \tau_0}{3c^3} \tag{5}$$

Трудности, проиллюстрированные выше, показывают, что радиационная сила не вполне корректным образом учитывает реакцию излучения. По-видимому, трудностей не возникает в тех случаях, когда эта сила мала по сравнению с внешней силой в системе покоя частицы. Корни этих трудностей связаны с появлением бесконечной собственной энергии и других расходимостей в существующих теориях.

5.143. $\varphi_{\text{k}} = \frac{e}{2\pi^2 k^2}, \boldsymbol{E}_{\text{k}} = -\frac{ie\boldsymbol{k}}{2\pi^2 k^2}$.

5.144. Так как объемная плотность $\rho(\boldsymbol{r}, t) = e\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{v}t)$, то

$$\rho_{\boldsymbol{k}\omega} = \frac{e}{(2\pi)^4} \iint \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{v}t) e^{-i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t)} d^3 r dt =$$

$$= \frac{e}{(2\pi)^4} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\omega - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v})} dt = \frac{e}{8\pi^3} \delta(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v} - \omega)$$

Отсюда с помощью результатов предыдущей задачи находим

$$\varphi_{\boldsymbol{k}\omega} = \frac{e}{2\pi^2} \cdot \frac{\delta(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v} - \omega)}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}$$

Таким же образом можно получить, что

$$\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}\omega} = \frac{e\boldsymbol{v}}{2\pi^2 c} \cdot \frac{\delta(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v} - \omega)}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}$$

Используя выражения компонент напряженностей поля, получим:

$$\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{k}\omega} = i\frac{e}{2\pi^2} \cdot \frac{\delta(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v} - \omega)}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \left(-\boldsymbol{k} + \frac{\boldsymbol{v}\omega}{c^2}\right)$$

$$\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{k}\omega} = i\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}\omega} = i\frac{e}{2\pi^2 c} (\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{v}) \frac{\delta(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v} - \omega)}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}}$$

Во всех компонентах поля присутствует множитель $\delta(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v} - \omega)$, обязанный дисперсионному уравнению $\omega = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}$. Благодаря этому, все разложения Фурье электромагнитного поля в данном случае фактически являются не четырех, а трехмерными. Например, в случае потенциала φ:

$$\varphi = \int\limits_{(\boldsymbol{k})} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e}{2\pi^2} \cdot \frac{\delta(\omega - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v})}{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t)} d^3 k d\omega = \int \varphi_{\boldsymbol{k}}(t) e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} d^3 k$$

где

$$\varphi_{\boldsymbol{k}}(t) = \frac{e}{2\pi^2} \cdot \frac{e^{-i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v})t}}{k^2 - \omega^2/c^2}$$

5.146. Рассмотрим вычисление скалярного потенциала. Согласно уравнениям из решения задачи 2.126

$$\varphi_{\mathbf{k}\omega} = \frac{4\pi\rho_{\mathbf{k}\omega}}{k^2 - \omega^2/c^2}$$

Компонента Фурье плотности заряда:

$$\rho_{\boldsymbol{k}\omega} = -\frac{1}{(2\pi)^4}\int [\boldsymbol{p}\cdot \operatorname{grad}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{v}t)]e^{-i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}d^3r dt =$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^4}\int \left[\boldsymbol{p}\cdot \operatorname{grad} e^{-i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}\right]\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{v}t)d^3r dt = -i\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{k}}{(2\pi)^3}\delta(\omega - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v})$$

Дисперсионное уравнение $\omega = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}$ имеет тот же вид, что и в случае поля равномерно движущегося точечного заряда (см. задачу 5.144). Поступая при вычислении $\varphi(\boldsymbol{r},t)$ в соответствии с указанием к задаче 5.145,
получим:

$$\varphi(\boldsymbol{r},t) = -\boldsymbol{p}\cdot\operatorname{grad}\frac{1}{r^*} = \frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}_0}{r^{*3}}$$

где $\boldsymbol{r}_0 = \left(x - vt, \frac{y}{\gamma^2}, \frac{z}{\gamma^2}\right), r^* = \sqrt{(x-vt)^2 + \frac{1}{\gamma^2}(y^2+z^2)}$.
Аналогичные вычисления дают для векторного потенциала

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) = \frac{\mathfrak{m}\times\boldsymbol{r}^*}{r^{*3}} + \frac{\boldsymbol{v}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}_0)}{cr^{*3}} \tag{2}$$

5.147. а) $\boldsymbol{A} = \frac{\mathfrak{m}_0\times\boldsymbol{r}^*}{\gamma r^{*3}}, \varphi = 0$;

$$\text{б)}\ \boldsymbol{A} = \frac{\mathfrak{m}_0\times\boldsymbol{r}^*}{r^{*3}}, \varphi = \frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A}}{c}$$

5.149.

$$\ddot{q}_{\boldsymbol{k}_\lambda}(t) + \omega_{\boldsymbol{k}^2}^2 q_{\boldsymbol{k}\lambda}(t) = F_{\boldsymbol{k}\lambda}(t) \tag{1}$$

где

$$F_{\boldsymbol{k}_\lambda}(t) = \frac{ec}{2\pi^2}\left[\boldsymbol{e}^*_{\boldsymbol{k}\lambda}\cdot\boldsymbol{v}(t)\right]e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}_0(t)} \tag{2}$$

а $\boldsymbol{r}_0(t)$ - радиус-вектор частицы в момент времени $t, \boldsymbol{v}$ - ее скорость в этот же момент времени. В нерелятивистском случае

$$m\ddot{\boldsymbol{r}}_0 = \boldsymbol{F} + e\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}_0) \tag{3}$$

где m - масса частицы, $\boldsymbol{F}$ - действуюшая на частицу сила неэлектромагнитного происхождения,

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}_0) = -\frac{1}{\pi\sqrt{2}}\int \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}\lambda}\dot{q}_{\boldsymbol{k}\lambda}e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}_0}d^3k \tag{4}$$

- напряженность поля излучения в той точке, где находится частица. Мы не учитываем силу, действующую на частицу со стороны магнитного поля, так как предполагается, что $v \ll c$. Уравнение (1) представляет собой уравнение вынужденных колебаний осциллятора под действием внешней силы $F_{k\lambda}(t)$. Движение частицы и электромагнитного поля, взаимодействующих между собой, описывается системой уравнений (1), (3).

5.150. Изменение энергии одного осциллятора:

$$\frac{dW_{\boldsymbol{k}\lambda}}{dt} = \frac{1}{2}\left(F_{\boldsymbol{k}\lambda}\dot{q}^*_{\boldsymbol{k}_\lambda} + F^*_{\boldsymbol{k}\lambda}\dot{q}_{\boldsymbol{k}\lambda}\right)$$

Скорость изменения энергии поля:

$$\frac{dW}{dt} = \frac{1}{2}\int\left(F_{\boldsymbol{k}\lambda}\dot{q}^*_{\boldsymbol{k}_\lambda} + F^*_{\boldsymbol{k}_\lambda}\dot{q}_{\boldsymbol{k}\lambda}\right)(d\boldsymbol{k})$$

5.151. Сила $F_{\boldsymbol{k}\lambda}(t)$ в данном случае принимает вид

$$F_{\boldsymbol{k}\lambda}(t) = b_{\boldsymbol{k}\lambda}\cos\omega_0 t, \quad \text{где} \quad b_{\boldsymbol{k}\lambda} = \frac{e}{\pi\sqrt{2}}\left(\boldsymbol{v}_0\cdot\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}\lambda}\right), \quad \boldsymbol{v}_0 = \omega_0\boldsymbol{r}_0$$

(для простоты рассматриваем линейно поляризованные осцилляторы поля, так что орты $e_{\boldsymbol{k}_\lambda}$ - вещественны). Интегрируя уравнение (1) задачи 5.149, получаем

$$q_{\boldsymbol{k}\lambda} = \frac{b_{\boldsymbol{k}\lambda}}{\omega^2_{\boldsymbol{k}} - \omega^2_0}\left(\cos\omega_0 t - \cos\omega_{\boldsymbol{k}} t\right)$$

если в начальный момент времени $t = 0$ осцилляторы поля не были возбуждены. Это значение $q_{\boldsymbol{k}}$ подставим в выражение для скорости изменения энергии поля излучения $\frac{dW_{\boldsymbol{k}\lambda}}{dt}$, найденное в задаче 5.150,

$$\frac{dW_{\boldsymbol{k}\lambda}}{dt} = \frac{b^2_{\boldsymbol{k}\lambda}}{\omega^2_{\boldsymbol{k}} - \omega^2_0}\left(\omega_{\boldsymbol{k}}\cos\omega_0 t\sin\omega_{\boldsymbol{k}^t} - \omega_0\cos\omega_0 t\sin\omega_0 t\right)$$

Интегрируя последнее выражение по t от 0 до t, получим количество энергии, переданное частицей за время t осциллятору поля $(\boldsymbol{k}, \lambda)$:

$$W_{\boldsymbol{k}\lambda} = \int_0^t \frac{dW_{\boldsymbol{k}\lambda}}{dt}dt = \frac{b^2_{\boldsymbol{k}\lambda}}{\omega^2_{\boldsymbol{k}} - \omega^2_0}\left[\frac{\omega_{\boldsymbol{k}}}{2}\cdot\frac{1-\cos\left(\omega_{\boldsymbol{k}}+\omega_0\right)t}{\omega_{\boldsymbol{k}}+\omega_0} + \right.$$
$$\left. + \frac{\omega_{\boldsymbol{k}}}{2}\cdot\frac{1-\cos\left(\omega_{\boldsymbol{k}}-\omega_0\right)t}{\omega_{\boldsymbol{k}}-\omega_0} - \frac{\omega_0}{4}\cdot\frac{1-\cos 2\omega_0 t}{\omega_0}\right]$$

При $\omega_{\boldsymbol{k}} = \omega_0$ и $t \to \infty$ второй член в скобках очень велик по сравнению с первым и третьим членами. Возбуждение осцилляторов происходит, следовательно, резонансным образом: в первую очередь возбуждаются те осцилляторы поля, частота которых близка к частоте вынуждающей силы $F_{\boldsymbol{k}_\lambda}$.

Оставим поэтому только резонансный член и просуммируем энергии, полученные осцилляторами поля, у которых частоты не сильно отличаются от ω_0, направление $\boldsymbol{k}$ заключено внутри телесного угла $d\Omega$, а орт поляризации $\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}_1}\left(\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}_2}\right)$ имеет одно и то же направление:

$$dW = \sum_{\boldsymbol{k},\lambda} W_{\boldsymbol{k}\lambda} = \frac{d\Omega}{2c^3}\int_{\omega_0-\delta}^{\omega_0+\delta}\sum_\lambda \frac{\omega^3_k b^2_{\boldsymbol{k}\lambda}}{\omega_k+\omega_0}\cdot\frac{1-\cos\left(\omega_k-\omega_0\right)t}{\left(\omega_k-\omega_0\right)^2}d\omega_{\boldsymbol{k}}$$

Подынтегральная функция в последнем выражении имеет резкий максимум при $\omega_k = \omega_0$. Этот максимум тем уже, чем больше t. При достаточно больших t можно вынести плавно меняющийся множитель $\sum_{\lambda} \frac{\omega_{\boldsymbol{k}}^3 b_{\boldsymbol{k}\lambda}^2}{\omega_{\boldsymbol{k}}+\omega_0}$ за знак интеграла, положив в нем $\omega_k = \omega_0$. В оставшемся интеграле можно устремить δ к ∞. Тогда он примет вид (см. формулу 1.218):

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\cos\alpha t}{\alpha^2} d\alpha = \pi t, \quad t \to \infty$$

Мы получим, таким образом:

$$\frac{dW}{d\Omega} = \frac{\pi\left(b_{\boldsymbol{k}_1}^2 + b_{\boldsymbol{k}_2}^2\right)\omega_0^2}{2c^3} t$$

Отсюда для интенсивности излучения в данном направлении находим хорошо известный результат:

$$\overline{dI}\frac{d\Omega}{d\Omega}\frac{1}{t}\frac{dW}{d\Omega} = \frac{e^2\omega_0^2\overline{v^2}\sin^2\vartheta}{4\pi c^3}$$

где через $\overline{v^2} = \frac{v_0^2}{2}$ обозначена средняя скорость колеблющейся частицы, через ϑ - угол между направлением v_0 и направлением k. При выводе последней формулы мы воспользовались легко получаемым соотношением

$$(\boldsymbol{v}_0 \cdot \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}_1})^2 + (\boldsymbol{v}_0 \cdot \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}_2})^2 = v_0^2 \sin^2\vartheta$$

Интегрированием по углам находим полную интенсивность излучения

$$\bar{I} = \frac{2e^2\omega_0^2\overline{v^2}}{3}$$

5.153. Будем приближенно решать систему уравнений (1) и (3) задачи 5.149. Пренебрегая реакцией излучения, подставим в уравнение (3) напряженность поля $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0\cos\omega t$ падающей волны. Его решение, соответствующее вынужденным колебаниям, имеет вид:

$$r(t) = \frac{e}{m}\boldsymbol{E}_0\frac{\cos\omega t}{\omega_0^2-\omega^2} \tag{1}$$

Движение частицы под действием падающей волны будет возбуждать осцилляторы поля излучения согласно уравнению (1) задачи 5.149, в котором нужно силу $F_{\boldsymbol{k}\lambda}$ выразить через $r(t)$:

$$F_{\boldsymbol{k}\lambda} = \frac{e^2\omega}{m\pi\sqrt{2}} \cdot \frac{e_{\boldsymbol{k}\lambda}\cdot\boldsymbol{E}_0}{\omega^2-\omega_0^2}\sin\omega t$$

Орты поляризации выбраны вещественными. Решая уравнения (1) задачи 5.149 с начальным условием $q_{\boldsymbol{k}\lambda}(0) = 0$, получим:

$$q_{\boldsymbol{k}\lambda}(t) = \frac{e^2}{m\pi\sqrt{2}} \cdot \frac{\omega\left(\boldsymbol{E}_0 \cdot e_{\boldsymbol{k}_\lambda}\right)}{\left(\omega_k^2-\omega^2\right)\left(\omega^2-\omega_0^2\right)}\left(\sin\omega t - \sin\omega_k t\right)$$

Поступая далее так же, как в задаче 5.151, найдем интенсивность излучения в направлении k с поляризацией, характеризуемой ортом $e_{k\lambda}$:

$$\frac{dI_{\boldsymbol{k}_\lambda}}{d\Omega} = \frac{1}{t}\frac{dW_{\boldsymbol{k}\lambda}}{d\Omega} = \frac{e^4}{8\pi m^2c^3} \cdot \frac{\omega^4\left(\boldsymbol{E}_0 \cdot e_{\boldsymbol{k}\lambda}\right)^2}{\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2} \tag{2}$$

Из (2) видно, что рассеянное излучение линейно поляризовано в плоскости, проходящей через $\boldsymbol{E}_0$ и $\boldsymbol{k}$. Вводя угол ϑ между векторами $\boldsymbol{E}_0$ и $\boldsymbol{k}$, получим:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{8\pi}{cE_0^2}\frac{dI}{d\Omega} = \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \frac{\omega^4}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2} \sin^2\vartheta$$

что находится в полном согласии с результатом задачи 5.127. Интегрированием по углам находим полное сечение рассеяния:

$$\sigma = \frac{8\pi}{3}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \frac{\omega^4}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2}$$

5.3 6 Quantum Theory of Photon Emission and Scattering

Современное понимание строения материи неотъемлемо от осознания того факта, что основа всех явлений природы квантовая из-за квантового характера законов микромира, являющегося фундаментом мироздания. Мы ограничимся в этой главе некоторыми типичными задачами квантовой электродинамики в узком смысле слова, т. е. теорией свободного квантованного электромагнитного поля и его взаимодействия с веществом. Эта «узкая» область достаточно обширна и очень важна с точки зрения ее многочисленных физических и технических приложений. Вещество будет рассматриваться главным образом в полурелятивистском приближении Паули (раздел 6.2), но в разделе 6.3 будет затронуто и несколько сравнительно простых релятивистских задач.

Предполагается, что пользователь книги знаком с основами квантовой механики. Тем не менее, для удобства читателя и большей автономности этой книги в Дополнении 3 авторы сделали попытку кратко изложить без доказательств основные положения квантовой теории. В этом дополнении приведены также некоторые узловые формулы, на которые имеются ссылки в тексте книги.

5.3.1 6.1. The Quantum Theory of the Free Electromagnetic Field

Осцилляторы поля. Будем исходить из гамильтоновой формы уравнений электромагнитного поля в вакууме, рассмотренной в конце раздела 2.3. Там было показано, что поле можно представить в виде эквивалентной механической системы - набора бесконечного числа невзаимодействующих гармонических осцилляторов. Каждому осциллятору соответствует собственное колебание поля в виде плоской волны с определенным волновым вектором k, поляризацией σ и частотой $\omega_k = ck$. Значения волновых векторов согласно (2.145) получаются дискретными, если на векторы поля наложены периодические граничные условия. В дальнейшем для краткости будем обозначать через $s = (\boldsymbol{k}, \sigma)$ индекс, характеризующий тип собственного колебания (моды). Энергия $\mathscr{H}$ и импульс $\boldsymbol{P}$ поля в объеме V выражаются через действительные канонические переменные - координаты Q_s и импульсы P_s осцилляторов поля - по формулам (2.160), (4.128), (4.130):

$$\mathscr{H} = \sum_s \mathscr{H}_s, \quad \boldsymbol{P} = \sum_s \frac{\boldsymbol{k}_s \mathscr{H}_s}{\omega_s}, \quad \text{где} \quad \mathscr{H}_s = \frac{1}{2}\left(P_s^2 + \omega_s^2 Q_s^2\right) \tag{6.1}$$

- функция Гамильтона отдельного осциллятора поля. Квантование электромагнитного поля - это применение квантовой механики к эквивалентной системе невзаимодействующих осцилляторов (впервые квантовую теорию электромагнитного поля развил Дирак (1927), см. [Дирак (1990)])

Фотоны. Решим методами квантовой механики задачу о стационарных состояниях электромагнитного поля, т. е. вычислим возможные значения энергии поля и соответствующие им волновые функции (векторы состояний)' ′ По принципу соответствия составляем на основе классической функции Гамильтона (6.1) квантовомеханический оператор (гамильтониан) электромагнитного поля:

$$\widehat{\mathscr{H}} = \sum_s \widehat{\mathscr{H}_s}, \quad \widehat{\mathscr{H}_s} = \frac{1}{2}\left(\widehat{P}_s^2 + \omega_s^2 \widehat{Q}_s^2\right) \tag{6.2}$$

где операторы $\widehat{Q}_s, \widehat{P}_s$ должны удовлетворять перестановочным соотношениям Гейзенберга для координаты и импульса: $\left[\widehat{Q}_s, \widehat{P}_s\right] = i\hbar$. Поскольку осцилляторы разных мод поля независимы, то полная волновая функция будет представлять собой произведение волновых функций всех осцилляторов: $\Phi = \prod_s \Phi_s$, и задача сводится к решению стационарного уравнения Шредингера

$$\widehat{\mathscr{H}_s}\Phi_s = \mathscr{E}_s \Phi_s \tag{6.3}$$

для одного осциллятора. Это решение получено в Дополнении 3. Уровни энергии осциллятора даются выражением (Д3.61)

$$\mathscr{E}_s = \hbar\omega_s\left(N_s + \frac{1}{2}\right), \quad N_s = 0, 1, \ldots \tag{6.4}$$

а волновые функции в координатном представлении выражаются через полиномы Эрмита согласно (Д3.65), где надо положить $n = N_s, \xi = \sqrt{\omega_s/\hbar}Q_s$.

Полная энергия электромагнитного поля в объеме V представляет собой сумму энергий всех осцилляторов:

$$\mathscr{E}_{\{s\}} = \sum_s \hbar\omega_s\left(N_s + \frac{1}{2}\right) \tag{6.5}$$

Оператор импульса поля $\widehat{\boldsymbol{P}} = \sum_s \boldsymbol{k}_s \widehat{\mathscr{H}_s}/\omega_s$ коммутирует с его гамильтонианом, и импульс поля можно определить одновременно с энергией:

$$\boldsymbol{P}_{\{s\}} = \sum_s \hbar\boldsymbol{k}_s\left(N_s + \frac{1}{2}\right) = \sum_s \hbar\boldsymbol{k}_s N_s \tag{6.6}$$

(последнее равенство следует из изотропии в распределении векторов $\boldsymbol{k}_s$). Таким образом, энергия и импульс каждой моды поля разделены на отдельные порции, соответственно $\hbar\omega_s$ и $\hbar\boldsymbol{k}_s = \hbar\omega_s\boldsymbol{n}_s/c$, величина которых определяется частотой. Эти порции проявляют себя в процессах взаимодействия с другими объектами как частицы с нулевой массой, движущиеся со скоростью света. Впервые они были введены в рассмотрение Планком [2] (1900) для объяснения спектра равновесного электромагнитного излучения, а термин «фотон» для них ввел Эйнштейн (1905).

Основному состоянию поля соответствует отсутствие фотонов во всех модах, $N_s = 0$. При этом импульс поля обрашается в нуль, $\boldsymbol{P}_0 = 0$, но энергия основного состояния (нулевых колебаний осцилляторов) остается конечной,

$$\mathscr{E}_0 = \frac{1}{2}\sum_s \hbar\omega_s \tag{6.7}$$

[01] Состояния, о которых идет речь, часто называют фоковскими по имени выдающегося советского физика-теоретика В. А. Фока (1898-1974), глубоко исследовавшего свойства гильбертова пространства этих состояний.

и, более того, бесконечно большой, так как мод поля бесконечно много и их частоты ничем не ограничены. Появление в теории этой бесконечности еще одна трудность квантовой электродинамики (первая бесконечность, отмеченная в разделах 2.1, 5.4 - бесконечная собственная энергия точечной частицы - тоже сохраняется на квантовом уровне). Наличие нулевых колебаний осцилляторов не вызывает сомнений. Они наблюдаются, в частности, у атомов-осцилляторов в кристаллах при низких температурах. Вакуумные колебания электромагнитного поля приводят к сдвигам атомных уровней энергии (лэмбовский сдвиг, см. задачу 6.18). Наконец, в последнее время появились данные космологического характера о существенном вкладе энергии вакуума в наблюдаемую плотность материи во Вселенной. Поэтому наличие энергии вакуума, по-видимому, можно считать установленным фактом. Но бесконечное значение плотности энергии вакуума несомненно является следствием несовершенства существуюшей теории. К счастью, эта трудность не проявляется, когда речь идет об изменениях энергии электромагнитного поля (например, при испускании и поглощении фотонов).

Представление чисел заполнения и операторы электромагнитного поля. В классической теории векторы электромагнитного поля $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}$ согласно (2.151), (2.153)-(2.154) были представлены в виде разложений по базисным функциям - плоским монохроматическим волнам с определенной поляризацией:

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) = \sum_s \left\{ b_s(t)\mathscr{A}_s(\boldsymbol{r}) + b_s^*(t)\mathscr{A}_s^*(\boldsymbol{r}) \right\}, \quad \text{где} \quad \mathscr{A}_s(\boldsymbol{r}) = e_s\sqrt{\frac{4\pi c^2}{\mathscr{V}}}e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}, \tag{6.8}$$

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = i\sum_s \frac{\omega_s}{c}\left\{ b_s(t)\mathscr{A}_s(\boldsymbol{r}) - b_s^*(t)\mathscr{A}_s^*(\boldsymbol{r}) \right\} \tag{6.9}$$

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t) = i\sum_s \boldsymbol{k}\times\left\{ b_s(t)\mathscr{A}_s(\boldsymbol{r}) - b_s^*(t)\mathscr{A}_s^*(\boldsymbol{r}) \right\} \tag{6.10}$$

Здесь комплексные амплитуды

$$b_s = \frac{1}{2}\left(Q_s + \frac{i}{\omega_s}P_s\right), \quad b_s^* = \frac{1}{2}\left(Q_s - \frac{i}{\omega_s}P_s\right) \tag{6.11}$$

выражаются через действительные канонические переменные Q_s, P_s соотношениями (2.157). В результате квантования канонические переменные и комплексные амплитуды превратились в операторы, действующие на обобщенные координаты поля Q_s. Операторы комплексных амплитуд удобно выразить через операторы понижения и повышения, введенные равенствами (ДЗ.54):

$$b_s(t) \to \widehat{b}_s = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_s}}\widehat{a}_s, \quad b_s^*(t) \to \hat{b}_s^\dagger = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_s}}\widehat{a}_s^\dagger, \quad \left[\widehat{a}_s, \widehat{a}_s^\dagger\right] = 1 \tag{6.12}$$

При этом векторы электромагнитного поля (6.8)-(6.10) также становятся операторами, действующими на обобщенные координаты Q_s поля:

[02] Макс Планк (1858-1957) - выдающийся немецкий физик-теоретик, нобелевский лауреат, основоположник квантовой теории.

$$\widehat{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{r}) = \sum_s \left\{\widehat{a}_s \boldsymbol{A}_s(\boldsymbol{r}) + \widehat{a}_s^\dagger \boldsymbol{A}_s^*(\boldsymbol{r})\right\} \tag{6.13}$$

$$\widehat{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r}) = i\sum_s \frac{\omega_s}{c}\left\{\widehat{a}_s \boldsymbol{A}_s(\boldsymbol{r}) - \widehat{a}_s^\dagger \boldsymbol{A}_s^*(\boldsymbol{r})\right\} \tag{6.14}$$

$$\widehat{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{r}) = i\sum_s \boldsymbol{k}\times\left\{\widehat{a}_s \boldsymbol{A}_s(\boldsymbol{r}) - \widehat{a}_s^\dagger \boldsymbol{A}_s^*(\boldsymbol{r})\right\} \tag{6.15}$$

Пространственные же координаты r выполняют теперь роль параметров, нумерующих точки трехмерного пространства. В представлении Шредингера зависимость комплексных амплитуд от времени после замены их операторами согласно (6.12) исчезает. Базисные функции мод поля (волновые функции фотонов) изменили нормировку и приняли вид

$$\boldsymbol{A}_s(\boldsymbol{r}) = \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_s}}\mathscr{A}_s(\boldsymbol{r}) = e_s\sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{\mathscr{V}\omega_s}}e^{i\boldsymbol{k}_s\cdot\boldsymbol{r}} \tag{6.16}$$

Операторы $\widehat{a}_s^\dagger, \widehat{a}_s$ согласно (ДЗ.63) повышают и понижают на единицу уровень возбуждения осциллятора поля, т. е. (на языке фотонов) рождают и уничтожают один фотон моды s. Поэтому в квантовой электродинамике естественно называть их операторами рождения и уничтожения фотонов. При использовании этих операторов более удобно выбирать в качестве обобщенных координат поля не осцилляторные координаты Q_s, а числа заполнения мод поля фотонами N_s. Если квантовые состояния фотонов s зафиксированы, то задание чисел заполнения определяет фоковское состояние электромагнитного поля с исчерпывающей полнотой:

$$\Phi_{\{N_s\}} \equiv |\{N_s\}\rangle = \prod_s |N_s\rangle\,. \tag{6.17}$$

Числа заполнения являются собственными значениями оператора числа фотонов

$$\widehat{N}_s = \widehat{a}_s^\dagger \widehat{a}_s \tag{6.18}$$

Пользуясь (ДЗ.63), находим:

$$\begin{aligned} \hat{a}_s^\dagger |N_s\rangle &= \sqrt{N_s+1}\,|N_s+1\rangle \\ \widehat{a}\,|N_s\rangle &= \sqrt{N_s}\,|N_s-1\rangle \\ \widehat{N}_s\,|N_s\rangle &= N_s\,|N_s\rangle \end{aligned} \tag{6.19}$$

Сами же векторы состояний мод в представлении чисел заполнения можно записать в виде

$$|N_s\rangle = \Phi_{N_s}(N_s') = \delta_{N_s N_s'} \tag{6.20}$$

Здесь N_s - фиксированное собственное значение числа заполнения моды s, а N_s' - аргумент волновой функции, т. е. произвольное число заполнения этой моды, которое также имеет смысл числа фотонов, но является величиной переменной.

Пример 6.1. Показать, что операторы напряженностей электромагнитного поля (6.14), (6.15) не коммутируют с гамильтонианом и, следовательно, напряженности поля не имеют определенных значений в фоковских состояниях, в том числе и в вакуумном.

Решение. Гамильтониан поля выражается через операторы чисел фотонов с помощью (ДЗ.55) и (6.18):

$$\widehat{\mathscr{H}} = \sum_s \hbar\omega_s \left(\widehat{N}_s + \frac{1}{2}\right) \tag{6.21}$$

Оператор $\widehat{N}_s$ не коммутирует с $\widehat{a}_s, \widehat{a}_s^\dagger$ той же моды (все операторы разных мод коммутируют друг с другом). Поэтому операторы $\widehat{\boldsymbol{A}}, \widehat{\boldsymbol{E}}, \widehat{\boldsymbol{H}}$ не коммутируют с гамильтонианом. Это означает, что напряженности $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}$ не имеют определенных значений в состояниях с определенными числами фотонов и испытывают, в частности, вакуумные флуктуации.

Пример 6.2. Записать одномодовые операторы $\widehat{\mathscr{H}_s}, \widehat{N}_s, \widehat{a}_s, \widehat{a}^\dagger$ в представлении чисел заполнения.

Решение. Числа заполнения дискретны, поэтому искомые операторы примут форму матриц:

$$\begin{gathered} N_{N'N} = \langle N'|\,\widehat{N}|N\rangle = N\delta_{N'N}; \quad \mathscr{H}_{N'N} = \mathscr{E}_N\delta_{N'N} \\ a_{N'N} = \sqrt{N}\delta_{N',N-1}; \quad a^\dagger_{n'n} = \sqrt{N+1}\delta_{N',N+1} \end{gathered} \tag{6.22}$$

где $\mathscr{E}_N$ дается равенством (6.4). Индекс s моды опущен.

Рекомендуемая литература: [Ландау и Лифшиц, Квантовая механика], [Берестецкий и др. (1989)], [Дирак (1990)], [Коэн-Таннуджи и др. (1992)], [Гайтлер (1956)], [Фейнман (2000)], [Ициксон и Зюбер (1984)].

Задачи

6.1. Выразить гамильтониан $\widehat{\mathscr{H}}$ электромагнитного поля через операторы $\widehat{a}^\dagger, \widehat{a}$ рождения и уничтожения фотонов, исходя из классического выражения (2.148) для энергии поля и используя операторы $\widehat{\boldsymbol{E}}, \widehat{\boldsymbol{H}}$.

6.2. Проверить выполнение канонических уравнений Гамильтона для операторов $\widehat{Q}_s, \widehat{P}_s$ в представлениях Шредингера и Гейзенберга, пользуясь гамильтонианом (6.2) и формулами для производной от оператора по времени (ДЗ.34) и (ДЗ.35).

6.3. Показать, что гейзенберговские операторы рождения и уничтожения фотонов зависят от времени по закону

$$\widehat{a}^\dagger(t) = \widehat{a}^\dagger e^{i\omega t}, \quad \widehat{a}(t) = \widehat{a}e^{-i\omega t} \tag{6.23}$$

где в правых частях равенств стоят те же операторы в представлении Шредингера.

6.4. Найти зависимость от времени гейзенберговских операторов $\widehat{Q}(t), \widehat{P}(t)$ гармонического осциллятора.

6.5. Найти следующие средние значения в n-м стационарном состоянии какой-либо из мод поля: а) $\bar{a}, \overline{a^\dagger}$; б) $\bar{P}, \bar{Q}$; в) $\overline{a^2}, \overline{(a^\dagger)^2}$; г) $\overline{\Delta Q^2}\cdot\overline{\Delta P^2}$.

6.6. Решить задачу об энергетическом спектре и стационарных одномодовых состояниях электромагнитного поля в P-представлении.

6.7 Найти средние значения неопределенностей Q и P в n-м состоянии некоторой моды и проверить выполнение соотношения неопределенностей Гейзенберга (ДЗ.23).

6.8. Найти коммутаторы $\left[\widehat{a}^n, \widehat{a}^\dagger\right], \left[\widehat{a}^{\dagger n}, \widehat{a}\right]$, где n - любое натуральное число.

6.9. Доказать операторные соотношения (ДЗ.69). Дифференцирование выполняется формально, как если бы операторы были -числами (не операторами), но с сохранением порядка некоммутирующих операторов $\widehat{a}, \widehat{a}^\dagger$.

6.10*. Доказать, что

$$\left[\widehat{a}^n, \hat{f}\right] = \left(\left(\widehat{a} + \frac{\partial}{\partial \widehat{a}^\dagger}\right)^n - \widehat{a}^n\right)\hat{f}, \quad \left[\widehat{f}, \widehat{a}^{\dagger n}\right] = \left(\left(\widehat{a}^\dagger + \frac{\partial}{\partial \widehat{a}}\right)^n - \widehat{a}^{\dagger n}\right)\hat{f}$$

где $\widehat{f}$ - операторная функция из предыдущей задачи. Рассмотреть, в частности, случай $\widehat{f} = \widehat{a}^l$.

6.11*. Записать операторы векторов поля (6.13)-(6.15) в представлении Гейзенберга. Показать, что уравнения движения для операторов $\widehat{\boldsymbol{E}}, \widehat{\boldsymbol{H}}$ сводятся к уравнениям Максвелла.

УкАзАниЕ. Использовать результат задачи 6.4 и формулу (ДЗ.35).

6.12*. Записать коммутационные соотношения для операторов компонент электромагнитного поля в представлении Гейзенберга

$$\left[\widehat{E}_\alpha(\boldsymbol{r}_1, t_1), \widehat{E}_\beta(\boldsymbol{r}_2, t_2)\right], \left[\widehat{H}_\alpha(\boldsymbol{r}_1, t_1), \widehat{H}_\beta(\boldsymbol{r}_2, t_2)\right], \quad \left[\widehat{E}_\alpha(\boldsymbol{r}_1, t_1), \widehat{H}_\beta(\boldsymbol{r}_2, t_2)\right]$$

Какие выводы можно сделать из полученных соотношений о возможности одновременного наблюдения электромагнитного поля в разных пространственно-временных точках?

УКАзАНиЕ. Для суммирования по поляризациям использовать формулу (2.165).

6.13. Показать, что гейзенберговские операторы $\widehat{E}_\alpha(\boldsymbol{r}_1, t_1)$ и $\widehat{A}_\beta(\boldsymbol{r}_2, t_2)$ не коммутируют, даже если точки 1 и 2 разделены пространственноподобным интервалом. Согласуется ли это с принципом причинности?

6.14. Выразить оператор $\widehat{\boldsymbol{P}}$ импульса электромагнитного поля через операторы уничтожения и рождения фотонов, исходя из его классического выражения (4.130) через напряженности $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}$.

6.15. Вычислить среднеквадратичные флуктуации напряженностей поля $\overline{\Delta E^2}, \overline{\Delta H^2}$ в вакуумном состоянии.

6.16*. Пусть прибор, измеряющий вакуумные флуктуации электромагнитного поля, регистрирует их из ограниченной пространственно-временной области, усредняя сигналы по этой области с весовой функцией $g(\boldsymbol{r}, t)$, удовлетворяющей условиям

$$g(\boldsymbol{r}, t) \geqslant 0, \quad \int g(\boldsymbol{r}, t) d^3 r dt = 1$$

Интегрирование производится по бесконечному четырехмерному пространству. Вычислить среднеквадратичные вакуумные флуктуации электрического и магнитного полей, которые измерит такой прибор, приняв в качестве усредняющей функции $g(\boldsymbol{r}, t) = Ce^{-r^2/2l^2}\delta(t), C$ - постоянная нормировки, $l = \text{const}$.

6.17*. Параллельные незаряженные металлические пластинки размером $L \times L$ находятся в вакууме на расстоянии z друг от друга. Оценить по порядку величины силу, действующую между ними, исходя из представления, что она вызвана вакуумными флуктуациями электромагнитного поля в пространстве между пластинами (эффект Казимира). Основная роль должна принадлежать флуктуациям с длинами волн порядка расстояния между пластинами.

6.18**. Оценить по порядку величины сдвиг между $2s$ - и $2p$-уровнями в атоме водорода (лэмбовский сдвиг), рассматривая его как результат возмущения электронных состояний вакуумными флуктуациями электромагнитного поля.

6.19**. Произвести разделение полного момента импульса свободного электромагнитного поля J на две части: на орбитальный момент L относительно точки с радиусом-вектором r_0 и спиновый момент $\boldsymbol{S}$, не зависящий
от выбора начала координат. Записать операторы орбитального и спинового моментов через операторы векторного потенциала и электрического поля.

6.20*. Выразить оператор спинового момента $\widehat{\boldsymbol{S}}$ свободного электромагнитного поля через операторы рождения и уничтожения фотонов. Для каких квантовых состояний с определенным числом фотонов спиновый оператор диагонализуется? Записать для этих состояний спин поля через числа фотонов.
6.21*. Выразить интенсивность излучения $I_\sigma(\omega, \boldsymbol{n})$, имеющего частоту ω, поляризацию σ и направление $\boldsymbol{n}$, через число квантов $N_{\boldsymbol{k}\sigma}$, где $\boldsymbol{k} = \omega\boldsymbol{n}/c$.

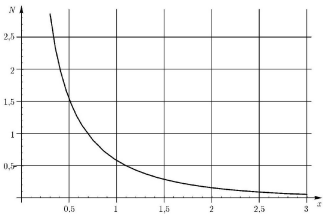


Рис. 6.1
Состояния статистического равновесия электромагнитного поля возникают, если излучение находится в динамическом равновесии с равновесным веществом (например, с непроницаемыми для излучения стенками полости, имеющими некоторую определенную температуру T). При этом устанавливаются некоторые средние значения чисел заполнения N_s фоковских состояний мод электромагнитного поля.

Пример 6.3. Вывести распределение Планка, т. е. найти средние по ансамблю Гиббса числа заполнения мод $s = (\boldsymbol{k}, \sigma)$ электромагнитного поля фотонами [3].

Решение. Отдельные моды (осцилляторы) электромагнитного поля не взаимодействуют между собой, поэтому каждую из мод можно рассматривать как независимую термодинамическую систему, взаимодействующую лишшь с термостатом при температуре T. Роль термостата играет равновесное вещество, излучающее, поглощающее и рассеивающее фотоны. Применяя распределение Гиббса (ДЗ.44), записываем вероятность наличия N_s фотонов в данной моде:

$$w_{N_s} = \frac{1}{Z_s}\exp\left(-\frac{\mathscr{E}_s}{T}\right), \quad \text{где} \quad \mathscr{E}_s = \hbar\omega\left(N_s + \frac{1}{2}\right) \tag{1}$$

- энергия моды согласно (6.4). Статистическая сумма моды согласно (ДЗ.45) имеет значение

$$Z_s = \sum_{N_s=0}^{\infty}\exp\left(-\frac{\mathscr{E}_s}{T}\right) = e^{-\alpha/2}\sum_{n=0}^{\infty}e^{-\alpha n} = \frac{e^{-\alpha/2}}{1-e^{-\alpha}}, \quad \text{где} \quad \alpha = \frac{\hbar\omega_s}{T} \tag{2}$$

(напомним, что температура T измеряется в энергетических единицах).
С помощью вероятности (1) находим среднее число фотонов, приходящееся на рассматриваемый осциллятор поля:

$$\bar{N}_s = \sum_{N_s=0}^{\infty}N_s w_{N_s} = \left(1-e^{-\alpha}\right)\left(-\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)\sum_{n=0}^{\infty}e^{-\alpha n} = \frac{1}{e^{\alpha}-1} \tag{3}$$

Итак, распределение Планка средних чисел фотонов по частотам имеет вид

$$\bar{N}_s = \frac{1}{\exp\left(\hbar\omega_s/T\right)-1} \tag{6.24}$$

(см. рис. 6.1; по горизонтальной оси отложена безразмерная величина $x = \hbar\omega/T$). Число квантов при заданной температуре растет с уменьшением

частоты неограниченно при $\omega \to 0$, но энергия, приходящаяся на любой конечный интервал $\Delta\omega$, остается конечной (см. задачу 6.22). Распределение Планка является частным случаем распределения Бозе-Эйнштейна для невзаимодействующих частиц с целыми спинами.

Рекомендуемая литература: [Ландау и Лифшиц, Статистическая физика], [Румер и Рывкин (1977)].

Задачи

6.22. Вычислить среднюю энергию, приходящуюся на один осциллятор поля равновесного электромагнитного излучения.

6.23 Вычислить спектральное распределение интенсивности и плотности энергии равновесного излучения, основываясь на распределении Планка. Произвести анализ частных случаев. Объяснить природу «ультрафиолетовой катастрофы» - невозможность получить спектральную плотность излучения при высоких частотах исходя из классических представлений. □

6.24. Показать, что полная интенсивность излучения с единицы площади поверхности абсолютно черного тела (испускающего равновесное электромагнитное излучение) выражается формулой Стефана-Больцмана

$$I = \int I(\omega)\cos\theta d\Omega d\omega = \sigma T^4, \quad \text{где} \quad \sigma = \frac{\pi^2 k_B^4}{60\hbar^3 c^3} \approx 5,67 \times 10^{-5} / \left(\text{с}^3\ \text{К}^4\right) \tag{6.25}$$

- постоянная Стефана-Больцмана, T - температура в кельвинах, угол θ отсчитывается от нормали к поверхности и интегрирование по телесному углу ведется в пределах полусферы. Полная энергия излучения в объеме $\mathscr{V}$ (т. е. внутренняя энергия) дается выражением

$$\mathscr{E} = \frac{4\sigma}{c} T^4 \mathscr{V} \tag{6.26}$$

УказАниЕ. Использовать табличный интеграл

$$\int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^4}{15}$$

6.25. Для равновесного излучения найти распределение $\rho(\lambda)$ плотности энергии излучения по длинам волн λ и сформулировать закон смещения Вина для такого распределения, т. е. найти связь между температурой и длиной волны, на которую приходится максимум излучения.

6.26. Построить функцию распределения Планка, полученную при решении задачи 6.23, в зависимости от отношений λ/λ_m и λ/λ'_m, где λ_m, λ'_m - длины волны, отвечающие

[03] Спектр равновесного электромагнитного излучения, т. е. распределение энергии излучения по частотам, был подробно исследован опытным путем в конце 19 -го века (форма спектра вычисляется в задаче 6.23 ниже). Этот спектр совершенно не поддавался описанию методами классической электродинамики и классической статистической физики. Трудности в объяснении свойств равновесного электромагнитного излучения и побудили М. Планка ввести в 1900 г. понятие кванта действия $\hbar$ и кванта электромагнитного поля с энергией $\hbar\omega$. Этот год можно считать годом рождения всей квантовой физики, в том числе и квантовой электродинамики.

максимуму функции распределения по частотам и по длинам волн. Найти λ_m, λ'_m для следуюших космических объектов: а) реликтовое излучение ($T = 3$ K), б) поверхность Земли (300 K), μ-Цефея, так называемая «гранатовая звезда» (2000 K), поверхность Солнца (6000 K), поверхность Сириуса (11000 K), поверхность звезды β-Центавра (22500 K), центральная звезда планетарной туманности Лиры (75000 K), поверхность нейтронной звезды (250000 K), внутренние области обычных звезд типа Солнца (25×10^6 K).

6.27. Определить свободную энергию F, давление $\boldsymbol{P}$, энтропию S и теплоемкость C_V при постоянном объеме равновесного излучения в объеме $\mathscr{V}$ при температуре T.

УказаниЕ. Необходимые термодинамические соотношения имеются в приложении 3 (формулы (Д3.46), (Д3.46')).

Когерентные состояния. При теоретическом описании электромагнитного поля важное значение имеет выбор базиса состояний. Для описания процессов, происходящих с участием небольшого числа фотонов и могущих быть описанными методами теории возмущений, наиболее удобен базис фоковских состояний, которым соответствует задание определенного числа фотонов N_s в каждой моде. При этом фазы отдельных состояний остаются неопределенными. Такие явления, как когерентность, в которых большую роль играют фазовые соотношения между модами, удобнее описывать, используя когерентные (или глауберовские) состояния (см. [Глаубер (1972)], хотя впервые такие состояния рассматривались еще Шредингером в 1926 г.). В этом случае наиболее прост переход к квазиклассическому описанию интенсивных лазерных пучков.

Когерентные состояния данной моды s, обозначаемые в дальнейшем как $|z_s\rangle$, по определению являются собственными состояниями неэрмитова оператора уничтожения фотона $\widehat{a}_s$:

$$\widehat{a}\,|z_s\rangle = z_s\,|z_s\rangle \tag{6.27}$$

Собственным значением z_s неэрмитова оператора может быть любое комплексное число. Когерентными состояниями можно описывать не только электромагнитное поле, но и другие квантовые системы (см., например, [Малкин и Манько (1979)]). Ниже на нескольких примерах и в задачах мы проиллюстрируем их основные свойства и некоторые применения.

Пример 6.4. Найти собственные состояния оператора уничтожения фотона (т.е. когерентные состояния) в виде разложсения их по n-фотонным фоковским состояниям. Нормировать их на единицу. Какова вероятность зафиксировать n фотонов в данной моде, находящейся в когерентном состоянии?

Решение. Умножим скалярно обе части уравнения (6.27) на $\langle n|$, опустив для краткости индекс моды s:

$$\langle n|\widehat{a}|z\rangle = \langle z|\widehat{a}^\dagger|n\rangle^* = \sqrt{n+1}\langle n+1|z\rangle = z\langle n|z\rangle$$

Последнее равенство имеет характер рекуррентного соотношения, позволяющего выразить все $\langle n|z\rangle$ через $\langle 0|z\rangle$:

$$\langle n|z\rangle = \frac{z^n}{\sqrt{n!}}\langle 0|z\rangle \tag{6.28}$$

Из условия нормировки $\langle z|z\rangle = 1$ и предыдущего равенства находим

$$\langle z|z\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}\langle z|n\rangle\langle n|z\rangle = |\langle 0|z\rangle|^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z^*z)^n}{n!} = |\langle 0|z\rangle|^2 e^{|z|^2} = 1$$

Отсюда с точностью до фазового множителя получаем $\langle 0|z\rangle = \exp\left(-|z|^2/2\right)$ и находим нормированный на единицу собственный вектор когерентного состояния:

$$|z\rangle = \exp\left(-|z|^2/2\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \tag{6.29}$$

Формула (6.29) позволяет вычислить вероятность регистрации n фотонов при измерении поля, находящегося в когерентном состоянии. В соответствии с правилами квантовой механики эта вероятность равна квадрату модуля коэффициента разложения функции когерентного состояния по фоковским волновым функциям, т. е.

$$w(n) = |\langle n|z\rangle|^2 = \frac{|z|^{2n}}{n!} \exp\left(-|z|^2\right) \tag{6.30}$$

Это - распределение Пуассона со средним значением числа фотонов

$$\langle n\rangle = |z|^2 \tag{6.31}$$

приходящихся на данную моду.

Пример 6.5. Записать вектор $|n\rangle$ фоковского состояния в виде разложения по когерентным состояниям $|z\rangle$, рассматривая z как комплексный параметр с непрерывным спектром.

Решение. Умножим обе части (6.29) на $z^{*m} \exp\left(-|z|^2/2\right)/(\pi\sqrt{m!})$ и проинтегрируем по всем значениям z, т. е. по $d^2z = dz'dz'' = rdrd\varphi$, где z', z'' - действительная и мнимая части комплексного числа z, r и φ - его модуль и аргумент (фаза). В результате в правой части (6.29) получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\pi\sqrt{m!n!}} |n\rangle \int_0^{\infty} rdre^{-r^2} r^{m+n} \int_0^{2\pi} d\varphi e^{i(n-m)\varphi} = |m\rangle$$

и, таким образом,

$$|n\rangle = \frac{1}{\pi} \int \exp\left(-\frac{1}{2}|z|^2\right) \frac{z^{*n}}{\sqrt{n!}} |z\rangle d^2z \tag{6.32}$$

6.28. Показать, что векторы когерентных состояний неортогональны при $z \neq z'$:

$$\langle z|z'\rangle = e^{z^{z^*}z' - |z|^2/2 - |z'|^2/2} \tag{6.33}$$

$$|\langle z|z'\rangle|^2 = e^{-|z-z'|^2} \tag{6.34}$$

Показать также, что вместо условия полноты (ДЗ.25) векторы когерентных состояний удовлетворяют условию «переполненности», т. е. возникает множитель $\pi > 1$:

$$\sum_z |z\rangle\langle z| \equiv \int |z\rangle\langle z| d^2z = \pi \sum_n |n\rangle\langle n| = \pi \cdot \hat{1} \tag{6.35}$$

6.29. Показать, что не существует нормированных собственных функций $|\beta\rangle$ оператора рождения $\widehat{a}^{\dagger}$, соответствующих конечным собственным значениям β.

6.30. Исследовать временную эволюцию когерентных состояний. Показать, что с течением времени когерентное состояние остается когерентным, а соответствующая комплексная амплитуда описывает в комплексной плоскости окружность. Период вращения совпадает с частотой моды.

6.31. Найти вид волновой функции когерентного состояния в координатном

представлении. Показать, что когерентное состояние представляет собой волновой пакет гауссовой формы, совершающий периодическое движение, напоминающее движение классической частицы в потенциале гармонического осциллятора.

6.32. Показать, что когерентные состояния могут быть получены при действии оператора сдвига

$$\widehat{D}(\alpha) = \exp\left(\alpha\widehat{a}^{\dagger} - \alpha^{*}\widehat{a}\right) \tag{6.36}$$

на вакуумное состояние $|vac\rangle \equiv |0\rangle$, т. е. на состояние с числом заполнения фотонов равным нулю.

6.33. Показать, что когерентное состояние характеризуется минимальной неопределенностью значений координаты и импульса осциллятора поля, а именно, что $\langle\Delta Q^2\rangle\langle\Delta P^2\rangle = \hbar^2/4$, причем для безразмерных квадратурных [4] компонент

$$\widehat{X}_1 = \sqrt{\omega/\hbar}\widehat{Q} \equiv \xi \quad \widehat{X}_2 = 1/\sqrt{\hbar\omega}\widehat{P} = -i\partial/\partial\xi \tag{6.37}$$

выполняется более простое соотношение $\langle\Delta X_1\rangle^2 = \langle\Delta X_2^2\rangle = 1/2$.

6.34. Вычислить дисперсии координаты и импульса свободного осциллятора поля некоторой моды излучения для произвольного начального состояния. Показать, что дисперсии $D_1(t), \mathbb{D}_2(t)$ безразмерных переменных (квадратурных компонент, определенных в условии предыдущей задачи) в общем случае осциллируют в противофазе с частотой, равной удвоенной частоте моды, а их сумма является интегралом движения. Показать, что для фоковских и когерентных состояний амплитуда осцилляций равна нулю.

УКАЗАНИЕ. Использовать операторы координаты и импульса осциллятора в гейзенберговском представлении (см. ответ к задаче 6.4).

6.35. Определить дисперсию числа фотонов в когерентном состоянии отдельной моды электромагнитного поля.

Разложение векторов состояний и операторов по когерентным состояниям. Выше было показано, что волновые функции когерентных состояний образуют полную (и даже переполненную) систему, которую можно

использовать для разложения по ней векторов состояний и операторов:

$$

$$|f\rangle = \frac{1}{\pi}\int \langle\alpha|f\rangle|\alpha\rangle d^2\alpha \tag{6.38}$$

$$\widehat{O} = \frac{1}{\pi^2}\iint d^2\alpha d^2\beta\langle\alpha|\widehat{O}|\beta\rangle|\alpha\rangle\langle\beta| \tag{6.39}$$

$$

Аналогичное разложение можно получить и для оператора плотности, но более удобным является диагональное представление матрицы плотности

$$\widehat{\rho} = \int d^2\alpha \mathscr{P}(\alpha)|\alpha\rangle\langle\alpha| \tag{6.40}$$

Оно получило название представления Глаубера-Сударшана. Уеловие нормировки $Sp(\hat{\rho}) = 1$ и эрмитовости оператора плотности приводят к тому, что функция $\mathscr{P}$ действительна и нормирована на единицу:

[04] Квадратурные компоненты характеризуются тем, что при колебаниях разность их фаз составляет $\pi/2$.

$$\int d^2\alpha \mathscr{P}(\alpha) = 1, \quad \mathscr{P}(\alpha)^* = \mathscr{P}(\alpha) \tag{6.41}$$

Однако, величина $\mathscr{P}(\alpha)$ может принимать отрицательные значения, к тому же она может быть гораздо более сингулярной, чем, например, дельта-функция Дирака. По этой причине она не может рассматриваться как вероятность в классическом понимании и ее называют квазивероятностью. По своим свойствам эта величина сходна с матрицей плотности в представлении Вигнера, см. [Ландау и Лифшиц, Статистическая физика], & 5. С ее помощью легко вычислять средние от любых нормально упорядоченных операторов (в которых все операторы рождения каждой моды стоят левее операторов уничтожения фотонов), например

$$Sp\left(\widehat{\rho}\widehat{a}^{+n}\widehat{a}^m\right) = \int d^2\alpha \mathscr{P}(\alpha)\alpha^{*n}\alpha^m$$

При записи этого соотношения было использовано равенство $\widehat{a}^n|\alpha\rangle = \alpha^n|\alpha$ и сопряженное равенство $\langle\alpha|\widehat{a}^{\dagger n} = \langle\alpha|\alpha^{*n}$.

Квазивероятность $\mathscr{P}(\alpha)$ не может быть измерена в эксперименте, поскольку вещественная и мнимая части комплексной амплитуды α являются средними значениями некоммутирующих операторов $\left(\widehat{a}+\widehat{a}^\dagger\right)/2$ и $\left(\widehat{a}-\widehat{a}^\dagger\right)/2i$, и не имеют одновременно определенных значений. Но во многих конкретных случаях удается сопоставить оператору плотности соответствующую квазивероятность и построить для него разложение (6.40).

Пример 6.6. Воспользовавшись соотношением (6.33) для когерентных состояний, показать, что формулу обращения соотношения (6.40), позволяющую построить для заданного оператора плотности $\widehat{\rho}$ квазивероятность Глаубера - Сударшана, можно записать в виде

$$\mathscr{P}(z)e^{-|z|^2} = \frac{1}{\pi^2}\int e^{|u|^2}\langle -u|\hat{\rho}|u\rangle e^{u^*z-uz^*}d^2u \tag{6.42}$$

Решение. Умножив равенство (6.40) слева на $\langle -u|$ и справа на $|u\rangle$, получим

$$\langle -u|\widehat{\rho}|u\rangle = \int \mathscr{P}(z)\langle -u|z\rangle\langle z|u\rangle d^2z \tag{1}$$

Использовав под интегралом для матричных элементов когерентных состояний формулу (6.33), находим

$$\langle -u|\widehat{\rho}|u\rangle = e^{-|u|^2}\int \mathscr{P}(z)e^{-|z|^2}e^{uz^*-u^*z}d^2z \tag{2}$$

Последнее равенство можно рассматривать как двумерное преобразование Фурье, что становится очевидным, если комплексные переменные u, z выразить через действительные переменные: $u = p + iq, z = P + iQ$, $uz^* - u^*z = 2i(qP - pQ), d^2z = dPdQ$. Обращая преобразование Фурье, получаем (6.42). Во многих случаях сходимость интеграла (6.42) в классическом смысле отсутствует. Тогда его нужно рассматривать как обобщенную функцию z (например, он может представлять производную некоторого порядка от дельта-функции).

Вместо сингулярных в общем случае квазивероятностей, можно рассматривать их двумерный фурье-образ

$$\theta\left[\kappa,\kappa^*\right] = \mathrm{Sp}\left(\widehat{\rho}\exp\left(\kappa\widehat{a}^\dagger\right)\exp\left(-\kappa^*\widehat{a}\right)\right) = \int d^2\alpha\mathscr{P}(\alpha)\exp\left(\kappa\alpha^* - \kappa^*\alpha\right) \tag{6.43}$$

который называется нормальной характеристической функцией и является обычной (необобщенной) функцией комплексных параметров κ и κ^*.

6.36. Найти функцию распределения квазивероятности Глаубера-Сударшана $\mathscr{P}(\alpha)$ для случая, когда оператор плотности может быть представлен в виде $\widehat{\rho} = \sum\limits_{n,m} C_{n,m}\widehat{a}^n\widehat{a}^{\dagger m}$.

6.37. Пользуясь изложенным в примере 6.6 методом определения квазивероятности, вычислить $\mathscr{P}(z)$ для некоторой моды равновесного электромагнитного излучения. Показать,что квазивероятность в данном случае
описывается распределением Гаусса с полушириной, определяемой средним числом $\bar{n}$ фотонов в моде и с нулевым средним значением z:

$$\mathscr{P}(z) = \frac{1}{\pi\bar{n}} e^{-|z|^2/\bar{n}} \tag{6.44}$$

6.38*. Определить нормальную характеристическую функцию (6.43) и матрицу плотности в фоковском представлении для состояния, описываемого квазивероятностью $\mathscr{P}(\alpha) = \delta\left(|\alpha| - |\alpha_0|\right)/2\pi|\alpha|$ (состояние с фиксированной амплитудой и однородным распределением по фазе - модель идеального лазерного излучения).

6.39. Определить нормальную характеристическую функцию и квазивероятность $\mathscr{P}(\alpha)$ для состояния, представляющего суперпозицию независимых гауссова (хаотического) и когерентного полей $|\alpha_0\rangle$.

6.40. Доказать, что m-квантовый переход в поле одномодового равновесного теплового излучения в m ! раз более вероятен, чем в когерентном одномодовом поле с тем же средним числом фотонов в моде.

УКАзАние. Вероятность m-фотонного процесса пропорциональна нормально упорядоченной корреляционной функции $G^{m,m} = \left\langle \widehat{a}^{\dagger m}\widehat{a}^m \right\rangle$.

Сжатые состояния. Рассмотренное выше когерентное излучение характеризуется минимальной неопределенностью координаты и импульса осциллятора поля (см. соотношение неопределенностей (Д3.32)). Причем, как следует из решения задачи 6.34 дисперсии координаты и импульса не изменяются с течением времени и равны соответственно $\langle \Delta Q^2 \rangle = \hbar/2\omega$ и $\langle \Delta P^2 \rangle = \hbar\omega/2$. В последнее время большой интерес вызывают сжатые состояния, которые характеризуются тем, что дисперсия одной из величин - координаты или импульса меньше приведенных выше величин. При этом, разумеется, неопределенность другой величины должна соответственно увеличиться. Если произведение дисперсий равно $\hbar^2/16$ (оно, в силу соотношения неопределенностей, разумеется, не может стать меньше), то такие состояния называют идеальными сжатыми состояниям.

Сжатые состояния (обозначим их $|\mu, \nu, \beta\rangle$) определяются как собственные состояния оператора

$$\widehat{b} = \mu\widehat{a} + \nu\widehat{a}^\dagger. \tag{6.45}$$

Будем считать, что комплексные параметры μ и ν удовлетворяют соотношению $|\mu|^2 - |\nu|^2 = 1$. Это приводит к коммутационному соотношению $\left[\widehat{b}, \widehat{b}^\dagger\right] = 1$ для операторов.

Покажем, что для сжатых состояний флуктуации квадратурных компонент неодинаковы и можно добиться подавления флуктуаций одной из них при возрастании другой. Используем операторы $\widehat{X}_1$ и $\widehat{X}_2$, введенные равенствами (6.37) и совпадающие с точностью до множителей с операторами координаты и импульса осциллятора:

$$\widehat{X}_1 = \left(\widehat{a} + \widehat{a}^\dagger\right)/2, \quad \widehat{X}_2 = \left(\widehat{a} - \widehat{a}^\dagger\right)/2i \tag{6.46}$$

Вследствие коммутационного соотношения $\left[\widehat{X}_1, \widehat{X}_2\right] = i/2$ выполняется следующее соотношение неопределенностей:

$$\left\langle \Delta\widehat{X}_1^2 \right\rangle \left\langle \Delta\widehat{X}_2^2 \right\rangle \geqslant 1/16 \tag{6.47}$$

В то же время дисперсии каждой из квадратурных компонент имеют вид

$$\left\langle \Delta\widehat{X}_1^2 \right\rangle \equiv \langle \mu,\nu,\beta|\Delta\widehat{X}_1^2|\mu,\nu,\beta\rangle = \frac{|\mu-\nu|}{4} \tag{6.48}$$

$$\left\langle \Delta\widehat{X}_2^2 \right\rangle \equiv \langle \mu,\nu,\beta|\Delta\widehat{X}_1^2|\mu,\nu,\beta\rangle = \frac{|\mu+\nu|}{4} \tag{6.49}$$

откуда видно, что при выполнении условия $|\mu-\nu| < 1$ флуктуации первой квадратурной компоненты подавлены, а второй усилены - из-за требования $|\mu|^2 - |\nu|^2 = 1$. При другом выборе фаз комплексных чисел μ и ν можно добиться подавления флуктуаций другой компоненты.

Сжатые состояния не обладают классическим аналогом. Для них, например, нельзя ввести квазивероятность $\mathscr{P}$, которая была бы всюду положительно определенной величиной.

Пример 6.7. Доказать последнее утверждение: для сжатого состояния квазивероятность $\mathscr{P}(\alpha)$ при некоторых значениях α отрицательна.

Решение. Чтобы в этом убедиться, достаточно написать среднее $\langle \mu,\nu,\beta|\Delta\widehat{X}_1^2|\mu,\nu,\beta\rangle$, выраженное через когерентные состояния, сведя его к среднему от нормально упорядоченных операторов:

$$\langle \mu,\nu,\beta|\Delta\widehat{X}_{1(2)}^2|\mu,\nu,\beta\rangle = \langle \mu,\nu,\beta|\widehat{\mathcal{N}}\left(\Delta\widehat{X}_{1(2)}\right)^2|\mu,\nu,\beta\rangle + 1/4$$

$$\langle \mu,\nu,\beta|\widehat{\mathcal{N}}\left(\Delta\widehat{X}_{1(2)}\right)^2|\mu,\nu,\beta\rangle = \left(\pm\left(\left\langle\widehat{a}^2\right\rangle - \langle\widehat{a}\rangle^2\right) + \left\langle\widehat{a}^\dagger\widehat{a}\right\rangle - \left\langle\widehat{a}^\dagger\right\rangle\langle\widehat{a}\rangle + \text{ к. с. }\right)/4$$

где $\widehat{\mathcal{N}}$-оператор нормального упорядочения, к. с. обозначает комплексно сопряженную величину.

Для поля в когерентном состоянии средние нормально упорядоченных операторов флуктуаций квадратурных компонент равны нулю, а для сжатых состояний одно из средних отрицательно. Это означает, что для сжатой i-й компоненты выполняется неравенство

$$\langle \mu,\nu,\beta|\widehat{\mathcal{N}}\left(\Delta\widehat{X}_i\right)^2|\mu,\nu,\beta\rangle = \int \mathscr{P}(\alpha)\left(\alpha+\alpha^*-\langle\alpha\rangle-\langle\alpha^*\rangle\right)^2 d^2\alpha < 0$$

Это неравенство может быть выполнено, если только в некоторой области комплексной α-плоскости квазивероятность $\mathscr{P}$ отрицательна.

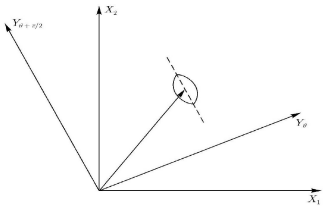


Рис. 6.2

Рассмотрим более подробно вопрос о влиянии фаз комплексных чисел μ и ν на характер сжатия. Введем понятие фазы сжатия. Для этого представим параметры μ и ν в виде

$$\mu = \coth r; \quad \nu = \operatorname{sh} r \exp(2i\vartheta) \tag{6.50}$$

а сжатое состояние будем обозначать для краткости следующим образом: $|\gamma\beta\rangle \equiv \left|\mathrm{ch}\, r, \mathrm{sh}\, re^{2i\vartheta}, \beta\right\rangle$, где введен параметр сжатия $\gamma = re^{2i\vartheta}$. При такой параметризации условие $|\mu|^2 - |\nu|^2 = 1$ выполняется автоматически, дисперсия квадратурной компоненты X_1 будет подавлена, если $r \to \infty$
при $\exp(i\vartheta) = 1$, а X_2 при $\exp(i\vartheta) = -1$. Если фаза ϑ не удовлетворяет ни одному из этих условий, то вместо квадратурных компонент X_1 и X_2 можно ввести две другие компоненты,

$$Y_\vartheta = \left(\widehat{a}e^{-i\vartheta} + \widehat{a}^\dagger e^{i\vartheta}\right)/2, \quad Y_{\vartheta+\pi/2} = \left(\widehat{a}e^{-i\vartheta} - \widehat{a}^\dagger e^{i\vartheta}\right)/2, \tag{6.51}$$

дисперсии которых будут удовлетворять следующим соотношениям:

$$\left\langle \Delta\widehat{Y}_\vartheta^2 \right\rangle = \frac{\exp(-2r)}{4}, \quad \left\langle \Delta\widehat{Y}_{\vartheta+\pi/2}^2 \right\rangle = \frac{\exp(2r)}{4} \tag{6.52}$$

Модуль параметра сжатия γ определяет степень подавления флуктуаций одной из компонент (и усиление другой), а фаза - ориентацию осей, которым соответствует максимальное сжатие. Последнее проиллюстрировано на рисунке 6.2 .

На этом рисунке условно изображена область комплексной α плоскости, в которой плотность распределения $\langle\alpha|\widehat{\rho}|\alpha\rangle$ существенно отлична от нуля, т. е. представляет собой область неопределенности комплексной амплитуды. Размер области неопределенности не зависит от амплитуды поля - явление сжатия может наблюдаться как для слабых, так и для сильных полсй. Замстим, что когсрснтному состоянию на такой плоскости будст соответствовать круг неопределенности с центром в точке α, радиус которого от величины α не зависит. Когерентное состояние может рассматриваться как частный случай идеальных сжатых состояний: полученные в этом параграфе формулы при $\nu = 1$ и $\mu = 0$ переходят в соответствующие формулы для когерентных состояний.

Рассмотренный рисунок позволяет качественно проанализировать возможности подавления флуктуаций при регистрации сжатого света. Физически очевидно (это можно показать в рамках аккуратного расчета), что в измерениях, в которых регистрируется интенсивность света, существенное влияние на точность оказывают флуктуации модуля комплексной амплитуды. Поэтому для эллипсов сжатия, малая полуось которых ориентирована в радиальном направлении, эти флуктуации будут подавлены. Для фазовых измерений, например, с помощью интерферометров более предпочтительной является ситуация, когда эллипс вытянут в радиальном направлении.

В связи с возможностью понижать пумы при измерениях, сжатые состояния обладают огромной потенциальной областью практического применения. Сложности связаны с возможностью создания источников такого света, но и в этом направлении уже сделаны обнадеживающие шаги.

6.41. Показать, что сжатые состояния могут быть получены из вакуумного состояния в результате последовательного действия операторов
сдвига (см. (6.36)) и сжатия:

$$|\mu, \nu, \beta\rangle = |r, \vartheta, \beta\rangle = |\gamma, \beta\rangle = \widehat{S}\widehat{D}|vac\rangle$$

где $\widehat{D} = \widehat{D}(\beta) = \exp\left(\beta\widehat{a}^\dagger - \beta^*\widehat{a}\right)$ - оператор сдвига (смещения), определенный в задаче 6.32, а $\widehat{S} = \widehat{S}(\gamma) = \exp\left(\gamma^*\widehat{a}^2/2 - \gamma\widehat{a}^{\dagger 2}/2\right)$ - оператор сжатия; $\gamma = re^{2i\vartheta}$ (см. (6.50)). Найти связь комплексных параметров μ и ν, характеризующих сжатое состояние в общем случае, с парой вещественных параметров r, ϑ и комплексным параметром γ[5]

6.42. Получить разложение сжатых состояний по базису когерентных состояний. Показать, что в частном случае сжатых состояний с $|\mu|^2 - |\nu|^2 = 1$ коэффициенты разложения могут быть найдены по формуле

$$\langle\alpha|\mu,\nu,\beta\rangle = \frac{1}{\sqrt{\mu}}\exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}-\frac{|\beta|^2}{2}-\frac{\nu\alpha^{*2}}{2\mu}+\frac{\nu^*\beta^2}{2\mu}+\frac{\alpha^*\beta}{\mu}\right)$$

6.43. Получить разложение сжатых состояний по базису фоковских n-фотонных состояний. Показать, что коэффициенты разложения могут быть найдены по формуле

$$\langle n|\mu,\nu,\beta\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!\mu}}\left(\frac{\nu}{2\mu}\right)^{n/2}\exp\left(-\frac{|\beta|^2}{2}-\frac{\nu^*\beta^2}{2\mu}\right)H_n\left(\frac{\beta}{\sqrt{2\mu\nu}}\right)$$

где $H_n(x)$ - полиномы Эрмита.

6.44. Показать, что нормальную характеристическую функцию идеального сжатого одномодового излучения (6.43) можно вычислить по следующей формуле

$$\theta\left[\kappa,\kappa^*\right] = \exp\left(\kappa\alpha^*-\kappa^*\alpha-\kappa\kappa^*\,\mathrm{sh}^2\,r-\frac{\kappa^2}{4}e^{-2i\vartheta}\,\mathrm{sh}\,2r-\frac{\kappa^{*2}}{4}e^{2i\vartheta}\,\mathrm{sh}\,2r\right)$$

При этом сжатое состояние описывается следующими параметрами: $\mu = \mathrm{ch}\,r, \nu = e^{2i\vartheta}\,\mathrm{sh}\,r$ и $\gamma = re^{2i\vartheta}$, - а амплитуда β связана с амплитудой α соотношением $\beta = \mu\alpha+\nu\alpha^*$.

6.45. Показать, что для равновесного теплового излучения плотности распределения координатной и импульсной квадратур являются гауссовыми с нулевыми собственными значениями и дисперсиями следующего вида

$$\left\langle\Delta\widehat{X}_1^2\right\rangle = \left\langle\Delta\widehat{X}_2^2\right\rangle = \frac{1}{2}\coth(\hbar\omega/2T)$$

6.46. Доказать, что электромагнитное поле в когерентном состоянии может быть создано классическим нефлуктуирующим током.

УказАниЕ. Сравнить оператор эволюции вакуумного состояния под действием классического тока с оператором сдвига (6.36), создающим когерентное состояние.

Рекомендуемая литература: [Мандель и Вольф (2000)], [Быков (1993)], [Клышко (1986)], [Клышко (1980)], [Клышко (1994)], [Клышко (1996)], [Глаубер (1966)], [Глаубер (1972)].

Дополнение к разделу 6.1. Перепутанные состояния

После появления известной работы Эйнштейна-Подольского-Розена [Эйнштейн и др. (1935)] проблема нелокальности квантовой теории привлекала большое внимание многих авторов. Исходя из принципа причинности и существования скрытых параметров, Беллом (см., например, обзор [Белинский и Клышко (1993)] и цитированную в нем литературу) были сформулированы некоторые неравенства, которым должны удовлетворять корреляционные функции результатов измерений в точках, разделенных пространственноподобным интервалом. Нарушение этих неравенств означает ошибочность теории скрытых параметров и существование нелокальных эффектов в квантовой теории. Одним из способов экспериментальной проверки нарушения неравенств Белла являются опыты по наблюдению корреляции актов фотодетектирования света, находящегося в перепутанном состоянии [6].

Рассмотрим пример поляризационно перепутанного света

[05] Состояния такого типа впервые ввел Yuen в 1976 г. и назвал их двухфотонными когерентными состояниями. Наряду с ними можно ввести состояния $\widehat{D}\widehat{S}|vac\rangle$ (Caves, 1981), которые формально не совпадают с двухфотонными когерентными в силу некоммутативности операторов $\widehat{D}$ и $\widehat{S}$. Последние состояния получили название идеальных сжатых состояний. Однако, по своим статистическим свойствам (форма области неопределенностей) оба класса состояний одинаковы. В современной литературе как правило их не разделяют, называя единым термином «сжатые состояния».

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|x\rangle_1|y\rangle_2 - |y\rangle_1|x\rangle_2\right) \tag{1}$$

Это волновая функция системы, состоящей из двух фотонов, распространяющихся в направлении оси Oz. Волновая функция $|x\rangle$ описывает фотон, поляризованных вдоль оси Ox, а функция $|y\rangle$ - фотон, поляризованный вдоль Oy. Индексы 1 и 2 относятся к первому и второму фотону соответственно. Поля в таких состояниях могут быть получены либо при каскадных переходах в атомах, либо в нелинейных излучательных процессах в кристаллах.

Рассмотрим результат регистрации фотонов детекторами, перед которыми поставлены поляризационные анализаторы. Пусть оптические оси анализаторов составляют углы φ_1 и φ_2 с осью x для первого и второго детекторов соответственно.

Будем считать квантовую эффективность обоих фотодетекторов равной единице. При этом вероятность регистрации (она определяется вероятностью прохождения анализатора) в соответствии с теорией фотодетектирования Глаубера может быть вычислена как среднее

$$W_i = \langle\psi|\widehat{a}_i^{\dagger}\widehat{a}_i|\psi\rangle \tag{2}$$

Здесь $\widehat{a}_i^{\dagger}$ и $\widehat{a}_i$ - операторы рождения и уничтожения фотона, падающего на соответствующий детектор. Согласно Манделю и Вольфу (2000), эти операторы связаны с соответствующими операторами перед анализаторами следующими соотношениями:

$$\widehat{a}_i = \widehat{a_{ix}}\cos\varphi_i + \widehat{a_{iy}}\sin\varphi_i, \quad i = 1, 2 \tag{3}$$

где $\widehat{a_{ix}}$ и $\widehat{a_{iy}}$-операторы уничтожения фотонов линейно поляризованных вдоль осей Ox и Oy соответственно.

Подставляя (1) и (3) в (2), найдем, что для обоих детекторов $W_i = 1/2$ - независимо от ориентации анализаторов. Это означает, что свет, падающий на каждый анализатор, является неполяризованным. В то же время существует сильная взаимная корреляция фотоотсчетов обоих детекторов. Действительно, W_i - вероятность регистрации фотона данным детектором независимо от результата, который зафиксирует другой детектор. Теория фотодетектирования позволяет также вычислить вероятность того, что оба фотодетектора зарегистрируют фотоны:

$$\begin{aligned} W_{12} =& \langle\psi|\widehat{a}_1^{\dagger}\widehat{a}_2^{\dagger}\widehat{a}_1\widehat{a}_2|\psi\rangle = \frac{1}{2}\left(\sin^2\varphi_1\cos^2\varphi_2 + \cos^2\varphi_1\sin^2\varphi_2 - \right. \\ & \left. 2\sin\varphi_1\cos\varphi_2\sin\varphi_2\cos\varphi_1\right) = \frac{1}{2}\sin^2(\varphi_1 - \varphi_2) \end{aligned} \tag{4}$$

Эта вероятность зависит от угла относительной ориентации анализаторов если $\varphi_1 - \varphi_2 = \pi/2$, то $W_{12} = 1/2$, если оси анализаторов параллельны $\varphi_1 - \varphi_2 = 0$, то вероятность одновременной регистрации равна нулю.

Это обстоятельство связано с сильной взаимной корреляцией поляризации фотонов перепутанной пары.

На основе (4) можно вычислить условную вероятность фотоотсчета одного из детекторов, например, вероятность фотоотсчета второго детектора при условии, что фотон зарегистрирован первым детектором:

[06] Перепутанными называются состояния, в которых у микрообъекта могут быть зарегистрированы разные значения одного и того же квантового числа. В приводимом примере каждый фотон может находиться в состоянии с $\sigma = 1$ (поляризация вдоль Ox) или в состоянии с $\sigma = 2$ (поляризация вдоль Oy). Подробнее о перепутанных состояниях см., например, в обзоре [Баргатин и др.(2001)].

$$W_{\text{уст}}\,(2|1) = W_{12}/W_1 = \sin^2(\varphi_1 - \varphi_2) \tag{5}$$

Таким образом, результат одного измерения зависит от результата другого измерения, проведенного в удаленной области пространства, причем в условиях, когда между участвующими в измерении приборами нет какого-либо непосредственного взаимодействия. С другой стороны, наличие такой нелокальности не противоречит принципу причинности, поскольку у экспериментатора нет возможности повлиять на результат измерения. Действительно, W_{12} - вероятность зарегистрировать фотоны обоими фотоприемниками. Но в силу (2) никакими способами невозможно изменить вероятность регистрации данным детектором - она не зависит от ориентации анализатора.

Эксперименты описанного выше типа неоднократно проводились в последнее время. В этих экспериментах с достоверностью обнаружены эффекты нелокальности и нарушение неравенств Белла.

В заключение этого раздела отметим, что мы рассмотрели пример поляризационно перепутанного света. Очевидно, это не единственный возможный тип таких состояний. Вместо функций $|x\rangle$ и $|y\rangle$ в (1) могут входить, например, функции $|\phi\rangle$ и $|v\rangle$, описывающие фотоны разных частот. При этом корреляции могут наблюдаться при спектральных измерениях.

5.3.2 6.2. Quantum Theory of Radiation, Absorption and Scattering of Photons by Atomic Systems

Большинство задач о взаимодействии заряженных частиц с фотонами может быть решено приближенно с помощью теории возмущений. Это связано с тем, что безразмерный параметр разложения

$$\alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{137} \tag{6.53}$$

(постоянная тонкой структуры) весьма мал, поэтому уже первое неисчезающее приближение при вычислениях вероятностей квантовоэлектродинамических процессов часто дает достаточную точность. Но, разумеется, существует множество задач, в которых требуется использование более точных методов.

Взаимодействие квантованного электромагнитного поля с нерелятивистской системой. Динамику систем заряженных частиц будем описывать уравнением Шредингера в формулировке Паули, учитывающей взаимодействие частиц друг с другом и с внешним полем, а также наличие у них спина. Уравнение Паули будет получено из релятивистского уравнения Дирака далее, в примере 6.14. Для одной частицы гамильтониан, отвечающий уравнению Паули, имеет вид

$$\widehat{\mathscr{H}} = \frac{1}{2m}\left(\widehat{\boldsymbol{p}} - \frac{e}{c}\widehat{\boldsymbol{A}}\right)^2 + e\varphi - \widehat{\boldsymbol{\mu}}\cdot\boldsymbol{H} \tag{6.54}$$

где $\widehat{\boldsymbol{p}} = -i\hbar\nabla$ - оператор импульса, $\widehat{\boldsymbol{\mu}}$ - оператор спинового магнитного момента, $\varphi(\boldsymbol{r})$ - скалярный потенциал внешнего электростатического поля. Эти операторы действуют на координаты и спиновую переменную частицы. Операторы $\widehat{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{r}), \widehat{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{r}) = \nabla \times \widehat{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{r})$ действуют не только на координаты частицы (как операторы умножения), но и на переменные электромагнитного поля, в качестве которых мы выбираем, как и при рассмотрении фоковских состояний в разделе 6.1, числа заполнения N_s, причем s обозначает совокупность четырех квантовых чисел, характеризующих состояние фотона.

При наличии нескольких заряженных частиц оператор Гамильтона (6.54) должен содержать сумму слагаемых по всем частицам, а электростатический потенциал должен учитывать взаимодействие между частицами:

$$\widehat{\mathscr{H}} = \sum_{a=1}^{N} \left\{ \frac{1}{2m_a} \left(\widehat{\boldsymbol{p}}_a - \frac{e_a}{c} \widehat{\boldsymbol{A}}\left(\boldsymbol{r}_a\right) \right)^2 + e_a \varphi\left(\boldsymbol{r}_a\right) - \widehat{\boldsymbol{\mu}}_a \cdot \boldsymbol{H}\left(\boldsymbol{r}_a\right) \right\} \tag{6.55}$$

Но для сокращения письма мы будем в дальнейшем производить рассмотрение для одной частицы.

Оператор векторного потенциала

$$\widehat{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{r}) = \sum_s \left\{ \widehat{a} \boldsymbol{A}_s(\boldsymbol{r}) + \widehat{a}^\dagger \boldsymbol{A}_s^*(\boldsymbol{r}) \right\} \tag{6.56}$$

как и другие операторы, берется во временном представлении Шредингера, т. е. не зависит от времени.

Записав (6.54) в виде $\widehat{\mathscr{H}} = \widehat{\mathscr{H}_0} + \widehat{V}$ и выделив в оператор взаимодействия $\widehat{V}$ все слагаемые, содержащие $\widehat{A}$, находим

$$\widehat{V} = -\frac{e}{mc} \widehat{\boldsymbol{p}} \cdot \widehat{\boldsymbol{A}} + \frac{e^2}{2mc^2} \widehat{\boldsymbol{A}}^2 - \widehat{\boldsymbol{\mu}} \cdot \widehat{\boldsymbol{H}} \tag{6.57}$$

Здесь использована поперечность волновых функций фотонов, в силу которой $\widehat{\boldsymbol{p}} \cdot \widehat{\boldsymbol{A}} = \widehat{\boldsymbol{A}} \cdot \widehat{\boldsymbol{p}}$. Первый и третий члены в правой части (6.57) описывают процессы излучения и поглощения одного фотона в каждой моде, тогда как слагаемое с $\widehat{\boldsymbol{A}}^2$ описывает двухфотонные процессы.

В тех случаях, когда возможны те и другие процессы, вклад двухфотонных переходов как правило мал. Оценим по порядку величины отношения отдельных слагаемых в (6.57), заменяя операторы характерными значениями соответствующих физических величин. Имеем

$$R_A \approx \frac{\left(e^2/2mc^2\right) A^2}{(e/mc) pA} \approx \frac{eA}{pc} \approx \frac{eE\lambda}{pc} \approx \frac{v}{c} \frac{eE\lambda}{E_{kin}}$$

где p и $\mathscr{E}_{kin}$ - характерные значения импульса и кинетической энергии излучающей частицы. В атомах $v/c \approx 10^{-2}, \mathscr{E}_{kin} \approx 5$ эВ, $\lambda \approx 10^{-5}$ см для видимой части спектра. Поэтому R_A достигает единицы при значении электрического поля $E > 10^7$ В/cm. Такие поля можно создать только мощными лазерами. Для атомных ядер всегда $R_A \ll 1$ ввиду отсутствия лазеров на частотах гамма-квантов.

Для слагаемого, содержащего оператор магнитного момента, получим

$$R_\mu \approx \frac{\mu k A}{(e/mc) pA} \approx \frac{v}{c} \frac{\hbar\omega}{\mathscr{E}_{kin}}$$

При переходах с испусканием и поглощением фотонов их энергия порядка расстояний между уровнями излучающей системы, поэтому $\hbar\omega \approx \mathscr{E}_{kin}$, а $v/c \ll 1$ в нерелятивистских системах, таких, как электронные оболочки атомов и молекул либо атомные ядра. Поэтому $R_\mu < v/c \ll 1$. Но следует иметь в виду, что эти оценки получены при «нормальном» значении вклада от основного слагаемого $(e/mc)\widehat{\boldsymbol{p}} \cdot \widehat{\boldsymbol{A}}$. Если по каким-либо причинам этот вклад оказывается аномально малым, то оставшиеся слагаемые становятся существенными. Интересуясь однофотонными процессами, мы можем взять оператор взаимодействия без квадратичного слагаемого:

$$\widehat{V} = -\frac{e}{mc} \widehat{\boldsymbol{A}} \cdot \widehat{\boldsymbol{p}} - \widehat{\boldsymbol{\mu}} \cdot [\nabla \times \widehat{\boldsymbol{A}}] \tag{6.58}$$

Спонтанное и индуцированное излучение. Коэффициенты Эйнштейна. Вычислим вероятность испускания кванта с заданными волновым вектором и поляризацией $s = (k, \sigma)$ в результате взаимодействия заряженной частицы с электромагнитным полем. Начальное состояние поля задается числами заполнения $\{N_s\}$ всех мод. В конечном состоянии поля число заполнения моды s становится равным $N_s + 1$, остальные $N_{s'}, s' \neq s$ остаются прежними. Частица совершает переход между состояниями $|i\rangle$ и $|f\rangle$, относящимися к дискретному спектру. В первом приближении теории возмущений вероятность перехода в единицу времени вычисляется по формуле [Ландау и Лифшиц, Квантовая механика]

$$dw^{rad} = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle f|\widehat{V}|i\rangle\rangle|^2 \, \delta\left(\mathscr{E}_i - \mathscr{E}_f - \hbar\omega\right) \frac{\mathscr{Y} k^2 dk d\Omega_k}{(2\pi)^3} \tag{6.59}$$

Эта вероятность является дифференциальной величиной, так как испущенный фотон находится в непрерывном спектре и величина $d\nu = V'\omega^2 d\omega d\Omega_k/(2\pi c)^3$ представляет собой число квантовых состояний фотонов с заданной поляризацией, приходящихся на интервал волновых векторов d^3k.

Векторы начального и конечного состояний рассматриваемой системы в целом представляют собой произведения волновых функций частицы и электромагнитного поля:

$$|i\rangle = \psi_i \Phi_{\{N_s\}}, \quad |f\rangle = \psi_f \Phi_{\{N_s+1\}} \tag{6.60}$$

В виде индекса указаны числа заполнения только той моды поля, в которую происходит излучение. Используя (6.60), запишем матричный элемент в виде

$$\langle f|\widehat{V}|i\rangle = \left\langle \Phi_{\{N_s+1\}} \right| \int d^3r \left\{ -\frac{e}{m\boldsymbol{c}} \left(\psi_f, \widehat{\boldsymbol{p}}\psi_i\right) \cdot \widehat{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{r}) - \right.$$
$$\left. - \left(\psi_f, \widehat{\boldsymbol{\mu}}\psi_i\right) \cdot [\nabla \times \widehat{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{r})] \right\} \left| \Phi_{\{N_s\}} \right\rangle \tag{6.61}$$

Здесь d^3r - элемент объема обычного пространства, круглыми скобками обозначена операция суммирования по спиновой переменной.

Путем интегрирования по частям с учетом обращения в нуль волновых функций частицы на бесконечности внутренний интеграл преобразуется к виду

$$-\frac{1}{c} \int j_{fi} \cdot \widehat{\boldsymbol{A}}^*(\boldsymbol{r}) d^3r \tag{6.62}$$

где $j_{f_i} = -\frac{ie\hbar}{2m} \left((\psi_f, \nabla\psi_i) - (\nabla\psi_f, \psi_i)\right) + c\nabla \times (\psi_f, \widehat{\boldsymbol{\mu}}\psi_i)$
называется током перехода. При $\psi_f = \psi_i = \psi$ ток перехода превращается в электрический ток, создаваемый заряженной частицей с магнитным
моментом в состоянии ψ. При вычислении матричного элемента от оператора $\widehat{A}(r)$ по переменным поля воспользуемся формулами (6.56) и (Д3.63), из которых следует

$$\left\langle \Phi_{\{N_s+1\}} \widehat{\boldsymbol{A}}(r) | \Phi_{\{N_s\}} \right\rangle = \sqrt{N_s + 1} \boldsymbol{A}_s^*(\boldsymbol{r}) \tag{6.63}$$

Из всей бесконечной суммы (6.56) срабатывает только один член с оператором рождения фотона. В итоге получаем из (6.61)

$$\langle f|\widehat{V}|i\rangle = -\frac{1}{c}\sqrt{N_s + 1} \int \boldsymbol{j}_{fi}(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{A}_s^*(\boldsymbol{r}) d^3r \tag{6.64}$$

Вычисляя вероятность перехода в единицу времени согласно (6.59) и произведя интегрирование по частоте фотона, находим вероятность излучения

$$dw^{rad} = \frac{(N_s+1)\,\omega^2}{4\pi^2\hbar^2c^5}\left|\int \boldsymbol{j}_{fi}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{A}_s^*(\boldsymbol{r})d^3r\right|^2 d\Omega_k \tag{6.65}$$

где $\omega = (\mathscr{E}_i - \mathscr{E}_f)/\hbar$. Вероятность излучения состоит из двух слагаемых: $dw^{rad} = dw^{ind} + dw^{sp}$. Одно из них, $dw^{ind} = N_s dw^{sp}$, пропорционально числу квантов N_s в рассматриваемой моде и называется вероятностью индуцированного излучения, другое слагаемое отлично от нуля и в отсутствие квантов в начальном состоянии. Это излучение называется спонтанным [Эйнштейн (1916a)]:

$$dw^{sp} = \frac{\omega^2}{4\pi^2\hbar^2c^5}\left|\int j_{fi}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{A}_s^*(\boldsymbol{r})d^3r\right|^2 d\Omega_k \tag{6.66}$$

В обычных источниках света (газосветные лампы, лампы накаливания, Солнце) главную роль играет спонтанное излучение атомов, возбуждаемых при столкновениях. Принимая для этих источников света температуру $T = (3 \div 6)\times 10^3$ K, находим с помощью распределения Планка (6.23) $N_s \approx (10^{-3} \div 10^{-2})$, что свидетельствует о малой роли индуцированных процессов. В лазерах огромные интенсивности в узкой полосе частот достигаются за счет индуцированного излучения.

Вероятность поглощения фотона квантовой системой с переходом между теми же состояниями $f \to i$ (но в обратном направлении) дается той же формулой (6.59), но при другой последовательности состояний:

$$dw^{abs} = \frac{2\pi}{\hbar}\left|\left\langle f'\right|\widehat{V}\left|i'\right\rangle\right|^2 \delta\left(\mathscr{E}_{i'} - \mathscr{E}_{f'} + \hbar\omega\right)\frac{\mathscr{V}\omega^2 d\omega d\Omega_k}{(2\pi c)^3} \tag{6.67}$$

где $|i'\rangle = \psi_f\Phi_{\{N_s\}}, |f'\rangle = \psi_i|\Phi_{\{N_s-1\}}$ и величина $d\nu$ относится к непрерывному спектру состояний поглощаемого фотона. Пользуясь значением матричного элемента

$$\left\langle\Phi_{\{N_s-1\}}\right|\widehat{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{r})\left|\Phi_{\{N_s\}}\right\rangle = \sqrt{N_s}\boldsymbol{A}_s(\boldsymbol{r})$$

получаем

$$\langle f'|\,\widehat{V}\,|i'\rangle = -\frac{1}{c}\sqrt{N_s}\int \boldsymbol{j}_{if}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{A}_s(\boldsymbol{r})d^3r = -\frac{1}{c}\sqrt{N_s}\left[\int \boldsymbol{j}_{fi}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{A}_s^*(\boldsymbol{r})d^3r\right]^*$$

где в силу эрмитовости оператора тока $\boldsymbol{j}_{if} = \boldsymbol{j}_{fi}^*$. В результате имеем

$$dw^{abs} = \frac{N_s\omega^2}{4\pi^2\hbar^2c^5}\left|\int j_{fi}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{A}_s^*(\boldsymbol{r})d^3r\right|^2 d\Omega_k = dw^{ind} = N_s dw^{sp} \tag{6.68}$$

где по-прежнему $\omega = (\mathscr{E}_i - \mathscr{E}_f)/\hbar$. Как следует из (6.65) и (6.67), дифференциальные вероятности излучения и поглощения связаны соотношением

$$\frac{dw^{rad}}{dw^{abs}} = \frac{N_s+1}{N_s} \tag{6.69}$$

Число квантов N_s, где $s = (k,\sigma)$, можно выразить через интенсивность падающего на квантовую систему излучения (см. задачу 6.21):

$$N_s = \frac{8\pi^3c^2}{\hbar\omega^3}I_\sigma(\omega,n) \tag{6.70}$$

Если излучение неполяризовано ($I_1(\omega) = I_2(\omega)$) и изотропно (нет зависимости от $\boldsymbol{n}$), то суммарная по всем направлениям интенсивность излучения данной частоты $I(\omega) = \int (I_1(\omega) + I_2(\omega))\,d\Omega_k = 8\pi I_\sigma(\omega)$ и число квантов $N_s \equiv N_\omega = (\pi^2c^2/\hbar\omega^3)\,I(\omega)$ зависят только

от частоты. Подставив последнее выражение в (6.68), просуммировав по поляризациям и проинтегрировав по $d\Omega_k$, получим связь между полными вероятностями:

$$w^{abs} = w^{ind} = \frac{\pi^2 c^2}{\hbar\omega^3} I(\omega) w^{sp} \tag{6.71}$$

где $w^{abs} = \sum\limits_{\sigma} \int dw^{abs}$ и т. д. Величины

$$A_{if} = w^{sp}, \quad B_{if} = \frac{c}{I(\omega)} w^{ind}, \quad B_{fi} = \frac{c}{I(\omega)} w^{abs} \tag{6.72}$$

называются коэффициентами Эйнштейна [Эйнштейн (1916б)] для спонтанного излучения, вынужденного излучения и поглощения соответственно. Из (6.71) вытекает связь между ними:

$$B_{fi} = B_{if} = \frac{\pi^2 c^3}{\hbar\omega^3} A_{if} \tag{6.73}$$

Такая связь, однако, справедлива только в отсутствие вырождения уровней энергии $\mathscr{E}_i$ и $\mathscr{E}_f$ излучающей квантовой системы. Если эти уровни вырождены с кратностями соответственно g_i и g_f, то при вычислении вероятностей необходимо произвести усреднение по начальным и суммирование по конечным состояниям.

Пример 6.8. Показать, что при наличии вырождения коэффициенть Эйнитейна связаны соотноиениями

$$g_f B_{fi} = g_i B_{if} = \frac{\pi^2 c^3}{\hbar\omega^3} g_i A_{if} \tag{6.74}$$

Решение. Обозначив чертой вероятности, усредненные по начальным и просуммированные по конечным состояниям, будем иметь

$$\bar{w}^{abs} = \frac{1}{g_f} \sum w^{abs}, \quad \bar{w}^{ind} = \frac{1}{g_i} \sum w^{ind}, \quad \bar{w}^{sp} = \frac{1}{g_i} \sum w^{sp}.$$

С другой стороны, суммируя равенства (6.73) по состояниям и выражая их через вероятности с чертой, получим (6.74), где коэффициенты Эйнштейна выражены по формулам (6.72) через усредненные вероятности.

Электрическое дипольное излучение. Пример 6.9. Размер области локализации частицы удовлетворяет условию $ka \ll 1$, где $\boldsymbol{k}$ - волновой вектор излученного кванта. Выразить вероятность спонтанного излучения фотона с заданным волновым вектором и поляризаиией через матричный элемент электрического дипольного момента. Произвести суммирование по возможным поляризаиям кванта и получить интенсивность излучения на заданнй частоте в данном направлении п. Сравнить полученный результат с классическими формулами (5.30), (5.31).

Решение. При вычислении матричного элемента (6.64) используем приближение $\exp(-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}) \approx 1$ и подставляем в интеграл $\boldsymbol{A}_s^* = \sqrt{2\pi\hbar c/\mathscr{V}\omega}\, e_s^*$. Слагаемое со спиновым магнитным моментом при интегрировании дает нуль, и матричный элемент приводится к виду

$$\int \boldsymbol{j}_{fi} \cdot \boldsymbol{A}_s^* d^3r = e\sqrt{\tfrac{2\pi\hbar c^2}{\mathscr{V}\omega}} e_s^* \cdot \int \left(\psi_f, \left(-\tfrac{i\hbar\nabla}{m}\right)\psi_i\right) d^3r.$$

Оператор $-i\hbar\nabla/m$ изображает скорость частицы. Для преобразования интеграла используем квантовомеханические формулы

$$\widehat{\boldsymbol{v}} = \widehat{\dot{\boldsymbol{r}}} = \frac{i}{\hbar}[\widehat{\mathscr{H}}, \widehat{\boldsymbol{r}}] \quad \text{и} \quad \widehat{\mathscr{H}_0}\psi_{i,f} = \mathscr{E}_{i,f}\psi_{i,f}$$

где $\widehat{\mathscr{H}_0}$ - гамильтониан частицы. Используя также эрмитовость гамильтониана

$$\int \left(\psi_f, \widehat{\mathscr{H}_0}\boldsymbol{r}\psi_i\right) d^3r = \int \left(\widehat{\mathscr{H}_0}\psi_f, \boldsymbol{r}\psi_i\right) d^3r = \mathscr{E}_f \int (\psi_f, \boldsymbol{r}\psi_i)\, d^3r$$

приводим интеграл к виду

$$\int j_{fi} \cdot \boldsymbol{A}_s^* d^3r = -\frac{i}{\hbar}\left(\mathscr{E}_i - \mathscr{E}_f\right)\sqrt{\frac{2\pi\hbar c}{\mathscr{V}\omega}}\boldsymbol{e}_s^* \cdot \boldsymbol{p}_{fi}$$

Здесь $\left(\mathscr{E}_i - \mathscr{E}_f\right)/\hbar$ - частота излученного кванта, а

$$\boldsymbol{p}_{fi} = e\int (\psi_f, \boldsymbol{r}\psi_i)\, d^3r \tag{6.75}$$

представляет собой дипольный момент перехода. Если излучает система N частиц, то в (6.72) нужно сделать замену $er \to \sum\limits_{a=1}^{N} e_a r_a$, а волновые функции будут зависеть от координат всех частиц.

В итоге получим вероятность перехода

$$dw^{sp} = \frac{\omega^3}{2\pi\hbar c^3}\left|\boldsymbol{e}_s^* \cdot \boldsymbol{p}_{fi}\right|^2 d\Omega_k \tag{6.76}$$

Эта выражение дает вероятность испускания кванта с заданной поляризацией. Суммирование по поляризациям производится с помощью формулы 2.165 (задача 2.152), что дает

$$dw^{sp} = \frac{\omega^3}{2\pi\hbar c^3}\left|\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{p}_{fi}\right|^2 d\Omega_k \tag{6.77}$$

Интенсивность излучения в данном направлении получится в результате умножения вероятности (6.77) перехода в единицу времени на энергию кванта $\hbar\omega$. В обозначениях предыдущей главы (см. формулы (5.30), (5.31))

$$\frac{dI}{d\Omega} = \frac{\omega^4}{2\pi c^3}\left|\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{p}_{fi}\right|^2 \tag{6.78}$$

После интегрирования по телесному углу находим интенсивность суммарного по всем направлениям излучения

$$I = \frac{4\omega^4}{3c^3}\left|\boldsymbol{p}_{fi}\right|^2 \tag{6.79}$$

Квантовомеханический результат для интенсивности излучения получается из классических формул (5.30) (5.31), усредненных по гармоническим колебаниям, путем замены $\overline{\ddot{\boldsymbol{p}}^2} \to 4\omega^4\left|\boldsymbol{p}_{fi}\right|^2$.

Электрическое квадрупольное и магнитное дипольное излучение. Если электрический дипольный момент перехода между рассматриваемыми состояниями обращается в нуль, то излучение определяется членами более высокого порядка разложения экспоненты. Следующий член разложения даст матричный элемент

$$-\frac{1}{c}\int \boldsymbol{j}_{fi} \cdot \boldsymbol{A}_s^*(\boldsymbol{r}) d^3r = \frac{i\omega}{c^2}\sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{\mathscr{V}\omega}}\boldsymbol{e}_s^* \cdot \int \boldsymbol{j}_{fi}(\boldsymbol{r})(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}) d^3r$$

Дальнейшие преобразования повторяют те, которые уже были выполнены в классической теории (см. пример 5.6 из раздела 5.2). После их выполнения получим

$$-\frac{1}{c}\int \boldsymbol{j}_{f_2}\cdot\boldsymbol{A}_s^*(\boldsymbol{r})d^3r=\frac{i\omega}{c}\sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{\mathscr{V}}}e_s^*\cdot\left\{\frac{1}{2c}\left[\int\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{j}_{fi}(\boldsymbol{r})d^3r\right]\times\right.$$
$$\left.\times\,\boldsymbol{n}-\frac{1}{2c}\int\boldsymbol{r}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r})\nabla\cdot\boldsymbol{j}_{fi}(\boldsymbol{r})d^3r\right\}$$

Первый интеграл в фигурных скобках представляет собой магнитный момент перехода:

$$\boldsymbol{\mu}_{fi}=\frac{1}{2c}\int\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{j}_{fi}(\boldsymbol{r})d^3r \tag{6.80}$$

Во втором интеграле используем уравнение непрерывности $\nabla\cdot\boldsymbol{j}_{fi}=-i\omega\rho_{fi}$ и вводим квадрупольный момент перехода:

$$\left(Q_{fi}\right)_{\alpha\beta}=\int\left(3x_\alpha x_\beta-r^2\delta_{\alpha\beta}\right)\rho_{fi}(\boldsymbol{r})d^3r$$

В итоге будем иметь

$$-\frac{1}{c}\int\boldsymbol{j}_{fi}\cdot\boldsymbol{A}_s^*(\boldsymbol{r})d^3r=\frac{i\omega}{c}\sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{\mathscr{V}\omega}}\boldsymbol{e}_s^*\cdot\left\{[\boldsymbol{\mu}_{fi}\times\boldsymbol{n}]-\frac{i\omega}{6c}\boldsymbol{Q}_{fi}\right\}$$

где $\left(Q_{fi}\right)_\alpha=\left(Q_{fi}\right)_{\alpha\beta}n_\beta$. После подстановки этого выражения в (6.59) получим вероятность испускания кванта с определенной поляризацией и волновым вектором:

$$dw^{sp}=\frac{\omega^3}{2\pi\hbar c^3}\left|e_s^*\cdot\left[\boldsymbol{\mu}_{fi}\times\boldsymbol{n}-\frac{i\omega}{6c}\boldsymbol{Q}_{fi}\right]\right|^2d\Omega_k \tag{6.82}$$

Суммирование по поляризациям с использованием формулы (2.165) и умножение на $\hbar\omega$ дает интенсивность излучения в данном направлении:

$$\frac{dI}{d\Omega}=\frac{\omega^4}{2\pi c^3}\left\{|\boldsymbol{\mu}_{fi}\times\boldsymbol{n}|^2+\frac{\omega^2}{36c^2}|\boldsymbol{Q}_{fi}\times\boldsymbol{n}|^2+\right.$$
$$\left.+\frac{i\omega}{6c}\left[\boldsymbol{Q}_{fi}^*\cdot[\boldsymbol{\mu}_{fi}\times\boldsymbol{n}]-\boldsymbol{Q}_{fi}\cdot\left[\boldsymbol{\mu}_{fi}^*\times\boldsymbol{n}\right]\right]\right\} \tag{6.83}$$

Сходство с классическим выражением (5.38) очевидно. Интегрирование по телесному углу позволяет получить суммарную по всем направлениям интенсивность излучения на частоте перехода между квантовыми уровнями:

$$I=\frac{4\omega^4}{3c^3}|\mu_{fi}|^2+\frac{\omega^6}{90c^5}\left|\left(Q_{fi}\right)_{\alpha\beta}\right|^2 \tag{6.84}$$

Рекомендуемая литература: [Берестецкий и др. (1989)], [Бете и Солпитер (1960)], [Гайтлер (1956)], [Фейнман (2000)], [Ахиезер и Берестецкий (1981)].

Задачи

6.47. Начальное состояние электрона в центрально-симметричном поле определяется набором четырех квантовых чисел: главного $n=1,2,\ldots$, орбитального $l=0,1,\ldots,n-1$ и двух магнитных, $m_l=0,\pm1,\pm2,\ldots,\pm l, m_s=\pm1/2$, определяющих проекции орбитального и спинового моментов на ось квантования. Показать, что после электрического дипольного излучения фотона возможны конечные состояния с квантовыми числами

$$m_s' = m_s; \quad l' = l \pm 1\,(l' = 1 \text{ при } l = 0)\,; \quad m_l' = m_l, \quad m_l \pm 1; \tag{6.85}$$

n' - любое, совместимое с предыдущими условиями и неравенством $\mathscr{E}_f < \mathscr{E}_i$ (правила отбора для электрического дипольного излучения). Поскольку $\Delta l = \pm 1$, то при электрическом дипольном переходе изменяется четность волновой функции электрона (см. пример 1.20).

УказАниЕ. Воспользоваться разложением Клебша-Гордана (см. [Ландау и Лифшиц, Квантовая механика], глава 14)

$$Y_{l_1 m_1}(\vartheta,\varphi) Y_{l_2 m_2}(\vartheta,\varphi) = \sum_{LM} \sqrt{\frac{(2l_1+1)\,(2l_2+1)}{4\pi(2L+1)}} C^{L0}_{l_1 0 l_2 0} C^{LM}_{l_1 m_1 l_2 m_2} Y_{LM}(\vartheta,\varphi)$$

где коэффициенты Клебша-Гордана C отличны от нуля только при выполнении неравенств треугольника $l_1 + l_2 \geqslant L \geqslant |l_1 - l_2|$ и подчиняются целому ряду соотношений симметрии, в частности, $C^{LMI}_{l_1 m_1 l_2 m_2} = (-1)^{l_1+l_2+L} C^{L,-M}_{l_1,-m_1 l_2,-m_2}$.

6.48. Электрон в атоме водорода находится в возбужденном состоянии $2p$. Вычислить вероятности спонтанных переходов в единицу времени в основное состояние $1s$ из состояний с разными значениями магнитного квантового числа $m_l = 0, \pm 1$, которые сопровождаются испусканием одного линейно поляризованного фотона в заданном направлении $\boldsymbol{n}$. Сравнить угловые распределения для различных переходов. Записать, в частности, угловое распределение излучения, просуммированное по поляризациям фотонов и угловое распределение излучения от неполяризованных атомов.

6.49. Для случая, рассмотренного в задаче 5.23, произвести квантовомеханический расчет и найти суммарную по всем направлениям интенсивность излучения атома водорода.

6.50°. Вычислить среднее время жизни τ атома водорода в возбужденном состоянии $2p$ относительно спонтанного излучения фотонов.

6.51. Электрон в атоме водорода находится в основном состоянии $1s$. Возможно ли перевести его в возбужденное состояние $2p, m_l = +1$, облучая атом поляризованными фотонами? При какой поляризации фотонов будет заселяться только состояние $m_l = -1$? состояние $m_l = 0$?

УкАзАниЕ. Полезно использовать результат решения задачи 6.20.

6.52. Спектральная линия Лаймана в атоме водорода возникает как результат электрических дипольных переходов из состояний $2p, 3p, \ldots$ в основное состояние 1 s . Вычислить и сравнить интенсивности I двух первых спектральных линий этой серии Ly_α (переход $2p \to 1s$) и Ly_β (переход $3p \to 1s$) при спонтанном излучении.

УказАние. Радиальная волновая функция $3p$-состояния имеет вид

$$R_{31}(r) = \frac{8}{27\sqrt{6} a_B^{3/2}} e^{-r/3a_B}.$$

Другие волновые функции приведены при решении задачи 6.47.

6.53*. Взаимодействие электрона с нулевыми флуктуациями электромагнитного поля приводит к расщеплению уровней $2s_{1/2}$ и $2p_{1/2}$ (лэмбовский сдвиг, $\Delta\mathscr{E} \approx 1058$ МГц $\approx 4,4 \times 10^{-6}$ эВ, см. задачу 6.18). Индекс $1/2$ обозначает квантовое число $j = 1/2$ полного момента электрона. Выразить через атомные постоянные и получить численное значение (в обратных секундах) вероятности спонтанного перехода $2s_{1/2} \to 2p_{1/2}$.

УказАние. Согласно принципу суперпозиции и правилам сложения угловых моментов в квантовой механике спин-угловую волновую функцию, описывающую состояние электрона с определенными j, m_j, l, можно записать в виде суперпозиции (разложение Клебша- Гордана, ср. с задачей 6.46)

$$\Phi_{jm_j} = \sum_{m,\mu} C^{jm_3}_{lm1/2,\mu} Y_{lm}(\vartheta,\varphi)\chi_\mu$$

Здесь χ_μ - спинор, описывающий состояние с проекцией спина $\mu = \pm 1/2$ на ось квантования, коэффициенты разложения обеспечивают неравенство треугольника $l + 1/2 \geqslant j \geqslant |l - 1/2|$ и правило сложения проекций моментов $m_j = m + \mu$.

6.54*. За счет взаимодействия между магнитными моментами электрона и протона энергетический уровень атома водорода расщепляется на два подуровня (сверхтонкое расщепление), расстояние между которыми $\Delta\mathscr{E} \approx 1420$ МГц $\approx 5,9 \times 10^{-6}$ эВ. Верхний уровень - триплетный, полный момент атома $S = 1$, нижний - синглетный, $S = 0$. Вычислить вероятность электромагнитного перехода между указанными компонентами сверхтонкой структуры.

6.55*. Атом водорода, находящийся в основном состоянии, облучается направленным пучком фотонов с частотой ω. Энергия фотонов удовлетворяет условию $\hbar\omega \gg I_0$, где I_0 - энергия связи (ионизационный потенциал) атома. Вычислить сечение фотоионизации атома поляризованным излучением с вылетом электрона в заданном направлении, а также суммарное по всем направлениям сечение фотоионизации неполяризованным излучением, считая электрон в конечном состоянии свободным.

6.56. Вычислить полное сечение фоторекомбинации атома водорода (процесс, обратный фотоионизации). Электрон в начальном состоянии считать свободным, атом образуется в основном состоянии.

6.57. Записать магнитный дипольный момент перехода (6.80) через матричный элемент полного магнитного момента $\widehat{M}$ излучающей частицы:

$$\boldsymbol{\mu}_{fi} = \int \psi_f^* \widehat{\boldsymbol{M}} \psi_i d^3r, \quad \widehat{\boldsymbol{M}} = \frac{e\hbar}{2mc}(\widehat{\boldsymbol{l}} + g\widehat{\boldsymbol{s}}) \tag{6.86}$$

где согласно (4.76), (4.79) и принципу соответствия $\widehat{l}, \widehat{s}$ - безразмерные операторы орбитального и спинового моментов частицы, для электрона фактор $g \approx 2$.

Теория возмущений для матрицы плотности. Ниже мы рассмотрим некоторые специальные приемы решения электродинамических задач, широко используемые в современной литературе. Они базируются на изложенной выше общей теории и могут относиться к любой нерелятивистской системе заряженных частиц (атом, молекула, твердое тело, атомное ядро). Для упрощения письма будем использовать название «атом» для любой такой системы.

Используем уравнения (6.21), (6.55) и запишем полный гамильтониан системы зарядов, взаимодействующих с квантованным электромагнитным полем, в виде суммы

$$\widehat{\mathscr{H}} = \widehat{\mathscr{H}_f} + \widehat{\mathscr{H}_a} + \widehat{V} \tag{6.87}$$

где $\widehat{\mathscr{H}_f}$ - оператор свободного поля излучения (6.21), $\widehat{\mathscr{H}_a}$ - гамильтониан атома, не взаимодействующего с полем излучения (но он может находиться во внешних статических электрическом и магнитном полях), $\widehat{V}$ - оператор взаимодействия атома с квантованным полем,

$$\widehat{V} = \sum_a \left\{ -\frac{e_a}{m_a c}\widehat{\boldsymbol{p}}_a \cdot \widehat{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{r}_a) - \boldsymbol{\mu}_a \cdot \widehat{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{r}_a) + \frac{e_a^2}{2m_a c^2}\widehat{\boldsymbol{A}}^2(\boldsymbol{r}_a) \right\} \tag{6.88}$$

Первые два слагаемых линейны, а последнее квадратично относительно операторов поля.

Пример 6.10. Пусть в начальный момент времени t_0 состояние полной системы атом + поле было известно и описывалось оператором плотности $\widehat{\rho}(t_0) = \widehat{\rho}_a(t_0)\,\widehat{\rho}_f(t_0)$,

действующим на переменные атомной системыи и поля. Вычислить во втором порядке по взаимодействию $\widehat{V}$ оператор плотности для времен $t > t_0$.

Решение. Оператор плотности полной системы удовлетворяет уравнению Лиувилля-Шредингера (Д3.42)

$$\frac{d\widehat{\rho}(t)}{dt} + \frac{i}{\hbar}[\widehat{\mathscr{H}}, \widehat{\rho}(t)] = 0 \tag{1}$$

где $\widehat{\mathscr{H}}$ - полный оператор Гамильтона системы (6.87). Формальное решение этого уравнения в отсутствие зависимости $\widehat{\mathscr{H}}$ от времени имеет вид

$$\widehat{\rho}(t) = \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\widehat{\mathscr{H}}(t-t_0)\right\}\widehat{\rho}(t_0)\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\widehat{\mathscr{H}}(t-t_0)\right\} \tag{2}$$

Но это решение мало полезно для практических расчетов, поскольку найти простое замкнутое выражение для оператора плотности в экспоненциальных «обкладках» (правая часть (2)) очень нелегко. Более удобно найти приближенное решение методом последовательных приближений, которым можно пользоваться на ограниченных временах. Сделаем в (1) подстановку

$$\widehat{\rho}(t) = \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\widehat{\mathscr{H}_0}(t-t_0)\right\}\widehat{\rho}_I(t)\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\widehat{\mathscr{H}_0}(t-t_0)\right\} \tag{3}$$

где

$$\widehat{\mathscr{H}_0} = \widehat{\mathscr{H}_f} + \widehat{\mathscr{H}_a} \tag{4}$$

- гамильтониан системы атом + поле излучения в отсутствие взаимодействия между ними. Величина

$$\widehat{\rho}_I(t) = \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\widehat{\mathscr{H}_0}(t-t_0)\right\}\widehat{\rho}(t)\exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\widehat{\mathscr{H}_0}(t-t_0)\right\} \tag{6.89}$$

представляет собой оператор плотности в представлении взаимодействия. Зависимость $\widehat{\rho}_I$ от времени вызвана только наличием взаимодействия. При $\widehat{V} = 0, \widehat{\rho}_I(t) = \widehat{\rho}(t_0)$ не зависит от времени.

Для оператора плотности в представлении взаимодействия из (1) и (6.89) получаем уравнение

$$\frac{d\widehat{\rho}_I(t)}{dt} + \frac{i}{\hbar}\left[\widehat{V}_I(t), \widehat{\rho}_I(t)\right] = 0 \tag{5}$$

где

$$\widehat{V}_I(t) = \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\widehat{\mathscr{H}_0}(t-t_0)\right\}\widehat{V}\exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\widehat{\mathscr{H}_0}(t-t_0)\right\} \tag{6.90}$$

- оператор взаимодействия в представлении взаимодействия. Уравнение (5) можно записать в интегральной форме

$$\widehat{\rho}_I(t) = \widehat{\rho}_I(t_0) - \frac{i}{\hbar}\int\limits_{t_0}^{t}\left[\widehat{V}_I(\tau), \widehat{\rho}_I(\tau)\right]d\tau \tag{6}$$

и решать методом последовательных приближений, выбрав в качестве нулевого приближения значение оператора плотности в начальный момент: $\widehat{\rho}_I^{(0)}(t) = \widehat{\rho}_I(t_0) = \widehat{\rho}(t_0)$. Тогда из (6) получаем оператор плотности
с учетом члена первого порядка

$$\widehat{\rho}_I^{(1)}(t) = \widehat{\rho}(t_0) - \frac{i}{\hbar}\int\limits_{t_0}^{t}\left[\widehat{V}_I(\tau), \widehat{\rho}(t_0)\right] d\tau \tag{7}$$

и с учетом члена второго порядка

$$\widehat{\rho}_I^{(2)}(t) = \widehat{\rho}(t_0) - \frac{i}{\hbar}\int\limits_{t_0}^{t}\left[\widehat{V}_I(\tau), \widehat{\rho}(t_0)\right] d\tau + \tag{8}$$
$$+\left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 \int\limits_{t_0}^{t} d\tau_1 \int\limits_{t_0}^{\tau_1} d\tau_2 \left[\widehat{V}_I(\tau_1), \left[\widehat{V}_I(\tau_2), \widehat{\rho}(t_0)\right]\right]$$

Пусть мы интересуемся вероятностью перехода полной системы в состояние $|f\rangle$, в котором атом и поле находятся каждый в одном из своих стационарных состояний. Вероятность такого перехода можно вычислить по формуле (ДЗ.39),

$$W(t) = \langle f|\widehat{\rho}(t)|f\rangle = \langle f|\widehat{\rho}_I(t)|f\rangle \tag{9}$$

так как экспоненциальные операторы, действуя на $|f\rangle$, превращаются в обычные экспоненты и сокращаются. В (9) следует подставить выражение (8). Если состояние $|f\rangle$ ортогонально начальному состоянию (например, из-за разного числа фотонов в этих состояниях), то $\widehat{\rho}(t_0)|f\rangle = 0$, $\langle f|\widehat{\rho}(t_0) = 0$, первые два члена в (8) и часть слагаемых третьего члена при вычислении вероятности дают нуль, и мы получаем из (8) и (9)

$$W(t) = \frac{1}{\hbar^2}\int\limits_{t_0}^{t} d\tau_1 \int\limits_{t_0}^{\tau_1} d\tau_2 \langle f|\widehat{V}_I(\tau_1)\,\widehat{\rho}(t_0)\,\widehat{V}_I(\tau_2) + \widehat{V}_I(\tau_2)\,\widehat{\rho}(t_0)\,\widehat{V}_I(\tau_1)|f\rangle \tag{6.91}$$

Заметим, что

$$\widehat{V}_I(\tau_2)\,\widehat{\rho}(t_0)\,\widehat{V}_I(\tau_1) = \left(\widehat{V}_I(\tau_1)\,\widehat{\rho}(t_0)\,\widehat{V}_I(\tau_2)\right)^{\dagger}$$

поэтому два слагаемых в (6.91) взаимно комплексно сопряжены.

Другая формулировка дипольного приближения. В том случае, когда нерелятивистская система взаимодействует с той частью мод полевого континуума, длина волны которых существенно превосходит размер системы, оператору взаимодействия можно придать другую форму, отличную от (6.58) и аналогичную энергии взаимодействия (2.35) диполя со статическим полем (см., например, [Коэн-Таннуджи и др. (1992)]). Предполагая, что система зарядов мала и находится вблизи начала координат, заменим оператор $\widehat{A}(r)$ на $\widehat{A}(0)$. Далее произведем унитарное преобразование с помощью оператора

$$\widehat{U} = \exp\left(-\frac{i}{\hbar c}\widehat{\boldsymbol{d}}\cdot\widehat{\boldsymbol{A}}(0)\right) = \exp\left[\sum_j\left(\hat{\lambda}_j^{\dagger}\widehat{a}_j - \widehat{\lambda}_j\widehat{a}_j^{\dagger}\right)\right] \tag{6.92}$$

где $\widehat{d}$ - оператор дипольного момента

$$\widehat{\boldsymbol{d}} = \sum_a e_a \boldsymbol{r}_a \tag{6.93}$$

(мы изменили обозначение для дипольного момента, чтобы не путать его с оператором импульса). Индекс $j = k\alpha$ характеризует пространственную поляризационную моду. Оператор $\widehat{\lambda}_j$ соответственно имеет вид

$$\widehat{\lambda}_j = i\left(\frac{2\pi}{\mathscr{Y}\hbar\omega_j}\right)^{1/2} e_j^* \cdot \widehat{d} \tag{6.94}$$

Поскольку в оператор унитарного преобразования (6.93) входят канонические переменные и частиц, и поля, то все они модифицируются следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{r}'_a = \widehat{U}\boldsymbol{r}_a\widehat{U}^\dagger = \boldsymbol{r}_a,\\
&\widehat{\boldsymbol{p}}'_a = \widehat{U}\widehat{\boldsymbol{p}}_a\hat{U}^\dagger = \widehat{\boldsymbol{p}}_a + \frac{e_a}{c}\widehat{\boldsymbol{A}}_\perp(0),\\
&\widehat{a}'_j = \widehat{U}\widehat{a}_j\widehat{U}^\dagger = \widehat{a}_j + \widehat{\lambda}_j,\\
&\widehat{a}^{\dagger\prime}_j = \widehat{U}\widehat{a}^\dagger_j\widehat{U}^\dagger = \widehat{a}^\dagger_j + \widehat{\lambda}^\dagger_j.
\end{aligned} \tag{6.95}$$

Эти соотношения следуют из формулы (Д3.67.1) операторной алгебры.

Поучительно также преобразовать операторы поля. Для векторного потенциала имеем

$$\begin{aligned}
\widehat{\boldsymbol{A}}'(\boldsymbol{r}) &= \widehat{U}\widehat{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{r})\hat{U}^\dagger =\\
&= \sum_j \left(\frac{2\pi\hbar c^2}{\omega_j\mathscr{V}}\right)^{1/2}\left[\boldsymbol{e}_j\left(\widehat{a}_j + \widehat{\lambda}_j\right)e^{i\boldsymbol{k}_r\cdot\boldsymbol{r}} + \boldsymbol{e}_j^*\left(\hat{a}_j^\dagger + \hat{\lambda}_j^\dagger\right)e^{-i\boldsymbol{k}_j\cdot\boldsymbol{r}}\right] =\\
&= \widehat{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{r}) + i\sum_{\boldsymbol{k}}\frac{2\pi c}{\mathscr{V}\omega(k)k^2}\left[\boldsymbol{k}(\boldsymbol{k}\cdot\widehat{\boldsymbol{d}})e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} - \boldsymbol{k}(\boldsymbol{k}\cdot\widehat{\boldsymbol{d}})e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\right] = \widehat{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{r})
\end{aligned} \tag{6.96}$$

Здесь использованы соотношения (6.95) и формула суммирования ортов поляризации (2.165), в одной из сумм по k сделана замена $k \to -k$. Таким образом, оператор векторного потенциала инвариантен относительно рассматриваемого унитарного преобразования. Аналогичным свойством обладает оператор магнитного поля: $\widehat{\boldsymbol{H}}'(\boldsymbol{r}) = \widehat{\boldsymbol{H}}(r)$. Однако оператор электрического поля преобразуется следующим образом:

$$\begin{aligned}
\widehat{\boldsymbol{E}}'(\boldsymbol{r}) &= \widehat{U}\widehat{\boldsymbol{E}}_\perp(\boldsymbol{r})\widehat{U}^\dagger =\\
&= \sum_j \left(\frac{2\pi\hbar\omega_j}{\mathscr{V}}\right)^{1/2}\left[i\boldsymbol{e}_j\left(\widehat{a}_j + \widehat{\lambda}_j\right)e^{i\boldsymbol{k}_r\cdot\boldsymbol{r}} - i\boldsymbol{e}_j^*\left(\widehat{a}_j^\dagger + \widehat{\lambda}_j^\dagger\right)e^{-i\boldsymbol{k}_r\cdot\boldsymbol{r}}\right] =\\
&= \widehat{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r}) - 4\pi\widehat{\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{r})
\end{aligned} \tag{6.97}$$

где

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}) = \sum_j \frac{1}{\mathscr{V}}\boldsymbol{e}_j\left(\boldsymbol{e}_j^*\cdot\widehat{\boldsymbol{d}}\right)e^{i\boldsymbol{k}_j\cdot\boldsymbol{r}} \tag{6.98}$$

Для выяснения физического смысла последней величины произведем в (6.98) суммирование по поляризациям и интегрирование по волновым векторам, использовав

формулы (2.165) и (2.164) (в последней следует устранить множитель 2). В результате простого интегрирования получим

$$\widehat{\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{r}) = \widehat{\boldsymbol{d}}\delta(\boldsymbol{r}) + \frac{3\boldsymbol{r}(\boldsymbol{r}\cdot\widehat{\boldsymbol{d}})}{4\pi r^5} - \frac{\widehat{\boldsymbol{d}}}{4\pi r^3} \tag{6.99}$$

Первое слагаемое в правой части можно интерпретировать как оператор вектора поляризации, который создан точечным диполем, находящимся в начале координат. Оставшиеся два члена дают оператор электрического поля, созданного статическим диполем (см. дипольное слагаемое в формуле (2.21)).

Таким образом, унитарное преобразование добавило к поперечному полю излучения поле статического диполя и его вектор поляризации. Обе эти величины расходятся при $r \to 0$.

Построим теперь преобразованный гамильтониан полной системы. Интересуясь в дальнейшем только электрическим дипольным излучением, опустим из гамильтониана спиновое слагаемое Паули $\sum\limits_a \widehat{\boldsymbol{\mu}}_a \cdot \widehat{\boldsymbol{H}}_a$. Кроме того, как уже было сказано, заменим $\widehat{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{r})$ на $\widehat{A}(0)$, но не будем пренебрегать квадратичным по векторному потенциалу слагаемым. Используя (6.21) и (6.55), будем иметь

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathscr{H}'} &= \widehat{U}\left\{\sum_j \hbar\omega_j\left(\widehat{a}_j^\dagger\widehat{a}_j + \frac{1}{2}\right) + \right. \\
&\left. + \sum_{a=1}^{N}\left\{\frac{1}{2m_a}\left(\widehat{\boldsymbol{p}_a} - \frac{e_a}{c}\widehat{\boldsymbol{A}}(0)\right)^2 + e_a\varphi(\boldsymbol{r}_a)\right\}\right\}\widehat{U}^\dagger = \\
&= \sum_j \hbar\omega_j\left(\widehat{a}_j^\dagger\widehat{a}_j + \frac{1}{2}\right) + \sum_a\left\{\frac{\widehat{\boldsymbol{p}}_a^2}{2m_a} + e_a\varphi(\boldsymbol{r}_a)\right\} - \\
&\quad - \widehat{\boldsymbol{d}}\sum_j\left(\frac{2\pi\hbar\omega_j}{\mathscr{V}}\right)^{1/2}\left[ie_j a_j - i\boldsymbol{e}_j^* a_j^\dagger\right] + \sum_j\frac{2\pi}{\mathscr{V}}\left(\boldsymbol{e}_j^*\widehat{\boldsymbol{d}}\right)\left(\boldsymbol{e}_j\widehat{\boldsymbol{d}}\right)
\end{aligned} \tag{6.100}$$

Предпоследняя строка этой цепочки равенств содержит сумму гамильтонианов свободного электромагнитного поля и атома; операторы в последней строке описывают эффекты взаимодействия. Пользуясь соотношениями (6.97) и (6.98), запишем их в виде

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathscr{H}_I'} &= -\widehat{\boldsymbol{d}}\cdot\widehat{\boldsymbol{E}}(0) + 2\pi\widehat{\boldsymbol{d}}\cdot\boldsymbol{P}(0) = \\
&= -\widehat{\boldsymbol{d}}\cdot\widehat{\boldsymbol{E}}(0) + 2\pi\left[\widehat{\boldsymbol{d}}^2\delta(\boldsymbol{r}) + \frac{3(\boldsymbol{r}\cdot\widehat{\boldsymbol{d}})^2}{4\pi r^5} - \frac{\widehat{\boldsymbol{d}}^2}{4\pi r^3}\right]_{r\to 0}
\end{aligned} \tag{6.101}$$

Первое слагаемое аналогично энергии взаимодействия статического диполя с внешним полем (см. дипольный член в формуле (2.35)). Оно содержит динамические переменные поля и ответственно за процессы испускания и поглощения фотонов. Второе расходящееся слагаемое представляет собой энергию самодействия точечного диполя, не связанную с полем излучения. Оно возникло из-за сделанных приближений (пренебрежение размером атома) и должно быть исключено. В итоге оператор взаимодействия неподвижного атома, находящегося в точке с радиусом-вектором $\boldsymbol{R}$, с квантованным полем принимает окончательный вид

$$\widehat{V} = -\widehat{\boldsymbol{d}}\cdot\widehat{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{R}) \tag{6.102}$$

(в предыдущем рассмотрении для сокращения письма мы полагали $\boldsymbol{R} = 0$).
В приложениях часто рассматривается взаимодействие с излучением, квазирезонансным какому-либо переходу в атоме. Для произвольного перехода, характеризуемого набором нижних энергетических состояний $|m\rangle$ и верхних состояний $|n\rangle$, оператор дипольного момента может быть представлен в виде суммы двух слагаемых

$$\widehat{\boldsymbol{d}} = \sum_{mn} \left(d_{nm} |n\rangle\langle m| + d_{mn} |m\rangle\langle n| \right) = \widehat{\boldsymbol{d}}_+ + \widehat{\boldsymbol{d}}_- \tag{6.103}$$

Предположим, что данному атомному переходу соответствует частота ω_0 и атом взаимодействует с квазирезонансным излучением частоты ω, так что $|\omega - \omega_0| \ll \omega_0$. В этих условиях в разложениях теории возмущений, основанных на операторе взаимодействия (6.102), главными оказываются резонансные вклады, т. е. вклады, экспоненциальные факторы которых осциллируют на разностной частоте. Если ограничиться рассмотрением только резонансных вкладов, то вместо (6.102) достаточно рассматривать оператор взаимодействия в виде

$$\widehat{V} \approx -\sum_j \left(\frac{2\pi\hbar\omega_j}{\mathscr{V}} \right)^{1/2} \left[i \left(\boldsymbol{e}_j \widehat{d}_+ \right) a_j - i \left(\boldsymbol{e}_j^* \widehat{d}_- \right) a_j^\dagger \right] \tag{6.104}$$

если атом расположен в начале координат. Для атома, расположенного в произвольной пространственной точке $\boldsymbol{R}$, соответственно имеем

$$\widehat{V} \approx -\sum_j \left(\frac{2\pi\hbar\omega_j}{\mathscr{V}} \right)^{1/2} \left[i \left(\boldsymbol{e}_j \hat{\boldsymbol{d}}_+ \right) a_j e^{i\boldsymbol{k},\boldsymbol{R}} - i \left(\boldsymbol{e}_j^* \widehat{\boldsymbol{d}}_- \right) a_j^\dagger e^{-i\boldsymbol{k},\boldsymbol{R}} \right] \tag{6.105}$$

Приближение (6.104), (6.105) известно как приближение вращающейся волны. Принципиальным для приближения вращающейся волны является то, что даже для виртуальных промежуточных переходов, рассматриваемых в высших порядках теории возмущений, учитываются только такие переходы в возбужденное состояние, которые сопровождаются поглощением фотона, а в основное состояние его излучением. Отметим, что приближение вращающейся волны является наиболее распространенным при проведении практических расчетов, не основанных на приближениях теории возмущений. □

Рекомендуемая литература: [Перина (1987)], [Андреев и др. (1988)], [Коэн-Таннуджи и др. (1992)], [Мандель и Вольф (2000)], [Килин (1990)], [Клышко (1996)], [Ахманов и Никитин (1998)].

Пример 6.11. До сих пор мыь рассматривали все состояния атома как строго стаиионарные, квадрат модуля волновой функиии которых не зависит от времени (см. (ДЗ.37)). Но в результате взаимодействия электронов с электромагнитным полем происходят переходы из возбужденных состояний в основное (и в ниже лежащие возбужденные), вследствие чего время жизни возбужденных состояний оказывается конечным. Это неизбежно приведет к тому, что волновая функиия реального возбужденного состояния будет представлять собой суперпозицию волновых функиий с разныии энергиями (квазистачионарное состояние), а испускаемые при переходе из возбужденного в основное состояние фотоны будут иметь разные энергии. Вычислить для двухуровневого атома распределение фотонов по энергиям для заданного перехода в вакууме, предполагая, что время жизни возбужденного состояния ветико по сравнению с обратной частотой перехода (форма спектральной линии).

Решение. Ищем решение для волновой функции системы двухуровневый атом + поле в виде

$$|\psi(t)\rangle = \sum_s a_{1s}(t)|1\rangle\,|1_s\rangle \exp\left[i\left(\omega_s - \mathscr{E}/\hbar\right)t\right] + a_{20}(t)|2\rangle|vac\rangle \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\mathscr{E}t\right) \tag{1}$$

Здесь учитываются только вакуумное состояние поля и однофотонные состояния. В начальном состоянии отсутствуют кванты и имеется возбужденный атом, $a_{20}(0) = 1, a_{1s}(0) = 0$. В конечном состоянии, при $t \to \infty$, атом переходит в свое основное состояние и излучается квант с некоторой частотой ω. В формуле (1) выделены временные множители невозмущенных волновых функций атома и фотона, s представляет собой индекс моды, в которую излучается квант. Распределение излучаемых квантов по частотам можно вычислить по формуле

$$dw(\omega) = \int \sum \frac{|a_{1s}(\infty)|^2\, V\omega^2 d\omega d\Omega}{(2\pi c)^3} \tag{2}$$

где производится интегрирование только по направлениям вылета кванта (не по частотам) и суммирование по его поляризациям.

Подставив (1) в уравнение Шредингера (ДЗ.29), находим систему уравнений для коэффициентов разложения:

$$i\hbar\dot{a}_{1q} = \langle 1q|\widehat{V}|20\rangle a_{20}(t) \exp\left[i\left(\omega_q - \omega_0\right)t\right] \tag{3}$$

$$i\hbar\dot{a}_{20} = \sum_s (20|\widehat{V}|1s\rangle a_{1s}(t) \exp\left[i\left(\omega_0 - \omega_s\right)t\right] \tag{4}$$

Здесь через ω_0 обозначена частота перехода $\left(\mathscr{E}_2 - \mathscr{E}_1\right)/\hbar$. Чтобы найти приближенное решение системы (3)-(4), выразим его через неизвестную постоянную затухания γ возбужденного уровня:

$$a_{20}(t) = e^{-\gamma t/2} \tag{5}$$

Из уравнения (2) находим решение, удовлетворяющее начальному условию:

$$a_{1q}(t) = -\langle 1q|\widehat{V}|20\rangle \frac{\exp\left[i\left(\omega_q - \omega_0 + i\gamma/2\right)t\right] - 1}{\hbar\left(\omega_q - \omega_0 + i\gamma/2\right)} \tag{6}$$

Подстановка этого решения в (4) дает трансцендентное уравнение для определения γ:

$$-\frac{i\hbar\gamma}{2} = \sum_s \frac{|\langle 1s|\widehat{V}|20\rangle\,|^2}{\hbar\left(\omega_0 - \omega_s - i\gamma/2\right)} \left\{1 - \exp\left[i\left(\omega_0 - \omega_s - i\gamma/2\right)t\right]\right\} \tag{7}$$

Это приближенное уравнение можно считать корректным, если при больших временах правая часть перестает зависеть от t. В правильности последнего утверждения можно убедиться, решая указанное уравнение методом последовательных приближений в предположении малости γ. В нулевом приближении полагаем в правой части $\gamma = 0$ (см. Гайтлер (1956)) и переходим к пределу больших времен (см. формулы (1.216), (1.224а)):

$$\left.\frac{1 - \exp\left[i\left(\omega_0 - \omega_s\right)t\right]}{\omega_0 - \omega_s}\right|_{t\to\infty} \to \frac{\mathscr{P}}{\omega_0 - \omega_s} - i\pi\delta\left(\omega_0 - \omega_s\right) \tag{8}$$

После подстановки (8) в (7) и перехода от суммирования по модам к интегрированию по частотам и направлениям вылета фотона (а также суммированию по его поляризациям) находим, что постоянная затухания $\gamma = \gamma' + i\gamma''$ имеет действительную и мнимую части. Действительная часть имеет вид

$$\gamma' = \sum_{\sigma} \mathscr{P} \int \frac{2\pi}{\hbar^2} \left| \langle 1s|\widehat{V}|20 \right\rangle |^2 \delta\left(\omega_0 - \omega\right) \frac{\mathscr{V}\omega^2 d\omega d\Omega}{(2\pi c)^3} \tag{9}$$

и представляет собой полную вероятность спонтанного излучения атома (см. формулы (6.59) и далее). Для разрешенных переходов в атомах $\gamma' \approx 10^8 - 10^9 c^{-1}$ (см., например, задачу 6.50), тогда как частоты оптических переходов порядка $10^{16} c^{-1}$. Поэтому условие $\gamma' \ll \omega_0$ выполняется с большим запасом.

Мнимая часть постоянной затухания дает сдвиг атомного уровня за счет взаимодействия электрона с нулевыми колебаниями поля (лэмбовский сдвиг, рассмотренный на оценочном уровне в задаче 6.18):

$$\gamma'' = \frac{1}{4\pi^3 c^3 \hbar^2} \sum_{\sigma} \int \left| \langle 1s|\hat{V}|20 \right\rangle |^2 \frac{V\omega^2 d\omega d\Omega}{\omega_0 - \omega} \tag{10}$$

Интеграл по частотам в (10) расходится, и получение корректного значения малого радиационного сдвига требует специальных методов (см. монографии и учебники Ахиезера и Берестецкого (1981), Берестецкого и др. (1989), Боголюбова и Ширкова (1980)).

Вероятность излучения квантов разных частот (форму спектральной линии) найдем с помощью (2) и (6):

$$dw(\omega) = \sum \int \frac{|\langle 1s|\widehat{V}|20\rangle|^2}{\hbar^2 \left[\left(\omega - \omega_0\right)^2 + \gamma^2/4\right]} \frac{\mathscr{V}\omega^2 d\omega d\Omega}{(2\pi c)^3} \tag{11}$$

Теперь мы пренебрегаем малым радиационным сдвигом и понимаем под γ действительную величину γ'. Ввиду малой ширины спектральной линии можно всюду в (11), кроме знаменателя и дифференциала, заменить ω на ω_0. Сравнивая правую часть (11) с (9), находим

$$dw(\omega) = \frac{\gamma}{2\pi} \frac{d\omega}{\left(\omega - \omega_0\right)^2 + \gamma^2/4} \tag{12}$$

Мы снова получили лоренцев контур, как и в классическом случае (см. задачу 5.122, формула (6)). Но радиационная ширина γ спектральной линии теперь определяется вероятностью квантового перехода между атомными уровнями.

Задачи

6.58 Записать операторы свободного электромагнитного поля в представлении взаимодействия, которое определено формулами (6.89), (6.90).

6.59°. Записать в представлении взаимодействия оператор (6.102) взаимодействия атома с квантованным полем.

6.60•. Выразить волновую функцию $\Psi_I(t)$ в представлении взаимодействия через волновую функцию $\Psi_S(t)$ в представлении Шредингера. Записать уравнение Шредингера для $\Psi_I(t)$.

6.61. Силами осцилляторов атомных электронов называются величины

$$f_{ln} = \frac{2m}{\hbar e^2} \omega_{ln} \left| (d_z)_{ln} \right|^2$$

где l, n - полные наборы квантовых чисел, характеризующих состояния атомной системы, ω_{ln} - частота перехода, $(d_z)_{ln}$ - матричный элемент одной из декартовых компонент электрического дипольного момента атома. Доказать правило сумм:

$\sum_l f_{ln} = N$. Здесь N - полное число электронов в системе, сумма берется по полному набору атомных состояний.

6.62. Вычислить поляризуемость $\alpha_{\mu\nu}$ основного состояния квантовой системы частиц в постоянном электрическом поле, выразив ее через матричные элементы дипольного момента. По определению тензор поляризуемости связывает вектор дипольного момента, индуцированного слабым внешним полем, с вектором напряженности поля.

6.63. Определить в дипольном приближении скорость вынужденного перехода (вероятность перехода в единицу времени) для двухуровневой атомной системы, взаимодействующей с хаотическим стационарным электромагнитным полем. Матрица плотности ρ_{nn} поля диагональна в представлении фоковских состояний и не зависит от времени.

6.64*. Вычислить дифференциальное сечение рассеяния света атомом. Ограничиться нерезонансным случаем, когда энергии падающего и рассеянного фотонов не равны разностям энергий атомных уровней [7].

6.65ˆ. Вычислить дифференциальное сечение нерезонансного рассеяния фотонов атомом, используя потенциал взаимодействия в дипольном приближении (см. формулу (6.102)). Сравнить с результатом предыдущей задачи и показать, что разные формы потенциала взаимодействия приводят к одинаковым выражениям для сечения.

6.66. Проанализировать предельные случаи формулы (2), полученной в предыдущей задаче:

1. Рассмотреть рассеяние без изменения частоты (релеевское рассеяние), когда $\omega_2 = \omega_1 = \omega \ll \omega_{li}$ для всех промежуточных состояний. Показать, что в этом случае получается результат, близкий к формулам задачи 5.127 о рассеянии электромагнитной волны классическим осциллятором.

2. Показать, что если энергия рассеиваемых квантов велика по сравнению с энергией связи электронов (но много меньше mc^2), то сечение рассеяния переходит в формулу Томсона (см. задачи 5.127, 5.133).

6.67*. Вычислить в первом неисчезающем порядке теории возмущений вероятности двухфотонного поглощения и излучения света атомами, выразив их через матричные элементы соответствующих переходов. Проанализировать правила отбора для этих процессов. Расчет провести в рамках дипольного приближения.

6.68. Вычислить вероятность параметрической генерации света - процесса, при котором происходит поглощение одного фотона $\{\omega_1, \boldsymbol{k}_1, \boldsymbol{e}_1\}$ и рождение пары фотонов $\{\omega_2, k_2, e_2\}$ и $\{\omega_3, k_3, e_3\}$, причем частоты трех квантов связаны соотношением $\omega_1 = \omega_2 + \omega_3$, а энергии начального и конечного состояния рассеивающей системы одинаковы (когерентный процесс).

6.69. Два близко расположенных двухуровневых атома находятся в состоянии, описываемом волновой функцией $\Psi_1 = (|1\rangle_a|2\rangle_b + |2\rangle_a|1\rangle_b)/\sqrt{2}$. Определить в низшем порядке теории возмущений вероятность испускания фотона. Показать, что скорость спонтанного распада такой системы в два раза больше, чем для каждого атома в отдельности (явление сверхизлучения). Сравнить со случаем, когда начальное состояние описывается волновой функцией $\Psi_2 = (|1\rangle_a|2\rangle_b - |2\rangle_a|1\rangle_b)/\sqrt{2}$

6.70. Рассмотреть кооперативный эффект когерентного взаимодействия классических осцилляторов (см. задачу 5.122) на следующей упрощенной модели. N одинаковых осцилляторов с собственной частотой ω и постоянной радиационного затухания $\gamma = 2e^2\omega_0^2/3mc^2$ находятся в малой области пространства размером много меньше длины

[07] В этой и следующих задачах мы говорим об атомах, хотя большинство полученных ниже формул справедливо и для более сложных объектов - молекул, твердых тел и т.д.

волны λ их излучения. Поскольку все осцилляторы одинаковы, затухание колебаний данного осциллятора будет вызываться не только его полем излучения, но и полями других осцилляторов. Поэтому уравнение движения a-го осциллятора примет вид

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_a + 2\gamma\dot{\boldsymbol{r}}_a + \omega_0^2 r_a = -\sum_{b\neq a} 2\gamma\dot{\boldsymbol{r}}_b$$

где $a, b = 1, 2, \ldots, N$. В начальный момент времени осцилляторы начинают колебаться с одинаковыми амплитудами r_0 и в одной фазе. Вычислить форму спектра излучения, амплитуду электромагнитного импульса и постоянную затухания. Сравнить их с соответствующими величинами для системы независимых осцилляторов.

5.3.3 6.3. The Interaction of Relativistic Particles with Photons

В этом разделе будет рассмотрено несколько простых примеров и задач с релятивистскими частицами. Мы проиллюстрируем основные физические идеи простейшими способами, не претендуя на изложение строгой теоретической схемы квантовой электродинамики в релятивистски ковариантной формулировке и многочисленных конкретных задач, которые можно найти в книгах Ахиезера и Берестецкого (1981), Берестецкого и др. (1989), Боголюбова и Ширкова (1980)).

Релятивистское уравнение Дирака для фермионов. Уравнение Шредингера (ДЗ.29) с оператором Гамильтона

$$\widehat{\mathscr{H}} = \frac{\widehat{\boldsymbol{p}}^2}{2m} + U(\boldsymbol{r}, t) \tag{6.106}$$

неприменимо для описания релятивистских частиц, так как оно приводит к нерелятивистскому соотношению между энергией и импульсом свободной частицы: полагая $U = 0$ и подставив в (ДЗ.29) $\Psi(\boldsymbol{r}, t) = A\exp[i(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}$ - $-\mathscr{E}t)/\hbar]$, находим

$$\mathscr{E} = \frac{p^2}{2m} \tag{6.107}$$

Кроме того, однокомпонентная волновая функция $\Psi(\boldsymbol{r}, t)$ никак не отражает наличия у частицы спиновой степени свободы. Для описания релятивистских электронов необходимо обеспечить релятивистскую связь энергии частицы $\mathscr{E}$ с ее трехмерным импульсом p,

$$\mathscr{E} = \sqrt{m^2c^4 + c^2p^2} \tag{6.108}$$

и включить в теорию описание внутреннего момента (спина). Релятивистское волновое уравнение для частиц со спином $s = 1/2$ было открыто Дираком в 1928 г. Оно может быть записано в форме уравнения Шредингера (ДЗ.29)

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \widehat{\mathscr{H}}\Psi \tag{6.109}$$

в котором волновая функция

$$\Psi = \begin{pmatrix}\varphi\\ \chi\end{pmatrix}, \quad \varphi = \begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix}, \quad \chi = \begin{pmatrix}\chi_1\\ \chi_2\end{pmatrix} \tag{6.110}$$

должна представлять собой четырехкомпонентную величину, а дираковский гамильтониан свободной частицы

$$\widehat{\mathscr{H}} = \mathrm{c}(\widehat{\boldsymbol{\alpha}}\cdot\widehat{\boldsymbol{p}}) + \widehat{\beta}mc^2 \tag{6.111}$$

содержит четырехрядные матрицы Дирака

$$\widehat{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \widehat{\sigma} \\ \widehat{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad \widehat{\beta} = \begin{pmatrix} \widehat{1} & 0 \\ 0 & -\widehat{1} \end{pmatrix} \tag{6.112}$$

Здесь использована сокращенная двухрядная форма записи, при которой каждый элемент в четырехрядной матрице представляет собой двухрядную матрицу:

$$\widehat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \widehat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \widehat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \widehat{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{6.113}$$

Аналогичная запись использована для четырехкомпонентной волновой функции (биспинора). Величина m в (6.111) представляет собой массу частицы, оператор $\widehat{\boldsymbol{p}} = -i\hbar\nabla$ соответствует ее трехмерному импульсу. Матрицы Паули $\widehat{\sigma}$ и $\widehat{1}$ составляют полный набор двухрядных эрмитовых матриц, которые можно использовать для представления произвольной двухрядной матрицы. Матрицы Дирака в четырехрядной записи имеют вид

$$\begin{gathered} \widehat{\alpha}_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \widehat{\alpha}_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \widehat{\alpha}_z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \widehat{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \end{gathered} \tag{6.114}$$

Все матрицы Дирака эрмитовы и удовлетворяют соотношениям антикоммутации

$$\{\widehat{\alpha}_\mu, \widehat{\alpha}_\nu\} \equiv \widehat{\alpha}_\mu\widehat{\alpha}_\nu + \widehat{\alpha}_\nu\widehat{\alpha}_\mu = 2\delta_{\mu\nu}\widehat{1}, \quad \{\widehat{\boldsymbol{\alpha}}, \widehat{\beta}\} = 0, \quad \widehat{\beta}^2 = \widehat{1}, \quad \mu, \nu = x, y, z \tag{6.115}$$

Уравнения (6.109), (6.111) представляют собой лишь одну из возможных форм записи уравнения Дирака для свободной частицы («стандартное представление»). Другие формы уравнения можно получить, производя унитарное преобразование волновой функции и матриц Дирака.

Пример 6.12. Пусть решение уравнения Дирака для свободной частицы описывает состояние с определенным импульсом и энергией E. Эти величины существуют одновременно, так как их операторы коммутируют. Найти зависимость $\mathscr{E}(p)$, следующую из уравнения.

Решение. Для состояний с определенными p и $\mathscr{E}$ имеем

$$\widehat{p}\Psi_p = p\Psi_p, \quad \widehat{\mathscr{H}}\Psi_p = \mathscr{E}\Psi_p$$

где $\widehat{\mathscr{H}}$ дается формулой (6.111), а Ψ_p - четырехкомпонентная волновая функция (биспинор). Из написанных равенств имеем

$$\left[\mathrm{c}(\widehat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \boldsymbol{p}) + \widehat{\beta}mc^2\right] \Psi_{\boldsymbol{p}} = \mathscr{E}\Psi_{\boldsymbol{p}} \tag{1}$$

Умножив обе части последнего равенства на $\left[\mathrm{c}(\widehat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \boldsymbol{p}) + \widehat{\beta}mc^2\right]$ и воспользовавшись равенствами (6.115), получим искомую зависимость:

$$c^2p^2 + m^2c^4 = \mathscr{E}^2 \tag{2}$$

Из этого равенства следует, что каждому значению абсолютной величины импульса соответствует два значения энергии частицы:

$$\mathscr{E}(p) = \pm\sqrt{c^2p^2 + m^2c^4} \tag{3}$$

В отличие от классической релятивистской механики, в данном случае невозможно просто исключить решения с отрицательной энергией как не имеющие физического смысла, так как без этих решений система волновых функций дираковского гамильтониана потеряет свойство полноты. Без этого свойства теряет силу вся традиционная вероятностная интерпретация волновой функции и других квантовомеханических величин. В то же время очевидно, что данные опыта не содержат никаких указаний, в том числе и в квантовой области, на существование частиц с отрицательными энергиями. В этом случае, в частности, были бы возможны спонтанные переходы из состояний с положительной энергией в лежащие ниже по шкале энергий состояния с отрицательной энергией.

Первая интерпретация электронов с отрицательной энергией принадлежит Дираку. Он предположил, что в основном систоянии электронной системы все одноэлектронные состояния с отрицательной энергией заполнены, а состояния с положительной энергией свободны. Согласно принципу Паули, переходы в заполненные состояния невозможны. Но пришлось также предположить, что заполненный отрицательный «фон» не создает электрического поля и не дает вклада в энергию и импульс системы.

Если вакуумное состояние всей системы электронейтрально, то незаполненное состояние («дырка») в дираковском фоне будет воспринято наблюдателем как частица с положительной энергией и зарядом, противоположном по знаку заряду электрона. Поглощение фотона с энергией $\hbar\omega > 2mc^2$ электроном с отрицательной энергией и переход его в свободное состояние с $\mathscr{E} > mc^2$ можно интерпретировать как рождение двух
частиц с одинаковыми положительными массами $m > 0$ и зарядами $\pm e$ противоположных знаков. Таким образом, теория Дирака и необходимость интерпретации состояний с отрицательной энергией привели к предсказанию существования античастиц - так именуются частицы с положительными энергиями, но противоположными по знаку (по отношению к «частицам») электрическими зарядами и спиновыми магнитными моментами. Первой античастицей, открытой экспериментально в космических лучах Андерсоном в 1932 г., был положительный электрон - позитрон. Затем были открыты мюоны и пионы с обоими знаками зарядов и в 50 -х годах прошлого века - антипротон и антинейтрон. Сейчас не вызывает сомнений тот факт, что каждая частица имеет свою античастицу (электронейтральные частицы, не имеющие магнитного момента, в некоторых случаях совпадают со своими античастицами. Пример такой частицы - фотон). В настоящее время «дырочная» интерпретация Дирака сохранила лишь историческое значение, но теория Дирака и его уравнение получили многочисленные подтверждения и лежат в основе релятивистской квантовой механики.

Если на релятивистский фермион действует внешнее электромагнитное поле, то оно может быть учтено, как и в нерелятивистском случае, путем замены в (6.111)$\widehat{\boldsymbol{p}} \to \widehat{\boldsymbol{p}} - (e/c)\widehat{\boldsymbol{A}}$ и добавлением к гамильтониану слагаемого $e\widehat{\varphi}$, где $\widehat{\varphi}$ - оператор скалярного потенциала (в координатном представлении оператор умножения на функцию координат). В итоге гамильтониан примет вид

$$\widehat{\mathscr{H}} = \mathrm{c}\widehat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \left(\widehat{\boldsymbol{p}} - \frac{e}{c}\widehat{\boldsymbol{A}}\right) + \widehat{\beta}mc^2 + e\varphi(\boldsymbol{r}) \tag{6.116}$$

Оператор $\widehat{\boldsymbol{A}}$ может включать в себя как классическое внешнее магнитное поле, так и квантованный поперечный векторный потенциал, описывающий рождение и уничтожение

фотонов.

Пример 6.13. Вывести из уравнения Дирака с гамильтонианом (6.116) уравнение непрерывности для плотности и тока вероятности релятивистской частицы. Построить плотность вероятности заданного значения координат частицы как неотрицательную величину $\rho(\boldsymbol{r},t) \geqslant 0$, удовлетворяюиуо закону сохранения вероятности $\int \rho(r,t)d^3r = \text{const}$, где интеграл распространен на все трехмерное пространство.

Решение. Запишем уравнение Дирака для Ψ и эрмитовски сопряженной волновой функции $\Psi^\dagger = (\psi_1^*, \psi_2^*, \psi_3^*, \psi_4^*)$,

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \left\{c\widehat{\boldsymbol{\alpha}}\cdot\left(\widehat{\boldsymbol{p}} - \frac{e}{c}\widehat{\boldsymbol{A}}\right) + \widehat{\beta}mc^2 + e\varphi(\boldsymbol{r})\right\}\Psi \tag{6.117}$$

$$-i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \Psi^\dagger\left\{-c\widehat{\boldsymbol{\alpha}}\cdot\left(\widehat{\boldsymbol{p}} + \frac{e}{c}\widehat{\boldsymbol{A}}\right) + \widehat{\beta}mc^2 + e\varphi(\boldsymbol{r})\right\} \tag{6.118}$$

где во втором уравнении дифференциальный оператор $\widehat{p}$ действует на функцию $\Psi^\dagger$, стоящую слева от него. Составим билинейную величину

$$\rho(r,t) = \sum_{\lambda=1}^{4}|\psi_\lambda|^2 = \Psi^\dagger(r,t)\Psi(r,t) \tag{6.119}$$

и продифференцируем ее по времени с помощью соотношений (6.118). Получим уравнение непрерывности

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = \frac{\partial\Psi^\dagger}{\partial t}\Psi + \Psi^\dagger\frac{\partial\Psi}{\partial t} = \frac{c}{i\hbar}\left[\left(\widehat{\boldsymbol{p}}\Psi^\dagger\right)\cdot\widehat{\boldsymbol{\alpha}}\Psi + \Psi^\dagger\widehat{\boldsymbol{\alpha}}\cdot\widehat{\boldsymbol{p}}\Psi\right] = -\nabla\cdot\boldsymbol{j}$$

где плотность тока вероятности

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t) = \mathrm{c}\Psi^\dagger(\boldsymbol{r},t)\widehat{\boldsymbol{\alpha}}\Psi(\boldsymbol{r},t) \tag{6.120}$$

- действительный вектор. Полная вероятность сохраняется, $\int\Psi^\dagger\Psi d^3r = \text{const}$, если плотность тока убывает быстрее, чем r^{-2}. Плотность электрического тока выражается как произведение заряда частицы на плотность тока вероятности: $\boldsymbol{j}_e(\boldsymbol{r},t) = e\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t)$.

Пример 6.14. Выполнить предельный переход от уравнения Дирака во внешнем поле с гамильтонианом (6.116) к уравнению Паули, в котором учитывается первая релятивистская поправка порядка $1/$.

Решение. Чтобы устранить энергию покоя частицы из уравнения движения, выполним подстановку

$$\Psi = \begin{pmatrix}\varphi\\ \chi\end{pmatrix}e^{-imc^2t/\hbar}$$

где $\varphi(\boldsymbol{r},t)$ и $\chi(\boldsymbol{r},t)$ - двухкомпонентные функции (спиноры). Подставив Ψ в уравнение (6.109) с гамильтонианом (6.116) и использовав представление (6.112) матриц Дирака, получим систему уравнений

$$i\hbar\frac{\partial\varphi}{\partial t} - U\varphi = c\hat{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\left(\hat{\boldsymbol{p}} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)\chi \tag{1}$$

$$i\hbar\frac{\partial\chi}{\partial t} + \left(2mc^2 - U\right)\chi = c\hat{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\left(\hat{\boldsymbol{p}} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)\varphi$$

Здесь мы рассматриваем $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)$ как обычную функцию координат и времени (оператор умножения), а скалярный потенциал электрического поля включен в потенциальную энергию U.

В нерелятивистском случае имеем неравенство $|U| \ll mc^2$. Кроме того, оператор $i\hbar\partial/\partial t$, будучи применен к волновым функциям φ, χ, дает множитель порядка $|\mathscr{E} - mc^2| \ll mc^2$. Поэтому во втором уравнении (1) в левой части можно оставить самое большое слагаемое $2mc^2\chi$ и получить

$$\chi = \frac{1}{2mc}\widehat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \left(\hat{\boldsymbol{p}} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)\varphi \tag{2}$$

что дает оценку $|\chi/\varphi| \approx p/mc \ll 1$. Подставляем (2) в первое уравнение (1) и преобразуем квадрат оператора:

$$\begin{gathered}\left[\widehat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \left(\widehat{\boldsymbol{p}} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)\right] = \widehat{\sigma}_\mu\widehat{\sigma}_\nu\left(\widehat{p}_\mu - \frac{e}{c}A_\mu\right)\left(\widehat{p}_\nu - \frac{e}{c}A_\nu\right) = \\ = (\delta_{\mu\nu} + ie_{\mu\nu\kappa}\widehat{\sigma}_\kappa)\left(\widehat{p}_\mu - \frac{e}{c}A_\mu\right)\left(\widehat{p}_\nu - \frac{e}{c}A_\nu\right) = \left(\widehat{\boldsymbol{p}} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)^2 - \frac{e\hbar}{c}\widehat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{H}\end{gathered} \tag{3}$$

Здесь использованы соотношения $\boldsymbol{H} = \nabla \times \boldsymbol{A}$ и

$$\hat{\sigma}_\mu\widehat{\sigma}_\nu + \widehat{\sigma}_\nu\widehat{\sigma}_\mu = 2\delta_{\mu\nu}, \quad [\hat{\boldsymbol{\sigma}} \times \hat{\boldsymbol{\sigma}}] = i\widehat{\boldsymbol{\sigma}}, \quad \widehat{\sigma}_\mu\widehat{\sigma}_\nu = \delta_{\mu\nu} + ie_{\mu\nu\kappa}\widehat{\sigma}_\kappa \tag{6.121}$$

для двухрядных матриц Паули.

После подстановки (3) в первое уравнение (1) получим уравнение Паули

$$i\hbar\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \widehat{\mathscr{H}}\varphi, \quad \widehat{\mathscr{H}} = \frac{1}{2m}\left(\widehat{\boldsymbol{p}} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)^2 + U - \frac{e\hbar}{2mc}\widehat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{H} \tag{6.122}$$

Слагаемое $-(e\hbar/2mc)\hat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{H} = -\widehat{\boldsymbol{\mu}} \cdot \boldsymbol{H}$ описывает взаимодействие спинового магнитного момента электрона с внешним магнитным полем.

Пример 6.15. На основе результатов двух предьдуиих примеров записать в приближении Паули плотность вероятности и плотность тока вероятности через спинор $\varphi(\boldsymbol{r},t)$.

Решение. С помощью (6.119) находим

$$\rho(\boldsymbol{r},t) = \sum_{\lambda=1}^{2}|\varphi_\lambda|^2 = \varphi^\dagger(\boldsymbol{r},t)\varphi(\boldsymbol{r},t) \tag{6.123}$$

так как малый спинор χ дает поправку порядка $1/c^2$. В том же приближении имеем

$$j(\boldsymbol{r},t) = c\left(\varphi^\dagger\widehat{\boldsymbol{\sigma}}\chi + \chi^\dagger\widehat{\boldsymbol{\sigma}}\varphi\right) \tag{1}$$

Подставим в (1) выражение для χ в виде формулы (2) из предыдущего примера, а также

$$\chi = \frac{1}{2mc}\left(i\hbar\nabla - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)\varphi^\dagger\hat{\boldsymbol{\sigma}} \tag{2}$$

После приведения подобных членов с использованием (6.121) находим

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t) = -\frac{i\hbar}{2m}\left(\varphi^\dagger\nabla\varphi - \left(\nabla\varphi^\dagger\right)\varphi\right) - \frac{e}{mc}\boldsymbol{A}\varphi^\dagger\varphi + \frac{\hbar}{2m}\nabla \times \left(\varphi^\dagger\widehat{\boldsymbol{\sigma}}\varphi\right) \tag{6.124}$$

что находится в согласии с результатом задачи 4.130 (но в той задаче не учитывался спин и поэтому отсутствует спиновое слагаемое).

Пример 6.16. Пусть движение релятивистской частиь описывается уравнением Дирака. Показать, что в потенциальном поле с центральной симметрией орбитальный момент частицы $\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}$ относительно иентра поля не сохраняется. Показать также, что физическая величина J, оператор которой выражается в виде

$$\widehat{\boldsymbol{J}} = -i\boldsymbol{r}\times\nabla + \frac{1}{2}\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}, \quad \widehat{\boldsymbol{\Sigma}} = -\frac{i}{2}\widehat{\boldsymbol{\alpha}}\times\widehat{\boldsymbol{\alpha}} = \begin{pmatrix} \widehat{\boldsymbol{\sigma}} & 0 \\ 0 & \widehat{\sigma} \end{pmatrix} \tag{6.125}$$

представляет собой интеграл движения, и ее можно интерпретировать, следовательно, как полный момент импульса, сохраняющийся ввиду изотропии пространства. Таким образом, оператор (1/2) г можсно приписать внутреннему моменту импульса (спину) частицьь.

Решение. Оба оператора, $\widehat{\boldsymbol{l}} = -i\boldsymbol{r}\times\nabla$ и $\widehat{\boldsymbol{\Sigma}}$, не зависят в представлении Шредингера от времени, поэтому условием сохранения соответствующих физических величин является их коммутативность с дираковским гамильтонианом

$$\widehat{\mathscr{H}} = c(\widehat{\boldsymbol{\alpha}}\cdot\widehat{\boldsymbol{p}}) + \widehat{\beta}mc^2 + U(r). \tag{1}$$

Вычисляем коммутаторы. Оба оператора коммутируют с U и с диагональной матрицей $\widehat{\beta}$, поэтому

$$\left[\widehat{\mathscr{H}}, \widehat{l}_\mu\right] = \frac{c}{\hbar}e_{\mu\nu\kappa}\widehat{\alpha}\widehat{\alpha}_\lambda\left(\widehat{p}_\lambda x_\nu - x_\nu\widehat{p}_\lambda\right)\widehat{p}_\kappa = -ice_{\mu\lambda\kappa}\widehat{\alpha}_\lambda\widehat{p}_\kappa = -ic[\widehat{\boldsymbol{\alpha}}\times\widehat{\boldsymbol{p}}]_\mu \neq 0 \tag{2}$$

где использованы перестановочные соотношения Гейзенберга (Д3.23). Таким образом, орбитальный момент не сохраняется.

Далее, используя представление (6.125) $\widehat{\Sigma}$ через матрицы $\widehat{\alpha}$, находим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\left[\widehat{\mathscr{H}}, \widehat{\Sigma}_\mu\right] &= \frac{ic}{4}\widehat{p}_\lambda e_{\mu\nu\kappa}\left(\widehat{\alpha}_\nu\widehat{\alpha}_\kappa\widehat{\alpha}_\lambda - \widehat{\alpha}_\lambda\widehat{\alpha}_\nu\widehat{\alpha}_\kappa\right) = \\ &= \frac{ic}{2}\widehat{p}_\lambda e_{\mu\nu\kappa}\left(\widehat{\alpha}_\nu\delta_{\kappa\lambda} - \widehat{\alpha}_\kappa\delta_{\lambda\nu}\right) = ic[\widehat{\boldsymbol{\alpha}}\times\widehat{\boldsymbol{p}}]_\mu \neq 0 \end{aligned} \tag{3}$$

Спин релятивистской частицы в центральном поле тоже не сохраняется. Но оператор полного момента $\widehat{J} = \widehat{\imath} + (1/2)\widehat{\Sigma}$ коммутирует с гамильтонианом, полный момент представляет собой интеграл движения (хотя его проекции одновременно не имеют определенных значений).

Пример 6.17. Получить все решения уравнения Дирака для свободной частиы, отвечающие заданному импульсу p, но разным знакам энергии и разным значениям проекиии спина. Какие значения проекиии спина возможныу при заданных импульсе и энергии?

Решение. Ищем решение уравнения Дирака для свободной частицы в виде

$$\Psi_p = uA\exp[i(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r} - \mathscr{E}t)/\hbar] = \begin{pmatrix}\varphi\\ \chi\end{pmatrix}A\exp[i(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r} - \mathscr{E}t)/\hbar]$$

где A - нормировочный множитель координатной волновой функции, u - не зависящий от координат и времени четырехкомпонентный биспинор, на который наложим условие нормировки

$$u^\dagger u = 1 \tag{2}$$

Множитель $A = (2\pi\hbar)^{-3/2}$, если нормировка произведена на $\delta(\boldsymbol{p}-\boldsymbol{p}')$, и $A = \mathscr{V}^{-1/2}$, если использованы условия периодичности, как для фотонов в разделе 6.1.

Подставив (1) в уравнение Дирака, получим условие, которому должен удовлетворять биспинор u:

$$\left(c\widehat{\boldsymbol{\alpha}}\cdot\widehat{\boldsymbol{p}}+\widehat{\beta}mc^2-\mathscr{E}\right)u=0 \tag{3}$$

или, если использовать представление матриц Дирака через матрицы Паули (6.112),

$$\begin{cases} c(\hat{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\hat{\boldsymbol{p}})\chi+(mc^2-\mathscr{E})\,\varphi=0 \\ c(\hat{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\widehat{\boldsymbol{p}})\varphi+(mc^2+\mathscr{E})\,\chi=0 \end{cases} \tag{4}$$

Из (4) следуют равенства

$$\varphi=\frac{c(\widehat{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\widehat{\boldsymbol{p}})\chi}{\mathscr{E}-mc^2},\quad \chi=\frac{c(\widehat{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\widehat{\boldsymbol{p}})\varphi}{\mathscr{E}+mc^2} \tag{5}$$

или

$$\frac{c^2(\widehat{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\widehat{\boldsymbol{p}})^2}{\mathscr{E}^2-m^2c^4}=\frac{c^2p^2}{\mathscr{E}^2-m^2c^4}=1$$

откуда находим возможные значения энергии:

$$\mathscr{E}(p)=\pm\sqrt{c^2p^2+m^2c^4} \tag{6}$$

Вопрос об интерпретации отрицательных значений энергии уже обсуждался в примере 6.12 .

Уравнение Дирака позволило только установить связь между спинорами χ и φ. Для их вычисления нужно потребовать, чтобы в рассматриваемом состоянии имела определенное значение проекция спина на некоторое направление n. С помощью оператора спина (см. пример 6.16) записываем соответствующее уравнение $(1/2)(\boldsymbol{n}\cdot\widehat{\boldsymbol{\Sigma}})u=\mu u$ или систему уравнений для двух спиноров

$$(1/2)(\boldsymbol{n}\cdot\widehat{\boldsymbol{\sigma}})\varphi=\mu\varphi,\quad (1/2)(\boldsymbol{n}\cdot\widehat{\boldsymbol{\sigma}})\chi=\mu\chi \tag{7}$$

где μ - собственное значение проекции спина. Сравнивая (7) и (4), приходим к выводу, что при заданном значении вектора импульса p спин может иметь определенное значение проекции только на направление импульса $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{p}/p$, так как проекции оператора спина $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ на разные оси не коммутируют и уравнения (4), (7) при произвольном n не могут удовлетворяться одновременно.

Уравнения (7) одинаковы. Явный вид оператора $(\boldsymbol{n}\cdot\hat{\sigma})$ легко записать с помощью формул (6.113):

$$(\boldsymbol{n}\cdot\widehat{\boldsymbol{\sigma}})=\begin{pmatrix}\cos\theta & e^{-i\phi}\sin\theta\\ e^{i\phi}\sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix} \tag{8}$$

где углы θ,ϕ определяют направление оси квантования (импульса) в некоторой инерциальной системе координат (x,y,z). Решая уравнение

$$(1/2)(\boldsymbol{n}\cdot\widehat{\boldsymbol{\sigma}})w_\mu=\mu w_\mu,\quad w_\mu=\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix},\quad |a|^2+|b|^2=1 \tag{9}$$

находим собственные значения проекций спина $\mu=\pm1/2$ и собственные спиноры

$$w_{1/2}=\begin{pmatrix}e^{-i\phi/2}\cos(\theta/2)\\ e^{i\phi/2}\sin(\theta/2)\end{pmatrix},\quad w_{-1/2}=\begin{pmatrix}-e^{-i\phi/2}\sin(\theta/2)\\ e^{i\phi/2}\cos(\theta/2)\end{pmatrix} \tag{10}$$

Напомним, что любая волновая функция в квантовой механике определена с точностью до фазового множителя вида $e^{i\alpha}, \alpha$ - действительная постоянная. Если ось Oz совмещена с направлением импульса n, то $\theta = 0$ и спиноры можно записать в виде

$$w_{1/2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_{-1/2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{11}$$

опустив фазовые множители $e^{\pm i\phi/2}$.
Собирая воедино полученные результаты, приходим к выводу, что заданному импульсу p соответствует 4 разных биспинора, описывающих разные физические состояния релятивистской частицы. Нумеруя их индексом λ, имеем

λ	1	2	3	4
состояние	,$+1/2$	,$+-1/2$	,$-1/2$	,$--1/2$

Четыре пары величин во второй строке указывают знак энергии и значение проекции спина. Биспиноры имеют вид

$$\begin{array}{l} u_\lambda(\boldsymbol{p}) = N\begin{pmatrix} w_\mu \\ \frac{2\mu cp}{\mathscr{E}+mc^2} w_\mu \end{pmatrix}, \quad \mathscr{E} \geqslant mc^2 \\ \lambda = 1, 2 \\ u_\lambda(\boldsymbol{p}) = N\begin{pmatrix} \frac{2\mu cp}{\mathscr{E}-mc^2} w_\mu \\ w_\mu \end{pmatrix}, \quad \mathscr{E} \leqslant -mc^2 \\ \lambda = 3, 4 \end{array} \tag{12}$$

Здесь w_μ дается выражениями (10) или (11), множитель

$$N = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{mc^2}{2\sqrt{m^2c^4 + p^2c^2}}}$$

обеспечивает условие нормировки (2). Отметим, что все 4 биспинора соответствуют разным собственным значениям эрмитовых операторов - гамильтониана и проекции спина на импульс. Поэтому они все взаимно ортогональны и удовлетворяют условию полноты:

$$u^\dagger_{\lambda'} u_\lambda = \delta_{\lambda\lambda'}, \quad \sum_{\lambda=1}^{4} u^*_{\lambda' j} u_{\lambda k} = \delta_{jk} \tag{13}$$

где индексы $j, k = 1, 2, 3, 4$ нумеруют компоненты биспинора. В дираковских обозначениях

$$\langle \lambda' | \lambda \rangle = \delta_{\lambda\lambda'}, \quad \sum_{\lambda=1}^{4} |\lambda\rangle\langle\lambda| = \widehat{1} \tag{14}$$

Оператор взаимодействия релятивистской частицы с фотонами. Как и в случае нерелятивистской системы (см. раздел 6.2), нужно выделить из дираковского гамильтониана (6.116), учитывающего взаимодействие с внешним полем, слагаемые, связывающие частицу с фотонной подсистемой. Оператор (6.116) содержит единственное такое слагаемое

$$\widehat{V} = -e\widehat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \widehat{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{r}) \tag{6.126}$$

где $\widehat{\alpha}$ - матрица Дирака (6.112), $\widehat{A}(\boldsymbol{r})$ - оператор векторного потенциала (6.13). При наличии системы дираковских частиц нужно взять сумму выражений (6.126) по всем частицам:

$$\widehat{V} = -\sum_{a=1}^{N} e_a \widehat{\boldsymbol{\alpha}}_a \cdot \widehat{\boldsymbol{A}}\left(\boldsymbol{r}_a\right) \tag{6.127}$$

Невозмущенная волновая функция, как и в нерелятивистском случае, представляет собой произведение векторов состояний частиц и электромагнитного поля.

Пример 6.18. Фотон с волновым вектором $\boldsymbol{k}_0$ и поляризацией $\boldsymbol{e}_0$ рассеивается на свободном электроне, который первоначально имел пренебрежимо малый (нулевой) импульс. Вычислить вероятность в единиу времени и дифферениильное сечение прочесса, в результате которого фотон перейдет в состояние с волновым вектором k и поляризаиией e. Провести усреднение по поляризачиям начального фотона и по спиновым состояниям электрона. Проанализировать различные соотношения между $\hbar\omega_0$ и mc^2 (эффект Компттона).

Решение. Процесс с двумя фотонными состояниями расститывается во втором порядке теории возмущений. Задача сходна с рассмотренными ранее случаями рассеяния фотонов связанными (атомными) электронами. Вероятность перехода в единицу времени дается формулой (1) из решения задачи 6.67, в которой надо использовать оператор возмущения (6.126):

$$dw_{fi} = \frac{2\pi}{\hbar}\left|\sum_l \frac{\langle f|\widehat{V}|l\rangle\langle l|\widehat{V}|i\rangle}{\epsilon_i - \epsilon_l}\right|^2 \delta\left(\epsilon_i - \epsilon_f\right)\frac{\mathscr{V}k^2 dk d\Omega}{(2\pi)^3} \tag{1}$$

где индексами i, l, f обозначены начальное, промежуточное и конечное состояния всей системы (электрон + фотоны).

При решении задачи 6.64 уже обсуждались два типа промежуточных состояний:

1. При первом переходе $i \to l$ электрон поглощает первичный фотон, а на втором этапе $l \to f$ испускает рассеянный фотон.

2. При первом переходе $i \to l$ электрон испускает рассеянный фотон, а на втором переходе $l \to f$ поглощает первичный фотон.

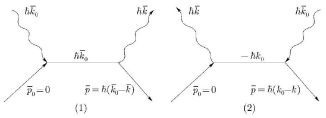


Рис. 6.3

Во всех трех состояниях электрон является свободным, и его можно описывать волновыми функциями типа плоской волны (см. пример 6.17). При этом структура матричных элементов $\langle f|\widehat{V}|l\rangle, \langle l|\widehat{V}|i\rangle$ такова, что интегрирование по координатам производится от произведения трех экспонент и обеспечивает закон сохранения импульса при каждом переходе:

$$\langle l|\widehat{V}|i\rangle \propto \int \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left(\boldsymbol{p}_l \mp \hbar\boldsymbol{k} - \boldsymbol{p}_i\right)\right\} d^3r = \mathscr{V}\delta_{\boldsymbol{p}_l, p_i \pm \hbar k} \tag{2}$$

где знак минус соответствует поглощению фотона, а знак плюс - его испусканию. С учетом сохранения импульса переходы типа 1 и 2 можно изобра-
зить графически (диаграммы Фейнмана на рис. 6.3). Сплошными линиями изображены состояния электрона, волнистыми - фотонов, с указанием их импульсов. Каждой вершине, в которой сходятся три линии, нужно сопоставить матричный элемент оператора $\widehat{V}$. В каждой вершине выполняется закон сохранения импульса, но не энергии. Энергия сохраняется лишь для всего процесса в целом.

Вычислим значения величин, входящих в (1). Очевидно, что начальная энергия системы $\epsilon_i = mc^2 + \hbar\omega_0$. Введем обозначение ϵ' для энергии промежуточного состояния, соответствующей диаграмме 1, и ϵ'' для диаграммы 2. Тогда

$$\epsilon' = \mathscr{E}', \quad \epsilon'' = \mathscr{E}'' + \hbar\omega_0 + \hbar\omega$$
$$\text{где} \quad \mathscr{E}' = \pm\sqrt{m^2c^4 + (\hbar\omega_0)^2}, \quad \mathscr{E}'' = \pm\sqrt{m^2c^4 + (\hbar\omega)^2} \tag{3}$$

- энергии электрона в промежуточных состояниях. Они могут иметь оба знака. Наконец, для разностей энергий в знаменателях (1) получаем

$$\epsilon_i - \epsilon' = mc^2 + \hbar\omega_0 - \mathscr{E}', \quad \epsilon_i - \epsilon'' = mc^2 - \hbar\omega - \mathscr{E}'' \tag{4}$$

Далее вычисляем матричные элементы, обозначив для краткости через F сумму по l в формуле (1):

$$\begin{aligned} F =& \sum_l \frac{\langle f|\widehat{V}|l\rangle\langle l|\widehat{V}|i\rangle}{\epsilon_i - \epsilon_l} = \\ =& \frac{2\pi\hbar c^2 e^2}{\mathscr{V}\sqrt{\omega\omega_0}} \sum_{\lambda=1}^{4} \left\{ \frac{\langle u|\widehat{\boldsymbol{\alpha}}\cdot\boldsymbol{e}^*\,|u'_\lambda\rangle\,\langle u'_\lambda|\,\widehat{\boldsymbol{\alpha}}\cdot\boldsymbol{e}_0\,|u_0\rangle}{mc^2 + \hbar\omega_0 - \mathscr{E}'_\lambda} + \right. \\ & \left. + \frac{\langle u|\widehat{\boldsymbol{\alpha}}\cdot\boldsymbol{e}_0\,|u''_\lambda\rangle\,\langle u''_\lambda|\,\widehat{\boldsymbol{\alpha}}\cdot\boldsymbol{e}^*\,|u_0\rangle}{mc^2 - \hbar\omega - \mathscr{E}''_\lambda} \right\} \end{aligned}$$

Здесь суммирование по λ означает учет двух знаков энергии и двух спиновых состояния для каждого биспинора u', u''. Указанное суммирование удобно выполнить, переведя всю зависимость от λ в числитель. Воспользуемся дираковским гамильтонианом (6.111) и запишем

$$\left(c\hbar\widehat{\boldsymbol{\alpha}}\cdot\boldsymbol{k}_0 + \widehat{\beta}mc^2\right)u'_\lambda = \mathscr{E}'_\lambda u'_\lambda, \quad \left(-c\hbar\widehat{\boldsymbol{\alpha}}\cdot\boldsymbol{k} + \widehat{\beta}mc^2\right)u''_\lambda = \mathscr{E}''_\lambda u''_\lambda \tag{6}$$

Умножив в (5) числитель и знаменатель первой дроби на $mc^2 + \hbar\omega_0 + \mathscr{E}'_\lambda$, а второй дроби на $mc^2 - \hbar\omega + \mathscr{E}''_\lambda$, и воспользовавшись (6), будем иметь

$$\begin{aligned} F = \frac{2\pi\hbar c^2 e^2}{V\sqrt{\omega\omega_0}} \sum_{\lambda=1}^{4} \left\{ \frac{\langle u|\widehat{\boldsymbol{\alpha}}\cdot\boldsymbol{e}^*\left(mc^2 + \hbar\omega_0 + c\hbar\widehat{\boldsymbol{\alpha}}\cdot\boldsymbol{k}_0 + \widehat{\boldsymbol{\beta}}mc^2\right)|u'_\lambda\rangle\,\langle u'_\lambda|\,\widehat{\boldsymbol{\alpha}}\cdot\boldsymbol{e}_0\,|u_0\rangle}{\left(mc^2 + \hbar\omega_0\right)^2 - \mathscr{E}'^2} + \right. \\ \left. + \frac{\langle u|\widehat{\alpha}\cdot e_0\left(mc^2 - \hbar\omega - c\hbar\widehat{\alpha}\cdot\boldsymbol{k} + \widehat{\beta}mc^2\right)|u''_\lambda\rangle\,\langle u''_\lambda|\,\widehat{\alpha}\cdot e^*\,|u_0\rangle}{\left(mc^2 - \hbar\omega\right)^2 - E''^2} \right\}. \end{aligned} \tag{7}$$

Для упрощения этих выражений используем условие полноты биспиноров (уравнение (14) примера 6.17), а также соотношения (6) для начального состояния электрона, которые дают $\widehat{\beta}u_0 = u_0$, и правило антикоммутации матриц Дирака (6.115). В итоге получаем

$$\begin{aligned} F = \frac{\pi\hbar e^2}{\mathscr{V}m\sqrt{\omega\omega_0}} \{ & 2\left(\boldsymbol{e}_0\cdot\boldsymbol{e}^*\right)\langle u|u_0\rangle + \langle u|\left(\widehat{\boldsymbol{\alpha}}\cdot\boldsymbol{e}^*\right)\left(\widehat{\boldsymbol{\alpha}}\cdot\boldsymbol{n}_0\right)\left(\widehat{\boldsymbol{\alpha}}\cdot\boldsymbol{e}_0\right) + \\ & + \left(\widehat{\boldsymbol{\alpha}}\cdot\boldsymbol{e}_0\right)\left(\widehat{\boldsymbol{\alpha}}\cdot\boldsymbol{n}\right)\left(\widehat{\boldsymbol{\alpha}}\cdot\boldsymbol{e}^*\right)|u_0\rangle \} \end{aligned} \tag{8}$$

где единичные векторы $\boldsymbol{n}_0, \boldsymbol{n}$ указывают направление импульсов первичного и рассеянного фотонов.

Если направления спина электрона в начальном и конечном состояниях не фиксируются, то квадрат модуля матричного элемента (8) нужно усреднить по начальным и просуммировать по конечным состояниям. Очевидно, что начальная энергия электрона $\mathscr{E}_0 = mc^2$ и его конечная энергия $\mathscr{E} = mc^2 + \hbar(\boldsymbol{k}_0 - \boldsymbol{k})$ положительны. Поэтому усредненный квадрат модуля (9)

$$\overline{|F|^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi\hbar e^2}{\mathscr{V} m\sqrt{\omega\omega_0}}\right)^2 \sum_{\lambda_0=1}^{2}\sum_{\lambda=1}^{2} |\langle u|\widehat{B}|u_0\rangle|^2$$

где $\widehat{B} = 2(e_0 \cdot e^*)\hat{1} + (\widehat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \boldsymbol{e}^*)(\widehat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \boldsymbol{n}_0)(\widehat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \boldsymbol{e}_0) + (\widehat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \boldsymbol{e}_0)(\widehat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot \boldsymbol{n})(\widehat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot e^*)$

- оператор, входяший в (8). Суммирование производится только по двум состояниям, относящимся к положительным энергиям. Чтобы снова воспользоваться полнотой системы биспиноров, удобно ввести операторы проецирования на состояния с положительной энергией

$$\widehat{P}_0 = \frac{\mathscr{E}_0 + \widehat{\mathscr{H}_0}}{2\mathscr{E}_0}, \quad \widehat{P} = \frac{\mathscr{E} + \widehat{\mathscr{H}}}{2\mathscr{E}} \tag{10}$$
$$\text{где } \widehat{\mathscr{H}_0} = \widehat{\beta}mc^2, \quad \widehat{\mathscr{H}} = c\hbar\widehat{\boldsymbol{\alpha}} \cdot (\boldsymbol{k}_0 - \boldsymbol{k}) + \widehat{\beta}mc^2$$

- гамильтонианы начального и конечного состояний электрона в импульсном представлении. Имеем для состояний с положительной энергией $\widehat{P}_0 u_0 = u_0, \widehat{P}u = u$, тогда как для состояний с отрицательной энергией $\widehat{P_0}u_0 = \widehat{P}u = 0$. С использованием операторов проецирования распространяем суммирование в (9) на все четыре состояния и получаем

(11) $\overline{|F|^2} = \frac{\pi^2\hbar^2e^4}{2^2\mathscr{V}^2m^2\omega\omega_0}\sum_{\lambda_0=1}^{4}\sum_{\lambda=1}^{4}\langle\lambda|\widehat{B}\widehat{P}_0|\lambda_0\rangle\langle\lambda_0|\widehat{B}^\dagger\widehat{P}|\lambda\rangle =$

$$= \frac{\pi^2\hbar^2e^4}{2\mathscr{V}^2m^2\omega\omega_0} Sp\left\{\widehat{B}\widehat{P}_0\widehat{B}^\dagger\widehat{P}\right\}$$

Используем значение шпура, вычисленного в задаче 6.77• для квантов с линейной поляризацией:

$$Sp\left\{\widehat{B}\widehat{P}_0\widehat{B}^\dagger\widehat{P}\right\} = \frac{8mc^2}{\mathscr{E}}(\boldsymbol{e}_0 \cdot \boldsymbol{e})^2 + \frac{2\hbar(\omega_0 - \omega)}{\mathscr{E}}(1 - \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{n}_0) \tag{12}$$

Вычислим дифференциальное сечение рассеяния фотона на свободном электроне, для чего необходимо разделить (1) на плотность потока падающих фотонов $c/\mathscr{V}$ и проинтегрировать по энергиям рассеянного фотона с использованием дельта-функции:

$$d\sigma = \frac{\mathscr{V}}{c}\int d\overline{w_{fi}} \tag{13}$$

Чертой обозначено выполненное ранее усреднение по начальным и суммирование по конечным поляризациям электрона. Из закона сохранения импульса будем иметь

(14) $\epsilon_i - \epsilon_f = mc^2 + \hbar(\omega_0 - \omega) - \sqrt{m^2c^4 + \hbar^2(\omega_0^2 + \omega^2 - 2\omega_0\omega\cos\theta)} = 0$

где θ - угол рассеяния кванта. При фиксированном угле рассеяния получаем

$$\frac{d\left(\epsilon_i-\epsilon_f\right)}{d(\hbar\omega)}=\frac{mc^2+\hbar\omega_0(1-\cos\theta)}{\mathscr{E}}=\frac{mc^2\omega_0}{\mathscr{E}\omega} \tag{15}$$

что позволяет записать с помощью соотношения (1.209)

$$\delta\left(\epsilon_i-\epsilon_f\right)=\frac{\mathscr{E}\omega}{mc^2\omega_0}\delta\left(\hbar\omega_{sc}-\hbar\omega\right) \tag{16}$$

Здесь

$$\omega_{sc}=\frac{\hbar\omega_0}{1+\frac{\hbar\omega_0}{mc^2}(1-\cos\theta)} \tag{17}$$

- частота рассеянного фотона, выраженная через частоту первичного фотона и угол рассеяния (см. ответ к задаче 6.73). Использовав последовательно формулы (1), (5)-(12) и (16), получим искомое сечение (формулу КлейнаНишины-Тамма):

$$d\sigma=\frac{1}{4}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\left[\frac{\omega_0}{\omega}+\frac{\omega}{\omega_0}-2+4\left(e_0\cdot e\right)^2\right]d\Omega \tag{6.128}$$

Здесь ω - частота рассеянного кванта, которая дается правой частью равенства (17).

Метод эквивалентных фотонов.

Пример 6.19. Частица с зарядом q и релятивистским фактором $\gamma=\mathscr{E}/Mc^2\gg 1$ совериает классическое движение по прямолинейной траектории. Показать, что ее электромагнитное поле совпадает с набором плоских монохроматических волн в свободном пространстве тем точнее, чем больше ее релятивистский фактор. Представить поле частиць в виде набора «эквивалентных фотонов» и найти их плотность $n(\omega)$ в расчете на единичный интервал частот.

Решение. Рассмотрим свойства гармоник Фурье (см. задачу 5.144) в сильно релятивистском случае:

$$\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{k}\omega}=-i8\pi^2q\frac{\delta(\omega-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v})}{k^2-\omega^2/c^2}\left(\boldsymbol{k}-\frac{\omega\boldsymbol{v}}{c^2}\right),\quad \boldsymbol{H}_{\boldsymbol{k}\omega}=\frac{\boldsymbol{v}}{c}\times\boldsymbol{E} \tag{1}$$

Наличие дельта-функции в (1) дает дисперсионное соотношение $\omega(\boldsymbol{k})=kv\cos\theta$. Знаменатель $k^2-\omega^2/c^2=k^2\left[1-(v^2/c^2)\cos\theta\right]$ показывает, что наибольшую величину имеют гармоники с волновыми векторами, направленными вдоль скорости $\boldsymbol{v}$ в пределах угла $\theta_c\approx 1/\gamma\ll 1$. При заданном k находим отличие частоты гармоник Фурье рассматриваемого поля от частоты фотона:

$$\omega_{ph}(k)-\omega(\boldsymbol{k})=\omega_{ph}[1-(v/c)\cos\theta]\approx\omega_{ph}/\gamma^2 \tag{2}$$

Это отличие мало в существенной области углов при $\gamma\gg 1$. Сравним также составляющие электрического поля, продольную и поперечную относительно скорости частицы. Имеем

$$\left|\frac{\boldsymbol{E}^{\parallel}_{\boldsymbol{k}\omega}}{\boldsymbol{E}^{\perp}_{\boldsymbol{k}\omega}}\right|\approx\frac{1}{\gamma^2\theta_c}\approx\frac{1}{\gamma}\ll 1 \tag{3}$$

при характерных углах. Следовательно, при $\gamma\gg 1$ обе напряженности поля обладают свойством поперечности, подобно волнам в вакууме.

Для вычисления плотности числа эквивалентных фотонов воспользуемся координатным представлением полей в плоскости $z = 0$, перпендикулярной скорости частицы (см. задачи 4.34, 5.145):

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}_\perp, t) = -\frac{q(\boldsymbol{r}_\perp + \boldsymbol{v}t)}{(v^2t^2 + r_\perp^2/\gamma^2)^{3/2}}, \quad \boldsymbol{H} = \frac{q\boldsymbol{r}_\perp \times \boldsymbol{v}}{(v^2t^2 + r_\perp^2/\gamma^2)^{3/2}} \tag{4}$$

Произведем разложение напряженностей поля на монохроматические компоненты:

$$\boldsymbol{E}_\omega(\boldsymbol{r}_\perp) = \int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}_\perp, t)\, e^{i\omega t} dt = \tag{5}$$

$$= -\frac{2q}{\gamma v^2 r_\perp}\left[|\omega|\boldsymbol{r}_\perp K_1\left(\frac{|\omega|r_\perp}{\gamma v}\right) + i\frac{\omega v}{|\omega|}K_0\left(\frac{|\omega|r_\perp}{\gamma v}\right)\right]$$

$$\boldsymbol{H}_\omega(\boldsymbol{r}_\perp) = \frac{2q|\omega|}{\gamma v^2 c r_\perp}[\boldsymbol{r}_\perp \times \boldsymbol{v}]\, K_1\left(\frac{|\omega|r_\perp}{\gamma v}\right) \tag{6}$$

Здесь мы использовали интегральные представления модифицированных функций Бесселя [Абрамовиц и Стиган (1979)] и рекуррентные соотношения между ними.

Плотность числа фотонов $n(r_\perp, \omega)$, приходящихся на единичный интервал частоты и движущихся с прицельным параметром $r_\perp$ (т. е. на расстоянии $r_\perp$ от классической траектории частицы) можно определить из равенства

$$\frac{c}{4\pi v}\int_{-\infty}^{\infty}[\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}] \cdot \boldsymbol{v} dt = \int_0^{\infty} n(r_\perp, \omega)\, \hbar\omega d\omega \tag{7}$$

Вычисляя левую часть с помощью формул (5), (6), находим

$$n(r_\perp, \omega) = \frac{q^2}{\pi^2 c^3 \gamma^2 \hbar}\omega K_1^2\left(\frac{|\omega|r_\perp}{\gamma v}\right), \quad \omega > 0 \tag{8}$$

Понятие прицельного параметра фотона имеет смысл только при условии малости его волнового пакета по сравнению с самим прицельным параметром, т. е. при $\lambda = 2\pi c/\omega \ll r_\perp$, или при $\omega \gg 2\pi c/r_\perp$. Спектр фотонов (8) обрезается при $\omega \gg \gamma c/r_\perp$.

Поскольку классическое описание движения частицы является приближенным, прицельный параметр $r_\perp$ не может быть сколь угодно малым. Пределом локализации частицы является ее комптоновская длина волны Λ_C, в противном случае задача становится многочастичной. Поэтому в формуле (8) следует считать

$$r_\perp \geqslant r_{\min} = \kappa\Lambda_C = \kappa\hbar/Mc \tag{9}$$

где κ - безразмерная величина порядка единицы. При этом спектр фотонов обрезается на энергиях $\hbar\omega_{\max} \approx \mathscr{E}/\kappa$ порядка энергии частицы.

Полное число эквивалентных фотонов данной частоты (независимо от параметра удара) получим путем интегрирования (8) по плоскости, перпендикулярной скорости частицы:

$$n(\omega) = \int\limits_{r_{\text{mil1}}}^{\infty} n\left(r_{\perp}, \omega\right) 2\pi r_{\perp} dr_{\perp} = \tag{10}$$

$$= \frac{2}{\pi}\frac{q^2}{\hbar c\omega}\left\{z_m K_0\left(z_m\right) K_1\left(z_m\right) + \frac{1}{2}z_m^2 K_0^2\left(z_m\right) - \frac{1}{2}z_m^2 K_1^2\left(z_m\right)\right\}$$

$$z_m = \kappa\frac{\hbar\omega}{\mathscr{E}}$$

Интегрирование выполнено с помощью рекуррентных соотношений между функциями Макдональда. Низкочастотная асимптотика распределения фотонов имеет вид

$$n(\omega) = \frac{2}{\pi}\frac{q^2}{\hbar c}\frac{1}{\omega}\ln\left(\frac{\mathscr{E}}{\hbar\omega}\right) \tag{6.129}$$

Здесь опущены члены порядка 1 по сравнению с $\ln(\mathscr{E}/\hbar\omega) \gg 1$.
Метод эквивалентных фотонов позволяет рассматривать различные радиационные процессы с участием ультрарелятивистских частиц как результат комптоновского (или томсоновского) рассеяния на них псевдофотонов
с образованием реальных фотонов. При этом для расчета сечений в некоторых случаях необходимо перейти в систему отсчета, сопутствующую излучающей частице (см. задачи 6.81 и далее).

Рекомендуемая литература: [Гайтлер (1956)], [Мак-Коннел (1962)], [Ахиезер и Берестецкий (1981)], [Берестецкий и др. (1989)], [Фейнман (2000)], [Ициксон и Зюбер (1984)], [Дирак (1990)], [Боголюбов и Ширков (1980)], [Джексон (1975)].

Задачи

6.71. Указать плотность лагранжевой функции (см. раздел 4.3), которая приводит к уравнениям Дирака (6.117), (6.118). Построить гамильтониан (6.116) из лагранжиана.
6.72. Построить оператор скорости свободной релятивистской частицы с гамильтонианом (6.111) и определить его собственные значения. Дать им физическую интерпретацию.
6.73. Пользуясь законами сохранения энергии и импульса, выразить частоту рассеянного фотона ω в эффекте Комптона через частоту первичного фотона ω_0 и угол рассеяния θ. Определить возможные значения энергии рассеянного фотона. Выразить также изменение длины волны фотона через комптоновскую длину волны электрона Λ_C и угол рассеяния. Электрон первоначально покоился.
6.74. Показать, что

$$\mathrm{Sp}\left(\widehat{\alpha}_\mu\right) = Sp\left(\widehat{\alpha}_\mu\widehat{\beta}\right) = Sp\left(\widehat{\alpha}_\mu\widehat{\alpha}_\nu\right) = Sp\left(\widehat{\alpha}_\mu\widehat{\alpha}_\nu\widehat{\beta}\right) =$$
$$= \mathrm{Sp}\left(\widehat{\alpha}_\mu\widehat{\alpha}_\nu\widehat{\alpha}_\lambda\right) = Sp\left(\widehat{\alpha}_\mu\widehat{\alpha}_\nu\widehat{\alpha}_\lambda\widehat{\beta}\right) = 0 \tag{6.130}$$

где $\widehat{\alpha}_\mu, \widehat{\beta}$ - матрицы Дирака, причем $\mu \neq \nu \neq \lambda$.
УказАниЕ. Использовать циклическую перестановку сомножителей под знаком шпура и представить каждое из приведенных выражений (кроме первого) в виде некоторого коммутатора.
6.75. Доказать равенства

$$(\widehat{\alpha}\cdot e)(\widehat{\alpha}\cdot n) = -(\widehat{\alpha}\cdot n)(\widehat{\boldsymbol{\alpha}}\cdot e), \quad (\widehat{\alpha}\cdot a)(\widehat{\boldsymbol{\alpha}}\cdot a) = a^2, \quad Sp(\widehat{\boldsymbol{\alpha}}\cdot\boldsymbol{a})(\widehat{\boldsymbol{\alpha}}\cdot\boldsymbol{b}) = 4(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}) \tag{6.130}$$

где $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ - произвольные неоператорные векторы, $\boldsymbol{e}, \boldsymbol{n}$ - взаимно перпендикулярные векторы.

6.76. Вычислить шпуры

$$Sp\left(\widehat{\alpha}_\mu \widehat{\alpha}_\nu\right) = 4\delta_{\mu\nu}, \quad Sp\left(\widehat{\alpha}_\mu \widehat{\alpha}_\nu \widehat{\alpha}_\lambda \widehat{\alpha}_\sigma\right) = 4\left(\delta_{\mu\nu}\delta_{\lambda\sigma} + \delta_{\mu\sigma}\delta_{\lambda\nu} - \delta_{\mu\lambda}\delta_{\nu\sigma}\right) \tag{6.131}$$

УКАЗАНИЕ. Воспользоваться правилами коммутации матриц Дирака и их трансформационными свойствами как компонент трехмерных векторов.

6.77. Вычислить $Sp\left(\widehat{B}\widehat{P}_0\widehat{B}^\dagger\widehat{P}\right)$ (см. пример 6.18) для случая линейно поляризованных фотонов, когда орты поляризации действительны.

УказАние. Использовать формулы (6.130)-(6.131).

6.78. Произвести анализ формулы Клейна - Нишины - Тамма (6.128).

1. Записать сечения $d\sigma_\parallel, d\sigma_\perp$ рассеяния линейно поляризованного фотона для случаев, когда рассеянный фотон поляризован в плоскости (k, e_0) и перпендикулярно этой плоскости, а также для случая, когда поляризация рассеянного фотона не фиксируется.

2. Показать, что сечение рассеяния неполяризованных фотонов $d\bar{\sigma}$ имеет вид

$$d\bar{\sigma} = \frac{1}{2} r_0^2 \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\left[\frac{\omega_0}{\omega} + \frac{\omega}{\omega_0} - \sin^2\theta\right] d\Omega \tag{6.132}$$

3. Произвести предельный переход к нерелятивистскому случаю $\bar{\omega}_0 \ll mc^2$ и сравнить результат с формулой Томсона (см. задачи 5.128, 5.129).

4. Рассмотреть ультрарелятивистский случай $\bar{\omega}_0 \gg mc^2$ и проанализировать области больших и малых углов рассеяния по отдельности.

6.79. Проинтегрировать сечение рассеяния неполяризованных фотонов на электроне по углу рассеяния и найти полное сечение σ_C комптоновского рассеяния. Рассмотреть, в частности, нерелятивистский и релятивистский предельные случаи. Построить график зависимости от параметра $x = \hbar\omega_0/mc^2$ его отношения σ_C/σ_T к томсоновскому сечению (см. задачу 5.129).

6.80. Записать дифференциальное сечение комптоновского рассеяния неполяризованных фотонов (6.132) в расчете на единичный интервал энергии рассеянного кванта $\hbar\omega$.

6.81. Тяжелая ультрарелятивистская частица налетает на нерелятивистский электрон. Пользуясь методом эквивалентных фотонов, вычислить суммарное по всем направлениям эффективное дифференциальное сечение излучения фотонов заданной энергии.

6.82ˆ. Ультрарелятивистский электрон сталкивается с неподвижным атомным ядром, имеющим заряд Ze. Пользуясь методом эквивалентных фотонов, вычислить эффективное дифференциальное сечение тормозного излучения квантов заданной частоты.

6.83. Ультрарелятивистский электрон сталкивается с первоначально неподвижным электроном. Пользуясь методом эквивалентных фотонов, вычислить эффективное дифференциальное сечение тормозного излучения квантов заданной частоты.

5.3.4 6.4. Answers and Solutions

6.3. Применим операторное разложение (Д3.67) к гейзенберговскому оператору

$$\widehat{a}_H(t) = \exp(\alpha\widehat{\mathscr{H}})\widehat{a}\exp(-\alpha\widehat{\mathscr{H}}) \tag{1}$$

где $\alpha = it/\hbar, \mathscr{H} = \hbar\omega\left(\widehat{a}^\dagger\widehat{a} + 1/2\right)$. Имеем $[\widehat{\mathscr{H}}, \widehat{a}] = -\hbar\omega\widehat{a}, [\widehat{\mathscr{H}}, [\widehat{\mathscr{H}}, \widehat{a}]] = (-\hbar\omega)^2\widehat{a}$ и т. д. В итоге получаем $\widehat{a}_H(t) = \widehat{a}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-i\omega t)^n/n! = \widehat{a}\exp(-i\omega t)$ и аналогичным образом $\hat{a}^\dagger_H(t) = \widehat{a}^\dagger\exp(i\omega t)$.

Но можно поступить проще. Продифференцируем обычным образом операторное выражение (1) по неоператорному аргументу t. Получим

$$\frac{d\widehat{a}_H}{dt} = \frac{i}{\hbar}\exp(i\widehat{\mathscr{H}}/\hbar)[\widehat{\mathscr{H}}, \widehat{a}]\exp(-i\widehat{\mathscr{H}}/\hbar) = -i\omega\widehat{a}_H$$

Из вида производной следует экспоненциальная зависимость $\widehat{a}_H$ от времени.

6.4. $\widehat{Q}(t) = \widehat{Q}(0)\cos\omega t + (\widehat{P}(0)/\omega)\sin\omega t$,

$$\widehat{P}(t) = \widehat{P}(0(\cos\omega t - \omega\widehat{Q}(0)\sin\omega t$$

6.5. а) $\bar{a} = \overline{a^\dagger} = 0$; б) $\bar{P} = \bar{Q} = 0$; в) $\overline{a^2} = \overline{a^{\dagger 2}} = 0$; г) $\overline{\Delta Q^2}\cdot\overline{\Delta P^2} = \hbar^2(n+1/2)^2$.

6.6. $\mathscr{E}_n = \hbar\omega(n+1/2), \Phi_n(\eta) = A_n e^{-\eta^2/2}H_n(\eta), \eta = P/\sqrt{\hbar\omega}, A_n = 1/\sqrt{2^n n!\sqrt{\pi}}, H_n$ - полином Эрмита.

6.7. $\Delta Q\Delta P = \hbar(n+1/2) \geqslant \hbar/2$.

6.8. Воспользуемся первым тождеством (Д3.66): $\widehat{A}_n = [\hat{a}^n, \widehat{a}^+] = [\widehat{a}^{n-1}\widehat{a}, \widehat{a}^+] = \widehat{a}^{n-1}[\widehat{a}, \widehat{a}^+] + \widehat{A}_{n-1}\widehat{a} = 2\widehat{a} + \widehat{A}_{n-2}\widehat{a}^2 = \ldots = n\widehat{a}^{n-1}$. Аналогичным образом получаем $[\widehat{a}^{+n}, \widehat{a}] = -n\left(\widehat{a}^+\right)^{n-1}$.

6.9. Согласно условию, $\widehat{f} = A_{00} + A_{10}\widehat{a} + A_{01}\widehat{a}^+ + A_{20}\widehat{a}^2 + \ldots$, где A - постоянные. Трудный вопрос о сходимости ряда после его действия на волновую функцию не обсуждается. Докажем, например, первое соотношение. Возьмем типичный член вида $A\widehat{a}^k\widehat{a}^{+l}\widehat{a}^m\widehat{a}^{+n}$ и преобразуем его коммутатор с $\widehat{a}^+$с помощью первого тождества (Д3.66) и результата предыдущей задачи: $\left[\widehat{a}^k\widehat{a}^{+l}\widehat{a}^m\widehat{a}^{+n}, \widehat{a}^+\right] = \left[\widehat{a}^k\widehat{a}^{+l}\widehat{a}^m, \widehat{a}^+\right]\widehat{a}^{+n} + \widehat{a}^k\widehat{a}^{+l}\widehat{a}^m\left[\widehat{a}^{+n}, \widehat{a}^+\right] = \left[\hat{a}^k, \widehat{a}^+\right]\widehat{a}^{+l}\widehat{a}^m\widehat{a}^{+n} + \widehat{a}^k\widehat{a}^{+l}\left[\widehat{a}^m, \widehat{a}^+\right]\widehat{a}^{+n} = k\widehat{a}^{k-1}\widehat{a}^{+l}\widehat{a}^m\widehat{a}^{+n} + \widehat{a}^k\widehat{a}^{+l}m\widehat{a}^{m-1}\widehat{a}^{+n}$. С другой стороны, тот же результат получится и при формальном дифференцировании по $\widehat{a}$, при котором $\widehat{a}^+$считается постоянным и сохраняется изначально заданный порядок операторов.

6.11. Операторы поля в представлении Гейзенберга получаются из (6.13) (6.15) путем замены в этих выражениях $\widehat{a}^+, \widehat{a}$ на зависящие от времени и полученные в задаче 6.4 гейзенберговские операторы $\widehat{a}^+(t), \widehat{a}(t)$.

6.12.

$$\left[\widehat{E}_\alpha(\boldsymbol{r}_1, t_1), \widehat{E}_\beta(\boldsymbol{r}_2, t_2)\right] = \left[\widehat{H}_\alpha(\boldsymbol{r}_1, t_1), \widehat{H}_\beta(\boldsymbol{r}_2, t_2)\right] =$$
$$= i\hbar\left(\frac{\delta_{\alpha\beta}}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t_1\partial t_2} - \frac{\partial^2}{\partial x_{1\alpha}\partial x_{2\beta}}\right)G^-(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2, t_1 - t_2)$$
$$\left[\widehat{E}_\alpha(\boldsymbol{r}_1, t_1), \widehat{H}_\beta(\boldsymbol{r}_2, t_2)\right] = -i\hbar e_{\alpha\beta\mu}\frac{\partial^2}{\partial ct_1\partial x_{1\mu}}G^-(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2, t_1 - t_2)$$

Здесь

$$G^-(\boldsymbol{R}, \tau) = \frac{1}{R}[\delta(\tau + R/c) - \delta(\tau - R/c)]$$

- функция, определенная в задаче 5.9. Компоненты полей можно одновременно измерить сколь угодно точно только в таких точках четырехмерного пространства, которые не могут быть связаны световым сигналом. Подробнее об этом см. в [Гайтлер (1956)].

6.13.

$$\left[\widehat{E}_\alpha(\boldsymbol{r}_1,t_1),\widehat{A}_\beta(\boldsymbol{r}_2,t_2)\right]= \\ =\frac{i\hbar c}{2\pi^2}\int d^3k\left(\delta_{\alpha\beta}-\frac{k_\alpha k_\beta}{k^2}\right)\exp i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)\cos\omega(t_1-t_2)$$

Коммутатор отличен от нуля и для точек, разделенных пространственноподобными интервалами, например для $t_1=t_2,\boldsymbol{r}_1\neq\boldsymbol{r}_2$. Но векторный потенциал $\boldsymbol{A}$ не является наблюдаемой величиной, поэтому соображения о взаимной обусловленности наблюдаемых событий к нему неприменимы.

6.14. В квантовой теории оператор физической величины должен быть эрмитовым. Поскольку операторы $\widehat{\boldsymbol{E}}$ и $\widehat{\boldsymbol{H}}$ не коммутируют (см. задачу 6.12), оператор $\widehat{\boldsymbol{P}}$, построенный по принципу соответствия, необходимо симметризовать:

$$\widehat{\boldsymbol{P}}=\frac{1}{8\pi c}\int\limits_V[\widehat{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r})\times\widehat{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{r})-\widehat{\boldsymbol{H}}(t)\times\widehat{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r})]dV. \tag{1}$$

При подстановке в (1) операторов поля (6.14), (6.15) получаем оператор импульса, выраженный через операторы рождения и уничтожения фотонов:

$$\widehat{\boldsymbol{P}}=\sum_s\hbar\boldsymbol{k}\left(\widehat{a}^+{}_s\widehat{a}_s+1/2\right) \tag{2}$$

6.15. Обозначив вектор состояния поля (с учетом всех мод) через $|0\rangle$ и вычисляя средние значения напряженностей поля, получим $\overline{\boldsymbol{E}}=\langle0|\widehat{\boldsymbol{E}}|0\rangle=0,\overline{\boldsymbol{H}}=0$,

$$\overline{\Delta E^2}=\overline{E^2}=\langle0|\widehat{\boldsymbol{E}}^2(\boldsymbol{r})|0\rangle=\sum_s\frac{2\pi\hbar\omega_s}{V}=\frac{2\hbar}{\pi c^3}\int\limits_0^\infty\omega^3d\omega\to\infty$$

Аналогичным образом получим $\overline{\Delta H^2}=\overline{H^2}\to\infty$. Эти две бесконечности имеют ту же природу, что и бесконечная энергия вакуума.

6.16. Оператор электрического поля в гейзенберговском представлении был построен в задаче 6.12 и может быть записан с помощью формулы (6.14) в виде

$$\widehat{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)=\sum_s\{\widehat{a}_s\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)+\text{ э.с. }\},\quad\text{где}\quad\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=i\boldsymbol{e}_s\sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega}{V}}e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)} \tag{1}$$

Операторы $\widehat{a},\widehat{a}^+$в последнем равенстве не зависят от времени, э. с. означает эрмитовски сопряженное выражение. Усредняем гейзенберговский оператор поля, зависящий от r и t как от параметров, по пространственно-временной области с весовой функцией:

$$\widehat{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)=\int\widehat{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}',t-t')\,g(\boldsymbol{r}',t')\,d^3r'dt' \tag{2}$$

С помощью (1) находим

$$\overline{\widehat{\boldsymbol{E}}}(\boldsymbol{r},t)=\sum_s\{\widehat{a}_s\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)G(\boldsymbol{k})+\text{ э.с. }\} \tag{3}$$

где

$$G(\boldsymbol{k}) = \int g(\boldsymbol{r},t)e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t}d^3rdt, \quad \omega = ck \tag{4}$$

С помощью усредненного оператора поля находим вакуумные средние:

(5) $\overline{\boldsymbol{E}} = \langle 0|\widehat{\boldsymbol{E}}|0\rangle = 0, \quad \overline{\Delta E^2} = \overline{E^2} = \langle 0|\widehat{\boldsymbol{E}^2(\boldsymbol{r},t)}|0\rangle = \frac{\hbar}{2\pi}\int G(\boldsymbol{k})\omega d^3k,$

где в последнем равенстве мы перешли от суммирования по дискретным модам к интегрированию по волновым векторам и учли две поляризации каждой моды. Аналогичный расчет нужно проделать с магнитным полем. Фурье-образ весовой функции вычисляется без затруднений и в функции частоты с учетом нормировки имеет вид $G(\omega) = \exp(-\omega^2 l^2/2c^2)$. В итоге получаем конечное значение вакуумных флуктуаций поля

$$\overline{\Delta E^2} = \overline{\Delta H^2} = \frac{\hbar c}{l^4} \tag{6}$$

Высокочастотные моды, приводящие к расходимости вакуумных флуктуаций, были устранены в результате усреднения.

6.17. В предположении $L \gg z$ вычисляем разность энергий ΔU вакуумных флуктуаций в пространстве между пластинами при наличии пластин и в их отсутствие. Тем самым мы избавимся от расходимости энергии нулевых колебаний. В первом из этих случаев интегрирование по k следует ограничить снизу значением $k_{\min} \approx 2\pi/z$, так как в области размером z не может быть флуктуаций с длинами волн, превышающими z. Использовав результат задачи 6.15, найдем в расчете на единицу площади пластин

$$\Delta U \approx \frac{\hbar c}{2\pi^2}z\left\{\int\limits_{k_{\min}}^{\infty} k^3dk - \int\limits_{0}^{\infty} k^3dk\right\} = -\frac{\hbar c}{2\pi^2}z\int\limits_{0}^{k_{\min}} k^3dk = -\frac{2\pi^2\hbar c}{z^3}$$

Сила вычисляется путем дифференцирования по z:

$$\mathscr{F} = -\frac{d}{dz}\Delta U \approx -\frac{6\pi^2\hbar c}{z^4}$$

Пластины притягиваются с силой, быстро убывающей с расстоянием. Точный расчет [Лифшиц и Питаевский (1978)] дает для этого случая другой численный коэффициент: $\pi^2/240$ вместо нашего $6\pi^2$. Ввиду высокой (четвертой) степени зависимости от $k_{\min}$ результат чувствителен к этому параметру, известному только по порядку величины.

6.18. На электрон атома действует не только поле ядра и других электронов, но и нулевые колебания электромагнитного поля. Эти колебания приводят к «дрожанию» электрона на его квантовой орбите, вследствие чего изменяется действующее на него поле и положения энергетических уровней электронов испытывают некоторые смещения (лэмбовский сдвиг). Количественно изменение потенциальной энергии выразится следующим образом:

$$\delta U = U(\boldsymbol{r}+\delta\boldsymbol{r}) - U(\boldsymbol{r}) = \Delta U\cdot\delta\boldsymbol{r} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}\right)\delta x_\alpha \delta x_\beta + \ldots \tag{1}$$

Усреднив эту величину по нулевым колебаниям, получим в первом неисчезающем приближении следующую добавочную потенциальную энергию за счет нулевых колебаний:

$$V(\boldsymbol{r}) = \langle\delta U\rangle = \frac{1}{6}\left(\nabla^2 U(\boldsymbol{r})\right)\left\langle\delta\boldsymbol{r}^2\right\rangle \tag{2}$$

Здесь учтено, что нулевые колебания изотропны, поэтому $\langle \delta \boldsymbol{r} \langle = 0$, $\langle \delta x_\alpha \delta x_\beta \rangle = (1/3)\,\langle \delta \boldsymbol{r}^2 \rangle\, \delta_{\alpha\beta}$.

Оценим средний квадрат смещения электрона по порядку величины, считая его отклонения от равновесной орбиты квазиклассическими. Если частота «дрожания» существенно превышает атомные частоты, то уравнение движения осциллятора под действием поля моды s можно записать в виде

$$m\delta\ddot{\boldsymbol{r}}_s = e\boldsymbol{E}_s \cos\omega_s t \quad (k\delta r \ll 1) \tag{3}$$

Решение этого уравнения, $\delta \boldsymbol{r}_s = -e\boldsymbol{E}_s(t)/m\omega_s^2$, возводим в квадрат и усредняем по вакуумному состоянию электромагнитного поля с помощью результата, полученного в задаче 6.15, заменяя $\langle \boldsymbol{E}_s^2(t) \rangle \to \langle 0|\widehat{\boldsymbol{E}}_s^2|0\rangle = 2\pi\hbar\omega_s/V$. Получаем

$$\left\langle \delta r_s^2 \right\rangle = \frac{2\pi e^2 \hbar}{m^2 \omega_s^3 V} \tag{4}$$

Суммирование по модам с переходом к интегрированию по частотам дает

$$\left\langle \delta \boldsymbol{r}^2 \right\rangle = \sum_s \left\langle \delta \boldsymbol{r}_s^2 \right\rangle = \frac{2e^2\hbar}{\pi m^2 c^3} \int\limits_{\omega_{\min}}^{\omega_{\max}} \frac{d\omega}{\omega} \tag{5}$$

Интеграл расходится логарифмически, и его нужно обрезать на верхнем и нижнем пределах. Нижний предел должен быть порядка атомной частоты ω_0 в соответствии со сделанным ранее предположением. Верхний предел оценивается из соображения, согласно которому в нерелятивистской системе (атоме) существенны частоты $\hbar\omega \leqslant mc^2$, где m - масса электрона. Таким образом, полагаем $\omega_{\min} = \omega_0, \omega_{\max} = mc^2/\hbar$ и получаем в итоге

$$\left\langle \delta \boldsymbol{r}^2 \right\rangle = \frac{2e^2\hbar}{\pi m^2 c^3} \ln\left(\frac{mc^2}{\hbar\omega_0}\right) \tag{5}$$

Теперь значение энергии возмущения (2) известно, и можно найти поправку к энергии электрона в атоме, вызванную этим возмущением, пользуясь стационарной теорией возмущений [Ландау и Лифшиц, Квантовая механика]:

$$\Delta\mathscr{E} = \langle\psi|\widehat{V}|\psi\rangle \tag{6}$$

где ψ - волновая функция того состояния, к энергии которого ищется поправка. В атоме водорода, считая ядро точечным, имеем $U(\boldsymbol{r}) = -e^2/r$, $\nabla^2 U(\boldsymbol{r}) = 4\pi e^2 \delta(\boldsymbol{r})$. Используя этот результат, а также (2) и (5), находим сдвиг уровня энергии:

$$\Delta\mathscr{E} = \frac{4e^4\hbar}{3m^2c^3}|\psi(0)|^2 \ln\left(\frac{mc^2}{\hbar\omega_0}\right) \tag{7}$$

В рассматриваемом приближении испытывают сдвиг только уровни энергии тех состояний, у которых $\psi(0) \neq 0$. Таким свойством обладают лишь состояния с орбитальным моментом $l = 0$ (s-состояния). Волновая функция $2s$-состояния атома водорода $|\psi_{200}(0)|^2 = 1/8\pi a_B^3$, где $a_B = \hbar^2/me^2$ - боровский радиус. В качестве величины $\hbar\omega_0$ используем атомную единицу энергии $\hbar\omega_0 = me^4/\hbar^2$. Подставляя в (7) все указанные величины, получим

$$\Delta\mathscr{E}_{201/2} = \frac{1}{6\pi} mc^2 \alpha^5 \ln\left(\frac{1}{\alpha^2}\right), \quad \Delta\mathscr{E}_{211/2} = 0, \quad \alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{137} \tag{8}$$

Здесь в виде индексов у энергетических сдвигов указаны главное квантовое число, орбитальный момент и полный момент электрона ($j = 1/2$ в обоих

случаях). Если поправка, связанная с нулевыми колебаниями, не учитывается, то рассматриваемые два уровня энергии совпадают. При учете нулевых колебаний они расщепляются. Наш оценочный расчет дал величину расщепления $\Delta\mathscr{E}_{201/2} = 0,52mc^2\alpha^5$. Точный расчет [?] дает значение $0,41mc^2\alpha^5$. Этому значению соответствует частота перехода 1050 МГц.

6.19. Полный момент поля относительно точки с радиусом-вектором r_0 в классической теории вычисляем по формуле

$$\boldsymbol{J}\left(\boldsymbol{r}_0\right) = \int \left(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0\right) \times \mathscr{P} dV = \boldsymbol{J}(0) - \boldsymbol{r}_0 \times \boldsymbol{P}, \quad \mathscr{P} = \frac{1}{4\pi c}\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H} \tag{1}$$

- плотность импульса. Сделаем подстановку $\boldsymbol{H} = \nabla \times \boldsymbol{A}$ и преобразуем выражение для $\boldsymbol{J}$ путем интегрирования по частям в предположении отсутствия поля на бесконечности (полезно использовать соотношения (1.23а) и тождество (б) из задачи 1.28, а также уравнение Максвелла $\nabla \cdot \boldsymbol{E} = 0$). В итоге получим два слагаемых: $\boldsymbol{J}\left(\boldsymbol{r}_0\right) = \boldsymbol{L}\left(\boldsymbol{r}_0\right) + \boldsymbol{S}$, где

$$\boldsymbol{L}\left(\boldsymbol{r}_0\right) = \frac{1}{4\pi c}\int E_\alpha \left[\left(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0\right) \times \nabla\right] A_\alpha dV \tag{2}$$

- орбитальный момент поля, зависящий от выбора начала отсчета;

$$\boldsymbol{S} = \frac{1}{4\pi c}\int [\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{A}] dV \tag{3}$$

- спиновый (внутренний) момент поля, не зависящий от выбора начала отсчета координат. Соответствующие операторы получаются из (4), (5) по принципу соответствия путем «эрмитизации» классических выражений, как это было сделано для импульса поля (см. решение задачи (6.14):

$$\widehat{\boldsymbol{L}} = \frac{1}{8\pi c}\int \left\{\widehat{E}_\alpha \left[\left(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0\right) \times \nabla\right] \widehat{A}_\alpha + \widehat{A}_\alpha \left[\left(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0\right) \times \nabla\right] \widehat{E}_\alpha\right\} dV, \tag{4}$$

$$\widehat{\boldsymbol{S}} = \frac{1}{8\pi c}\int [\widehat{\boldsymbol{E}} \times \widehat{\boldsymbol{A}} - \widehat{\boldsymbol{A}} \times \widehat{\boldsymbol{E}}] dV \tag{5}$$

6.20. Пользуясь формулой (5) из решения предыдущей задачи и подставляя в нее операторы (6.13), (6.14), а также базисные функции (6.16), находим

$$\widehat{\boldsymbol{S}} = i\hbar \sum_{\mathbf{k},\sigma,\sigma'} \left(\widehat{a}^\dagger_{\mathbf{k}\sigma'}\widehat{a}_{\mathbf{k}\sigma} + \frac{1}{2}\delta_{\sigma\sigma'}\right)\left(e_{\mathbf{k}\sigma} \times \boldsymbol{e}^*_{\mathbf{k}\sigma'}\right)$$

При линейной поляризации фотонов орты действительны, векторное произведение отлично от нуля только при $\sigma \neq \sigma'$: $\boldsymbol{e}_{\mathbf{k}1} \times \boldsymbol{e}^*_{\mathbf{k}2} = \boldsymbol{k}/k$. Спиновый оператор принимает вид

$$\widehat{\boldsymbol{S}} = i\sum_{\mathbf{k}} (\hbar\boldsymbol{k}/k)\left(\widehat{a}^\dagger_{\mathbf{k}2}\widehat{a}_{\mathbf{k}1} - \widehat{a}^\dagger_{\mathbf{k}1}\widehat{a}_{\mathbf{k}2}\right)$$

и при усреднении по состояниям с определенным числом фотонов дает нуль.

Циркулярно поляризованные фотоны имеют орты $e_{\mathrm{k},\pm1} = e_{\mathbf{k}1} \pm \frac{e_{\mathbf{k}2}}{\sqrt{2}}$ (см. задачу 2.133). Их векторное произведение отлично от нуля только при $\sigma = \sigma'$ и дает $\boldsymbol{e}_{\mathbf{k},\pm1} \times \boldsymbol{e}^*_{\mathbf{k},\pm1} = \mp i\boldsymbol{k}/k$.

Спиновый момент каждой моды с заданным k направлен вдоль k и равен квантовой постоянной $\hbar$, умноженной на разность чисел фотонов с правой и левой спиральностями:

$$\boldsymbol{S} = \sum_{\mathbf{k}} (\hbar \boldsymbol{k}/k) \left(N_{\mathbf{k},+1} - N_{\mathbf{k},-1}\right)$$

6.21. $I_\sigma(\omega, \boldsymbol{n}) = \frac{\hbar\omega^3}{8\pi^3 c^2} N_{\mathbf{k}\sigma}$.

6.22. $\overline{\mathscr{E}}_s = \hbar\omega_s \left(\bar{N}_s + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \coth \frac{\hbar\omega_s}{2T}$.

6.23. Равновесное электромагнитное излучение распределено изотропно в пространстве, поэтому спектральная интенсивность излучения $I(\omega)$ (плотность потока энергии излучения в заданном направлении, приходящаяся на единичный интервал частот) связана со спектральной плотностью излучения $\rho(\omega)$ соотношением $\rho(\omega) = 4\pi I(\omega)/c$. Умножая энергию одного кванта $\hbar\omega$ на среднее число (6.23) квантов одного осциллятора поля и на число осцилляторов (2.164), приходящихся на объем $\mathscr{V}$, интервал частот $d\omega$ и телесный угол $d\Omega_{\mathrm{k}}$, находим соответствующую энергию

$$d\mathscr{E}(\omega) = \hbar\omega_s \bar{N} \frac{2\mathscr{V}}{(2\pi c)^3} \omega^3 d\omega d\Omega_{\mathbf{k}} \tag{1}$$

Чтобы получить спектральную плотность энергии, следует проинтегрировать (1) по телесному углу, поделить на объем $\mathscr{V}$ и на интервал $d\omega$:

$$\rho(\omega) = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^3}{e^{(\hbar\omega/T)-1}} \tag{2}$$

(формула Планка для спектральной плотности равновесного излучения).

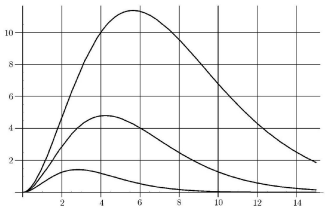


Рис. 6.4

График спектрального распределения Планка приведен на рис 6.4. По вертикальной оси отложена спектральная плотность, по горизонтальной частота (обе в произвольных единицах). Температуры для трех изображенных кривых относятся как $1 : 1,5 : 2$. Максимум приходится на частоту

$$\omega_m \approx 2,822 \frac{T}{\hbar}, \quad \lambda_m = \frac{2\pi c\hbar}{2822T} \approx \frac{0,511}{T} \text{ cm} \tag{3}$$

где в последнем выражении температуру T следует брать в кельвинах. Зависимость $\omega_m \propto T$ называется законом смещения Вина Из этого закона следует, что максимум излучения с ростом температуры смещается в сторону более высоких частот (коротких длин волн). Так, поверхность (фотосфера) желтого Солнца нагрета до $\approx 6000°$, белого Сириуса до $\approx 10000°$, голубой Веги - до $\approx 20000°$ и т. д.

Имеется две области частот, в которых формула Планка упрощается. При низких частотах $T/\hbar\omega \gg 1$ и

$$\rho(\omega) \approx \frac{T}{\pi^2 c^3} \omega^2 \propto \omega^2 \tag{4}$$

- формула Релея - Джинса. Именно такой закон дает при всех частотах классическая физика. Он получается путем умножения средней энергии T одного осциллятора на плотность числа осцилляторов, пропорциональную ω^2. Спектральная плотность возрастает неограниченно с ростом частоты («ультрафиолетовая катастрофа»).

При высоких частотах $T/\hbar\omega \ll 1$, и из формулы Планка следует экспоненциальный спад плотности излучения - закон Вина:

$$\rho(\omega) \approx \frac{\hbar}{\pi^2 c^3}\omega^3 e^{-\hbar\omega/T} \tag{5}$$

Экспоненциальный спад спектральной плотности объясняется дискретностью энергии осциллятора при заданной частоте. Если $\hbar\omega > T$, то тепловой энергии атомов порядка T не хватает для переброса осциллятора поля на следуюший уровень, и испускание квантов такой энергии затруднено.

Формула Планка (1) описывает всю область частот при любых температурах с высокой точностью.

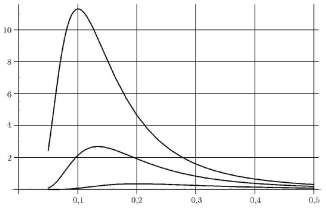


Рис. 6.5

6.25. $\rho'(\lambda) = \frac{16\pi^2 c\hbar}{\lambda^5}\frac{1}{\exp(2\pi c\hbar/\lambda T)-1}$
(см. 6.5 - то же, что на рис. 6.4, но по горизонтальной оси отложена длина волны λ в произвольных единицах). Это распределение убывает при $\lambda \to 0$
по экспоненциальному закону, а при $\lambda \to \infty$ по степенному закону и имеет максимум при

$$\lambda = \lambda'_m = \frac{2\pi\hbar c}{4,99T} = \frac{0,289}{T}\ \text{cm}$$

Здесь в последнем равенстве температура в кельвинах. Численный коэффициент 4,99 получается из решения трансцендентного уравнения $e^{-x} = 1$ - $-x/5$.

Максимум распределения $\rho'(\lambda)$ смещается при увеличении температуры в сторону меньших длин волн, $\lambda'_m \propto 1/T$. В этом проявляется закон смещения Вина по длинам волн. Надо отметить, что значение λ'_m и соответствующее значение частоты $\omega'_m = 2\pi c/\lambda'_m$ не совпадают с λ_m, ω_m, отвечающими максимуму распределения по частотам (см. уравнение (3) из решения задачи 6.23). А именно, $\lambda'_m = 0,565\lambda_m < \lambda_m, \omega'_m = 1,77\omega_m$, и это различие весьма заметно. Например, в случае излучения Солнца при $T = 6000°$ максимум распределения по частоте соответствует $\lambda_m = 8,5 \times 10^{-5}$ см (это - ближний инфракрасный диапазон), тогда как при распределении по длинам волн максимуму отвечает $\lambda'_m = 4,82 \times 10^{-5}$ cm (синий диапазон!) Наблюдаемый же визуально желто-белый цвет Солнца находится между λ_m и λ'_m.

6.26 .

	Название	T(K)	λ_m(cm)	λ'_m(cm)	Видимый цвет
а	реликтовое излучение	3	0,17	0,095	СВЧ
б	поверхность Земли	300	$1,7 \times 10^{-3}$	$0,95 \times 10^{-3}$	ИК
в	μ-Цефея	2000	$2,55 \times 10^{-4}$	$1,43 \times 10 - 4$	Темно-красный
Г	Солнце	6000	$8,5 \times 10^{-5}$	$4,82 \times 10^{-5}$	желто-белый
д	Сириус	11000	$4,6 \times 10^{-5}$	$2,57 \times 10^{-5}$	белый
е	β-Центавра	22500	$2,27 \times 10^{-5}$	$1,29 \times 10^{-5}$	голубой
ж	туманность Лиры	75000	$0,68 \times 10^{-5}$	038×10^{-5}	УФ
З	нейтронная звезда	250000	2×10^{-6}	$1,1 \times 10^{-6}$	рентген
и	внутренние области звезд	$2,5 \times 10^{7}$	2×10^{-8}	$1,1 \times 10^{-8}$	рентген

6.27. $F = -T \ln Z = -\frac{1}{3}\mathscr{E}, S = \frac{16\sigma}{3c}t^3\mathscr{V}, C_V = \frac{16\sigma}{c}T^3\mathscr{V}, \mathscr{P} = \frac{\mathscr{E}}{3\mathscr{V}}$, где $\sigma, \mathscr{E}$ - постоянная Стефана-Больцмана и внутренняя энергия, определенные в условии задачи 6.24 .
6.28. Фоковские состояния $|n\rangle$ представляют собой бесконечное счетное множество и образуют полный набор, по которому может быть разложен вектор произвольного состояния данной моды. Когерентные состояния $|z\rangle$,
где z - любое комплексное число, образуют континуальное множество и содержат, таким образом, большее число функций (переполненный набор). Достаточно использовать лишь часть их для представления произвольного вектора состояния моды.
6.29. Предположим, что существуют нормированные состояния, такие что

$$\widehat{a}^\dagger|\beta\rangle = \beta|\beta\rangle, \quad \langle\beta|\widehat{a} = \langle\beta|\beta^* \tag{1}$$

Разложим вектор $|\beta\rangle$ по базису фоковских состояний, как это делалось в примере 6.4:

$$|\beta\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}\langle n|\beta\rangle|n\rangle \tag{2}$$

Для коэффициентов разложения имеем рекурентное соотнопение

$$\langle n|\beta\rangle = \frac{\sqrt{n}}{\beta}\langle n-1|\beta\rangle \tag{3}$$

В результате n-кратного применения данного соотношения получаем

$$\langle n|\beta\rangle = \frac{\sqrt{n!}}{\beta^n}\langle 0|\beta\rangle \tag{4}$$

Норма вектора $|\beta\rangle$ при этом равна

$$\langle\beta|\beta\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{|\beta|^{2n}} \tag{5}$$

Ряд (5) расходится при любых конечных β, что и доказывает утверждение, содержащееся в условии задачи.
6.30. Эволюция когерентного состояния описывается нестационарным уравнением Шредингера

$$i\hbar\frac{\partial|\alpha(t)\rangle}{\partial t} = \widehat{\mathscr{H}}|\alpha(t)\rangle \tag{1}$$

где $\widehat{\mathscr{H}} = \hbar\omega\left(\widehat{a}^\dagger\widehat{a} + 1/2\right)$. Решение этого уравнения при начальном условии $|\alpha(t)\rangle_{t\to 0} = |\alpha_0\rangle$ имеет вид

$$|\alpha(t)\rangle = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\widehat{\mathscr{H}}t\right)|\alpha_0\rangle \tag{2}$$

Разлагая начальное когерентное состояние по базису фоковских состояний и учитывая, что последние являются собственными состояниями оператора Гамильтона, получим

$$\begin{aligned}|\alpha(t)\rangle &= \exp\left(-|\alpha_0|^2/2\right)\sum_{n=0}^{\infty}\exp(-i\omega(n+1/2)t)\frac{\alpha_0^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle = \\ &= \exp(-i\omega t/2)\exp\left(-|\alpha_0\exp(-i\omega t))|^2/2\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha_0\exp(-i\omega t))^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle = \\ &= \exp(-i\omega t/2)\,|\alpha_0\exp(-i\omega t)\rangle\end{aligned} \tag{6.133}$$

Из последней формулы видно, что с течением времени когерентное состояние остается когерентным, его амплитуда меняется по закону $\alpha(t) = \alpha_0\exp(-i\omega t)$, т. е. совершает вращение в комплексной плоскости с частотой ω. Фазовый множитель $\exp(-i\omega t/2)$ одинаков для всех когерентных состояний и обусловлен энергией нулевых колебаний вакуума. Его присутствие никак не проявляется при вычислении средних значений наблюдаемых величин.

6.31. Согласно определению,

$$\widehat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle \tag{1}$$

Запишем это уравнение в координатном представлении, учитывая, что для полевого осциллятора в этом представлении оператор уничтожения имеет вид (ДЗ.54):

$$\left(\xi + \frac{\partial}{\partial\xi}\right)\langle\xi|\alpha\rangle = \sqrt{2}\alpha\langle\xi|\alpha\rangle. \tag{2}$$

Здесь $\langle\xi|\alpha\rangle = \psi_\alpha(\xi)$ - волновая функция когерентного состояния, зависящая от безразмерной координаты. Дифференциальное уравнение первого порядка (2) имеет решение

$$\langle\xi|\alpha\rangle = C(\alpha)\exp\left(-(\xi-\sqrt{2}\alpha)^2/2\right) \tag{3}$$

Нормировочная постоянная, выбранная вещественной, равна

$$C(\alpha) = (1/\pi)^{1/4}\exp\left(-2(\operatorname{Im}\alpha)^2\right) \tag{4}$$

Формула (3) задает распределение Гаусса со средним значением $\langle\xi\rangle = \sqrt{2}\alpha$ и дисперсией $\langle\Delta\xi^2\rangle = 1/2$. Зависимость от времени этого состояния
можно найти, если учесть, что для свободного поля в когерентном состоянии $\alpha(t) = \alpha_0\exp(-i\omega t)$ (см. предыдущую задачу). Обозначая $\alpha_0 = \xi_0/\sqrt{2}$, получим следующее выражение для распределения плотности вероятности безразмерной координаты гармонического осциллятора:

$$\rho(\xi) = \pi^{-1/2}\exp\left(-\left(\xi-\xi_0\cos\omega t\right)^2\right) \tag{5}$$

Из полученного распределения, в частности, следует, что среднее значение координаты полевого осциллятора меняется со временем точно так же, как и для классического гармонического осциллятора.

6.32. Воспользуемся разложением когерентного состояния по базису фоковских состояний

$$|\alpha\rangle = \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle \tag{1}$$

Учитывая, что $|n\rangle = \widehat{a}^{\dagger n}|0\rangle/\sqrt{n!}$, можем переписать разложение (1) в виде

$$|\alpha\rangle = \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\alpha\widehat{a}^{\dagger}\right)^n}{n!}|0\rangle = \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right)\exp\left(\alpha\widehat{a}^{\dagger}\right)|0\rangle$$

Данное соотношение можно представить в более симметричной форме, введя дополнительный оператор $\exp\left(-\alpha^*\widehat{a}\right)$ перед кет-вектором вакуумного состояния, поскольку

$$\exp\left(-\alpha^*\widehat{a}\right)|0\rangle = |0\rangle$$

В силу теоремы Кемпбелла-Бейкера-Хаусдорфа (Д3.70),

$$\exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right)\exp\left(\alpha\widehat{a}^{\dagger}\right)\exp\left(-\alpha^*\widehat{a}\right) = \exp\left(\alpha\widehat{a}^{\dagger} - \alpha^*\widehat{a}\right)$$

что представляет собой оператор сдвига, определенный в условии задачи.

6.33. Требуемые величины могут быть вычислены, если выразить операторы координаты и импульса через операторы рождения и уничтожения. Для координатной квадратурной компоненты, в соответствии с определением, получим

$$\begin{aligned}\left\langle\Delta X_1^2\right\rangle &= \left\langle\xi^2\right\rangle - \langle\xi\rangle^2 = \left\langle\left(\widehat{a}^2 + \widehat{a}^{\dagger 2} + 2\widehat{a}^{\dagger}\widehat{a} + 1\right)/2\right\rangle - \left\langle\left(\widehat{a} + \widehat{a}^{\dagger}\right)\right\rangle^2/2 = \\ &= (1/2)\left(\alpha^2 + \alpha^{*^2} + 2|\alpha|^2 + 1\right) - (1/2)\left(\alpha^2 + \alpha^{*2} + 2|\alpha|^2\right) = 1/2\end{aligned}$$

Аналогично может быть вычислена дисперсия импульсной квадратурной компоненты $\langle\Delta X_2^2\rangle = 1/2$. Для размерных переменных соответственно получим $\langle\Delta Q^2\rangle = \hbar/(2\omega)$ и $\langle\Delta P^2\rangle = \hbar\omega/2$.

6.34.

$$\begin{aligned}D_1(t) &= D_1(0)\cos^2(\omega t) + D_2(0)\sin^2(\omega t) + \\ &+ \left[\left\langle\widehat{X}_1\widehat{X}_2 + \widehat{X}_2\widehat{X}_1\right\rangle - 2\left\langle\hat{X}_1\right\rangle^2\left\langle\widehat{X}_2\right\rangle^2\right]\cos(\omega t)\sin(\omega t) \\ D_2(t) &= D_2(0)\cos^2(\omega t) + D_1(0)\sin^2(\omega t) - \\ &- \left[\left\langle\widehat{X}_1\widehat{X}_2 + \widehat{X}_2\widehat{X}_1\right\rangle - 2\left\langle\widehat{X}_1\right\rangle^2\left\langle\widehat{X}_2\right\rangle^2\right]\cos(\omega t)\sin(\omega t)\end{aligned}$$

Обе величины осциллируют на удвоенной частоте своей моды, а их сумма $D_1(t) + D_2(t) = D_1(0) + D_2(0)$ не зависит от времени и выполняется соотношение $D_1(t) = D_2(t - \pi/(2\omega))$ - сдвиг по фазе на $\pi/2$.

Для фоковских и когерентных состояний $\left\langle\widehat{X}_1\widehat{X}_2 + \widehat{X}_2\widehat{X}_1\right\rangle$ - $-2\left\langle\widehat{X}_1\right\rangle^2\left\langle\widehat{X}_2\right\rangle^2 = 0$ (для фоковских каждое слагаемое равно нулю, а для когерентных среднее от произведения равно произведению средних), кроме этого $D_1(0) = D_2(0)$. Таким образом, для этих состояний дисперсии квадратурных компонент не меняются с течением времени.

6.35. Используя распределение Пуассона (6.30), находим дисперсию числа квантов $\langle\Delta n^2\rangle = \langle(n - \bar{n})^2\rangle = \bar{n} = |z|^2$.

6.36. Воспользовавшись свойством полноты когерентных состояний, имеем

$$\widehat{\rho} = \sum_{n,m} C_{n,m}\frac{1}{\pi}\int \widehat{a}^n|\alpha\rangle\langle\alpha|\widehat{a}^{\dagger m}d^2\alpha = \int\sum_{n,m}\frac{1}{\pi}C_{n,m}\alpha^n\alpha^{*m}|\alpha\rangle\langle\alpha|d^2\alpha$$

Таким образом, из сравнения с (6.38) имеем

$$\mathscr{P}(\alpha) = \frac{1}{\pi} C_{n,m} \alpha^n \alpha^{*m}$$

Обратим внимание на то, что эта функция одновременно зависит от α и α^*, т. е. не является аналитической функцией α.

6.37. Записываем матрицу плотности для одной моды через векторы фоковских состояний

$$\widehat{\rho} = \sum_{n=0}^{\infty} \rho_{nn} |n\rangle\langle n|, \quad \text{где} \quad \rho_{nn} = \left(1 - e^{-\alpha}\right) e^{-\alpha n}, \alpha = \frac{\hbar\omega}{T} \tag{1}$$

Значение ρ_{nn} определяется формулой (1) из решения примера 6.3, где оно обозначалось посредством W_N. Вводим в эти соотношения среднее число фотонов (6.24),

$$\widehat{\rho} = \frac{1}{1+\bar{n}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}}{1+\bar{n}}\right)^n |n\rangle\langle n| \tag{2}$$

и составляем в соответствии с (6.42) матричный элемент

$$\langle -u|\widehat{\rho}|u\rangle = \frac{1}{1+\bar{n}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\bar{n}}{1+\bar{n}}\right)^n \langle -u|n\rangle\langle n|u\rangle = \frac{1}{1+\bar{n}} \exp\left(-\frac{2\bar{n}+1}{1+\bar{n}}|u|^2\right) \tag{3}$$

Здесь мы использовали результат (6.28) и разложение экспоненты в степенной ряд. Подставив выражение (3) под интеграл в (6.42) и выполнив интегрирование, получим (6.44).

6.38. Матрица плотности в фоковском представлении может быть найдена как результат непосредственного вычисления ее матричных элементов

$$\begin{aligned}
\rho_{nm} &= \frac{1}{\pi} \int \mathscr{P}(\alpha) \langle n|\alpha\rangle\langle\alpha|m\rangle d^2\alpha = \\
&= \frac{1}{\pi} \int \mathscr{P}(\alpha) \frac{\alpha^n \alpha^{*m}}{\sqrt{n!m!}} \exp\left(-|\alpha|^2\right) d^2\alpha = \\
&= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |\alpha| d|\alpha| \int_0^{2\pi} d\varphi \mathscr{P}(\alpha) \frac{|\alpha|^{n+m}}{\sqrt{n!m!}} \exp(i(n-m)\varphi) \exp\left(-|\alpha|^2\right)
\end{aligned}$$

Интеграл по фазе комплексной амплитуды φ даст символ Кронекера δ_{nm}, интеграл по модулю $|\alpha|$ вычисляется на основе известных свойств дельта-функции. В результате находим

$$\rho_{nm} = \frac{|\alpha_0|^{2n}}{n!} \exp\left(-|\alpha_0|^2\right) \delta_{nm}$$

Диагональные элементы совпадают с диагональными элементами когерентного состояния, а недиагональные равны нулю. Подчеркнем, что именно отсутствие недиагональных компонент матрицы плотности отличает это состояние от когерентного.

Нормальная характеристическая функция может быть найдена в соответствии с ее определением:

$$\theta[\kappa, \kappa^*] = Sp\left(\widehat{\rho} \exp\left(\kappa\widehat{a}^\dagger\right) \exp\left(-\kappa^*\widehat{a}\right)\right) = \tag{6.134}$$

$$= \sum_n \rho_{nn} \langle n| \exp\left(\kappa\widehat{a}^\dagger\right) \exp\left(-\kappa^*\widehat{a}\right) |n\rangle \tag{6.135}$$

Воспользуемся разложением функции от оператора в ряд Тейлора,

$$\exp\left(-\kappa^*\widehat{a}\right)|n\rangle = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\left(-\kappa^*\widehat{a}\right)^m|n\rangle$$

а также свойством оператора уничтожения

$$\widehat{a}^m|n\rangle = \sqrt{n*(n-1)*\ldots(n-m)}|n-m\rangle$$

если $n \geqslant m$ и $\widehat{a}^m|n\rangle = 0$, если $n < m$. Тогда

$$\theta\left[\kappa,\kappa^*\right] = \sum_n\sum_{l=0}^{n}\sum_{m=0}^{n}\rho_{nn}\kappa^l\frac{\sqrt{n!}}{l!\sqrt{(n-l)!}}\left(-\kappa^*\right)^m\frac{\sqrt{n!}}{m!\sqrt{(n-m)!}}$$

$$\langle n-l|n-m\rangle = \sum_n\sum_{l=0}^{n}\rho_{nn}\left(-|\kappa|^2\right)^l\frac{n!}{(l!)^2(n-l)!}.$$

Сумма по l может быть представлена многочленами Лагерра, в соответствии с их определением (см. [Абрамовиц и Стиган (1979)])

$$\sum_{l=0}^{n}(-1)^l\frac{n!}{l!^2(n-l)!}x^l = L_n(x)$$

что приводит к следующему разложению:

$$\theta\left[\kappa,\kappa^*\right] = \sum_n\rho_{nn}L_n\left(|\kappa|^2\right)$$

Подставляя в это разложение матричные элементы, найденные выше, и учитывая тождество

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^n}{n!}L_n(x) = e^yJ_0(2\sqrt{xy})$$

получим следующее представление для производящей функции через функцию Бесселя нулевого порядка:

$$\theta\left[\kappa,\kappa^*\right] = J_0\left(2|\kappa|\,|\alpha_0|\right)$$

где в правой части при проведении дифференцирований по κ либо κ^* следует использовать равенство: $|\kappa| = \sqrt{\kappa\kappa^*}$.

В заключение заметим, что поле, описанное в рассмотренной задаче, может быть сформировано, например, случайным классическим током $I(t) = |\alpha_0|\exp\left(i\left(\omega_0t+\varphi\right)\right)$, где α_0 и ω_0 - постоянные амплитуда и частота тока, а φ - случайная начальная фаза, равномерно распределенная в интервале от 0 до 2π.

6.39. Воспользуемся тем, что характеристическая функция суперпозиции двух независимых случайных процессов равна произведению их характеристических функций

$$\theta\left[\kappa,\kappa^*\right] = \theta_1\left[\kappa,\kappa^*\right]\theta_2\left[\kappa,\kappa^*\right] = \exp\left(\kappa\alpha_0^* - \kappa^*\alpha_0\right)\exp\left(-\bar{n}\kappa\kappa^*\right)$$

Первое равенство в этом соотношении фактически является определением понятия суперпозиции, поскольку, как можно убедиться, при этом обеспечивается следующее разбиение основных статистических моментов по соответствующим моментом формирующих случайных процессов

$$\langle a\rangle = \langle a\rangle_1 + \langle a\rangle_2$$
$$\left\langle a^\dagger a\right\rangle = \left\langle a^\dagger a\right\rangle_1 + \left\langle a^\dagger a\right\rangle_2 + \left\langle a^\dagger\right\rangle_1 \langle a\rangle_2 + \left\langle a^\dagger\right\rangle_2 \langle a\rangle_1$$

и т. д. Параметр $\bar{n}$ характеризует среднее число фотонов в некогерентном гаусовом излучении. Функция квазивероятности Глаубера-Сударшана в соответствии с (6.43) связана преобразованием Фурье с нормальной характеристической функции (6.39). Предоставляем читателю убедиться самостоятельно, что квазивероятность, в этом случае, определяется сверткой квазивероятностей составляющих случайных процессов

$$\mathscr{P}(\alpha) = \int \mathscr{P}_1(\beta)\mathscr{P}_2(\alpha-\beta)d^2\beta = $$
$$= \frac{1}{\pi\bar{n}}\int \delta(\beta-\alpha_0)\exp\left(-\frac{|\alpha-\beta|^2}{\bar{n}}\right)d^2\beta = \frac{1}{\pi\bar{n}}\exp\left(-\frac{|\alpha-\alpha_0|^2}{\bar{n}}\right)$$

Полученный результат имеет прозрачный физический смысл. Возникающее в результате суперпозиции квантовое состояние представляет колоколообразное распределение сосредоточенное в окрестности среднего значения α_0
и «размытое» в пределах радиуса неопределенности $\sqrt{\bar{n}}$. В пределе $\bar{n}\to 0$ данное распределение переходит в δ-функцию, характерную для когерентного состояния. В противоположном случае $\alpha_0 = 0$ переходит в распределение Гаусса, характерное для некогерентного излучения.

6.40. Вычисляя корреляционную функцию с помощью квазивероятности Глаубера-Сударшана, находим

$$G^{m,m} = \int \mathscr{P}(\alpha)\alpha^{*m}\alpha^m d^2\alpha = \int \frac{1}{\pi\bar{n}}\exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{\bar{n}}\right)\alpha^{*m}\alpha^m d^2\alpha = m!\bar{n}$$

- для равновесного теплового источника и

$$G^{m,m} = \int \mathscr{P}(\alpha)\alpha^{*m}\alpha^m d^2\alpha = \int \delta(\alpha-\alpha_0)\,\alpha^{*m}\alpha^m d^2\alpha = |\alpha_0|^2 = \bar{n}$$

- для когерентного одномодового поля.

6.41. По определению сжатые состояния определяются как собственные функции из уравнения

$$\left(\mu\widehat{a} + \nu\widehat{a}^\dagger\right)|\gamma,\beta\rangle = \beta|\gamma,\beta\rangle \tag{1}$$

где $|\mu|^2 - |\nu|^2 = 1$. Оператор $\mu\widehat{a}+\nu\widehat{a}^\dagger$ может быть представлен как результат унитарного преобразования оператора уничтожения под действием оператора сжатия

$$\mu\widehat{a} + \nu\widehat{a}^\dagger = \widehat{S}(\gamma)\widehat{a}\widehat{S}^\dagger(\gamma) \tag{2}$$

в чем можно убедиться, если применить операторное тождество

$$\exp(\widehat{A})\widehat{B}\exp(-\widehat{A}) = \widehat{B} + [\widehat{A},\widehat{B}] + \frac{1}{2}[\widehat{A},[\widehat{A},\widehat{B}]] + \ldots$$

для случая $\widehat{B} = \widehat{a}$ и $\widehat{A} = \gamma^*\widehat{a}^2/2 - \gamma\widehat{a}^\dagger/2$. При этом $\mu = \operatorname{ch} r, \nu = e^{2i\vartheta}\operatorname{sh} r$.
Таким образом, уравнение (1) может быть преобразовано к следующему виду:

$$\widehat{S}(\gamma)\widehat{a}\widehat{S}^\dagger(\gamma)|\gamma,\beta\rangle = \beta|\gamma,\beta\rangle \tag{3}$$

или

$$\widehat{a}\widehat{S}^{\dagger}(\gamma)|\gamma,\beta\rangle = \beta\widehat{S}^{\dagger}(\gamma)|\gamma,\beta\rangle \tag{4}$$

Последнее соотношение показывает, что функция $\widehat{S}^{\dagger}(\gamma)|\gamma,\beta\rangle$ описывает когерентное состояние, соответствующее собственному значению β, т. е. $|\beta\rangle = \widehat{S}^{\dagger}(\gamma)|\gamma,\beta\rangle$. Следовательно,

$$|\gamma,\beta\rangle = \widehat{S}(\gamma)|\beta\rangle = \widehat{S}(\gamma)\widehat{D}(\beta)|vac\rangle$$

Отметим, что в процессе решения задачи установлено, что, с учетом общей фазовой неопределенности в определении волновой функции, комплексные параметры μ и ν могут рассматриваться как функции двух вещественных параметров r и ϑ. Последние, в свою очередь, могут быть объединены в единый комплексный параметр γ.

6.42. Воспользуемся определением сжатых состояний

$$\left(\mu\widehat{a} + \nu\widehat{a}^{\dagger}\right)|\mu,\nu,\beta\rangle = \beta|\mu,\nu,\beta\rangle. \tag{1}$$

Умножим это равенство слева на бра-вектор произвольного когерентного состояния $\langle\alpha|$

$$\langle\alpha|\mu\widehat{a} + \nu\widehat{a}^{\dagger}|\mu,\nu,\beta\rangle = \beta\langle\alpha|\mu,\nu,\beta\rangle. \tag{2}$$

Используем одно из возможных представлений когерентного состояния (см. решение задачи 6.32)

$$|\alpha\rangle = \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right)\exp\left(\alpha\widehat{a}^{\dagger}\right)|vac\rangle \tag{3}$$

тогда левая часть равенства (2) может быть преобразована следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\langle\alpha|\mu\widehat{a} + \nu\widehat{a}^{\dagger}|\mu,\nu,\beta\rangle = \mu\langle\alpha|\widehat{a}|\mu,\nu,\beta\rangle + \nu\langle\alpha|\widehat{a}^{\dagger}|\mu,\nu,\beta\rangle = \\
&= \mu\langle vac|\exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2}\right)\exp\left(\alpha^*\widehat{a}\right)\widehat{a}|\mu,\nu,\beta\rangle + \nu\alpha^*\langle\alpha|\mu,\nu,\beta\rangle = \\
&= \mu\left(\partial/\partial\alpha^* + \alpha/2\right)\langle vac|\exp\left(-\frac{\alpha\alpha^*}{2}\right)\exp\left(\alpha^*\widehat{a}\right)|\mu,\nu,\beta\rangle + \\
&\quad + \nu\alpha^*\langle\alpha|\mu,\nu,\beta\rangle
\end{aligned} \tag{4}$$

Обратим внимание на то, что в последнем равенстве α и α^* рассматриваются как независимые параметры, которые понимаются как взаимно сопряженные только после проведения дифференцирования. Соотношение (2)
может быть представлено как дифференциальное уравнение первого порядка относительно искомого коэффициента разложения сжатого состояния по векторам $|\alpha\rangle$ когерентных состояний:

$$\frac{\partial}{\partial\alpha^*}\langle\alpha|\mu,\nu,\beta\rangle = \left(\frac{\beta}{\mu} - \frac{\alpha}{2} - \frac{\nu\alpha^*}{\mu}\right)\langle\alpha|\mu,\nu,\beta\rangle \tag{5}$$

Непосредственным интегрированием находим

$$\langle\alpha|\mu,\nu,\beta\rangle = C\exp\left(\frac{\beta\alpha^*}{\mu} - \frac{|\alpha|^2}{2} - \frac{\nu\alpha^{*2}}{2\mu}\right) \tag{6}$$

Постоянную интегрирования найдем из условия нормировки

$$\langle \mu, \nu, \beta | \mu\nu, \beta \rangle = \frac{1}{\pi} \int d^2\alpha |\langle \mu, \nu, \beta | \alpha \rangle|^2 = 1$$

Для наиболее важного, с практической точки зрения, случая $|\mu|^2 - |\nu|^2 = 1$ возникающий нормировочный интеграл может быть вычислен явно:

$$\frac{1}{\pi} \int d^2\alpha \left| \exp\left(\frac{\beta\alpha^*}{\mu} - \frac{|\alpha|^2}{2} - \frac{\nu\alpha^{*2}}{\mu} \right) \right|^2 = |\mu| \exp\left(|\beta|^2 - \frac{\beta^{*2}\nu}{2\mu^*} - \frac{\beta^2\nu^*}{2\mu} \right)$$

В результате с точностью до произвольного фазового множителя получаем следующее представление для матричного элемента перекрывания сжатого и когерентного состояний:

$$\langle \alpha | \mu, \nu, \beta \rangle = \frac{1}{\sqrt{\mu}} \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{2} - \frac{|\beta|^2}{2} - \frac{\nu\alpha^{*2}}{2\mu} + \frac{\nu^*\beta^2}{2\mu} + \frac{\alpha^*\beta}{\mu} \right) \tag{7}$$

Отметим, что в частном случае $\alpha = 0$ (вакуумное состояние) и $\beta = 0$ (так называемое состояние «сжатого вакуума») матричный элемент перекрывания стремится к нулю $1/\sqrt{\mu} \to 0$, если $\mu \to \infty$. Такой результат понятен из общих геометрических соображений: перекрывание гауссова круга неопределенности на плоскости α, характерного для когерентного состояния, с эллипсом неопределенности, характерным для сжатого состояния, уменьшается с увеличением степени сжатия.

6.43. Воспользуемся разложением

$$\langle \alpha | \mu, \nu, \beta \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle \alpha | n \rangle \langle n | \mu, \nu, \beta \rangle \tag{1}$$

Подставляя в правую часть этого равенства выражение, полученное в предыдущей задаче, а в правую - известное значение скалярного произведения векторов фоковского и когерентного состояний

$$\langle \alpha | n \rangle = \exp\left(-|\alpha|^2/2\right) \frac{\alpha^{*n}}{\sqrt{n!}}$$

- приходим к следующему соотношению:
  (2) $\frac{1}{\sqrt{\mu}} \exp\left(-\frac{\nu{\alpha^*}^2}{2\mu} + \frac{\beta\alpha^*}{\mu} \right) = \exp\left(\frac{|\beta|^2}{2} - \frac{\beta^2\nu^*}{2\mu} \right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{*n}}{\sqrt{n!}} \langle n | \mu, \nu, \beta \rangle$.

Это соотношение можно рассматривать как разложение выражения, стоящего в левой части, в ряд по степеням α^*. С другой стороны, левую часть можно рассматривать как производящую функцию для полиномов Эрмита. Действительно, производящая функция определяется соотношением [Абрамовиц и Стиган (1979)]

$$\exp\left(-x^2 + ax\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} H_n\left(\frac{a}{2}\right) \tag{3}$$

и в случае $x = \sqrt{\nu/2\mu}\alpha^*$ и $a = \beta\sqrt{2/\mu\nu}$ совпадает с экспоненциальным множителем в левой части разложения (2). Последнее принимает вид

$$\frac{1}{\sqrt{\mu}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{*n}}{n!} H_n\left(\frac{\beta}{\sqrt{2\mu\nu}}\right) \left(\frac{\nu}{2\mu}\right)^{n/2} = \tag{4}$$

$$= \exp\left(\frac{|\beta|^2}{2} - \frac{\beta^2\nu^*}{2\mu} \right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{*n}}{\sqrt{n!}} \langle n | \mu, \nu, \beta \rangle$$

Отсюда, приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях α^*, находим искомый матричный элемент

$$\langle n|\mu,\nu,\beta\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!\mu}}\left(\frac{\nu}{2\mu}\right)^{n/2}\exp\left(-\frac{|\beta|^2}{2}+\frac{\nu^*\beta^2}{2\mu}\right)H_n\left(\frac{\beta}{\sqrt{2\mu\nu}}\right) \tag{5}$$

Обратим внимание на то, что в случае разложения состояния «сжатого вакуума» ($\beta \to 0$) по базису фоковских состояний в пределе $\mu \to \infty$ становятся существенными проекции на состояния с большими n. Это означает, что
геометрическая интерпретация «сжатого вакуума» в виде деформированного вакуумного состояния на плоскости α, в значительной степени условна, ибо сжатое состояние, в действительности, является многочастичным, с участием большого количества фотонов.
6.44. Воспользуемся определением нормальной характеристической функции и результатом предыдущей задачи:

$$\begin{aligned}\theta\left[\kappa,\kappa^*\right] &= \langle\gamma,\beta|\exp\left(\kappa\widehat{a}^\dagger\right)\exp\left(-\kappa^*\widehat{a}\right)|\gamma,\beta\rangle = \\ &= \langle vac|D^\dagger(\beta)S^\dagger(\gamma)e^{\kappa a^\dagger}S(\gamma)D(\beta)D^\dagger(\beta)S^\dagger(\gamma)e^{-\kappa^* a}S(\gamma)D(\beta)|vac\rangle\end{aligned} \tag{1}$$

Используем также закон преобразования операторов

$$\begin{aligned}&\widehat{S}(\gamma)\widehat{a}\widehat{S}^\dagger(\gamma) = \mu\widehat{a}+\nu\widehat{a}^\dagger, \quad \widehat{S}(\gamma)\widehat{a}^\dagger\hat{S}^\dagger(\gamma) = \mu\widehat{a}^\dagger+\nu^*\widehat{a}, \\ &\widehat{D}(\beta)\widehat{a}\widehat{D}^\dagger(\beta) = \widehat{a}-\beta, \quad \widehat{D}(\beta)\widehat{a}^\dagger\hat{D}^\dagger(\beta) = \widehat{a}^\dagger-\beta^*.\end{aligned} \tag{2}$$

Учитывая свойство операторов сжатия и сдвига $\widehat{S}^\dagger(\gamma) = \widehat{S}(-\gamma)$ и $\widehat{D}^\dagger(\beta) = \widehat{D}(-\beta)$, соотношение (1) может быть преобразовано к виду

$$\begin{aligned}\theta\left[\kappa,\kappa^*\right] &= \exp\left[\kappa\left(\mu\beta^*-\nu^*\beta\right)-\kappa^*\left(\mu\beta-\nu\beta^*\right)\right]\times \\ &\times\langle vac|\exp\left[\kappa\left(\mu\widehat{a}^\dagger-\nu^*\widehat{a}\right)\right]\exp\left[-\kappa^*\left(\mu\widehat{a}-\nu\widehat{a}^\dagger\right)\right]|vac\rangle.\end{aligned} \tag{3}$$

Разлагая операторные функции в ряды Тейлора и удерживая только вклады, неисчезающие после усреднения по вакуумному состоянию, получим

$$\begin{aligned}\theta\left[\kappa,\kappa^*\right] &= \exp\left[\kappa\left(\mu\beta^*-\nu^*\beta\right)-\kappa^*\left(\mu\beta-\nu\beta^*\right)\right]\times \\ &\times\exp\left(-\kappa\kappa^*\,\mathrm{sh}^2\,r-\frac{\kappa^2}{4}e^{-2i\vartheta}\,\mathrm{sh}\,2r-\frac{\kappa^{*2}}{4}e^{2i\vartheta}\,\mathrm{sh}\,2r\right)\end{aligned} \tag{4}$$

что совпадает с ответом, приведенным в условии задачи.
Данное состояние описывает поле, характеризуемое средней комплексной амплитудой $\langle\widehat{a}\rangle = \alpha$ и поведение поля в среднем напоминает поведение когерентного состояния той же амплитуды. Однако в отличие от когерентного состояния неопределенности квадратурных компонент ведут себя иначе. Предположим для простоты, что параметр β - вещественен, а фаза $\vartheta \to 0$. В соответствии с определением квадратурных компонент (см. задачу 6.33)

$$\begin{aligned}\widehat{X}_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\widehat{a}^\dagger+\widehat{a}\right), \\ \widehat{X}_2 &= \frac{i}{\sqrt{2}}\left(\widehat{a}^\dagger-\widehat{a}\right).\end{aligned}$$

Используя производящую функцию (4), находим

$$\left\langle \Delta\widehat{X}_1^2 \right\rangle = \frac{1}{2}\left[\left\langle \widehat{a}^2 + \widehat{a}^{\dagger 2} + 2\widehat{a}^\dagger\widehat{a} + 1 \right\rangle - \left(\langle\widehat{a}\rangle^2 + \left\langle \widehat{a}^\dagger \right\rangle^2 + 2\langle\widehat{a}\rangle \left\langle \widehat{a}^\dagger \right\rangle \right)\right] =$$
$$= \frac{1}{2}\left[1 - 2e^{-r}\,\mathrm{sh}\, r\right] \to 0 \quad \text{при} \quad r \to \infty$$
$$\left\langle \Delta\widehat{X}_2^2 \right\rangle = \frac{1}{2}\left[\left\langle -\widehat{a}^2 - \widehat{a}^{\dagger 2} + 2\widehat{a}^\dagger\widehat{a} + 1 \right\rangle + \left(\langle\widehat{a}\rangle^2 + \left\langle \widehat{a}^\dagger \right\rangle^2 - 2\langle\widehat{a}\rangle \left\langle \widehat{a}^\dagger \right\rangle \right)\right] = \tag{5}$$
$$= \frac{1}{2}\left[1 + 2e^{r}\,\mathrm{sh}\, r\right] \to \infty \quad \text{при} \quad r \to \infty$$

Таким образом неопределенность координатной квадратуры уменьшается, а неопределенность импульсной квадратуры неограниченно нарастает. При этом для произведения $\left\langle \Delta\widehat{X}_1^2 \right\rangle \left\langle \Delta\widehat{X}_2^2 \right\rangle = 1/4$ сохраняется то же значение, что и для когерентного состояния. Именно свойство (5) и определяет эти состояния как сжатые. Предоставляем читателю самостоятельно исследовать, как изменится результат в общем случае комплексной амплитуды β и произвольной фазы ϑ.

6.45. Средние от нормально упорядоченных произведений операторов рождения и уничтожения можно вычислить с помощью квазивероятности Глаубера- Сударшана (6.41), которая для равновесного теплового излучения имеет гауссов вид (6.44):

$$\mathscr{P}(\alpha) = \frac{1}{\pi\bar{n}} \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{\bar{n}}\right) \tag{1}$$

Отсюда заключаем, что и для квадратурных компонент (см. задачи 6.37,6.44), рассматриваемых по отдельности, распределения сохраняют гауссов вид.

Выразим дисперсию координатной квадратуры через операторы рождения и уничтожения

$$\left\langle \Delta\widehat{X}_1^2 \right\rangle = \frac{1}{2}\left[\left\langle \widehat{a}^2 + \widehat{a}^{\dagger 2} + 2\widehat{a}^\dagger\widehat{a} + 1 \right\rangle - \left(\langle\widehat{a}\rangle^2 + \left\langle \widehat{a}^\dagger \right\rangle^2 + 2\langle\widehat{a}\rangle \left\langle \widehat{a}^\dagger \right\rangle \right)\right]. \tag{2}$$

Дисперсия координатной квадратуры может быть вычислена как усреднение выражения (2) с помощью квазивероятности (1):

$$\left\langle \Delta\widehat{X}_1^2 \right\rangle = \int d^2\alpha \frac{1}{2\pi\bar{n}} \exp\left(-\frac{|\alpha|^2}{\bar{n}}\right)\left(\alpha^2 + \alpha^{*2} + 2|\alpha|^2 + 1\right) = \tag{3}$$
$$= \bar{n} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\coth(\hbar\omega/2T)$$

В последнем равенстве использована формула для среднего числа фотонов в моде в случае теплового излучения, характеризуемого температурой T. Дисперсия импульсной квадратурной компоненты $\left\langle \Delta\widehat{X}_2^2 \right\rangle$ вычисляется аналогично.

6.46. Покажем, что оператор эволюции поля, обусловленный взаимодействием с классическим током, совпадает с оператором смещения (сдвига) амплитуды $\widehat{D}(\alpha)$ (см. формулу (6.36)). Оператор взаимодействия классического тока с электромагнитным полем имеет вид

$$\widehat{V}(t) = -\frac{1}{c}\int \boldsymbol{j}\,\widehat{\boldsymbol{A}} d^3r \tag{1}$$

где предполагается, что $\boldsymbol{j} = \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}, t)$ - заданная числовая функция координат и времени, а $\widehat{\boldsymbol{A}} = \widehat{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{r})$ - оператор поперечной (квантованной) компоненты векторного потенциала.

Рассмотрим эволюцию электромагнитного поля из вакуумного состояния для достаточно малого временного промежутка δt. Используя представление взаимодействия (см. пример 6.10), введем оператор эволюции

$$S(t+\delta t,t)=\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\widehat{V}_I(t)\delta t\right) \tag{2}$$

где $\widehat{V}_I(t)$ представляет собой оператор (1), записанный в представлении взаимодействия. В развернутой форме, используя явный вид оператора $\widehat{A}(r)$, см. формулу (6.13), получим

$$S(t+\delta t,t)=\exp\left\{\delta t\sum_{\boldsymbol{k}\lambda}\left(-\widehat{a}_{\boldsymbol{k}_\lambda}u^*_{\boldsymbol{k}\lambda}(t)+\widehat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}\lambda}u_{\boldsymbol{k}\lambda}(t)\right)\right\} \tag{3}$$

где использовано обозначение

$$u^*_{\boldsymbol{k}\lambda}(t)=-\frac{i}{\hbar}\left(\frac{2\pi\hbar c^2}{\mathscr{V}\omega_k}\right)^{\frac{1}{2}}e^{-i\omega_k t}e_{\boldsymbol{k}\lambda}\int\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t)e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}}d^3r$$

Соотношение (3) для оператора эволюции может быть представлено в виде произведения

$$\begin{aligned}S(t+\delta t,t)&=\prod_{\boldsymbol{k}\lambda}\exp\left\{\delta t\left(-\widehat{a}_{\boldsymbol{k}\lambda}u^*_{\boldsymbol{k}\lambda}(t)+\widehat{a}^\dagger_{\boldsymbol{k}\lambda}u_{\boldsymbol{k}\lambda}(t)\right)\right\}= \\ &=\prod_{\boldsymbol{k}\lambda}\widehat{D}_{\boldsymbol{k}\lambda}\left(\delta t u_{\boldsymbol{k}\lambda}(t)\right)\end{aligned} \tag{4}$$

где в правой части введен для каждой моды оператор сдвига ее аргумента на малую величину.

Учитывая свойство оператора сдвига $\widehat{D}(\alpha_1)\widehat{D}(\alpha_2) = \widehat{D}(\alpha_1+\alpha_2)$, если $\arg(\alpha_1)=\arg(\alpha_2)$, матрица плотности поля в произвольный момент времени может быть представлена следующим образом:

$$\rho(t)=\prod_{\boldsymbol{k}\lambda}\widehat{D}_{\boldsymbol{k}\lambda}\left(v_{\boldsymbol{k}\lambda}(t)\right)\rho(0)\prod_{\boldsymbol{k}\lambda}\hat{D}^\dagger_{\boldsymbol{k}\lambda}\left(v_{\boldsymbol{k}\lambda}(t)\right) \tag{5}$$

где $v_{\boldsymbol{k}\lambda}(t)=\int\limits_0^t u_{\boldsymbol{k}\lambda}(\tau)d\tau$.Если начальное состояние - вакуумное, $\rho(0)=|vac\rangle\langle vac|$, то состояние $\rho(t)$ оказывается многомодовым когерентным, см. задачу 6.32 .

6.48. Переходы из состояния с $l=1$ в состояние с $l=0$ разрешены правилами отбора (6.88) для электрического дипольного излучения, поэтому соответствующие вероятности можно вычислить с помощью формулы (6.73). Спиновое состояние электрона при переходе не изменяется. Координатные волновые функции начального и конечного состояний имеют вид [Ландау и Лифшиц, Квантовая механика]

(1)

$$\psi_i=R_{21}(r)Y_{1m_l}(\vartheta,\varphi),\quad \psi_f=R_{10}(r)Y_{00}$$

где $\quad R_{10}(r)=\frac{2}{a_B^{3/2}}e^{-r/a_B},\quad R_{21}(r)=\frac{r}{2\sqrt{6}a_B^{5/2}}e^{-r/2a_B}$

- радиальные волновые функции атома водорода, $a_B=\hbar^2/m_e e^2$ - боровский радиус,

$$Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}, \quad Y_{10}(\vartheta,\varphi) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\vartheta, \quad Y_{1,\pm1}(\vartheta,\varphi) = \pm\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\vartheta e^{\pm\varphi} \tag{2}$$

- угловые функции (сферические функции Лежандра, см. ответ к задаче 1.118). Разложим радиус-вектор по циклическим компонентам (см. задачу 1.17)

$$r = \sum_{\mu=-1}^{+1}(-1)^{\mu} e_\mu x^*_\mu, \quad x_\mu = r\sqrt{\frac{4\pi}{3}}(-1)^{\mu} Y_{1\mu}(\vartheta,\varphi) \tag{3}$$

$$e_\mu = \pm\frac{1}{sqrt2}\left(e_x \pm i e_y\right), \quad e_0 = e_z$$

Выбрав ось Ox в плоскости, определяемой осью квантования (Oz) и волновым вектором испущенного фотона, и вычислив дипольный момент перехода (6.72), будем иметь

$$\frac{dw^{sp}}{d\Omega_k} = \frac{2^{16}}{3^9}\frac{\omega^3\left(ea_B\right)^2}{2\pi\hbar c^3}\left|e^*_\sigma \cdot e_{m_l}\right|^2 \tag{4}$$

Действительные орты линейной поляризации кванта выберем так, чтобы e_1 лежал в плоскости xz и имел проекции $\cos\theta, 0, -\sin\theta$ на декартовы оси; при этом $e_2 = e_y$. В этих обозначениях угловая зависимость излучения будет описываться функцией $F_{\sigma,m_l}(\theta) = \left|e^*_\sigma \cdot e_{m_l}\right|^2$, значения которой приведены ниже в таблице.

m_l	$+1$	0	-1
$\sigma = 1$	$\frac{1}{2}\cos^2\theta$	$\sin^2\theta$	$\frac{1}{2}\cos^2\theta$
$\sigma = 2$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
$\sum\limits_\sigma F_{\sigma,m_l}(\theta)$	$\frac{1}{2}\left(1+\cos^2\theta\right)$	$\sin^2\theta$	$\frac{1}{2}\left(1+\cos^2\theta\right)$

В последней строке таблицы приведено угловое распределение излучения, просуммированного по поляризациям. Для неполяризованного атома угловая функция $\sum\limits_{m_l} F_{\sigma,m_l}(\theta) = 2/3$ изотропна ввиду отсутствия выделенного направления в источнике излучения.

6.49. Интенсивность излучения вычисляется как произведение энергии кванта $\hbar\omega = \mathscr{E}_i - \mathscr{E}_f$ на суммарную по всем направлениям вероятность перехода в единицу времени. Из выражения эффективной плотности заряда, приведенного в условии задачи 5.23, следует, что рассматривается переход из состояния $2p, m_l = 0$ в основное состояние $1\,\mathrm{s}, m_l = 0$. С помощью результатов предыдущей задачи получим формулу, в точности совпадающую с ответом задачи 5.23, который можно записать в другой форме:

$$I = \left(\frac{2}{3}\right)^8 \frac{\alpha^3 m_e e^4}{\hbar^3}\hbar\omega$$

Здесь α - постоянная тонкой структуры (6.51).

6.50. Независимо от магнитного квантового числа m_l время жизни атома в возбужденном состоянии $2p$

$$\tau = \frac{1}{w^{sp}} = \left(\frac{3}{2}\right)^8 \alpha^{-3}\frac{\hbar^3}{m_e e^4} \approx 1,6\times10^{-9}\mathrm{c}$$

6.51. Согласно результатам задачи 6.20, фотон с правой циркулярной поляризацией имеет проекцию спина $+\hbar$ на ось, направленную вдоль его волнового вектора k. При поглощении его электроном по закону сохранения момент фотона будет передан электрону, который перейдет в состояние с $m_l = +1$. Аналогично, фотон с левой круговой поляризацией переведет электрон в состояние с $m_l = -1$, а линейно поляризованный фотон в состояние с $m_l = 0$.
6.52. Интенсивность I_α линии Ly_α уже была вычислена в задаче 6.48. Вычислив аналогичным образом I_β, получим $I_\alpha/I_\beta \approx 3,2$.
6.53. После интегрирования дифференциального выражения (6.76) для вероятности электрического дипольного излучения по направлениям вылета фотона получим

$$w^{sp} = \frac{4\omega^3}{3\hbar c^3} \left|\boldsymbol{p}_{fi}\right|^2 \tag{1}$$

Матричный элемент дипольного момента должен вычисляться с волновыми функциями

$$\Psi_i = R_{20}(r)Y_{00}\chi_\mu, \quad \Psi_f = R_{21}(r)\Phi_{1/2m} \tag{2}$$

Выразив радиус-вектор через сферические функции Лежандра (см. уравнение (3) из решения задачи 6.47) и использовав условие ортонормированности спиноров $(\chi_{\mu'}, \chi_\mu) = \delta_{\mu\mu'}$, получим

$$\boldsymbol{p}_{fi} = e\sqrt{\frac{4\pi}{3}} C^{1/2m_j}_{1,m_j-\mu 1/2\mu} e_{\mu-m_J} \int\limits_0^\infty R_{20}(r)R_{21}(r)r^3 dr \tag{3}$$

Полная вероятность перехода должна быть просуммирована по конечным состояниям полного момента $m_j = \pm 1/2$ и усреднена по начальным спиновым состояниям $\mu = \pm 1/2$: $w = (1/2)\sum\limits_{\mu,m_j} w^{sp}$. Выделив множители, зависящие от магнитных квантовых чисел, будем иметь

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\sum_{m_j}\sum_{\mu} C^{1/2m_j}_{1,m_j-\mu 1/2\mu} C^{1/2m_J}_{1,m_j-\mu 1/2\mu} \left(e^*_{\mu-m_j}\cdot e_{\mu-m_j}\right) = \\ &= \frac{1}{2}\sum_{m_j}\sum_{\mu} C^{1/2m_j}_{1,m_j-\mu 1/2\mu} C^{1/2m_j}_{1,m_j-\mu 1/2\mu} = 1 \end{aligned} \tag{4}$$

Последнее равенство является следствием ортонормированности спин-угловых функций Φ_{jm_j}. Пользуясь их определением, данным в условии задачи, находим

$$\begin{aligned} &\left(\Phi_{j'm'_j}, \Phi_{jm_j}\right) = \\ &= \sum_{m',\mu'}\sum_{m,\mu} C^{j'm'_j}_{l'm'1/2\mu'} C^{jm_j}_{lm1/2\mu} \left(\chi_{\mu'}, \chi_\mu\right) \int Y^*_{l'm'}(\vartheta,\varphi) Y_{lm}(\vartheta,\varphi) d\Omega = \\ &= \sum_{m,\mu} C^{j'm'_j}_{lm1/2\mu} C^{jm_3}_{lm1/2\mu} = \delta_{jj'}\delta_{m_j m'_j} \end{aligned} \tag{5}$$

Это значение суммы коэффициентов Клебша-Гордана и использовано при получении результата (4). Таким образом, вычисляя простой интеграл в (3) и собирая найденные величины, приходим к выражению

$$w = \frac{12e^2 a_B^2 \omega^3}{\hbar c^3} \approx 0,8 \times 10^{-9}\text{c}$$

6.54. Считая протон неподвижным, запишем волновые функции атома в начальном и конечном состояниях:

$$\psi_i = R_{10}Y_{00}\Phi_{1M}, \quad \psi_f = R_{10}Y_{00}\Phi_{00} \tag{1}$$

Здесь R_{10}, Y_{00} - радиальная и угловая функции электрона, Φ_{SM} - спиновые волновые функции электрона (e) и протона (p), соответствующие синглетному и триплетному состояниям:
(2)

$$\Phi_{00} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\chi_{1/2}(e)\chi_{-1/2}(p) - \chi_{1/2}(p)\chi_{-1/2}(e)\right]$$

$$\Phi_{1M} = \begin{cases} \chi_{1/2}(e)\chi_{1/2}(p), & M = 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\chi_{1/2}(e)\chi_{-1/2}(p) - \chi_{1/2}(p)\chi_{-1/2}(e)\right], & M = 0 \\ \chi_{-1/2}(e)\chi_{-1/2}(p), & M = -1 \end{cases}$$

Радиационный переход сопровождается изменением спинового состояния двух частиц и вызывается взаимодействием спина электрона с полем излучения. Взаимодействие протона с полем меньше в m_p/m_e раз и может не учитываться. В операторе взаимодействия (6.57) достаточно учесть только спиновую часть,

$$\widehat{V} = -\mu_B \widehat{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \widehat{\boldsymbol{H}} \tag{3}$$

так как остальные слагаемые дадут нулевой вклад из-за ортогональности спиновых функций синглетного и триплетного состояний. В (3) $\widehat{\sigma}$ - матричный вектор Паули, μ_B - магнетон Бора. Вычисляя матричный элемент от оператора $\widehat{\sigma}$ с волновыми функциями (2), находим $(\Phi_{00}, \widehat{\sigma}\Phi_{10}) = e_z$. Для $M = \pm 1$ получим соответственно $\pm e_z/\sqrt{2}$. Для вычисления вероятности перехода в единицу времени используем формулы (6.10) и (6.59). Полная вероятность, усредненная по начальным состояниям $M = 0, \pm 1$ и просуммированная по поляризациям кванта, запишется в виде

$$w = \frac{2}{9}\frac{e^2}{\hbar c}\frac{\Delta\mathscr{E}^3}{\hbar m_e^2 c^4} \approx 2 \times 10^{-15}\text{c} \tag{4}$$

Рассмотренный переход между подуровнями сверхтонкой структуры атомов водорода соответствует длине волны порядка 21 см и широко используется в радиоастрономии для исследования распределения нейтрального (неионизованного) водорода во Вселенной. Любопытно сравнить времена жизни триплетного подуровня и уровня $2p$ водорода (см. задачу 6.49): в первом случае имеем $\tau = 1/w \approx 10^7$ лет, тогда как для перехода $2p \to 1s$ в ультрафиолетовом диапазоне получаем $\tau \approx 1,6 \times 10^{-9}$ с. Столь большая разница в основном обязана сильной зависимости, $\tau \propto \omega^{-3}$, от частоты излучаемого фотона.
6.55. Применяем общую формулу (6.57) теории возмущений,

$$dw^{abs} = \frac{2\pi}{\hbar}|\langle f|\widehat{V}|i\rangle|^2 \delta\left(\mathscr{E}_i - \mathscr{E}_f + \hbar\omega\right) d\nu \tag{1}$$

где

$$\widehat{V} = -(e/mc)\widehat{\boldsymbol{A}} \cdot \widehat{\boldsymbol{p}} \tag{2}$$

а векторы начального и конечного состояний имеют вид

$$|i\,\langle = \psi_{100}(r)|N_s\rangle\,, \quad |\,f\rangle = \psi_p(\boldsymbol{r})\,|N_s - 1\rangle\,, \quad \psi_p = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} e^{i\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}/\hbar} \tag{3}$$

- волновая функция свободного электрона в конечном состоянии. При такой нормировке число состояний в непрерывном спектре следует записать в виде

$$d\nu = p^2 dp d\Omega_p = 2^{1/2} m^{3/2} \mathscr{E}_p^{1/2} d\mathscr{E}_p d\Omega_p \tag{4}$$

Спиновое состояние электрона не изменяется под действием оператора (2), поэтому спиновую волновую функцию можно не выписывать.

Для получения сечения рассеяния нужно поделить (1) на плотность потока $j_0 = N_s c/\mathscr{V}$ падающих на атом фотонов. При интегрировании в матричном элементе по координатам следует учесть, что волновой вектор кванта мал по сравнению с волновым вектором электрона, $k \ll p\hbar$. После проведения вычислений получим дифференциальное сечение фотоионизации атома поляризованными фотонами:

$$d\sigma_{ph} = 64 \frac{e^2}{\hbar c} \left(\frac{I_0}{\hbar\omega}\right)^{7/2} a_B^2\, |e_s \cdot \boldsymbol{n}|^2\, d\Omega_p \tag{5}$$

где $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{p}/p$ - направление вылета электрона, I_0 - энергия связи (ионизационный потенциал) электрона в основном состоянии атома водорода. После усреднения по поляризациям кванта и интегрированию по направлениям вылета электрона получим полное сечение фотоионизации

$$\sigma_{ph} = \frac{256\pi}{3} \frac{e^2}{\hbar c} \left(\frac{I_0}{\hbar\omega}\right)^{7/2} a_B^2 \tag{6}$$

Пределы применимости результата: $I_0 \ll \hbar\omega \ll mc^2$.

6.56. По сравнению с предыдущей задачей волновые функции начального и конечного состояний меняются местами, поэтому квадрат модуля матричного элемента остается тем же. Вместо усреднения по поляризациям кванта нужно произвести суммирование по ним, что дает дополнительный множитель 2. Число конечных состояний $d\nu = \mathscr{V}\omega^2 d\omega d\Omega_k/(2\pi c)^3$ относится теперь к фотону. Наконец, вместо плотности потока фотонов нужно использовать плотность потока рекомбинирующих электронов $j_0 = v/(2\pi\hbar)^3$. В итоге, собирая нужные множители, находим полное сечение рекомбинации

$$\sigma_{rec} = \frac{128\pi}{3} \left(\frac{e^2}{\hbar c}\right)^3 \left(\frac{I_0}{\mathscr{E}_p}\right)^{5/2} a_B^2$$

В области применимости расчета, $I_0 \ll \mathscr{E}_p \ll mc^2$, оно мало по сравнению с сечением фотоионизации.

6.58. Для свободного поля представление взаимодействия совпадает с гейзенберговским представлением, так как взаимодействие с атомными системами отсутствует. Поэтому искомое представление получится, если в равенствах (6.13)-(6.15) заменить операторы рождения и уничтожения фотонов на зависящие от времени (гейзенберговские) операторы согласно (6.23). В частности,

$$\widehat{\boldsymbol{E}}_I(\boldsymbol{r}, t) = i \sum_j \left(\frac{2\pi\hbar\omega_j}{\mathscr{V}}\right)^{1/2} \left[\left(e_j a_j e^{i(\boldsymbol{k}_j\cdot\boldsymbol{r} - \omega_j t)} - \left(e_j^* a_j^\dagger e^{-i(\boldsymbol{k}_j\cdot\boldsymbol{r} - \omega_j t)}\right]\right.\right.$$

6.59. $\widehat{V}_I(t) = -\widehat{\boldsymbol{d}}_I(t) \cdot \widehat{\boldsymbol{E}}_I(t)$, где

$$\widehat{\boldsymbol{d}}_I(t) = \sum_{mn} \left(d_{nm} e^{i\omega_{nm}t} |n\rangle\langle m| + d_{mn} e^{i\omega_{mn}t} |m\rangle\langle n| \right)$$

d_{mn} - прежние не зависящие от времени матричные элементы.

6.60. $\Psi_I(t) = \exp\left(\frac{i}{\hbar}\widehat{\mathscr{H}_0}\right)\Psi_S(t); i\hbar\frac{\partial\Psi_I}{\partial t} = \widehat{V}_I(t)\Psi_I$, где $\widehat{V}_I(t)$ - оператор взаимодействия в представлении взаимодействия.

6.61. Преобразуем рассматриваемый матричный элемент следующим образом:

$$\omega_{ln}\langle l|d_z|n\rangle = \frac{e}{\hbar}\left(\mathscr{E}_l - \mathscr{E}_n\right)\sum_{a=1}^{N}\langle l|\tilde{z}_a|n\rangle = \tag{1}$$

$$= \frac{e}{\hbar}\sum_{a=1}^{N}\langle l|\left[\widehat{\mathscr{H}}, \widehat{z}_a\right]|n\rangle = -\frac{ie}{m}\sum_{a=1}^{N}\langle l|\widehat{p}_{za}|n\rangle$$

Здесь N - полное число электронов, $\widehat{\mathscr{H}}$ - точный гамильтониан атомной системы. Далее применяем соотношения $\langle l|z|n\rangle = \langle n|z|l\rangle^*, \omega_{ln} = -\omega_{nl}$ и получаем

$$\sum_l \omega_{ln}\left|\langle l|d_z|\, n\right\rangle|^2 = \tag{2}$$

$$= \frac{ie^2}{2m}\sum_{a=1}^{N}\sum_l \left\{\langle n|\widehat{p}_{za}|l\rangle\langle l|z_a|n\rangle - \langle n|z_a|l\rangle\langle l|\widehat{p}_{za}|n\rangle\right\} =$$

$$= \frac{ie^2}{2m}\sum_{a=1}^{N}\langle n|\left[\widehat{p}_{za}, \widehat{z}_a\right]|n\rangle = \frac{\hbar e^2}{2m}N.$$

Использована полнота атомных состояний: $\sum\limits_l |l\rangle\langle l| = 1$.

6.62. Рассматриваем оператор взаимодействия $\widehat{V} = -\widehat{\boldsymbol{d}}\cdot\boldsymbol{E}$ системы с внешним постоянным электрическим полем как малое возмущение. По теории возмущений вычисляем с учетом членов первого порядка поправку к волновой функции [Ландау и Лифшиц, Квантовая механика]:

$$|\psi\rangle = |0\rangle + \sum_n{}' \frac{\langle n|\widehat{V}|0\rangle}{\mathscr{E}_0 - \mathscr{E}_n}|n\rangle \tag{1}$$

Штрих у суммы означает отсутствие члена с $n = 0$; $\mathscr{E}_n$ - невозмущенные уровни энергии системы частиц. Символ $|0\rangle$ обозначает волновую функцию основного состояния. С помощью $|\psi\rangle$ вычисляем среднее квантовомеханическое значение дипольного момента системы, оставляя лишь члены не выше первого порядка по возмущению:

$$\langle\psi|\widehat{\boldsymbol{d}}|\psi\rangle = \langle 0|\widehat{\boldsymbol{d}}|0\rangle + \sum_n{}' \frac{1}{\mathscr{E}_0 - \mathscr{E}_n}\{\langle n|\widehat{V}|0\rangle\langle 0|\widehat{\boldsymbol{d}}|n\rangle + \langle 0|\widehat{V}|n\rangle\langle n|\widehat{\boldsymbol{d}}|0\rangle\} \tag{2}$$

Первое слагаемое в правой части представляет собой электрический дипольный момент системы частиц в невозмущенном основном состоянии (если таковой отличен от нуля) [8]. Сумма по n, пропорциональная приложенному полю, представляет собой индуцированный дипольный момент. Выделив коэффициенты пропорциональности, получим

$$\alpha_{\mu\nu} = \sum_n{}' \frac{1}{\mathscr{E}_n - \mathscr{E}_0}\left\{\langle 0|\widehat{d}_\mu|n\rangle\langle n|\widehat{d}_\nu|0\rangle + \langle 0|\widehat{d}_\nu|n\rangle\langle n|\widehat{d}_\mu|0\rangle\right\} \tag{2}$$

6.63. Используем представление взаимодействия, в котором волновая функция объединенной системы атом + поле удовлетворяет уравнению (см. задачу 6.60 ; индекс I опускаем)

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=\widehat{V}(t)\psi \tag{1}$$

где оператор взаимодействия в дипольном приближении имеет вид

$$\widehat{V}(t)=-\widehat{\boldsymbol{d}}_{21}(t)\cdot\widehat{\boldsymbol{E}}^{(+)}(\boldsymbol{r},t)|2\rangle\langle 1|-\widehat{\boldsymbol{d}}_{12}(t)\cdot\widehat{\boldsymbol{E}}^{(-)}(\boldsymbol{r},t)|1\rangle\langle 2| \tag{2}$$

Оператор дипольного момента зависит от времени, $d_{21}^{\alpha}(t)=d_{21}^{\alpha}\exp\left(i\omega_{21}t\right)$, где d_{21}^{α} - не зависящий от времени матричный элемент, ω_{21} - частота перехода между состояниями атома. Вид зависящих от времени операторов напряженности поля в представлении взаимодействия приведен в задаче 6.58. Для простоты мы ограничились резонансным приближением (6.105) (его еще называют приближением вращающейся волны), оставив в первом слагаемом (6.63) только положительно-частотную часть оператора электромагнитного поля, ответственную за поглощение фотонов.

Волновая функция начального состояния системы, соответствующая невзаимодействующим атому и полю, может быть представлена в виде произведения $\psi_0=|1\rangle\,|\{N_s\}\rangle$, где для определенности мы рассматриваем случай, когда исходное состояние атома было основным, а поле находилось в одном из фоковских состояний.

В первом порядке теории возмущений волновая функция в момент времени t равна

$$\psi(t)=-\frac{i}{\hbar}\int\limits_0^t\widehat{V}(\tau)d\tau|1\rangle\,|\{N_s\}\rangle \tag{3}$$

Вероятность $\widetilde{W}(t)$ найти атомную систему к моменту времени t в возбужденном состоянии $|2\rangle$ равна квадрату модуля $|\langle 2|\psi(t)\rangle|^2$, просуммированому по всем возможным конечным состояниям $|f\rangle$ поля:

$$\widetilde{W}(t)=\frac{1}{\hbar^2}\sum_f d_{21}^{\alpha}d_{12}^{\beta}\int\limits_0^t\int\limits_0^t d\tau_1 d\tau_2\langle f|E_{\alpha}^{(+)}(r,\tau_1)\Big| \tag{4}$$
$$|\{N_s\}\rangle\,\langle\{N_s\}|\,E_{\beta}^{(-)}(r,\tau_2)\,|f\rangle\exp\left(i\omega_{21}\left(\tau_1-\tau_2\right)\right)$$

Используя условие полноты полевых состояний $\sum\limits_f|f\rangle\langle f|=1$, будем иметь

$$\widetilde{W}(t)=\frac{1}{\hbar^2}d_{21}^{\alpha}d_{12}^{\beta}\int\limits_0^t\int\limits_0^t d\tau_1 d\tau_2\,\langle\{N_s\}|\,E_{\beta}^{(-)}(r,\tau_2)\,E_{\alpha}^{(+)}(r,\tau_1)\,|\{N_s\}\rangle \tag{5}$$
$$\exp\left(i\omega_{21}\left(\tau_1-\tau_2\right)\right).$$

Для получения окончательного результата нужно еще усреднить найденную вероятность по начальным состояниям поля с заданной в условии задачи матрицей плотности. Введем корреляционную функцию напряженностей поля, взятых в разные моменты времени:

[08] Для этого необходимо, чтобы основное состояние не имело определенной четности.

$$\mathscr{G}_{\alpha\beta} = Sp\left(\widehat{\rho}\widehat{E}_{\beta}^{(-)}(\boldsymbol{r},\tau_2)\,\widehat{E}_{\alpha}^{(+)}(\boldsymbol{r},\tau_1)\right) = \tag{6}$$
$$= \sum_{\{N_j\}} \rho_{\{N_j\}} \langle\{N_j\}|\, E_{\beta}^{(-)}(\boldsymbol{r},\tau_2)\, E_{\alpha}^{(+)}(\boldsymbol{r},\tau_1)\,|\{N_j\}\rangle$$

Здесь оператор плотности разложен по полной системе фоковских состояний и использована его диагональность в этом базисе. Используя явный
вид операторов поля (задача 6.58), находим

$$\mathscr{G}_{\alpha\beta}(\tau_1-\tau_2) = \frac{2\pi\hbar}{\gamma}\sum_s e_s^{\alpha} e_s^{*\beta}\omega_s \langle N_s\rangle e^{-i\omega_s(\tau_1-\tau_2)} = \tag{7}$$
$$= \int G_{\alpha\beta}(\omega) e^{-i\omega(\tau_1-\tau_2)}\frac{d\omega}{2\pi}$$

Спектральная плотность поля $G_{\alpha\beta}(\omega)$ определяется значениями средних чисел заполнения $\langle N_s\rangle$ рассматриваемого поля.

Обозначив усредненную с оператором плотности вероятность через $W(t)$, запишем ее через спектральную плотность поля:

(8) $W(t) = \frac{1}{\hbar^2} d_{21}^{\alpha} d_{12}^{\beta} \int\limits_0^t \int\limits_0^t \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} d\tau_1 d\tau_2 G_{\beta\alpha}(\omega) \exp\left(i\left(\omega_{21}-\omega\right)\left(\tau_1-\tau_2\right)\right)$.

Интегралы по времени дают

$$\frac{\left|\exp\left(i\left(\omega_{21}-\omega\right)t-1\right|^2}{\left(\omega_{21}-\omega\right)^2} = \frac{4\sin^2\left(\left(\omega_{21}-\omega\right)t/2\right)}{\left(\omega_{21}-\omega\right)^2} \tag{9}$$

при больших t можно воспользоваться асимптотическим выражением

$$\frac{\sin^2\left(\omega_{21}-\omega\right)t/2}{\left(\omega_{21}-\omega\right)^2 t/2} \longrightarrow \pi\delta\left(\omega_{21}-\omega\right) \tag{10}$$

Таким образом, окончательно находим

$$W(t)/t = \frac{1}{\hbar^2} d_{21}^{\alpha} d_{12}^{\beta} G_{\beta\alpha}\left(\omega_{21}\right) \tag{11}$$

- вероятность перехода в единицу времени для случайного поля определяется спектральной плотностью этого поля на частоте перехода.

  6.64. С формальной точки зрения, основанной на теории возмущений, рассеяние - это процесс перехода системы из начального состояния $|i\rangle = \psi_i\Phi_{\{N_s\}}$ в конечное $|f\rangle = \psi_f\Phi_{\{N_s'\}}$, где ψ_i и ψ_f волновые функции начального и конечного состояний атома, а $\Phi_{\{N_s\}}$ и $\Phi_{\{N_s'\}}$ - волновые
  функции поля. Дифференциальное сечение рассеяния - это отношение интенсивности излучения, рассеянного в телесный угол $d\Omega$, к плотности потока падающего на рассеиватель излучения:

$$d\sigma = \frac{1}{J_{\text{пад}}}\int\limits_f dw_{fi} \tag{1}$$

Конечные состояния, по которым необходимо проводить суммирование (интегрирование) в этом выражении, определяются условиями наблюдения рассеянного

света. Так, если при регистрации используются поляризационные анализаторы, то по поляризациям суммирование проводить не надо. При спектральном анализе рассеянного излучения интегрирование по частотам производится в пределах полосы пропускания соответствующего фильтра.

Обозначим индексом 1 моду, в которой уменьшается число фотонов, а индексом 2 - моду, в которой в результате рассеяния число фотонов увеличивается. Процесс рассеяния является двухфотонным, поэтому для его описания необходимо учитывать как первое слагаемое в (6.57) (во втором порядке теории возмущений), так и второе, описывающее двухфотонные процессы уже в первом порядке. Последнее слагаемое, содержащее взаимодействие спинового магнитного момента атома с магнитным полем, можно опустить, если ограничиться рассмотрением систем, размеры которых много меньше длины волны излучения (электрическое дипольное приближение). Таким образом, оператор взаимодействия представим в виде

$$\widehat{V} = \widehat{V}_1 + \widehat{V}_2; \quad \widehat{V}_1 = -\frac{e}{mc}\widehat{p}\cdot\widehat{A}; \quad \widehat{V}_2 = \frac{e^2}{2mc^2}\widehat{A}^2 \tag{2}$$

Вероятность рассеяния в единицу времени в первом неисчезающем порядке можно вычислить по теории возмущений с суммированием по промежуточным состояниям:

$$dw_{fi} = \frac{2\pi}{\hbar}\left|\left\langle f|\widehat{V}_2\right|i\right\rangle + \sum_l \frac{\langle f|\widehat{V}_1|l\rangle\langle l|\widehat{V}_1|i\rangle}{\epsilon_i - \epsilon_l}\right|^2 \delta\left(\epsilon_i - \epsilon_f\right)\frac{\mathscr{V}k_2^2 dk_2 d\Omega_2}{(2\pi)^3} \tag{3}$$

где ϵ_l-полная энергия системы атом + поле в состоянии $|\eta\rangle$. Индекс 2 у волнового вектора обозначает, что соответствующие величины относятся к рассеянному фотону. Заметим, что мы рассматриваем нерезонансное рассеяние, поэтому можем полностью игнорировать конечную ширину уровней атома.

Рассмотрим матричные элементы операторов $\widehat{V}_1$ и $\widehat{V}_2$ по отдельности.

$$\begin{aligned}
&\langle f|\widehat{V}_2|i\rangle = \frac{e^2}{2mc^2}\langle f|\widehat{A}^2|i\rangle = \\
&= \frac{e^2}{2mc^2}\sqrt{N_1\left(N_2+1\right)}\left(\int \psi_{f_o}^*\left(A_1(r)\cdot A_2^*(r)\right)\psi_i d^3r + \right. \\
&\left. + \int \psi_f^*\left(A_2^*(r)\cdot A_1(r)\right)\psi_i d^3r\right) = \\
&= \frac{e^2}{2m}\sqrt{N_1(N_2+1)}\frac{4\pi\hbar}{\mathscr{V}\sqrt{\omega_1\omega_2}}\int \psi_f^* e_1\cdot e_2^* \exp(i(k_1-k_2)\cdot r)\psi_i d^3r.
\end{aligned}$$

Здесь N_1 и N_2-числа заполнения мод 1 и 2 в начальном состоянии системы.
В дипольном приближении $\exp\left(i\left(k_1-k_2\right)r\right) \approx 1$ и предыдущее выражение можно упростить:

$$\langle f|\widehat{V}_2|i\rangle = \frac{2e^2\pi\hbar\sqrt{N_1\left(N_2+1\right)}}{\mathscr{V}m\sqrt{\omega_1\omega_2}}\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2^*\delta_{if} \tag{4}$$

Таким образом, квадратичное по полю слагаемое в операторе взаимодействия влияет только на вероятность процессов рассеяния, происходящих без изменения атомного состояния (такие процессы принято называть когерентными, или упругими).

Матричные элементы оператора $\widehat{V}_1$ уже вычислялись в примере 6.9:

$$\sum_l \frac{\langle f|\widehat{V}_1|l\rangle\langle l|\widehat{V}_1|i\rangle}{\epsilon_i-\epsilon_l} = \frac{e^2}{m^2}\frac{2\pi\hbar\sqrt{N_1\,(N_2+1)}}{\mathscr{V}\sqrt{\omega_1\omega_2}} \cdot \sum_l \left(\frac{\langle f|\widehat{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{e}_2^*|l\rangle\langle l|\widehat{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{e}_1|i\rangle}{\mathscr{E}_i-\mathscr{E}_l+\hbar\omega_1} + \frac{\langle f|\widehat{\boldsymbol{p}}\cdot\boldsymbol{e}_1|l\rangle\langle l|\widehat{\boldsymbol{p}}\cdot e_2^*|i\rangle}{\mathscr{E}_i-\mathscr{E}_l-\hbar\omega_2}\right) \tag{5}$$

Отметим важное для нерезонансного рассеяния обстоятельство. В сумме по l в (3)входят слагаемые двух типов - одни описывают процесс, при котором на первом этапе уничтожается фотон падающей волны, а на втором рождается фотон в рассеянной волне. Этим слагаемым соответствует знаменатели вида $\mathscr{E}_i - \mathscr{E}_l + \hbar\omega_1$. Слагаемые второго типа содержат знаменатели $\mathscr{E}_i - \mathscr{E}_l - \hbar\omega_2$ и связаны с переходами через промежуточные состояния, в которых рассеянный фотон появляется раньше, чем атомная система поглощает падающий фотон.

Подставляя (4) и (5) в определение сечения (1) и учитывая, что плотность потока фотонов в падающей волне равна $N_1 c/\mathscr{V}$, получим

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{e^4\,(N_2+1)\,\omega_2}{m^2c^4\omega_1}\left| e_1e_2^*\delta_{if} + \frac{1}{m}\sum_l \left(\frac{\langle f|\widehat{\boldsymbol{p}}\cdot e_2^*|l\rangle\langle l|\widehat{\boldsymbol{p}}\cdot e_1|i\rangle}{\mathscr{E}_i-\mathscr{E}_l+\hbar\omega_1} + \frac{\langle f|\widehat{\boldsymbol{p}}\cdot e_1|l\rangle\langle l|\widehat{\boldsymbol{p}}\cdot e_2^*|i\rangle}{\mathscr{E}_i-\mathscr{E}_l-\hbar\omega_2}\right)\right|^2 \tag{6}$$

Здесь $d\Omega$ - телесный угол, в котором распространяется рассеянный фотон, а частоты ω_1, ω_2 связаны законом сохранения энергии $\hbar\omega_1 + \mathscr{E}_i = \hbar\omega_2 + \mathscr{E}_f$, который формально следует из наличия дельта-функции в (3). Формула (6) содержит множитель (N_2+1), и можно выделить два вклада в дифференциальное сечение. Один из них пропорционален числу фотонов N_2 в моде рассеянной волны и описывает процесс стимулированного рассеяния, второй не зависит от N_2 и соответствует спонтанному рассеянию. Заметим, что для наблюдения вынужденного рассеяния необходимо «подсвечивать» рассеивающий атом излучением определенной частоты и направления распространения (и, возможно, поляризации), отличным от излучения, рассеяние которого исследуется и плотность потока которого входит в определение дифференциального сечения.

Обратим внимание на то, что соотношение (6) существенно отличается от результата, получаемого в классической электродинамике, когда атомные электроны рассматриваются как заряженные классические осцилляторы (задача 5.127). Конечное состояние атома может отличаться от начального. В этом случае частота рассеянного фотона отличается от частоты падающего. Такое рассеяние получило название рамановского или комбинационного. При комбинационном рассеянии можно наблюдать как уменьшение частоты (стоксова компонента), так и увеличение (антистоксова компонента). Разумеется, возможно рассеяние, при котором $\mathscr{E}_i = \mathscr{E}_f$ и $\omega_1 = \omega_2$. Это случай релеевского или когерентного рассеяния (классическая электродинамика может описать только этот случай).

Отметим еще одну важную особенность двухфотонных процессов, к которым помимо рассеяния относятся также двухфотонное поглощение и излучение. Эти процессы проходят через промежуточные состояния. Вклады различных промежуточных состояний могут различаться знаком и взаимно подавлять (либо усиливать) друг друга. О таком взаимном влиянии различных каналов перехода говорят как о квантовой интерференции состояний.

6.65. В дипольном приближении оператор взаимодействия

$$\widehat{V} = -\widehat{\boldsymbol{d}} \cdot \widehat{\boldsymbol{E}} \tag{1}$$

Во втором порядке теории возмущений результат может быть получен полностью аналогично тому, как это сделано в предыдущей задаче:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{(N_2+1)\,\omega_1\omega_2^3}{c^4} \left| \sum_l \left(\frac{\langle f|\hat{\boldsymbol{d}} \cdot e_2^*|l\rangle\langle l|\hat{\boldsymbol{d}} \cdot \boldsymbol{e}_1|i\rangle}{\mathscr{E}_i - \mathscr{E}_l + \hbar\omega_1} + \right.\right. \tag{2}$$
$$\left.\left. + \frac{\langle f|\widehat{\boldsymbol{d}} \cdot e_1|l\rangle\langle l|\widehat{\boldsymbol{d}} \cdot e_2^*|i\rangle}{\mathscr{E}_i - \mathscr{E}_l - \hbar\omega_2} \right) \right|^2$$

Покажем, что это выражение совпадает с результатом предыдущей задачи. Воспользуемся известным из квантовой механики соотношение между матричными элементами операторов импульса и координаты

$$\langle n'|\,\widehat{\boldsymbol{p}}|n\rangle = -i\frac{m\omega_{n'n}}{e}\,\langle n'|\,\widehat{\boldsymbol{d}}|n\rangle \tag{3}$$

где $\omega_{n'n}$ - частота перехода. Рассмотрим сначала релеевское рассеяние. Второе слагаемое в формуле (6) предыдущей задачи преобразуем следующим образом:

$$\frac{1}{m}\sum_l \left(\frac{\langle i|\widehat{\boldsymbol{p}} \cdot e_2^*|l\rangle\langle l|\widehat{\boldsymbol{p}} \cdot e_1|i\rangle}{\mathscr{E}_i - \mathscr{E}_l + \hbar\omega_1} + \frac{\langle i|\widehat{\boldsymbol{p}} \cdot e_1|l\rangle\langle l|\widehat{\boldsymbol{p}} \cdot e_2^*|i\rangle}{\mathscr{E}_i - \mathscr{E}_l - \hbar\omega_1} \right) = \tag{4}$$
$$= \frac{(\boldsymbol{e}_1)_\alpha\,(e_2)^*_\beta\,m}{e^2\hbar} \sum_l \Big((\omega_{il} - \omega_1)\,\langle i|\widehat{d}_\beta|l\rangle\langle l|\widehat{d}_\alpha|i\rangle +$$
$$+ (\omega_{il} + \omega_1)\,\langle i|\widehat{d}_\alpha|l\rangle\langle l|\widehat{d}_\beta|i\rangle \Big) +$$
$$+ \frac{m}{e^2}\sum_l \omega_1^2 \left(\frac{\langle i|\hat{\boldsymbol{d}} \cdot \boldsymbol{e}_2^*|l\rangle\langle l|\hat{\boldsymbol{d}} \cdot \boldsymbol{e}_1|i\rangle}{\mathscr{E}_i - \mathscr{E}_l + \hbar\omega_1} + \frac{\left\langle i\hat{\boldsymbol{d}} \cdot \boldsymbol{e}_1|l\right\rangle\langle l|\boldsymbol{d} \cdot \boldsymbol{e}_2^*|i\rangle}{\mathscr{E}_i - \mathscr{E}_l - \hbar\omega_1} \right).$$

Сумма $\sum_l \Big((\omega_{il} - \omega_1)\,\langle i|\widehat{d}_\beta|l\rangle\langle l|\widehat{d}_\alpha|i\rangle + (\omega_{il} + \omega_1)\,\langle i|\widehat{d}_\alpha|l\rangle\langle l|\widehat{d}_\beta|i\rangle \Big)$, последнего выражения равна первому слагаемому в равенстве (6) предыдущей задачи. Действительно, в силу условия полноты атомных состояний $\sum_l \langle i|\widehat{d}_\alpha|l\rangle\langle l|\widehat{d}_\beta|i\rangle = \langle i|\widehat{d}_\alpha\widehat{d}_\beta|i\rangle = \langle i|\widehat{d}_\beta\widehat{d}_\alpha|i\rangle$, поэтому слагаемые, содер-
жащие множитель ω_1 под знаком суммы, взаимно сокращаются. Оставшиеся слагаемые можно преобразовать следующим образом:

$$\sum_l \omega_{il}\langle i|\widehat{d}_\beta|l\rangle\langle l|\widehat{d}_\alpha|i\rangle + \omega_{il}\langle i|\widehat{d}_\alpha|l\rangle\langle l|\widehat{d}_\beta|i\rangle \Big) = \tag{5}$$
$$= \frac{e^2 i}{m}\sum_l \langle i|\widehat{r}_\beta|l\rangle\langle l|\widehat{p}_\alpha|i\rangle - \langle i|\widehat{p}_\alpha|l\rangle\langle l|\widehat{r}_\beta|i\rangle \Big) =$$
$$= \frac{e^2 i}{m} \Big(\langle i|\widehat{r}_\beta\widehat{p}_\alpha - \widehat{p}_\alpha\widehat{r}_\beta|i\rangle = -\frac{e^2\hbar}{m}\delta_{\alpha\beta}$$

Подставляя это выражение в (4), мы убеждаемся, что сечение релеевского рассеяния, полученные с помощью оператора взаимодействия в дипольном приближении, совпадает с тем, что дает формула (6).

В случае рамановского рассеяния для доказательства необходимо использовать очевидные соотношения $\omega_2 = \omega_1 - \omega_{fl}$ и $\omega_{fl} = \omega_{il} + \omega_{fl}$, где ω_{21} - частота перехода между начальным и конечным состояниями атома. При этом

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{m}\sum_l \left(\frac{\langle f|\widehat{\boldsymbol{p}}\cdot e_2^*|l\rangle\langle l|\widehat{\boldsymbol{p}}\cdot \boldsymbol{e}_1|i\rangle}{\mathscr{E}_i - \mathscr{E}_l + \hbar\omega_1} + \frac{\langle f|\widehat{\boldsymbol{p}}\cdot \boldsymbol{e}_1|l\rangle\langle l|\widehat{\boldsymbol{p}}\cdot e_2^*|i\rangle}{\mathscr{E}_i - \mathscr{E}_l - \hbar\omega_2} \right) = \\
&= \frac{(e_1)_\alpha (e_2^*)_\beta m\hbar}{e^2} \sum_l \Big((\omega_{il} - \omega_1 + \omega_{fl}) \langle f|\widehat{d}_\beta|l\rangle\langle l|\widehat{d}_\alpha|i\rangle + \\
&+ (\omega_{il} + \omega_2 + \omega_{fl}) \langle f|\widehat{d}_\alpha|l\rangle\langle l|\widehat{d}_\beta|i\rangle \Big) + \\
&+ \sum_l \omega_1\omega_2 \left(\frac{\langle f|\widehat{\boldsymbol{d}}\cdot e_2^*|l\rangle\langle l|\widehat{\boldsymbol{d}}\cdot e_1|i\rangle}{\mathscr{E}_i - \mathscr{E}_l + \hbar\omega_1} + \frac{\langle f|\widehat{\boldsymbol{d}}\cdot e_1|l\rangle\langle l|\widehat{\boldsymbol{d}}\cdot e_2^*|i\rangle}{\mathscr{E}_i - \mathscr{E}_l - \hbar\omega_2} \right)
\end{aligned} \tag{6}$$

Первое слагаемое в правой части равно нулю и, таким образом, опять приходим к формуле, полученной в предыдущей задаче.

6.66. 1 . Случай $\omega_1, \omega_2 \ll \omega_{li}$ для всех промежуточных состояний l, атом при рассеянии возвращается в исходное состояние, которое будем считать основным и обозначать индексом 0 (напомним, что классическая электродинамика не описывает комбинационного рассеяния). При этом $\omega_1 = \omega_2 = \omega$ и формулу (2) предыдущей задачи можно упростить:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{(N_2+1)\,\omega^4}{\hbar c^4} \left| \sum_l \frac{(\boldsymbol{d}_{0l}\cdot e_2^*)\,(\boldsymbol{d}_{l0}\cdot e_1) + (\boldsymbol{d}_{0l}\cdot e_1)\,(\boldsymbol{d}_{l0}\cdot e_2^*)}{\omega_{l0}} \right|^2 \tag{1}$$

Введем тензор статической поляризуемости (см. задачу 6.62)

$$\alpha_{ik} = \sum_l \frac{(d_i)_{0l}\,(d_k)_{l0} + (d_k)_{0l}\,(d_i)_{l0}}{\omega_{l0}} \tag{2}$$

Выберем векторы поляризации вещественными. При этом легко выразить сечение через тензор поляризации:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{(N_2+1)\,\omega^4}{\hbar^2 c^4} \left| \sum_{i,k} \alpha_{ik}\,(e_{2i}e_{1k}) \right|^2 \tag{3}$$

Свойства поляризационного тензора зависят от свойств рассеивающего объекта - атома или молекулы. Для изотропного рассеивателя, например, атома в ${}^1S_0$ состоянии имеем $\alpha_{ik} = \alpha_0\delta_{ik}$ и

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{(N_2+1)\,\omega^4}{\hbar^2 c^4}\alpha_0\,(e_2\cdot e_1)^2 \tag{4}$$

Полученное соотношение справедливо для случая, когда поляризации падающего и рассеянного света линейные и фиксированы. Если при регистрации рассеянного света поляризация не измеряется, необходимо просуммировать по возможным значениям e_2:

$$\sum_{\alpha=1,2} \left(e_2^{(\alpha)}\cdot e_1 \right)^2 = \sin^2\vartheta = 1 - \cos^2\vartheta \tag{5}$$

где ϑ-угол между направлением вылета рассеянного и вектором поляризации исходного кванта.

Чтобы привести выражение для дифференциального сечения к виду, близкому тому, который дает классическая электродинамика, преобразуем α_0 следующим образом

$$\alpha_0 = \sum_l \frac{2\left|(d_z)_{0l}\right|^2}{\omega_{l0}} \equiv \frac{\hbar e^2}{m} \sum_l \frac{2m}{\hbar e^2} \frac{f_{l0}}{\omega_{l0}^2} \tag{6}$$

Здесь величины f_{l0} - силы осцилляторов для переходов $l \leftrightarrow 0$:

$$f_{l0} = \frac{2m}{\hbar e^2} \omega_{n0} \left|(d_z)_{l0}\right|^2 \tag{7}$$

При этом

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = r_0^2 \left(N_2 + 1\right) \left(\sum_l f_{l0} \frac{\omega^2}{\omega_{l0}^2} \right)^2 \left(1 - \cos^2 \vartheta\right) \tag{8}$$

где $r_0 = e^2/mc^2$-классический радиус электрона.
Интегрирование по возможным углам рассеяния при $N_2 = 0$ дает

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} r_0^2 \left(\sum_l f_{l0} \frac{\omega^2}{\omega_{l0}^2} \right)^2 \tag{9}$$

Заметим, что полученное выражение хорошо согласуется с классическим выражением, если учесть, что для сил осцилляторов выполняется правило сумм

$$\sum_l f_{l0} = 1 \tag{10}$$

откуда следует, что

$$\sum_l \frac{f_{l0}}{\omega_{l0}^2} \simeq \frac{1}{\omega_0^2} \tag{11}$$

где ω_0 - некоторая средняя частота атомного осциллятора.
Принимая во внимание эти соотношения, получим

$$\sigma \simeq \frac{8\pi}{3} r_0^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^4 \tag{12}$$

При сравнении этого результата с формулами, полученными при решении задачи 5.127, нужно в них положить $\gamma = 0$ и $\omega \ll \omega_0$.
2. Если энергия кванта света много больше энергии связи электрона в атоме, то для получения классического предела удобнее воспользоваться соотношением (6) из задачи (6.64), в котором следует оставить только первое слагаемое под знаком модуля. Считая поляризации линейными, получаем

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = r_0^2 \left(N_2 + 1\right) \cos^2 \theta \tag{13}$$

Здесь θ - угол между векторами поляризации падающей и рассеянной волн. Полученный результат соответствует классической формуле Томсона, описывающей рассеяние на свободном электроне (см. задачи 5.127, 5.133), но учитывает стимулированное рассеяние через слагаемое, содержащее N_2.
6.67. Для расчета двухфотонного процесса в первом неисчезающем приближении нужно использовать второй порядок теории возмущений. Вероятность перехода в единицу времени в этом порядке можно вычислить следующим образом:

$$dw_{fi} = \frac{2\pi}{\hbar}\left|\sum_l \frac{\langle f|\widehat{V}|l\rangle\langle l|\widehat{V}|i\rangle}{\epsilon_i - \epsilon_l}\right|^2 \delta\left(\epsilon_i - \epsilon_f\right) d\nu \tag{1}$$

где $\widehat{V} = -\boldsymbol{d}\cdot\widehat{\boldsymbol{E}}$ - оператор взаимодействия в дипольном приближении; ϵ_l - энергия l-го состояния системы атом + поле; $d\nu$ - плотность конечных или начальных состояний в зависимости от того, рассматривается ли процесс излучения или поглощения.

Так же как и в задаче рассеяния, промежуточные состояния для двуфотонного излучения (поглощения) могут быть двух типов в зависимости от того, какой из фотонов излучается (поглощается) на первом этапе. Рассматривая для простоты случай линейных поляризаций, получим
(2)$dw_{fi} = \frac{(2\pi)^2\omega_1\omega_2}{\mathscr{V}^2} f\left(N_1, N_2\right)\left|M_{\alpha\beta}e_{1\alpha}e_{2\beta}\right|^2 \delta\left(\mathscr{E}_i - \mathscr{E}_f \pm \hbar\omega_1 \pm \hbar\omega_2\right) d\nu$

$$M_{\alpha\beta} = \sum_l \left(\frac{\langle f|d_\beta|l\rangle\langle l|d_\alpha|i\rangle}{\mathscr{E}_i - \mathscr{E}_l \pm \hbar\omega_1} + \frac{\langle f|d_\alpha|l\rangle\langle l|d_\beta|i\rangle}{\mathscr{E}_i - \mathscr{E}_l \pm \hbar\omega_2}\right) \tag{3}$$

В этих формулах верхний знак соответствует поглощению, нижний - излучению. Функция $f\left(N_1, N_2\right)$, зависящая от чисел заполнения мод, равна N_1N_2 для двухфотонного поглощения и $\left(N_1+1\right)\left(N_2+1\right)$ для излучения. Таким образом, возможны три типа двухфотонного излучения: спонтанное (вероятность не зависит от чисел заполнения), спонтанно-вынужденное (пропорциональное сумме $N_1 + N_2$) и вынужденное (пропорциональное произведению N_1N_2).

Правила отбора для двухфотонных переходов могут быть получены на основе анализа выражения для матрицы $M_{\alpha\beta}$. Согласно (3) двухфотонный переход возможен, если возможны два однофотонных перехода $i \to l$ и $l \to f$. Поскольку для однофотонных переходов в дипольном приближении справедливы соотношения $\Delta l = \pm 1$ и $\Delta m = 0, \pm 1$, то двухфотонные переходы возможны между состояниями отличающимися по орбитальному моменту на 0 и ± 2: $\Delta l = 0, \pm 2$. Магнитное квантовое число может меняться не более чем на две единицы: $\Delta m = 0, \pm 1, \pm 2$. При однофотонных переходах четности начального и конечного состояния противоположны. Двухфотонные переходы, следовательно, возможны между состояниями
одинаковой четности. Таким образом, двухфотонная спектроскопия позволяет изучать атомные состояния, недоступные однофотонной или линейной спектроскопии.

6.68. Как и всякий трехквантовый процесс, параметрическая генерация в первом неисчезающем приближении должна рассчитываться с использованием третьего порядка теории возмущений. В этом порядке вероятность перехода в единицу времени выражается следующим образом:

$$dw_{fi} = \frac{2\pi}{\hbar}\left|\sum_l\sum_n \frac{\langle f|\widehat{V}|n\rangle\langle n|\widehat{V}|l\rangle\langle l|\widehat{V}|i\rangle}{\left(\epsilon_i - \epsilon_l\right)\left(\epsilon_i - \epsilon_n\right)}\right|^2 \delta\left(\epsilon_i - \epsilon_f\right) d\nu \tag{1}$$

В зависимости от порядка следования однофотонных процессов в выражении (1) можно выделить шесть слагаемых:

$$dw_{fi} = \frac{(2\pi)^4\hbar}{\vartheta^3}\omega_1\omega_2\omega_3 N_1\left(N_2+1\right)\left(N_3+1\right)\delta\left(\omega_1-\omega_2-\omega_3\right)d\nu\times$$
$$\times\sum_l\sum_n\left\{\frac{\langle f|\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{e}_3^*|n\rangle\langle n|\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{e}_2^*|l\rangle\langle l|\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{e}_1|i\rangle}{\left(\mathscr{E}_i-\mathscr{E}_l+\hbar\omega_1\right)\left(\mathscr{E}_i-\mathscr{E}_n+\hbar\omega_1-\hbar\omega_2\right)}+\right.$$
$$+\frac{\langle f|\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{e}_2^*|n\rangle\langle n|\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{e}_3^*|l\rangle\langle l|\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{e}_1|i\rangle}{\left(\mathscr{E}_i-\mathscr{E}_l+\hbar\omega_1\right)\left(\mathscr{E}_i-\mathscr{E}_n+\hbar\omega_1-\hbar\omega_3\right)}$$
$$+\frac{\langle f|\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{e}_3^*|n\rangle\langle n|\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{e}_1|l\rangle\langle l|\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{e}_2^*|i\rangle}{\left(\mathscr{E}_i-\mathscr{E}_l-\hbar\omega_2\right)\left(\mathscr{E}_i-\mathscr{E}_n+\hbar\omega_1-\hbar\omega_2\right)}+$$
$$+\frac{\langle f|\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{e}_1|n\rangle\langle n|\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{e}_3^*|l\rangle\langle l|d\cdot e_2^*|i\rangle}{\left(\mathscr{E}_i-\mathscr{E}_l-\hbar\omega_2\right)\left(\mathscr{E}_i-\mathscr{E}_n-\hbar\omega_2-\hbar\omega_3\right)}+$$
$$+\frac{\langle f|\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{e}_2^*|n\rangle\langle n|\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{e}_1|l\rangle\langle l|\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{e}_3^*|i\rangle}{\left(\mathscr{E}_i-\mathscr{E}_l-\hbar\omega_3\right)\left(\mathscr{E}_i-\mathscr{E}_n+\hbar\omega_1-\hbar\omega_3\right)}+$$
$$\left.+\frac{\langle f|\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{e}_1|n\rangle\langle n|\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{e}_2^*|l\rangle\langle l|\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{e}_3^*|i_a\rangle}{\left(\mathscr{E}_i-\mathscr{E}_l-\hbar\omega_3\right)\left(\mathscr{E}_i-\mathscr{E}_n-\hbar\omega_2-\hbar\omega_3\right)}\right\}.$$

В рассматриваемой задаче к непрерывному спектру относится и начальное и конечное состояния системы, поэтому

$$d\nu = \frac{\mathscr{V}k_1^2dk_1d\Omega_1}{(2\pi)^3}\frac{\mathscr{V}k_2^2dk_2d\Omega_2}{(2\pi)^3}\frac{\mathscr{V}k_3^2dk_3d\Omega_3}{(2\pi)^3} \tag{2}$$

Если в процессе регистрации света параметрической генерации не фиксируются поляризации рождающихся фотонов, то вероятность необходимо просуммировать по всем возможным значениям векторов e_2 и e_3.

Как и процесс двухфотонного испускания, параметрическая генерация может быть спонтанной, спонтанно-вынужденной и вынужденной - в зависимости от того, есть ли в облучающем систему свете фотоны рассеянных мод.

В заключение заметим, что аналогично могут быть рассчитаны вероятности и других трехфотонных процессов, причем не обязательно когерентных.

6.69. Рассмотрим спонтанный распад в рамках дипольного резонансного приближения. Вероятность перехода равна

$$dw_{fi} = \frac{2\pi}{\hbar}|\langle f|\widehat{V}|i\Big\rangle|^2\,\delta\left(\epsilon_i-\epsilon_f\right)\frac{\mathscr{W}k^2dkd\Omega}{(2\pi)^3} \tag{1}$$

Здесь $|i\rangle = \Psi|vac\rangle; \widehat{V} = -d_{21}(t)\cdot\widehat{\boldsymbol{E}}^{(+)}(t)|2\rangle\langle 1| + h.c. \equiv \widehat{V}^{(+)}(t) + \widehat{V}^{(-)}(t)$; конечное состояние $|f\rangle = |1\rangle_a|1\rangle_b|s\rangle$, где $|s\rangle$ - состояние поля с одним фотоном в моде s. Мы предполагаем, что расстояние между атомами много меньше характерной длины волны излучения, так что можно опустить пространственный аргумент у волновых функций и оператора поля.

Вычисление матричного элемента полностью аналогично случаю одного атома. В итоге для вероятности излученння одного фотона в единицу времени, просуммированной по всем возможным его поляризациям, частотам и направлениям вылета, получим

$$W = \frac{2}{3}\frac{|d_{21}|^2\omega_{21}^3}{\mathrm{c}^3\hbar} \tag{2}$$

- для начального состояния Ψ_1 и $W = 0$ - для состояния Ψ_2.

Таким образом, система в первом состоянии излучает в два раза быстрее, чем для одного атома, а во втором не излучает вовсе, хотя суммарное начальное возбуждение

систем в обоих случаях одинаково (энергия начального состояния на $\hbar\omega_{21}$ больше энергии основного состояния системы).

6.70. Суммируя обе части уравнения, приведенного в условии задачи, по всем осцилляторам, находим для коллективной переменной $\boldsymbol{R}(t) = \sum_{a=1}^{N} r_a(t)$ уравнение

$$\ddot{\boldsymbol{R}} + 2\beta\dot{\boldsymbol{R}} + \omega_0^2\boldsymbol{R} = 0, \quad t > 0, \quad \beta = N\gamma$$

Решение, удовлетворяюшее начальному условию $\boldsymbol{R}(0) = Nr_0$, имеет вид $\boldsymbol{R}(t) = N\boldsymbol{r}_0\Theta(t)e^{-\beta t}\cos\Omega t, \Omega = \sqrt{\omega_0^2 - N^2\gamma^2}, \Theta$ - ступенчатая функция. Спектр излучения записываем с помощью результата задачи 5.122:

$$\frac{dI_\omega}{d\omega} = \frac{I_N\beta}{2\pi}\frac{1}{(\omega-\Omega)^2 + \beta^2/4}$$

Полная интенсивность излучения $I_N = N^2 I_0$ в N^2 раз больше интенсивности I_0 излучения отдельного осциллятора и в N раз больше интенсивности N независимых осцилляторов. Постоянная затухания тоже в N раз больше постоянной затухания отдельного независимого осциллятора.

Рассмотренные эффекты являются классическим аналогом эффекта сверхизлучения Дике. Более подробное изложение см. в [Андреев и др. (1988)], [Мандель и Вольф (2000)].

6.71. Лагранжиан представляет собой обобщение выражения (4.100):

$$\mathscr{L} = \frac{i\hbar}{2}\left(\Psi^\dagger\frac{\partial\Psi}{\partial t} - \frac{\partial\Psi^\dagger}{\partial t}\Psi\right) + \frac{i\hbar}{2}\left(\Psi^\dagger c\widehat{\boldsymbol{\alpha}}\cdot\nabla\Psi - \left(\nabla\Psi^\dagger\right)\cdot c\widehat{\boldsymbol{\alpha}}\Psi\right) + \tag{1}$$
$$+ \Psi^\dagger\left[e\widehat{\boldsymbol{\alpha}}\cdot\widehat{\boldsymbol{A}} - \widehat{\beta}mc^2 - U\right]\Psi$$

Плотность гамильтоновой функции строится по формуле (4.97) и для дираковского поля имеет вид

$$\mathscr{H} = \frac{1}{2}\left(\Psi^\dagger c\widehat{\boldsymbol{\alpha}}\cdot\widehat{\boldsymbol{p}}\Psi - \left(\widehat{\boldsymbol{p}}\Psi^\dagger\right)\cdot c\widehat{\boldsymbol{\alpha}}\Psi\right) + \Psi^\dagger\left[-e\widehat{\boldsymbol{\alpha}}\cdot\widehat{\boldsymbol{A}} + \widehat{\beta}mc^2 + U\right]\Psi \tag{2}$$

Квантовомеханический оператор Гамильтона можно получить из (2), если полную энергию поля $\mathscr{E}$ путем интегрирования по частям представить в форме

$$\mathscr{E} \equiv \int \mathscr{H}d^3r = \int \Psi^\dagger\widehat{\mathscr{H}}\Psi d^3r \tag{3}$$

Из (2) и (3) получим (6.116):

$$\widehat{\mathscr{H}} = c\widehat{\boldsymbol{\alpha}}\cdot\left(\widehat{\boldsymbol{p}} - \frac{e}{c}\widehat{\boldsymbol{A}}\right) + \widehat{\beta}mc^2 + e\varphi(\boldsymbol{r}). \tag{4}$$

6.72. Вычислив оператор $\widehat{\boldsymbol{v}} = \widehat{\dot{r}}$ по формуле (ДЗ.34) с дираковским гамильтонианом (6.111), получим $\widehat{v} = c\widehat{\alpha}$. Находя собственные значения
оператора $\widehat{v}_x = c\widehat{\alpha}_x$ (матрицы), будем иметь $v_x = \pm c$. Те же самые собственные значения получатся для любой другой пространственной оси. Появление предельной скорости с можно понять как результат определения координаты в близкие моменты времени с высокой точностью. В силу соотношения неопределенностей при этом возникает большая неопределенность импульса $\Delta p_x \gg mc$, которая и приводит к предельной скорости частицы c.

6.73. $\omega = \frac{\omega_0}{1+\frac{\hbar\omega_0}{mc^2}(1-\cos\theta)}, \lambda - \lambda_0 = 2\pi\Lambda_C(1-\cos\theta)$.

6.77. $Sp\left\{\widehat{B}\widehat{P}_0\widehat{B}^\dagger\widehat{P}\right\} = \frac{8mc^2}{\mathscr{E}}(e_0\cdot e)^2 + \frac{2\hbar(\omega_0-\omega)}{\mathscr{E}}(1-\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}_0)$.

6.78.

1. $d\sigma_{\parallel} = \frac{1}{4} r_0^2 \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \left[\frac{\omega_0}{\omega} + \frac{\omega}{\omega_0} + 2 - 4 \sin^2\theta \cos^2\phi \right] d\Omega$
$d\sigma_{\perp} = \frac{1}{4} r_0^2 \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \left[\frac{\omega_0}{\omega} + \frac{\omega}{\omega_0} - 2 \right] d\Omega$
$d\sigma = d\sigma_{\parallel} + d\sigma_{\perp} = \frac{1}{2} r_0^2 \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \left[\frac{\omega_0}{\omega} + \frac{\omega}{\omega_0} - 2 \sin^2\theta \cos^2\phi \right] d\Omega,$
где r_0 - классический радиус электрона, θ, ϕ - углы вектора k в декартовой системе, ось Oz которой направлена вдоль k_0, а ось Ox - вдоль e_0.

2. $d\sigma_{\parallel} = r_0^2 \left(1 - \sin^2\theta \cos^2\phi\right) d\Omega, d\sigma_{\perp} = 0, d\bar{\sigma} = \frac{1}{2} r_0^2 \left(1 + \cos^2\theta\right) d\Omega.$

Последнее сечение совпадает с сечением Томсона, полученным при классическом расчете (см. задачу 5.129).

4. В ультрарелятивистском случае $\hbar\omega_0 \gg mc^2$ при больших углах рассеяния ($\hbar\omega_0(1 - \cos\theta) \gg mc^2$) имеем

$$d\sigma_{\parallel} = d\sigma_{\perp} = \frac{1}{4} r_0^2 \frac{mc^2 d\Omega}{\hbar\omega_0(1 - \cos\theta)}$$

При малых углах рассеяния, $\hbar\omega_0(1 - \cos\theta) \approx \hbar\omega_0\theta^2/2 \ll mc^2$, получаем

$$d\sigma_{\perp} = 0, \quad d\sigma_{\parallel} = r_0^2 d\Omega$$

6.79.

$$\sigma = \pi r_0^2 \left\{ \frac{1}{x} \left(1 - \frac{2(1+x)}{x^2} \right) \ln(1+2x) + \frac{2(1+x)}{(1+2x)^2} + \frac{4}{x^2} \right\}, \quad x = \frac{\hbar\omega_0}{mc^2}$$

В нерелятивистском случае, $x \ll 1$, имеем сечение Томсона $\sigma = \sigma_T = 8\pi r_0^2/3$. В ультрарелятивистском случае

$$\sigma = \pi r_0^2 \frac{mc^2}{\hbar\omega_0} \ln\left(\frac{2\hbar\omega_0}{mc^2} \right)$$

С ростом энергии фотона сечение рассеяния убывает.

6.80.

$$\frac{d\sigma}{d(\hbar\omega)} = \pi r_0^2 \frac{mc^2}{(\hbar\omega_0)^2} \left[\frac{\omega_0}{\omega} + \frac{\omega}{\omega_0} + \left(\frac{mc^2}{\hbar\omega} - \frac{mc^2}{\hbar\omega_0} \right)^2 - 2 \left(\frac{mc^2}{\hbar\omega} - \frac{mc^2}{\hbar\omega_0} \right) \right]$$

$$\text{где } \hbar\omega_0 \geqslant \hbar\omega \geqslant \frac{\hbar\omega_0}{1 + 2\hbar\omega_0/mc^2}$$

6.81. Излучение фотонов электроном под действием пролетающей ультрарелятивистской частицы можно рассматривать как результат рассеяния псевдофотонов на электроне с образованием реальных рассеянных фотонов. Излучение фотонов тяжелой частицей сильно подавлено ввиду зависимости сечения излучения от массы по закону M^{-2}. Сечение излучения $d\sigma_r(\omega)$ можно вычислить по формуле

$$d\sigma_r(\omega) = \int\limits_{\omega_0 \min}^{\omega_{0\max}} d\omega_0 n\left(\omega_0\right) d\sigma_C\left(\omega_0, \omega\right) \tag{1}$$

где $n\left(\omega_0\right)$ - спектр эквивалентных фотонов (6.129), $d\sigma_C$ - сечение комптоновского рассеяния, полученное в задаче 6.80. Пределы интегрирования находятся из законов сохранения (задача 6.73):

$$\hbar\omega_0 = \frac{\hbar\omega}{1-(\hbar\omega/mc^2)\,(1-\cos\theta)} \tag{2}$$

Следует различать два интервала изменения частоты рассеянного кванта.
(3) 1. $0 < \hbar\omega \leqslant \frac{1}{2}mc^2$, $\omega_{0\,\min} = \omega$, $\omega_{0\,\max} = \frac{\omega}{1-2\hbar\omega/mc^2}$.
(4) 2 . $\frac{1}{2}mc^2 \leqslant \hbar\omega < \mathscr{E} - Mc^2$, $\omega_{0\ \min} = \omega$, $\omega_{0\ \max} \to \infty$.

При интегрировании частот выносим медленно изменяющийся множитель $\ln(\mathscr{E}/\hbar\omega_0)$ за знак интеграла в точке $\omega_0 = \omega$. После приведения подобных членов получим

$$d\sigma_r\left(\omega < mc^2/2\right) = \frac{16}{3}\frac{q^2}{\hbar c}r_0^2\frac{d\omega}{\omega}\ln\left(\frac{\mathscr{E}}{\hbar\omega}\right)\left\{1 - \frac{\hbar\omega}{mc^2} + \left(\frac{\hbar\omega}{mc^2}\right)^2\right\} \tag{5}$$

Это сечение расходится при $\omega \to 0$ («инфракрасная катастрофа»), но полная излученная энергия конечна.
(6) $d\sigma_r\,(\omega > mc^2/2) = \frac{2}{3}\frac{q^2}{\hbar c}r_0^2\frac{mc^2 d\omega}{\omega^2}\ln\left(\frac{\mathscr{E}}{\hbar\omega}\right)\left\{4 - \frac{mc^2}{\hbar\omega} + \left(\frac{mc^2}{2\hbar\omega}\right)^2\right\}$.

Последней формулой можно пользоваться только при частотах $\ln\frac{\mathscr{E}}{\hbar\omega} \gg 1$. Метод эквивалентных фотонов неприменим при расчете испусканая квантов предельно высоких энергий $\hbar\omega \approx \mathscr{E}$.
6.82. В системе S' покоя электрона процесс излучения можно рассматривать как комптоновское рассеяние псевдофотонов. В этой системе сечение излучения $d\sigma_r'(\omega')$ можно вычислить по формуле (1) предыдущей задачи. Но входящие в эту формулу величины нужно преобразовать в лабораторную систему S. Для этого следует учесть, что сечения $d\sigma_r$ в системе ядра и $d\sigma_r'$ в системе электрона одинаковы и следует преобразовывать только частоты. Обозначив через θ' угол рассеяния в системе S' (он отсчитывается от направления скорости ядра в системе электрона), получим с помощью преобразования Лоренца связь между частотами рассеянного кванта в двух системах:

$$\omega = \omega'\gamma\left(1 - \frac{v}{c}\cos\theta'\right) \approx \omega'\gamma\,(1-\cos\theta') \tag{1}$$

В последнем приближенном равенстве мы пренебрегли членами порядка γ^{-2} по сравнению с единицей. Кроме этого имеем из законов сохранения связь между частотами ω', ω_0':

$$1 - \cos\theta' = \frac{mc^2}{\hbar\omega'} - \frac{mc^2}{\hbar\omega_0'} \tag{2}$$

Пользуясь законом сохранения энергии в лабораторной системе $\hbar\omega = \mathscr{E} - \mathscr{E}'$, где $\mathscr{E} = \gamma mc^2$ - начальная энергия электрона, $\mathscr{E}\mathscr{E}'$ - его энергия после испускания кванта, находим из равенств (1), (2) связь между энергиями квантов
в системе электрона и энергиями электрона в лабораторной системе:

$$\hbar\omega' = \hbar\omega_0'\frac{\mathscr{E}'}{\mathscr{E}} \tag{3}$$

Из этих же равенств получаем пределы интегрирования по частоте ω_0' при фиксированных значениях начальной энергии электрона $\mathscr{E}$ и энергии испущенного кванта $\hbar\omega$:

$$\omega_{0\ \min}' = \omega\frac{mc^2}{2\mathscr{E}'}, \quad \omega_{0\ \max}' = \omega\frac{2\gamma\mathscr{E}}{\mathscr{E}'} \tag{4}$$

После подстановки этих величин в формулу (1) предыдущей задачи сечение тормозного излучения ультрарелятивистского электрона приобретает вид

$$d\sigma_r(\omega) = 2r_0^2 \frac{Z^2e^2}{\hbar c}\frac{mc^2}{\mathscr{E}} \int\limits_{\omega_{0\,\min}}^{\omega_0'} \frac{d\omega_0'}{\omega_0'^2} \ln\left(\frac{\mathscr{E}}{\hbar\omega_0'}\right)\left\{\frac{\mathscr{E}}{\mathscr{E}'}+\frac{\mathscr{E}'}{\mathscr{E}}+\right. \tag{5}$$
$$\left.+\left(\frac{mc^2}{\mathscr{E}'}\right)^2\frac{\omega^2}{\omega_0'^2}-\frac{2mc^2\omega}{\mathscr{E}\omega_0'}\right\}d\omega$$

Интегрирование следует производить с той же точностью, с которой определен спектр эквивалентных фотонов. Для этого достаточно вынести логарифм в (5) за знак интеграла, взяв его при $\omega_0' = \omega_{0\,\min}'$, и заменить верхний предел интегрирования на бесконечность. После интегрирования получим

$$d\sigma_r(\omega) = 4r_0^2\frac{Z^2e^2}{\hbar c}\frac{\mathscr{E}'}{\mathscr{E}}\frac{d\omega}{\omega}\ln\left(\frac{2\mathscr{E}\mathscr{E}'}{mc^2\hbar\omega}\right)\left\{\frac{\mathscr{E}}{\mathscr{E}'}+\frac{\mathscr{E}'}{\mathscr{E}}-\frac{2}{3}\right\} \tag{6}$$

Условия применимости результата:

$$\gamma = \frac{\mathscr{E}}{mc^2} \gg 1, \quad \ln\left(\frac{2\mathscr{E}\mathscr{E}'}{mc^2\hbar\omega}\right) \gg 1 \tag{7}$$

Результат расчета по теории возмущений в первом борновском приближении отличается от (6) заменой логарифмического множителя на величину

$$\ln\left(\frac{2\mathscr{E}\mathscr{E}'}{mc^2\hbar\omega}\right) - \frac{1}{2}$$

(см. Берестецкий и др. (1989), & 93).

5.4 Special Models of Radiation in Space

(see Landau's field theory about it)

5.4.1 Radiation Field at Close Distances

(вроде полезный крутой параграф, досмотрю его потом.)

Суть полей на близких расстояниях

(пока суть не понял, и в чем особенность подхода к ним??)

сравнение с типичным дипольным излучением

Будем по-прежнему считать, что длина волны велика по сравнению с размерами системы, но будем рассматривать поле на расстояниях, хотя и больших по сравнению с последними, но сравнимыми с длиной волны.

Формула для векторного потенциала в дипольном излучении

$$\mathbf{A} = \frac{\dot{d}}{cR_0}$$

по-прежнему остается в силе, так как для ее вывода было использовано лишь, что R_0 велико по сравнению с размерами системы.

Однако поле нельзя рассматривать теперь, даже в небольших участках, как плоскую волну. Поэтому формулы (67.5) и (67.6) для электрического и магнитного полей уже неприменимы, и для их вычисления надо определить предварительно как A, так и φ.

Формулу для скалярного потенциала можно получить из выражения для A непосредственно с помощью условия калибровки:

$$\operatorname{div}\mathbf{A}+\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0$$

наложенного на потенциалы. Подставляя $\mathbf{A}=\frac{\dot{d}}{cR_0}$ и интегрируя по времени, найдем:

$$\varphi=-\operatorname{div}\frac{d}{R_0}$$

где постоянную интегрирования (произвольную функцию координат) мы не пишем, так как нас интересует только переменная часть потенциала. Напомним, что тут как и в $\mathbf{A}=\frac{\dot{d}}{cR_0}$, значение d должно браться в момент времени $t'=t-R_0/c$[1]).

Теперь уже не представляет труда вычислить электрическое и магнитное поле.

По обычным формулам, связывающим $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ с потенциалами, находим:

$$\mathbf{H}=\frac{1}{c}\operatorname{rot}\frac{\dot{d}}{R_0}$$
$$\mathbf{E}=\operatorname{grad}\operatorname{div}\frac{d}{R_0}-\frac{1}{c^2}\frac{\ddot{d}}{R_0}$$

Выражение для $\mathbf{E}$ можно переписать в другом виде, заметив, что $d_{t'}/R_0$, как и всякая функция координат и времени вида

$$\frac{1}{R_0}f\left(t-\frac{R_0}{c}\right)$$

удовлетворяет волновому уравнению

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{d}{R_0}=\Delta\frac{d}{R_0}$$

Воспользовавшись также известной формулой $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{a}=\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{d}-\Delta\mathbf{a}$, найдем, что

$$\mathbf{E}=\operatorname{rot}\operatorname{rot}\frac{\mathbf{d}}{R_0}$$

Полученные формулы определяют поле на расстояниях, сравнимых с длиной волны.

Во всех этих формулах нельзя, разумеется, выносить $1/R_0$ из-под знака дифференцирования по координатам, так как отношение членов, содержащих $1/R_0^2$, к членам с $1/R_0$ как раз порядка величины λ/R_0.

Фурье-компоненты поля на близких расстояниях

Напишем формулы для фурье-компонент поля.

(в это пока просто поверил, лень разбирать.)

Для определения $\mathbf{H}_\omega$ подставляем в формулу (72.3) вместо $\mathbf{H}$ и d их монохроматические составляющие, т.е. соответственно $\mathbf{H}_\omega e^{-i\omega t}$ и $d_\omega e^{-i\omega t}$.

Надо помнить, что величины в правой стороне равенств (72.1)$-$(72.5) берутся в момент времени $t'=t-R_0/c$. Поэтому мы должны подставить для d выражение

$$\mathbf{d}_\omega e^{-i\omega(t-R_0/c)}=\mathbf{d}_\omega e^{-i\omega t+ikR_0}$$

Производя подстановку и сокращая на $e^{-i\omega t}$, найдем:

$$\mathbf{H}_\omega = -ik\,\mathrm{rot}\left(\mathbf{d}_\omega \frac{e^{ikR_0}}{R_0}\right) = ik\left[\mathbf{d}_\omega \nabla \frac{e^{ikR_0}}{R_0}\right]$$

или, произведя дифференцирование,

$$\mathbf{H}_\omega = ik\left[\mathbf{d}_\omega \mathbf{n}\right]\left(\frac{ik}{R_0} - \frac{1}{R_0^2}\right) e^{ikR_0}$$

где $\mathbf{n}$ - единичный вектор в направлении $\mathbf{R}_0$.

Аналогичным образом из (72.4) найдем:

$$\mathbf{E}_\omega = k^2 \mathbf{d}_\omega \frac{e^{ikR_0}}{R_0} + \left(\mathbf{d}_\omega \nabla\right)\nabla \frac{e^{ikR_0}}{R_0}$$

или, произведя дифференцирование,

$$\mathbf{E}_\omega = \mathbf{d}_\omega\left(\frac{k^2}{R_0} + \frac{ik}{R_0^2} - \frac{1}{R_0^3}\right) e^{ikR_0} + \mathbf{n}\left(\mathbf{n}\mathbf{d}_\omega\right)\left(-\frac{k^2}{R_0} - \frac{3ik}{R_0^2} + \frac{3}{R_0^3}\right) e^{ikR_0}$$

На расстояниях, больших по сравнению с длиной волны ($kR_0 \gg 1$), в формулах выше можно пренебречь членами с $1/R_0^2$ и $1/R_0^3$, и мы возвращаемся к полю «волновой зоны»

$$\mathbf{E}_\omega = \frac{k^2}{R_0}\left[\mathbf{n}\left[\mathbf{d}_\omega \mathbf{n}\right]\right] e^{ikR_0}, \quad \mathbf{H}_\omega = -\frac{k^2}{R_0}\left[\mathbf{d}_\omega \mathbf{n}\right] e^{ikR_0}$$

На расстояниях же, малых по сравнению с длиной волны ($kR_0 \ll 1$), пренебрегаем членами с $1/R_0$ и $1/R_0^2$ и полагаем $e^{ikR_0} \approx 1$; тогда

$$\mathbf{E}_\omega = \frac{1}{R_0^3}\left\{3\mathbf{n}\left(\mathbf{d}_\omega \mathbf{n}\right) - \mathbf{d}_\omega\right\}$$

что соответствует статическому дипольному электрическому полю. Магнитное поле в этом приближении, естественно, отсутствует.

Иллюстрация поля на близких расстояниях

(не соображу, а качественно как картинка выглядит?)

Потенциалы поля квадрупольного и магнитно-дипольного излучений на близких расстояниях (?!)

Определить потенциалы поля квадрупольного и магнитно-дипольного излучений на близких расстояниях.

Предполагая, для краткости, что дипольное излучение вообще отсутствует, имеем:

$$\mathbf{A} = \frac{1}{c}\int \mathbf{j}_{t-R/c}\frac{dV}{R} \approx -\frac{1}{c}\int (\mathbf{r}\nabla)\frac{\mathbf{j}_{t-R_0/c}}{R_0} dV$$

где разложение подынтегрального выражения производится по степеням $\mathbf{r} = \mathbf{R}_0 - \mathbf{R}$.

Как и всегда в полях на близких расстояниях, множитель $1/R_0$ нельзя выносить теперь из-под знака дифференцирования. Зато дифференцирование выносим из-под знака интеграла и переписываем формулу в тензорных обозначениях:

$$A_\alpha = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial X_\beta}\int \frac{x_\beta j_\alpha}{R_0} dV$$

Тем же способом, что и в типичном случае, это выражение разделяется на квадрупольную и магнитно-дипольную части. Соответствующие скалярные потенциалы вычисляются по векторному потенциалу подобно тому, как это сделано в тексте.

(?? это я хз, потом проверю, посмотрим.)

В результате получаем для квадрупольного излучения:

$$A_\alpha = -\frac{1}{6c}\frac{\partial}{\partial X_\beta}\frac{\dot{D}_{\alpha\beta}}{R_0}, \quad \varphi = \frac{1}{6}\frac{\partial^2}{\partial X_\alpha \partial X_\beta}\frac{D_{\alpha\beta}}{R_0}$$

и для магнитно-дипольного излучения:

$$\mathbf{A} = \operatorname{rot}\frac{\mathfrak{m}}{R_0}, \quad \varphi = 0$$

где все величины берутся, как обычно, в момент времени $t' = t - R_0/c$.

Напряженности поля магнитно-дипольного излучения:

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\operatorname{rot}\frac{\dot{\mathfrak{m}}}{R_0}, \quad \mathbf{H} = \operatorname{rot}\operatorname{rot}\frac{\mathfrak{m}}{R_0}$$

Сравнивая с (72.3), (72.5), мы видим, что $\mathbf{H}$ и $\mathbf{E}$ в магнитно-дипольном случае выражаются через $\mathfrak{m}$ так же, как соответственно $\mathbf{E}$ и $(-\mathbf{H})$ выражаются через в электрическом дипольном случае.

Спектральные компоненты потенциалов квадрупольного излучения:

$$A^{(\omega)}_\alpha = \frac{ik}{6}D^{(\omega)}_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial X_\beta}\frac{e^{ikR_0}}{R_0}, \quad \varphi^{(\omega)} = \frac{1}{6}D^{(\omega)}_{\alpha\beta}\frac{\partial^2}{\partial X_\alpha \partial X_\beta}\frac{e^{ikR_0}}{R_0}$$

Выражения для поля мы не выписываем здесь ввиду их громоздкости.

(потом прорешаю, пока поверил и предыдущих пар плохо усвоен)

Скорость потери момента импульса системы при дипольном излучении (???)

Найти скорость потери момента импульса системой зарядов при дипольном излучении ею электромагнитных волн.

(?? почему не в разделе про дипольное излучение? проделаю потом, тут тренировки еще нужны.)

(пар 32 теория про это, потом досмотрю.)

Плотность потока момента электромагнитного поля дается пространственными компонентами 4-тензора как:

$$M^i = x^i T^{kl} - x^k T^{il}.$$

Переходя к трехмерным обозначениям, вводим трехмерный вектор момента:

$$M_\alpha = \frac{1}{2}e_{\alpha\beta\gamma}M^{\beta\gamma};$$

плотность его потока дается трехмерным тензором

$$M_\alpha = -\frac{1}{2}e_{\alpha\beta\gamma}\left(x_\beta\sigma_{\gamma\delta} - x_\gamma\sigma_{\beta\delta}\right) = -e_{\alpha\beta\gamma}x_\beta\sigma_{\gamma\delta}$$

где $\sigma_{\alpha\beta} \equiv -T^{\alpha\beta}$ - трехмерный максвелловский тензор напряжений (а все индексы пишем внизу соответственно трехмерным обозначениям).

Полный момент, теряемый системой в единицу времени, равен потоку момента поля излучения через сферическую поверхность радиуса R_0

$$\frac{dM_\alpha}{dt} = \oint e_{\alpha\beta\gamma} x_\beta \sigma_{\gamma\delta} n_\delta df$$

где $df = R_0^2 do$, а $\mathbf{n}$ - единичный вектор в направлении $\mathbf{R}_0$.

С тензором максвелловских напряжений $\sigma_{\alpha\beta}$ получим:

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = \frac{R_0^3}{4\pi} \int \{[\mathbf{nE}](\mathbf{nE}) + [\mathbf{nH}](\mathbf{nH})\} do$$

(?? потом проделаю, пока верю.)

Применяя эту формулу к полю излучения на больших расстояниях от системы, нельзя ограничиться членами $\sim 1/R_0$: в этом приближении $\mathbf{nE} = \mathbf{nH} = 0$, так что подынтегральное выражение обращается в нуль.

Эти члены (даваемые (67.5) – (67.6)) достаточны лишь для вычисления множителей $[\mathbf{nE}]$ и $[\mathbf{nH}]$; продольные же компоненты полей $\mathbf{nE}$ и $\mathbf{nH}$ возникают от членов $\sim 1/R_0^2$ (в результате подынтегральное выражение в (1) становится $\sim 1/R_0^3$, и расстояние R_0, как и следовало, выпадает из ответа).

В дипольном приближении длина волны $\lambda \gg a$, и надо различать члены, содержащие (по сравнению с (67.5) – (67.6)) лишний множитель $\sim \lambda/R_0$ или $\sim a/R_0$; достаточно оставить лишь первые. Именно эти члены можно получить из (72.3) и (72.5); вычисление с точностью до второго порядка по $1/R_0$ дает:

$$\mathbf{En} = \frac{2}{cR_0^2}\mathbf{n}\dot{\mathbf{d}}, \quad \mathbf{Hn} = 0$$

Подставив (2) и (67.6) в (1), получим:

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = -\frac{1}{2\pi c^3} \int [\mathbf{nd}](\mathbf{nd}) do$$

Наконец, написав подынтегральное выражение в виде $e_{\alpha\beta\gamma} n_\beta \ddot{d}_\gamma n_\delta \dot{d}_\delta$ и усреднив по направлениям $\mathbf{n}$, найдем окончательно:

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = -\frac{2}{3c^3}[\dot{d}\ddot{d}]$$

(?? вот тут я хз, не умею еще усреднять, подумаю потом.)

Отметим, что для линейного осциллятора $d = d_0 \cos \omega t$ с вещественной амплитудой d_0) выражение $\frac{d\mathbf{M}}{dt}$ обращается в нуль: потери момента при излучении не происходит.

(?? и что с этого??)

О случаях применения

(с опытом все укажу явно)

5.4.2 Hertz Vector

(тут всё про него пропишу, пока что ничего не усвоено про него.)

5.4.3 Radiation of a Fast-Moving Charge

(потом досмотрю.)

Суть (?)

$$I = \frac{2e^4}{2m^2c^3}\frac{\left\{\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{vH}]\right\}^2 - \frac{1}{c^2}(\mathbf{Ev})^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

(тут комментарий, как понимать эту формулу и как запомнить.)

Быстро движущейся заряд через обобщение 4-импульса с собственной системы отсчета на произвольную

(отношусь к этому как к простому методу, с которым тоже можно получить результаты, если не пользоваться запаздывающими потенциалами.)

Рассмотрим движущуюся релятивистскую частицу во внешних полях. Рассмотрим её в той системе отсчета, в которой она в данный момент покоится; в этой системе отсчета формулы дипольного приближения применимы. Заметим, что это возможно сделать лишь в случае одной движущейся частицы; для нескольких частиц не существует, вообще говоря, системы отсчета, в которой бы все они одновременно покоились.

Таким образом, в указанной системе отсчета частица излучает в течение времени dt энергию согласно формуле дипольного излучения:

$$d\mathscr{E} = \frac{2e^2}{3c^3}w^2 dt$$

где w - ускорение частицы в этой же системе.

Полный же излучаемый ею импульс в рассматриваемой системе отсчета равен нулю

$$d\mathbf{P} = 0$$

Действительно, излучение импульса определяется как интеграл от плотности потока импульса в поле излучения по замкнутой поверхности, охватывающей частицу. Но в силу свойств симметрии дипольного излучения импульсы, уносимые в противоположных направлениях, одинаковы по величине и противоположны по направлению; поэтому указанный интеграл обращается тождественно в нуль.

(это явно укажу в разделе про дипольное излучение)

Теперь перейдем в произвольную систему отсчета. Для этого формулы излучаемого импульса и энергии перепишем в 4-мерном виде как:

$$dP^i = -\frac{2e^2}{3c}\frac{du^k}{ds}\frac{du_k}{ds}dx^i = -\frac{2e^2}{3c}\frac{du^k}{ds}\frac{du_k}{ds}u^i ds$$

Докажем это. В системе отсчета, в которой частица покоится, пространственные компоненты 4-скорости u^i равны нулю, а $\frac{du^k}{ds}\frac{du_k}{ds} = -\frac{w^2}{c^4}$; поэтому пространственные компоненты dP^i обращаются в нуль, а временная дает равенство (73.1).

(потом подумаю про док-во, пока поверил, лень вникать)

Полное излучение 4-импульса за время пролета частицы через данное электромагнитное поле равно интегралу от выражения dP^i, т.е.

$$\Delta P^i = -\frac{2e^2}{3c}\int \frac{du^k}{ds}\frac{du_k}{ds}dx^i$$

Перепишем эту формулу в другом виде, выразив 4-ускорение du^i/ds через тензор внешнего электромагнитного поля с помощью уравнений движения (23.4):

$$mc\frac{du_k}{ds} = \frac{e}{c}F_{kl}u^l$$

тогда

$$\Delta P^i = -\frac{2e^4}{3m^2c^5}\int \left(F_{kl}u^l\right)\left(F^{km}u_m\right)dx^i$$

(?!!!! тут вот потом проделаю это, самый по сути требующий размышлений переход!)

Временная компонента уравнения (73.4) или (73.5) дает полное излучение энергии $\Delta\mathscr{E}$.

Подставляя для четырехмерных величин их выражения через трехмерные величины, получим:

$$\Delta\mathscr{E} = \frac{2e^2}{3c^3}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{w^2 - \frac{[\mathbf{vw}]^2}{c^2}}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^3}dt$$

($\mathbf{w} = \dot{\mathbf{v}}$ - ускорение частицы), или, через внешние электрическое и магнитное поля:

$$\Delta\mathscr{E} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} I dt, \quad I = \frac{2e^4}{2m^2c^3}\frac{\left\{\mathbf{E}+\frac{1}{c}[\mathbf{vH}]\right\}^2 - \frac{1}{c^2}(\mathbf{Ev})^2}{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

Выражения для полного излучения импульса отличаются лишним множителем у под знаком интеграла.

(???? почему???)

Из формулы (73.7) видно, что при скоростях, близких к скорости света, полное излучение энергии в единицу времени зависит от скорости в основном как $(1-v^2/c^2)^{-1}$, т.е. пропорционально квадрату энергии движущейся частицы.

Исключение представляет только движение в электрическом поле параллельно направлению поля. В этом случае множитель $(1-v^2/c^2)$, стоящий в знаменателе, сокращается с таким же множителем в числителе, и излучение оказывается не зависящим от энергии частицы.

Быстро движущейся заряд через потенциалы Лиенара-Вихерта

Наконец, остановимся на вопросе об угловом распределении излучения быстро движущейся частицы.

Для решения этой задачи удобно воспользоваться лиенар-вихертовским выражением длЯ поля (63.8)-(63.9).

На больших расстояниях мы должны сохранить В нем только член с более низкой степенью $1/R$ (второй член в формуле (63.8)).

Вводя единичный вектор $\mathbf{n}$ в направлении излучения ($\mathbf{R} = \mathbf{n}R$), получим формулы

$$\mathbf{E} = \frac{e}{c^2R}\frac{\left[\mathbf{n}\left[\left(\mathbf{n}-\frac{\mathbf{v}}{c}\right)\mathbf{w}\right]\right]}{\left(1-\frac{\mathbf{nv}}{c}\right)^3}, \quad \mathbf{H} = [\mathbf{nE}]$$

где все величины в правых сторонах равенств берутся в запаздывающий момент времени $t' = t - R/c$.

(по идее это в разделе про них должно быть указано.)

Интенсивность излучения в телесный угол do равна $dI = \frac{c}{4\pi}E^2R^2do$.

Раскрывая квадрат E^2, найдем:

$$dI = \frac{e^2}{4\pi c^3}\left\{\frac{2(\mathbf{nw})(\mathbf{vw})}{c\left(1-\frac{\mathbf{vn}}{c}\right)^5} + \frac{\mathbf{w}^2}{\left(1-\frac{\mathbf{vn}}{c}\right)^4} - \frac{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)(\mathbf{nw})^2}{\left(1-\frac{\mathbf{vn}}{c}\right)^6}\right\}do$$

Угловое распределение быстро движущегося заряда

Если же мы хотим определить угловое распределение полного излучения за все время движения заряда, то надо проинтегрировать интенсивность по времени.

При этом следует помнить, что интегрируемое выражение является функцией t'; поэтому надо писать

$$dt = \frac{\partial t}{\partial t'} dt' = \left(1 - \frac{\mathbf{nv}}{c}\right) dt'$$

(см. (63.6)), после чего интегрирование производится непосредственно по dt'.

Таким образом, имеем следующее выражение для полного излучения в элемент телесного угла do:

$$d\mathscr{E}_{\mathbf{n}} = \frac{e^2}{4\pi c^3} do \int \left\{ \frac{2(\mathbf{nw})(\mathbf{vw})}{c\left(1 - \frac{\mathbf{vn}}{c}\right)^4} + \frac{\mathbf{w}^2}{\left(1 - \frac{\mathbf{vn}}{c}\right)^3} - \frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)(\mathbf{nw})^2}{\left(1 - \frac{\mathbf{vn}}{c}\right)^5} \right\} dt'$$

Как видно из (73.9), угловое распределение излучения в общем случае довольно сложно.

В ультрарелятивистском случае ($1 - v/c \ll 1$) оно обладает характерной особенностью, связанной с наличием высоких степеней разности $1 - \mathbf{vn}/c$ в знаменателях различных членов этого выражения.

Именно, интенсивность велика в узком интервале углов, в котором мала разность $1 - \mathbf{vn}/$ c.

Обозначив посредством θ малый угол между $\mathbf{n}$ и $\mathbf{v}$, имеем:

$$1 - \frac{v}{c}\cos\theta \approx 1 - \frac{v}{c} + \frac{\theta^2}{2}$$

эта разность мала ($\sim 1 - v/c$) при $\theta \sim \sqrt{1 - v/c}$ или, что то же,

$$\theta \sim \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

Таким образом, ультрарелятивистская частица излучает в основном в направлении своего движения в интервал углов (73.12) вокруг на-

правления скорости.

Укажем также, что при произвольных скорости и ускорении частиЦы всегда имеются такие два направления, в которых интенсивность излучения обращается в нуль.

Это те направления, в которых вектор $\mathbf{n} - \mathbf{v}/c$ параллелен вектору $\mathbf{w}$, и потому поле (73.8) обращается в нуль (см. также задачу 2 в конце параграфа).

Излучение в случаях параллельности и перпендикулярности ускорения и скорости

Формула $dI = \frac{e^2}{4\pi c^3}\left\{\frac{2(\mathbf{nw})(\mathbf{vw})}{c\left(1-\frac{\mathbf{vn}}{c}\right)^5} + \frac{\mathbf{w}^2}{\left(1-\frac{\mathbf{vn}}{c}\right)^4} - \frac{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)(\mathbf{nw})^2}{\left(1-\frac{\mathbf{vn}}{c}\right)^6}\right\} do$ упрощается в случае параллельности и перпендикулярности скорости и ускорения.

Если скорость и ускорение частицы параллельны, то

$$\mathbf{H} = \frac{e}{c^2 R} \frac{[\mathbf{wn}]}{\left(1 - \frac{\mathbf{vn}}{c}\right)^3}$$

и интенсивность

$$dI = \frac{e^2}{4\pi c^3} \frac{w^2 \sin^2\theta}{\left(1 - \frac{v}{c}\cos\theta\right)^6} do$$

(проверю потом!)

Она, естественно, симметрична вокруг совместного направления **v** и **w** и обращается в нуль в направлениях по ($\theta = 0$) и против ($\theta = \pi$) скорости.

В ультрарелятивистском случае интенсивность как функция от θ имеет резкий двойной максимум в области $\theta \sim \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ с «провалом» до нуля при $\theta = 0$.

(!!! вот оно оказывается, как!!!)

Если же скорость и ускорение взаимно перпендикулярны, то получаем упрощение в виде:

$$dI = \frac{e^2 w^2}{4\pi c^3} \left[\frac{1}{\left(1 - \frac{v}{c}\cos\theta\right)^4} - \frac{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\sin^2\theta\cos^2\varphi}{\left(1 - \frac{v}{c}\cos\theta\right)^6} \right] do$$

где θ - по-прежнему угол между **n** и **v**, а φ - азимутальный угол вектора **n** с плоскостью, проходящей через **v** и **w**.

Эта интенсивность симметрична лишь относительно плоскости (**vw**) и обращается в нуль в двух направлениях в этой плоскости, образующих угол $\theta = \arccos(v/c)$ со скоростью.

(еще подумаю про это.)

Излучение релятивистской частицы в кулоновском поле

Определить полное излучение релятивистской частицы с зарядом e_1, пролетающей на прицельном расстоянии ρ в кулоновском поле неподвижного центра, то есть в поле с потенциалом $\varphi = e_2/r$.

При пролете через поле релятивистская частица почти не отклоняется.

Поэтому в общей формуле быстро движущегося заряда $I = \frac{2e^4}{2m^2c^3} \frac{\left\{\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{vH}]\right\}^2 - \frac{1}{c^2}(\mathbf{Ev})^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ можно считать её скорость постоянной, соответственно чему поле в точке нахождения частицы

$$\mathbf{E} = \frac{e_2 \mathbf{r}}{r^3} \approx \frac{e_2 \mathbf{r}}{\left(\rho^2 + v^2 t^2\right)^{3/2}}$$

причем $x = vt, y = \rho$.

Интегрируя по времени, получим полную излучаемую энергию:

$$\Delta\mathscr{E} = \frac{\pi e_1^4 e_2^2}{12 m^2 c^3 \rho^3 v} \frac{4c^2 - v^2}{c^2 - v^2}$$

(проверю потом)

Направления, в которых интенсивность изучения нулевая (?!!!)

Определить направления, в которых обращается в нуль интенсивность изучения движущейся частицы.

Из геометрического построения (рис. 15) находим, что искомые направления **n** лежат в плоскости, проходящей через **v** и **w**, и образуют с направлением **w** угол χ, определяющийся из соотношения

$$\sin\chi = \frac{v}{c}\sin\alpha$$

где α - угол между **v** и **w**.

Излучение в поле циркулярно-поляризованной волны

Определить интенсивность излучения заряженной частицей, стационарно движущейся в поле циркулярно-поляризованной плоской электромагнитной волны.

Согласно результатам задачи 3 \$48 частица движется по окружности, причем ее скорость в каждый момент времени параллельна полю **H** и перпендикулярна полю **E**.

Ее кинетическая энергия

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = c\sqrt{p^2+m^2c^2} = c\gamma$$

(обозначения из указанной задачи).

По формуле (73.7) находим интенсивность излучения:

$$I = \frac{2e^4}{3m^2c^3}\frac{\mathbf{E}^2}{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{2e^4E_0^2}{3m^2c^3}\left[1+\left(\frac{eE_0}{mc\omega}\right)^2\right]$$

Излучение в поле линейно поляризованной волны

Согласно результатам задачи 2 \$ 48 движение происходит в плоскости xy, проходящей через направление распространения волны (ось x) и направление поля **E** (ось y); поле **H** направлено по оси z (причем $H_z = E_y$).

По общей формуле излучения быстро движущегося заряда находим:

$$I = \frac{2e^4\mathbf{E}^2}{3m^2c^3}\frac{\left(1-\frac{v_x}{c}\right)^2}{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

Усреднение по периоду движения, задаваемого полученным в указанной задаче параметрическим представлением, приводит к результату

$$\bar{I} = \frac{e^4E_0^2}{3m^2c^3}\left[1+\frac{3}{8}\left(\frac{eE_0}{mc\omega}\right)^2\right]$$

(проверю потом)

О неверных подходах к быстро движущемуся заряду

(с опытом укажу. там что дипольное приближение неприменимо, Ландау указывает на это. явно укажу, в чем ошибки, пока не до этого.)

5.4.4 Magneto-Braking Radiation

Рассмотрим излучение заряда, движущегося с произвольной скоростью по окружности в постоянном однородном магнитном поле; такое излучение называют магнито-тормозным.

Суть (?)

(?? просто начинаем пользоваться формулами из прошлых разделов, да??)

Усредненная интенсивность

Радиус орбиты r и циклическая частота движения ω_H выражаются через напряженность поля H и скорость частицы v формулами

$$r = \frac{mcv}{eH\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \quad \omega_H = \frac{v}{r} = \frac{eH}{mc}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

(это по идее из темы про движение частиц известно, там четче потом это укажу.)

Полная интенсивность излучения по всем направлениям определяется по типичной формуле $I = \frac{2e^4}{2m^2c^3}\frac{\left\{\mathbf{E}+\frac{1}{c}[\mathbf{vH}]\right\}^2-\frac{1}{c^2}(\mathbf{Ev})^2}{1-\frac{v^2}{c^2}}$, в которой надо положить $\mathbf{E}=0$ и $\mathbf{H}\perp\mathbf{v}$:

$$I = \frac{2e^4H^2v^2}{3m^2c^5\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}$$

Мы видим, что полная интенсивность пропорциональна квадрату импульса частицы.

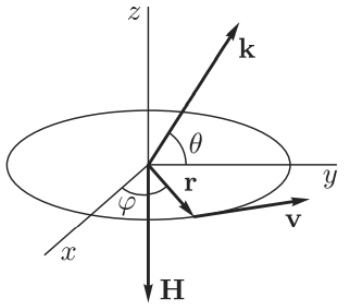
Если же мы интересуемся угловым распределением излучения, то надо воспользоваться формулой $d\mathscr{E}_{\mathbf{n}} = \frac{e^2}{4\pi c^3}do\int\left\{\frac{2(\mathbf{nw})(\mathbf{vw})}{c\left(1-\frac{\mathbf{vn}}{c}\right)^4}+\frac{\mathbf{w}^2}{\left(1-\frac{\mathbf{vn}}{c}\right)^3}-\frac{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)(\mathbf{nw})^2}{\left(1-\frac{\mathbf{vn}}{c}\right)^5}\right\}dt'$.

(?? прошлый раздел слабо проработан).

Интерес представляет интенсивность, усредненная по периоду движения.

Соответственно этому будем интегрировать в $d\mathscr{E}_{\mathbf{n}}$ по времени обращения частицы по окружности и разделим результат на величину периода $T = 2\pi/\omega_H$.

Выберем плоскость орбиты в качестве плоскости xy (начало координат - в центре окружности), а плоскость yz проводим через направление излучения $\mathbf{k}$ (рис. 16).



Магнитное поле будет направлено в отрицательном направлении оси z (изображенное на рис. 16 направление движения частицы отвечает положительному заряду e). Обозначим θ - угол между направлением излучения $\mathbf{k}$ и осью y, а $\varphi = \omega_H t$ - угол между радиус-вектором частицы и осью x.

Тогда косинус угла между направлением $\mathbf{k}$ и скоростью $\mathbf{v}$ равен $\cos\theta\cos\varphi$ (вектор $\mathbf{v}$ лежит в плоскости xy и в каждый момент времени перпендикулярен к радиус-вектору частицы).

(тут не совсем понимаю эту геометрию, но мб если подумать, то это именно так.)

Ускорение частицы $\mathbf{w}$ выражаем через поле $\mathbf{H}$ и скорость $\mathbf{v}$ согласно уравнению движения (см. (21.1)):

$$\mathbf{w} = \frac{e}{mc}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}[\mathbf{vH}]$$

После простого вычисления получим:

$$\overline{dI} = do\frac{e^4H^2v^2}{8\pi^2m^2c^5}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\int_0^{2\pi}\frac{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\sin^2\theta+\left(\frac{v}{c}-\cos\theta\cos\varphi\right)^2}{\left(1-\frac{v}{c}\cos\theta\cos\varphi\right)^5}d\varphi$$

где интегрирование по времени заменено интегрированием по $d\varphi = \omega_H dt$.

(!!! проделаю это чуть позже.)

Процесс интегрирования элементарен, хотя выкладки довольно громоздки.

В результате получается следующая формула:

$$\overline{dI} = do \frac{e^4 H^2 v^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}{8\pi m^2 c^5} \frac{\left[2 - \cos^2\theta - \frac{v^2}{4c^2}\left(1 + \frac{3v^2}{c^2}\right)\cos^4\theta\right]}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\cos^2\theta\right)^{7/2}}$$

(выведу её ручками потом!)

Отношение интенсивностей излучения под углом $\theta = \pi/2$ (перпендикулярно к плоскости орбиты) и под углом $\theta = 0$ (в плоскости орбиты) равно

$$\frac{(dI/do)_0}{(dI/do)_{\pi/2}} = \frac{4 + 3\frac{v^2}{c^2}}{8\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{5/2}}$$

При $v \to 0$ это отношение стремится к $1/2$, но при скоростях, близких к скорости света, оно становится очень большим.

Мы вернемся еще к этому вопросу ниже.

(?? и зачем это нам исследовать??)

Рассмотрим спектральное распределение излучения

Рассмотрим спектральное распределение излучения.

Поскольку движение заряда периодично, то речь идет о разложении в ряд Фурье.

Вычисление удобно начать с векторного потенциала. Для его компоненты Фурье имеем формулу

$$\mathbf{A}_n = e\frac{e^{ikR_0}}{cR_0 T}\oint \exp\left\{i\left(\omega_H n t - \mathbf{kr}\right)\right\} d\mathbf{r}$$

где интегрирование производится вдоль траектории частицы (окружности).

(?? тут хз, что такое n и почему T в знаменателе. вообще, типичная формула теории излучения, пропишу её скоро уже!!)

Для координат частицы имеем $x = r\cos\omega_H t, y = r\sin\omega_H t$.

В качестве переменной интегрирования выбираем угол $\varphi = \omega_H t$.

Замечая, что

$$\mathbf{kr} = kr\cos\theta\sin\varphi = \frac{nv}{c}\cos\theta\sin\varphi$$

($k = n\omega_H/c = nv/cr$), находим для компоненты Фурье x -составляющей векторного потенциала

$$A_{xn} = -\frac{ev}{2\pi c R_0} e^{ikR_0}\int\limits_0^{2\pi} e^{in\left(\varphi - \frac{v}{c}\cos\theta\sin\varphi\right)}\sin\varphi d\varphi$$

С таким интегралом нам приходилось уже иметь дело в задаче о движении в кулоновском поле. Он выражается через производную от функции Бесселя:

$$A_{xn} = -\frac{iev}{cR_0} e^{ikR_0} J_n'\left(\frac{nv}{c}\cos\theta\right)$$

Аналогичным образом вычисляется A_{yn}:

$$A_{yn} = \frac{e}{R_0\cos\theta} e^{ikR_0} J_n\left(\frac{nv}{c}\cos\theta\right)$$

Компонента же вдоль оси z, очевидно, вообще отсутствует.

По основным формулам теории излучения имеем для интенсивности излучения с частотой $\omega = n\omega_H$ в элемент телесного угла do:

$$dI_n = \frac{c}{2\pi} |\mathbf{H}_n|^2 R_0^2 do = \frac{c}{2\pi} |[\mathbf{k}\mathbf{A}_n]|^2 R_0^2 do$$

Замечая, что

$$|[\mathbf{A}\mathbf{k}]|^2 = A_x^2 k^2 + A_y^2 k^2 \sin^2\theta$$

и подставляя выражения (74.6) – (74.7), получим для интенсивности излучения следующую формулу:

$$dI_n = \frac{n^2 e^4 H^2}{2\pi c^3 m^2}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\left[\mathrm{tg}^2\theta \cdot J_n^2\left(\frac{nv}{c}\cos\theta\right) + \frac{v^2}{c^2} J_n'^2\left(\frac{nv}{c}\cos\theta\right)\right] do.$$

(?!!! проделаю это потом!!! пока что я хз про многие мелочи, которые тут происходят.)

Для определения полной по всем направлениям интенсивности излучения с частотой $\omega = n\omega_H$ это выражение должно быть проинтегрировано по всем углам. Но интегрирование не может быть произведено в конечном виде.

Посредством ряда преобразований, использующих некоторые соотношения теории функций Бесселя, искомый интеграл может быть приведен к следующему виду:

$$I_n = \frac{2e^4 H^2}{m^2 c^2 v}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\left[n\frac{v^2}{c^2} J_{2n}'\left(\frac{2nv}{c}\right) - n^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)\int_0^{v/c} J_{2n}(2n\xi)d\xi\right]$$

(?!! тут я просто поверил, хз, мб когда-нибудь и проверю...)

Магнито-тормозное излучение в ультрателятивистском случае

Рассмотрим более подробно ультрарелятивистский случай, когда скорость движения частицы близка к скорости света.

Положив в числителе формулы $I = \frac{2e^4 H^2 v^2}{3m^2 c^5\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}$ величину $v = c$, найдем, что полная интенсивность магнито-тормозного излучения в ультрарелятивистском случае пропорциональна квадрату энергии частицы $\mathscr{E}$:

$$I = \frac{2e^4 H^2}{3m^2 c^3}\left(\frac{\mathscr{E}}{mc^2}\right)^2$$

Угловое распределение излучения в этом случае крайне анизотропно. Оно сосредоточено в основном вблизи плоскости орбиты. Угловую Ширину $\Delta\theta$, в которой заключена основная часть излучения, легко оценить из условия $1 - \frac{v^2}{c^2}\cos^2\theta \sim 1 - \frac{v^2}{c^2}$.

Очевидно, что

$$\Delta\theta \sim \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{mc^2}{\mathscr{E}}$$

Этот результат находится, конечно, в соответствии с рассмотренным в предыдущем параграфе угловым распределением мгновенной интенсивности $\theta \sim \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$.

Специфическим характером обладает в ультрарелятивистском случае также и спектральное распределение излучения. В этом случае основную роль в излучении играют частоты с очень большими n, что покажем ниже.

В связи с этим можно воспользоваться формулой $J_{2n}(2n\xi) \approx \frac{1}{\sqrt{\pi}n^{1/3}}\Phi\left[n^{2/3}\left(1-\xi^2\right)\right]$, где $n \gg 1, 1-\varepsilon \ll 1$. Подставив в

$$I_n = \frac{2e^4H^2}{m^2c^2v}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\left[n\frac{v^2}{c^2}J'_{2n}\left(\frac{2nv}{c}\right) - n^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\int\limits_0^{v/c} J_{2n}(2n\xi)d\xi\right],$$

получим:

$$J_n = \frac{2e^4H^2}{\sqrt{\pi}m^2c^3}\frac{mc^2}{\mathscr{E}}\sqrt{u}\left[-\Phi'(u) - \frac{u}{2}\int\limits_u^{\infty}\Phi(u)du\right]$$

где $u = n^{2/3}\left(\frac{mc^2}{\mathscr{E}}\right)^2$. При $u \to 0$ выражение в квадратных скобках стремится к постоянному пределу $-\Phi'(0) \approx 0,4587$. Поэтому при $u \ll 1$ имеем:

$$I_n = 0,52\frac{e^4H^2}{m^2c^3}\left(\frac{mc^2}{\mathscr{E}}\right)^2 n^{1/3}, \quad 1 \ll n \ll \left(\frac{\mathscr{E}}{mc^2}\right)^3$$

При $u \gg 1$ можно воспользоваться известным асимптотическим выражением функции Эйри и получить:

$$I_n = \frac{e^4H^2n^{1/2}}{2\sqrt{\pi}m^2c^3}\left(\frac{mc^2}{\mathscr{E}}\right)^{5/2}\exp\left[-\frac{2}{3}n\left(\frac{mc^2}{\mathscr{E}}\right)^3\right], \quad n \gg \left(\frac{\mathscr{E}}{mc^2}\right)^3$$

т.е. интенсивность экспоненциально падает при очень больших n.

(в дополнениях потом укажу эти свойства, тут пока что верю.)

Спектральное распределение имеет, следовательно, максимум при $n \sim \left(\mathscr{E}/mc^2\right)^3$, и основная часть излучения сосредоточена в области частот

$$\omega \sim \omega_H\left(\frac{\mathscr{E}}{mc^2}\right)^3 = \frac{eH}{mc}\left(\frac{\mathscr{E}}{mc^2}\right)^2$$

Эти частоты очень велики по сравнению с расстоянием ω_H между двумя соседними из них. Другими словами, спектр излучения состоит из очень большого числа близко расположенных линий, т.е. имеет квазинепрерывный характер.

Вместо функции распределения I_n можно поэтому ввести распределение по непрерывному ряду частот $\omega = n\omega_H$, написав

$$dI = I_n dn = I_n\frac{d\omega}{\omega_H}$$

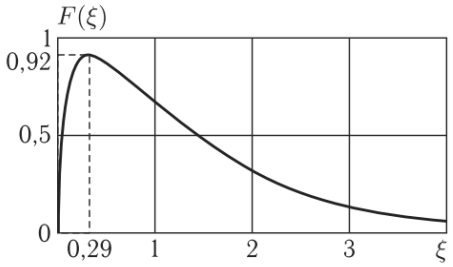
Для численных расчетов удобно выразить это распределение через функции Макдональда K_ν 1).

Путем несложных преобразований формулы (74.13) оно может быть представлено в виде

$$dI = d\omega\frac{\sqrt{3}}{2\pi}\frac{e^3H}{mc^2}F\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)$$

где $F(\xi) = \xi\int\limits_\xi^\infty K_{5/3}(\xi)d\xi$ и $\omega_c = \frac{3eH}{2mc}\left(\frac{\mathscr{E}}{mc^2}\right)^2$

На рис. ниже изображен график функции $F(\xi)$.



Излучение в случае движения по винтовой линии (???)

(??!! тут я совсем отлетел уже, хз просто, о чем речь вообще.)

Наконец, несколько замечаний о случае, когда частица движется не по плоской круговой орбите, а по винтовой траектории, т.е. имеет продольную (по отношению к полю) скорость $v_\parallel = v\cos\chi$ (где χ - угол между H и v).

Частота вращательного движения дается той же формулой (74.1), но вектор у описывает не круг, а поверхность конуса с осью вдоль **H** и углом 2χ при вершине.

Полная интенсивность излучения (понимаемая как полная потеря энергии частицей в 1 с) будет отличаться от (74.2) заменой H на $H_\perp = H\sin\chi$.

В ультрарелятивистском случае излучение сконцентрировано в направлениях вблизи образующих «конуса скоростей».

Спектральное распределение и полная интенсивность (понимаемые в том же смысле) получаются из (74.17) и (74.10) заменой $H \to H_\perp$.

Если же речь идет об интенсивности, наблюдаемой в указанных направлениях удаленным неподвижным наблюдателем, то в формулы надо ввести множитель, учитывающий общее приближение или удаление излучателя (движущейся по кружку частицы) от наблюдателя.

Этот множитель дается отношением $dt/dt_{\text{наб}}$, где $dt_{\text{наб}}$ - интервал времени между поступлением к наблюдателю сигналов, испускаемых источником с интервалом dt.

Очевидно, что

$$dt_{\text{наб}} = dt\left(1 - \frac{1}{c}v_\parallel\cos\vartheta\right)$$

где ϑ - угол между направлениями **k** и **H** (последнее принято за положительное направление скорости $v_\parallel$).

В ультрарелятивистском случае, когда направление **k** близко к направлению **v**, имеем $\vartheta \approx \chi$, так что

$$\frac{dt}{dt_{\text{наб}}} = \left(1 - \frac{v_\parallel}{c}\cos\chi\right)^{-1} \approx \frac{1}{\sin^2\chi}$$

Закон изменения энергии заряда, движущегося по круговой орбите в постоянном однородном магнитном поле

Определить закон изменения энергии со временем для заряда, движущегося по круговой орбите в постоянном однородном магнитном поле и теряющего энергию путем излучения.

Согласно $I = \frac{2e^4H^2v^2}{3m^2c^5\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}$ имеем для потери энергии в единицу времени:

$$-\frac{d\mathscr{E}}{dt} = \frac{2e^4H^2}{3m^4c^7}\left(\mathscr{E}^2 - m^2c^4\right)$$

где $\mathscr{E}$ - энергия частицы.

Отсюда находим:

$$\frac{\mathscr{E}}{mc^2} = \operatorname{cth}\left(\frac{2e^4H^2}{3m^3c^5}t + \text{const}\right)$$

С увеличением t энергия монотонно падает, приближаясь к значению $\mathscr{E} = mc^2$ (полная остановка частицы) асимптотически при $t \to \infty$.

(??? проверю.)

спектрального распределения излучения с большими значениями n нерелятивистской частицы

Найти асимптотическую формулу для спектрального распределения излучения с большими значениями n для частицы, движущейся по окружности со скоростью, не близкой к скорости света.

Используем известную формулу теории функций Бесселя:

$$J_n(n\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}\,(1-\varepsilon^2)^{1/4}}\left[\frac{\varepsilon}{1+\sqrt{1-\varepsilon^2}}e^{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\right]^n$$

справедливую при $n\,(1-\varepsilon^2)^{3/2} \gg 1$.

С ее помощью находим из

$$I_n = \frac{2e^4H^2}{m^2c^2v}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\left[n\frac{v^2}{c^2}J'_{2n}\left(\frac{2nv}{c}\right) - n^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\int\limits_0^{v/c} J_{2n}(2n\xi)d\xi\right]$$

получаем

$$I_n = \frac{e^4H^2\sqrt{n}}{2\sqrt{\pi}m^2c^3}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{5/4}\left[\frac{v/c}{1+\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}e^{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right]^{2n}$$

(??? проверю потом!!!)

Эта формула применима при $n\,(1-v^2/c^2)^{3/2} \gg 1$; если к тому же $1-v^2/c^2$ мало, то формула переходит в

$$I_n = \frac{e^4H^2n^{1/2}}{2\sqrt{\pi}m^2c^3}\left(\frac{mc^2}{\mathscr{E}}\right)^{5/2}\exp\left[-\frac{2}{3}n\left(\frac{mc^2}{\mathscr{E}}\right)^3\right].$$

(???!! проверю потом!!)

Поляризация магнито-тормозного излучения (?!)

(я тут даже качественно мало что сказать могу, потому что мало тренировался!!!)

Найти поляризацию магнито-тормозного излучения.

Электрическое поле $\mathbf{E}_n$ вычисляется по векторному потенциалу $\mathbf{A}_n$ по формуле

$$\mathbf{E}_n = \frac{i}{k}\left[[\mathbf{k}\mathbf{A}_n]\,\mathbf{k}\right] = -\frac{i}{k}\mathbf{k}\,(\mathbf{k}\mathbf{A}_n) + ik\mathbf{A}_n$$

Пусть e_1, e_2 - единичные векторы в плоскости, перпендикулярной к $\mathbf{k}$, причем e_1 параллелен оси $x, \mathbf{a}e_2$ лежит в плоскости yz (их компоненты: $\mathbf{e}_1 = (1,0,0), \mathbf{e}_2 = (0, \sin\theta, -\cos\theta)$); векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{k}$ образуют правую тройку. Тогда электрическое поле будет:

$$\mathbf{E}_n = ikA_{xn}\mathbf{e}_1 + ik\sin\theta A_{yn}\mathbf{e}_2$$

или, опустив несущественные общие множители:

$$\mathbf{E}_n \propto \frac{v}{c} J_n' \left(\frac{nv}{c}\cos\theta\right) \mathbf{e}_1 + \operatorname{tg}\theta J_n \left(\frac{nv}{c}\cos\theta\right) i\mathbf{e}_2$$

Волна эллиптически поляризована.

В ультрарелятивистском случае для больших n и малых углов θ функции J_n и J_n' выражаются через $K_{1/3}$ и $K_{2/3}$, причем в их аргументах полагаем

$$1 - \frac{v^2}{c^2}\cos^2\theta \approx 1 - \frac{v^2}{c^2} + \theta^2 = \left(\frac{mc^2}{\mathscr{E}}\right)^2 + \theta^2$$

В результате получим:

$$\mathbf{E}_n = \mathbf{e}_1 \psi K_{2/3}\left(\frac{n}{3}\psi^3\right) + i\mathbf{e}_2 \theta K_{1/3}\left(\frac{n}{3}\psi^3\right), \quad \psi = \sqrt{\left(\frac{mc^2}{\mathscr{E}}\right)^2 + \theta^2}$$

При $\theta = 0$ эллиптическая поляризация вырождается в линейную вдоль e_1. При больших θ, когда $|\theta| \gg mc^2/\mathscr{E}$, $n\theta^3 \gg 1$, имеем $K_{1/3}(x) \approx K_{2/3}(x) \approx \sqrt{\pi/2x}e^{-x}$ и поляризация стремится к круговой; $\mathbf{E}_n \propto \mathbf{e}_1 \pm i\mathbf{e}_2$; интенсивность излучения становится при этом экспоненциально малой.

В промежуточной области углов малая ось эллипса лежит вдоль $\mathbf{e}_2$, а большая - вдоль $\mathbf{e}_1$.

Направление вращения зависит от знака угла $\theta(\theta > 0$, если направления $\mathbf{H}$ и $\mathbf{k}$ лежат по разные стороны от плоскости орбиты.

О случаях применения

(с опытом все укажу явно. пока вообще не уверен, в чем польза того, что мы изучили???)

5.4.5 Braking by Radiation

(?? вот это может понадобиться в задачах!!!)

Суть (?)

(??? качественно откуда это появляется??? пока не могу объяснить, в школе вроде нам говорили, что такого нет)

Theory

В $ 65 было показано, что разложение потенциалов поля системы зарядов в ряд по степеням v/c приводит во втором приближении к функции Лагранжа, вполне определяющей (в этом приближении) движение зарядов.

Произведем теперь разложение поля до членов более высокого порядка и выясним, к каким эффектам приводят эти члены в разложении скалярного потенциала

$$\varphi = \int \frac{1}{R}\rho_{t-R/c}dV$$

Член третьего порядка по $1/c$ равен

$$\varphi^{(3)} = -\frac{1}{6c^3}\frac{\partial^3}{\partial t^3}\int R^2\rho dV$$

По тем же причинам, что и при выводе (65.3), в разложении векторного потенциала мы должны взять только член второго порядка по $1/c$, т.е.

$$\mathbf{A}^{(2)} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\int \mathbf{j}dV$$

Произведем преобразование потенциалов:

$$\varphi' = \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}, \qquad \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \operatorname{grad} f$$

выбрав функцию f таким образом, чтобы скалярный потенциал $\varphi^{(3)}$ обратился в нуль:

$$f = -\frac{1}{6c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int R^2\rho dV$$

Тогда новый векторный потенциал будет равен

$$\begin{aligned}\mathbf{A}'^{(2)} &= -\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\int \mathbf{j}dV - \frac{1}{6c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\nabla\int R^2\rho dV = \\ &= -\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\int \mathbf{j}dV - \frac{1}{3c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int \mathbf{R}\rho dV\end{aligned}$$

Переходя здесь от интегралов к суммам по отдельным зарядам, для первого слагаемого в правой части получим выражение $-\frac{1}{2}\sum e\mathbf{v}$.

Во втором слагаемом пишем $\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 - \mathbf{r}$, где $\mathbf{R}_0$ и $\mathbf{r}$ имеют обычный смысл (см. §66); тогда $\dot{\mathbf{R}} = -\dot{\mathbf{r}} = -\mathbf{v}$, и второе слагаемое принимает вид $\frac{1}{3c^2}\sum e\dot{\mathbf{v}}$.

Таким образом

$$\mathbf{A}'^{(2)} = -\frac{2}{3c^2}\sum e\dot{\mathbf{v}}$$

Соответствующее этому потенциалу магнитное поле равно нулю $\left(\mathbf{H} = \operatorname{rot}\mathbf{A}'^{(2)} = 0\right)$, поскольку $\mathbf{A}'(2)$ не содержит явным образом координат.

Электрическое же поле, $\mathbf{E} = -\dot{\mathbf{A}}'^{(2)}/c$, равно

$$\mathbf{E} = \frac{2}{3c^3}\cdot\ddot{\mathbf{d}}$$

где d - дипольный момент системы.

Таким образом, члены третьего порядка в разложении поля приводят к появлению дополнительных действующих на заряды сил, не содержащихся в функции Лагранжа (65.7); эти силы зависят от производных по времени от ускорения зарядов.

Во втором слагаемом пишем $\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 - \mathbf{r}$, где $\mathbf{R}_0$ и $\mathbf{r}$ имеют обычный смысл; тогда $\dot{\mathbf{R}} = -\dot{\mathbf{r}} = -\mathbf{v}$, и второе слагаемое принимает вид $\frac{1}{3c^2}\sum e\dot{\mathbf{v}}$.

Таким образом

$$\mathbf{A}'^{(2)} = -\frac{2}{3c^2}\sum e\dot{\mathbf{v}}$$

Соответствующее этому потенциалу магнитное поле равно нулю $\left(\mathbf{H} = \operatorname{rot}\mathbf{A}'^{(2)} = 0\right)$, поскольку $\mathbf{A}'(2)$ не содержит явным образом координат.

Электрическое же поле, $\mathbf{E} = -\dot{\mathbf{A}}'^{(2)}/c$, равно

$$\mathbf{E} = \frac{2}{3c^3}\cdot\ddot{\mathbf{d}}$$

где d - дипольный момент системы.

Таким образом, члены третьего порядка в разложении поля приВодят к появлению дополнительных действующих на заряды сил, не содержащихся в функции Лагранжа (65.7); эти силы зависят от производных по времени от ускорения зарядов.

Средняя работа силы над системой зарядов

Рассмотрим систему зарядов, совершающих стационарное движение и вычислим среднюю работу, производимую полем (75.4) за единицу времени.

На каждый заряд e действует сила $f = e\mathbf{E}$, т.е.

$$f = \frac{2e}{3c^3}\ddot{\mathbf{d}}$$

В единицу времени эта сила производит работу, равную $A_1 = \mathbf{fv}$; полная работа, совершенная над всеми зарядами, равна сумме по зарядам:

$$A = \sum \mathbf{fv} = \frac{2}{3c^3}\dddot{d}\sum e\mathbf{v} = \frac{2}{3c^3}\dddot{\mathbf{d}}\dot{\mathbf{d}} = \frac{2}{3c^3}\frac{d}{dt}(\dot{\mathbf{d}}\ddot{\mathbf{d}}) - \frac{2}{3c^3}\ddot{d}^2$$

При усреднении по времени первый член исчезает, так что средняя работа оказывается равной

$$\sum \overline{\mathbf{fv}} = -\frac{2}{3c^3}\overline{\ddot{d}^2}$$

Но стоящее справа выражение есть не что иное, как (взятое с обратным знаком) среднее излучение энергии системой за единицу времени (см. (67.8)).

Таким образом, возникающие в третьем приближении силы $\mathbf{f} = \frac{2e}{3c^3}\ddot{\mathbf{d}}$ описывают обратное действие излучения на заряды. Эти силы носят название торможения излучением или лорениевых сил трения.

Потеря момента импульса

Одновременно с потерей энергии в излучающей системе зарядов происходит также и потеря момента импульса, скорость который $d\mathbf{M}/dt$, легко вычислить с помощью выражений для сил торможения.

Дифференцируя момент $\mathbf{M} = \sum[\mathbf{rp}]$ по времени, имеем $\dot{\mathbf{M}} = \sum[\mathbf{r}\dot{\mathbf{p}}]$, так как $\sum[\dot{\mathbf{r}}\mathbf{p}] = \sum m[\mathbf{vv}] \equiv 0$ Производную по времени от импульса частицы заменяем действующей на нее силой трения (75.5) и находим:

$$\dot{\mathbf{M}} = \sum[\mathbf{rf}] = \frac{2}{3c^3}\sum e\left[\mathbf{r}\,\dddot{\mathbf{d}}\right] = \frac{2}{3c^3}[\mathbf{d}\ddot{\mathbf{d}}]$$

Нас интересует среднее по времени значение потери момента импульса при стационарном движении, подобно тому как выше нас интересовала средняя потеря энергии.

Написав

$$[d\ddot{d}] = \frac{d}{dt}[\,\mathbf{d}\ddot{d}] - [d\ddot{d}]$$

и замечая, что полная производная по времени (первый член) при усреднении исчезает, найдем окончательно следующее выражение для средней потери момента импульса излучающей системой:

$$\overline{\frac{d\mathbf{M}}{dt}} = -\frac{2}{3c^3}[\overline{\mathbf{d}\ddot{\mathbf{d}}}]$$

Парадоксы и противоречия

Описание действия заряда «самого на себя» с помощью силы торможения вообще не является вполне удовлетворительным и содержит в себе противоречия.

Для одной частицы во внешнем поле себя же торможение излучением есть

$$\mathbf{f} = \frac{2e^2}{3c^3}\ddot{\mathbf{v}}$$

Также всегда можно выбрать такую систему отсчета, В которой она в данный момент времени покоится.

Если вычислять в такой системе дальнейшие члены разложения создаваемого зарядом поля, то легко убедиться в том, что при стремлении к нулю радиусвектора $\mathbf{R}$ от заряда к точке наблюдения все эти члены обращаются в нуль.

Таким образом, в случае одного заряда формула лоренцева сила трения является точным выражением для обратного действия излучения в той системе отсчета, в которой заряд покоится.

Уравнение движения заряда в поле только себя, имеет вид

$$m\dot{\mathbf{v}} = \frac{2e^2}{3c^3}\ddot{\mathbf{v}}$$

Это уравнение имеет, кроме тривиального решения $\mathbf{v} = \text{const}$, еще решение, в котором ускорение $\dot{\mathbf{v}}$ пропорционально $\exp(3mc^3t/2e^2)$ т.

е.

неограниченно возрастает со временем.

Это значит, например, что заряд, прошедший через какое-нибудь поле, по выходе из поля должен был бы неограниченно «самоускоряться».

Абсурдность этого результата свидетельствует об ограниченной применимости форму-
Может возникнуть вопрос о том, каким образом электродинамика, удовлетворяющая закону сохранения энергии, может привести

к абсурдному результату, в котором свободная частица неограниченно увеличивает свою энергию.

Конечность массы частицы

Корни этой трудности находятся, в бесконечной электромагнитной «собственной массе» элементарных частиц.

(кст, энергию электростатического поля пройду еще раз)

Когда мы пишем в уравнениях движения конечную массу заряда, то мы этим, по существу, приписываем ему формально бесконечную же отрицательную «собственну ю массу» неэлектромагнитного происхождения, которая вместе с электромагнитной массой приводила бы к конечной массе частицы.

Поскольку вычитание одной из другой двух бесконечностей не является вполне корректной математической операцией, то это и приводит к ряду дальнейших трудностей, в том числе и к указанной здесь.

Уравнение движения частицы с силой торможения

В системе координат, в которой скорость частицы мала, уравнение движения с учетом торможения излучением имеет вид

$$m\dot{\mathbf{v}} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}[\mathbf{v}\mathbf{H}] + \frac{2e^2}{3c^3}\ddot{\mathbf{v}}$$

По изложенным соображениям, это уравнение применимо только постольку, поскольку сила торможения мала по сравнению с силой, действующей на заряд со стороны внешнего поля.

Для выяснения физического смысла этого условия поступим следующим образом.

В системе отсчета, в которой заряд в данный момент покоится, вторая производная от скорости по времени равна, при пренебрежении силой торможения:

$$\ddot{\mathbf{v}} = \frac{e}{m}\dot{\mathbf{E}} + \frac{e}{mc}[\dot{\mathbf{v}}\mathbf{H}]$$

Во втором члене подставляем (ограничиваясь той же точностью) $\dot{\mathbf{v}} = e\mathbf{E}/m$ и получаем:

$$\ddot{\mathbf{v}} = \frac{e}{m}\dot{\mathbf{E}} + \frac{e^2}{m^2c}[\mathbf{E}\mathbf{H}]$$

Соответственно этому сила торможения будет состоять из двух членов:

$$f = \frac{2e^3}{3mc^3}\dot{\mathbf{E}} + \frac{2e^4}{3m^2c^4}[\mathbf{E}\mathbf{H}]$$

Если ω есть частота движения, то $\dot{\mathbf{E}}$ пропорционально $\omega\mathbf{E}$ и, следовательно, первый член порядка величины $\frac{e^3\omega}{mc^3}E$; второй же - порядка $\frac{e^4}{m^2c^4}$ EH.

Поэтому условие малости сил торможения по сравнению с действующей на заряд внешней силой eE дает, во-первых:

$$\frac{e^2}{mc^3}\omega \ll 1$$

или, вводя длину волны $\lambda \sim c/\omega$:

$$\lambda \gg \frac{e^2}{mc^2}$$

Таким образом, формула (75.8) для торможения излучением применима только в том случае, если длина падающей на заряд волны велика по сравнению с «радиусом» заряда e^2/mc^2.

Мы видим, что расстояния порядка e^2/mc^2 опять оказываются той границей, за которой электродинамика приходит в противоречие сама с собой (см.

$ 37).

Во-вторых, сравнивая второй член в силе торможения с силой eE, находим условие

$$H \ll \frac{m^2c^4}{e^3}$$

(или $c/\omega_H \gg e^2/mc^2$, где $\omega_H = eH/mc$).

Таким образом, необходимо также, чтобы само поле не было слишком велико.

Поля $\sim m^2c^4/e^3$ тоже являются границей, за которой классическая электродинамика приводит к внутренним противоречиям.

здесь надо иметь в виду, что в действительности электродинамика становится неприменимой,

вследствие квантовых эффектов, уже при значительно меньших полях 1)

Напомним во избежание недоразумений, что длина волны в (75.11) и величина поля в (75.12) относятся к той системе отсчета, в которой частица в данный момент покоится.

Время падения двух зарядов друг на друга при эллиптическом движении (?!!!)

Определить время, в течение которого два притягивающихся заряда, совершающих эллиптическое движение (со скоростью, малой в сравнении со скоростью света) и теряющие энергию вследствие излучения, «упадут» друг на друга.

Предполагая относительную потерю энергии за один оборот малой, мы можем положить производную по времени от энергии равной средней интенсивности излучения (определенной в задаче 1$70):

$$\frac{d|\mathscr{E}|}{dt} = \frac{(2|\mathscr{E}|)^{3/2}\mu^{5/2}\alpha^3}{3c^3M}\left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2}\right)^2\left(3 - \frac{2|\mathscr{E}|M^2}{\mu\alpha^2}\right)$$

где $\alpha = |e_1e_2|$.

Наряду с энергией частицы теряю|т момент количества движения.

Потеря момента в единицу времени дается формулой (75.7); подставляя в нее выражение (70.1) для d и замечая, что $\mu\mathbf{r} = -\alpha\mathbf{r}/r^3$ и $\mathbf{M} = \mu[\mathbf{rv}]$, находим

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = -\frac{2\alpha}{3c^3}\left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2}\right)^2\frac{\mathbf{M}}{r^3}$$

Это выражение усредняем по периоду движения.

Учитывая медленность изменения $\mathbf{M}$, в правой стороне равенства достаточно усреднить лишь r^{-3}; это среднее значение вычисляется точно так, как вычислялось в задаче 1 $ 70 среднее значение от r^{-4}.

В результате находим для средней потери момента в единицу времени следующее выражение:

$$\frac{dM}{dt} = -\frac{2\alpha(2\mu|\mathscr{E}|)^{3/2}}{3c^3M^2}\left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2}\right)^2$$

(знак среднего, как и в (1), опускаем).

Разделив (1) на (2), получим дифференциальное уравнение

$$\frac{d|\mathscr{E}|}{dM} = -\frac{\mu\alpha^2}{2M^3}\left(3 - 2\frac{|\mathscr{E}|M^2}{\mu\alpha^2}\right)$$

интегрируя которое, найдем:

$$|\mathscr{E}| = \frac{\mu\alpha^2}{2M^2}\left(1 - \frac{M^3}{M_0^3}\right) + \frac{|\mathscr{E}_0|}{M_0}M$$

Постоянная интегрирования выбрана таким образом, чтобы при $M = M_0$ было $\mathscr{E} = \mathscr{E}_0$, где M_0 и $\mathscr{E}_0$ - начальные значения момента и энергии частиц.

«Падению» частиц друг на друга соответствует $M \to 0$.

Из (3) видно, что при этом, как и следовало, $\mathscr{E} \to -\infty$.

Заметим, что произведение $|\mathscr{E}|M^2$ стремится к $\mu\alpha^2/2$ и из формулы (70.3) видно, что эксцентриситет $\varepsilon \to 0$, т.

е.

по мере сближения частиц орбита приближается к окружности.

Подставляя (3) в (2), определяем производную dt/dM, выраженную как функция от M, после чего интегрирование по dM в пределах от M_0 до нуля дает время падения:

$$t_{\text{пад}} = \frac{c^3M_0^5}{\alpha\sqrt{2\,|\mathscr{E}_0|\,\mu^3}}\left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2}\right)^{-2}\left(\sqrt{\mu\alpha^2} + \sqrt{2M_0^2\,|\mathscr{E}_0|}\right)^{-2}$$

О самодействии поля

(там что Киселев говорил, что частица движется, создает поле, поле действует на неё, меняет её движение. такие задачи мы не рассматривали, мб потом порешаю. В ЛЛ2 такого нет.)

О случаях применения торможения излученим (!!!)

(с опытом все укажу явно)

5.4.6 Radiation Deceleration in the Relativistic Case

(тут крутая теория про 4-силы, её потом в рел механику добавлю.)

Суть (?)

Theory

Выведем релятивистское выражение для торможения излучением (для одного заряда), применимое и при движении со скоростями порядка скорости света.

Эта сила будет теперь 4-вектором g^i, которым надо дополнить уравнение движения заряда, написанное в четырехмерном виДе:

$$mc\frac{du^i}{ds} = \frac{e}{c}F^{ik}u_k + g^i$$

Для определения g^i заметим, что при $v \ll c$ его три пространственные компоненты должны перейти в компоненты вектора $f/\mathbf{c}$(75.8).

Легко видеть, что этим свойством обладает 4-вектор $\frac{2e^2}{3c}\frac{d^2u^i}{ds^2}$. Он не удовлетворяет тождеству $g^iu_i = 0$, которое имеет место для комПонент всякого 4-вектора силы.

Для того чтобы удовлетворить этому условию, надо прибавить к написанному выражению некоторый дополнительный 4-вектор, составленный из 4-скорости u^i и ее производных.

Три пространственные компоненты этого вектора должны обращаться в предельном случае $\mathbf{v} = 0$ в нуль так, чтобы не изменить правильного значения f, которое уже дается выражением $\frac{2e^2}{3c}\frac{d^2u^i}{ds^2}$.

Этим свойством обладает 4-вектор u^i, и потому искомый дополнительный член должен Иметь вид αu^i.

Скаляр α надо выбрать так, чтобы удовлетворить соотношению $g^iu_i = 0$.

В результате находим:

$$g^i = \frac{2e^2}{3c}\left(\frac{d^2u^i}{ds^2} - u^iu^k\frac{d^2u_k}{ds^2}\right)$$

Полученную формулу можно переписать в другом виде, выразив согласно уравнениям движения производные d^2u^i/ds^2 через тензор действу ющего на частицу внешнего электромагнитного поля:

$$\frac{du^i}{ds} = \frac{e}{mc^2}F^{ik}u_k, \quad \frac{d^2u^i}{ds^2} = \frac{e}{mc^2}\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^l}u_ku^l + \frac{e^2}{m^2c^4}F^{ik}F_{kl}u^l$$

При подстановке надо иметь в виду, что произведение антисимметричного по индексам i, k тензора $\partial F^{ik}/\partial x^l$ на симметричный тензор u_iu_k дает нуль.

Итак,

$$g^i = \frac{2e^3}{3mc^3}\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^l}u_ku^l - \frac{2e^4}{3m^2c^5}F^{il}F_{kl}u^k + \frac{2e^4}{3m^2c^5}\left(F_{kl}u^l\right)\left(F^{km}u_m\right)u^i$$

Интеграл от 4-силы g^i, взятый по мировой линии движения заряда, пролетающего через заданное поле, должен совпасть (с обратным знаком) с полным излучением зарядом 4-импульса ΔP^i (подобно тому как среднее значение работы силы f в нерелятивистском случае совпадает с интенсивностью дипольного излучения - см.

(75.6)).

Легко убедиться в том, что это действительно так.

Первый член в (76.2) при интегрировании обращается в нуль, поскольку на бесконечности частица не имеет ускорения, т.е. $du^i/ds = 0$.

Второй член интегрируем по частям и получаем:

$$-\int g^i ds = \frac{2e^2}{3c}\int u^i u^k \frac{d^2u_k}{ds^2}ds = -\frac{2e^2}{3c}\int \frac{du_k}{ds}\frac{du^k}{ds}dx^i$$

что в точности совпадает с (73.4).

Когда скорость частицы приближается к скорости света, в пространственных компонентах 4-вектора (76.3) наиболее быстро возрастает часть, происходящая от члена, содержащего тройные произведения компонент 4-скорости.

Сохраняя поэтому лишь этот член в (76.3) и учитывая связь (9.18) между пространственными компонентами 4-вектора g^i и трехмерной силой f, находим для последней:

$$f = \frac{2e^4}{3m^2c^4}\left(F_{kl}u^l\right)\left(F^{km}u_m\right)\mathbf{n}$$

где $\mathbf{n}$ - единичный вектор в направлении у.

Следовательно, в этом случае сила f направлена против направления скорости частицы; выбирая последнее в качестве оси x и раскрывая четырехмерные выражения, Получим:

$$f_x = -\frac{2e^4}{3m^2c^4}\frac{(E_y - H_z)^2 + (E_z + H_y)^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

(везде, за исключением знаменателя, положено $v = c$).

Мы видим, что для ультрарелятивистской частицы сила торможения пропорциональна квадрату ее энергии.

Обратим внимание на следующее интересное обстоятельство.

В предыдущем параграфе было показано, что полученные выражения длЯ торможения излучением применимы лишь в таких полях, величина Которых в системе покоя частицы (система K_0) мала по сравнению с m^2c^4/e^3.

Пусть F есть порядок величины внешнего поля в системе отсчета K, в которой частица движется со скоростью v.

Тогда

в системе K_0 поле имеет порядок величины $F/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ (см.

формулы преобразования в $ 24).

Поэтому F должно удовлетворять условию

$$\frac{e^3F}{m^2c^4\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \ll 1$$

Между тем отношение силы торможения (76.4) к внешней силе ($\sim eF$) по порядку величины есть

$$\frac{e^3F}{m^2c^4\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)}$$

и мы видим, что соблюдение условия (76.5) не препятствует тому, что сила торможения может оказаться (при достаточно большой энергии частицы) большой по сравнению с обычной лоренцевой силой, действующей на заряд в электромагнитном поле.

Таким образом, для ультрарелятивистской частицы может иметь место случай, когда торможение излучением является основной действующей на нее силой.

В этом случае потерю энергии (кинетической) частицей на единице длины ее пути можно считать равной одной только силе торможения f_x; имея в виду, что последняя пропорциональна квадрату энергии частицы, напишем:

$$-\frac{d\mathscr{E}_{\text{кин}}}{dx} = k(x)\mathscr{E}^2_{\text{кин}}$$

где посредством $k(x)$ обозначен зависящий от координаты x коэффиЦиент, выражающийся согласно (76.4) через поперечные компоненты поля.

Интегрируя это дифференциальное уравнение, найдем:

$$\frac{1}{\mathscr{E}_{\text{Кин}}} = \frac{1}{\mathscr{E}_0} + \int\limits_{-\infty}^{x} k(x)dx$$

где $\mathscr{E}_0$ обозначает начальную энергию частицы (энергия при $x \to -\infty$).

В частности, конечная энергия частицы $\mathscr{E}_1$ (после пролета частиЦы через поле) определяется формулой

$$\frac{1}{\mathscr{E}_1} = \frac{1}{\mathscr{E}_0} + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} k(x)dx$$

Мы видим, что при $\mathscr{E}_0 \to \infty$ конечная энергия $\mathscr{E}_1$ стремится к постоянному, не зависящему от $\mathscr{E}_0$ пределу)И.

Я.

Помераниук, 1939).

Отсюда следует, что после пролета через поле энергия частицы не может превышать значения $\mathscr{E}_{\text{кр}}$, определяемого равенством

$$\frac{1}{\mathscr{E}_{\text{кр}}} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} k(x)dx$$

или, подставляя выражение для $k(x)$,

$$\frac{1}{\mathscr{E}_{\text{кр}}} = \frac{2}{3m^2c^4}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left[(E_y - H_z)^2 + (E_z + H_y)^2\right] dx$$

Предельная энергия после пролета через поле магнитного диполя

(??!!! магнитный диполь потом доучу!!!)

Определить предельную энергию, которой может обладать частица после пролета через поле магнитного диполя $\mathfrak{m}$; вектор $\mathfrak{m}$ и направление движения лежат в одной плоскости.

Выбираем плоскость, проходящую через вектор $\mathfrak{m}$ и направление движения, в качестве плоскости xz, причем частица движется параллельно оси x на расстоянии ρ от нее.

Для действующих на частицу поперечных компонент поля магнитного диполя имеем из $\overline{\mathbf{H}} = \frac{3\mathbf{n}(\overline{\mathfrak{m}}\mathbf{n}) - \overline{\mathfrak{m}}}{R_0^3}$:

$$H_y = 0$$

$$H_z = \frac{(3\mathbf{mr})z - \mathbf{m}_z r^2}{r^5} = \frac{\mathfrak{m}}{(\rho^2 + x^2)^{5/2}}\left\{3(\rho\cos\varphi + x\sin\varphi)\rho - \left(\rho^2 + x^2\right)\cos\varphi\right\}$$

(φ - угол между $\mathfrak{m}$ и осью z).

Подставляя в (76.6) и производя интегрирование, получим:

$$\frac{1}{\mathscr{E}_{\text{кр}}} = \frac{\mathfrak{m}^2\pi}{64m^2c^4\rho^5}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2\left(15+26\cos^2\varphi\right)$$

Трехмерное выражение силы торможения в релятивистском случае

Написать трехмерное выражение для силы торможения в релятивистском случае.

Вычисляя пространственные компоненты 4-вектора

$$g^i = \frac{2e^3}{3mc^3}\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^l}u_k u^l - \frac{2e^4}{3m^2c^5}F^{il}F_{kl}u^k + \frac{2e^4}{3m^2c^5}\left(F_{kl}u^l\right)\left(F^{km}u_m\right)u^i,$$

получим

$$\begin{aligned} f =& \frac{2e^3}{3mc^3}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2}\left\{\left(\frac{\partial}{\partial t}+(\mathbf{v}\nabla)\right)\mathbf{E}+\frac{1}{c}\left[\mathbf{v}\left(\frac{\partial}{\partial t}+(\mathbf{v}\nabla)\right)\mathbf{H}\right]\right\}+ \\ &+\frac{2e^4}{3m^2c^4}\left\{[\mathbf{EH}]+\frac{1}{c}[\mathbf{H}[\mathbf{Hv}]]+\frac{1}{c}\mathbf{E}(\mathbf{vE})\right\}- \\ &-\frac{2e^4}{3m^2c^5\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}\mathbf{v}\left\{\left(\mathbf{E}+\frac{1}{c}[\mathbf{vH}]\right)^2-\frac{1}{c^2}(\mathbf{Ev})^2\right\}. \end{aligned}$$

(хз, проверить нужно это!! и как это вообще использовать???)

5.4.7 Spectral Decomposition of Radiation in the Ultrarelativistic Case

Суть (?)

Отношение углов отклонения и излучения как параметр, разделяющий рассматриваемые случаи

(точно это не понадобится, просто для структуры прописываю)

Выше было показано, что излучение ультрарелятивистской частицы направлено в основном вперед, вдоль скорости частицы: оно почти целиком заключено в малом интервале углов

$$\Delta\theta \sim \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

вокруг направления $\mathbf{v}$.

(укажу это в первой части тоже потом!!!)

Для вычисления спектрального разложения излучения существенно взаимоотношение между величиной этого интервала и полным углом отклонения α частицы при пролете через внешнее электромагнитное поле.

Угол α может быть оценен как:

$$\alpha \sim \frac{\Delta p_\perp}{p} \sim \frac{eF\cdot\frac{a}{c}}{p} \sim \frac{eFa}{mc^2}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

То есть мы считаем, что поперечное к направлению движения изменение импульса частицы порядка величины произведения поперечной силы eF на время пролета через поле $t \sim a/v \approx a/c$ где a - расстояние, на котором поле заметно отлично от нуля, и учитываем, что импульс $p = \frac{mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \approx \frac{mc}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$.

Разделив его на угол, в котором излучается поле $\Delta\theta$, найдем:

$$\frac{\alpha}{\Delta\theta} \sim \frac{eFa}{mc^2}$$

Обратим внимание на то, что это отношение не зависит от скорости частицы и целиком определяется свойствами самого внешнего поля.

Если $eFa \gg mc^2$ т.е. полный угол отклонения частицы велик по сравнению с $\Delta\theta$. Тогда мы можем утверждать, что излучение в заданном направлении происходит в основном с того участка траектории, на котором скорость частицы почти параллельна этому направлению (образует с ним угол в интервале $\Delta\theta$) и длина этого участка мала по сравнению с a.

На таком участке поле F можно считать постоянным, и поскольку малый участок кривой можно рассматривать как отрезок окружности, то мы можем применить результаты теории магнитно-тормозного излучения (заменив при этом H на F). В частности, можно утверждать, что основная часть излучения будет сосредоточена в области частот

$$\omega \sim \frac{eF}{mc\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}$$

см. ((74.16))

(про магнитно-тормозное тут отсылка, очень скоро посмотрю его!! пока хз.)

Спектральная интенсивность в случае $eFa \ll mc^2$

В обратном предельном случае $eFa \ll mc^2$ полный угол отклонения частицы мал по сравнению с $\Delta\theta$. В этом случае все излучение происходит в основном в один узкий интервал углов $\Delta\theta$ вокруг направления движения, определяясь при этом всей траекторией частицы.

Для вычисления спектрального разложения интенсивности в этом случае удобно исходить из выражения для поля в волновой зоне излучения в форме Лиенара-Вихерта (73.8).

Вычислим компоненту Фурье

$$\mathbf{E}_\omega = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E} e^{i\omega t} dt$$

где выражение в правой части есть функция запаздывающего момента времени $t' = t - R(t')/c$.

На больших расстояниях от частицы, движущейся с почти постоянной скоростью $\mathbf{v}$, имеем:

$$t' \approx t - \frac{R_0}{c} + \frac{1}{c}\mathbf{nr}\left(t'\right) \approx t - \frac{R_0}{c} + \frac{1}{c}\mathbf{nv}t'$$

($\mathbf{r} = \mathbf{r}\left(t'\right) \approx \mathbf{v}t'$ - радиус-вектор частицы), или

$$t = t'\left(1 - \frac{\mathbf{nv}}{c}\right) + \frac{R_0}{c}$$

Интегрирование по dt заменяем интегрированием по dt', положив

$$dt = \left(1 - \frac{\mathbf{nv}}{c}\right) dt'$$

(?? раве где-то раньше это уже не было выведено??)

Получаем:

$$\mathbf{E}_\omega = \frac{e}{c^2}\frac{e^{ikR_0}}{R_0\left(1-\frac{\mathbf{nv}}{c_c}\right)^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left[\mathbf{n}\left[\left(\mathbf{n}-\frac{\mathbf{v}}{c}\right)\mathbf{w}\left(t'\right)\right]\right]e^{i\omega t'\left(1-\frac{\mathbf{nv}}{c}\right)}dt'$$

Скорость $\mathbf{v}$ рассматривается здесь везде как постоянная величина; переменным является лишь ускорение $\mathbf{w}\left(t'\right)$.

Введя обозначение

$$\omega' = \omega\left(1-\frac{\mathbf{nv}}{c}\right)$$

и соответствующую этой частоте компоненту Фурье ускорения, напишем $\mathbf{E}_\omega$ в виде

$$\mathbf{E}_\omega = \frac{e}{c^2}\frac{e^{ikR_0}}{R_0}\left(\frac{\omega}{\omega'}\right)^2\left[\mathbf{n}\left[\left(\mathbf{n}-\frac{\mathbf{v}}{c}\right)\mathbf{w}_{\omega'}\right]\right]$$

(??!!!! тут никак не пойму, какими такими преобразованиями это получилось????)

Энергию, излученной в телесный угол do с частотой в $d\omega$ находим как всегда: $d\mathscr{E}_{\mathbf{n}\omega} = \frac{c}{2\pi}\left|\mathbf{H}_\omega\right|^2 R_0^2 do\frac{d\omega}{2\pi}$:

$$d\mathscr{E}_{\mathbf{n}\omega} = \frac{e^2}{2\pi c^3}\left(\frac{\omega}{\omega'}\right)^4\left|\left[\mathbf{n}\left[\left(\mathbf{n}-\frac{\mathbf{v}}{c}\right)\mathbf{w}_{\omega'}\right]\right]\right|^2 do\frac{d\omega}{2\pi}$$

Частоты, в которых находится основная часть излучения

(тут хз немного)

Оценку порядка величины частот, в области которых сосредоточена основная часть излучения в случае $eFa \ll mc^2$, легко сделать, заметив, что компонента Фурье $\mathbf{w}_{\omega'}$ заметно отлична от нуля лишь, если время $1/\omega' \equiv \frac{1}{\omega\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}$ будет того же порядка, что и время $a/v \sim a/c$, в течение которого заметным образом меняется ускорение частицы. Поэтому находим:

$$\omega \sim \frac{c}{a\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}$$

Зависимость этих частот от энергии такая же, как и в случае $eFa \gg mc^2$, в котором было $\omega \sim \frac{eF}{mc\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}$, но коэффициент иной.

Излучение при $eFa \ll mc^2$ в случае заметных изменений энергии

В произведенном (для обоих случаев (77.2) и (77.4)) исследовании подразумевалось, что полная потеря энергии частицей при ее прохождении через поле относительно мала.

Покажем теперь, что к первому из рассмотренных случаев приводится также вопрос об излучении ультрарелятивистской частицей, полная потеря энергии которой сравнима с ее первоначальной энергией.

Потерю энергии частицей в поле можно определить как работу силы лоренцева трения. Работа силы $f_x = -\frac{2e^4}{3m^2c^4}\frac{(E_y-H_z)^2+(E_z+H_y)^2}{1-\frac{v^2}{c^2}}$ на пути $\sim a$ есть, по порядку величины,

$$A = af \sim \frac{e^4F^2a}{m^2c^4\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}$$

Для того чтобы она оказалась сравнимой с полной энергией частицы $\mathcal{E} = mc^2/\sqrt{1-v^2/c^2}$, поле должно существовать на расстояниях

$$a \sim \frac{m^3c^6}{e^4F^2}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

Но тогда автоматически соблюдается условие (77.2):

$$aeF \sim \frac{m^3c^6}{e^3F}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \gg mc^2$$

поскольку поле F во всяком случае должно удовлетворять условию (76.5), без которого вообще не может применяться обычная электродинамика.

Спектральное распределение полной интенсивности излучения в ультрарелятивистском случае

Определить спектральное распределение полной (по всем направлениям) интенсивности излучения при ультрарелятивистском условии $eFa \gg mc^2$.

Излучение с каждого элемента длины траектории определяется формулой (74.13), в которой надо заменить H на значение F поперечной силы в данной точке и, кроме того, надо перейти от дискретного спектра частот к непрерывному.

Этот переход осуществляется формальным умножением на dn и заменой

$$I_n dn = I_n \frac{dn}{d\omega} d\omega = I_n \frac{d\omega}{\omega_0}$$

Интегрируя затем интенсивность по всему времени, найдем спектральное распределение полного излучения в следующем виде:

$$d\mathscr{E}_\omega = -d\omega \frac{2e^2\omega\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}{c\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\Phi'(u)}{u} + \frac{1}{2}\int\limits_u^\infty \Phi(u)du\right] dt$$

где $\Phi(u)$ - функция Эйри от аргумента $u = \left[\frac{mc\omega}{eF}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\right]^{2/3}$.

Подынтегральное выражение зависит от переменной интегрирования t неявным образом через величину $u(F$, а с ним и u, меняются вдоль траектории частицы; при заданном движении это изменение можно рассматривать как зависимость от времени).

Спектральное распределение полной излученной энергии

Определить спектральное распределение полной (по всем направлениям) излученной энергии при условии (77.4).

Имея в виду, что основную роль играет излучение под малыми углами к направлению движения, пишем:

$$\omega' = \omega\left(1-\frac{v}{c}\cos\theta\right) \approx \omega\left(1-\frac{v}{c}+\frac{\theta^2}{2}\right) \approx \frac{\omega}{2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}+\theta^2\right)$$

Интегрирование выражения (77.6) по углам $do = \sin\theta d\theta d\varphi \approx \theta d\theta d\varphi$ заменяем интегрированием по $d\varphi d\omega'/\omega$.

При раскрытии квадрата двойного векторного произведения в (77.6) следует иметь в виду, что в ультрарелятивистском случае продольная составляющая ускорения мала по сравнению с поперечной (в отношении $1-v^2/c^2$) и в данном случае с достаточной степенью точности можно считать w и $\mathbf{v}$ взаимно перпендикулярными.

В результате получим для спектрального распределения полного излучения следующую формулу:

$$d\mathscr{E}_\omega = \frac{e^2\omega d\omega}{2\pi c^3} \int\limits_{\frac{\omega}{2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)}^{\infty} \frac{|\mathbf{w}_{\omega'}|^2}{\omega^2}\left[1-\frac{\omega}{\omega'}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)+\frac{\omega^2}{2\omega'^2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^2\right] d\omega'$$

5.4.8 Some Other Radiations in Space

(тут укажу, какие вообще могут быть. пока хз, потом буду заполнять)

Part IV
Electromagnetic Properties of Media

(тут мощная теория, всякие основы давно разобраны в 2й части про основы)
(мб потом в другие разделы перенесу, хз, но тут акцент именно на динамику поля)

6 Chains and Currents: Basics

(main section about chains, there are a lot of applications, I'll discuss them later)

6.1 Chains: Basics

(????? below, there is a very bad theory, which should be rewritten)

6.1.1 Constant Current in a Conductor

(все азы общефиза тут)

Основные формулы

ток как движение зарядов

Пусть, например, перемещаться в проводнике могут только электроны - так это и происходит в металлах - и пусть в единицу времени через поперечное сечение провода проходит N электронов.

Тогда ток равен $I = Ne$. Направление тока по традиции определялось «от плюса к минусу», т.е.

в нашем примере оно как раз противоположно движению электронов.

Если же мы имеем дело сразу с несколькими сортами носителей заряда - как, например, в полупроводниках или электролитах, - то мы можем эту формулу обобщить:

$$I = \sum_{\alpha} N_\alpha Z_\alpha e$$

где α - сорт носителя, Z - его зарядовое число, e - заряд электрона (заметим, что для самого электрона $Z = -1$).

При этом за направление тока в соответствии с традицией принимается направление движения положительных носителей заряда.

Если нас интересует более детальная картина, мы вводим еще и плотность тока - величину, характеризующую распределение тока по сечению проводника:

$$j = \frac{d^2 q}{dS dt}; \quad \int j dS = I$$

Очевидно, единица плотности тока - 1 А/м ^{2}. Попробуем и длЯ этой величины получить аналог формулы (3.2).

Если концентрация данного сорта носителей равна n_α, а скорость их в направлениИ, принятом за направление тока, $-v_\alpha$, то в единицу времени единицу площади сечения проводника пересекут $n_\alpha v_\alpha$ частиЦ данного сорта (все частиЦы, заполняющие цилиндр с единичной площадью основания и высотой v_α).

Таким образом, сравнивая (3.2) и (3.3), приходим к следуюЩей формуле:

$$j = \sum_{\alpha} n_\alpha Z_\alpha v_\alpha e$$

Представляется естественным следующий шаг.

Откажемся от условия квазиодномерности проводника.

Пусть движение заряДов происходит в произвольной трехмерной проводящей среде.

В этом случае выражение для плотности тока принимает вид

$$\mathbf{j} = \sum_{\alpha} n_\alpha Z_\alpha \mathbf{v}_\alpha e$$

Теперь это - векторная величина.

Если единственный род носителей - электроны, то $\mathbf{j} = -ne\mathbf{v}$, где все величины в правой части относятся к электронам проводимости.

закон сохранения заряда

(общефиз)

(простая мелкая очевидная теория, но тем не менее, разберусь потом)

Изменение полноPhC Го заряда, заключенного внутри поверхности, может быть слевремени через границу (током):

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = -\int j_\perp dS = -\oint \mathbf{j} d\mathbf{S} = -\int \operatorname{div} \mathbf{j} dV$$

(мы преобразовали правую часть по теореме Гаусса).

Но и левая часть может быть представлена в виде объемного интеграла, поскольку $Q \equiv \int \rho dV$. Элемент объема может быть выбран совершенно произвольно, поэтому равенство интегралов влечет за собой равенство подынтегральных выражений.

Как следствие, получаем локальную (или дифференциальную) форму уравне- Уравнения (3.6), (3.7) и выражают в электродинамике закон сохранения заряда.

В математическом отношении они эквивалентны гидродинамическому уравнению непрерывности, что вполне естественно с точки зрения физики дела: в гидродинамике сохраняется масса вещества, а в электродинамике заряд.

Изменение любой из этих величин представимо в форме некоторого течения.

Теперь мы можем на новом уровне вернуться к приближению постоянного тока.

В общем случае трехмерного течения зарядов мы должны потребовать выполнения условий

$$\mathbf{j}(t) = \text{const}, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Из последнего, в частности, следует

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$$

Из последнего, в частности, следует

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$$

Условие (3.8) часто отождествляют с условием постоянства тока.

Но, как следует из нашего рассмотрения, оно является необходимым, но не достаточным.

Например, оно выполняется с высокой точностью для переменных, но квазистационарных токов (см.

главы 8,10), если в цепи нет конденсатора.

Особо следует отметить, что условие постоянства тока подразумевает равенство нулю временной производной плОТНОсти заряда, но не самой плотности заряда.

В неоднородных электрических цепях, а тем более при трехмерном протекании тока в среде, она вполне может быть отлична от нуля в отдельных точках или даже во всей проводящей среде.

Устанавливается такое возмущение нейтральности на нестационарной стадии, следующей непосредственно за включением тока.

В случае системы с сосредоточенными параметрами - электрической цепи, составленной из проводов однородного сечениЯ, - формулу (3.8) можно заметно упростить.

Считая радиус кривизны провода много большим его поперечных размеров, будем рассматривать проводник как квазиодномерный.

Тогда в (3.8) из всех производных остается только одна - по координате вдоль провода:

$$\frac{\partial j_{\parallel}}{\partial l} = 0$$

То же самое условие можно получить напрямую из постоянства полного тока в сечении:

$$I = \mathbf{const} = \int j_{\parallel} dS$$

откуда $j_{\parallel} = \text{const}$.

Если же проводник по длине неоднороден, из постоянства тока следует неинвариантность плотности тока она должна меняться обратно пропорционально сечению провода.

закон Ома

Теория

Рассмотрим стационарное движение зарядов в проводниках (постоянный электрический ток).

Будем обозначать среднюю плотность потока зарядов буквой j; ее называют плотность электрического тока. В постоянном токе пространственное распределение j не зависит от времени и подчиняется уравнению

$$\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$$

выражающему собой постоянство полного среднего заряда, заключенного в любой части объема проводника.

Электрическое поле, существующее внутри проводника, по которому течет постоянный ток, тоже постоянно, а потому удовлетворяет уравнению

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0$$

т.е. имеет потенциал.

К уравнениям (21.1) и (21.2) должно еще быть присоединено уравнение, связывающее между собой величины j и E. Эта связь зависит от свойств вещества проводника.

В огромном большинстве случаев ее можно считать линейной (закон Ома). Если проводник однороден и изотропен, то линейная зависимость сводится к простой пропорциональности

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$$

Коэффициент σ зависит от рода и состояния проводника; его называют коэффициентом электропроводности, или просто проводимостью тела.

(!?! кст, в 1й части все, что я про него знаю соберу, мб мы про него решали на кинетике задачи?)

В однородном проводнике $\sigma = \text{const}$ и подстановка (21.3) в (21.1) дает $\operatorname{div}\mathbf{E} = 0$. Поэтому в этом случае потенциал электрического поля удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta\varphi = 0$.

На границе раздела двух проводящих сред нормальная компонента плотности тока должна, очевидно, быть непрерывной.

Кроме того, согласно общему условию непрерывности тангенциальной компоненты напряженности (следующему из уравнения $\operatorname{rot}\mathbf{E} = 0$, ср. (1.7) и (6.9)) должно быть непрерывно отношение j/σ. Таким образом, граничные условия для плотности тока имеют следующий вид:

$$j_{n1} = j_{n2}, \quad \frac{\mathbf{j}_{t1}}{\sigma_1} = \frac{\mathbf{j}_{t2}}{\sigma_2}$$

или для напряженности поля

$$\sigma_1 E_{n1} = \sigma_2 E_{n2}, \quad \mathbf{E}_{t1} = \mathbf{E}_{t2}$$

На границе же проводника с непроводящей средой имеем просто $j_n = 0$ или $E_n = 0$). Электрическое поле, поддерживающее ток, производит над перемещающимися в проводнике заряженными частицами (носителями тока) механическую работу; работа, производимая в 1 с в единице объема, равна, очевидно, произведению jE.

Эта работа диссипируется в веществе проводника, переходя в тепло.

Таким образом, количество тепла, выделяющегося в 1 с в 1 см ^{3} однородного проводника, равно

$$\mathbf{jE} = \sigma E^2 = \frac{j^2}{\sigma}$$

(закон Джоуля-Ленца).

Выделение тепла приводит к возрастанию энтропии тела. При выделении тепла $dQ = \mathbf{jE}dV$ энтропия данного элемента объема увеличивается на dQ/T. Поэтому скорость изменения полной энтропии тела равна

$$\frac{d\,\mathbf{S}}{dt} = \int \frac{\mathbf{jE}}{T} dV$$

В силу закона возрастания энтропии эта производная должна быть положительной. Подставив в нее $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$, мы видим, что из этого требования можно сделать заключение о положительности проводимости σ.

В анизотропном теле (монокристалле) направления векторов $\mathbf{j}$ и $\mathbf{E}$, вообще говоря, не совпадают и линейная связь между ними выражается формулами вида

$$j_i = \sigma_{ik} E_k$$

где величины σ_{ik} составляют симметричный (см. ниже) тензор второго ранга (тензор проводимости).

Здесь необходимо сделать следующее замечание. Сама по себе симметрия кристалла могла бы допустить наличие свободного члена в линейной связи между $\mathbf{j}$ и $\mathbf{E}$, т.е. формулу вида

$$j_i = \sigma_{ik} E_k + j_i^{(0)}$$

с постоянным вектором $\mathbf{j}^{(0)}$. Наличие такого члена означало бы «пироэлектричность» проводника - в отсутствие тока ($\mathbf{j} = 0$) в нем существовало бы отличное от нуля поле. В

действительности, однако, это невозможно в силу закона возрастания энтропии: член $\mathbf{j}^{(0)}\mathbf{E}$ в подынтегральном выражении в (21.7) заведомо мог бы иметь оба знака, в результате чего $d\,\mathbf{S}/dt$ не могла бы быть существенно положительной величиной.

Подобно тому как в изотропной среде условие $d\,\mathbf{S}/dt > 0$ приводит к положительности σ, так в анизотропном теле из этого условия следует положительность главных значений тензора σ_{ik} Зависимость числа независимых компонент тензора от симметрии кристалла такая же, как у всякого симметричного тензора второго ранга (см.

§13): у двухосных кристаллов все три главных значения различны, у одноосных - два из них одинаковы, а у кубических - все три одинаковы, т.е.

кубический кристалл в отношении своих свойств проводимости ведет себя как изотропное тело.

Симметричность тензора проводимости

$$\sigma_{ik} = \sigma_{ki}$$

принадлежащего Л. Онсагеру, удобная для применения здесь и ниже. Пусть $x_1, x_2, \ldots$ - некоторые величины, характеризующие состояние тела в каждой его точке.

Наряду с ними вводим величины

$$X_a = -\frac{\partial S}{\partial x_a}$$

Где S - энтропия единицы объема тела, а производная берется при постоянной энергии этого объема.

В состоянии, близком к равновесному, величины x_a близки к своим равновесным значениям, а величины X_a малы. При этом в теле будут происходить процессы, стремящиеся привести его в состояние равновесия.

О скоростях изменения величин x_a при этих процессах можно обычно утверждать, что они являются в каждой точке тела функциями только значений величин x_a (или X_a) в тех же точках.

Разлагая эти функции в ряд по степеням X_a и ограничиваясь линейными членами в разложении, получим соотношения вида

$$\frac{\partial x_a}{\partial t} = -\sum_b \gamma_{ab} X_b$$

Тогда можно утверждать, что коэффициенты γ_{ab} (кинетические коэффициенты симметричны по индексам a и):

$$\gamma_{ab} = \gamma_{ba}$$

Для фактического использования этого принципа необходимо, выбрав тем или иным способом величины x_a (или прямо их производные $\dot{x}_a$), определить соответствующие X_a. Эта задача обычно может быть весьма просто решена с помощью формулы, определяющей скорость изменения со временем полной энтропии тела:

$$\frac{d\,\mathbf{S}}{dt} = -\int \sum_a X_a \frac{\partial x_a}{\partial t} dV$$

где интегрирование производится по всему объему тела.

В данном случае при прохождении тока через проводник для этой скорости мы имеем формулу (21.7). Сравнивая ее с (21.13), мы видим, что если в качестве величин $\dot{x}_a$ выбрать компоненты вектора плотности тока j, то соответствующими величинами X_a будут компоненты вектора - $\mathbf{E}/T$. Сравнение же формул (21.8) и (21.11) показывает, что роль кинетических коэффициентов играют при этом умноженные на T компоненты тензора проводимости, симметрия которого следует, таким образом, непосредственно из общих соотношений (21.12).

ЦПН-?

В проводящую среду погружена система электродов, поддерживаемых при постоянных потенциалах φ_a. С каждого из электродов стекает ток J_a. Определить полное джоулево тепло, выделяющееся в среде в 1 секунду.

(?? просуммировать просто не вариант? пока не разбираюсь.)

Искомое тепло Q дается интегралом

$$Q = \int \mathbf{j}\mathbf{E}dV = -\int \mathbf{j}\nabla\varphi dV = -\int \operatorname{div}(\varphi\mathbf{j})dV$$

взятым по объему среды.

Преобразуем этот интеграл в интеграл по поверхности, учитывая, что на внешней границе среды $j_n = 0$, а на поверхностях электродов $\varphi = \text{const} \equiv \varphi_a$. В результате получим

$$Q = \sum_a \varphi_a J_a$$

ЦПН-? Проводящая сфера с втекающим и вытекающим током (!?)

Определить распределение потенциала в проводящей сфере, в которую ток J входит через один полюс и выходит через противоположный.

Вблизи полюсов O и O' (рис. 15) потенциал соответственно должен иметь вид

$$\varphi = \frac{J}{2\pi\sigma R_1} \text{ и } \varphi = -\frac{J}{2\pi\sigma R_2}$$

где R_1, R_2 - расстояния до полюсов.

Эти функции удовлетворяют уравнению Лапласа, а интегралы $-\sigma\int\nabla\varphi d\mathbf{f}$ по бесконечно малым полусферам

вокруг точек O и O' равны $\pm J$. Ищем потенциал в произвольной точке P сферы в виде

$$\varphi = \frac{J}{2\pi\sigma}\left\{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \psi\right\}$$

где ψ есть решение уравнения Лапласа, не имеющее полюсов внутри сферы и на ее поверхности.

Из симметрии очевидно, что ψ (как и φ) есть функция только сферических координат r и θ. На поверхности сферы ($r = a$) должно быть $\partial\varphi/\partial r = 0$. Произведя дифференцирование, найдем отсюда для ψ следующее граничное условие:

$$\frac{\partial\psi}{\partial r} = \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \text{ при } r = a.$$

Если $f(r,\theta)$ есть какое-либо решение уравнения

Лапласа, то функция $\int\limits_0^r r^{-1}f(r,\theta)dr$ тоже есть решение).

Сравнивая с написанны м граничным условием, легко прийти к заключению, что ему удовлетворяет решение

$$\psi = \frac{1}{2}\int\limits_0^r\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)\frac{dr}{r}$$

Подставив $R_{1,2} = \left(a^2 + r^2 \mp 2ar\cos\theta\right)^{1/2}$ и произведя интегрирование, получим окончательно

$$\varphi = \frac{J}{2\pi\sigma}\left\{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{2a}\left(\operatorname{Arsh}\frac{a + r\cos\theta}{r\sin\theta} - \operatorname{Arsh}\frac{a - r\cos\theta}{r\sin\theta}\right)\right\}$$

(φ отсчитывается от значения $\varphi = 0$ при $r = 0$).

ЦПН-? распределение тока в проводящей среде отвечает минимуму диссипации энергии

Показать, что распределение тока в проводящей среде отвечает минимуму диссипации энергии.

Речь идет о минимуме интеграла $\int \mathbf{j}\mathbf{E}dV = \int \frac{\mathbf{j}^2}{\sigma}dV$ при дополнительном условии $\operatorname{div}\mathbf{j} = 0$, выражающем сохранение заряда.

Варьируя по j интеграл

$$\int \left(\frac{\mathbf{j}^2}{\sigma} - 2\varphi \operatorname{div}\mathbf{j}\right) dV$$

)2φ - лагранжев неопределенный множитель) и приравнивая вариацию нулю, получим уравнение $\mathbf{j} = -\sigma\nabla\varphi$ или

$$\operatorname{rot}\frac{\mathbf{j}}{\sigma} = 0$$

совпадающее с уравнениями (21.2) и (21.3).

(пока хз, ничего не усвоил.)

LR-контур

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = -L\frac{dJ}{dt} \tag{6.1}$$

$$J = \frac{\mathcal{E} + \mathcal{E}_{\text{инд}}}{R} \tag{6.2}$$

$$L\frac{dJ}{dt} + JR = \mathcal{E} \tag{6.3}$$

$$J(t) = \frac{\mathcal{E}}{R}\left(1 - \exp\left(-\frac{R}{L}t\right)\right) \tag{6.4}$$

модуляция????

6.1.2 Oscillating Circuit

суть

Theory

Подробное рассмотрение свойств колебательного контура еще предстоит в следующем разделе нашего курса, но и в курсе электродинамики невозможно оставить без внимания этот фундаментальный объект.

Электрическая схема колебательного Контура представлена на рис. 8.2.

При этом подразумевается, что в сопротивление R включены не только резистивные элементы схемы (если они вообще существуют), но и «паразитное» сопротивление катушки индуктивности и соединительных проводов.

При последовательном соединении элементов контура такое объединение вполне корректно.

Равным образом «паразитная» емкость катушки включена в Вывод уравнения колебательного контура полезно предварить следующим замечанием.

Если в схему включен источник ЭДС, то его можно включить в закон Ома или второй закон Кирхгофа как резистивный элемент, при том, что падение напряжения на нем должно быть равно -$\mathscr{E}$.

Поэтому и уравнение контура, изображенного на рис. 8.2, можно представить в виде закона Кирхгофа с нулевой ЭДС на обходе:

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = 0$$

(Мы учли, что заряд на обкладках и ток в контуре связаны соотношением $I = dQ/dt$.) Возможна эквивалентная форма:

$$L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C}\int Idt = 0$$

Дифференцируя (8.7) по времени, получаем снова уравнение (8.6), но уже для тока, $Q \to$ I.

Таким образом, динамика контура в любом случае описывается дифференциальным уравнением второго порядка

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\Delta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

где x - переменная величина (например, Q, I), $\Delta = R/(2L)$, $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$. Уравнение (8.8) представляет собой линейное дифференци- альное уравнение второго порядка.

Известны методы получения его решения; последнее в общем случае зависит от двух произ- вольных констант.

В конкретной физической задаче эти константы доопределяются через начальные условия.

Ввиду исключительной важности «колебательной» терминологии и понятийной системы для всего курса физики, мы уделим особое внимание свойствам решений уравнения (8.8).

Начнем с предельного случая нулевой диссипации $R \to 0 \to \to \Delta \to 0$. Уравнение (8.8) в этом случае вырождается в простое урав- нение гармонических колебаний, решение которого, включающее произвольные константы A, B или A, φ, может быть представлено одной из следующих эквивалентных форм:

$$x = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t; \quad x = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$$
$$x = A\sin(\omega_0 t + \varphi); \quad x = Ae^{i\omega_0 t} + Be^{-i\omega_0 t}$$

Эквивалентность последнего выражения трем предыдущим обусловлена известными соотношениями - формулами Эйлера:

$$\cos\omega t = \frac{1}{2}\left(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}\right); \quad \sin\omega t = \frac{1}{2i}\left(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}\right)$$

$e^{i\omega t} = \cos\omega t + i\sin\omega t$ Такое представление осциллирующих функций экспонентами от мнимого аргумента, как мы вскоре убедимся, есть наиболее конструктивный метод описания волновых и колебательных процессов.

Коэффициенты A, B называются амплитудными, а величина φ, "сдвигающая» начало отсчета времени, именуется ϕa зой; фазой называют также и полный аргумент осциллирующих функций $\omega_0 t + \varphi$.

Решение полного уравнения (8.8) отличается от этих чисто гармонических функций лишь учетом диссипации.

В самом общем виде оно содержит две произвольные константы и может быть представлено, например, следующим образом:

$$x = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t}$$

где $p_{1,2}$ суть корни алгебраического уравнения

$$p^2 + 2\Delta \cdot p + \omega_0^2 = 0$$

В случае достаточно слабой диссипации решения (8.9) не должны сильно отличаться от чисто колебательных.

Тогда корни $p_{1,2}$ оказываются комплексными величинами, так что мы можем, используя формулы Эйлера, записать решение в эквивалентной форме:

$$x = Ae^{-\Delta t}\cos(\omega t + \varphi)$$

здесь A - амплитуда, φ - фаза колебательного решения, $\omega = (\omega_0^2 - \Delta^2)^{1/2}$. Сразу видно, что при $\Delta < \omega_0$ решение, действительно, оказывается осциллирующим во времени.

В обратном случае оно представляет собой монотонно затухающую функцию, которую лучше всего представлять именно в виде (8.9).

Величина $\Delta = R/(2L)$ называется декрементом затухания; по физическому смыслу это обратное время затухания колебаний В $e = 2,718\ldots$ раз.

Если $\Delta \ll \omega_0$, колебания можно считать почти периодическими, подобно приведенным выше решениям для уравнения гармонических колебаний.

Это неравенство удобно переписать как условие для характерных времен:

$$RC \ll \frac{L}{R} \quad \text{или просто} \quad R \ll \sqrt{\frac{L}{C}}$$

При этом $\omega \approx \omega_0$. При условии (8.12) корни уравнения (8.10) оказываются непременно комплексными, а с ними и решения (8.9).

Надлежащим выбором констант интегрирования они «привязыва- ются» к вещественным начальным условиям; соответственно, ре- шение (8.11) представлено в формально вещественном виде.

Но такое представление оказывается не слишком удобным.

Приме- няя к той или иной осциллирующей функции линейные операции дифференцирования либо интегрирования, мы всегда вынуждены будем превращать sin в cos и наоборот, да еще и с учетом знака; дополнительно усложняет как процедуру, так и ответ экспонента, модулирующая в (8.11) тригонометрическую функцию.

Намного проще та же операция с чисто экспоненциальными функциями типа (8.9).

Экспонента при дифференцировании или интегриро- вании просто умножается на постоянный множитель, каждый раз один и тот же.

С другой стороны, как мы уже видели, cos представляет собой функционально вещественную часть экс- поненты (а sin — мнимую), поэтому в линейной задаче (пока решения не приходится перемножать, возводить в степень и т.

д.) их нетрудно поставить во взаимно однозначное соответствие. Таким образом, решение типового уравнения (8.8) ищется в виде

$$x = A\exp(i\omega t - \Delta t + \varphi)$$

а затем физические величины (I, U) получают, взяв от него только вещественную или только мнимую часть.

Чаще всего в этом даже нет необходимости, поскольку амплитуда и фаза, определенные из начальных условий, полностью описывают колебательный процесс.

При дифференцировании решения (8.13) последнее просто умножается на $(i\omega - \Delta)$, при интегрировании - делится на ту же величину.

Из соотношения

$$i \equiv e^{i\pi/2}$$

следует, что при умножении или делении на мнимую единицу полная фаза меняется на $\pi/2$ - это как раз и соответствует переходу синуса в косинус и наоборот.

При необходимости работать с квадратичными величинами (как-то энергия колебаний) представление (8.13) уже не годится, но экспоненциальную форму решения можно сохранить, заменив (8.13) следующим - уже вполне точным - решением:

$$X = \frac{1}{2}\left(x + x^*\right)$$

где звездочка - знак комплексного сопряжения.

Подобно тому, как у механического маятника сумма потенциальной и кинетической энергий есть величина постоянная (в пренебрежении диссипацией!), а средние их значения по периоду равны, длЯ колебательного контура при $\Delta \ll \omega_0$ имеют место следующие

соотношения:

$$\frac{L}{2}\left\langle I^2\right\rangle_T = \frac{C}{2}\left\langle U^2\right\rangle_T; \quad \frac{LI^2}{2} + \frac{CU^2}{2} = W = \text{ const.}$$

Читателю предлагается самому убедиться в справедливости (8.14); заметим, что, помимо данного выше рецепта, можно пользоваться и тригонометрическим представлением (8.11) вместе с известными свойствами средних:

$$\left\langle \cos^2 \omega t\right\rangle_T \equiv \frac{\omega}{2\pi}\int\limits_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} \cos^2 \omega t dt = \left\langle \sin^2 \omega t\right\rangle_T = \frac{1}{2}$$

При учете конечной величины затухания получаем $W \propto \exp(-2\Delta t)$. Как характеристика малости затухания часто используется величина, именуемая в теории колебаний добротностью (обозначение - Q, от английского quality).

По определению

$$Q = \frac{\omega_0}{2\Delta} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\sqrt{RC}}\sqrt{\frac{L}{R}}$$

В любой из этих формул подразумевается, что добротность характеристика колебательного контура.

На самом деле это понятие гораздо шире, а потому мы приведем его к более универсальному виду.

Пусть W - запас энергии в контуре.

Оценим потери энергии за период, считая диссипацию слабой: $\Delta \ll \omega$.

$$\Delta_T W = W\left(1 - e^{-2\Delta\cdot T}\right) \approx W \cdot 2\Delta \cdot T = \frac{2\pi W}{Q}$$

Таким образом, добротность, с точностью до коэффициента это обратное отношение энергии, запасенной в колебательной системе, к ее потерям за период:

$$Q = \frac{2\pi W}{\Delta_T W}$$

6.1.3 Forced Oscillations with Alternating Current

суть

Theory

Емкостные и индуктивные элементы можно включать в цепь так, как если бы это были сопротивления, но, в отличие от последних, падение напряжения на них в зависимости от тока задается не умножением, а другими линейными операциями:

$$U_C = \frac{1}{C}\int I(t)dt; \quad U_L = L\frac{dI}{dt}$$

Поэтому, например, для случая гармонической функции $I(t)$ падение напряжения на конденсаторе или катушке индуктивности, помимо амплитудного коэффициента, характеризуется также фазовым сдвигом $\Delta\varphi = \pm\pi/2$. Такие элементы называются реактивными, в отличие от активного элемента - сопротивления. (Строго говоря, любой соленоид, если только он не сверхпроводящий, обладает активным сопротивлением, так что и сдвиг фаз оказывается меньше $\pi/2$.) Главное свойство чисто реактивного элемента состоит в том, что синусоидальный ток проходит его без энергетических потерь.

В самом деле, подсчитаем выделение энергии в среднем за период:

$$\langle \dot{W} \rangle = \frac{\omega}{2\pi}\int\limits_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} I(t)U(t)dt \propto \int\limits_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} \cos\omega t \sin\omega t dt = 0$$

В общем случае синусоидальных тока и напряжения, сдвинутых по фазе на φ:

$$I = I_0\cos\omega t; \quad U = U_0\cos(\omega t + \varphi)$$

среднее энерговыделение равно

$$\langle \dot{W} \rangle = \frac{\omega}{2\pi}\int\limits_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega} I(t)U(t)dt = \frac{1}{2}I_0U_0\cos\varphi$$

видим, что знак сдвига фазы не имеет значения. Это вполне физично, поскольку «опережение» или «отставание» по фазе суть понятия условные и зависят, например, от принятого в определении (8.13) знака частоты.

Так же легко понять, что, пока и поскольку мы не включаем явно в нашу цепь динамомашину, ограничиваясь пассивными элементами R, L, C, сдвиг фазы не может превышать $\pi/2$, точнее, при произвольном определении момента включения, он обязан принадлежать интервалу $[(2n - 1/2)\pi; (2n + 1/2)\pi]$, где n - любое натуральное число. В противном случае энергия в цепи не рассеивалась бы, а порождалась.

(?? выше не совсем пока понимаю.)

В частном случае активного сопротивления (8.18) дает

$$\langle \dot{W} \rangle = \frac{1}{2}I_0U_0 \equiv R\left\langle I^2 \right\rangle_T = \frac{\langle U^2 \rangle_T}{R}$$

Это соотношение принято привязывать к формуле (3.13) и таким образом определять эффективное напряжение сети; например, стандартному напряжению $U_{\text{эф}} = 220$ В соответствует амплитуда синусоидального напряжения $U_0 = \sqrt{2U_{\text{эф}}^2} \approx 311$ В.

Так же определяется и эффективное значение тока - как постоянный ток, эквивалентный данному переменному по тепловому эффекту; соответственно, $I_{\text{эф}} = I_0/\sqrt{2}$

Предположим, что мы имеем дело с цепочкой, изображенной на рис. 8.2, но теперь в контур последовательно включен источник синусоидальной ЭДС, так что, в отличие от (8.6), (8.7), динамика тока в цепи определяется уравнением:

$$L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C}\int I dt = \mathscr{E}_0 e^{i\Omega t}$$

Как уже говорилось, решение линейного уравнения с правой частью может быть представлено как сумма любого частного решения, удовлетворяющего этому уравнению, и общего решения однородного уравнения (т.е. без правой части); последнее в случае уравнений второго порядка зависит от двух произвольных констант, согласующих его с начальным моментом времени.

Действительно, пусть $I_1(t)$ и $I_2(t)$ - два решения (8.19), тогда разность $I_1(t) - I_2(t)$ должна быть, в силу линейности, решением уравнения (8.7).

Общее решение однородного уравнения можно взять в форме (8.11); оно с течением времени будет затухать.

Характерное время затухания $\tau \sim 1/\Delta$. Частное решение будем искать в виде незатухающих колебаний с частотой приложенного напряжения

$$I(t) = I\exp(i\Omega t); \quad I = I_0 e^{i\varphi}$$

Аналогичная зависимость от времени должна получиться для падения напряжения на любом элементе, заряда конденсатора и прочих динамических величин.

Ради удобства последующих операций мы полагаем величину I в (8.20) комплексной - помимо собственно амплитуды I_0 в нее входит и сдвиг фаз φ по отношению к внешней ЭДС.

Подставляя (8.20) в (8.19), убеждаемся, что оно и в самом деле является решением.

Комплексную амплитуду тока можно получить из уравнения

$$I\left(i\Omega L + R + \frac{1}{i\Omega C}\right) = \mathscr{E}_0$$

Нетрудно усмотреть прямую связь с формулами (8.17) получился просто закон Ома в частном случае синусоидального напряжения и тока.

Но теперь мы можем грамотно ответить на вопрос о процессе установления тока при включении внешней ЭДС, тем более важный, что фаза $\mathscr{E}(t)$ в момент включения не определена.

Итак, включение переменного тока сопровождается «звоном» собственных колебаний контура, затухающим с характерным временем $1/\Delta$. Именно эти колебания обеспечивают согласование цепи с фазой источника.

Если же мы, как обычно в электротехнике, интересуемся установившимися колебаниям при $t \gg 1/\Delta$, то можно использовать закон Ома, приписав пассивным элементам следующие комплексные сопротивления (такое «сопротивление» принято называть импедансом):

$$Z_L = i\Omega L; \quad Z_R = R; \quad Z_C = \frac{1}{i\Omega C}$$

Выражения для тока

$$I = \frac{\mathscr{E}_0}{R + i(\Omega L - 1/(\Omega C))}$$

дает амплитуду

$$I_0 = (II^*)^{1/2} = \frac{\mathscr{E}_0}{\sqrt{R^2 + (\Omega L - 1/(\Omega C))^2}}$$

и фазы

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\operatorname{Im} I}{\operatorname{Re} I} = \frac{\Omega L - 1/(\Omega C)}{R}$$

Метод векторных диаграмм

(тут по идее все о нем будет. или в другое место унесу теорию. много про него вопросов было, соберу тут их!!!! чего в диффурах это не прописано еще??)

Полученные нами ответы допускают удобную графическую интерпретациюи, в принципе, их можно получать именно графически. Это так называемый метод векторных диаграмм.

Интересующий нас случай демонстрируется на рис. 8.3.

Представим каждый ток и каждое напряжение вектором, которому

В полярных координатах соответствуют модуль (амплитуда) и полярный угол (фаза).

Зададим пронзвольно направление вектора I, а длина его задает масштаб.

Напряжение U_R синфазно току, соответственно, откладываем $U_R = IR$ параллельно вектору I.

Напряжение $U_L = \Omega LI$ откладывается перпендикулярно I с опережением по фазе (соответственно мнимой единице в коэффициенте), а $U_C = I/(\Omega C)$ - с отставанием.

Сумма всех трех векторов напряжения даст вектор $\mathscr{E}$, так что из рисунка можно определить и фазу, и - по отношению масштабов длины - модуль импеданса $|Z| = \mathscr{E}_0/I_0$. Для простой схемы графический метод не дает существенных преимуществ в сравнении, например, с формулами (8.22), (8.23), но для сложных многосвязных схем такой анализ может быть заметно легче алгебраических вычислений.

Предположим, что мы при заданной амплитуде $\mathscr{E}_0$ варьируем частоту внешней ЭДС Ω.

Резонанс напряжений

Из (8.22), а еще нагляднее из рис. 8.3 - можно усмотреть, что при $U_L = U_C$ (по модулю) отклик - амплитуда тока - будет максимален, т.е. имеет место резонанс.

При последовательном соединении элементов он называется резонансом напряжений.

Резонансная частота оказывается равной как раз собственной частоте контура без учета диссипации $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$. На этой частоте сопротивление цепи - чисто активное, $Z_{\text{рез}} = R$.

Кривая отклика $I(\Omega)$ показана на рис. 8.4.

(Вблизи резонансной частоты она обычно так и называется резонансной кривой.) Чтобы сравнивать резонансные кривые различных контуров, принято сравнивать их ширину на уровне отклика составляющего $1/\sqrt{2}$ от максимума.

Определим, какому сдвигу частоты этот уровень соответствует, полагая $\Delta\Omega \ll \omega_0$:

$$\frac{I_{\max}}{I(\omega_0 \pm \Delta\Omega)} = \sqrt{2} = \frac{1}{R}\sqrt{R^2 + \left(L(\omega_0 + \Delta\Omega) - (\omega_0 + \Delta\Omega)^{-1} C^{-1}\right)^2}$$

Вспоминая определение добротности (8.15), эту формулу можно привести к следующему виду:

$$\sqrt{2} \approx \sqrt{1 + (\Delta\Omega/\omega_0)^2 \left(\frac{1}{\omega_0 RC} + \frac{\omega_0 L}{R}\right)^2} = \sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{2\Delta\Omega}{\omega_0}\right)^2}$$

Окончательный ответ:

$$\Delta\Omega = 2\Delta\Omega = \frac{\omega_0}{Q}$$

Отсюда можно понять, почему добротности присвоен столь «значащий» термин.

Резонанс токов

Еще один вид резонанса - его называют резонансом токов - представлен на рис. 8.5a, б.

Для простоты будем считать сопротивление катушки индуктивности пренебрежимо малым. В этом предельном случае результат можно получить без вычислений, на основе лишь векторной диаграммы 8.5 б.

На параллельно соединенных элементах общим должно быть напряжение, а токи I_C и I_L, соответственно, опережая и

отставая по фазе на $\pi/2$, вычисляются по уже известному нам рецепту.

И если $I_J = I_C$ - это получается при $\Omega = 1/\sqrt{LC}$, - то при отличном от нуля напряжении ток в неразветвленном участке цепи равен нулю.

В действительности при учете активного сопротивления получается просто более или менее острый минимум тока, при этом импеданс цепи опять соответствует чисто активному сопротивлению.

Как пример отклика электрической цепи на несинусоидальную переменную ЭДС рассмотрим цепочки, изображенные на рис. 8.6.

На входные клеммы подается некоторый сигнал (t) с характерным временем эволюции τ. Можно для оценок пользоваться также характерной частотой в спектре сигнала $\omega \sim \tau^{-1}$.

Отклик - напряжение - снимается с выходных клемм, как показано на рисунках; предполагается, что сопротивление измерительного прибора столь велико, что он не вносит заметного вклада в уравнение цепи.

Тогда динамика цепочек рис. 8.6$a, 6$ описывается уравнением

$$L\dot{I} + RI = \mathscr{E}(t)$$

а) Если $RI \ll L\dot{I}$, т.е. $L/R \gg \tau$, то $\dot{I} \approx \mathscr{E}(t)/L \to I \approx \approx L^{-1}\int \mathscr{E}(t)dt$, таким образом, с сопротивления будет снят сигнал

$$U_R \propto I \propto \int \mathscr{E}(t)dt$$

б) В обратном случае $L/R \ll \tau$ получаем $I \approx \mathscr{E}(t)/R$. Снимая сигнал с индуктивности, имеем

$$U_L \propto \dot{I} \propto \frac{d\mathscr{E}(t)}{dt}$$

В свою очередь, цепочкам рис. 8.6 в, г отвечает уравнение:

$$R\dot{Q} + \frac{Q}{C} = \mathscr{E}(t)$$

в) Если $RI \gg Q/C$, т.е. $RC \gg \tau$, то $I \approx \mathscr{E}(t)/R$, и с конденсатора можно снять сигнал

$$U_C \propto Q \propto \int \mathscr{E}(t)dt$$

е) При обратном соотношении $RC \ll \tau$ получаем $Q \approx C\mathscr{E}(t)$ соответственно сигнал с сопротивления -

$$U_R \propto \dot{Q} \propto \frac{d\mathscr{C}(t)}{dt}$$

Мы рассмотрели все четыре случая, базируясь на оценках, но те же результаты можно получить и более строго на основе фурье-разложения сигнала.

Цепочки а, в на рис. 8.6 называют интегрирующими, а б, г — дифференцирующими. (Разумеется, при этом важна не только схема включения, но и соотношения характерных времен, заданные выше.) Их часто используют в качестве элементов различных измерительных схем.

Конечно, точность выполняемых ими операций не слишком высока — как и у всех вообще аналоговых систем — зато они очень просты.

6.1.4 Vector Diagram Method

проработаем его.

Суть метода векторных диаграмм

Свойства объектов, к которым он применим

интересно, где еще можно его применить?

Обзор применений

вот кст нужен нередко, не пойму, насколько часто.

6.1.5 Fourier Analysis of Oscillations in Circuits

пока я ничего не помню...
мда...

6.1.6 Contact Potential Difference

Theory

Для того чтобы удалить из проводника через его поверхность заряженну ю частицу, необходимо произвести над ней определенную работу.

Работой выхода называют работу, которая должна быть произведена над, частицей, если ее удаление совершается термодинамически обратимым образом.

Эта величина всегда положительна, как это следует непосредственно из того, что точечный заряд притягивается ко всякому нейтральному телу, в том числе ко всякому проводнику (см. $ 14).

Обозначим эту работу как **eW**, где e - заряд частицы; знак определенного таким образом потенциала выхода W совпадает со знаком заряда удаляемой частицы.

Работа выхода зависит как от рода проводника (и его термодинамического состояния - температуры, плотности), Так и от рода заряженной частиц,ы.

Например, у одного и того же металла работа выхода различна при удалении заряда в виде электрона проводимости или при удалении иона с его поверхности.

Необходимо также подчеркнуть, что работа выхода является величиной, характеризующей поверхность проводника.

Поэтому она зависит, например, и от способа обработки и степени «Загрязнения» поверхности.

Если проводник представляет собой монокристалл, то работа выхода различна и для разных его граней.

Для уяснения физической природы зависимости работы выхода от свойств поверхности установим ее связь с электрической структурой поверхностного слоя вещества.

Понимая под $\rho(x)$ плотность зарядов, не усредненную по физически бесконечно малым элементам длины вдоль оси x (перпендикулярной к плоскости слоя), пишем уравнение Пуассона в поверхностном слое:

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = -4\pi\rho$$

Пусть области проводника соответствуют $x < 0$. Интегрируя один раз, получим

$$\frac{d\varphi}{dx} = -4\pi \int\limits_{-\infty}^{x} \rho dx$$

после чего следующее интегрирование производим по частям:

$$\varphi - \varphi_{-\infty} = -4\pi x \int\limits_{-\infty}^{x} \rho dx + 4\pi \int\limits_{-\infty}^{x} x\rho dx$$

При $x \to \infty$ интеграл $\int\limits_{-\infty}^{x} \rho dx$ весьма быстро стремится к нулю (ввиду электронейтральности поверхности незаряженного проводника).

Поэтому

$$\varphi(+\infty) - \varphi(-\infty) = 4\pi \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\rho dx$$

Интеграл, стоящий в правой части равенства, представляет собой дипольный момент зарядов, распределенных вблизи поверхности тела.

Это распределение имеет характер двойиого слоя, в котором заряды противоположного знака разделены так, что дипольный момент системы отличен от нуля.

Структура двойного слоя,

разумеется, зависит от свойств поверхности (ее кристаллографрического направления, загрязнений и Т.

П.).

Разность же потенциалов Выхода с различных поверхностей Ланного проводника определяется разницей их дипольных моментов.

Если два различных проводниКа приведены в соприкосновение Друг с другом, то между ними моЖет происходить обмен заряженНыми частицами.

При этом заряды будут переходить от тела с меньШей к телу с большей работой выхода до тех пор, пока между обоими проводниками не установится разность потенциалов, препятствующая переходу зарядов Так называемая контактная разность потенциалов.

На рис. 16 изображен поперечный разрез двух соприкасающхся проводников (a и b) вблизи их свободных поверхностей AO и ОВ.

Потенциалы этих поверхностей обозначим соответственно как φ_a и φ_b; контактная разность потенциалов есть разность $\varphi_{ab} = \varphi_b - \varphi_a$. Количественная связь между этой разностью и работами выхода устанавливается условием термодинамического равновесия.

Рассмотрим работу, которая должна была бы быть произведена над частицей с зарядом e для того, чтобы удалить его из проводника a через поверхность АО, затем перенести его К поверхности OB и, наконец, ввести внутрь проводника b; в состоянии термодинамического равновесия эта работа должна быть равна нулю [1)] .

Работы, производимые над, частицей на каждом из указанных трех этапов пути, равны соответственно eW_a $e(\varphi_b - \varphi_a)$ и $-eW_b$. Приравняв их сумму нулю, найдем искомое соотношение

$$\varphi_{ab} = W_b - W_a$$

Таким образом, контактная разность потенциалов между соседними свободными поверхностями двух соприкасающихся проводников равна разности их потенциалов выхода.

Следствия (???)

Наличие контактной разности потенциалов приводит к появлению электрического поля в пространстве вне проводников.

Не представляет труда определить это поле вблизи места соприкосновения. В небольшой области вблизи линии соприкосновения (точка O на рис. 16) пересекающиеся стороны проводников можно рассматривать как плоские.

Потенциал поля вне проводников удовлетворяет уравнению

$$\Delta\varphi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} = 0$$

(r, θ - полярные координаты с началом в точке O), а на сторонах AO и OB должен принимать заданные постоянные значения.

При этом нас интересует решение, содержащее наиболее низкую степень r: оно будет представлять собой главный член разложения потенциала по степеням малого расстояния r. Таким реше-

нием является $\varphi = \text{const} \cdot\theta$. Отсчитывая угол θ от стороны AO и приняв ее потенциал условно равным нулю, получим

$$\varphi = \frac{\varphi_{nb}}{\alpha}\theta$$

где α - угол AOB. Таким образом, эквипотенциальными линиями (в плоскости рисунка) являются прямые лучи, расходящиеся от точки O.

Соответственно силовые линии представляют собой семейство дуг окружностей с центром в точке O. Напряженность поля равна

$$E = -\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = -\frac{\varphi_{ab}}{\alpha}\frac{1}{r}$$

т.е. убывает обратно пропорционально расстоянию от точки O.

Как уже указывалось, «контактные» разности потенциалов существуют и между различными гранями металлического монокристалла.

Поэтому электрическое поле описанного выше характера должно существовать и вблизи ребер кристалла [1]).

Если имеется ряд последовательно соединенных металлических проводников (находящихся при одинаковой температуре), то разность потенциалов между крайними проводниками равна (как это легко заключить на основании формулы (23.1)) просто разности их потенциалов выхода, как и для двух непосредственно соприкасающихся проводников.

В частности, если на обоих Концах цепи находятся одинаковые металлы, то разность потенциалов между ними равна нулю.

Это обстоятельство, впрочем, уже заранее очевидно: если бы между одинаковыми проводниками существовала разность потенциалов, то при замыкании цепи в ней возник бы ток, в противоречии со вторым началом термодинамики.

6.1.7 Galvanic Cell (???)

(какое?) Сделанное в конце предыдущего параграфа замечание теряет свою силу, если в цепи участвуют проводники с носителями тока различной природы (металлы и растворы электролитов).

суть

Theory

В связи с различием работ выхода одного и того же проводника по отношению к различным заряженным частицам (электронам и ионам) сумма всех контактных разностей потенциалов в цепи здесь отлична от нуля даже при одинаковых проводниках на обоих ее концах.

Эту сумму называют действующей в цепи электродвижущей силой (ЭДС); она представляет собой не что иное, как разность потенциалов между двумя одинаковыми проводниками, находящимися на концах разомкнутой цепи.

При замыкании такой цепи в ней возникает ток; на этом основана работа гальванических элементов.

Источником энергии, поддерживающим прохождение тока в цепи, являются при этом химические превращения, происходящие в элементе.

При полном обходе по любому замкнутому контуру, проходящему внутри замкнутой цепи, потенциал поля должен, разумеется, вернуться к исходному значению, т.е. его суммарное изменение равно нулю.

Рассмотрим, например, контур, проходящий по поверхности проводников.

При переходе с одного проводника на другой потенциал испытывает скачок φ_{ab}.

Падение же потенциала вдоль длины каждого проводника при наличии тока J (полный ток через сечение) равно RJ, где R - сопротивление проводника.

Поэтому суммарное изменение потенциала вдоль цепи равно

$$\Delta\varphi = \sum \varphi_{ab} - \sum JR$$

Приравняв это выражение нулю и заметив, что ток J постоянен вдоль всей цепи, а сумма $\sum \varphi_{ab}$ есть электродвижущая сила $\mathbf{E}$, найдем:

$$J \sum R = \mathbf{E}$$

Так что ток, возникающий в цепи с гальваническим элементом, равен ЭДС, деленной на полное сопротивление всех проводникоВ В цепи (в том числе, разумеется, и внутреннее сопротивление самого элемента).

Хотя ЭДС гальванического элемента и может быть выражеНа в виде суммы контактных разностей потенциалов, но очень важно подчеркнуть, что в действительности это есть термодинамическая величина, определяющаяся исключительно объемными состояниями проводников и совершенно не зависящая от свойств их поверхностей раздела.

Это ясно уже из того, что E есть не что иное, как работа (отнесенная к единичному заряду), которая была бы произведена над, заряженной частицей при обратимом проведении ее вдоль всей замкнутой цепи.

Для иллюстрании этого обстоятельства рассмотрим гальванический элемент, составленный из двух металлических электродов (металлы A и B), погруженный в раствор электролитов AX и BX (X^-— какой-либо анион). Пусть ζ_A и ζ_B - химические потенциалы металлов A и $B, \mathbf{a}\zeta_{AX}, \zeta_{BX}$ - химические потенциалы электролитов в растворе [1]).

Проведение элементарного заряда e вдоль замнутой цепи означает переход, иона A^+ из электрода A в раствор, переход иона B^+ из раствора на электрод, причем иЗменение зарядов электродов компенсируется переходом электрона от электрода A к электроду B по внешней части цепи.

Результат этих процессов сводится к тому, что электрод A теряет, а B приобретает по одному нейтральному атому, а в растворе электролита одна молекула BX заменяется на AX.

Поскольку работа, производимая при обратимом процессе (при постоянных температуре и давлении), равна изменению термодинамического потенциала системы, то находим соотношение

$$e\mathbf{E}_{AB} = (\zeta_B - \zeta_{BX}) - (\zeta_A - \zeta_{AX})$$

выражающее ЭДС элемента через обьемные свойства электродов и раствора электролита.

Форма записи (24.2) позволяет сделать также и следующий вывод.

Если в растворе находятся три электролита $(AX, BX,\ CX)$ и в него погружены металлические электроды $A, B, C,$ то ЭДС между каждыми двумя из них связаны соотношением

$$\mathbf{E}_{AB} + \mathbf{E}_{BC} = \mathbf{E}_{AC}$$

С помощью общих термодинамических соотношений можно связать ЭДС гальванического элемента с тепловым эффектом, сопровождающим прохождение тока по цепи, которое в реальных условиях происходит, разумеется, необратимым образом.

Пусть Q есть количество тепла, выделяющегося (как в самом элементе, так и во внешней части цепи при прохождении единичного заряда; это есть не что иное, как термохимическая теплота реакции, происходящей внутри гальванического элемента при прохождении тока.

Согласно известной термодинамической формуле (см.

V, §91) она связана с работой E следующим соотношением:

$$Q = -T^2 \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{E}{T}\right)$$

Определение стоящей здесь частной производной по температуре зависит от того, в каких условиях происходит процесс; так, если прохождение тока совершается при постоянном давлении (как это обычно и имеет место), то дифференцирование производится при постоянном давлении.

6.2 Special Properties of Chains for Applications

(main theory for applications. I'll learn it later)

6.2.1 Overview of Appliactions of Chains (???)

(что-то так ничего с ними я и не начал делать, это плохо, нужно указать приложения.)

6.2.2 Types of Chains

7 Electrodynamics of Media by Landau

7.1 II Electrostatics of Dielectrics by Landau

7.1.1 §6. The electric field in dielectrics

We shall now go on to consider a static electric field in another class of substances, namely dielectrics. The fundamental property of dielectrics is that a steady current cannot flow in them. Hence the static electric field need not be zero, as in conductors, and we have to derive the equations which describe this field. One equation is obtained by averaging equation (1.3), and is again

$$\operatorname{curl} \mathbf{E} = 0. \tag{6.1}$$

A second equation is obtained by averaging the equation div $\mathbf{e} = 4\pi\rho$:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\bar{\rho} \tag{6.2}$$

Let us suppose that no charges are brought into the dielectric from outside, which is the most usual and important case. Then the total charge in the volume of the dielectric is zero: even if it is placed in an electric field we have $\int \bar{\rho} \mathrm{d}V = 0$. This integral equation, which must be valid for a body of any shape, means that the average charge density can be written as the divergence of a certain vector, which is usually denoted by $-\mathbf{P}$:

$$\bar{\rho} = -\operatorname{div} \mathbf{P}, \tag{6.3}$$

while outside the body $\mathbf{P} = 0$. For, on integrating over the volume bounded by a surface which encloses the body but nowhere enters it, we find $\int \bar{\rho} \mathrm{d}V = -\int \operatorname{div} \mathbf{P} \mathrm{d}V = -\oint \mathbf{P} \cdot \mathrm{d}\mathbf{f} = 0$.$\mathbf{P}$ is called the dielectric polarization, or simply the polarization, of the body. A dielectric in which $\mathbf{P}$ differs from zero is said to be polarized. The vector $\mathbf{P}$ determines not only the volume charge density (6.3), but also the density σ of the charges on the surface of the polarized dielectric. If we integrate formula (6.3) over an element of volume lying between two neighbouring unit areas, one on each side of the dielectric surface, we have, since $\mathbf{P} = 0$ on the outer area (cf. the derivation of formula (1.9)),

$$\sigma = P_n, \tag{6.4}$$

where P_n is the component of the vector $\mathbf{P}$ along the outward normal to the surface.
To see the physical significance of the quantity $\mathbf{P}$ itself, let us consider the total dipole moment of all the charges within the dielectric; unlike the total charge, the total dipole moment need not be zero. By definition. it is the integral $\int \mathbf{r}\bar{\rho} \mathrm{d}I$. Substituting $\bar{\rho}$ from (6.3) and again integrating over a volume which includes the whole body we have

$$\int \mathbf{r}\bar{\rho} \mathrm{d}V = -\int \mathbf{r} \operatorname{div} \mathbf{P} \mathrm{d}V = -\oint \mathbf{r}(\mathrm{d}\mathbf{f} \cdot \mathbf{P}) + \int (\mathbf{P} \cdot \operatorname{grad}) \mathbf{r} \mathrm{d}V.$$

The integral over the surface is zero, and in the second term we have $(\mathbf{P} \cdot \operatorname{grad})\mathbf{r} = \mathbf{P}$, so that

$$\int \mathbf{r}\bar{\rho} \mathbf{d}V' = \int \mathbf{P} \mathbf{d}V. \tag{6.5}$$

Thus the polarization vector is the dipole moment (or electric moment) per unit volume of the dielectric. †

Substituting (6.3) in (6.2), we obtain the second equation of the electrostatic field in the form

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 0, \tag{6.6}$$

where we have introduced a quantity $\mathbf{D}$ defined by

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}, \tag{6.7}$$

called the electric induction. The equation (6.6) has been derived by averaging the density of charges in the dielectric. If, however, charges not belonging to the dielectric are brought in from outside (we shall call these extraneous charges), then their density must be added to the right-hand side of equation (6.6):

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho_{\text{ex}}. \tag{6.8}$$

On the surface of separation between two different dielectrics, certain boundary conditions must be satisfied. One of these follows from the equation curl $\mathbf{E} = 0$. If the surface of separation is uniform as regards physical properties, $ this condition requires the continuity of the tangential component of the field:

$$\mathbf{E}_{\text{t}1} = \mathbf{E}_{\text{t}2}; \tag{6.9}$$

cf. the derivation of the condition (1.7). The second condition follows from the equation $\operatorname{div} \mathbf{D} = 0$, and requires the continuity of the normal component of the induction:

$$D_{n1} = D_{n2}. \tag{6.10}$$

For a discontinuity in the normal component $D_n = D_z$ would involve an infinity of the derivative $\partial D_z/\partial z$, and therefore of div $\mathbf{D}$.

At a boundary between a dielectric and a conductor, $\mathbf{E_t} = 0$, and the condition on the normal component is obtained from (6.8):

$$\mathbf{E}_t = 0, \quad D_n = 4\pi\sigma_{\text{ex}}, \tag{6.11}$$

where σ_{ex} is the charge density on the surface of the conductor; cf. (1.8), (1.9).

7.1.2 §7. The permittivity

In order that equations (6.1) and (6.6) should form a complete set of equations determining the electrostatic field, they must be supplemented by a relation between the induction $\mathbf{D}$ and the field $\mathbf{E}$. In the great majority of cases this relation may be supposed linear. It corresponds to the first terms in an expansion of $\mathbf{D}$ in powers of $\mathbf{E}$, and its correctness is due to the smallness of the external electric fields in comparison with the internal molecular fields.

The linear relation between $\mathbf{D}$ and $\mathbf{E}$ is especially simple in the most important case, that

[0]† It should be noticed that the relation (6.3) inside the dielectric and the condition $\mathbf{P} = 0$ outside do not in themselves determine $\mathbf{P}$ uniquely; inside the dielectric we could add to $\mathbf{P}$ any vector of the form curl $\mathbf{f}$. The exact form of $\mathbf{P}$ can be completely determined only by establishing its connection with the dipole moment.

‡ That is. as regards composition of the adjoining media. temperature, etc. If the dielectric is a crystal, the surface must be a crystallographic plane.

of an isotropic dielectric. It is evident that, in an isotropic dielectric, the vectors **D** and **E** must be in the same direction. The linear relation between them is therefore a simple proportionality: †

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}. \tag{7.1}$$

The coefficient ε is the permittivity or dielectric permeability or dielectric constant of the substance and is a function of its thermodynamic state.

As well as the induction, the polarization also is proportional to the field:

$$\mathbf{P} = \kappa \mathbf{E} \equiv (\varepsilon - 1)\mathbf{E}/4\pi \tag{7.2}$$

The quantity κ is called the polarization coefficient of the substance, or its dielectric susceptibility. Later (§14) we shall show that the permittivity always exceeds unity, the polarizability, accordingly, is always positive. The polarizability of a rarefied medium (a gas) may be regarded as proportional to its density.

The boundary conditions (6.9) and (6.10) on the surface separating two isotropic dielectrics become

$$\mathbf{E}_{t1} = \mathbf{E}_{t2}, \quad \varepsilon_1 E_{n1} = \varepsilon_2 E_{n2} \tag{7.3}$$

Thus the normal component of the field is discontinuous, changing in inverse proportion to the permittivity of the medium.

In a homogeneous dielectric, $\varepsilon =$ constant, and then it follows from $\operatorname{div}\mathbf{D} = 0$ that $\operatorname{div}\mathbf{P} = 0$. By the definition (6.3) this means that the volume charge density in such a body is zero (but the surface density (6.4) is in general not zero). On the other hand, in an. inhomogeneous dielectric we have a non-zero volume charge density

$$\bar{\rho} = -\operatorname{div}\mathbf{P} = -\operatorname{div}\frac{\varepsilon - 1}{4\pi\varepsilon}\mathbf{D} = -\frac{1}{4\pi}\mathbf{D}\cdot\operatorname{grad}\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon}\mathbf{E}\cdot\operatorname{grad}\varepsilon.$$

If we introduce the electric field potential by $\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\phi$, then equation (6.1) is automatically satisfied, and the equation $\operatorname{div}\mathbf{D} = \operatorname{div}\varepsilon\mathbf{E} = 0$ gives

$$\operatorname{div}(\varepsilon \operatorname{grad}\phi) = 0 \tag{7.4}$$

This equation becomes the ordinary Laplace's equation only in a homogeneous dielectric medium. The boundary conditions (7.3) can be rewritten as the following conditions on the potential:

$$\left.\begin{array}{c} \phi_1 = \phi_2, \\ \varepsilon_1 \partial\phi_1/\partial n = \varepsilon_2 \partial\phi_2/\partial n; \end{array}\right\} \tag{7.5}$$

the continuity of the tangential derivatives of the potential is equivalent to the continuity of ϕ itself.

In a dielectric medium which is piecewise homogeneous, equation (7.4) reduces in each homogeneous region to Laplace's equation $\Delta\phi = 0$, so that the permittivity appears in the solution of the problem only through the conditions (7.5). These conditions, however,

[0]† This relation, which assumes that **D** and **E** vanish simultaneously, is, strictly speaking, valid only in dielectrics which are homogeneous as regards physical properties (composition, temperature, etc.) In inhomogeneous bodies D may be non-zero even when $E = 0$. and is determined by the gradients of thermodynamic quantities which vary through the body. The corresponding terms, however, are very small, and we shall use the relation (7.1) in what follows, even for inhomogeneous bodies.

involve only the ratio of the permittivities of two adjoining media. In particular, the solution of an electrostatic problem for a dielectric body with permittivity ε_2, surrounded by a medium with permittivity ε_1, is the same as for a body with permittivity $\varepsilon_2/\varepsilon_1$, surrounded by a vacuum.

Let us consider how the results obtained in Chapter I for the electrostatic field of conductors will be modified if these conductors are not in a vacuum but in a homogeneous and isotropic dielectric medium. In both cases the potential distribution satisfies the equation $\hat{\angle}\phi = 0$, with the boundary condition that ϕ is constant on the surface of the conductor, and the only difference is that, instead of $E_n = -\partial\phi'\partial n = 4\pi\sigma$. we have

$$D_n = -\varepsilon\hat{\partial}\phi/\partial n = 4\pi\sigma, \tag{76}$$

giving the relation between the potential and the surface charge. Hence it is clear that the solution of the problem of the field of a charged conductor in a vacuum gives the solution of the same problem with a dielectric in place of the vacuum if we make the formal substitution $\phi \to \varepsilon\phi, e \to e$ or $\phi \to \phi, e \to e/\varepsilon$. For given charges on the conductors, the potential and the field are reduced by a factor ε in comparison with their values in a vacuum. This reduction in the field can be explained as the result of a partial "screening" of the charge on the conductor by the surface charges on the adjoining polarized dielectric. If, on the other hand, the potentials of the conductors are maintained, then the field is unchanged but the charges are increased by a factor ε.†

Finally. it may be noted that in electrostatics we may formally regard a conductor (uncharged) as a body of infinite permittivity, in the sense that its effect on an external electric field is the same as that of a dielectric (of the same form) as $\varepsilon \to \infty$. For. since the boundary condition on the induction $\mathbf{D}$ is finite, $\mathbf{D}$ must remain finite in the body even for $\varepsilon \to \infty$. This means that $\mathbf{E} \to 0$, in accordance with the properties of conductors.

PROBLEMS

Problem 1. Determine the field due to a point charge e at a distance h from a plane boundary separating two different dielectric media.

Solution. Let O be the position of the charge e in medium 1 , and O' its image in the plane of separation. situated in medium 2 (Fig. 11, p. 38). We shall seek the field in medium 1 in the form of the field of two point charges, e and a fictitious charge e' at O' (cf. the method of images, §3): $\phi_1 = e/\varepsilon_1 r + e'/\varepsilon_1 r'$, where r and r' are the distances from O and O' respectively. In medium 2 we seek the field as that of a fictitious charge e'' at O : $\phi_2 = e''/\varepsilon_2 r$. On the boundary plane ($r = r'$) the conditions (7.5) must hold, leading to the equations $e - e' = e''$, $(e + e')/\varepsilon_1 = e''/\varepsilon_2$, whence

$$e' = e\,(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\,/\,(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\,, \quad e'' = 2\varepsilon_2 e\,(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\,. \tag{1}$$

For $\varepsilon_2 \to \propto$ we have $e' = -e.\phi_2 = 0$, i.e. the result obtained in §3 for the field of a point charge near a conducting plane.

The force acting on the charge e (the image force) is

$$F = \frac{ee'}{(2h)^2\varepsilon_1} = \left(\frac{e}{2h}\right)^2 \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1\,(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)};$$

$F > 0$ corresponds to repulsion.

Problem 2. The same as Problem 1, but for an infinite charged straight wire parallel to a plane boundary surface at a distance h.

[0]† From this it follows, in particular, that when a capacitor is filled with a dielectic its capacitance increases by a factor ε.

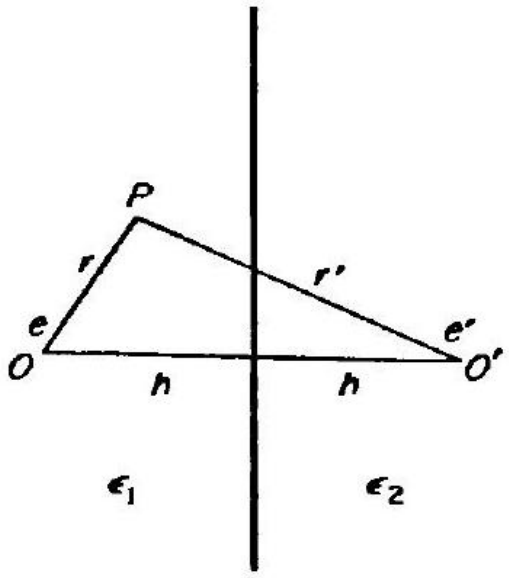


Fig. 11

Solution. As in Problem 1, except that the field potentials in the two media are $\phi_1 = -(2e/\varepsilon_1)\log r - (2e'/\varepsilon_1)\log r', \phi_2 = -(2e''/\varepsilon_2)\log r$, where e, e', e'' are the charges per unit length of the wire and of its images. and r, r' are the distances in a plane perpendicular to the wire. The same expressions (1) are obtained for e', e'', and the force on unit length of the wire is $F = 2ee'/2h\varepsilon_1 = e^2(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)/h\varepsilon_1(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$.

Problem 3. Determine the field due to an infinite charged straight wire in a medium with permittivity ε_1, lying parallel to a cylinder with radius a and permittivity ε_2, at a distance $b(> a)$ from its axis. †

Solution. We seek the field in medium 1 as that produced in a homogeneous dielectric (with ε_1) by the actual wire (passing through O in Fig. 12), with charge e per unit length, and two fictitious wires with charges e' and $-e'$ per unit length, passing through A and O' respectively. The point A is at a distance a^2/b from the axis of the cylinder. Then, for all points on the circumference, the distances r and r' from O and A are in a constant ratio $r'/r = a/b$, and so it is possible to satisfy the boundary conditions on this circumference. In medium 2 we seek the field as that produced in a homogeneous medium (with ε_2) by a fictitious charge e'' on the wire passing through O.

The boundary conditions on the surface of separation are conveniently formulated in terms of the potential $\phi(\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\phi)$ and the vector potential $\mathbf{A}$ (cf. §3), defined by $\mathbf{D} = \operatorname{curl}\mathbf{A}$ (in accordance with the equation $\operatorname{div}\mathbf{D} = 0$). In a two-dimensional problem, $\mathbf{A}$ is in the z-direction (perpendicular to the plane of the figure). The conditions of continuity for the tangential components of $\mathbf{E}$ and the normal component of $\mathbf{D}$ are equivalent to $\phi_1 = \phi_2, A_1 = A_2$.

For the field of a charged wire we have in polar coordinates r, θ the equation $\phi = -(2e/\varepsilon)\log r +$ constant, $A = 2e\theta +$ constant; cf. (3.18). Hence the boundary conditions are

$$\frac{2}{\varepsilon_1}(-e\log r - e'\log r' + e'\log a) = -\frac{2e''}{\varepsilon_2}\log r + \text{ constant },$$
$$2[e\theta + e'\theta' - e'(\theta + \theta')] = 2e''\theta$$

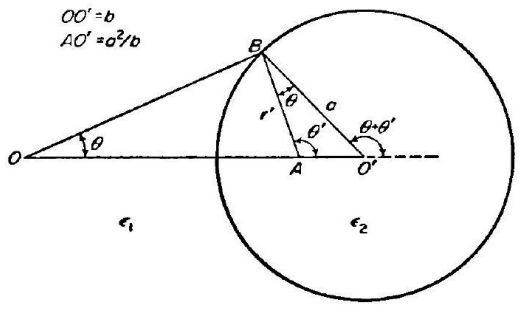


Fig. 12

where the angles are as shown in Fig. 12, and we have used the fact that $OO'B$ and $BO'A$ are similar triangles. Hence $\varepsilon_2(e+e') = \varepsilon_1 e'', e - e' = e''$, and the expressions for e' and e'' are again formulae (1) of Problem 1.
The force acting on unit length of the charged wire is parallel to OO', and is

$$F = eE = \frac{2ee'}{\varepsilon_1}\left(\frac{1}{OA} - \frac{1}{OO'}\right) = \frac{2e^2(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)a^2}{\varepsilon_1(\varepsilon_1+\varepsilon_2)b(b^2-a^2)};$$

$F > 0$ corresponds to repulsion. In the limit $a.b \to \infty, b - a \to h$, this gives the result in Problem 1.
Problem 4. The same as Problem 3, but for the case where the wire is inside a cylinder with permittivity $\varepsilon_2 (b < a)$.

Solution. We seek the field in medium 2 as that due to the actual wire, with charge e per unit length (O in Fig. 13), and a fictitious wire with charge e' per unit length passing through A, which is now outside the cylinder. In medium 1 we seek the field as that of wires with charges e'' and $e - e''$ passing through O and O' respectively. By the same method as in the preceding problem we find $e' = -e(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)/(\varepsilon_1 + \varepsilon_2), e'' = 2\varepsilon_1 e/(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$. For $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$ the wire is repelled from the surface of the cylinder by a force

$$F = \frac{2ee'}{\varepsilon_2}\frac{1}{OA} = \frac{2e^2(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)b}{\varepsilon_2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)(a^2-b^2)}.$$

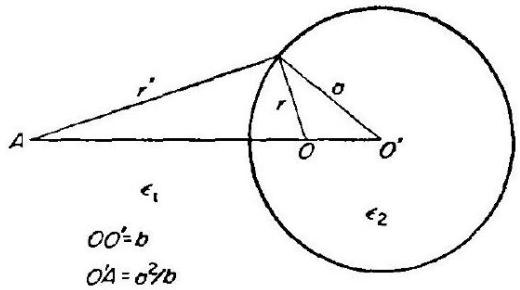


Fig. 13

Problem 5. Show that the field potential $\phi_A(\mathbf{r}_B)$ at a point $\mathbf{r}_B$ in an arbitrary inhomogeneous dielectric medium, due to a point charge e at $\mathbf{r}_A$, is equal to the potential $\phi_B(\mathbf{r}_A)$ at $\mathbf{r}_A$ due to the same charge at $\mathbf{r}_B$.
Solution. The potentials $\phi_A(\mathbf{r})$ and $\phi_B(\mathbf{r})$ satisfy the equations

$$\operatorname{div}(\varepsilon \operatorname{grad}\phi_A) = -4\pi e\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_A), \quad \operatorname{div}(\varepsilon \operatorname{grad}\phi_B) = -4\pi e\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_B).$$

Multiplying the first by ϕ_B and the second by ϕ_A and subtracting, we have

$$\operatorname{div}\left(\phi_B \varepsilon \operatorname{grad} \phi_A\right) - \operatorname{div}\left(\phi_A \varepsilon \operatorname{grad} \phi_B\right) = -4\pi e \delta\left(\mathbf{r} - \mathbf{r}_A\right) \phi_B(\mathbf{r}) + 4\pi e \delta\left(\mathbf{r} - \mathbf{r}_B\right) \phi_A(\mathbf{r}).$$

Integration of this equation over all space gives the required relation:

$$\phi_A\left(\mathrm{r}_B\right) = \phi_B\left(\mathrm{r}_A\right).$$

7.1.3 §8. A dielectric ellipsoid

The polarization of a dielectric ellipsoid in a uniform external electric field has some unusual properties which render this example particularly interesting.

Let us consider first a simple special case, that of a dielectric sphere in an external field $\boldsymbol{\epsilon}$. We denote its permittivity by $\varepsilon^{(i)}$, and that of the medium surrounding it by $\varepsilon^{(e)}$. We take the origin of spherical polar coordinates at the centre of the sphere, and the direction of $\boldsymbol{\epsilon}$ as the axis from which the polar angle θ is measured, and seek the field potential outside the sphere in the form $\phi^{(e)} = \mathbb{C} \cdot \mathbf{r} + A\mathbb{C} \cdot \mathbf{r}/r^3$; the first term is the potential of the external field imposed, and the second, which vanishes at infinity, gives the required change in potential due to the sphere (cf. §3, Problem 1, solution). Inside the sphere, we seek the field potential in the form $\phi^{(i)} = -B\mathbb{C} \cdot \mathbf{r}$, the only function which satisfies Laplace's equation, remains finite at the centre of the sphere, and depends only on the constant vector $\mathbb{C}$ (which is the only parameter of the problem).

The constants A and B are determined by the boundary conditions on the surface of the sphere. It may be seen at once, however, that the field in the sphere $\mathbf{E}^{(i)} = B($**c** is uniform and differs only in magnitude from the applied field $\mathcal{G}$.

The boundary condition of continuity of the potential gives $\mathbf{E}^{(i)} = \mathbb{C}\left(1 - A/R^3\right)$, where R is the radius of the sphere, and the condition of continuity of the normal component of the induction gives

$$\mathbf{D}^{(i)} = \varepsilon^{(e)} \mathbb{C}\left(1 + 2A/R^3\right).$$

Eliminating A from these two equations, we obtain

$$\frac{1}{3}\left(\mathbf{D}^{(i)} + 2\varepsilon^{(e)} \mathbf{E}^{(i)}\right) = \varepsilon^{(e)}(\mathbb{C} \tag{8.1}$$

or, substituting $\mathbf{D}^{(i)} = \varepsilon^{(i)} \mathbf{E}^{(i)}$,

$$\mathbf{E}^{(i)} = 3\varepsilon^{(e)} \boldsymbol{\epsilon}; \left(2\varepsilon^{(e)} + \varepsilon^{(i)}\right). \tag{8.2}$$

The problem of an infinite dielectric cylinder in an external field perpendicular to its axis is solved in an entirely similar manner (cf. §3, Problem 2). The field inside the cylinder, like that inside the sphere in the above example, is uniform. It satisfies the relation

$$\frac{1}{2}\left(\mathbf{D}^{(i)} + \varepsilon^{(e)} \mathbf{E}^{(i)}\right) = \varepsilon^{(e)} \mathbb{C}, \tag{8.3}$$

or

$$\mathbf{E}^{(i)} = 2\varepsilon^{(e)} \mathbb{C} / \left(\varepsilon^{(e)} + \varepsilon^{(i)}\right). \tag{8.4}$$

The relations (8.1) and (8.3), in which the permittivity $\varepsilon^{(i)}$ of the sphere or cylinder does not appear explicitly, are particularly important because their validity does not depend on a

linear relation between $\mathbf{E}$ and $\mathbf{D}$ within the body; they hold whatever the form of this relation (e.g. for anisotropic bodies). The analogous relations

$$\mathbf{E}^{(i)} = \mathbb{E} \tag{8.5}$$

for a cylinder in a longitudinal field and

$$\mathbf{D}^{(i)} = \varepsilon^{(e)}(\underset{\sim}{\mathcal{E}} \tag{8.6}$$

for a flat plate in a field perpendicular to it are similarly valid; these relations are evident at once from the boundary conditions.

The property of causing a uniform field within itself on being placed in a uniform external field is found to pertain to any ellipsoid, whatever the ratio of the semiaxes a, b, c. The problem of the polarization of a dielectric ellipsoid is solved by the use of ellipsoidal coordinates, in the same way as the corresponding problem for a conducting ellipsoid in §4.

Let the external field be again in the x-direction. The field potential outside the ellipsoid may again be sought in the form (4.22): $\phi'_e = \phi_0 F(\xi)$, with the function $F(\xi)$ given by (4.23). Such a function cannot, however, appear in the field potential ϕ_i inside the ellipsoid, since it does not satisfy the condition that the field must be finite everywhere inside the ellipsoid.

For let us consider the surface $\xi = -c^2$, which is an ellipse in the xy-plane, with semiaxes $\sqrt{}(a^2 - c^2)$ and $\sqrt{}(b^2 - c^2)$, lying within the ellipsoid. For $\xi \to -c^2$, the integral (4.23) behaves as $\sqrt{}(\xi + c^2)$. The field, i.e. the potential gradient, therefore behaves as $1/\sqrt{}(\xi + c^2)$, and becomes infinite at $\xi = -c^2$. Thus the only solution suitable for the field inside the ellipsoid is $F(\xi) = \text{constant}$, so that ϕ_i must be sought in the form $\phi_i = B\phi_0$. We see that the potential $\underset{y}{\phi_i}$ differs only by a constant factor from the potential ϕ_0 of the uniform field. In other words, the field inside the ellipsoid is also uniform.

We shall not pause to write out the formulae for the field outside the ellipsoid. The uniform field inside the ellipsoid can be found without actually writing out the boundary conditions, by using some results already known.

Let us first suppose that the ellipsoid is in a vacuum ($\varepsilon^{(e)} = 1$). Then there must be a linear relation between the vectors $\mathbf{E}^{(i)}, \mathbf{D}^{(i)}$ and $\mathbb{E}^{(\text{which}}$ are all in the x-direction), of the form $aE^{(i)}{}_x + bD^{(i)}{}_x = \mathcal{E}_x$, where the coefficients a, b depend only on the shape of the ellipsoid, and not on its permittivity $\varepsilon^{(i)}$.. The existence of such a relation follows from the form of the boundary conditions, as we saw above in the examples of the sphere and the cylinder.

To determine a and b we notice that, in the trivial particular case $\varepsilon^{(i)} = 1$, we have simply $\mathbf{E} = \mathbf{D} = \mathfrak{C}$, and so $a + b = 1$. Another particular case for which the solution is known is that of a conducting ellipsoid. In a conductor $\mathbf{E}^{(i)} = 0$, and the induction $\mathbf{D}^{(i)}$, though it has no direct physical significance, may be regarded formally as being related to the total dipole moment of the ellipsoid by $\mathbf{D}^{(i)} = 4\pi\mathbf{P} = 4\pi\mathscr{P}/V$. According to (4.26) we then have $D^{(i)}{}_x = \tilde{C}_x/n^{(x)}$, i.e. $b = n^{(x)}$, and so $a = 1 - n^{(x)}$. Thus we conclude that

$$\left(1 - n^{(x)}\right) E_x^{(i)} + n^{(x)} D_x^{(i)} = \mathfrak{E}_x, \tag{8.7}$$

or

$$E_x^{(i)} = \mathfrak{C}_x - 4\pi n^{(x)} P_x \tag{8.8}$$

The quantity $4\pi n^{(x)} P_x$ is called the depolarizing field. + Similar relations, but with coefficients. $n^{(y)}, n^{(z)}$, hold for the fields in the y and z directions. Like the particular formulae (8.1) and (8.3), they are valid whatever the relation between $\mathbf{E}$ and $\mathbf{D}$ inside the ellipsoid.

The field inside the ellipsoid is found from (8.7) by putting $D^{(i)}{}_x = \varepsilon^{(i)} E^{(i)}{}_x$:

$$E^{(i)}{}_x = \mathfrak{F}_x / \left[1 + \left(\varepsilon^{(i)} - 1\right) n^{(x)}\right], \tag{8.9}$$

and the total dipole moment of the ellipsoid is

$$\mathscr{P}_x = VP_x = \left(\varepsilon^{(i)} - 1\right) VE^{(i)}{}_x/4\pi = \frac{1}{3}abc\left(\varepsilon^{(i)} - 1\right)\mathfrak{E}_x / \left[1 + \left(\varepsilon^{(i)} - 1\right) n^{(x)}\right]. \tag{8.10}$$

If the field has components along all three axes, then the field inside the ellipsoid is still uniform, but in general not parallel to For an arbitrary choice of coordinate axes we can write the relation (8.7) in the general form

$$E_i^{(i)} + n_{ik}\left(D_k^{(i)} - E_k^{(i)}\right) = \mathcal{C}_i. \tag{8.11}$$

The transition to the case where the permittivity of the medium differs from unity is effected by simply replacing $\varepsilon^{(i)}$ by $\varepsilon^{(i)}\varepsilon^{(i)}$. Then formula (8.7) becomes

$$\left(1 - n^{(x)}\right)\varepsilon^{(e)} E^{(i)}{}_x + n^{(x)} D^{(i)}{}_x = \varepsilon^{(e)}\mathcal{G}_x. \tag{8.12}$$

This formula can be applied, in particular, to the field inside an ellipsoidal cavity in an infinite dielectric medium. In this case $\varepsilon^{(i)} = 1$.

PROBLEMS †

Problem 1. Determine the torque on a spheroid in a uniform electric field.
Solution. According to the general formula (16.13), the torque on an ellipsoid is $\mathbf{K} = \mathscr{F} \times (\mathbb{C},$ where $\mathscr{P}$ is the dipole moment of the ellipsoid. In a spheroid, the vector $\mathscr{P}$ is in a plane passing through the axis of symmetry and the direction of $\mathbb{C}$. The torque is perpendicular to this plane, and a calculation of its magnitude from formulae (8.10) gives

$$K = \frac{(\varepsilon - 1)^2 |1 - 3n| \mathbb{E}^2 V \sin 2\alpha}{8\pi[n\varepsilon + 1 - n][(1 - n)\varepsilon + 1 + n]}$$

where α is the angle between the direction of $\mathbb{C}$ and the axis of symmetry of the spheroid, and n is the depolarizing factor along the axis (so that the depolarizing factors in the directions perpendicular to the axis are $\frac{1}{2}(1 - n)$. The torque is directed so that it tends to turn the axis of symmetry of a prolate $\left(n < \frac{1}{3}\right)$ or oblate $\left(n > \frac{1}{3}\right)$ ellipsoid parallel or perpendicular to the field respectively.

For a conducting ellipsoid ($\varepsilon \to \infty$) we have

$$K = \frac{|1 - 3n|}{8\pi n(1 - n)} V\mathbb{C}^2 \sin 2\alpha$$

Problem 2. A hollow dielectric sphere (with permittivity ε and internal and external radii b and a) is in a uniform external field $\mathcal{C}$. Determine the field in the cavity.

Solution. As above in the problem of a solid sphere, we seek the field potentials in the vacuum outside the sphere (region 1) and in the cavity (region 3) in the forms $\phi_1 = -\mathbb{E}\cos\theta\,(r - A/r^2)$, $\phi_3 = -B\mathbb{E}r\cos\theta$, and that in the dielectric (region 2) as $\phi_2 = -C\mathbb{C}\cos\theta\,(r - D/r^2)$, where A, B, C, D are constants determined from the conditions of continuity of ϕ and $\varepsilon\partial\phi/\partial r$ at the boundaries $1 - 2$ and $2 - 3$. Thus the field $\mathbf{E}_3 = B\mathbb{C}$ in the cavity is uniform, but the field $\mathbf{E}_2$ in the sphere is not. A calculation of the constants gives the result

[0]† Similar formulae hold for a magnetized ellipsoid in a uniform external magnetic field (see §29). In this case $n^{(x)}, n^{(y)}, n^{(z)}$ are called demagnetizing factors.

$$\mathbf{E}_3 = 9_\varepsilon \mathfrak{C} / \left[(\varepsilon+2)(2\varepsilon+1) - 2(\varepsilon-1)^2(b/a)^3\right].$$

Problem 3. The same as Problem 2, but for a hollow cylinder in a uniform transverse field. ‡

Solution. As in Problem 2, with the result

$$\mathbf{E}_3 = 4\varepsilon\mathbb{C} / \left[(\varepsilon+1)^2 - (\varepsilon-1)^2(b/a)^2\right]$$

7.1.4 §9. The permittivity of a mixture

If a subtance is a finely dispersed mixture (an emulsion, powder mixture, etc.), we can consider the electric field averaged over volumes which are large compared with the scale of the inhomogeneities. The mixture is a homogeneous and isotropic medium with respect to such an average field, and so may be characterized by an effective permittivity, which we denote by ε_{mix} . If $\overline{\mathbf{E}}$ and $\overline{\mathbf{D}}$ are the field and induction averaged in this way, then, by the definition of ε_{mix} ,

$$\overline{\mathbf{D}} = \varepsilon_{\text{mix}} \overline{\mathbf{E}} \tag{9.1}$$

If all the particles in the mixture are isotropic, and the differences in their permittivities are small in comparison with ε itself, it is possible to calculate ε_{mix} in a general form which is correct as far as terms of the second order in these differences.

We write the local field as $\mathbf{E} = \overline{\mathbf{E}} + \delta\mathbf{E}$, and the local permittivity as $\bar{\varepsilon} + \delta\varepsilon$, where

$$\bar{\varepsilon} = (1V) \int \varepsilon \mathrm{d}V \tag{9.2}$$

is obtained by averaging over the volume. Then the mean induction is

$$\overline{\mathbf{D}} = \overline{(\bar{\varepsilon} + \delta\varepsilon)(\overline{\mathbf{E}} + \delta\mathbf{E})} = \bar{\varepsilon}\overline{\mathbf{E}} + \overline{\delta\varepsilon\delta\mathbf{E}} \tag{9.3}$$

since the mean values of $\delta\varepsilon$ and $\delta\mathbf{E}$ are zero by definition. In the zero-order approximation $\varepsilon_{\text{mix}} = \bar{\varepsilon}$: the first non-zero correction term will, of course, be of the second order in $\delta\varepsilon$, as we see from (9.3).

From the non-averaged equation $\operatorname{div}\mathbf{D} = 0$ we have, as far as small terms of the first order,

$$\operatorname{div}[(\bar{\varepsilon} + \delta\varepsilon)(\overline{\mathbf{E}} + \delta\mathbf{E})] = \bar{\varepsilon} \operatorname{div} \delta\mathbf{E} + \overline{\mathbf{E}} \cdot \operatorname{grad} \delta\varepsilon = 0 \tag{9.4}$$

The averaging of the product $\delta\varepsilon\delta\mathbf{E}$ in (9.3) is done in two stages. We first average over the volume of particles of a given kind, i.e. for a given $\delta\varepsilon$. The value of $\delta\mathbf{E}$ thus averaged is easily obtained from equation (9.4): on account of the isotropy of the mixture as a whole.

$$\frac{\partial}{\partial x}\overline{\delta E_x} = \frac{\partial}{\partial y}\overline{\delta E_y} = \frac{\partial}{\partial z}\overline{\delta E_z} = \frac{1}{3}\operatorname{div}\overline{\delta\mathbf{E}}$$

If $\overline{\mathbf{E}}$ is in the x-direction, say, we have from (9.4)

$$3\bar{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial x}\overline{\delta E_x} = -\overline{E_x}\frac{\partial\delta\varepsilon}{\partial x}$$

whence

[0]† In these three Problems the body is assumed to be in a vacuum.

‡ In a longitudinal field the solution is clearly $\mathbf{E}_3 = \boldsymbol{\epsilon}$.

$$\bar{\delta}\bar{E}_x = -\left(\overline{E_x}/3\bar{\varepsilon}\right)\delta\varepsilon$$

Since the direction of the x-axis is chosen arbitrarily, this equation may be written in the vector form $\bar{\delta}\overline{\mathbf{E}} = -(1/3\bar{\varepsilon})\overline{\mathbf{E}}\delta\varepsilon$. Multiplying by $\delta\varepsilon$ and effecting the final averaging over all components of the mixture, we obtain $\overline{\delta_\varepsilon\delta\mathbf{E}} = -(1/3\bar{\varepsilon})\overline{\mathbf{E}}(\delta\varepsilon)^2$. Finally, substituting this expression in (9.3) and comparing with (9.1), we have the required result:

$$\varepsilon_{\text{mix}} = \bar{\varepsilon} - (1/3\bar{\varepsilon})\overline{(\delta\varepsilon)^2} \tag{9.5}$$

This formula can be written in another manner if we put

$$\overline{\varepsilon^\sharp} = \left(\overline{\bar{\varepsilon} + \overline{\delta\varepsilon)^{\frac{1}{3}}} = \bar{\varepsilon}\xi\left(1 - \frac{\overline{(\delta\varepsilon)^2}}{9\bar{\varepsilon}^2}\right)\right.$$

this is accurate to terms of the second order. Then

$$\varepsilon_{\text{mix}}^{\frac{1}{3}} = \overline{\varepsilon^{\frac{1}{3}}} \tag{9.6}$$

Thus we can say that, in this approximation, the cube root of ε is additive.
Another limiting case for which an exact treatment is possible concerns the permittivity of an emulsion having an arbitrary difference between the permittivities ε_1 of the medium and ε_2 of the disperse phase but only a small concentration of the latter, whose particles are assumed spherical.

In the integral

$$\frac{1}{\boldsymbol{l}}\int(\mathbf{D} - \varepsilon_1\mathbf{E})\,\mathrm{d}\boldsymbol{l} \equiv \overline{\mathbf{D}} - \varepsilon_1\overline{\mathbf{E}}$$

the integrand is zero except within particles of the emulsion. It is therefore proportional to the volume concentration c of the emulsion, and in calculating it we can assume that the particles are in an external field which equals the mean field $\overline{\mathbf{E}}$. Assuming the particles spherical and using formula (8.2), we obtain for the proportionality coefficient between $\overline{\mathbf{D}}$ and $\overline{\mathbf{E}}$

$$\varepsilon_{\text{mix}} = \varepsilon_1 + 3c\varepsilon_1\left(\varepsilon_2 - \varepsilon_1\right)/\left(\varepsilon_2 + 2\varepsilon_1\right). \tag{9.7}$$

This formula is correct to terms of the first order in c. When ε_1 and ε_2 are nearly equal it is the same (to the first order in c and the second in $\varepsilon_2 - \varepsilon_1$) as the result given by formula (9.5) for small c.

7.1.5 §10. Thermodynamic relations for dielectrics in an electric field

The question of the change in thermodynamic properties owing to the presence of an electric field does not arise for conductors. Since there is no electric field inside a conductor, any change in its thermodynamic properties amounts simply to an increase in its total energy by the energy of the field which it produces in the surrounding space. † This quantity is quite independent of the thermodynamic state (and, in particular, of the temperature) of the body, and so does not affect the entropy, for example.

On the other hand, an electric field penetrates into a dielectric and so has a great effect on its thermodynamic properties. To investigate this effect, let us first determine the work done on a thermally insulated dielectric when the field in it undergoes an infinitesimal change.

The electric field in which the dielectric is placed must be imagined as due to various external charged conductors, and the change in the field can then be regarded as resulting from changes

in the charges on these conductors. ‡ Let us suppose for simplicity that there is only one conductor, with charge e and potential ϕ. The work which must be done to increase its charge by an infinitesimal amount δe is

$$\delta R = \phi \delta e; \tag{10.1}$$

this is the mechanical work done by the given field on a charge δe brought from infinity (where the field potential is zero) to the surface of the conductor, i.e. through a potential difference of ϕ. We shall put δR in a form which is expressed in terms of the field in the space filled with dielectric which surrounds the conductor.

If D_n is the component of the electric induction vector in the direction of the normal to the surface of the conductor (out of the dielectric and into the conductor), then the surface charge density on the conductor is $-D_n/4\pi$, so that

$$e = -\frac{1}{4\pi} \oint D_n \, \mathrm{d}f = -\frac{1}{4\pi} \oint \mathbf{D} \cdot \, \mathrm{d}\mathbf{f}$$

Since the potential ϕ is constant on the surface of the conductor, we can write

$$\delta R = \phi \delta e = -\frac{1}{4\pi} \oint \phi \delta \mathbf{D} \cdot \, \mathrm{d}\mathbf{f} = -\frac{1}{4\pi} \int \operatorname{div}(\phi \delta \mathbf{D}) \mathrm{d}\boldsymbol{\iota}$$

The last integral is taken over the whole volume outside the conductor. Since the varied field, like the original field, must satisfy the field equations, we have $\operatorname{div} \delta \mathbf{D} = 0$, and so $\operatorname{div}(\phi \delta \mathbf{D}) = \phi \operatorname{div} \delta \mathbf{D} + \delta \mathbf{D} \cdot \operatorname{grad} \phi = -\mathbf{E} \cdot \delta \mathbf{D}$. Thus the following important formula is obtained:

$$\delta R = \int (\mathbf{E} \cdot \delta \mathbf{D}/4\pi) \mathrm{d}V \tag{10.2}$$

It should be emphasized that the integration in (10.2) is over the whole field, including the vacuum if the dielectric does not occupy all space outside the conductor.

The work done on a thermally insulated body is just the change in its energy at constant entropy. Hence the expression (10.2) must be included in the thermodynamic relation which gives the infinitesimal change in the total energy of the body; the latter contains also the energy of the electric field. Denoting the total energy by $\mathscr{U}$. we therefore have

$$\delta \mathscr{U} = T \delta \mathscr{F} + \frac{1}{4\pi} \int \mathbf{E} \cdot \delta \mathbf{D} \, \mathrm{d}\boldsymbol{I}' \tag{10.3}$$

where T is the temperature of the body and $\mathscr{S}$ its entropy. †
Accordingly we have for the total free energy ‡$\mathscr{F} = \mathscr{U} - T\mathscr{S}$

$$\delta \mathscr{F} = -\mathscr{S} \delta \Gamma + \frac{1}{4\pi} \int \mathbf{E} \cdot \delta \mathbf{D} \, \mathrm{d}V \tag{10.4}$$

Similar thermodynamic relations can be obtained for the quantities pertaining to unit volume of the body. Let U, S and ρ be the internal energy, entropy and mass of unit volume. It is well known that the ordinary thermodynamic relation (in the absence of a field) for the internal

[0]† We here neglect the energy of the attachment of the charge to the substance of the conductor: this will be discussed in §23.

‡ The final results which we shall obtain involve only the values of the field inside the dielectric. and therefore are independent of the origin of the field. For this reason there is no need for special discussion of the case where the field is produced, not by charged conductors, but (for instance) by extraneous charges placed in the dielectric itself or by pyrcelectric polarization of it (§13).

energy of unit volume is $\mathrm{d}U = T\ \mathrm{d}S + \zeta \mathrm{d}\rho$, where ζ is the chemical potential of the substance.§ In the presence of a field in a dielectric, there must be added the integrand in (10.3):

$$\mathrm{d}U = T\ \mathrm{d}S + \zeta \mathrm{d}\rho + \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{D}4\pi \tag{10.5}$$

For the free energy per unit volume of the dielectric, $F = U - TS$, we therefore have

$$\mathrm{d}F = -S\ \mathrm{d}T + \zeta \mathrm{d}\rho + \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{D}4\pi \tag{10.6}$$

These relations are the basis of the thermodynamics of dielectrics.
We see that U and F are the thermodynamic potentials with respect to $S, \rho, \mathbf{D}$ and $T, \rho, \mathbf{D}$ respectively. In particular, we can obtain the field by differentiating these potentials with respect to the components of the vector $\mathbf{D}$:

$$\mathbf{E} = 4\pi(\partial U/\partial \mathbf{D})_{S,\rho} = 4\pi(\partial F/\partial \mathbf{D})_{T,\rho}. \tag{10.7}$$

The free energy is more convenient in this respect, since it is to be differentiated at constant temperature, whereas the internal energy must be expressed in terms of the entropy, which is less easy.

Together with U and F, it is convenient to introduce thermodynamic potentials in which the components of the vector $\mathbf{E}$, instead of $\mathbf{D}$, are the independent variables. Such are

$$\widetilde{U} = U - \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}/4\pi, \quad \widetilde{F} = F - \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}/4\pi \tag{10.8}$$

On differentiating these we have

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{d}\tilde{U} &= T\ \mathrm{d}S + \zeta \mathrm{d}\rho - \mathbf{D} \cdot \mathrm{d}\mathbf{E}/4\pi \\ \mathrm{d}\tilde{\boldsymbol{F}} &= -S\ \mathrm{d}T + \zeta \mathrm{d}\rho - \mathbf{D} \cdot \mathrm{d}\mathbf{E}/4\pi \end{aligned}\right\} \tag{10.9}$$

Hence, in particular,

$$\mathbf{D} = -4\pi(\partial \tilde{U}/\partial \mathbf{E})_{S,\rho} = -4\pi(\partial \tilde{F}/\partial \mathbf{E})_{T,\rho}. \tag{10.10}$$

It should be noticed that the relation between the thermodynamic quantities with and without the tilde is exactly that which occurs in §5 for the energy of the electrostatic field of conductors in a vacuum. For the integral $\int \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}\mathrm{d}V$ can be transformed in an exactly similar manner to the one at the beginning of §2, with the equation div $\mathbf{D} = 0$ inside the dielectric and the boundary condition $D_n = 4\pi\sigma$ on the surfaces of conductors:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi}\int \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}\ \mathrm{d}V &= -\frac{1}{4\pi}\int \operatorname{grad}\phi \cdot \mathbf{D}\ \mathrm{d}V \\ &= \frac{1}{4\pi}\sum_a \int \phi_a D_n\ \mathrm{d}f = \sum_a \phi_a e_a \end{aligned} \tag{10.11}$$

Hence we have for the internal energy, for example,

[0]† In (10.3) and (10.4) the volume of the body is assumed constant, but in general it becomes inhomogeneous in an electric field, and so the volume no longer characterizes the state of the body.
‡ This quantity is meaningful only when the temperature is constant throughout the body.
§ See SP 1, §24. Instead of the mass density we there use the number of particles N per unit volume; $\rho = Nm$, where m is the mass of one particle. The chemical potentials ζ per unit mass and μ per particle are related by $\zeta = \mu, m$.

The use of the letter ρ for the mass density as well as the charge density cannot lead to any misunderstanding, because the two quantities never appear together.

$$\overline{\mathscr{U}} = \mathscr{U} - \int \frac{\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}}{4\pi}\,\mathrm{d}V = \mathscr{U} - \sum_a \phi_a e_a \tag{10.12}$$

in agreement with the definition (5.5).
It is useful to derive also the formulae for infinitesimal changes in these quantities, expressed in terms of the charges and potentials of the conductors (the sources of the field). For example, the variation in the free energy (for a given temperature) is

$$(\delta\mathscr{F})_h = \delta R = \sum_a \phi_a \delta e_a \tag{10.13}$$

For the variation of $\tilde{\mathscr{F}}$ we have

$$(\delta\mathscr{F})_T = (\delta\mathscr{F})_T - \delta\sum_a \phi_a e_a = -\sum_a e_a \delta\phi_a \tag{10.14}$$

We can say that the quantities without the tilde are the thermodynamic potentials with respect to the charges on the conductors, while those with it are thermodynamic potentials with respect to their potentials.

It is known from thermodynamics that the various thermodynamic potentials have the property of being minima in a state of thermodynamic equilibrium, relative to various changes in the state of the body. In formulating these conditions of equilibrium in an
electric field, it is necessary to say whether changes of state with constant charges on the conductors (the field sources) or those with constant potentials are being considered. For example, in equilibrium $\mathscr{F}$ and $\mathscr{F}$ are minima with respect to changes in state occurring at constant temperature and (respectively) constant charges and potentials of the conductors (the same is true for $\mathscr{U}$ and $\mathscr{U}$ at constant entropy).

If any processes (such as chemical reactions) which are not directly related to the electric field can occur in the body, the condition of equilibrium with respect to these processes is that F be a minimum for given density, temperature and induction $\mathbf{D}$, or that $\widetilde{F}$ be a minimum for constant density, temperature and field $\mathbf{E}$.

Hitherto we have made no assumptions concerning the dependence of $\mathbf{D}$ on $\mathbf{E}$, so that all the thermodynamic relations derived above are valid whatever the nature of this dependence. Let us now apply them to an isotropic dielectric, where a linear relation $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$ holds. In this case integration of (10.5) and (10.6) gives

$$\left.\begin{aligned} U &= U_0(S,\rho) + D^2/8\pi\varepsilon \\ F &= F_0(T,\rho) + D^2/8\pi\varepsilon \end{aligned}\right\} \tag{10.15}$$

where U_0 and F_0 pertain to the dielectric in the absence of the field. Thus in this case the quantity

$$D^2/8\pi\varepsilon = \varepsilon E^2/8\pi = ED/8\pi \tag{10.16}$$

is the change in the internal energy (for given entropy and density) or in the free energy (for given temperature and density), per unit volume of the dielectric medium, resulting from the presence of the field.

The expressions for the potentials $\widetilde{U}$ and $\widetilde{F}$ are similarly

$$\left.\begin{aligned} \tilde{U} &= U_0(S,\rho) - \varepsilon E^2/8\pi \\ \tilde{F} &= F_0(T,\rho) - \varepsilon E^2/8\pi \end{aligned}\right\} \tag{10.17}$$

We see that the differences $U - U_0$ and $\tilde{U} - U_0$ in this case differ only in sign, as they did for an electric field in a vacuum (§5). In a dielectric medium, however, this simple result holds good only when there is a linear relation between $\mathbf{D}$ and $\mathbf{E}$.

We shall write out also, for future reference, formulae for the entropy density S and the chemical potential ζ, which follow from (10.15):

$$S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_{\rho,\mathrm{D}} = S_0(T,\rho) + \frac{D^2}{8\pi\varepsilon^2}\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial T}\right)_\rho = S_0(T,\rho) + \frac{E^2}{8\pi}\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial T}\right)_\rho \tag{10.18}$$

$$\zeta = \left(\frac{\partial F}{\partial \rho}\right)_{T,\mathrm{D}} = \zeta_0(T,\rho) - \frac{E^2}{8\pi}\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \rho}\right)_T \tag{10.19}$$

These quantities, of course, differ from zero only inside the dielectric.
The total free energy is obtained by integrating (10.15) over all space. By (10.11) we have

$$\mathscr{F} - \mathscr{F}_0 = \int \mathbf{E}\cdot\mathbf{D}\mathrm{d}V/8\pi = \frac{1}{2}\sum e_a\phi_a. \tag{10.20}$$

This last expression is formally identical with the energy of the electrostatic field of conductors in a vacuum. The same result can be obtained directly by starting from the variation $\delta\mathscr{F}$ (10.13) for an infinitesimal change in the charges on the conductors. In the present case, when $\mathbf{D}$ and $\mathbf{E}$ are linearly related, all the field equations and their boundary conditions are also linear. Hence the potentials of the conductors must (as for the field in a vacuum) be linear functions of their charges, and integration of equation (10.13) gives (10.20).

It should be emphasized that these arguments do not presuppose the dielectric to fill all space outside the conductors. If, however, this is so, we can go further and use the results at the end of §7 to draw the following conclusion. For given charges on the conductors, the presence of the dielectric medium reduces by a factor ε both the potentials of the conductors and the field energy, as compared with the values for a field in a vacuum. If, on the other hand, the potentials of the conductors are maintained constant, then their charges and the field energy are increased by a factor ε.

PROBLEM

Determine the height h to which a liquid rises in a vertical plane capacitor.
Solution. For given potentials on the capacitor plates. $\mathscr{F}$ must be a minimum. $\mathscr{F}$ includes the energy $\frac{1}{2}\rho g h^2$ of the liquid under gravity. From this condition we easily obtain $h = (\varepsilon - 1)E^2/8\pi\rho g$.

7.1.6 §11. The total free energy of a dielectric

The total free energy $\mathscr{F}$ (or the total internal energy $\mathscr{U}$), as defined in §10, includes the energy of the external electric field which polarizes the dielectric; this field may be imagined as being produced by a particular assembly of conductors with specified total charges. It is also meaningful to consider the total free energy less the energy of the field which would be present in all space if the body were absent. We denote this field by $\mathbb{C}$. Then the total free energy in this sense is

$$\int \left(F - \mathbb{E}^2/8\pi\right)\mathrm{d}V, \tag{11.1}$$

where F is the free energy density. Here we shall denote this quantity by the letter $\mathscr{F}$, which in §10 signified $\int F\,\mathrm{d}I$. It should be emphasized that the difference between the two definitions of .FF is a quantity independent of the thermodynamic state and properties of the dielectric, and hence it has no effect on the fundamental differential relations of thermodynamics pertaining to this quantity. †

Let us calculate the change in $\mathscr{F}$ resulting from an infinitesimal change in the field which occurs at constant temperature and does not destroy the thermodynamic equilibrium of the medium. Since $\delta F = \mathbf{E}\cdot\delta\mathbf{D}/4\pi$, we have $\delta\mathscr{F} = \int(\mathbf{E}\cdot\delta\mathbf{D} - \mathbb{E}\cdot\delta\mathscr{E})\mathrm{d}I\cdot 4\pi$. This expression is identically equal to

$$\delta\mathscr{F} = \int(\mathbf{D}-\mathscr{C})\cdot\delta\mathscr{C}\,\mathrm{d}V/4\pi + \int\mathbf{E}\cdot(\delta\mathbf{D}-\delta\mathscr{C})\mathrm{d}V/4\pi - \int(\mathbf{D}-\mathbf{E})\cdot\delta\mathscr{C}\,\mathrm{d}V/4\pi \qquad (11.2)$$

In the first integral we write $\delta\mathscr{E} = -\operatorname{grad}\delta\phi_0$ (where ϕ_0 is the potential of the field $\mathscr{C}$) and integrate by parts:

$$\int\operatorname{grad}\delta\phi_0\cdot(\mathbf{D}-\mathbb{E})\mathrm{d}V = \oint\delta\phi_0(\mathbf{D}-\mathbb{C})\cdot\mathrm{d}\mathbf{f} - \int\delta\phi_0\operatorname{div}(\mathbf{D}-\mathbb{C})\mathrm{d}V.$$

It is easy to see that both the integrals on the right-hand side are zero. For the volume integral this follows at once from the equations $\operatorname{div}\mathbf{D} = 0$ and $\operatorname{div}\mathbb{E} = 0$ which the induction in the dielectric and the field in the vacuum must respectively satisfy. The surface integral is taken over the surfaces of the conductors which produce the field and over an infinitely distant surface. The latter of these is, as usual, zero, and for each of the conductors $\delta\phi_0 =$ constant, so that $\oint\delta\phi_0(\mathbf{D}-\mathbb{C})\cdot\mathrm{d}\mathbf{f} = \delta\phi_0\oint(\mathbf{D}-\mathbb{C})\cdot\mathrm{d}f$. The field $\mathbb{C}$, by definition, is produced by the same sources as the field $\mathbf{E}$ and induction $\mathbf{D}$ (i.e. by the same conductors with given total charges e). Hence the two integrals $\oint D_n\,\mathrm{d}f$ and $\oint\mathfrak{E}_n\,\mathrm{d}f$ are both equal to $4\pi e$, and their difference is zero.

Similarly, we can see that the second term in (11.2) is also zero, by putting $\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\phi$ and using the same transformation. Finally, we have

$$\delta\mathscr{F} = -\int(\mathbf{D}-\mathbf{E})\cdot\delta\mathscr{C}\,\mathrm{d}V/4\pi = -\int\mathbf{P}\cdot\delta\mathscr{C}\mathrm{d}V. \qquad (11.3)$$

It should be noticed that the integral in this expression need be taken only over the volume of the dielectric medium, since outside it $\mathbf{P} = 0$.

However. we must emphasize that the integrand $\mathbf{P}\cdot\delta\boldsymbol{C}$ cannot be interpreted as the variation of the free energy density in the same way as was done with formulae (10.3), (10.4). First of all, this density must exist outside the body, which modifies the field in the surrounding space also. It is clear, moreover, that the energy density at any point in the body can depend only on the field actually present there, and not on the field which would be present if the body were removed.

If the external field $\mathbb{E}$ is uniform, then

$$\delta\mathscr{F} = -\delta\mathscr{C}\cdot\int\mathbf{P}\mathrm{d}V = -\mathscr{P}\cdot\delta\mathscr{C}, \qquad (11.4)$$

where $\mathscr{P}$ is the total electric dipole moment of the body. Hence the thermodynamic identity for the free energy can be written in this case as

[0]† It may be noted that there would be no sense in subtracting $E^2/8\pi$ from F. because $\mathbf{E}$ is the field as modified by the presence of the dielectric. and so the difference $F - E^2, 8\pi$ could not be regarded as the free energy density of the dielectric as such.

$$\mathrm{d}\mathscr{F} = -\mathscr{P}\mathrm{d}T - \mathscr{P}\cdot\mathrm{d}\mathscr{C}. \tag{11.5}$$

The total electric moment of the body can therefore be obtained by differentiating the total free energy:

$$\mathscr{P} = -(\hat{C}\mathscr{F}/\hat{C})_h. \tag{11.6}$$

The latter formula can also be obtained directly from the general statistical formula

$$\overline{\hat{\lambda}\hat{\mathscr{H}}/\hat{\lambda}\hat{\lambda}} = (\hat{c}\mathscr{F}/\hat{\lambda}\hat{\lambda})_T,$$

where $\hat{\mathscr{H}}$ is the Hamiltonian of the body as the system of its component particles, and λ is any parameter characterizing the external conditions in which the body is placed: see $SP1$. (11.4), (15.11). For a body in a uniform external field $\mathbb{C}$, the Hamiltonian contains a term -$\mathbb{C}\cdot\hat{\mathscr{P}}$. where $\hat{\mathscr{P}}$ is the dipole moment operator. Taking $\mathbb{C}$ as the parameter λ, we obtain the required formula.

If $\mathbf{D}$ and $\mathbf{E}$ are connected by the linear relation $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$, we can similarly calculate explicitly not only the variation $\delta\mathscr{F}$ but $\mathscr{F}$ itself. We have

$$\overline{\mathscr{F}} - \overline{\mathscr{F}}_{\mathrm{o}} = \int \left(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D} - \mathbb{C}^2\right)\mathrm{d}V 8\pi.$$

This can be identically transformed into

$$\mathscr{F} - \mathscr{F}_0 = \int (\mathbf{E}+\mathbb{E})\cdot(\mathbf{D}-\mathbb{C})\mathrm{d}V/8\pi - \int \mathbb{E}\cdot(\mathbf{D}-\mathbf{E})\mathrm{d}V/8\pi$$

The first term on the right is zero, as we see by putting

$$\mathbf{E} + \boldsymbol{\epsilon} = -\operatorname{grad}(\phi + \phi_0)$$

and again using the same transformation. Hence we have

$$\mathscr{F} - \mathscr{F}_0(V,T) = -\frac{1}{2}\int \mathbb{C}\cdot\mathbf{P}\ \mathrm{d}V. \tag{11.7}$$

In particular, in a uniform external field

$$\mathscr{F} - \mathscr{F}_0(V,T) = -\frac{1}{2}(\mathbb{C}\cdot\mathscr{P}. \tag{11.8}$$

This last equation can also be obtained by direct integration of the relation (11.3) if we notice that, since all the field equations are linear when $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$, the electric moment $\mathscr{P}$ must be a linear function of $\mathbb{C}$.

The linear relation between the components of $\mathscr{P}$ and $\mathscr{C}$ can be written

$$\mathscr{P}_i = V\alpha_{ik}\mathfrak{F}_k, \tag{11.9}$$

as for conductors (§2). For a dielectric, however, the polarizability depends not only on the shape but also on the permittivity. The symmetry of the tensor α_{ik}, mentioned in §2, follows at once from the relation (11.6); it is sufficient to notice that the second derivative $\lambda^2\mathscr{F}/\hat{\mathcal{O}}\mathbb{E}_k\hat{\partial}\mathbb{E}_i = -\partial\mathscr{P}_i/\partial\mathbb{E}_k = -V\alpha_{ik}$ is independent of the order of differentiation.

Formula (11.7) becomes still simpler in the important case where ε is close to 1 , i.e. the dielectric susceptibility $\kappa = (\varepsilon-1)/4\pi$ is small. In this case, in calculating the energy, we can neglect the modification of the field due to the presence of the body, putting $\mathbf{P} = \kappa\mathbf{E} \cong \kappa\mathbb{C}$. Then

$$\mathscr{F} - \mathscr{F}_0 = -\frac{1}{2}\kappa \int \mathscr{C}^2 \, \mathrm{d}V \tag{11.10}$$

the integral being taken over the volume of the body. In a uniform field, the dipole moment $\mathscr{P} = V\kappa\mathscr{E}$, and the free energy is

$$\mathscr{F} - \mathscr{F}_0 = -\frac{1}{2}\kappa V \mathbb{C}^2. \tag{11.11}$$

In the general case of an arbitrary relation between $\mathbf{D}$ and $\mathbf{E}$, the simple formulae (11.7) and (11.8) do not hold. Here the formula

$$\mathscr{F} = \int \left(F - \frac{\mathscr{E}^2}{8\pi}\right) \mathrm{d}V = \int \left[F - \frac{\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}}{8\pi} - \frac{1}{2}\mathbf{P}\cdot\mathbb{G}\right] \mathrm{d}V \tag{11.12}$$

may be useful in calculating $\mathscr{F}$; its derivation is obvious after the above discussion. The two integrands differ by

$$-\frac{\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}}{8\pi} - \frac{1}{2}\boldsymbol{G}\cdot\mathbf{P} + \frac{\mathbb{C}^2}{8\pi} = -\frac{1}{8\pi}(\mathbf{D} - \boldsymbol{G})\cdot(\mathbf{E} + \boldsymbol{G})$$

after substitution of $\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\phi, \mathbb{E} = -\operatorname{grad}\phi_0$ and integration over all space, the result is zero. In (11.12), as in (11.7), the second integrand is zero outside the body, where $\mathbf{P} = 0$ and $F = E^2/8\pi$, so that the integration is taken only over the volume of the body.

PROBLEM

Derive the formula which replaces (11.7) when the body is not in a vacuum but in a medium of permittivity $\varepsilon^{(e)}$.

Solution. Using the same transformations as before, we find

$$\mathscr{F} - \mathscr{F}_0 = -\frac{1}{8\pi}\int \left(\mathfrak{E}\cdot\left(\mathbf{D} - \varepsilon^{(e)}\mathbf{E}\right)\mathrm{d}V.\right.$$

7.1.7 §12. Electrostriction of isotropic dielectrics

For a solid dielectric in an electric field the concept of pressure cannot be defined as for an isotropic body in the absence of a field, because the forces acting on a dielectric (which we shall determine in §§15, 16) vary over the body, and are anisotropic even if the body itself is isotropic. An exact determination of the deformation (electrostriction) of such a body involves the solution of a complex problem in the theory of elasticity.

However, matters are much simpler if we are interested only in the change in the total volume of the body. As we saw in §5, the shape of the body may then be regarded as unchanged, i.e. the deformation may be regarded as a uniform volume compression or expansion.

We shall neglect the dielectric properties of the external medium (the atmosphere, for instance) in which the body is situated, i.e. we suppose that $\varepsilon = 1$. This medium thus serves merely to exert a uniform pressure on the surface of the body, which we shall denote by P. If $\mathscr{F}$ is the total free energy of the body, then we have the thermodynamic relation $P = -(\partial\mathscr{F}/\partial V)_T$, and accordingly the expression for the differential $\mathrm{d}\mathscr{F}$ contains a term $-P\,\mathrm{d}V$. For example, in a uniform external field, (11.5) becomes

$$\mathrm{d}\mathscr{F} = -\mathscr{S}\mathrm{d}T - P\,\mathrm{d}V - \mathscr{P}\cdot\mathrm{d}\mathscr{C}.$$

We introduce the total thermodynamic potential (Gibbs function) of the body in accordance with the usual thermodynamic relation

$$g = \mathscr{F} + PV. \tag{12.1}$$

The differential of this quantity in a uniform external field is

$$\mathrm{d}\mathscr{P} = -\mathscr{F}\mathrm{d}T + V\ \mathrm{d}P - \mathscr{P}\cdot\mathrm{d}\mathscr{C}. \tag{12.2}$$

The change in the thermodynamic quantities in an external electric field is usually a relatively small quantity. It is known from the theorem of small increments, $SP1$(15.12), that a small change in the free energy (for given T and V) is equal to the small change in the thermodynamic potential (for given T and P). Hence, besides (11.8), we can write analogously

$$\mathscr{P} = {}_0 - \frac{1}{2}\mathbb{E}\cdot\mathscr{P} \tag{12.3}$$

for the thermodynamic potential of a body in a uniform external field. Here $\mathscr{P}_0$ is the value for the body in the absence of the field and for given values of P and T, while $\bar{F}_0$ in (11.8) is the free energy in the absence of the field and for given values of V and T.
Making explicit the dependence of the dipole moment on V and $\in$ according to (11.9), we can rewrite (12.3) as

$$\mathscr{S} = \mathscr{P}_0(P,T) - \frac{1}{2}V\alpha_{ik}\mathbb{F}_i\mathbb{F}_k, \tag{12.4}$$

Where the correction term must be expressed as a function of temperature and pressure by means of the equation of state for the body in the absence of the field. In particular, for a substance with small dielectric susceptibility this formula becomes simply

$$gp = {}_0(P.T) - \frac{1}{2}\kappa V\mathbb{C}^2; \tag{12.5}$$

cf. (11.11).
The required change in volume $V - V_0$ in the external field can now be obtained immediately by differentiating go with respect to pressure for constant T and $\mathcal{C}$. For example, from (12.5) we have

$$V - V_0 = -\frac{1}{2}\mathbb{G}^2[\hat{c}(\kappa V)/\partial P]_T \tag{12.6}$$

This quantity may be either positive or negative (whereas, in electrostriction of conductors, the volume is always greater in the presence of the field).

Similarly, we can calculate the amount of heat Q absorbed in a dielectric when an external electric field is isothermally applied (the external pressure being constant). † Differentiation of $gp - g_0$ with respect to temperature gives the change in the entropy of the body, and by multiplying this by T we obtain the required quantity of heat. For example, from (12.5) we obtain

$$Q = \frac{1}{2}\mathbb{E}^2T[\partial(\kappa V)/\partial T]_P \tag{12.7}$$

Positive values of Q correspond to absorption of heat.

PROBLEMS

Problem 1. Determine the change in volume and the electrocaloric effect for a dielectric ellipsoid in a uniform electric field parallel to one of its axes.

Solution. From formulae (12.3) and (8.10) we have

$$\mathscr{S} = \mathscr{S}_0 - \frac{V}{8\pi}\frac{\varepsilon - 1}{n\varepsilon + 1 - n}\mathbb{C}^2.$$

The relative change in volume is found to be ‡

$$\frac{V - V_0}{V} = \frac{\epsilon^2}{8\pi}\left[\frac{\varepsilon - 1}{n\varepsilon + 1 - n}\frac{1}{K} - \frac{1}{(n\varepsilon + 1 - n)^2}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial P}\right)_T\right]$$

and the electrocaloric effect

$$Q = \frac{TV\mathcal{E}^2}{8\pi}\left[\frac{\varepsilon - 1}{n\varepsilon + 1 - n}\alpha + \frac{1}{(n\varepsilon + 1 - n)^2}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial T}\right)_P\right]$$

where $1, K = -(1V)(\partial V/\partial P)_T$ is the compressibility of the body, and $\alpha = (1, V)(\partial V/\partial T)_P$ the thermal expansion coefficient.

In particular, for a plane disc in a field perpendicular to it, $n = 1$, so that

$$\frac{V - V_0}{V} = \frac{\mathcal{E}^2}{8\pi}\left[\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}\frac{1}{K} - \frac{1}{\varepsilon^2}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial P}\right)_T\right],$$
$$Q = \frac{TV\mathcal{E}^2}{8\pi}\left[\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}\alpha + \frac{1}{\varepsilon^2}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\right)_P\right].$$

For a similar disc (or any cylinder) in a longitudinal field, $n = 0$, and

$$\frac{V - V_0}{V} = \frac{\epsilon^2}{8\pi}\left[\frac{\varepsilon - 1}{K} - \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial P}\right)_T\right], \quad Q = \frac{TV\mathcal{G}^2}{8\pi}\left[(\varepsilon - 1)\alpha + \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial T}\right)_P\right]$$

Problem 2. Determine the difference between the heat capacity $\mathscr{C}_\phi$ of a plane disc in a field perpendicular to it. with a constant potential difference between its faces, and the heat capacity $\mathscr{C}_D$ at constant induction, the external pressure being maintained constant in each case. †

Solution. According to the results of Problem 1, the entropy of the disc is

$$\mathscr{S} = -\left(\frac{\partial\mathscr{S}}{\partial T}\right)_{P,\mathbb{E}} = \mathscr{S}_0(P, T) + \frac{\nu\mathbb{G}^2}{8\pi}\left[\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}\alpha + \frac{1}{\varepsilon^2}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial T}\right)_P\right]$$

The induction inside the disc is the same as the external field: $D = \mathcal{E}$. Hence, to calculate the heat capacity $\mathscr{C}_D$, we must differentiate $\mathscr{S}$ for constant $\mathscr{E}$. The potential difference between the faces of the disc is $\phi = EI = \mathbb{C}I/\varepsilon$ where l is its thickness. For a uniform compression or expansion of a body, l is proportional to $V^{\frac{1}{3}}$. Hence, to calculate the heat capacity $\mathscr{C}_\phi$, we must differentiate $\mathscr{S}$ for constant $\mathbb{E}V^{\frac{1}{3}}/\varepsilon$. The required difference is found to be

$$\mathscr{C}_\phi - \mathscr{C}_D = \frac{TV\mathbb{E}^2}{4\pi\varepsilon}\left[(\varepsilon - 1)\alpha + \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial T}\right)_P\right]\left[\frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial T}\right)_P - \frac{1}{3}\alpha\right].$$

Problem 3. Determine the electrocaloric effect in a homogeneous dielectric whose total volume is kept constant.

Solution. Strictly speaking, when an external field is applied the density of the body changes (and ceases to be uniform), even if the total volume is kept constant. In calculating the change in the total entropy, however. we can ignore this and assume the density ρ constant at every

[0]† If the body is thermally insulated, the application of the field results in a change of temperature $\Delta T = -Q/\mathscr{C}_P$, where $\mathscr{C}_P$ is the heat capacity at constant pressure.

‡ In the limit $\varepsilon \to \infty$, we find as the change in volume of a conducting ellipsoid $(V - V_0)/V = C^2/8\pi Kn$. For [a] sphere, $n = \frac{1}{3}$, and we recover the result in §5, Problem 4.

point. ‡
According to (10.18) the total entropy of the body is

$$\mathscr{S} = \mathscr{S}_0(\rho, T) + \frac{1}{8\pi}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial T}\right)_\rho \int E^2 \, \mathrm{d}V$$

where the integration is over the volume of the body. The amount of heat absorbed is

$$Q = \frac{T}{8\pi}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial T}\right)_\rho \int E^2 \, \mathrm{d}V$$

Problem 4. Determine the difference $\mathscr{C}_\phi - \mathscr{C}_D$ (see Problem 2) when the total volume of the disc is kept constant.

Solution. When the volume, and therefore the thickness, of the disc are constant, differentiation for constant potential difference is equivalent to differentiation for constant field E. Using the formula of Problem 3 for the entropy we have

$$\mathscr{C}_E - \mathscr{C}_D = \frac{TVE^2}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial T}\right)_\rho^2 = \frac{TV\mathbb{C}^2}{4\pi\varepsilon^3}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial T}\right)_\rho^2$$

Problem 5. A capacitor consists of two conducting surfaces at a distance h apart which is small compared with their dimensions; the space between them is filled with a substance of permittivity ε_1. A sphere of radius $a \ll h$ and permittivity ε_2 is placed in the capacitor. Determine the change in capacitance.

Solution. Let the sphere be placed in the capacitor in such a way that the potential difference ϕ between the plates remains unchanged. The free energy for constant potentials of the conductors is $\mathscr{F}$. In the absence of the sphere, $\mathscr{F} = -\frac{1}{2}C_0\phi^2$, where C_0 is the original capacitance. Since the sphere is small, we may imagine it to be brought into a uniform field $\mathbb{E} = \phi/h$, and the change in $\frac{3}{3}$ is small. The small change in at constant potentials is equal to the small change in $\mathscr{F}$ at constant charges on the sources of the field. Using the formula derived in §11. Problem, and (8.2), we have

$$\frac{1}{\mathscr{F}} = -\frac{1}{2}C_0\phi^2 - \frac{1}{2}a^3\varepsilon_1(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)\phi^2(2\varepsilon_1 + \varepsilon_2)h^2$$

whence the required capacitance is

$$C = C_0 + a^3\varepsilon_1(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)/(2\varepsilon_1 + \varepsilon_2)h^2$$

7.1.8 §13. Dielectric properties of crystals

In an anisotropic dielectric medium (a single crystal) the linear relation between the electric induction and the electric field is less simple, and does not reduce to a simple proportionality.

The most general form of such a relation is

$$D_i = D_{0i} + \varepsilon_{ik}E_k, \tag{13.1}$$

where $\mathbf{D}_0$ is a constant vector, and the quantities ε_{ik} form a tensor of rank two, called the permittivity tensor (or the dielectric tensor). The inhomogeneous term $\mathbf{D}_0$ in (13.1) does not,

[0]† $\mathscr{C}_\phi$ is the heat capacity of a disc between the plates of a plane capacitor in circuit with a constant e.m.f. In an unconnected capacitor with constant charges on the plates, the heat capacity of the disc is $\mathscr{C}_D$.
‡ The change in density $\delta\rho$ is of the second order with respect to the field ($\propto E^2$), and the consequent change in the total entropy is of the fourth order: the term in the change of total entropy which is linear in $\delta\rho$ is $(\partial S_0/\partial\rho)\int\delta\rho\mathrm{d}V$, and the integral is zero because the total mass of the body is unaltered.

however, appear for all crystals. The majority of the types of crystal symmetry do not admit this constant vector (see below), and we then have simply

$$D_i = \varepsilon_{ik} E_k. \tag{13.2}$$

The tensor ε_{ik} is symmetrical:

$$\varepsilon_{ik} = \varepsilon_{ki}. \tag{13.3}$$

In order to prove this, it is sufficient to use the thermodynamic relation (10.10) and to observe that the second derivative $-4\pi\partial^2\tilde{F}/\partial E_k \partial E_i = \partial D_i/\partial E_k = \varepsilon_{ik}$ is independent of the order of differentiation.

For $\tilde{F}$ itself we have (when (13.2) holds) the expression

$$\tilde{F} = F_0 - \varepsilon_{ik} E_i E_k / 8\pi \tag{13.4}$$

The free energy F is

$$F = \tilde{F} + E_i D_i / 4\pi = F_0 + \varepsilon^{-1}{}_{ik} D_i D_k / 8\pi \tag{13.5}$$

Like every symmetrical tensor of rank two, the tensor ε_{ik} can be brought to diagonal form by a suitable choice of the coordinate axes. In general, therefore, the tensor ε_{ik} is determined by three independent quantities, namely the three principal values $\varepsilon^{(1)}, \varepsilon^{(2)}, \varepsilon^{(3)}$. All these are necessarily greater than unity, just as $\varepsilon > 1$ for an isotropic body (see §14).

The number of different principal values of the tensor ε_{ik} may be less than three for certain symmetries of the crystal.

In crystals of the triclinic, monoclinic and orthorhombic systems, all three principal values are different; such crystals are said to be biaxial. † In crystals of the triclinic system, the directions of the principal axes of the tensor ε_{ik} are not uniquely related to any directions in the crystal. In those of the monoclinic system, one of the principal axes must coincide wita the twofold axis of symmetry or be perpendicular to the plane of symmetry of the crystal. In crystals of the orthorhombic system, all three principal axes of the tensor ε_{ik} are crystallographically fixed.

Next, in crystals of the tetragonal, rhombohedral and hexagonal systems, two of the

three principal values are equal, so that there are only two independent quantities; such crystals are said to be uniaxial. One of the principal axes coincides with the fourfold, threefold or sixfold axis of crystal symmetry, but the directions of the other two principal axes can be chosen arbitrarily.

Finally, in crystals of the cubic system all three principal values of the tensor ε_{ik} are the same, and the directions of the principal axes are entirely arbitrary. This means that the tensor ε_{ik} is of the form $\varepsilon\delta_{ik}$, i.e. it is determined by a single scalar ε. In other words, as regards their dielectric properties, crystals of the cubic system are no different from isotropic bodies.

All these fairly obvious symmetry properties of the tensor ε_{ik} become particularly clear if we use a concept from tensor algebra, the tensor ellipsoid, the lengths of whose semiaxes are proportional to the principal values of a symmetrical tensor of rank two. The symmetry of the ellipsoid corresponds to that of the crystal. For instance, in a uniaxial crystal the tensor ellipsoid degenerates into a spheroid completely symmetrical about the longitudinal axis; it should be emphasized that, as regards the physical properties of the crystal which are determined by a symmetrical tensor of rank two, the presence of a threefold or higher axis of symmetry is equivalent to complete isotropy in the plane perpendicular to this axis. In cubic crystals, the tensor ellipsoid degenerates into a sphere.

[0]† This name refers to the optical properties of the crystals; see §98, 99.

Let us now examine the dielectric properties of crystals for which the constant term $\mathbf{D_0}$ appears in (13.1). The presence of this term signifies that the dielectric is spontaneously polarized even in the absence of an external electric field. Such bodies are said to be pyroelectric. The magnitude of this spontaneous polarization is, however, in practice always very small (in comparison with the molecular fields). This is because large values of D $_0$ would lead to strong fields within the body, which is energetically very unfavourable and therefore could not correspond to thermodynamic equilibrium. The smallness of $\mathbf{D}_0$ also ensures the legitimacy of an expansion of $\mathbf{D}$ in powers of $\mathbf{E}$, of which (13.1) represents the first two terms.

The thermodynamic quantities for a pyroelectric body are found by integrating the relation $-4\pi\partial\tilde{F}/\partial E_i = D_i = D_{0i} + \varepsilon_{ik}E_k$, whence

$$\tilde{F} = F_0 - \varepsilon_{ik}E_iE_k/8\pi - E_iD_{0i}/4\pi. \tag{13.6}$$

The free energy is

$$\begin{aligned} F = \widetilde{F} + E_iD_i/4\pi &= F_0 + \varepsilon_{ik}E_iE_k/8\pi \\ &= F_0 + \varepsilon^{-1}{}_{ik}\left(D_i - D_{0i}\right)\left(D_k - D_{0k}\right)/8\pi \end{aligned} \tag{13.7}$$

It should be noted that the term in $\bar{F}$ linear in E_i does not appear in F.†
The total free energy of a pyroelectric can be calculated from formula (11.12) by substituting (13.7) and (13.1). If there is no external field, $\mathbb{C} = 0$, and we have simply

$$\mathscr{F} = \int \left[F_0 - (\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}_0/8\pi)\right] \mathrm{d}\boldsymbol{I} \tag{13.8}$$

It is remarkable that the free energy of a pyroelectric in the absence of an external field depends, like the field $\mathbf{E}$, not only on the volume of the body but also on its shape.

As has already been pointed out, the phenomenon of pyroelectricity is not possible for every crystal symmetry. Since, in any symmetry transformation, all the properties of the crystal must remain unchanged, it is clear that the only crystals which can be pyroelectric are those in which there is a direction which is unchanged (and, in particular, not reversed) in all symmetry transformations, and that this will be the direction of the constant vector $\mathbf{D}_0$.

This condition is satisfied only by those symmetry groups which consist of a single axis together with planes of symmetry which pass through the axis. In particular, crystals having a centre of symmetry certainly cannot be pyroelectric. We may enumerate those out of the 32 crystal classes in which pyroelectricity occurs:
triclinic system: $\boldsymbol{C}_1$
monoclinic system: $\boldsymbol{C}_s, \boldsymbol{C}_2$
orthorhombic system: $\boldsymbol{C}_{2v}$
tetragonal system: $\boldsymbol{C}_4, \boldsymbol{C}_{4v}$
rhombohedral system: $\boldsymbol{C}_3, \boldsymbol{C}_{3v}$
hexagonal system: $\boldsymbol{C}_6, \boldsymbol{C}_{6v}$.
There are, of course, no pyroelectric cubic crystals. In a crystal of class C_1 the direction of the pyroelectric vector $\mathbf{D_0}$ is not related to any direction fixed in the crystal; in one of class C_s, it must lie in the plane of symmetry. In all the remaining classes listed above the direction of $\mathbf{D_0}$ is that of the axis of symmetry. †

It should be mentioned that, under ordinary conditions. pyroelectric crystals have zero total electric dipole moment, although their polarization is not zero. The reason is that there is a

[0]† It should also be noted that in these formulae we neglect the piezoelectric effect, i.e. the effect of internal Stresses on the electric properties of a body; see §17. The formulae given here are therefore, strictly speaking. applicable only when the fields are uniform throughout the body, and internal stresses do not arise.

non-zero field **E** inside a spontaneously polarized dielectric. Since a body usually has a small but non-zero conductivity, the presence of a field gives rise to a current, which flows until the free charges formed on the surface of the body annihilate the field inside it. The same effect is produced by ions deposited on the surface from the air. Experimentally, pyroelectric properties are observed when a body is heated and a change in its spontaneous polarization is detected.

PROBLEMS

Problem 1. Determine the field of a pyroelectric sphere in a vacuum.

Solution. The field inside the sphere is uniform, and the field and induction are related by $2\mathbf{E} = -\mathbf{D}$ (as follows from (8.1) when $\Leftrightarrow = 0$, i.e. when there is no applied external field). Substituting in (13.1), we obtain the equation $2E_i + \varepsilon_{ik}E_k = -D_{0i}$. We take the coordinate axes to be the principal axes of the tensor ε_{ik}. Then this equation gives $E_{\text{i}} = -D_{0i}/\left(2+\varepsilon^{(i)}\right)$. The polarization of the sphere is $P_i = (D_i - E_i)/4\pi = 3D_{0i}/4\pi\left(2+\varepsilon^{(i)}\right)$. The field outside the sphere is that of an electric dipole with moment $\mathscr{F} = \mathbf{P}V$.

Problem 2. Determine the field of a point charge in a homogeneous anisotropic medium. ‡

Solution. The field of a point charge is given by the equation $\operatorname{div}\mathbf{D} = 4\pi e\delta(\mathbf{r})$ (the charge being at the origin). In an anisotropic medium $D_i = \varepsilon_{ik}E_k = -\varepsilon_{ik}\partial\phi/\partial x_k$; taking the coordinate axes x, y, z along the principal axes of the tensor ε_{ik}, we obtain for the potential the equation

$$\varepsilon^{(x)}\partial^2\phi/\partial x^2 + \varepsilon^{(y)}\partial^2\phi/\partial y^2 + \varepsilon^{(z)}\partial^2\phi/\partial z^2 = -4\pi e\hat{\partial}(\mathbf{r})$$

By the introduction of new variables

$$x' = x/\sqrt{\varepsilon^{(x)}}, \quad y' = y\sqrt{\varepsilon^{(y)}}. \quad z' = z\sqrt{\varepsilon^{(z)}} \tag{1}$$

this becomes

$$\dot{L}'\phi = -\frac{4\pi e}{\sqrt{\left(\varepsilon^{(x)}\varepsilon^{(y)}\varepsilon^{(z)}\right)}}\delta(\mathbf{r}')$$

which formally differs from the equation for the field in a vacuum only in that e is replaced by $e' = e/V\left(\varepsilon^{(x)}\varepsilon^{(y)}\varepsilon^{(z)}\right)$. Hence

$$\phi = \frac{e'}{r'} = \frac{e}{\sqrt{\left(\varepsilon^{(x)}\varepsilon^{(y)}\varepsilon^{(z)}\right)}}\left[\frac{x^2}{\varepsilon^{(x)}} + \frac{y^2}{\varepsilon^{(y)}} + \frac{z^2}{\varepsilon^{(z)}}\right]^{-\frac{1}{2}}$$

In tensor notation. independent of the system of coordinates chosen. we have

$$\phi = e/\sqrt{\left(|\varepsilon|\varepsilon^{-1}{}_{ik}x_ix_k\right)}$$

where $|\varepsilon|$ is the determinant of the tensor ε_{ik}.

Problem 3. Determine the capacitance of a conducting sphere, with radius a, in an anisotropic dielectric medium.

Solution. By the transformation shown in Problem 2. the determination of the field of a sphere with charge e in an anisotropic medium reduces to the determination of the field in

[0]† In referring to symmetry conditions, we are regarding the crystal as an infinite medium. For a finite crystal, the exact value of the total dipole moment may depend (in an ionic crystal) on which crystal planes form its faces and whether these planes contain ions of only one sign or are electrically neutral. However, in macroscopic electrodynamics, which implies averaging over physically infinitesimal volumes, it is reasonable to consider that the position of the faces relative to the crystal lattice is averaged also. In consequence of this averaging, D_0 vanishes in any non-pyroelectric finite crystal, and in a pyroelectric one is independent of the face configuration.

‡ In Problems 2-6 the anisotropic dielectric is assumed to be non-pyroelectric.

a vacuum due to a charge e^r distributed over the surface of the ellipsoid $\varepsilon_{ik}x'_i x'_k = \varepsilon^{(x)}x'^2 + \varepsilon^{(y)}y'^2 + \varepsilon^{(z)}z'^2 = a^2$. Using formula (4.14) for the potential due to an ellipsoid, we find the required capacitance to be given by

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{2\sqrt{\left(\varepsilon^{(x)}\varepsilon^{(y)}\varepsilon^{(z)}\right)}} \int_0^\infty \left[\left(\xi + \frac{a^2}{\varepsilon^{(x)}}\right)\left(\xi + \frac{a^2}{\varepsilon^{(y)}}\right)\left(\xi + \frac{a^2}{\varepsilon^{(z)}}\right)\right]^{-\frac{1}{2}} \mathrm{d}\xi$$

Problem 4. Determine the field in a flat anisotropic plate in a uniform external field $\mathfrak{C}$.
Solution. From the condition of continuity of the tangential component of the field it follows that $\mathbf{E} = \boldsymbol{C} + A\mathbf{n}$, where $\mathbf{E}$ is the uniform field inside the plate, $\mathbf{n}$ a unit vector normal to its surface, and A a constant. The constant is determined from the condition of continuity of the normal component of the induction, $\mathbf{n}\cdot\mathbf{D} = \mathrm{n}\cdot\mathbb{C}$, or $n_i\varepsilon_{ik}E_k = n_i\varepsilon_{ik}\mathbb{E}_k + A\varepsilon_{ik}n_i n_k = \mathbb{E}_i n_i$. Hence $A = -\left(\varepsilon_{ik} - \delta_{ik}\right)n_i\mathbb{E}_k/\varepsilon_{im}n_1 n_m$.
In particular, if the external field is along the normal to the plate (the z-direction), we have

$$A = \mathbb{E}\left(1 - \varepsilon_{zz}\right)/\varepsilon_{zz}.$$

If it is parallel to the plate and in the x-direction, then

$$A = -\mathfrak{E}_{\varepsilon_{zx}}/\varepsilon_{zz}$$

P ROBLEM 5. Determine the torque on an anisotropic dielectric sphere, with radius a, in a uniform external field $\mathfrak{E}$ in a vacuum.
Solution. According to (8.2) we have for the field inside the sphere $E_x = 3\mathbb{E}_x/\left(\boldsymbol{c}^{(x)} + 2\right)$, and similarly for E_y, E_z. Here the axes of x, y, z are taken to be the principal axes of the tensor ε_{ik}. Hence the components of the dipole moment of the sphere are

$$\mathscr{P}_x = \frac{4}{3}\pi a^3 P_x = \frac{\varepsilon^{(x)} - 1}{\varepsilon^{(x)} + 2}a^3\mathbb{E}_x, \text{ etc.}$$

The components of the torque on the sphere are

$$K_z = \left(\mathscr{P}\times\left(\mathfrak{E}'\right)_z = 3a^3\mathfrak{E}_x\mathbb{E}_y\left(\varepsilon^{(x)} - \varepsilon^{(y)}\right)/\left(\varepsilon^{(x)} + 2\right)\left(\varepsilon^{(y)} + 2\right),\right.$$

and similarly for K_x, K_y.

P ROBLEM 6. An infinite anisotropic medium contains a spherical cavity with radius a. Express the field in the cavity in terms of the uniform field $E^{(e)}$ far from the cavity.
Solution. The transformation (1) of Problem 2 reduces the equation for the field potential in the medium to Laplace's equation for the field in a vacuum. The equation for the field potentiat in the cavity is transformed into that for the potential in a medium with permittivities $1, \varepsilon^{(x)}, 1/\varepsilon^{(y)}, 1/\varepsilon^{(z)}$. Moreover, the sphere is transformed into
an ellipsoid with semiaxes $a/\sqrt{\varepsilon^{(x)}}, a/\sqrt{\varepsilon^{(y)}}, a/\sqrt{\varepsilon^{(z)}}$. Let $n^{(x)}, n^{(y)}, n^{(z)}$ be the depolarizing factors of such an ellipsoid (given by formulae (4.25)). Applying formula (8.7) to the field of this ellipsoid, we obtain the relation

$$\left(1 - n^{(x)}\right)\frac{\partial\phi^{(i)}}{\partial x'} + \frac{n^{(x)}}{\varepsilon^{(x)}}\frac{\partial\phi^{(i)}}{\partial x'} = \frac{\partial\phi^{(e)}}{\partial x'}$$

and similarly for the y' and z' directions. Returning to the original coordinates, we have $\partial\phi/\partial x' = \sqrt{\varepsilon^{(x)}}\partial\phi/\partial x = -\sqrt{\varepsilon^{(x)}}E_x$, so that the field in the cavity is

$$E_x^{(i)} = \frac{E^{(x)}}{E^{(x)} - n^{(x)}\left(\varepsilon^{(x)} - 1\right)}E_x^{(e)}{}_x$$

7.1.9 §14. The sign of the dielectric susceptibility

To elucidate the way in which the thermodynamic quantities for a dielectric in a field depend on its permittivity, let us consider the formal problem of the change in the electric component of the total free energy of the body when ε undergoes an infinitesimal change.

For an isotropic (not necessarily homogeneous) body we have by (10.20)$\mathscr{F}^4 - \mathscr{F}_0 = \int (D^2/8\pi\varepsilon)\,\mathrm{d}I$. When ε changes, so does the induction, and the variation in the free energy is therefore

$$\delta\mathscr{F} = \int \frac{\mathbf{D}\cdot\delta\mathbf{D}}{8\pi\varepsilon}\,\mathrm{d}V - \int \frac{D^2}{8\pi\varepsilon^2}\delta\varepsilon\,\mathrm{d}V$$

The first term on the right is the same as (10.2), which gives the work done in an infinitesimal change in the field sources (i.e. charges on conductors). In the present case, however, we are considering a change in the field but no change in the sources. This term therefore vanishes, leaving

$$\delta\mathscr{F} = -\int \left(\delta\varepsilon/\varepsilon^2\right)\left(D^2/8\pi\right)\mathrm{d}V = -\int \delta\varepsilon\left(E^2/8\pi\right)\mathrm{d}V. \tag{14.1}$$

From this formula it follows that any increase in the permittivity of the medium, even if in only a part of it (the sources of the field remaining unchanged), reduces the total free energy. In particular, we can say that the free energy is always reduced when uncharged conductors are brought into a dielectric medium, since these conductors may (in electrostatics) be regarded as bodies whose permittivity is infinite. This conclusion generalizes the theorem (\$2) that the energy of the electrostatic field in a vacuum is diminished when an uncharged conductor is placed in it.

The total free energy is diminished also when any charge is brought up to a dielectric body from infinity (a process which may be regarded as an increase of ε in a certain volume of the field round the charge). In order to conclude from this that any charge is attracted to a dielectric, we should, strictly speaking, prove also that $\mathscr{F}$ cannot attain a minimum for any finite distance between the charge and the body. We shall not pause here to prove this statement, especially as the presence of an attractive force between a charge and a dielectric may be regarded as a fairly evident consequence of the interaction between the charge and the dipole moment of the dielectric, which it polarizes.

We can deduce immediately from formula (14.1) the direction of motion of a dielectric body in an almost uniform electric field, i.e. one which may be regarded as uniform over the dimensions of the body. In this case E^2 is taken outside the integral, and the difference $\mathscr{F} - \mathscr{F}_o$ is a negative quantity, proportional to E^2. In order to take a position in which its free energy is a minimum, the body will therefore move in the direction of E increasing.

It can be shown independently of (14.1) that the total change in the free energy of [a] dielectric when it is placed in an electric field is negative. † This can be done by the use of thermodynamic perturbation theory, the change in the free energy of the body being regarded as the result of a perturbation of its quantum energy levels by the external electric field. According to this theory we have

$$\mathscr{F} - \mathscr{F}_0 = \bar{V}_{nm} - \frac{1}{2}\sum_n\sum_m \frac{|V_{nm}|^2\,(w_m - w_n)}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}} - \frac{1}{2T}\left(\overline{l_{nn} - \bar{l}_{nn}}\right)^2; \tag{14.2}$$

see $SP1$, (32.6). Here $E_n{}^{(0)}$ are the unperturbed levels, V_{mn} the matrix elements of the perturbing energy, and the bar denotes a statistical averaging with respect to the Gibbs distribution $\underline{w}_n = \exp\left\{\left(\mathscr{F}_0 - E_n{}^{(0)}\right)/T\right\}$.

The term $\bar{V}_{nn}$ in formula (14.2), which is linear in the field, is zero except in pyroelectric bodies. The quadratic change in the free energy, which is of interest here, is given by the remaining terms. It is evident that they are negative.

On the other hand, it is clear from the derivation of (14.2) that the total free energy $\mathscr{F}$ must be taken in this formula as described in §11, omitting the energy of the field which would exist in the absence of the body. The difference $\mathscr{F} - \mathscr{F}_0$ is therefore given by the thermodynamic formula (11.7). Let us consider a long narrow cylinder placed parallel to a uniform external field $\mathbb{C}$. The field within the cylinder is then $\mathbb{C}$ also, and its polarization $\mathbf{P} = (\varepsilon - 1)\mathbb{E}/4\pi$, so that

$$\mathscr{F} - \mathscr{F}_0 = -(\varepsilon - 1)V\mathscr{C}^2/8\pi.$$

Thus $\mathscr{F} - \mathscr{F}_0$ is negative only if $\varepsilon > 1$. This leads to the conclusion mentioned in §7 and already made use of, namely that the permittivity of all bodies exceeds unity, and the dielectric susceptibility $\kappa = (\varepsilon - 1)/4\pi$ is therefore positive.

In the same way we can prove the inequalities $\varepsilon^{(i)} > 1$ for the principal values of the tensor ε_{ik} in an anisotropic dielectric medium. To do so, it is sufficient to consider the energy of a field parallel to each of the three principal axes in turn.

7.1.10 §15. Electric forces in a fluid dielectric

The problem of calculating the forces (called ponderomotive forces) which act on a dielectric in an arbitrary non-uniform electric field is fairly complicated and requires separate consideration for fluids (liquids or gases) and for solids. We shall take first the simpler case, that of fluid dielectrics. We denote by fd the force on a volume element dV, and call the vector $\mathbf{f}$ the force density.

It is well known that the forces acting on any finite volume in a body can be reduced to forces applied to the surface of that volume (see TE, §2). This is a consequence of the law of conservation of momentum. The force acting on the matter in a volume dV is the change in its momentum per unit time. This change must be equal to the amount of momentum entering the volume through its surface per unit time. If we denote the momentum flux

tensor by $-\sigma_{ik}$, then †

$$\int f_i \, \mathrm{d}V = \oint \sigma_{ik} \, \mathrm{d}f_k \tag{15.1}$$

where the integration on the right is over the surface of the volume V. The tensor σ_{ik} is called the stress tensor. It is evident that $\sigma_{ik} \, \mathrm{d}f_k = \sigma_{ik} n_k \, \mathrm{d}f$ is the i th component of the force on a surface element df (n being a unit vector along the normal to the surface outwards from the volume under consideration).

Similarly, the total torque acting on a given volume also reduces to a surface integral, by virtue of the law of conservation of angular momentum. This reduction is possible because of the symmetry of the stress tensor ($\sigma_{ik} = \sigma_{ki}$), which thus expresses the conservation law mentioned.

On transforming the surface integral in (15.1) into a volume integral, we obtain $\int f_i \, \mathrm{d}V = \int (\partial\sigma_{ik}/\partial x_k) \, \mathrm{d}V$, whence, since the volume of integration is arbitrary,

$$f_i = \partial\sigma_{ik}/\partial x_k \tag{15.2}$$

[0]† The change proportional to the square of the field is meant. It may be recalled that, in pyroelectric bodies. the change in the free energy contains also a term linear in the field, which is of no interest here.

This is a well-known formula giving the body forces in terms of the stress tensor.
Let us now calculate the stress tensor. Any small region of the surface may be regarded as plane, and the properties of the body and the electric field near it as uniform. Hence, to simplify the derivation, we can with no loss of generality consider a plane-parallel layer of material (with thickness h and uniform composition, density and temperature) in an electric field which is uniform. ‡ This field may be imagined to be due to conducting planes, such as the plates of a capacitor, applied to the surfaces of the layer.

Following the general method for determining forces, we subject one of the plates (the upper one, say) to a virtual translation over an infinitesimal distance ξ, whose direction is arbitrary and need not be that of the normal $\mathbf{n}$. We shall suppose that the potential of the conductor remains unchanged at every point, and that the homogeneous deformation of the dielectric layer, resulting from the translation, is isothermal.

A force $-\sigma_{ik}n_k$ is exerted by the layer on unit area of the surface. In the virtual displacement this force does work $-\sigma_{ik}n_k\xi_i$. The work done in an isothermal deformation at constant potential is equal to the decrease in $\int \widetilde{F}\ \mathrm{d}V$, i.e. in $h\widetilde{F}$ per unit surface area. Thus

$$\sigma_{ik}\xi_i n_k = \delta(h\widetilde{F}) = h\delta\widetilde{F} + \widetilde{F}\delta h \tag{15.3}$$

The thermodynamic quantities for the fluid depend (for given temperature and field) only on its density; deformations which do not change the density (i.e. pure shears) do not affect the thermodynamic state. We can therefore write for an isothermal variation $\delta\widetilde{F}$ in a fluid

$$\begin{aligned}\delta\tilde{F} &= \left(\frac{\partial\tilde{F}}{\partial\mathbf{E}}\right)_{T,\rho}\cdot\delta\mathbf{E} + \left(\frac{\partial\tilde{F}}{\partial\rho}\right)_{\mathbf{E},T}\delta\rho \\ &= -\frac{\mathbf{D}\cdot\delta\mathbf{E}}{4\pi} + \left(\frac{\partial\tilde{F}}{\partial\rho}\right)_{\mathbf{E},T}\delta\rho.\end{aligned} \tag{15.4}$$

The change in the density of the layer is related to the change in its thickness by $\delta\rho = -\rho\delta h/h$. The variation of the field is calculated as follows. At a given point in space (with position vector $\mathbf{r}$) there appears matter which was originally at $\mathbf{r}-\mathbf{u}$, where $\mathbf{u}$ is the particle displacement vector in the layer. Since, under the conditions stated (homogeneous deformation, and constant potential on the plates), each particle carries its potential with it, the change in the potential at a given point in space is $\delta\phi = \phi(\mathbf{r}-\mathbf{u}) - \phi(\mathbf{r}) = -\mathbf{u}\cdot\operatorname{grad}\phi = \mathbf{u}\cdot\mathbf{E}$, where $\mathbf{E}$ is the uniform field in the undeformed layer. Since the deformation is homogeneous, however, we have

$$\mathbf{u} = z\xi/h, \tag{15.5}$$

where z is the distance from the lower surface. Hence the variation of the field is

$$\delta\mathbf{E} = -\mathbf{n}(\mathbf{E}\cdot\boldsymbol{\xi})/h. \tag{15.6}$$

Substituting the above expressions in (15.4) and using also the fact that $\delta h = \xi_z = \xi\cdot\mathbf{n}$, we obtain

[0]† The force component f_i is not to be confused with the surface area component $\mathrm{d}f_k$.
‡ We thus ignore any terms in the stress tensor depending on the gradients of temperature, field, etc. These terms. however, are vanishingly small in comparison with terms which do not contain derivatives, in the same way as any terms containing derivatives which might appear in the relation between $\mathbf{D}$ and $\mathbf{E}$.

$$\sigma_{ik}\xi_i n_k = \frac{1}{4\pi}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{D})(\xi\cdot\mathbf{E}) - \xi\cdot\mathbf{n}\rho\frac{\partial\widetilde{F}}{\partial\rho} + \xi\cdot\mathbf{n}\widetilde{F}$$
$$= \left\{\frac{E_i D_k}{4\pi} - \rho\frac{\partial\widetilde{F}}{\partial\rho}\delta_{ik} + \widetilde{F}\delta_{ik}\right\}\xi_i n_k$$

Hence we have finally the following expression for the stress tensor:

$$\sigma_{ik} = \left[\widetilde{F} - \rho(\partial\widetilde{F}/\partial\rho)_{\mathbf{E},T}\right]\delta_{ik} + E_i D_k/4\pi \tag{15.7}$$

In isotropic media, which are those here considered, $\mathbf{E}$ and $\mathbf{D}$ are parallel. Hence $E_i D_k = E_k D_i$, and the tensor (15.7) is symmetrical, as it should be †

If the linear relation $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$ holds, then

$$\widetilde{F} = F_0(\rho, T) - \varepsilon E^2/8\pi \tag{15.8}$$

see (10.17). F_0 is the free energy per unit volume in the absence of the field. According to a well-known thermodynamic relation, the derivative of the free energy per unit mass with respect to the specific yolume is the pressure:

$$\left[\frac{\partial}{\partial(1/\rho)}\left(\frac{F_0}{\rho}\right)\right]_T = F_0 - \rho\left(\frac{\partial F_0}{\partial\rho}\right)_T = -P_0$$

$P_0 = P_0(\rho, T)$ is the pressure which would be found in the medium in the absence of a field and for given values of ρ and T. Hence, substituting (15.8) in (15.7), we have

$$\sigma_{ik} = -P_0(\rho,T)\delta_{ik} - \frac{E^2}{8\pi}\left[\varepsilon - \rho\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_T\right]\delta_{ik} + \frac{\varepsilon E_i E_k}{4\pi} \tag{15.9}$$

In a vacuum, this expression becomes the familiar Maxwell stress tensor of the electric field. ‡

The forces exerted on the surface of separation by two adjoining media must be equal and opposite: $\sigma_{ik}n_k = -\sigma'_{ik}n'_k$, where the quantities with and without the prime refer to the two media. The normal vectors $\mathbf{n}$ and $\mathbf{n}'$ are in opposite directions, so that

$$\sigma_{ik}n_k = \sigma'_{ik}n_k \tag{15.10}$$

At the boundary of two isotropic media the condition of equality of the tangential forces is satisfied identically. For, substituting (15.7) in (15.10) and taking the tangential component, we obtain $\mathbf{E}_t D_n = \mathbf{E}'_t D'_n$. This equation is satisfied by virtue of the boundary conditions of continuity on $\mathbf{E}_t$ and D_n. The condition of equality of the normal forces is, however, a nontrivial condition on the pressure difference between the two media.

For example, let us consider a boundary between a liquid and the atmosphere (for which we can put $\varepsilon = 1$). Denoting by a prime quantities pertaining to the atmosphere, and using formula (15.9) for σ_{ik}, we have

$$-P_0(\rho,T) + \frac{E^2}{8\pi}\rho\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_T + \frac{\varepsilon}{8\pi}\left(E_n^2 - E_t^2\right) = -P_{\text{atm}} + \frac{1}{8\pi}\left(E_n^2 - E_t'^2\right)$$

Using the boundary conditions $E_t = E'_t, D_n = \varepsilon E_n = D'_n = E'_n$, we can rewrite this equation as

[0]† It is not important that in this derivation $\mathbf{E}$ is parallel to n, since σ_{ik} can obviously depend only on the direction of $\mathbf{E}$, not on that of $\mathbf{n}$.

‡ See the first footnote to §5.

$$P_0(\rho,T)-P_{\rm atm}=\frac{\rho E^2}{8\pi}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_T-\frac{\varepsilon-1}{8\pi}\left(\varepsilon E_n^2+E_{\rm t}^2\right) \tag{15.11}$$

This relation is to be taken as determining the density ρ of the liquid near its surface from the electric field in it.

Let us now determine the body forces acting in a dielectric medium. Differentiating (15.9) in accordance with (15.2) gives

$$f_i=\frac{\partial}{\partial x_i}\left[-P_0+\frac{E^2}{8\pi}\rho\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_T\right]-\frac{E^2}{8\pi}\frac{\partial\varepsilon}{\partial x_i}+\frac{1}{4\pi}\left[-\frac{1}{2}\varepsilon\frac{\partial}{\partial x_i}E^2+\frac{\partial}{\partial x_k}\left(E_iD_k\right)\right]$$

On using the equation $\operatorname{div}\mathbf{D}\equiv\partial D_k/\partial x_k=0$, the expression in the brackets in the last term can be reduced to

$$-\varepsilon E_k\frac{\partial E_k}{\partial x_i}+D_k\frac{\partial E_i}{\partial x_k}=-D_k\left(\frac{\partial E_k}{\partial x_i}-\frac{\partial E_i}{\partial x_k}\right)$$

which is zero, since $\operatorname{curl}\mathbf{E}=0$. Thus we have

$$\mathbf{f}=-\operatorname{grad}P_0(\rho,T)+\frac{1}{8\pi}\operatorname{grad}\left[E^2\rho\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_T\right]-\frac{E^2}{8\pi}\operatorname{grad}\varepsilon \tag{15.12}$$

(H. Helmholtz, 1881).

If the dielectric contains extraneous charges with density $\rho_{\rm ex}$, the force $\mathbf{f}$ contains a further term $\mathbf{E}\operatorname{div}\mathbf{D}/4\pi$, or, since $\operatorname{div}\mathbf{D}=4\pi\rho_{\rm ex}$,

$$\rho_{\rm ex}\mathbf{E} \tag{15.13}$$

however, it should not be supposed that this result is obvious (cf. §16, Problem 3).

In a gas, as already mentioned in §7, we can assume the difference $\varepsilon-1$ to be proportional to the density. Then $\rho\partial\varepsilon/\partial\rho=\varepsilon-1$, and formula (15.12) takes the simpler form

$$\mathbf{f}=-\operatorname{grad}P_0+\frac{\varepsilon-1}{8\pi}\operatorname{grad}E^2 \tag{15.14}$$

Formula (15.12) is valid for media of both uniform and non-uniform composition In the latter case ε is a function not only of ρ and T but also of the concentration of the mixture, which varies through the medium. In a body of uniform composition, on the other hand, ε is a function only of ρ and T, and grad ε can be written as

$$\operatorname{grad}\varepsilon=(\partial\varepsilon/\partial T)_\rho\operatorname{grad}T+(\partial\varepsilon/\partial\rho)_T\operatorname{grad}\rho$$

Then (15.12) becomes

$$\mathbf{f}=-\operatorname{grad}P_0(\rho,T)+\frac{\rho}{8\pi}\operatorname{grad}\left[E^2\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_T\right]-\frac{E^2}{8\pi}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial T}\right)_\rho\operatorname{grad}T \tag{15.15}$$

If the temperature also is constant throughout the body, the third term on the right is zero, and in the first term grad P_0 can be replaced by ρ grad ζ_0, in accordance with the thermodynamic identity for the chemical potential in the absence of a field, $\rho\mathrm{d}\zeta_0=\mathrm{d}P_0-S_0\,\mathrm{d}T$. Thus

$$\begin{aligned}\mathbf{f}&=-\rho\mathbf{grad}\left[\zeta_0-\frac{E^2}{8\pi}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_T\right]\\&=-\rho\mathbf{grad}\zeta\end{aligned} \tag{15.16}$$

where ζ is the chemical potential in an electric field (see (10.19)).
In particular, the condition of mechanical equilibrium $\mathbf{f} = 0$ is, for constant temperature,

$$\zeta = \zeta_0 - \left(E^2/8\pi\right)(\partial\varepsilon/\partial\rho)_T = \text{ constant} \tag{15.17}$$

in accordance with the thermodynamic condition of equilibrium. This condition can usually be written still more simply. The change in density of the medium due to the field is proportional to E^2. Hence, if the medium is of uniform density in the absence of the field, we can put $\rho =$ constant in the last two terms in (15.15) when the field is present; an allowance for the change in ρ is beyond the accuracy of formulae which assume the linear relation $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$. Then, equating to zero $\mathbf{f}$ from (15.15), we obtain the equilibrium condition at constant temperature in the form

$$P_0(\rho, T) - \left(\rho E^2/8\pi\right)(\partial\varepsilon/\partial\rho)_T = \text{ constant} \tag{15.18}$$

which differs from (15.17) in that ζ_0 is replaced by P_0/ρ.
To close this section, we shall show how the expression (15.12) for the force may be derived directly from (14.1) if the calculation of the stress tensor is not required.

Let us consider an infinite inhomogeneous dielectric medium subjected to a small isothermal deformation that is zero at infinity. The variation $\delta\varepsilon$ is made up of two parts: (1) the change

$$\varepsilon(\mathbf{r} - \mathbf{u}) - \varepsilon(\mathbf{r}) = -\mathbf{u} \cdot \mathbf{grad}\varepsilon$$

due to the fact that a particle is brought by the deformation from $\mathbf{r} - \mathbf{u}$ to $\mathbf{r}$, and (2) the change $-(\bar{c}\varepsilon/\bar{c}\rho)_T\rho$ div $\mathbf{u}$, due to the change in the density of the substance at the point $\mathbf{r}$: it is known (see TE, §1) that div $\mathbf{u}$ is the relative change in the volume element, so that the change in the density is $\delta\rho = -\rho$ div $\mathbf{u}$. The variation in the free energy is therefore

$$\begin{aligned}\delta\mathscr{F} &= \delta\mathscr{F}_0 - \int \delta\varepsilon \left(E^2/8\pi\right) \mathrm{d}l \\ &= -\int P_0 \operatorname{div}\mathbf{u}\ \mathrm{d}V + \int \left(E^2/8\pi\right)\left[\mathbf{u} \cdot \operatorname{grad}\varepsilon + (\partial\varepsilon/\partial\rho)_T\rho \operatorname{div}\mathbf{u}\right]\mathrm{d}V;\end{aligned} \tag{1519}$$

the first term is the variation in the free energy when the field is absent. Integrating by parts the div $\mathbf{u}$ terms in (15.19) and comparing the result with the expression $\delta\mathscr{F} = -\int \mathbf{u} \cdot \mathbf{f}\mathrm{d}V$ for the free energy variation in terms of the work done by the forces $\mathbf{f}$, we arrive at (15.12).

7.1.11 §16. Electric forces in solids

The dielectric properties of a solid body change not only when its density changes (as with liquids) but also under deformations (pure shears) which do not affect the density. Let us first consider bodies which are isotropic in the absence of the field. In general, the deformed body is no longer isotropic; in consequence, its dielectric properties also become anisotropic, and the scalar permittivity ε is replaced by the dielectric tensor ε_{ik}.

The state of a slightly deformed body is described by the strain tensor

$$u_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)$$

where $\mathbf{u}(x, y, z)$ is the displacement vector for points in the body. Since these quantities are small, only the first-order terms in u_{ik} need be retained in the variation of the components ε_{ik}. Accordingly, we represent the dielectric tensor of the deformed body as

$$\varepsilon_{ik} = \varepsilon_0 \delta_{ik} + a_1 u_{ik} + a_2 u_n \delta_{ik}. \tag{16.1}$$

Here ε_0 is the permittivity of the undeformed body, and the other two terms, which contain the scalar constants a_1, a_2, form the most general tensor of rank two which can be constructed linearly from the components u_{ik}.

Let us now see where the derivation given in §15 must be modified. Since, in a solid body, $\widetilde{F}$ depends on all the components of the strain tensor, we must replace (15.4) by $\delta\widetilde{F} = -\mathbf{D}\cdot\delta\mathbf{E}/4\pi + \left(\partial\widetilde{F}/\partial u_{ik}\right)\delta u_{ik}$. For the virtual displacement considered, the vector u is given by formula (15.5), so that the strain tensor is $u_{ik} = (\xi_i n_k + \xi_k n_i)/2h$. Substituting this in $\delta\widetilde{F}$ and using the symmetry of the tensor u_{ik}, and therefore of the derivatives $\partial\widetilde{F}/\partial u_{ik}$, we obtain

$$\delta\widetilde{F} = -\mathbf{D}\cdot\delta\mathbf{E}/4\pi + (\xi_i n_k/h)\,\partial\widetilde{F}/\partial u_{ik}. \tag{16.2}$$

It is now evident that we find, instead of (15.7), the following expression for the stress tensor: †

$$\sigma_{ik} = \widetilde{F}\delta_{ik} = \left(\partial\widetilde{F}/\partial u_{ik}\right)_{T.E} + E_i D_k/4\pi \tag{16.3}$$

Formula (16.3) is valid whatever the relation between $\mathbf{D}$ and $\mathbf{E}$. For a body which is neither pyroelectric nor piezoelectric, so that $D_i = \varepsilon_{ik}E_k$, $\widetilde{F}$ is given by formula (13.4) and the required derivatives are $\partial\widetilde{F}/\partial u_{ik} = \partial F_0/\partial u_{ik} - (a_1 E_i E_k + a_2 E^2\delta_{ik})/8\pi$. We then pul $\varepsilon_{ik} = \varepsilon_0\delta_{ik}$ everywhere in (16.3) and obtain the following formula for the stress tensor:

$$\sigma_{ik} = \sigma_{ik}^{(0)} + (2\varepsilon_0 - a_1)\,E_i E_k/8\pi - (\varepsilon_0 + a_2)\,E^2\delta_{ik}/8\pi \tag{16.4}$$

$\sigma^{(0)}{}_{ik}$ is the stress tensor in the absence of an electric field, determined by the moduli of rigidity and compression according to the ordinary formulae of the theory of elasticity.

Let us now make similar calculations for anisotropic solids. † The necessary modification of the above argument is as follows. When the layer undergoes a virtual deformation, its crystallographic axes are rotated, and their orientation relative to the electric field is therefore changed. On account of the anisotropy of the dielectric properties of the crystal, this leads to an additional change in $\widetilde{F}$ not shown in (16.2). To calculate this change we can equally well suppose that the crystal axes rotate through some angle $\delta\phi$ relative to the field $\mathbf{E}$, or that the field rotates through an angle $-\delta\phi$ relative to the axes, and the latter approach is the more convenient.

Thus the variation of the field (15.6) considered above must be augmented by the change in $\mathbf{E}$ on rotation through an angle $-\delta\phi$:

$$\delta\mathbf{E} = -\mathbf{n}(\mathbf{E}\cdot\xi)/h - \delta\boldsymbol{\phi}\times\mathbf{E}.$$

The angle $\delta\boldsymbol{\phi}$ is related to the displacement vector $\mathbf{u}$ in the deformation by $\delta\boldsymbol{\phi} = \frac{1}{2}\mathbf{curlu}$; this equation is easily obtained by noticing that, when the body rotates through an angle $\delta\phi$, its points are displaced by $\mathbf{u} = \delta\phi\times\mathbf{r}$. Substituting $\mathbf{u}$ from (15.5), we find $\delta\phi = \operatorname{curl} z\xi/2h = \mathbf{n}\times\xi/2h$, and $\delta\mathbf{E} = -\mathbf{n}(\mathbf{E}\cdot\xi)/h + \mathbf{E}\times(\mathbf{n}\times\xi)/2h = -[\mathbf{n}(\mathbf{E}\cdot\xi) + \xi(\mathbf{n}\cdot\mathbf{E})]/2h$. The first term in (16.2) becomes

[0]† The quantity $\widetilde{F}$ in this formula, and in all preceding formulae, is the free energy per unit volume. In the theory of elasticity, however, a somewhat different definition is usual: the thermodynamic quantities are referred to the amount of matter contained in unit volume of the undeformed body, which may after deformation occup) some other volume. It is easy to go from one definition to the other by expressing the relative volume change in the deformation in terms of the tensor u_{ik}; on account of the presence of the derivative with respect to u_{ik} in (16.3). this must be done with allowance for second-order terms. As a result, the first two terms on the right of (16.3) combine into one of the form $\partial\widehat{F}'\partial u_k$, in accordance with the usual formula of elasticity theory.

$$-\frac{1}{4\pi}\mathbf{D}\cdot\delta\mathbf{E}=\frac{1}{8\pi h}[(\mathbf{n}\cdot\mathbf{D})(\xi\cdot\mathbf{E})+(\xi\cdot\mathbf{D})(\mathbf{n}\cdot\mathbf{E})]=\frac{1}{4\pi h}\xi_i n_k\cdot\frac{1}{2}\left(E_iD_k+E_kD_i\right)$$

Hence we see that the product E_iD_k in (16.3) must be replaced by the second factor in the last expression:

$$\sigma_{ik}=\widetilde{F}\delta_{ik}+\frac{\partial\widetilde{F}}{\partial u_{ik}}+\frac{1}{8\pi}\left(E_iD_k+E_kD_i\right) \tag{16.5}$$

This expression is symmetrical in the suffixes i and k, as it should be.
The expression (16.1) for the dielectric tensor, involving two scalar constants, must be replaced in the case of a deformed crystal by

$$\varepsilon_{ik}=\varepsilon_{ik}^{(0)}+a_{iklm}u_{im} \tag{16.6}$$

where a_{iklm} is a constant tensor of rank four, symmetrical with respect to the pairs of Suffixes i,k and l,m (but not with respect to an interchange of these pairs). The number of independent non-zero components of this tensor depends on the crystal class.

We shall not pause to write out here the formula for the stress tensor (analogous to (16.4)) which is obtained by using (16.6).

The formulae which we have obtained give the stresses inside a solid dielectric. They are not needed, however, if we wish to determine the total force **F** or the total torque **K** exerted On the body by the external field. Let us consider a body immersed in a fluid medium and kept at rest there. The total force on it is equal to the integral $\oint\sigma_{ik}n_k\,\mathrm{d}f$, taken over the surface. Since the force $\sigma_{ik}n_k$ is continuous, it does not matter whether this integral is calculated from the values of σ_{ik} given by (16.4) or from formula (15.9), which relates to the

medium surrounding the body. Let us suppose that this medium is in mechanical and thermal equilibrium. Then the calculation is further simplified if we use the condition of equilibrium (15.18). From this condition, part of the stress tensor (15.9) is constant through the body, being a uniform compressing or expanding pressure and making no contribution to the total force **F** and torque **K** acting on the body. These can therefore be calculated by writing σ_{ik} as

$$\sigma_{ik}=(\varepsilon/4\pi)\left(E_iE_k-\frac{1}{2}E^2\delta_{ik}\right) \tag{16.7}$$

simply, where **E** is the field in the fluid and ε its permittivity; this expression differs only by a factor ε from the Maxwell stress tensor of the electric field in a vacuum. Thus

$$\mathbf{F}=(\varepsilon/4\pi)\oint\left[\mathbf{E}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{E})-\frac{1}{2}E^2\mathbf{n}\right]\mathrm{d}f \tag{16.8}$$

$$\mathbf{K}=(\varepsilon/4\pi)\oint\left[\mathbf{r}\times\mathbf{E}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{E})-\frac{1}{2}E^2\mathbf{r}\times\mathbf{n}\right]\mathrm{d}f \tag{16.9}$$

It may also be noted that, since the fluid is in equilibrium, we can take these integrals over any closed surface which surrounds the body in question (but, of course, does not enclose any of the charged bodies which are sources of the field).

[0†] We shall see in §17 that the phenomenon of electrostruction in crystals may, for some types of symmetry, differ markedly from that in isotropic bodies. Such crystals are said to be piezoelectric. Here, however, we discuss Only electrostriction in non-piezoelectric crystals.

The calculation of the total force on a dielectric in an electric field in a vacuum can also be approached in another way by expressing this force, not in terms of the actual field, but in terms of the field $\boldsymbol{\epsilon}$ which would be produced by the given sources in the absence of the dielectric; this is the "external field" in which the body is placed. Here it is assumed that the distribution of charges producing the field is unchanged when the body is brought in. This condition may not be fulfilled in practice-for example, if the charges are distributed over the surface of an extended conductor and the dielectric is brought to a finite distance from it.

In a virtual translation of the body over an infinitesimal distance $\mathbf{u}$, the total free energy of the body varies, according to (11.3), by $\delta\mathscr{F} = -\int \mathbf{P}\cdot\delta\mathscr{C}\mathrm{d}V$, where $\delta\mathscr{C} = \mathbb{C}(\mathbf{r}+\mathbf{u}) - \mathbb{C}(\mathbf{r}) = (\mathbf{u}\cdot\mathrm{grad})\mathbb{C}$ is the change in the field at any given point in the body. Since $\mathbf{u}$ = constant and curl $\mathbb{E} = 0$, we have $\mathbf{P}\cdot(\mathbf{u}\cdot\mathrm{grad})\mathbb{E} = \mathbf{P}\cdot\mathrm{grad}(\mathbf{u}\cdot\mathbb{E}) = \mathbf{u}\cdot(\mathbf{P}\cdot\mathrm{grad})\mathbb{C}$, so that

$$\delta\mathscr{F} = -\mathbf{u}\cdot\int(\mathbf{P}\cdot\ \mathrm{grad}\ )\mathbb{C}\mathrm{d}V.$$

But $\delta\mathscr{F} = -u\cdot\mathbf{F}$, and we therefore have for the required force †

$$\mathbf{F} = \int(\mathbf{P}\cdot\mathrm{grad})\mathscr{E}\mathrm{d}V \tag{16.10}$$

Similarly, the total torque on the body can be determined. We shall not go through the calculation, but merely give the result:

$$\mathbf{K} = \int\mathbf{P}\times\mathbb{C}\mathrm{d}V + \int\mathbf{r}\times(\mathbf{P}\cdot\ \mathrm{grad}\ )\mathbb{C}\mathrm{d}V \tag{16.11}$$

In an almost uniform field, which may be regarded as constant over the dimensions of the body, formula (16.10) gives to a first approximation

$$\mathbf{F} = \left(\int\mathbf{P}\mathrm{d}V\cdot\mathrm{grad}\right)\mathbb{E} = (\mathscr{P}\cdot\mathrm{grad})\mathscr{C}, \tag{16.12}$$

where $\mathscr{P}$ is the total dipole moment of the polarized dielectric; this result, of course, could have been obtained by direct differentiation of $\mathscr{F}$ from (11.8). In formula (16.11) we neglect the second term in the first approximation and reach the natural conclusion that

$$\mathbf{K} = \mathscr{P}\times\mathbb{C}. \tag{16.13}$$

PROBLEMS

Problem 1. A dielectric sphere with radius a in a uniform external field $\mathscr{C}$ is cut in half by a plane perpendicular to the field. Determine the force of attraction between the hemispheres.

Solution. We imagine the hemispheres separated by an infinitely narrow slit and determine the force from formula (16.8) with $\varepsilon = 1$, integrating over the surface of a hemisphere; $\mathbf{E}$ is the field in the vacuum near the surface. According to (8.2) the field $\mathbf{E}^{(i)}$ inside the sphere is uniform and equal to $3\mathbb{C}/(2+\varepsilon)$, where ε is the permittivity of the sphere. The field in the slit is perpendicular to the surface and is $\mathbf{E} = \mathbf{D^{(i)}} = 3\varepsilon(\mathcal{C}/(2+\varepsilon)$. On the outer surface of the sphere we have

$$E_r = D^{(i)}{}_r = \frac{3\varepsilon}{2+\varepsilon}C\cos\theta, \quad E_\theta = E^{(i)}{}_\theta = -\frac{3}{2+\varepsilon}C\sin\theta,$$

[0]† It should be emphasized, however, that the integrand in (16.10) cannot be interpreted as the force density. The reason is that the local forces in the dielectric arise not only from the field $\mathbb{C}$ but also from the internal fields which, by Newton's third law, contribute nothing to the total force, though they modify the distribution of forces over the volume of the body.

where θ is the angle between the position vector and the direction of $\mathscr{C}$. A calculation of the integral gives an attractive force †

$$F = 9(\varepsilon - 1)^2 a^2 \epsilon^2 / 16(\varepsilon + 2)^2$$

Problem 2. Determine the change in shape of a dielectric sphere in a uniform external electric field.

Solution. As in §5, Problem 4. In determining the change in shape, we assume the volume of the sphere to be unchanged. ‡ The elastic part of the free energy is given by the same expression as in §5, Problem 4 . The electric part is given by (8.9):

$$-\frac{1}{2}\mathscr{P} \cdot \mathbb{E} = -\frac{V}{8\pi} \frac{\varepsilon^{(x)} - 1}{1 + n\left(\varepsilon^{(x)} - 1\right)} \mathbb{C}^2$$

and the permittivity in the x-direction is, by (16.1), $\varepsilon^{(x)} = \varepsilon_0 + a_1 u_{xx} = \varepsilon_0 + \frac{2}{3} a_1 \left(u_{xx} - u_{yy}\right) = \varepsilon_0 + \frac{2}{3} a_1 (a - b)/R$. From the condition that the total free energy be a minimum we find (since the quantity concerned is small)

$$\frac{a - b}{R} = \frac{9\mathbb{G}^2}{40\pi\mu} \frac{\left(\varepsilon_0 - 1\right)^2 + 5a_1/2}{\left(\varepsilon_0 + 2\right)^2}$$

For $\varepsilon_0 \to \infty$ this tends to the value for a conducting sphere.

Problem 3. Determine the body forces in an isotropic solid dielectric, assumed homogeneous, when extraneous charges are present in it.

Solution. Assuming ε_0, a_1, a_2 constant and using the equations curl $\mathbf{E} = 0, \operatorname{div} \mathbf{D} \cong \varepsilon_0 \operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho_{\text{ex}}$, we have from (16.4)

$$f_i = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = \frac{\partial \sigma_{ik}^{(0)}}{\partial x_k} - \frac{1}{8\pi}\left(\frac{1}{2}a_1 + a_2\right)\frac{\partial E^2}{\partial x_i} + \left(1 - \frac{a_1}{2\varepsilon_0}\right)\rho_{\text{ex}} E_i.$$

7.1.12 §17. Piezoelectrics

The internal stresses which occur in an isotropic dielectric in an electric field are Proportional to the square of the field. The effect is similar in crystals belonging to some of

the crystal classes. For certain types of symmetry, however, the electrostriction properties of the crystals are quite different. The internal stresses in these piezoelectric bodies resulting from an electric field are proportional to the field itself. The converse effect also occurs: the deformation of a piezoelectric is accompanied by the appearance in it of a field proportional to the deformation.

Since in a piezoelectric only the principal (linear) effect is of interest, we can neglect the terms quadratic in the field in the general formula (16.5). Then $\sigma_{ik} = \widetilde{F}\delta_{ik} + \left(\hat{C}\widetilde{F}'\hat{C}u_{ik}\right)_{I.\text{E}}$. In this section we shall use the thermodynamic quantities referred to the matter in unit volume of the undeformed body (see the first footnote to §16). Taking $\widetilde{F}$ in this sense, we have simply

$$\sigma_{ik} = \left(\partial\widetilde{F}/\partial u_{ik}\right)_{T.E} \tag{17.1}$$

Accordingly. the thermodynamic relation for the differential $\mathrm{d}\tilde{F}$ is

[0†] It is by chance that, in the limit $\varepsilon \to \infty$, this expression tends to the result obtained in §, Problem 3, for a [c] Conducting sphere (indeed, the forces are in opposite directions). The two cases are evidently not physically equivalent, because there is no field in the slit between two conducting hemispheres at the same potential, whereas in this problem there is a field in the slit.

‡ The change in volume is determined in §12, Problem 1.

$$\mathrm{d}\widetilde{F} = -S\ \mathrm{d}T + \sigma_{ik}\ \mathrm{d}u_{ik} - \mathbf{D}\cdot\mathrm{d}\mathbf{E}/4\pi \tag{172}$$

The following remark should be made concerning the last term. In the form given here. this term (taken from (10.9)) pertains, strictly speaking, to unit volume of the deformed body. By ignoring this fact, we commit an error which, in the case of a piezoelectric, is of a higher order of smallness than the remaining terms in (17.2).

The independent variables in (17.2) include the components of the tensor u_{ik}. It is sometimes convenient to use instead the components σ_{ik}. To do so, we must introduce the thermodynamic potential, defined as

$$\tilde{\Phi} = \tilde{F} - u_{ik}\sigma_{ik} \tag{17.3}$$

For the differential of this quantity we have

$$\mathrm{d}\tilde{\Phi} = -S\ \mathrm{d}T - u_{ik}\ \mathrm{d}\sigma_{ik} - \mathbf{D}\cdot\mathrm{d}\mathbf{E}/4\pi \tag{17.4}$$

It must be emphasized that the use of the thermodynamic potential Φ in electrodynamics in accordance with formulae (17.3) and (17.4) rests on the validity of (17.1) and so is possible only for piezoelectric bodies.

Having thus defined the necessary thermodynamic quantities, let us now ascertain the piezoelectric properties of crystals. If σ_{ik} and E_k are taken as independent variables, the induction $\mathbf{D}$ must be regarded as a function of them, and an expansion of this function must retain the terms linear in them. The linear terms in the expansion of the components of a vector in powers of the components of a tensor of rank two can be written, in the most general case, as $4\pi\gamma_{i,kl}\sigma_{kl}$, where the constants $\gamma_{i,kl}$ form a tensor of rank three, and the factor 4π is introduced for convenience. Since the tensor σ_{kl} is symmetrical, it is clear that the tensor $\gamma_{i,kl}$ may also be supposed to have the symmetry property

$$\gamma_{i,kl} = \gamma_{i,lk} \tag{17.5}$$

For clarity we separate the symmetrical suffixes from the remaining one by a comma. We call $\gamma_{i,kl}$ the piezoelectric tensor. If it is known, the piezoelectric properties of the crystal are entirely determined.

Adding the piezoelectric terms to the expression (13.1) for the electric induction in the crystal, we have

$$D_i = D_{\mathrm{O}i} + \varepsilon_{ik}E_k + 4\pi\gamma_{i,kl}\sigma_{kl} \tag{17.6}$$

Corresponding additional terms appear in the thermodynamic quantities. The thermodynamic potential of a non-piezoelectric crystal in the absence of a field is $\Phi = \Phi = \Phi_0 - \frac{1}{2}\mu_{iklm}\sigma_{ik}\sigma_{lm}$, where Φ_0 pertains to the undeformed body, and the second term is the ordinary elastic energy, determined by the elastic constant tensor $\mu_{iklm}+$ For a piezoelectric we have

$$\tilde{\Phi} = \Phi_0 - \frac{1}{2}\mu_{iklm}\sigma_{ik}\sigma_{lm} - \varepsilon_{ik}E_iE_k/8\pi - E_iD_{0i}/4\pi - \gamma_{i,kl}E_i\sigma_{kl}. \tag{17.7}$$

The form of the last three terms is given by the fact that the derivatives of $\widetilde{\Phi}$ with respect to E_i (for given temperature and internal stresses), found from the relation $D_i = -4\pi\partial\widetilde{\Phi}/\partial E_i$, must accord with (17.6).

Knowing Φ. we can obtain from (17.4) a formula giving the strain tensor in terms of the stresses σ_{ik} and the field $\mathbf{E}$:

$$u_{ik} = -\left(\partial\Phi/\partial\sigma_{ik}\right)_{T.E} = \mu_{iklm}\sigma_{lm} + \gamma_{l,ik}E_l. \tag{17.8}$$

It should be mentioned that to regard the quantities μ_{iklm} and ε_{ik} for a piezoelectric as elastic constants and permittivity is to some extent conventional. With the definitions used here, they give respectively the strains as functions of the elastic stresses for a given field, and the induction as a function of the field for given stresses. If, however, the deformation occurs with a given value of the induction, or we consider the induction as a function of the field for given strains, the elastic constants and the permittivity will be represented by other quantities, which can be expressed as somewhat complex functions of the components of the tensors μ, ε and γ.

The field in a piezoelectric body must be determined together with its deformation. leading to a problem in both electrostatics and elasticity theory. We must seek a simultaneous solution of the electrostatic equations

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 0, \quad \operatorname{curl} \mathbf{E} = 0. \tag{17.9}$$

with $\mathbf{D}$ given by (17.6), and the equations of elastic equilibrium

$$\partial \sigma_{ik} / \partial x_k = 0 \tag{17.10}$$

with the appropriate boundary conditions at the surface of the body and use of the relation (17.8) between σ_{ik} and the strains. In general this problem is very complex.

The problem is much simplified for a body of ellipsoidal form with a free surface (i.e. one subject to no external mechanical forces). In this case (§8), the field inside the body is uniform; the deformation is therefore homogeneous, and the elastic stresses $\sigma_{ik} = 0$.

Finally, let us consider which types of crystal symmetry allow the existence of piezoelectricity; in other words, what are the restrictions imposed on the components of the tensor $\gamma_{i,kl}$ by the symmetry conditions. In general, this tensor (which is symmetrical in

[+]The tensor μ_{iklm} determines the relation between stress and strain:

$$u_{ik} = -\lambda \Phi \lambda \sigma_{ik} = \mu_{ikm} \sigma_{lm}.$$

In TE, §10, the converse relation $\sigma_{ik} = \lambda_{iklm} u_{lm}$ is used. It is evident that the symmetry properties of the tensor μ_{lklm} are exactly the same as those of λ_{ikim} .

The free energy F contains the elastic energy with the plus sign:

$$F_{\mathrm{e1}} = \frac{1}{2} \lambda_{\mathrm{ik|m}} u_{\mathrm{ik}} u_{\mathrm{tm}}.$$

The thermodynamic potential is obtained from F by subtracting $\sigma_{ik} u_{ik}$. and so

$$\Phi_{\mathrm{e1}} = F_{\mathrm{e1}} - \sigma_{ik} u_{ik} = -\frac{1}{2} \lambda_{iktm} u_{ik} u_{lm} = -\frac{1}{2} \mu_{iktm} \sigma_{ik} \sigma_{lm}.$$

the suffixes k and l) has 18 independent non-zero components. but in reality the number of independent components is usually much smaller.

In all symmetry transformations of a given crystal, the components of the tensor $\gamma_{i,kl}$ must remain unaltered in value. Hence it follows at once that no piezoelectric body can have a centre of symmetry or, in particular, be isotropic. For, on reflection in the centre (i.e. change of sign of all three coordinates), the components of a tensor of rank three change sign.

Of the 32 crystal classes, only 20 allow piezoelectricity. These comprise the ten enumerated in §13 as allowing pyroelectricity (all pyroelectrics are also piezoelectrics) and the ten following classes:

orthorhombic system: $\boldsymbol{D_2}$

tetragonal system: D_4, D_{2d}, S_4

rhombohedral system: D_3

hexagonal system: D_6, C_{3h}, D_{3h}
cubic system: T, T_d.
The non-zero components of the piezoelectric tensor for each class are given in the Problems below.

Mention may also be made here of a phenomenon akin to piezoelectricity, which results from the "deformation" of a liquid crystal. We shall consider what are called nematic crystals ($SP1$, 140), liquids in which there is a distinctive direction of preferred orientation of the molecules. At each point in the medium, this direction is specified by a unit vector $\mathbf{d}$, the director of the crystal. In an undeformed liquid crystal, $\mathbf{d}$ has the same direction everywhere, but in a deformed one this direction is a function of the coordinates. The expansion (17.6) corresponds to an expression for the induction in a liquid crystal in the form

$$D_i = \varepsilon_{ik}E_k + 4\pi e_1 d_i \operatorname{div}\mathbf{d} + 4\pi e_2(\operatorname{curl}\mathbf{d}\times\mathbf{d})_i, \tag{17.11}$$

where e_1 and e_2 are scalar coefficients (R. B. Meyer, 1969). † The last two terms, which describe the effect in question, constitute the most general polar vector that can be formed from $\mathbf{d}$ and its first derivatives with respect to the coordinates. The expression (17.11) is automatically invariant under a change in the sign of $\mathbf{d}$.

The permittivity tensor of a nematic crystal has the same symmetry as for uniaxial crystals, the axis of symmetry being represented by the local (at each point) direction of the director. The tensor ε_{ik} may be expressed as

$$\varepsilon_{ik} = \varepsilon_0\delta_{ik} + \varepsilon_a d_i d_k \tag{17.12}$$

with two independent constants ε_0 and ε_a.

PROBLEMS

Problem 1. Determine the non-zer o components of the tensor $\gamma_{i,kl}$ for non-pyroelectric crystal classes which allow piezoelectricity.

Solution. The class D_2 has three mutually perpendicular twofold axes of symmetry, which we take as the axes of x, y and z. Rotations through 180° about these axes change the sign of two out of the three coordinates.
† Pyroelectricity in nematic crystals is in practice unknown, and we therefore put $\mathbf{D_0} = 0$.

Since the components $\gamma_{i,kl}$ are transformed as the products $x_i x_k x_i$, the only non-zero components are those with three different suffixes: $\gamma_{x,yz}, \gamma_{z,xy}, \gamma_{y,zx}$. (The other non-zero components are equal to these, since $\gamma_{z,kl} = \gamma_{i,kl}$.) Accordingly, the piezoelectric part of the thermodynamic potential is †

$$\tilde{\Phi}_{\text{pie}} = -2\left(\gamma_{x,yz}E_x\sigma_{yz} + \gamma_{y,xz}E_y\sigma_{xz} + \gamma_{x,xy}E_z\sigma_{xy}\right). \tag{1}$$

The class $\boldsymbol{D}_{2d}$ is obtained by adding to the axes of class $\boldsymbol{D}_2$ two planes of symmetry passing through one axis (the z-axis, say) and bisecting the angles between the other two. Reflection in one of these planes gives the transformation $x \to y, y \to x, z \to z$. Hence the components $\gamma_{i,kl}$ which differ by interchange of x and y must be equal, so that only two out of the three coefficients in (1) are now independent: $\gamma_{z,xy}, \gamma_{x,yz} = \gamma_{y,xz}$.

The class $\boldsymbol{T}$ is obtained from the class $\boldsymbol{D}_2$ by adding four diagonal threefold axes of symmetry, rotations about which effect a cyclic permutation of x, y, z, e.g. $x \to z, y \to x, z \to y$. Hence all three coefficients in (1) are equal: $\gamma_{x,yz} = \gamma_{y,zx} = \gamma_{z,xy}$. The same result is obtained for the cubic class $\boldsymbol{T}_d$.
The class D_4 has one fourfold axis of symmetry (the z-axis, say) and four twofold axes lying in the xy-plane. Here the symmetry elements of the class D_2 are supplemented by a rotation

through 90° about the z-axis, i.e. the transformation $x \to y, y \to -x, z \to z$. Consequently. one of the coefficients in (1) must be zero ($\gamma_{z,xy} = -\gamma_{z,yx} = -\gamma_{z,xy} = 0$), and the other two are equal, but opposite in sign: $\gamma_{x,yz} = -\gamma_{y,xz}$. The same result is obtained for the class D_6. The class S_4 includes the transformations $x \to y, y \to -x, z \to -z$ and $x \to -x, y \to -y, z \to z$. The non-zero components are $\gamma_{z,xy}, \gamma_{x,yz} = \gamma_{y,xz}, \gamma_{x,xx} = -\gamma_{x,yy}, \gamma_{x,zx} = -\gamma_{y,xy^*}$ One of these can be made to vanish by a suitable choice of the x and y axes.

The class D_3 has one threefold axis of symmetry (the z-axis. say), and three twofold axes lying in the xy-plane; let one of these be the x-axis. To find the restrictions imposed by the presence of a threefold axis, we make a formal transformation by introducing the complex "coordinates" $\xi = x + iy, \eta = x - iy$; the coordinate z remains unchanged. We must also transform the tensor $\gamma_{i,kl}$ to these new coordinates, in which the suffixes take the values ξ, η, z. In a rotation through 120° about the z-axis these coordinates undergo the transformation $\xi \to \xi e^{2\pi i/3}$, $\eta \to \eta e^{-2\pi i/3}, z \to z$. The only components of the tensor $\gamma_{i,ki}$ which remain unchanged and so may be different from zero are $\gamma_{z,\eta\zeta}, \gamma_{\eta,z\xi}, \gamma_{\xi,z\eta}, \gamma_{\xi,\xi\zeta}, \gamma_{\eta,\eta\eta}$ and $\gamma_{z,zz}$. A rotation through 180 about the x-axis gives the transformation $x \to x, y \to -y, z \to -z$, or $\xi \to \eta, \eta \to \xi, z \to -z; \gamma_{z,\eta\xi}$ and $\gamma_{z,zz}$ change sign and so must be zero, while the remaining components listed above are mutually transformed in pairs, giving $\gamma_{\eta,z\xi} = -\gamma_{\xi,z\eta}, \gamma_{\xi,\xi\xi} = \gamma_{\eta,\eta\eta}$. In order to write an expression of Φ_{pie} , we must form the sum $-\gamma_{i,kl}E_i\sigma_{kl}$, in which the suffixes take the values ξ, η, z :

$$\Phi_{\text{pie}} = -2\gamma_{\eta,z\xi}\left(E_\eta\sigma_{z\xi} - E_\xi\sigma_{z\eta}\right) - \gamma_{\xi,\xi\xi}\left(E_\xi\sigma_{\xi\xi} + E_\eta\sigma_{\eta\eta}\right).$$

Here the components E_{i} and σ_{ik} in the coordinates ξ, η, z must also be expressed in terms of those in the original coordinates x, y, z. This is easily done by using the fact that the components of a tensor are transformed as the products of the corresponding coordinates. Hence, for example, from $\xi\xi = xx - yy + 2ixy$, we have $\sigma_{\xi\xi} = \sigma_{xx} - \sigma_{yy} + 2i\sigma_{xy}$. The result is

$$\Phi_{\text{pie}} = 2a\left(E_y\sigma_{zx} - E_x\sigma_{zy}\right) + b\left[2E_y\sigma_{xy} - E_x\left(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}\right)\right], \tag{2}$$

where $a = 2\text{i}\gamma_{\eta,z\xi}$ and $b = 2\gamma_{\xi,\xi\xi}$ are real constants. The relations between the components $\gamma_{i,kl}$ in the coordinates x, y, z are, as we see from (2), ‡

$$\gamma_{y,zx} = -\gamma_{x,zy} \equiv -a, \quad \gamma_{y,xy} = -\gamma_{x,xx} = \gamma_{x,yy} \equiv -b.$$

The class $\boldsymbol{D}_{3h}$ is obtained from the class $\boldsymbol{D}_3$ by adding a plane of symmetry (the xy-plane) perpendicular to the threefold axis. Reflection in this plane changes the sign of z, and so $\gamma_{n,z\xi} = 0$, so that only the term with the coefficient b remains in (2).

The class C_{3h} has a threefold axis and a plane of symmetry perpendicular to it. Reflection in this plane changes the sign of z, and so all components $\gamma_{i,kl}$ whose suffixes contain z an odd number of times must be zero. Taking into account also the restrictions derived above which are imposed by the threefold axis of symmetry, we find that only the two components $\gamma_{\eta,\eta\eta}$ and $\gamma_{\xi,\xi\xi}$ are not zero. These quantities must be complex conjugates in order that Φ

† To avoid misunderstanding it should be recalled that, if we calculate the components of the strain tensor u_{ik} by direct differentiation of the actual expression for Φ with respect to σ_{ik}, the derivatives with respect to components σ_{ik} with $i \neq k$ give twice the corresponding components u_{ik}, because the expressions $u_{ik} = -\bar{c}\bar{\Phi}/\partial\sigma_{ik}$ are essentially meaningful only as representing the fact that $\text{d}\tilde{\Phi} = -u_{ik}\ \text{d}\sigma_{ik}$, and the terms containing the differentials of non-diagonal components of the symmetrical tensor σ_{ik} appear twice in the sum $u_{ik}\ \text{d}\sigma_{ik}$.

‡ In non-orthogonal coordinates such as ξ, η, z the covariant and contravariant components of tensors must be distinguished. This should have been done in returning to the original coordinates x, y, z : if the components E_i and σ_{kl} transform contravariantly, then those of the

tensor $\gamma_{i,kl}$ transform covariantly. We avoid this necessity, however, by obtaining the required relations between the components $\gamma_{\mathrm{a},kl}$ in the coordinates x, y, z directly from the form of the scalar combination (2).
should be real. Putting $2\gamma_{n,\eta\eta} = a - ib, 2\gamma_{\xi,\xi\xi} = a + ib$, we find

$$\Phi_{\mathrm{pic}} = a\left[2E_y\sigma_{xy} - E_x\left(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}\right)\right] + b\left[2E_x\sigma_{xy} + E_y\left(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}\right)\right]. \tag{3}$$

Either a or b can be made to vanish by a suitable choice of the x and y axes.
Problem 2. The same as Problem 1, but for the crystal classes which allow pyroelectricity.
Solution. Let the z-axis be the twofold, threefold, fourfold or sixfold axis of symmetry, or in the class C_s be perpendicular to the plane of symmetry. In the classes C_{nx} the xz-plane is a plane of symmetry.

We give below for each class all the components $\gamma_{i,kl}$ which are not zero.
Class C_1 : all $\gamma_{i,kl}$.

$\boldsymbol{C}_s$: all those in which the suffix z appears twice or not at all.
$\boldsymbol{C}_{2v}$: $\gamma_{z,xx}, \gamma_{z,yy}, \gamma_{z,zz}, \gamma_{x,xz}, \gamma_{y,yz}$.
$\boldsymbol{C}_2$: the same, together with $\gamma_{x,yz}, \gamma_{y,xz}, \gamma_{x,xy}$.
$\boldsymbol{C}_{4v}$: $\gamma_{z,xx} = \gamma_{z,yy}, \gamma_{z,zz}, \gamma_{x,xz} = \gamma_{y,yz}$.
$\boldsymbol{C}_4$: the same, together with $\gamma_{x,yz} = -\gamma_{y,xz}$.
$\boldsymbol{C}_{3v}$: $\gamma_{z,zz}, \gamma_{x,xz} = \gamma_{y,yz}, \gamma_{x,xx} = -\gamma_{x,yy} = -\gamma_{y,xy}, \gamma_{z,xx} = \gamma_{z,yy}$.
$\boldsymbol{C}_3$: the same, together with $\gamma_{x,yz} = -\gamma_{y,xz}, \gamma_{y,xx} = -\gamma_{y,yy} = \gamma_{x,xy}$.
$\boldsymbol{C}_{6v}$: $\gamma_{z,zz}, \gamma_{x,xz} = \gamma_{y,yz}, \gamma_{z,xx} = \gamma_{z,yy}$.
$\boldsymbol{C}_6$: the same, together with $\gamma_{x,yz} = -\gamma_{y,xz}$.

By a suitable choice of directions of the x, y, z axes three more components can be made zero in the class C_1, and by a choice of the x and y axes one more component can be made zero in the classes C_5, C_2, C_3; in C_4 and C_6. the expression $\gamma_{i,kl}E_i\sigma_{kl}$ is invariant under rotation through any angle about the z axis, and therefore no further reduction in the number of non-zero components $\gamma_{i,kl}$ is possible.

Problem 3. Determine Young's modulus (the coefficient of proportionality between the extending stress and the relative extension) for a flat slab of a non-pyroelectric piezoelectric in the following cases: (a) where the slab is stretched by the plates of a short-circuited capacitor. (b) where it is stretched by those of an uncharged capacitor, (c) where it is stretched parallel to its plane with no external field.

Solution. (a) In this case the field **E** inside the slab is zero. The only non-zero component of the tensor σ_{ik} is the extending stress σ_{zz} (the z-axis being perpendicular to the slab). † From (17.8) we have $u_{zz} = \mu_{zzzz}\sigma_{zz}$, whence Young's modulus is $E = 1, \mu_{zzzz}$.
(b) In this case we have in the slab $E_x = E_y = 0, D_z = 0$. From (17.6) and (17.8) we have $D_z = \varepsilon_{zz}E_z + 4\pi\gamma_{z.zz}\sigma_{zz} = 0, u_{zz} = \mu_{zzzz}\sigma_{zz} + \gamma_{z.zz}E_z$. Eliminating E_z, we obtain $1_iE = \mu_{zzzz} - 4\pi{\gamma_{z.zz}}^2/\varepsilon_{zz}$.
(c) In this case also, $E_x = E_y = 0, D_z = 0$, but the extension is along the x-axis, say. Here we have $D_z = \varepsilon_{zz}E_z + 4\pi\gamma_{z,xx}\sigma_{xx} = 0, u_{xx} = \mu_{xxxx}\sigma_{xx} + \gamma_{z,xx}E_z$. Eliminating E_z, we obtain $1, E = \mu_{xxxx} - 4\pi{\gamma_{z,xx}}^2/\varepsilon_{zz}$.

Problem 4. Obtain an equation for the velocity of sound in a piezoelectric medium.
SOlution. In this problem it is more convenient to use u_{ik} as the independent variables, instead of σ_{ik}. We write $\bar{F}$ in the form

$$\hat{F} = F_0 + \frac{1}{2}\lambda_{iklm}u_{ik}u_{lm} - \frac{1}{8\pi}\varepsilon_{ik}E_iE_k - \frac{1}{4\pi}E_iD_{0i} + \beta_{i.kl}E_iu_{kl},$$

whence

$$\sigma_{ik} = \lambda\tilde{F}/\lambda u_{ik} = i_{iklm}u_{lm} + \beta_{l,ik}E_l$$

The equations of motion from the theory of elasticity are

$$\rho\ddot{u}_i = \frac{\partial\sigma_{ik}}{\partial x_k} = \lambda_{iktm}\frac{\partial u_{lm}}{\partial x_k} + \beta_{l,ik}\frac{\partial E_l}{\partial x_k}, \tag{4}$$

where ρ is the density of the medium and $\mathbf{u}$ is the displacement vector, related to u_{ik} by

$$u_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right).$$

The equation $\operatorname{div}\mathbf{D} = 0$ gives

$$\varepsilon_{ik}\frac{\partial E_k}{\partial x_i} - 4\pi\beta_{i,kl}\frac{\partial u_{kl}}{\partial x_i} = 0 \tag{5}$$

and the field can be expressed in terms of the field potential: $E_i = -\partial\phi/\partial x_i$, which takes into account the equation $\operatorname{curl}\mathbf{E} = 0$.

In a plane sound wave, $\mathbf{u}$ and ϕ are proportional to $\exp[i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)]$, and we find from the above equations that

$$\rho\omega^2 u_i = \lambda_{ik|m}k_k k_i u_m - \beta_{l,ik}k_k k_l\phi$$
$$\varepsilon_{ik}k_i k_k\phi + 4\pi\beta_{i,kl}k_i k_k u_l = 0$$

Eliminating ϕ, we can write the condition of compatibility of the resulting equations for u_i as

$$\det\left|\rho\omega^2\delta_{ik} - \lambda_{iklm}k_l k_m - 4\pi\left(\beta_{l.mi}k_l k_m\right)\left(\beta_{p.qk}k_p k_q\right)/\varepsilon_{rs}k_r k_s\right| = 0.$$

For any given direction of the wave vector $\mathbf{k}$, this equation determines three phase velocities of sound ω/k, which are in general different. A characteristic property of a piezoelectric medium is the involved relation between the velocity and direction of the wave.

Problem 5. A piezoelectric crystal of the class $\boldsymbol{C}_{6v}$ has a plane boundary (the xz-plane) which passes through the axis of symmetry (the z-axis). Find the speed of surface waves propagated at right angles to the symmetry axis (in the x-direction), in which there are oscillations of the displacement u_z and the electric field potential ϕ (J. L. Bleustein, 1968; Yu. V. Gulyaev, 1969).

Solution. Under the conditions considered, two equations involving only u_2 and ϕ separate out from (4) and (5); these quantities depend on the coordinates x and y, and on the time t, but not on z. The non-zero components of the stress tensor and the induction vector are

$$\sigma_{zx} = \beta E_x + 2\lambda u_{zx}, \qquad \sigma_{zy} = \beta E_y + 2\lambda u_{zy}$$
$$D_x = -8\pi\beta u_{zx} + \varepsilon E_x, \quad D_y = -8\pi\beta u_{zy} + \varepsilon E_y$$

with

$$u_{zx} = \tfrac{1}{2}\partial u_z/\partial x, \quad u_{zy} = \tfrac{1}{2}\partial u_z/\partial y,$$
$$E_x = -\partial\phi/\partial x, \quad E_y = -\partial\phi/\partial y,$$

and writing for brevity $\beta_{x.xz} = \beta_{y.yz} \equiv \beta, \lambda_{xzxz} = \lambda_{yzyz} \equiv \lambda, \varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} \equiv \varepsilon$; the constant pyroelectric induction $D_z = D_0$ does not appear in the equations or the boundary conditions.

[0]† It is not assumed to coincide with any particular crystallographic direction.

Equation (5) and the z-component of equation (4) give, in the region occupied by the piezoelectric medium (the half-space $y > 0$),

$$4\pi\beta\triangle u_z + \varepsilon\triangle\phi^{(i)} = 0, \quad \rho\ddot{u}_z = -\beta\triangle\phi^{(i)} + \lambda\triangle u_z,$$

where,$\equiv \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$; these may be rewritten as

$$\rho\ddot{u}_z = \bar{\lambda}\triangle u_z, \quad \triangle\psi = 0, \tag{6}$$

where

$$\bar{\lambda} = \lambda + 4\pi\beta^2/\varepsilon, \quad \psi = (4\pi\beta/\varepsilon)u_z + \phi^{(i)}$$

In the vacuum (the half-space $y < 0$), the potential $\phi^{(e)}$ satisfies the equation

$$\triangle\phi^{(e)} = 0. \tag{7}$$

These equations are to be solved with the following boundary conditions: at the surface of the medium.

$$\phi^{(i)} = \phi^{(e)}, \quad \sigma_{xy} = 0, D_y^{(i)} = -\partial\phi^{(e)}/\partial y \text{ for } y = 0. \tag{8}$$

and far from the surface

$$u_z \to 0 \quad \text{as} \quad y \to \infty; \quad \phi \to 0 \quad \text{as } y \to \pm\infty.$$

We seek the solution in the form

$$u_z = Ae^{-\kappa y}e^{i(kx-\omega t)}\,. \quad \psi = Be^{-ky}e^{i(kx-\omega t)}, \quad \phi^{(e)} = Ce^{ky}e^{i(kx-\omega t)},$$

with

$$\rho\omega^2 = \bar{\lambda}\left(k^2 - \kappa^2\right). \tag{9}$$

Equations (6) and (7) and the conditions at infinity are then satisfied, and the conditions (8) give three linear homogeneous equations for A, B and C; the condition for these to have a solution is

$$\kappa = 4\pi\beta^2 k/\bar{\lambda}\varepsilon(1+\varepsilon) \equiv \Lambda k.$$

Finally, substitution in (9) gives the phase velocity of the waves:

$$\omega/k = \left[(\bar{\lambda}/\rho)\left(1 - \Lambda^2\right)\right]^{\frac{1}{2}}$$

The surface propagation of these waves is restricted to piezoelectric media. As $\beta \to 0$. the penetration depth $1/\kappa \to\propto$, and a bulk wave is formed.

7.1.13 §18. Thermodynamic inequalities

According to the formulae of §10, the total free energy can be written as the integral

$$\mathscr{F} = \int F(T, \rho, \mathbf{D})\mathrm{d}V, \tag{18.1}$$

taken over all space. We shall suppose that the function $\mathbf{D}(\mathbf{r})$ which appears in the integrand satisfies only the equation

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 0 \tag{18.2}$$

inside a dielectric and the condition

$$\oint \mathbf{D} \cdot \mathrm{d}\mathbf{f} = 4\pi e \tag{18.3}$$

on the surface of a conductor which carries a given charge. These equations establish the relation between the field and its sources. Otherwise we regard the function $\mathbf{D}(\mathbf{r})$ as arbitrary, and in particular we do not require it to satisfy the second field equation curl $\mathbf{E} = 0$ (where $\mathbf{E} = 4\pi\partial F/\partial \mathbf{D}$) or the boundary condition $\phi =$ constant on the surface of a conductor. We shall show that these equations can then be obtained from the condition that the integral (18.1) be a minimum with respect to changes in the function $\mathbf{D}(\mathbf{r})$ which satisfy equations (18.2) and (18.3). It should be emphasized that the possibility of this derivation is not a priori evident, since the field distributions which come into consideration in determining the minimum of the integral (18.1) do not necessarily correspond to physically possible states (because they do not satisfy all the field equations), whereas, in the thermodynamic condition that the free energy be a minimum, only the various physically possible states are considered.

The problem of finding the minimum of the integral (18.1) with the subsidiary conditions (18.2) and (18.3) is solved by Lagrange's method of multipliers. We multiply the variation of the condition (18.2) by some as yet undetermined function $-\phi/4\pi$ of the coordinates, and that of the condition (18.3) by some undetermined constant $\phi_0/4\pi$, and then equate to zero the sum of variations

$$\int \delta F \, \mathrm{d}V - \frac{1}{4\pi} \int \phi \operatorname{div} \delta\mathbf{D} \, \mathrm{d}V + \frac{\phi_0}{4\pi} \oint \delta\mathbf{D} \cdot \, \mathrm{d}\mathbf{f} = 0$$

In the first term we write †

$$\delta F = (\partial F/\partial \mathbf{D})_{T,\rho} \cdot \delta\mathbf{D} = \mathbf{E} \cdot \delta\mathbf{D}/4\pi$$

and the second can be integrated by parts: $\int \phi \operatorname{div} \delta\mathbf{D} \delta V = \oint \phi \delta\mathbf{D} \cdot \mathrm{d}\mathbf{f} - \int \delta\mathbf{D} \cdot \operatorname{grad} \phi \mathrm{d}V$

- The result is

$$\int (\mathbf{E} + \operatorname{grad} \phi) \cdot \delta\mathbf{D} \mathrm{d}V + \oint (\phi_{\mathbf{0}} - \phi) \, \delta\mathbf{D} \cdot \mathrm{d}\mathbf{f} = 0$$

Hence we conclude that, throughout the volume, we must have $\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \phi$ (and so curl $\mathbf{E} = 0$), and on the surface of a conductor $\phi = \phi_0 =$ constant. These are the correct equations for the field, and the Lagrange multiplier ϕ is its potential.

Similarly it can be shown that the equations for the electric induction are obtained from the condition that the integral $\overline{\mathscr{F}} = \int \tilde{F}(T, \rho, \mathbf{E}) \mathrm{d}V$ be a maximum, in which the function $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ is varied with the subsidiary conditions $\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \phi$ and $\phi =$ constant on the surface of a conductor. † For

$$\begin{aligned} \delta\tilde{\mathscr{F}} &= \int (\partial \tilde{F}/\partial \mathbf{E}) \cdot \delta\mathbf{E} \mathrm{d}V = \int \mathbf{D} \cdot \operatorname{grad} \delta\phi \mathrm{d}V/4\pi \\ &= \oint \delta\phi \mathbf{D} \cdot \mathrm{d}\mathbf{f}/4\pi - \int \delta\phi \operatorname{div} \mathbf{D} \mathrm{d}V/4\pi = 0. \end{aligned}$$

[0]† The free energy is the minimum for a given temperature. The variation is with respect to two independenl quantities $\mathbf{D}$ and ρ. Here we are interested only in the result of varying with respect to $\mathbf{D}$. The variation of the integral (18.1) with respect to density (with the subsidiary condition of constant total mass of the body) gives one of the usual conditions of thermal equilibrium, namely the constancy of the chemical potential ζ.

The first integral is zero because $\delta\phi = 0$ on the surface, and from the second we find the required equation div $\mathbf{D} = 0$, since $\delta\phi$ is arbitrary in the volume.

If the body is not in an external electric field (in particular, if there are no charged conductors), it may be possible to formulate the condition of themodynamic equilibrium as the condition that the total free energy (18.1) have an absolute (unconditional) minimum. This amounts to the condition that the free energy density F be a minimum as a function of the independent variable $\mathbf{D} : \partial \boldsymbol{F}/\partial\mathbf{D} = \mathbf{E}/4\pi = 0$, i.e. the field must be zero in all space. If it is possible to find a distribution of the induction such that $\operatorname{div}\mathbf{D} = 0$, this state will correspond to thermodynamic equilibrium. ‡

Equating to zero the first variation of the free energy, we find necessary but not sufficient conditions for this energy to be a minimum. The determination of the sufficient conditions requires a discussion of the second variation. These conditions take the form of certain inequalities (called thermodynamic inequalities) and are the conditions which ensure the stability of the state of the body (see $SP1, §21$).

When $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$, the situation is much simplified, and the thermodynamic inequality of interest here (relating to the dielectric properties of the body) becomes evident. The total free energy is $\mathscr{F}_0 + \int (D^2/8\pi\varepsilon)\,\mathrm{d}V$. It is clear that this can have a minimum only if $\varepsilon > 0$, since otherwise the integral could be made to take any large negative value by making D^2 large enough. Thus in this case nothing new is learnt, since we know already that the permittivity must in fact be not only positive but greater than unity (see §14).

In the general case of an arbitrary relation between $\mathbf{D}$ and $\mathbf{E}$, however, it is necessary to consider the second variation of the integral (18.1), and to vary simultaneously both $\mathbf{D}$ and ρ (leaving only the temperature constant). In an isotropic body, $F(T, \rho, \mathbf{D})$ depends only on the magnitude of the vector $\mathbf{D}$. but its three components vary independently. We take the direction of the vector $\mathbf{D}$ before variation as the z-axis. Then the change in the magnitude of D is given in terms of the changes in its components, as far as the second-order terms, by $\delta D = \delta D_z + (\delta D_x)^2/2D + (\delta D_y)^2/2D$. The first and second variations of the integral (18.1) are both contained in the expression

$$\int \left\{ \frac{\partial F}{\partial D}\delta D + \frac{\partial F}{\partial \rho}\delta\rho + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial D^2}(\delta D)^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial D \partial \rho}\delta D\delta\rho + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial \rho^2}(\delta\rho)^2 \right\} \mathrm{d}V$$

Substituting δD and collecting the second-order terms, we find the second variation

$$\int \frac{1}{2D}\frac{\partial F}{\partial D}\left[(\delta D_x)^2 + (\delta D_y)^2\right] \mathrm{d}V' + \int \left\{ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial D^2}(\delta D_z)^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial D \partial \rho}\delta D_z\delta\rho + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial \dot{\rho}^2}(\delta\rho)^2 \right\} \mathrm{d}V' \tag{18.4}$$

These two terms are independent. The first is positive if $(1/D)\partial F/\partial D > 0$. But $\partial F/\partial \mathrm{D} = \mathbf{E}/4\pi$, so that the derivative $\partial F/\partial D$ is positive or negative according as the vectors $\mathbf{D}$ and $\mathbf{E}$ are in the same or opposite directions. Thus these vectors must be in the same direction.

The conditions for the second term in (18.4) to be positive are

[0]† The point that the thermodynamic potential $\mathscr{F}$ has a maximum, not a minimum like $\mathscr{F}$, with respect to the variable $\mathbf{E}$ or $\mathbf{D}$ is a general one, and is accounted for as follows. Let the equilibrium value of a variable x, say $x = 0$, be determined by the condition of thermodynamic equilibrium. Then the free energy $\mathscr{F}$ has, for a given T and [l], a minimum at $x = 0$. We thus have, at $x = 0, X \equiv (\partial\mathscr{F}/\partial x)_{V,7} = 0$, and near that point $X = \alpha x, \mathscr{F} = \mathscr{F}_0 + \frac{1}{2}\alpha x^2$ with $\alpha > 0$. With the thermodynamic potential $\mathscr{F} = \mathscr{F} - xX$, this gives $\overline{\mathscr{F}} = \mathscr{F}_0 - \frac{1}{2}\alpha x^2 = \mathscr{F}_0 - X^2/2\alpha$, so that in equilibrium $\mathscr{F}$ has a maximum with respect to x or X. But both $\mathscr{F}$ and $\mathscr{F}$ have minima with respect to any other variables y that are independent of x.

‡ Here we are considering bodies in which $\mathbf{D}$ need not be zero even if $\mathbf{E} = 0$ (see §19). Otherwise we have simply the trivial result $\mathbf{E} = \mathbf{D} = \mathbf{0}$m all space.

$$\partial^2 F/\partial\rho^2 > 0 \tag{18.5}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial\rho^2}\frac{\partial^2 F}{\partial D^2} - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial\rho\partial D}\right)^2 > 0 \tag{18.6}$$

Since $\partial F/\partial\rho = \zeta, \partial F/\partial D = E/4\pi$, the first of these gives

$$(\partial\zeta/\partial\rho)_{D,T} > 0 \tag{18.7}$$

and the second can be rewritten as a Jacobian:

$$\frac{\partial(\partial F/\partial D, \partial F/\partial\rho)}{\partial(D,\rho)} = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial(E,\zeta)}{\partial(D,\rho)} > 0.$$

Changing from the variables D, ρ to D, ζ, we have

$$\frac{\partial(E,\zeta)}{\partial(D,\rho)} = \frac{\partial(E,\zeta)}{\partial(D,\zeta)}\frac{\partial(D,\zeta)}{\partial(D,\rho)} = \left(\frac{\partial E}{\partial D}\right)_\zeta \left(\frac{\partial\zeta}{\partial\rho}\right)_D > 0$$

by (18.7), this gives

$$(\partial E/\partial D)_{\zeta,T} > 0. \tag{18.8}$$

Thus we have derived the required thermodynamic inequalities. In the absence of a field, the inequality (18.7) becomes the usual condition that the isothermal compressibility is positive: $(\partial P/\partial\rho)_I > 0$.† The inequality (18.8) gives $\varepsilon > 0$, since when $E \to 0$ the induction $D \to \varepsilon E$.

Of the two inequalities (18.5). (18.6) the latter is the stronger; it may be violated while the first is not, whereas the reverse is impossible. The equation

$$\frac{\partial^2 F}{\partial\rho^2}\frac{\partial^2 F}{\partial D^2} - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial\rho\partial D}\right)^2 = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial(E,\zeta)}{\partial(D,\rho)} = 0$$

corresponds to what is called the critical state (see SP 1, §83). This condition is more conveniently written in a different form by multiplying it by the non-zero factor $\partial(D,\rho)'\partial(E,\rho)$:

$$\partial(E,\zeta)/\partial(E,\rho) = (\partial\zeta/\partial\rho)_{E,T} = 0. \tag{18.9}$$

The critical states occupy a curve in the ET-plane, which is a singularity of the thermodynamic functions of the body, just as the critical point is a singularity in the absence of the field.

7.1.14 §19. Ferroelectrics

The various crystalline modifications of a given substance may include some which are pyroelectric and some which are not. If the change from one to the other takes place by means of a second-order phase transition, then near the transition point the substance has a number of

[0]† It should be recalled that, in the absence of a field, ζ is the thermodynamic potential of unit mass and, by the ordinary thermodynamic relations, its differential

$$\mathrm{d}\zeta = \mathrm{d}P/\rho - (\mathrm{S}/\rho)\mathrm{d}T,$$

so that $(\partial\zeta/\partial\rho)_T = (1/\rho)(\partial P/\partial\rho)_T$. In the above derivation the second of the ordinary thermodynamic inequalities (that the specific heat is positive) is ignored.

unusual properties which distinguish it from ordinary pyroelectrics; these are called ferroelectric substances.

In an ordinary pyroelectric crystal, a change in the direction of the spontaneous polarization involves a considerable reconstruction of the crystal lattice. Even if the final result of this reconstruction is energetically favourable, its realization may still be impossible because it would require the surmounting of very high energy barriers.

In a ferroelectric body, however, the situation is quite different because, near a secondorder phase transition point, the arrangement of the atoms in the crystal lattice of the pyroelectric phase is only slightly different from the arrangement in the non-pyroelectric lattice (and so the spontaneous polarization also is small). For this reason the change in direction of the spontaneous polarization here requires only a slight reconstruction of the lattice and can occur quite easily.

The actual nature of the ferroelectric properties of a body depends on its crystal symmetry. The direction of the spontaneous polarization of the pyroelectric phase (which we shall call the ferroelectric axis) is determined by the structure of the non-pyroelectric phase beyond the transition point. In some cases it is uniquely determined, in the sense that the ferroelectric axis can lie in only one, crystallographically determinate, direction; the direction of the spontaneous polarization is then determined apart from sign, since in the non-pyroelectric phase the two opposite directions parallel to the ferroelectric axis must be equivalent (otherwise this form of the crystal would also be pyroelectric). In other cases, the Symmetry of the non-pyroelectric phase may be such as to allow spontaneous polarization in any of several crystallographically equivalent directions. †

The occurrence of polarization is always associated with a reduction in the symmetry of the crystal. We can therefore refer to pyroelectric and non-pyroelectric phases as the unsymmetrical and symmetrical phases respectively, using the terminology of SP 1, §142.

We shall show how the theory of ferroelectricity can be developed in terms of the general theory of Landau second-order phase transitions, as was first done by V. L. Ginzburg (1945). †

We take the dielectric polarization vector $\mathbf{P}$ of the substance as the order parameter, whose magnitude determines the difference between the unsymmetrical and symmetrical phase lattice structures. This means that $\mathbf{P}$ will be regarded as an independent thermodynamic variable whose actual value (as a function of the temperature, the field, etc.) is then determined from the condition of thermal equilibrium, namely that the thermodynamic potential be a minimum.

Let us consider first the case where the position of the ferroelectric axis, which we take as the z-axis, is uniquely determined. The dielectric properties of the crystal in the x and y directions then exhibit no anomalies, and to investigate the properties in the z-direction we need consider only those terms in the thermodynamic potential which contain P_z. Near the transition point, the order parameter P_z is small and the thermodynamic potential Φ can be expanded in powers of P_z. Since the two directions of the z-axis are equivalent, the expansion cannot depend on the sign of P_z, and therefore contains only even powers. As far as the fourth-order terms, we have

$$\Phi = \Phi_0 + AP_z^2 + BP_z^4 \tag{19.1}$$

In the symmetrical phase, $A > 0$, and $P_z = 0$ corresponds to a minimum of the thermo-

[0]† An instance of the first type is sodium potassium tartrate, whose non-pyroelectric phase has orthorhombic Symmetry. The ferroelectric axis appears in it in a completely definite crystallographic direction (one of the twofold axes), and the lattice becomes monoclinic.

An instance of the second type is barium titanate. Its non-pyroelectric modification has a cubic lattice, and any of the three cubic axes may become the ferroelectric axis. After the spontaneous polarization has appeared at the transition point, these three directions, of course, are no longer equivalent. The ferroelectric axis becomes the only fourfold axis. and the lattice becomes tetragonal.

dynamic potential. For spontaneous polarization to occur, A must be negative: it is therefore zero at the phase transition point. The Landau theory assumes that $A(T)$ can be expanded in integral powers of $T - T_c$, where T_c is the phase transition temperature; near this point, we write $A = a\,(T - T_c)$, a being a constant (independent of the temperature). We shall take the specific case where $a > 0$, so that the unsymmetrical phase corresponds to temperatures $T < T_c$. The condition for the state to be stable at the point $T = T_c$ itself is that the coefficient B be positive at that point and therefore throughout a neighbourhood of it In what follows, B will denote $B\,(T_c)$.

If the electric field in the body is not zero, further terms appear in the thermodynamic potential. To find these, we start from the relation

$$4\pi\partial\tilde{\Phi}/\partial\mathbf{E} = -\mathbf{D} = -\mathbf{E} - 4\pi\mathbf{P} \tag{19.2}$$

Integration with a fixed value of the independent variable $\mathbf{P}$, using the fact that Φ and $\tilde{\Phi}$ are the same when $\mathbf{E} = 0$, gives

$$\tilde{\Phi}(\mathbf{P}, \mathbf{E}) = \Phi(\mathbf{P}, 0) - \mathbf{E}\cdot\mathbf{P} - \mathbf{E}^2/8\pi$$

With the electric field in the z-direction, and $\Phi(\mathbf{P}, 0)$ from (19.1), we have

$$\tilde{\Phi} = \Phi_0 + a\,(T - T_c)\,P_z^2 + BP_z^4 - E_zP_z - E_z^2/8\pi. \tag{19,3}$$

The presence of the term $-E_zP_z$ has the result that in any field E_z, however weak, the order parameter P_z becomes different from zero at every temperature; the field polarizes the non-pyroelectric phase and thus reduces its symmetry. The qualitative difference between the two phases thereby disappears, and accordingly so does the discrete transition point; the transition is "smoothed out". †

The thermodynamic potential $\widetilde{\Phi}$ in equilibrium must be a minimum, for any given field E. Differentiation of (19.3) at constant E_z gives

$$2P_z a\,(T - T_c) + 4B{P_z}^3 = E_z. \tag{19.4}$$

This is the basic relation between the field and the polarization in a ferroelectric ‡
When $T > T_c$, in the non-pyroelectric phase, P_z vanishes with E_z. As E_z increases, the polarization at first increases linearly, $P_z = \kappa E_z$, with susceptibility

$$\kappa = 1/2a\,(T - T_c)\,, T > T_c, \tag{19.5}$$

which increases without limit as $T \to T_c$. The induction $D_z = (1 + 4\pi\kappa)E_z$ also increases linearly with P_z. Near the transition point, κ is large, and we have to the same accuracy

$$\varepsilon \cong 4\pi\kappa = 2\pi/a\,(T - T_c)\,. \tag{19.6}$$

In sufficiently strong fields, the polarization increases according to $P_z = (E_z/4B)^{\frac{1}{3}}$.
When $T < T_c$, in the pyroelectric phase, $P_z = 0$ cannot correspond to a stable state. For $E_z = 0$, we find from (19.4) the spontaneous polarization of this phase,

$$P_{z0} = \pm\sqrt{}\left[a\,(T_c - T)\,/2B\right]. \tag{19.7}$$

The dielectric susceptibility of the phase can be found as the derivative dP_z/dE_z as $E_z \to 0$. From (19.4),

$$\left[-2\,(T_c - T)\,a + 12BP_z^2\right] dP_z/dE_z = 1, \tag{19.8}$$

and substitution of (19.7) gives

$$\kappa = [dP_z/dE_z]_{E_z=0} = 1/4a\,(T_c - T)\,, T < T_c. \tag{19.9}$$

This is half the susceptibility of the non-pyroelectric phase for the same value of $|T_c - T|$. In sufficiently weak fields, the polarization is $P_z = P_{z0} + \kappa E_z$, the induction is $D_z = D_{z0} + \varepsilon E_z$, where $D_{z0} = 4P_{z0}$, and the permittivity is

$$\varepsilon \cong 4\pi\kappa = \pi/a\,(T_c - T)\,. \tag{19.10}$$

Figure 14 (p. 80) shows the function $P_z\,(E_z)$ given by (19.4) for $T < T_c$. First of all, it should be noted that the dashed part cc' does not correspond to stable states: from (19.8) written in the form

$$(\mathrm{d}P_z/\mathrm{d}E_z)\left(\partial^2\Phi/\partial P_z^2\right)_{E_z} = 1$$

we see that $\mathrm{d}P_z/\mathrm{d}E_z < 0$ implies that $\partial^2\Phi/\partial {P_z}^2 < 0$, i.e., the thermodynamic potential $\tilde{\Phi}$ has a maximum, not a minimum. The ordinates of c and c' are given by the equation $\mathrm{d}E_z/\mathrm{d}P_z = 0$, and we conclude that the possible values of $|P_z|$ in the pyroelectric phase are restricted by the condition

$$P_z^2 > (T_c - T)\,a/6B. \tag{19.11}$$

If we consider states of a ferroelectric with given values of E_z, there is still an ambiguity in the value of P_z, in the range of abscissae between c and c', and the question arises of the physical significance of the two values. We shall assume the ferroelectric to be a homogeneous flat slab, with the ferroelectric axis normal to it, lying between the plates of a capacitor, which are maintained at given potentials, i.e. which set up a given uniform field $E = E_z$.

For given potentials on the conductors, the condition of stability requires that the thermodynamic potential $\tilde{\Phi}$ be a minimum. In particular, for $\mathbf{E} = 0$ there are two states in which P_z has opposite signs (the points a and a' in Fig. 14) but $\widetilde{\Phi}(= \Phi)$ is the same. These two states, therefore, are equally stable, i.e. they are two phases which can coexist in contact.

Hence it is clear that the portions ac and $a'c'$ of the curve correspond to states which are metastable but not absolutely stable. It is easy to see directly that the values of $\widetilde{\Phi}$ on ac and on $a'c'$ are in fact greater than its values on $a'b'$ and ab for the same value of E_z. The ordinates of a and a' are given by formula (19.7). Thus the range of metastability is

$$(T_c - T)\,a/6B < P_z^2 < (T_c - T)\,a/2B \tag{19.12}$$

The existence of these two phases with $\mathbf{E} = 0$ is very important, since it means that a ferroelectric body can be divided into a number of separate regions or domains in which the polarization is in opposite directions. On the surfaces separating these domains, the normal component of $\mathbf{D}$ and the tangential component of $\mathbf{E}$ must be continuous. The latter condition is satisfied identically, because $\mathbf{E} = 0$. From the former condition it follows that the domain boundaries must be parallel to the z-axis.

The actual shapes and sizes of the domains are determined by the condition that the total thermodynamic potential of the body should be a minimum. †

[0†] Cf. SP 1, §144. The discussion below is largely a repetition of the one given there.

‡ Expressing $P(E)$ by means of (19.4) and substituting in (19.3), we find the potential $\Phi(E)$ as a function of E only. From the condition $\partial\Phi(P,E)/\partial P = 0$, the equation $D = -4\pi\partial\Phi/\partial E$ is valid both for $\Phi(E)$ and for $\Phi(P,E)$ (which is differentiated at constant P).

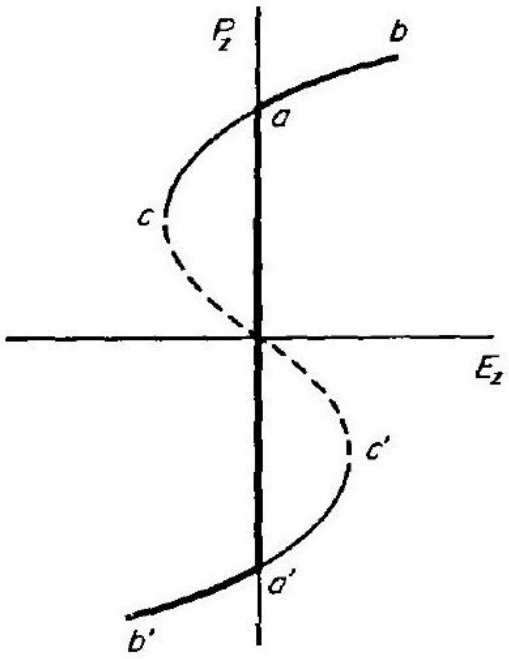


Fig. 14

If we are not interested in the details of the structure, and consider portions of the body which are large compared with the domains, we can use the polarization $\overline{\mathbf{P}}$ averaged over such portions. Its component $\bar{P}_z$ can evidently take values in the range between the ordinates of a and a' in Fig. 14, i.e.

$$-\sqrt{[(T_c - T)\, a/2B]} < \bar{P}_z < \sqrt{[(T_c - T)\, a/2B]}\,. \tag{19.13}$$

In other words, if P_z in Fig. 14 is taken as the polarization averaged in this way, the vertical segment aa' corresponds to the region of domain structure, and the thick curve $baa'b'$ gives all stable states of the body.

Let us consider ferroelectrics which belong (in the non-pyroelectric phase) to the cubic system. † The cubic symmetry admits two independent fourth-order invariants formed from the components of the vector $\mathbf{P}$, which may be taken as $({P_x}^2 + {P_y}^2 + {P_z}^2)^2$ and ${P_x}^2{P_y}^2 + {P_x}^2{P_z}^2 + {P_y}^2{P_z}^2$. Hence the expansion of the thermodynamic potential near the transition point (when $\mathbf{E} = 0$) is of the form

$$\begin{aligned}\Phi =& \Phi_0 + a\,(T - T_c)\left(P_x^2 + P_y^2 + P_z^2\right) + B\left(P_x^2 + P_y^2 + P_z^2\right)^2 \\ &+ C\left(P_x^2 P_y^2 + P_x^2 P_z^2 + P_y^2 P_z^2\right)\end{aligned} \tag{19.14}$$

where a, B, C are constants, and the x, y, z axes are along the three fourfold axes of symmetry.

The sum of the fourth-order terms in (19.14) must be essentially positive. Hence we must have

[0]† It should be emphasized that complete thermodynamic equilibrium is under consideration here. This can occur in ferroelectrics, but practically never does so in ordinary pyroelectrics because of the already mentioned difficulty of reorienting the polarization (and so of forming domains) in these materials. The shape and size of the domains will be discussed in §44 for the case of ferromagnets, which is in many respects analogous. We shall not pause to consider the specific features of the domain structure in ferroelectrics. They are due mainly to the rigid coupling of the direction of polarization to particular crystal axes, to the high dielectric susceptibility in comparison with the magnetic susceptibility of a ferromagnet, and to the greater role of striction effects.

$$B > 0, \quad 3B + C > 0 \tag{19.15}$$

The spontaneous polarization of a ferroelectric when $\mathbf{E} = 0$ is determined by the condition that Φ should be a minimum as a function of $\mathbf{P}$. In particular, since the secondorder term and the first of the fourth-order terms are independent of the direction of $\mathbf{P}$, the direction of the spontaneous polarization is determined by the condition that the next term be a minimum for a given absolute value P. Two cases are possible. If $C > 0$, the minimum of this term corresponds to $\mathbf{P}$ being along any one of the axes x, y, z, i.e. along any of the three edges of the cube. If, however. $C < 0$, the minimum value occurs when $\mathbf{P}$ is along any one of the spatial diagonals of the cube, i.e. when ${P_x}^2 = {P_y}^2 = {P_z}^2 = \frac{1}{3}P^2$. In the former case the pyroelectric phase of the ferroelectric has tetragonal symmetry, and in the latter case it has rhombohedral symmetry.

Let us consider in more detail, for example, the first case ($C > 0$), and take as the z-axis the direction of the spontaneous polarization below the transition point. The magnitude P_0 of this polarization is determined (when $\mathbf{E} = 0$) by the minimum of the expression $-a\,(T_c - T)\,P^2 + BP^4$, whence

$$P_0^2 = a\,(T_\mathrm{c} - T)\,/2B \tag{19.16}$$

To find the polarization as a function of the field $\mathbf{E}$, we must add to (19.14) a term $-\mathbf{P}\cdot\mathbf{E}$ (thus changing to the potential $\widetilde{\Phi}$) and equate to zero the derivative $\partial\widetilde{\Phi}/\partial\mathbf{P}$.

When the field $\mathbf{E}$ is weak, P_x, P_y, and $P_z - P_0$ are small. Omitting from the equations the terms of the second and higher orders of smallness, and substituting $P_{0z} = P_0$ from (19.16), we find the longitudinal polarization

$$P_z - P_0 = E_z/4a\,(T_c - T) \tag{19.17}$$

and the transverse polarization

$$P_x = BE_x/aC\,(T_c - T) \tag{19.18}$$

(and similarly for P_y). Above the transition point, in the non-pyroelectric phase, the dielectric susceptibility of a cubic ferroelectric is the same in all directions:

$$\mathbf{P} = \mathbf{E}/2a\,(T - T_c)\,. \tag{19.19}$$

Finally, let us briefly consider the elastic properties of ferroelectrics. According to its crystal class, the non-pyroelectric phase of a ferroelectric may or may not be piezoelectric. † Let us begin with the former case, and suppose that the symmetry admits a piezoelectric (linear) relation between the deformation and the polarization in the direction of the ferroelectric (z) axis. These include the classes $\boldsymbol{D}_2, \boldsymbol{D}_{2d}$ and $\boldsymbol{S}_4$; in each case the polarization P_z appears in the piezoelectric part of the thermodynamic potential through a term $-\gamma_{z,xy}P_z\sigma_{xy}$.

In the elastic energy of these crystals, the component σ_{xy} appears in a term $-\mu_{xyxy}{\sigma_{xy}}^2$. Thus the thermodynamic potential near the transition point is

$$\widetilde{\Phi} = \Phi_0 + a\,(T - T_c)\,P_z^2 + BP_z^4 - \gamma P_z\sigma_{xy} - \mu\sigma_{xy}^2 - E_zP_z - E_z^2/8\pi, \tag{19.20}$$

[0]† The crystal classes $\boldsymbol{T}_h$ and $\boldsymbol{O}_h$ are envisaged here. The cubic classes $\boldsymbol{T}$ and $\boldsymbol{T}_d$ allow also a third-order invariant $P_xP_yP_z$; under such conditions, the state with $\mathbf{P} = 0$ certainly could not satisfy the stability condition - ninimum Φ), and a second-order phase transition is therefore impossible. The symmetry of the class O (and that of T) allows an invariant P-curl P that is linear in the derivatives, and this gives rise to an incommensurate structure (cf. §52).

where for brevity we have put $\gamma_{z,xy} = \gamma, \mu_{xyxy} = \mu$.‡ The terms involving the other components of $\mathbf{P}$ and σ_{ik} are of no interest, since they lead to no anomaly of the piezoelectric properties near the transition point.

Equating to zero the derivative $\partial\widetilde{\Phi}/\partial P_z$ with E_z constant, we obtain

$$E_z = 2a\,(T - T_c)\,P_z + 4BP_z^3 - \gamma\sigma_{xy}. \tag{19.21}$$

The components of the strain tensor are found by differentiating the thermodynamic potential (19.20) with respect to the corresponding components σ_{ik} (see 17.4)):§

$$u_{xy} = \frac{1}{2}\gamma P_z + \mu\sigma_{xy}. \tag{19.22}$$

In the non-pyroelectric phase when $\mathbf{E}$ is small we can neglect the term in $P_z^{\mathbf{3}}$ in (19.21):

$$E_z = 2a\,(T - T_c)\,P_z - \gamma\sigma_{xy}.$$

Substituting P_z in (19.22), we find

$$u_{xy} = \frac{\gamma}{4a\,(T - T_c)}E_z + \left[\mu + \frac{\gamma^2}{4a\,(T - T_c)}\right]\sigma_{xy}$$

The coefficient of σ_{xy} in this formula represents the modulus of elasticity for deformations in which the field E_z is kept constant. while μ in formula (19.22) is the modulus for constant polarization P_z. Hence we can write

$$\mu^{(E)} = \mu^{(P)} + \gamma^2/4a\,(T - T_c)\,, \tag{19.23}$$

where the superscripts indicate the nature of the deformation. We see that the two coefficients behave entirely differently: whereas $\mu^{(P)}$ is a finite constant. $\mu^{(E)}$ increases without limit as the transition point is approached. †

In the pyroelectric phase, formula (19.22) shows that the spontaneous polarization results in a certain deformation of the body. If there are no internal stresses and the field $\mathbf{E}$ is zero, the strain u_{xy} is proportional to P_{z0}, i.e varies with temperature as $\sqrt{}(T_c - T)$.

If the symmetry (cubic, for example) of the non-pyroelectric phase of a ferroelectric does not admit a linear piezoelectric effect, then the first non-vanishing terms in an expansion of the thermodynamic potential in powers of σ_{ik} and $\mathbf{P}$ are quadratic in the components of $\mathbf{P}$, i.e they are of the form

$$-\gamma_{iklm}P_iP_k\sigma_{lm}, \tag{19.24}$$

where γ_{iklm} is a tensor of rank four, symmetrical with respect to the pairs of suffixes i, k and l, m. In such cases, the strain in the pyroelectric phase due to the spontaneous polarization is quadratic in $\mathbf{P}_0$, and accordingly varies with temperature as $T_c - T$.

Doubt might be cast on the legitimacy of using the expression (19.24) in the thermodynamic potential, on the grounds that, as stated in §17, this potential can be used only when quadratic effects are neglected. However, the ferroelectrics form an exception because, near the transition point, the field $\mathbf{E}$ is small compared with the polarization $\mathbf{P}$ or induction $\mathbf{D}$, because of the unlimited increase in the dielectric susceptibility. The use of the thermodynamic potential involves the neglect of the quantities of the order of EDu_{ik} (or. what is the same thing, $ED\sigma_{ik}$), whereas the expression (19.24) is of the order of $D^2\sigma_{ik}$.

[0]† The non-pyroelectric phase of a ferroelectric is piezoelectric if it belongs to one of eight out of the ten classes listed at the end of §17: $D_2, D_4, D_{2d}, S_4, D_3, D_6, C_{3h}, D_{3h}$.

‡ Because the expansion is of a different type, the definitions of the tensors $\gamma_{i,kl}$ and $\mu_{i,klm}$ are not the same as those denoted by the same letters in §17. but their symmetry properties are, of course. unchanged.

§ See the first footnote to §17, Problem 1, concerning differentiation with respect to the components of a tensor.

7.1.15 §20. Improper ferroelectrics

The theory of ferroelectrics given in § 19 is based on identifying the polarization vector of the crystal with the order parameter which determines the change in the crystal symmetry in the phase transition. This is not always permissible, however. It may happen that the occurrence of spontaneous polarization does not in itself entirely determine the nature of the change in the crystal structure.

It is known (see $SP1, §145$) that the order parameter in a second-order phase transition is a quantity, or a set of quantities, transformed by some irreducible (not the unit) representation of the symmetry group of the original ("symmetrical") phase. The transformation properties of the order parameter determine the nature of the change (the decrease) in the symmetry at the phase transition. The specific physical nature of the change is unimportant; the order parameter may be taken as any of various physical quantities. provided that they are related to one another by linear expressions and therefore have the same transformation properties.

The choice of the vector $\mathbf{P}$ as the order parameter is equivalent to assuming that this is transformed by the same representation as the components of a (polar) vector. If the phase transition occurs with no change in the unit cell of the lattice (or with only a strain), the irreducible representations concerned are those of the point symmetry groups (the crystal

classes). In the biaxial classes (§13), each component of a vector is transformed by one of the one-dimensional representations. The same applies to a component of a vector along the principal axis of symmetry (threefold, fourfold or sixfold) in uniaxial crystals. For all these representations, the order parameter can be the corresponding component of the vector $\mathbf{P}$, and the theory based on the thermodynamic potential (19.1) is applicable to them. The components of $\mathbf{P}$ in a plane perpendicular to the principal axis of symmetry in a uniaxial crystal are transformed by a two-dimensional irreducible representation and can serve as the order parameter for that representation. Lastly, in crystals with cubic symmetry, all three components of the vector are transformed by a single three-dimensional representation. This case corresponds to the theory of ferroelectricity based on the thermodynamic potential (19.14).

There are also, however, ferroelectric transitions in which the order parameter is transformed by an irreducible representation of the symmetrical phase which does not correspond to the components of a vector. In such cases, the order parameter is not the polarization but a physically different quantity; the spontaneous polarization arises as a secondary effect (it is assumed, of course, that the symmetry of the unsymmetrical phase allows pyroelectricity). These substances are called improper ferroelectrics; they differ considerably from ordinary ferroelectrics as regards the nature of the dielectric anomalies. † Here belong all ferroelectric transitions in which the unit cell changes, i.e. in which the translational symmetry of the lattice changes (the corresponding irreducible representations are certainly not realized by vector quantities invariant under translations) ‡. but they may also be transitions without change of translational symmetry (the order parameter is transformed by an irreducible representation of the point group, not corresponding to the components of a vector).

In an ordinary ferroelectric transition, when the change in symmetry is entirely determined by the polarization vector. the transition is to a higher sub-group (that allows pyroelectricity) of the space group of the original (non-pyroelectric) phase. In an improper ferroelectric transition, the pyroelectric phase belongs to a sub-group of lower symmetry.

The specific thermodynamic properties of improper ferroelectrics may vary considerably, like the transformational properties of quantities that are transformed by different irreducible representations of the space groups. Let us now consider (again in terms of the Landau theory of phase transitions) one formal example to illustrate some important fundamental points.

[0†] The modulus $\mu^{(D)} = \mu + \gamma^2/8\pi$, which determines the surain for a constant induction D_z, is also a constant.

We shall take a transition (without change in the unit cell) from a non-pyroelectric crystal of the class $\boldsymbol{C}_{3h}$ to the class $\boldsymbol{C}_1$, which allows spontaneous polarization, the order parameter having two components η_1, η_2 and being transformed by the irreducible representation E_u of the group C_{3h}; the components P_x, P_y of the polarization vector in the plane perpendicular to the C_3 axis being transformed by the representation E_g.

The thermodynamic potential $\tilde{\Phi}$ near the transition point is to be expanded in powers [f] the order parameter $\eta_1.\eta_2$ and the polarization P_x, P_y. For ferroelectricity to occur, ther [e] must be mixed invariants formed from the same quantities, and linear in the vector P There are two such invariants in this case: the real and imaginary parts of the product
$(\eta_1 + i\eta_2)^2 (P_x + iP_y)$. We thus obtain an expansion in the form

$$\begin{aligned}\widetilde{\Phi} = \Phi_0 + a(T - T_c)\,\eta^2 + B\eta^4 + \kappa\mathbf{P}^2 + C_1\eta^2\left[P_x\left(\gamma_1^2 - \gamma_2^2\right) - 2P_y\gamma_1\gamma_2\right)\right] \\ + C_2\eta^2\left[P_y\left(\gamma_1^2 - \gamma_2^2\right) + 2P_x\gamma_1\gamma_2\right] - \mathbf{E}\cdot\mathbf{P} - \mathbf{E}^2/8\pi,\end{aligned} \tag{20.1}$$

where $\eta^2 = {\eta_1}^2 + {\eta_2}^2, \gamma_i = \eta_i/\eta$; the vectors $\mathbf{E}$ and $\mathbf{P}$ are in the xy-plane.
The order parameter and the polarization are determined by the condition that Φ be a minimum (for constant E). Here we shall give only some characteristic results that are evident without actually making the calculation. The order parameter in the unsymmetrical phase is found to be proportional to $(T_c - T)^{1/2}$, as for any second-order transition in the Landau theory. The polarization arises as an effect of the second order in η, and is therefore proportional to $T_c - T$. The dielectric susceptibility does not tend to infinity as $T \to T_c$ as in ordinary ferroelectrics, because it is not here determined by a coefficient of η^2 that tends to zero. It does, however, have a finite discontinuity at the transition point. This is because, in the symmetrical phase, the order parameter $\eta = 0$ and is not affected by the field $\mathbf{E}$; in the unsymmetrical phase it does change, and this gives a further contribution to the susceptibility.

An improper ferroelectric transition is possible only when the order parameter has more than one component. With a one-component parameter η, the only possible mixed invariant linear in $\mathbf{P}$ is ηP_z, where P_z is one component of the vector $\mathbf{P}$ (since η^2 is an invariant for a one-dimensional representation). This would mean, however, that η and P_z had the same transformational properties, and therefore that P_z itself could be chosen as the order parameter.

7.2 III Steady Current by Landau

7.2.1 §21. The current density and the conductivity

Let us now consider the steady motion of charges in conductors, i.e. steady electric currents. We shall denote by $\mathbf{j}$ the mean charge flux density or electric current density. † In a steady current, the spatial distribution of $\mathbf{j}$ is independent of time, and satisfies the equation

$$\operatorname{div}\mathbf{j} = 0, \tag{21.1}$$

which states that the mean total charge in any volume of the conductor remains constant. The electric field in the conductor in which a steady current flows is constant, and therefore satisfies the equation

$$\operatorname{curl}\mathbf{E} = 0, \tag{21.2}$$

i.e. it is a potential field.
Equations (21.1) and (21.2) must be supplemented by an equation relating $\mathbf{j}$ and $\mathbf{E}$. This

[0]† The possible existence of such ferroelectrics was noted by V. L. Indenbom (1960).
‡ All known improper ferroelectrics are in fact of this type.

equation depends on the properties of the conductor, but in the great majority of cases it may be supposed linear (Ohm's law). If the conductor is homogeneous and isotropic, the linear relation is a simple proportionality:

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}. \tag{21.3}$$

The coefficient σ depends on the nature and state of the conductor; it is called the electrical conductivity.

In a homogeneous conductor, σ = constant and, substituting (21.3) in (21.1), we have $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$. In this case the electric field potential satisfies Laplace's equation: $\triangle\phi = 0$.

At a boundary between two conducting media, the normal component of the current density must, of course, be continuous. Moreover, by the general condition that the tangential field component be continuous (which follows from curl $\mathbf{E} = 0$; cf. (1.7) and (6.9)), the ratio $\mathbf{j_t}/\sigma$ must be continuous. Thus the boundary conditions on the current density are

$$j_{n1} = j_{n2}, \quad \mathbf{j}_{11}/\sigma_1 = \mathbf{j}_{12}/\sigma_2, \tag{21.4}$$

or. as conditions on the field,

$$\sigma_1 E_{n1} = \sigma_2 E_{n2}, \quad \mathbf{E}_{t1} = \mathbf{E}_{t2}. \tag{21.5}$$

At a boundary between a conductor and a non-conductor we have simply $j_n = 0$, or $E_n = 0$.†

An electric field in the presence of a current does mechanical work on the currentcarrying particles moving in the conductor; the work done per unit time and volume is evidently equal to the scalar product $\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$. This work is dissipated into heat in the conductor. Thus the quantity of heat evolved per unit time and volume in a homogeneous conductor is

$$\mathbf{j} \cdot \mathbf{E} = \sigma E^2 = j^2/\sigma. \tag{21.6}$$

This is Joule's law. ‡

The evolution of heat results in an increase in the entropy of the body. When an amount of heat $\mathrm{d}Q = \mathbf{j} \cdot \mathbf{E}\mathrm{d}V$ is evolved, the entropy of the volume element $\mathrm{d}V$ increases by $\mathrm{d}Q/T$. The rate of change of the total entropy of the body is therefore

$$\mathrm{d}\mathscr{S}/\mathrm{d}t = \int (\mathrm{j} \cdot \mathbf{E}/T)\mathrm{d}V. \tag{21.7}$$

Since the entropy must increase, this derivative must be positive. Putting $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$, we see that the conductivity σ must therefore be positive.

In an anisotropic body (a single crystal), the directions of the vectors $\mathbf{j}$ and $\mathbf{E}$ are in general different, and the linear relation between them is

$$j_i = \sigma_{ik} E_k, \tag{21.8}$$

where the quantities σ_{ik} form a tensor of rank two, the conductivity tensor. which is symmetrical (see below).

The following remark should be made here. The symmetry of the crystal would admit also an inhomogeneous term in the linear relation between j and E . giving $j_i = \sigma_{ik}E_k + j_i^{(0)}$, with $\mathbf{j}^{(0)}$ a constant vector. The presence of this term would mean that the conductor was "pyroelectric", there being a non-zero field in it when $\mathbf{j} = 0$. In reality, however, this is impossible, because

[0]† In this chapter we ignore the magnetic field due to the current, and therefore the reaction of that field on the current. If this effect is to be taken into account, the definition of the current density must be refined, which we do in §30.

the entropy must increase: the term $\mathbf{j}^{(0)} \cdot \mathbf{E}$ in the integrand in (21.7) could take either sign, and so $\mathrm{d}\mathscr{S}/\mathrm{d}t$ could not be invariably positive.

Just as, for an isotropic medium, $\mathrm{d}\mathscr{S}/\mathrm{d}t > 0$ leads to $\sigma > 0$, so for an anisotropic medium this condition means that the principal values of the tensor σ_{ik} must be positive.

The dependence of the number of independent components of the tensor σ_{ik} on the symmetry of the crystal is the same as for any symmetrical tensor of rank two (see §13): for biaxial crystals, all three principal values are different, for uniaxial crystals two are equal, and for cubic crystals all three are equal. i.e. a cubic crystal behaves as an isotropic body as regards its conductivity.

The symmetry of the conductivity tensor

$$\sigma_{ik} = \sigma_{ki} \tag{21.9}$$

is a consequence of the symmetry of the kinetic coefficients. This general principle, due to **L**. Onsager, may be conveniently formulated, for use here and in §§26-28, as follows (see SP 1, §120).

Let $x_1, x_2, \ldots$ be some quantities which characterize the state of the body at every point. We define also the quantities

$$X_a = -\partial S/\partial x_a \tag{21.10}$$

where S is the entropy of unit volume of the body, and the derivative is taken at constant energy of the volume. In a state close to equilibrium, the quantities x_a are close to their equilibrium values, and the X_a are small. Processes will occur in the body which tend to bring it into equilibrium. The rates of change of the quantities x_a at each point are usually functions only of the values of the x_a (or X_a) at that point. Expanding these functions in powers of X_a and taking only the linear terms, we have

$$\partial x_a/\partial t = -\sum_b \gamma_{ab} X_b \tag{21.11}$$

Then we can assert that the coefficients γ_{ab} (the kinetic coefficients) are symmetrical with respect to the suffixes a and b : †

$$\gamma_{ab} = \gamma_{ba} \tag{21.12}$$

In order to make practical use of this principle, it is necessary to choose the quantities x_a (or their derivatives $\dot{x}_a$) in some manner, and then to determine the X_a. This can usually be done very simply by means of the formula for the rate of change of the total entropy of the body

$$\frac{\mathrm{d}\mathscr{S}}{\mathrm{d}t} = -\int \sum_a X_a \frac{\partial x_a}{\partial t}\, \mathrm{d}V' \tag{21.13}$$

where the integration is extended over the whole volume of the body.

When a current flows in a conductor, $\mathrm{d}\mathscr{S}/\mathrm{d}t$ is given by (21.7). Comparing this with (21.13), we see that, if the components of the current density vector $\mathbf{j}$ are taken as the quantities $\dot{x}_a$, then the quantities X_a will be the components of the vector $-\mathbf{E}/T$. A comparison of formulae (21.8) and (21.11) shows that the kinetic coefficients in this case are the components of the

[0]‡ It should be noticed that the equations $\operatorname{curl} \mathbf{E} = 0, \operatorname{div}(\sigma\mathbf{E}) = 0$ and the boundary conditions (21.5) thereon are formally identical with the equations for the electrostatic field in a dielectric, the only difference being that ε is replaced by σ. This enables us to solve problems of the current distribution in an infinite conductor if the solutions of the corresponding electrostatic problems are known. When the conductor is bounded by a non-conductor this analogy does not serve, because in electrostatics there is no medium for which $\varepsilon = 0$.

‡ In Russian "Joule and Lenz's law".

conductivity tensor, multiplied by T. Thus the symmetry of this tensor follows immediately from the general relation (21.12).

PROBLEMS

Problem 1. A system of electrodes maintained at constant potentials ϕ_a is immersed in a conducting medium. A current J_a flows from each electrode. Determine the total amount of Joule heat evolved in the medium per unit time.

Solution. The required amount of heat Q is given by the integral

$$Q = \int \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} \mathrm{d}V' = -\int \mathbf{j} \cdot \operatorname{grad} \phi \mathrm{d}V = -\int \operatorname{div}(\phi \mathbf{j}) \mathrm{d}V$$

taken over the volume of the medium. We transform this into a surface integral, using the fact that $j_n = 0$ at the outer boundary of the medium, while on the surfaces of the electrodes $\phi =$ constant $\equiv \phi_a$. The result is $Q = \Sigma \phi_a J_a$.

Problem 2 Determine the potential distribution in a conducting sphere with a current J entering at a point O and leaving at the point O' diametrically opposite to O.

Solution. Near O and O' (Fig. 15) the potential must be of the forms $\phi = J/2\pi\sigma R_1$ and $\phi = -J/2\pi\sigma R_2$ respectively, R_1 and R_2 being the distances from O and O'. These functions satisfy Laplace's equation, and the

†1 t is assumed that x_a and x_b behave in the same way under time reversal.

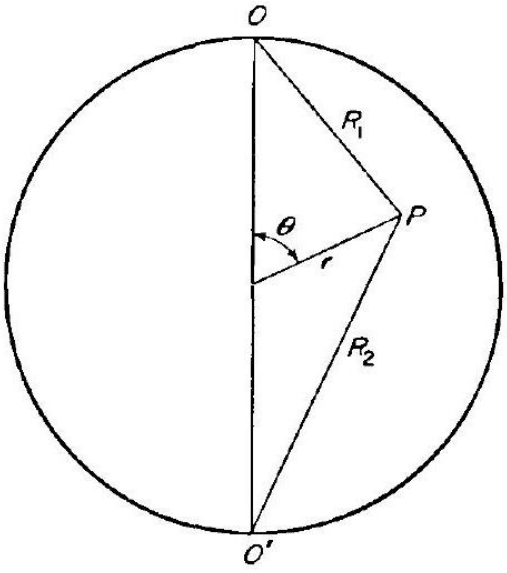


Fig. 15

integrals $-\sigma \int \operatorname{grad} \phi \cdot \mathrm{d}f$ over infinitesimal caps about O and O' are equal to $\pm J$. We seek the potential at an arbitrary point P in the sphere in the form

$$\phi = \frac{J}{2\pi\sigma} \left\{ \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \psi \right\},$$

where ψ is a solution of Laplace's equation having no poles in or on the sphere. It is evident from symmetry that ψ, like ϕ, is a function of the spherical polar coordinates r and θ only.

On the surface of the sphere ($r = a$) we must have $\partial\phi/\partial r = 0$. Differentiating, we find the boundary condition on ψ :

$$\frac{\partial\psi}{\partial r} = \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \text{ for } r = a.$$

If $f(r,\theta)$ is any solution of Laplace's equation, then the function

$$\int_0^r \frac{f(r,\theta)}{r}\,\mathrm{d}r$$

is also a solution. † Comparing this with the above boundary condition. we see that the condition is met by the solution

$$\psi = \frac{1}{2}\int_0^r \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)\frac{\mathrm{d}r}{r}.$$

Substituting $R_{1,2} = \sqrt{}(a^2 + r^2 \mp 2ar\cos\theta)$ and effecting the integration, we have finally

$$\phi = \frac{J}{2\pi\sigma}\left\{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{2a}\left(\sinh^{-1}\frac{a + r\cos\theta}{r\sin\theta} - \sinh^{-1}\frac{a - r\cos\theta}{r\sin\theta}\right)\right\},$$

if $\phi = 0$ when $r = 0$.

Problem 3. Show that the current distribution in a conductor is such that the energy dissipated is a minimum.

Solution The minimum concerned is that of the integral $\int \mathbf{j}\cdot\mathbf{E}\mathrm{d}V = \int (j^2/\sigma)\,\mathrm{d}V$, with the subsidiary condition div j = 0 (conservation of charge). Varying with respect to j the integral $\int [(j^2/\sigma) - 2\phi\,\mathrm{div}\,\mathrm{j}]\,\mathrm{d}V$, where 2ϕ is an undetermined Lagrange multiplier, and equating the result to zero, we obtain the equation $\mathbf{j} = -\sigma\,\mathrm{grad}\,\phi$ or $\mathrm{curl}(\mathbf{j}/\sigma) = 0$, which is the same as (21.2) and (21.3).

7.2.2 §22. The Hall effect

If a conductor is in an external magnetic field H. the relation between the current density and the electric field is again given by $j_i = \sigma_{ik}E_k$, but the components of the conductivity tensor σ_{ik} are functions of $\mathbf{H}$ and, what is particularly important, they are no longer symmetrical with respect to the suffixes i and k. The symmetry of this tensor was proved in §21 from the symmetry of the kinetic coefficients. In a magnetic field, however, this principle must be formulated somewhat differently: when the suffixes are interchanged, the direction of the magnetic field must be reversed (see SP 1, §120). Hence we now have for the components $\sigma_{ik}(\mathbf{H})$ the relations

$$\sigma_{ik}(\mathbf{H}) = \sigma_{ki}(-\mathbf{H}) \tag{22.1}$$

The quantities $\sigma_{ik}(\mathbf{H})$ and $\sigma_{ki}(\mathbf{H})$ are not equal.

Like any tensor of rank two, σ_{ik} can be divided into symmetrical and antisymmetrical parts, which we denote by s_{ik} and a_{ik} :

$$\sigma_{ik} = s_{ik} + a_{ik} \tag{22.2}$$

By definition

$$s_{ik}(\mathbf{H}) = s_{ki}(\mathbf{H}), \quad a_{ik}(\mathbf{H}) = -a_{ki}(\mathbf{H}), \tag{22.3}$$

[0†] This is easily seen either by direct calculation or from the fact that any solution $f(r,\theta)$ of Laplace's equation depending only on r and θ can be written $f = \Sigma c_n r^n P_n(\cos\theta)$, where the c_n are constants and the P_n are Legendre Polynomials.

and from (22.1) it follows that

$$\left.\begin{aligned} s_{ik}(\mathbf{H}) = s_{ki}(-\mathbf{H}), = s_{ik}(-\mathbf{H}), \\ a_{ik}(\mathbf{H}) = a_{ki}(-\mathbf{H}) = -a_{ik}(-\mathbf{H}). \end{aligned}\right\} \tag{22.4}$$

Thus the components of the tensor s_{ik} are even functions of the magnetic field, and those of a_{ik} are odd functions.

Any antisymmetrical tensor a_{ik} of rank two corresponds to some axial vector, whose components are

$$a_x = a_{yz}, \quad a_y = -a_{xz}, \quad a_z = a_{xy} \tag{22.5}$$

In terms of this vector, the components of the product $a_{ik}E_k$ can be written as those of the vector product $\mathbf{E} \times \mathbf{a}$:

$$j_i = \sigma_{ik}E_k = s_{ik}E_k + (\mathbf{E} \times \mathbf{a})_i \tag{22.6}$$

The Joule heat generated by the passage of the current is given by the product $\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$. Since the vectors $\mathbf{E} \times \mathbf{a}$ and $\mathbf{E}$ are perpendicular, their scalar product is zero identically, and s 0

$$\mathbf{j} \cdot \mathbf{E} = s_{ik}E_iE_k \tag{22.7}$$

i.e. the Joule heat is determined (for a given field $\mathbf{E}$) only by the symmetrical part of the conductivity tensor.

If the external magnetic field is sufficiently weak, the components of the conductivity tensor may be expanded in powers of that field. Since the function $\mathbf{a}(\mathbf{H})$ is odd, the
expansion of this vector will involve only odd powers. The first terms are linear in the field. i.e. they are of the form

$$a_i = \alpha_{ik}H_k. \tag{22.8}$$

The vectors $\mathbf{a}$ and $\mathbf{H}$ are both axial, and the constants α_{ik} therefore form an ordinary (polar) tensor. The expansion of the even functions $s_{ik}(\mathbf{H})$ will involve only even powers. The first term is the conductivity ${\sigma^{(0)}}_{ik}$ in the absence of the field, and the next terms are quadratic in the field:

$$s_{ik} = {\sigma^{(0)}}_{ik} + \beta_{iklm}H_lH_m. \tag{22.9}$$

The tensor β_{iklm} is symmetrical with respect to i, k and l, m.
Thus the principal effect of the magnetic field is linear in the field and is given by the term Ea; it is called the Hall effect. As we see, it gives rise to a current perpendicular to the electric field, whose magnitude is proportional to the magnetic field. It should be borne in mind, however, that, for an arbitrary anisotropic medium, the Hall current is not the only current perpendicular to $\mathbf{E}$; the current $s_{ik}E_k$ also has a component in such a direction.

The Hall effect may be differently regarded if we use the inverse formulae which express $\mathbf{E}$ in terms of the current density: $E_i = {\sigma^{-1}}_{ik}j_k$. The inverse tensor ${\sigma^{-1}}_{ik}$, like σ_{ik} itself, can be resolved into a symmetrical part ρ_{ik} and an antisymmetrical part which may be represented by an axial vector $\mathbf{b}$:

$$E_i = \rho_{ik}j_k + (\mathbf{j} \times \mathbf{b})_i. \tag{22.10}$$

The tensor ρ_{ik} and the vector $\mathbf{b}$ have the same properties as s_{ik} and $\mathbf{a}$. In particular, in weak magnetic fields the vector $\mathbf{b}$ is linear in the field. In formula (22.10) the Hall effect is represented by the term $\mathbf{j} \times \mathbf{b}$, i.e. by an electric field perpendicular to the current and proportional to the magnetic field and to the current $\mathbf{j}$.

The above relations are much simplified if the conductor is isotropic. The vectors **a** and **b** must then be parallel to the magnetic field, by symmetry. The only non-zero components of the tensor ρ_{ik} are $\rho_{xx} = \rho_{yy}$ and ρ_{zz}, the field being in the z-direction. Denoting these two quantities by $\rho_\perp$ and $\rho_\parallel$and taking the current to lie in the xz-plane, we have

$$E_x = \rho_\perp j_x, \quad E_y = -bj_x. \quad E_x = \rho_y j_z. \tag{22.11}$$

Hence we see that, in an isotropic conductor, the Hall field is the only electric field which is perpendicular to both the current and the magnetic field.

In weak magnetic fields, the vectors **b** and **H** are related (in an isotropic body) simply by

$$\mathbf{b} = -R\mathbf{H}. \tag{22.12}$$

The constant R (called the Hall constant) may be either positive or negative. The form of the terms quadratic in **H** in the relation between **E** and **j**, which enter through the tensor ρ_{ik}, is easily seen from the fact that the only vectors linear in **j** and quadratic in **H** which can be constructed from **j** and **H** are $(\mathbf{j}\cdot\mathbf{H})\mathbf{H}$ and $H^2\mathbf{j}$. Hence the general form of the relation between **E** and **j** in an isotropic body, as far as the terms quadratic in **H**. is

$$\mathbf{E} = \rho^{(\mathrm{O})}\mathbf{j} + R\mathbf{H}\times\mathbf{j} + \beta_1 H^2\mathbf{j} + \beta_2(\mathbf{j}\cdot\mathbf{H})\mathbf{H}. \tag{22.13}$$

PROBLEM

from their form in this particular case. The determinant $|\sigma|$ is

$$|\sigma| = \begin{vmatrix} s_{xx} & a_z & -a_y \\ -a_z & s_{yy} & a_x \\ a_y & -a_x & s_{zz} \end{vmatrix}$$
$$= s_{xx}s_{yy}s_{zz} + s_{xx}a_x^2 + s_{yy}a_y^2 + s_{zz}a_z^2$$

In the general case we evidently have

$$|\sigma| = |s| + s_{ik}a_i a_k.$$

From the minors of this determinant we find the components of the inverse tensor:

$$\sigma^{-1}xx = \rho_{xx} = \left(s_{yy}s_{zz} + a_x^2\right)/|\sigma|$$
$$\sigma^{-1}xy = \rho_{xy} + b_z = \left(a_x a_y - a_z s_{zz}\right)/|\sigma|$$

The general expressions which give these results for the particular system of coordinates chosen are

$$\rho_{ik} = \left\{{s^{-1}}_{ik}|s| + a_i a_k\right\}/|\sigma|, \quad b_i = -s_{ik}a_k/|\sigma|.$$

This completes the solution,

[0]Express the components of the inverse tensor ${\sigma^{-1}}_{ik}$ in terms of those of s_{ik} and **a**.
Solution. The calculations are most simply effected by taking a system of coordinates in which the axes are the principal axes of the tensor s_{ik} : the form of the results in an arbitrary coordinate system can easily be deduced

7.2.3 §23. The contact potential

In order to remove a charged particle through the surface of a conductor, work must be done. The work required for a thermodynamically reversible removal of the particle is called the work function. This quantity is always positive: this follows immediately from the fact that a point charge is attracted to any neutral body, and therefore to any conductor (see §14). The work in question will be denoted by eW, where e is the charge on the particle; the sign of the work potential W thus defined is the same as that of the charge on the particle removed.

The work function depends both on the nature of the conductor (and its thermodynamic state, i.e. its temperature and density) and on that of the charged particle. For example, the work function for a given metal is different for the removal of a conduction electron and for the removal of an ion from the surface. It must also be emphasized that the work function is characteristic of the surface of the conductor. It therefore depends, for instance, on the treatment of the surface and the "contamination" of it. If the conductor is a single crystal, then the work function is different for different faces.

To ascertain the physical nature of the dependence of the work function on the properties of the surface, let us establish its relation to the electric structure of the surface layer. If $\rho(x)$ is the charge density not averaged over physically infinitesimal segments of the x-axis (perpendicular to the layer), we can write Poisson's equation in the layer as $\mathrm{d}^2\phi/\mathrm{d}x^2 = -4\pi\rho$. Let the conductor occupy the region $x < 0$. Then a first integration gives

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}x} = -4\pi \int_{-\infty}^{x} \rho \, \mathrm{d}x$$

and a second integration (by parts) gives

$$\phi - \phi(-\infty) = -4\pi x \int_{-\infty}^{x} \rho \, \mathrm{d}x + 4\pi \int_{-\infty}^{x} x\rho \, \mathrm{d}x$$

For $x \to \infty$, the integral

$$\int_{-\infty}^{x} \rho \, \mathrm{d}x$$

tends very rapidly to zero (since the surface of an uncharged conductor is electrically neutral). Hence

$$\phi(+\infty) - \phi(-\infty) = 4\pi \int_{-\infty}^{\infty} x\rho \, \mathrm{d}x.$$

The integral on the right is the dipole moment of the charges near the surface of the body. These charges form a "double layer", in which charges of opposite sign are separated and the dipole moment is non-zero. The structure of the double layer, of course, depends on the properties of the surface (its crystallographic direction, contamination, etc.). The difference in the work potential for different surfaces of a given conductor is determined by the difference in the dipole moments.

If two different conductors are placed in contact, an exchange of charged particles may occur between them. Charges pass from the body with the smaller work function to that with the greater until a potential difference between them is set up which prevents further movement of charge. This is called a contact potential.

Fig. 16 shows a cross-section of two conductors in contact (a and b) near their surfaces AO and OB. Let the potentials of these surfaces be ϕ_a and ϕ_b respectively. Then the contact potential is $\phi_{ab} = \phi_b - \phi_a$. The quantitative relation between this potential and the work functions is given by the condition of thermodynamic equilibrium. Let us consider the work

which must be done on a particle with charge e to remove it from the conductor a through the surface AO, transfer it to the surface OB, and finally carry it into the conductor b. In a state of thermodynamic equilibrium, this work must be zero. † The work done on the particle in the three stages mentioned is $eW_a, e(\phi_b - \phi_a)$, and $-eW_b$ respectively. Putting the sum of these equal to zero, we find the required relation:

$$\phi_{ab} = W_b - W_a. \tag{23.1}$$

Thus the contact potential of the neighbouring free surfaces of two conductors in contact is equal to the difference in their work functions.

The existence of the contact potential results in the appearance of an electric field in the space outside the conductors. It is easy to determine this field near the line of contact of the surfaces. In a small region near this line (the point O in Fig. 16), the surfaces may be

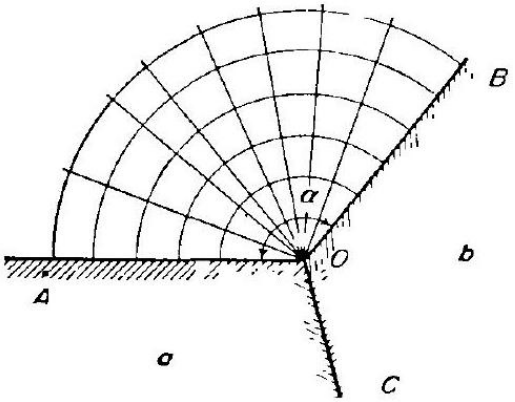


Fig. 16

regarded as plane. The field potential outside the conductors satisfies the equation

$$\Delta\phi \equiv \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2} = 0$$

where r and θ are polar coordinates with origin at O; on AO and OB the potential takes given constant values. We are interested in the solution which contains the lowest power of r; this is the leading term in an expansion of the potential in powers of the small distance r. The solution concerned is $\phi =$ constant $\times\theta$. Measuring the angle θ from AO and arbitrarily taking the potential on AO as zero, we have

$$\phi = \phi_{ab}\theta/\alpha \tag{23.2}$$

where α is the angle AOB. Thus the equipotential lines in the plane of the diagram are straight lines diverging from O. The lines of force are arcs of circles centred at O. The field is

$$E = -\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta} = -\frac{\phi_{ab}}{\alpha}\frac{1}{r} \tag{23.3}$$

it decreases inversely as the distance from O.

As has been said above, "contact" potentials also exist between the various faces of a single crystal of metal. Hence an electric field of the kind just described must exist near the edges of the crystal. †

[0]† Of course, in reality a particle can pass from one conductor to another only through their surface of contact, and not through the space adjoining them, but the work done is independent of the path.

If several metallic conductors (at equal temperatures) are connected together, the potential between the extreme conductors is, as we easily deduce from formula (23.1), simply the difference of their work potentials, as it is for two conductors in direct contact. In particular, if the metal at each end is the same, the contact potential between the ends is zero. This is evident, however, because if there were a potential difference between two like conductors, a current would flow when they were connected, in contradiction to the second law of thermodynamics.

7.2.4 §24. The galvanic cell

The statement at the end of §23 ceases to be valid if the circuit includes conductors in which the current is carried by different means (e.g. metals and solutions of electrolytes). Because the work function of a conductor is different for different charged particles (electrons and ions), the total contact potential in the circuit is not zero even when the conductors at each end are similar. This total potential difference is called the electromotive force or e.m.f. in the circuit; it is just the potential difference between the two like conductors before the circuit is closed. When the circuit is closed, a current flows in it; this is the basis of the operation of what are called galvanic cells. The energy which maintains the current in the circuit is supplied by chemical transformations occurring in the cell.

When we go completely round any closed circuit the field potential must, of course, return to its original value, i.e. the total change in the potential must be zero. Let us consider, for example, a contour on the surface of the conductors. When we pass from one conductor to another, the potential has a discontinuity ϕ_{ab}. The potential drop across any

conductor is RJ, where J is the total current flowing through it and R is its resistance. Hence the total change in the potential round the circuit is $\Sigma\phi_{ab} - \Sigma JR$. Putting this equal to zero and using the facts that J is the same at every point in the circuit and $\Sigma\phi_{ab}$ is the electromotive force $\mathscr{E}$, we find

$$J\Sigma R = \mathscr{E}, \tag{24.1}$$

so that the current in a circuit containing a galvanic cell is equal to the e.m.f. divided by the total resistance of all the conductors in the circuit (including, of course, the internal resistance of the cell itself).

Although the e.m.f. of a galvanic cell can be expressed as a sum of contact potentials, it is very important to note that it is in reality a thermodynamic quantity, determined entirely by the states of the conductors and independent of the properties of the surfaces separating them. This is clear. because $\mathscr{E}$ is just the work per unit charge which must be done on a charged particle when it is carried reversibly along the closed circuit.

To illustrate this, let us consider a galvanic cell consisting of two electrodes of metals A and B immersed in solutions of electrolytes AX and BX, X^-being any anion. Let ζ_A and ζ_B be the chemical potentials of the metals A and B, and ζ_{AX} and ζ_{BX} those of the electrolytes in solution † If an elementary charge e is carried along the closed circuit, an ion A^+passes into solution from the electrode A and an ion B^+passes out of solution to the electrode B, the change in the charges on the electrodes being compensated by the passage of an electron from A to B through the external circuit. The result is that the electrode A loses one neutral atom, the electrode B gains one, and in the electrolyte solution one molecule of BX is replaced by one of AX. Since the work done in a reversible process (at constant temperature and pressure) is equal to the change in the thermodynamic potential of the system, we have

$$e\mathscr{E}_{AB} = (\zeta_B - \zeta_{BX}) - (\zeta_A - \zeta_{AX}), \tag{24.2}$$

[0]† In reality, all such fields are usually compensated by the field of ions from the atmosphere which "adhere" to the surface of the crystal.

which expresses the e.m.f. of the cell in terms of the properties of the material of the electrodes and of the electrolyte solution.

From (24.2) we can also draw the following conclusion. If the solution contains three electrolytes AX, BX, CX and three metallic electrodes A, B, C, then the e.m.f.s between each pair of them are related by

$$\mathscr{E}_{AB} + \mathscr{E}_{BC} = \mathscr{E}_{AC}. \tag{24.3}$$

Using the general formulae of thermodynamics, we can relate the e.m.f. of a galvanic cell to the heat evolved when a current flows, which of course is actually an irreversible phenomenon. Let Q be the amount of heat generated (both in the cell itself and in the external circuit) when the unit charge passes along the circuit; Q is just the heat of the reaction which occurs in the cell when a current flows. By a well-known formula of thermodynamics (see $SP1, 891$), it is related to the work $\mathscr{E}$ by

$$Q = -T^2 \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{\mathscr{E}}{T}\right). \tag{24.4}$$

The definition of the partial derivative with respect to temperature depends on the conditions under which the process occurs. For example, if the current flows at constant pressure (as usually happens), then the differentiation is effected at constant pressure.

7.2.5 §25. Electrocapillarity

The presence of charges on the boundary between two conducting media affects the surface tension there. This phenomenon is called electrocapillarity. In practice. the media concerned are both liquids; usually one is a liquid metal (mercury) and the other is a solution of an electrolyte.

Let ϕ_1, ϕ_2 be the potentials of the two conductors, and e_1, e_2 the charges at the surface of separation. These charges are equal in magnitude and opposite in sign, and thus form a double layer on the surface.

The differential of the potential $\tilde{\mathscr{M}}$ of a system of two conductors at given temperature and pressure is, taking into account the surface of separation,

$$\mathrm{d}\tilde{g}, = \alpha \mathrm{d}S - e_1\ \mathrm{d}\phi_1 - e_2\ \mathrm{d}\phi_2, \tag{25.1}$$

where the term $\alpha \mathrm{d}S$ is the work done in a reversible change $\mathrm{d}S$ in the area S of the surface of separation: α is the surface-tension coefficient (see SP 1, §154).

The thermodynamic potential $\hat{\mathscr{S}}^{\mathbf{0}}$ in (25.1) may be replaced by its "surface part" $\hat{\mathscr{S}}_s$, since the volume part is constant for given temperature and pressure, and is therefore of no interest here. Putting $e_1 = -e_2 \equiv e$ and the potential difference $\phi_1 - \phi_2 = \phi$, we can write (25.1) as

$$\mathrm{d}_s = \alpha \mathrm{d}S - e\ \mathrm{d}\phi. \tag{25.2}$$

Hence

$$\left(\partial \tilde{\mathcal{G}}_s / \partial S\right)_\phi = \alpha, \tag{25.3}$$

α being expressed as a function of ϕ. Integrating, we find that $\tilde{g}_s = \alpha S$. Substitution in (25.2) gives $\mathrm{d}(\alpha S) = \alpha \mathrm{d}S - e\ \mathrm{d}\phi$, or $S\ \mathrm{d}\alpha = -e\ \mathrm{d}\phi$, whence

$$\sigma = -(\partial \alpha / \partial \phi)_{P,T}, \tag{25.4}$$

[0]† In this section we use the ordinary chemical potentials, i.e. those defined with respect to one particle.

where $\sigma = e/S$ is the charge per unit area of the surface. The relation (25.4), derived by G . Lippmann and J. W. Gibbs, is the fundamental formula in the theory of electrocapillarity.

In a state of equilibrium, the thermodynamic potential $\tilde{g}$ o must be a minimum for given values of the electric potentials on the conductors. Regarding it as a function of the surface charges e, we can write the necessary conditions for a minimum as

$$\partial\tilde{\mathscr{M}}_s/\partial e = 0, \quad \partial^2\tilde{\mathscr{M}}_s/\partial e^2 > 0, \tag{25.5}$$

where the derivatives are taken at constant area S. To calculate these, we express $\hat{\mathscr{S}}_s$ in terms of the thermodynamic potential $\mathscr{L}_s = {}_s(e)$:

$$\tilde{g}_s = g_s(e) - e_1\phi_1 - e_2\phi_2 = g_s(e) - e\phi. \tag{25.6}$$

The vanishing of the first derivative gives

$$\frac{\partial\hat{g}_\mathrm{s}}{\partial e} = \frac{\partial\mathcal{G}_\mathrm{s}}{\partial e} - \phi = 0,$$

and then the condition for the second derivative to be positive becomes

$$\frac{\partial^2\tilde{\mathcal{S}}_s}{\partial e^2} = \frac{\partial^2\mathcal{S}_s}{\partial e^2} = \frac{\partial\phi}{\partial e} = \frac{1}{S}\frac{\partial\phi}{\partial\sigma} > 0,$$

or

$$\partial\sigma/\partial\phi > 0. \tag{25.7}$$

This result was to be expected, since the double layer on the surface may be regarded as a capacitor with capacitance $\partial e/\partial\phi$.

Differentiating equation (25.4) with respect to ϕ and using (25.7), we find that

$$\hat{c}^2\alpha/\partial\phi^2 < 0. \tag{25.8}$$

This means that the point where $\partial\alpha/\partial\phi = -\sigma = 0$ is a maximum of α as a function of ϕ.

7.2.6 §26. Thermoelectric phenomena

The condition that there should be no current in a metal is that there is thermodynamic equilibrium with respect to the conduction electrons. This means not only that the temperature must be constant throughout the body, but also that the sum $e\phi + \zeta_0$ should be constant, where ζ_0 is the chemical potential of the conduction electrons in the metal (for $\phi = 0$).† If the metal is not homogeneous, ζ_0 is not constant throughout the body even if the temperature is constant. Hence the constancy of the electric potential ϕ in this case does not mean the absence of a current in the metal, although the field $\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\phi$ is zero. This makes the ordinary definition of ϕ (as the average of the true potential) inconvenient, if we wish to take inhomogeneous conductors into consideration.

It is natural to redefine the potential as $\phi + \zeta_0/e$, and we shall write this henceforward as ϕ simply. ‡ In a homogeneous metal, the change amounts to the adding of an unimportant constant to the potential. Accordingly, the "field" $\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\phi$ (which we shall use henceforward) is the same as the true mean field only in a homogeneous metal, and in general the two differ by the gradient of some function of the state.§

With this definition, the current and field are both zero in a state of thermodynamic equilibrium with respect to the conduction electrons, and the relation between them is j = σE (or $j_i = \sigma_{ik}E_k$) even if the metal is not homogeneous.

Let us now consider a non-uniformly heated metal, which cannot be in thermodynamic equilibrium (with respect to the electrons). Then the field $\mathbf{E}$ is not zero even if the current is zero. In general, when both the current density $\mathbf{j}$ and the temperature gradient grad T are not zero, the relation between these quantities and the field can be written

$$\mathbf{E} = \mathbf{j}/\sigma + \alpha \operatorname{grad} T \tag{26.1}$$

Here σ is the ordinary conductivity, and α is another quantity which is an electrical characteristic of the metal. Here we suppose for simplicity that the substance is isotropic (or of cubic symmetry), and therefore write the proportionality coefficients as scalars. The linear relation between $\mathbf{E}$ and grad T is, of course, merely the first term of an expansion, but it is sufficient in view of the smallness of the temperature gradients occurring in practice.

The same formula (26.1), in the form

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} - \alpha \operatorname{grad} T) \tag{26.2}$$

shows that a current can flow in a non-uniformly heated metal even if the field $\mathbf{E}$ is zero. As well as the electric current density $\mathbf{j}$, we can consider the energy flux density $\mathbf{q}$. First of all. this quantity contains an amount $\phi\mathbf{j}$ resulting simply from the fact that each charged particle (electron) carries with it an energy $e\phi$. The difference $\mathbf{q} - \phi\mathbf{j}$, however, does not depend on the potential, and can be generally written as a linear function of the gradients grad $\phi = -\mathbf{E}$ and grad T, similarly to formula (26.2) for the current density. We shall for the present write this as

$$\mathbf{q} - \phi\mathbf{j} = \beta\mathbf{E} - \gamma \operatorname{grad} T$$

The symmetry of the kinetic coefficients gives a relation between the coefficient β and the coefficient α in (26.2). To derive this, we calculate the rate of change of the total entropy of the conductor. The amount of heat evolved per unit time and volume is - div $\mathbf{q}$. Hence we can put

$$\frac{\mathrm{d}\mathscr{S}}{\mathrm{d}t} = -\int \frac{\operatorname{div}\mathbf{q}}{T}\,\mathrm{d}V.$$

Using the equation div $\mathbf{j} = 0$, we have

$$\frac{\operatorname{div}\mathbf{q}}{T} = \frac{1}{T}\{\operatorname{div}(\mathbf{q} - \phi\mathbf{j}) + \operatorname{div}\phi\mathbf{j}\} = \frac{1}{T}\operatorname{div}(\mathbf{q} - \phi\mathbf{j}) - \frac{\mathbf{E}\cdot\mathbf{j}}{T}.$$

The first term is integrated by parts, giving

$$\frac{\mathrm{d}\mathscr{S}}{\mathrm{d}t} = \int \frac{\mathbf{E}\cdot\mathbf{j}}{T}\,\mathrm{d}V - \int \frac{(\mathbf{q} - \phi\mathbf{j})\cdot\operatorname{grad} T}{T^2}\,\mathrm{d}V. \tag{26.3}$$

This formula shows that, if we take as the quantities $\partial x_a/\partial t$ (see §21) the components of the vectors $\mathbf{j}$ and $\mathbf{q} - \phi\mathbf{j}$, then the corresponding quantities X_a are the components of the vectors $-\mathbf{E}/T$ and grad T/T^2. Accordingly in the relations

[0†] See $SP1, 825$. Here we take ζ to be the chemical potential defined in the usual manner, viz. per unit particle (electron).

‡ This definition can also be formulated as follows: the new $e\phi$ is the change in the free energy when one electron is isothermally brought into the metal. In other words, $\phi = \partial F/\partial\rho$, where F is the free energy of the metal and ρ the charge on the conduction electrons per unit volume.

§ It must be emphasized that $e\mathbf{E}$ is then not the force on the charge e. Consequently, this definition of $\mathbf{E}$, which is suitable in a phenomenological theory, may be inconvenient in the microscopic theory when calculating the kinetic coefficients (cf. PK, §44).

$$\mathbf{j} = \sigma T\frac{\mathbf{E}}{T} - \sigma\alpha T^2\frac{\operatorname{grad} T}{T^2},$$
$$\mathbf{q} - \phi\mathbf{j} = \beta T\frac{\mathbf{E}}{T} - \gamma T^2\frac{\operatorname{grad} T}{T^2}.$$

the coefficients $\sigma\alpha T^2$ and βT must be equal. Thus $\beta = \sigma\alpha T$, so that $\mathbf{q} - \phi\mathbf{j} = \sigma\alpha T\mathbf{E} - \gamma \operatorname{grad} T$. Finally, expressing $\mathbf{E}$ in terms of $\mathbf{j}$ and $\operatorname{grad} T$ by (26.1), we have the result

$$\mathbf{q} = (\phi + \alpha T)\mathbf{j} - \kappa \operatorname{grad} T, \tag{26.4}$$

where $\kappa = \gamma - T\alpha^2\sigma$ is simply the ordinary thermal conductivity, which gives the heat flux in the absence of an electric current.

It should be pointed out that the condition that $\mathrm{d}\mathscr{S}/\mathrm{d}t$ should be positive places no new restriction on the thermoelectric coefficients. Substituting (26.1) and (26.4) in (26.3), we obtain

$$\frac{\mathrm{d}\mathscr{S}}{\mathrm{d}t} = \int\left(\frac{j^2}{\sigma T} + \frac{\kappa(\operatorname{grad} T)^2}{T^2}\right)\mathrm{d}V > 0, \tag{26.5}$$

whence we find only that the coefficients of thermal and electrical conductivity must be positive.

In the above formulae it was tacitly assumed that an inhomogeneity of pressure (of density) at constant temperature cannot cause a field (or current) to appear in the conductor, and consequently no term in grad p was included in (26.2) or (26.4). The existence of such terms would, in fact, contradict the law of the increase of entropy: the integrand in (26.5) would then contain terms in the products $\mathbf{j}\cdot\operatorname{grad} p$ and $\operatorname{grad} T\cdot\operatorname{grad} p$, which could be of either sign, and so the integral could not be necessarily positive.

The relations (26.1) and (26.4) indicate various thermoelectric effects. Let us consider the amount of heat - div q evolved per unit time and volume in the conductor. Taking the divergence of (26.4), we have

$$\begin{aligned} Q &= -\operatorname{div}\mathbf{q} \\ &= \operatorname{div}(\kappa\operatorname{grad} T) + \mathbf{E}\cdot\mathbf{j} + \mathbf{j}\cdot\operatorname{grad}(\alpha T), \end{aligned}$$

or, substituting (26.1),

$$Q = \operatorname{div}(\kappa\operatorname{grad} T) + \frac{j^2}{\sigma} - T\mathbf{j}\cdot\operatorname{grad}\alpha. \tag{26.6}$$

The first term on the right pertains to ordinary thermal conduction, and the second term, proportional to the square of the current, is the Joule heat. The term of interest here is the third, which gives the thermoelectric effects.

Let us assume the conductor to be homogeneous. Then the change in α is due only to the temperature gradient, and $\operatorname{grad}\alpha = (\mathrm{d}\alpha/\mathrm{d}T)\operatorname{grad} T$; if, as usually happens, the pressure is constant through the body, $\mathrm{d}\alpha/\mathrm{d}T$ must be taken as $(\partial\alpha/\partial T)_P$. Thus the amount of heat evolved (called the Thomson effect) is

$$\rho\mathbf{j}\cdot\operatorname{grad} T, \text{ where } \rho = -T\,\mathrm{d}\alpha/\mathrm{d}T. \tag{26.7}$$

The coefficient ρ is called the Thomson coefficient. It should be noticed that this effect is proportional to the first power of the current, and not to the second power like the Joule heat. It therefore changes sign when the current is reversed. The coefficient ρ may be either positive or negative. If $\rho > 0$, the Thomson heat is positive (i.e. heat is emitted) when the current flows in the direction of increasing temperature, and heat is absorbed when it flows in the opposite direction; if $\rho < 0$ the reverse is true.

Another thermal effect, called the Peltier effect, occurs when a current passes through a junction of two different metals. At the surface of contact, the temperature, the potential and the normal components of the current density and energy flux density are all continuous. Denoting by the suffixes 1 and 2 the values of quantities for the two metals and equating the normal components of $\mathbf{q}$(26.4) on the two sides, we have, since ϕ, T and j_x are continuous,

$$[-\kappa \partial T/\partial x]_1^2 = -j_x T\,(\alpha_2 - \alpha_1)\,,$$

the x-axis being taken along the normal to the surface. If the positive direction of this axis is from metal 1 to metal 2, then the expression on the left-hand side of this equation is the amount of heat taken from the surface per unit time and area by thermal conduction. This heat loss is balanced by the evolution at the junction of an amount of heat given by the right-hand side of the equation. Thus the amount of heat generated per unit time and area is

$$j\Pi_{12}, \text{ where } \Pi_{12} = -T\,(\alpha_2 - \alpha_1)\,. \tag{26.8}$$

The quantity Π_{12} is called the Peltier coefficient. Like the Thomson effect, the Peltier effect is proportional to the first power of the current, and changes sign when the direction of the current is reversed. The Peltier coefficient is additive: $\Pi_{13} = \Pi_{12} + \Pi_{23}$, where the suffixes $1, 2, 3$ refer to three different metals.

A comparison of formulae (26.7) and (26.8) shows that the Thomson and Peltier coefficients are related by

$$\rho_2 - \rho_1 = T\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}T}\left(\frac{\Pi_{12}}{T}\right) \tag{26.9}$$

Next, let us consider an open circuit containing two junctions, the two end conductors being of the same metal (1 in Fig. 17). We suppose that the junctions b and c are at different temperatures T_1 and T_2, while the temperature at each end (a and d) is the same. Then there is a potential difference called a thermoelectromotive force, which we denote by $\mathscr{E}_T$, bet ween the ends.

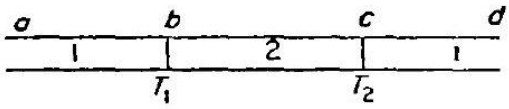


Fig. 17

To calculate this force, we put $\mathbf{j} = 0$ in (26.1) and integrate the field $\mathbf{E} = \alpha \operatorname{grad} \Gamma$ along the circuit (taken to be the x-axis):

$$\mathscr{E}_T = \int_a^{\mathrm{d}} \alpha \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = \int_a^{\mathrm{d}} \alpha\,\mathrm{d}T$$

The integrations from a to b and from c to d are over temperatures from T_2 to T_1 in metal 1 , and that from b to c is over temperatures from T_1 to T_2 in metal 2 . Thus

$$\mathscr{E}_T = \int_{T_1}^{T_2} (\alpha_2 - \alpha_1)\,\mathrm{d}\Gamma. \tag{26.10}$$

Comparing this with (26.8), we see that the thermo-e.m.f. is related to the Peltier coefficient by

$$\mathscr{E}_r = -\int_{T_1}^{T_2} \frac{\Pi_{12}}{T}\, \mathrm{d}T \tag{26.11}$$

Formulae (26.9) and (26.11) are called Thomson's relations (W. Thomson, 1854).
To conclude this section, we shall give the formulae for the current and heat flux in an anisotropic conductor. These are derived from the symmetry of the kinetic coefficients in the same way as formulae (26.1) and (26.4), and the results are

$$\left.\begin{aligned} E_i &= {\sigma^{-1}}_{ik} j_k + \alpha_{ik} \partial T/\partial x_k, \\ q_i - \phi j_i &= T\alpha_{ki} j_k - \kappa_{ik} \partial T/\partial x_k. \end{aligned}\right\} \tag{26.12}$$

Here ${\sigma^{-1}}_{ik}$ is the tensor inverse to the conductivity tensor σ_{ik}, and the tensors σ_{ik} and κ_{ik} are symmetrical. The thermoelectric tensor α_{ik}, however, is in general not symmetrical.

7.2.7 §27. Thermogalvanomagnetic phenomena

There is a still greater variety of phenomena which occur when a current flows in the simultaneous presence of an electric field, a magnetic field, and a temperature gradient.

The discussion is entirely similar to that given in §26 for thermoelectric effects. It will be given here in tensor form, so as to be applicable to both isotropic and anisotropic conductors. We write the electric current density $\mathbf{j}$ and the heat flux $\mathbf{q}$ as

$$\left.\begin{aligned} j_i &= a_{ik} \tfrac{E_k}{T} + b_{ik} \tfrac{\partial}{\partial x_k} \left(\tfrac{1}{T}\right), \\ q_i - \phi j_i &= c_{ik} \tfrac{E_k}{T} + d_{ik} \tfrac{\partial}{\partial x_k} \left(\tfrac{1}{T}\right), \end{aligned}\right\} \tag{27.1}$$

where all the coefficients are functions of the magnetic field. The symmetry of the kinetic coefficients gives

$$\left.\begin{aligned} a_{ik}(\mathbf{H}) = a_{ki}(-\mathbf{H}), \quad d_{ik}(\mathbf{H}) = d_{ki}(-\mathbf{H}), \\ b_{ik}(\mathbf{H}) = c_{ki}(-\mathbf{H}). \end{aligned}\right\} \tag{27.2}$$

Expressing $\mathbf{E}$ and $\mathbf{q} - \phi\mathbf{j}$ in terms of $\mathbf{j}$ and $\operatorname{grad} T$ from (27.1), we have

$$\left.\begin{aligned} E_i &= \sigma^{-1}_{ik} j_k + \alpha_{ik} \partial T/\partial x_k, \\ q_i - \phi j_i &= \beta_{ik} j_k - \kappa_{ik} \partial T/\partial x_k, \end{aligned}\right\} \tag{27.3}$$

where the tensors $\sigma^{-1}, \alpha, \beta, \kappa$ are certain functions of the tensors a, b, c, d, and have the following symmetry properties resulting from (27.2):

$$\left.\begin{aligned} \sigma^{-1}_{ik}(\mathbf{H}) = \sigma^{-1}_{ki}(-\mathbf{H}), \\ \kappa_{ik}(\mathbf{H}) = \kappa_{ki}(-\mathbf{H}), \quad \beta_{ik}(\mathbf{H}) = T\alpha_{ki}(-\mathbf{H}). \end{aligned}\right\} \tag{27.4}$$

These are the required relations in their most general form. They generalize those found in §26 for the case where there is no magnetic field and in §22 for the case where there is no temperature gradient. It must be emphasized that in an anisotropic conductor the tensors α_{ik} and β_{ik} are in general not symmetrical even when there is no magnetic field.

The tensors σ^{-1}, κ, and $\beta + T\alpha$ can be resolved into symmetrical and antisymmetrical parts (cf. §22). In a weak magnetic field, the symmetrical parts may be regarded as constants independent of $\mathbf{H}$, while the antisymmetric parts are linear in $\mathbf{H}$. For an isotropic conductor we have, to this accuracy,

$$\mathbf{E} = \mathbf{j}/\sigma + \alpha \operatorname{grad} T + R\mathbf{H} \times \mathbf{j} + N\mathbf{H} \times \operatorname{grad} T, \tag{27.5}$$

$$\mathbf{q} - \phi\mathbf{j} = \alpha T\mathbf{j} - \kappa \operatorname{grad} T + NT\mathbf{H} \times \mathbf{j} + L\mathbf{H} \times \operatorname{grad} T. \tag{27.6}$$

Here σ and κ are the ordinary coefficients of electrical and thermal conductivity, α is the thermoelectric coefficient which appears in (26.1), R is the Hall coefficient, and N and L are new coefficients. The term $N\mathbf{H} \times \operatorname{grad} T$ may be regarded as representing the effect of the magnetic field on the thermo-e.m.f. (called the Nernst effect), and the term $LH \times \operatorname{grad} T$ as representing the effect of this field on the thermal conduction (called the Leduc-Righi effect).

At a boundary between media, the normal components of the vectors $\mathbf{j}$ and $\mathbf{q}$ are continuous, and therefore so is that of the vector $-\kappa \operatorname{grad} T + \alpha T\mathbf{j} + NT\mathbf{H} \times \mathbf{j} + L\mathbf{H} \times \operatorname{grad} T$. The term NTH $\times\mathbf{j}$ gives the influence of the magnetic field on the Peltier effect (called the Ettingshausen effect).

The amount of heat evolved in the conductor per unit time and volume is $Q = -\operatorname{div} \mathbf{q}$. Here we must substitute $\mathbf{q}$ from (27.6) and replace $-\mathbf{grad}\phi = \mathbf{E}$ in accordance with (27.5). If the conductor is homogeneous, then the quantities α, N, L, etc. are functions of temperature alone, and so their gradients are proportional to $\operatorname{grad} T$. In the calculation we neglect all quantities of the second order in $\mathbf{H}$, and to the same approximation we can take $\operatorname{curl}(\mathbf{j}/\sigma) \cong \operatorname{curl} \mathbf{E} = 0$. We also note that the external field $\mathbf{H}$ (arising from sources outside the conductor under consideration) is such that $\operatorname{curl} \mathbf{H} = 0$.† Finally, $\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$, as for any steady current. The result is

$$Q = \frac{j^2}{\sigma} + \operatorname{div}(\kappa \operatorname{grad} T) - T\mathbf{j} \cdot \operatorname{grad} \alpha + \frac{1}{\sigma T} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}T} \left(\sigma N T^2\right) (\mathbf{j} \times \mathbf{H}) \cdot \operatorname{grad} T.$$

The third term here gives the Thomson effect (26.7), and the last term gives the change in the Thomson effect resulting from the presence of the magnetic field.

7.2.8 §28. Diffusion phenomena

The presence of diffusion causes certain phenomena in electrolyte solutions which do not occur in solid conductors. We shall assume, for simplicity, that the temperature is the same everywhere in the solution, and so consider only pure diffusion phenomena, uncomplicated by thermoelectric effects.

Instead of the pressure P and the concentration c, it is more convenient to take as independent variables the pressure and the chemical potential ζ. We here define ζ as the derivative of the thermodynamic potential of unit mass of the solution with respect to its concentration c (at constant P and T); by the concentration we mean the ratio of the mass of electrolyte in a volume element to the total mass of fluid in the same volume ‡ It may be recalled that the constancy of the chemical potential is (like that of the pressure and the temperature) one of the conditions of thermodynamic equilibrium.

The definition of the electric field potential given in §26 has to be somewhat modified in this case, since the current is now carried by the ions of the dissolved electrolyte, and not by the conduction electrons. A suitable definition is (cf. the third footnote to §26) $\phi = (\partial\Phi/\partial\rho)_c$, where Φ is the thermodynamic potential and ρ the sum of the ion charges in unit volume of the solution (after differentiating we put $\rho = 0$, of course, because the

[0]† This neglects the weak effect on the evolution of heat resulting from the magnetic fields of the currents themselves.

‡ The chemical potentials are usually defined as $\zeta_1 = \hat{\sigma}\Phi/\partial n_1, \zeta_2 = \lambda\Phi/\partial n_2$, where Φ is the thermodynamic potential of any mass of the solution, and n_1, n_2 the numbers of particles of solute and solvent in that mass of solution. If Φ is the thermodynamic potential per unit mass, then the numbers n_1 and n_2 are related by $n_1 m_1 + n_2 m_2 = 1$ (where m_1, m_2 are the masses of the two kinds of particle), and the concentration $c = n_1 m_1$. Hence we have

$$\zeta = \frac{\partial\Phi}{\partial c} = \frac{\partial\Phi}{\partial n_1}\frac{\partial n_1}{\partial c} + \frac{\partial\Phi}{\partial n_2}\frac{\partial n_2}{\partial c} = \frac{\zeta_1}{m_1} - \frac{\zeta_2}{m_2},$$

solution is electrically neutral). The derivative is taken at constant mass concentration. i.e. at a given sum of the masses of ions of both signs in unit volume. †
When a gradient of the chemical potential is present, a term proportional to it is added to the expression for the current density:

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} - \beta \operatorname{grad} \zeta), \tag{28.1}$$

in analogy with the added term in (26.2). We shall see below that, for a given gradient of the chemical potential (and of the temperature), $\mathbf{j}$ must be independent of the pressure gradient, and so no term in grad P appears in (28.1). ‡
As well as the electric current, we have to consider the transport of the mass of the electrolyte which takes place at the same time. It must be borne in mind that the passage of a current through the solution may be accompanied by a macroscopic motion of the fluid. The mass flux density of the electrolyte resulting from this motion is $\rho c v$, where v is the velocity and ρ the density of the solution. The electrolyte is also transported by molecular diffusion. We denote the diffusion flux density by $\mathbf{i}$, so that the total flux density is $\rho c v + \mathbf{i}$. The irreversible processes of diffusion cause a further increase in entropy; the rate of change of the total entropy is§

$$\frac{\mathrm{d}\mathscr{S}}{\mathrm{d}t} = \int \frac{\mathbf{E} \cdot \mathbf{j}}{T} \, \mathrm{d}V - \int \frac{\mathbf{i} \cdot \mathbf{grad} \zeta}{T} \, \mathrm{d}V. \tag{28.2}$$

Like the electric current density, the diffusion flux may be written as a linear combination of $\mathbf{E}$ and grad ζ, or of $\mathbf{j}$ and grad ζ. Using the symmetry of the kinetic coefficients, we can relate one of the coefficients in this combination to the coefficient β in (28.1), in exactly the same way as we did for $\mathbf{j}$ and $\mathbf{q} - \phi\mathbf{j}$ in §26. The result is

$$\mathbf{i} = -\frac{\rho D}{(\partial\zeta/\partial c)_{P,T}} \operatorname{grad} \zeta + \beta \mathbf{j} \tag{28.3}$$

The coefficient of grad ζ is here expressed in terms of the ordinary diffusion coefficient, ρ being the density of matter. For $\mathbf{j} = 0$ and constant pressure and temperature we have $\mathbf{i} = -\rho D \operatorname{grad} c$.

The inadmissibility in (28.1) and (28.3) of terms proportional to the pressure gradient follows, as in §26, from the law of the increase of entropy: such terms would make the derivative of the total entropy (28.2) a quantity of variable sign.
Formulae (28.1) and (28.3) give all the diffusion phenomena in electrolytes, but we shall not pause here to examine them more closely.

PROBLEM

Two parallel plates of a metal A are immersed in a solution of an electrolyte AX. Find the current density as a function of the potential difference applied between the plates.

§ The derivation of the second term is given in FM, §57.

where ζ is the chemical potential as here defined.

[0]† In a strong electrolyte, the solute is completely dissociated, and so the mass concentration may be written as $c = m_+ n_+ + m_- n_-$, where $m_+$and $m_-$are the cation and anion masses, $n_+$and n_-their number densities. With the above definition of the potential, $\phi = 0$ corresponds to $\zeta_+/m_+ = \zeta_-/m_-$for the cation and anion chemical potentials, which are also related by $\zeta_+ + \zeta_- = \zeta_1$.
‡ It should be emphasized, however, that, for a given concentration gradient $\mathbf{j}$ does depend on the pressure gradient:

$$\operatorname{grad} \zeta = (\partial\zeta/\partial c)_{P,T} \operatorname{grad} c + (\partial\zeta/\partial P)_{c,T} \operatorname{grad} P.$$

Solution. When the current passes, metal is dissolved from one plate and deposited on the other. The solvent (water) remains at rest, and a mass flux of metal of density †$\rho\bar{v} = jm/e$ occurs in the solution, where j is the electric current density, and m and e are the mass and charge of an ion A^+. This flux is also given by $i + pvc$, where i is as shown in (28.3); assuming the pressure constant throughout the liquid, ‡ we have

$$\rho D \frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}x} = \left[\beta - \frac{m}{e}(1-c)\right] j \tag{1}$$

where x is the coordinate in the direction of a line joining the electrodes. Since $j =$ constant in the solution, this gives

$$jl = \int_{c_1}^{c_2} \frac{\rho D \ \mathrm{d}c}{\beta - m(1-c)/e} \tag{2}$$

where c_1, c_2 are the concentrations at the surfaces of the plates, and l is the distance between them.

The potential difference $\mathscr{E}$ between the plates is most simply found from the total amount of energy Q dissipated per unit time and unit area of the plates, which must equal $j\mathscr{E}$. By (28.1), (28.2) we have

$$Q = T\frac{\mathrm{d}\mathscr{S}}{\mathrm{d}t} = \int \left\{ \frac{j^2}{\sigma} + \rho D \frac{\partial \zeta}{\partial c} \left(\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}x} \right)^2 \right\} \mathrm{d}x = j\mathscr{E}$$

and therefore, using (1),

$$\mathscr{E} = \int_{c_1}^{c_2} \frac{\rho D \ \mathrm{d}c}{\sigma(\beta - m(1-c)/e)} + \int_{c_1}^{c_2} \frac{\partial \zeta}{\partial c} \left[\beta - \frac{m}{e}(1-c)\right] \mathrm{d}c \tag{3}$$

Formulae (2) and (3) implicitly solve the problem.

If the current j is small, the concentration difference $c_2 - c_1$ is also small. Replacing the integrals by $c_2 - c_1$ times the integrands, we find the effective specific resistance of the solution:

$$\frac{\mathscr{E}}{lj} = \frac{1}{\sigma} + \frac{1}{\rho D}\frac{\partial \zeta}{\partial c}\left[\beta - \frac{m}{e}(1-c)\right]^2$$

The first term in (3) gives the potential drop $\left(\int (j/\sigma) dx\right)$ due to the passage of the current. The second term is the e.m.f. due to the concentration gradient in the solution (in a certain sense analogous to the thermo-e.m.f.). This latter expression is independent of the conditions of the particular one-dimensional problem considered, and is the general expression for the e.m.f. of a "concentration cell".

8 Typical Magnetism

8.1 Typical Paramagnets

8.1.1 Langevin Theory

(стр 165 кирича)

[0]† It may be recalled that the hydrodynamic velocity v in a solution is defined so that ρv is the momentum of unit volume of the liquid; see FM, §57. Hence the fact that in this case only the dissolved metal is moving (relative to the electrodes) does not affect the calculation of ρv.

‡ The change in pressure due to the motion of the liquid gives only terms of a higher order of smallness.

Суть

Теория

Попробуем объяснить магнетизм, основываясь на принципах классической статистики следуя Ланжевену.

Согласно его теории частицы вещества изначально обладают магнитными моментами.

Тогда внешнее поле стремится ориентировать элементарные магниты в направлении поля, а тепловое движение стремится разориентировать эти магниты. Учтём, что потенциальная энергия отдельного магнитного момента H поле B равна

$$U = -\mathbf{mB} = -mB\cos\theta$$

Будем также пренебрегать взаимным влиянием частиц.

Тогда распреде-

$$dn = A\exp\left(-\frac{U}{kT}\right)d\Omega$$

где $d\Omega = 2\pi\sin\theta d\theta$ - телесный угол (угол θ отсчитывается от направления магнитного поля).

Вводя обозначение $a = mB/kT$, перепишем распределение (9.1.1) в виде

$$dn = 2\pi A\exp\left(\frac{mB}{kT}\cos\theta\right)\sin\theta d\theta$$

Нормировочный множитель A определяется из условия

$$U = -\mathbf{mB} = -mB\cos\theta$$

$$dn = A\exp\left(-\frac{U}{kT}\right)d\Omega$$

$$dn = 2\pi A\exp\left(\frac{mB}{kT}\cos\theta\right)\sin\theta d\theta$$

$$A = \frac{n_0 a}{4\pi\,\mathrm{sh}\,a}$$

В итоге зависимость восприимчивости от температуры следующая:...

(не усвоил пока что)

8.2 Typical Diamagnets

(main section about diamagnetism)

8.3 IV Static Magnetic Field by Landau

8.3.1 §29. Static magnetic field

A static magnetic field in matter satisfies two of Maxwell's equations, obtained by averaging the microscopic equations

$$\operatorname{div}\mathbf{h} = 0, \quad \operatorname{curl}\mathbf{h} = \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{e}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\rho\mathbf{v}. \tag{29.1}$$

The mean magnetic field is usually called the magnetic induction and denoted by **B** :

$$\overline{\mathbf{h}} = \mathbf{B}. \tag{29.2}$$

Hence the result of averaging the first equation (29.1) is

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0. \tag{29.3}$$

In the second equation, the time derivative gives zero on averaging, since the mean field is supposed constant, and so we have

$$\operatorname{curl} \mathbf{B} = (4\pi/c)\overline{\rho\mathbf{v}}. \tag{29.4}$$

The mean value of the microscopic current density is in general not zero in either conductors or dielectrics. The only difference between these two classes is that in dielectrics we always have

$$\int \overrightarrow{\rho\mathbf{v}} \cdot \mathrm{df} = 0 \tag{29.5}$$

where the integral is taken over the area of any cross-section of the body; in conductors, this integral need not be zero. Let us suppose to begin with that there is no net current in the body if it is a conductor, i.e. that (29.5) holds.

The vanishing of the integral in (29.5) for every cross-section of the body means that the vector $\overline{\rho \mathrm{v}}$ can be written as the curl of another vector, usually denoted by $c\mathbf{M}$:

$$\overline{\rho v} = c \operatorname{curl} \mathbf{M}, \tag{29.6}$$

Where M is zero outside the body; compare the similar discussion in §6. For, integrating over a surface bounded by a curve which encloses the body and nowhere enters it, we have $\int \overline{\rho\mathbf{v}} \cdot \mathrm{df} = c \int \operatorname{curl} \mathbf{M} \cdot \mathrm{df} = c \oint \mathbf{M} \cdot \mathrm{d}\mathbf{1} = 0$. The vector $\mathbf{M}$ is called the magnetization of the body. Substituting it in (29.4), we find

$$\operatorname{curl} \mathbf{H} = 0, \tag{29.7}$$

where the vector $\mathbf{H}$ and the magnetic induction $\mathbf{B}$ are related by

$$\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{M}, \tag{29.8}$$

which is analogous to the relation between the electric field $\mathbf{E}$ and induction $\mathbf{D}$. Although $\mathbf{H}$ is, by analogy with $\mathbf{E}$, usually called the magnetic field, it must be remembered that the true mean field is really $\mathbf{B}$ and not $\mathbf{H}$.

To see the physical significance of the quantity M , let us consider the total magnetic moment due to all the charged particles moving in the body. By the definition of the magnetic moment (see Fields, §44), this is †

$$\int \mathrm{r} \times \overline{\rho v} \, \mathrm{d}V/2c = \frac{1}{2} \int \mathrm{r} \times \operatorname{curl} \mathrm{M} \, \mathrm{d}V$$

Since $\rho v \equiv 0$ outside the body, the integral can be taken over any volume which includes the body. We transform the integral as follows:

$$\int \mathrm{r} \times \operatorname{curl} \mathrm{M} \mathrm{d}V = -\oint \mathrm{r} \times (\mathrm{M} \times \mathrm{df}) - \int (\mathrm{M} \times \operatorname{grad}) \times \mathrm{r} \mathrm{d}V.$$

The integral over the surface outside the body is zero. In the second term we have $(\mathbf{M} \times \mathbf{grad}) \times \mathbf{r} = -\mathbf{M} \operatorname{div} \mathbf{r} + \mathbf{M} = -2\mathbf{M}$. Thus we obtain

$$\frac{1}{2c}\int \mathbf{r}\times\bar{\rho}\bar{v}\ \mathrm{d}V = \int \mathbf{M}\mathrm{d}V \tag{29.9}$$

We see that the magnetization vector is the magnetic moment per unit volume. ‡
The equations (29.3) and (29.7) must be supplemented by a relation between $\mathbf{H}$ and $\mathbf{B}$ in order to complete the system of equations. For example, in non-ferromagnetic bodies in fairly weak magnetic fields, $\mathbf{B}$ and $\mathbf{H}$ are linearly related. In isotropic bodies, this linear relation becomes a simple proportionality:

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H} \tag{29.10}$$

The coefficient μ is called the magnetic permeability. We also have $\mathbf{M} = \chi\mathbf{H}$, where the coefficient

$$\chi = (\mu - 1)/4\pi \tag{29.11}$$

is called the magnetic susceptibility.
Unlike the permittivity ε, which always exceeds unity, the magnetic permeability may be either greater or less than unity. (It is, however, always positive, as we shall prove in §31. The reason for the differing behaviour of μ and ε is discussed in §32.) The magnetic susceptibility χ may correspondingly be either positive or negative.

Another, quantitative, difference is that the magnetic susceptibility of the great majority of bodies is very small in comparison with the dielectric susceptibility. This difference arises because the magnetization of a (non-ferromagnetic) body is a relativistic effect, of order v^2/c^2, where v is the velocity of the electrons in the atoms.§

In anisotropic bodies (crystals), the simple proportionality (29.10) is replaced by the linear relations

$$B_i = \mu_{ik}H_k \tag{29.12}$$

The magnetic permeability tensor μ_{ik} is symmetrical; this follows from the thermodynamic relations to be derived in §31, in exactly the same way as for ε_{ik} (§13).
From the equations $\operatorname{div}\mathbf{B} = 0$, $\operatorname{curl}\mathbf{H} = 0$ it follows (cf. §6) that at a boundary between two different media we must have

$$B_{1n} = B_{2n}, \quad \mathbf{H}_{1t} = \mathbf{H}_{2t}. \tag{29.13}$$

This system of equations and boundary conditions is formally identical with those for the electrostatic field in a dielectric in the absence of free charges, differing only in that $\mathbf{E}$ and $\mathbf{D}$ are replaced by $\mathbf{H}$ and $\mathbf{B}$ respectively. Since $\operatorname{curl}\mathbf{H} = 0$, we can put $\mathbf{H} = -\operatorname{grad}\psi$; the equations for the potential ψ are the same as those for the electrostatic potential. Thus the solutions of the various problems of electrostatics discussed in Chapter II can be immediately applied to problems with a static magnetic field. In particular, the formulae derived in §8 for a dielectric ellipsoid in a uniform electric field hold also, with appropriate substitutions, for a magnetic ellipsoid in a uniform magnetic field. For example, the magnetic field $\mathbf{H}^{(i)}$ and induction $\mathbf{B}^{(i)}$ inside the ellipsoid are related to the external field $\mathfrak{H}$ by

[0]† For clarity, it should be emphasized that $\mathbf{r}$ here is a variable coordinate of integration, not the position vector of a microscopic particle; it therefore does not come under the averaging sign.
‡ The quantity $\mathbf{M}$ is completely determined only when this relation is established. The relation (29.6) inside the body. and $\mathbf{M} = \mathbf{O}$ outside it, do not uniquely define $\mathbf{M}$: the gradient of any scalar could be added to $\mathbf{M}$ inside the body without affecting (29.6) (cf. the similar remark in the first footnote to §6).
§ The ratio v/c appears with $\mathbf{H}$ in the Hamiltonian of the interaction of the body with the magnetic field, and again in the magnetic moments of the atoms or molecules.

$$H_i^{(i)} + n_{ik}\left(B_k^{(i)} - H_k^{(i)}\right) = \mathfrak{S}_i, \tag{29.14}$$

where n_{ik} is the demagnetizing factor tensor. This relation is valid, whatever the relation between $\mathbf{B}$ and $\mathbf{H}$.

The tangential component of the magnetic induction, unlike its normal component, is discontinuous at a surface separating two media. The magnitude of the discontinuity can be related to the current density on the surface. To do this, we integrate both sides of equation (29.4) over a small interval Δl crossing the surface along the normal. We then let Δl tend to zero; the integral $\int \overline{\rho \mathbf{v}} \mathrm{d}l$ may tend to some finite limit. The quantity

$$\mathbf{g} = \int \overline{\rho \mathbf{v}} \mathrm{d}l \tag{29.15}$$

may be called the surface current density; it gives the charge passing per unit time across unit length of a line in the surface. We take the direction of g at a given point on the surface as the y-axis, and the direction of the normal from medium 1 to medium 2 as the x-axis. Then the integration of equation (29.4) gives

$$\int \left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x}\right) \mathrm{d}x = \frac{4\pi}{c} g_y = \frac{4\pi}{c} g.$$

Since B_x is continuous, the derivative $\partial B_x/\partial \hat{z}$ is finite, and so its integral tends to zero with Δl. The integral of $\partial B_z/\partial x$ gives the difference in the values of B_z on the two sides of the surface. Thus $B_{2z} - B_{1z} = -4\pi g/c$. This can be written in vector form:

$$4\pi \ \mathrm{g}/c = \mathbf{n} \times (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 4\pi \mathbf{n} \times (\mathbf{M}_2 - \mathbf{M}_1)\,, \tag{29:16}$$

where $\mathbf{n}$ is a unit vector along the normal into region 2 ; the last member of (29.16) is obtained by using the continuity of the tangential component of $\mathbf{H}$.

8.3.2 §30. The magnetic field of a steady current

If a conductor carries a non-zero total current, the mean current density in it can be written as $\overline{\rho \mathbf{v}} = c \ \mathrm{curl}\ \mathbf{M} + \mathbf{j}$. The first term, resulting from the magnetization of the medium, makes no contribution to the total current, so that the net charge transfer through a cross-section of the body is given by the integral $\int \mathbf{j} \cdot \mathrm{d}\mathbf{f}$ of the second term. The quantity $\mathbf{j}$ is called the conduction current density. † The statements made in §21 apply to this current; in particular, the energy dissipated per unit time and volume is $\mathbf{E} \cdot \mathbf{j}$.

The distribution of the current $\mathbf{j}$ over the volume of the conductor is given by the equations of §21, which do not involve the magnetic field due to $\mathbf{j}$ itself, if we neglect the effect of this field on the conductivity of the body. Hence the magnetic field of the currents must be determined for a given current distribution. The equations satisfied by this field differ from those in §29 by the presence of a term $4\pi\mathbf{j}/c$ on the right-hand side of (29.7):

$$\mathrm{div}\, \mathbf{B} = 0 \tag{30.1}$$

$$\mathrm{curl}\, \mathbf{H} = 4\pi \mathbf{j}/c \tag{30.2}$$

The conduction current density $\mathbf{j}$, which is proportional to the electric field, does not become infinite, and in particular is finite on a surface separating two media. Hence the term on the right of (30.2) does not affect the boundary condition that the tangential component of $\mathbf{H}$ be continuous.

To solve equations (30.1), (30.2), it is convenient to use the vector potential A, defined by

$$\mathbf{B} = \operatorname{curl} \mathbf{A}, \tag{30.3}$$

so that equation (30.1) is satisfied identically. Equation (30.3) does not uniquely define the vector potential, to which the gradient of any scalar may be added without affecting (30.3). For this reason we can impose on $\mathbf{A}$ a further condition, which we take to be

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0. \tag{30.4}$$

The equation for $\mathbf{A}$ is obtained by substituting (30.3) in (30.2). If the linear relation $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ holds we have

$$\operatorname{curl}\left(\frac{1}{\mu}\operatorname{curl}\mathbf{A}\right) = 4\pi\mathbf{j}/c \tag{30.5}$$

In this form the equation is valid for any medium, homogeneous or not.
In a homogeneous medium, $\mu =$ constant, and since

$$\operatorname{curl}\ \operatorname{curl}\ \mathbf{A} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{A} - \triangle\mathbf{A} = -\triangle\mathbf{A}$$

we find from (30.5)

$$\triangle\mathbf{A} = -4\pi\mu\mathbf{j}/c. \tag{30.6}$$

If we have two or more adjoining media with different magnetic permeability μ, the general equation (30.5) has the form (30.6) in each homogeneous medium, while at the interfaces the tangential component of the vector $(1/\mu)$ curl A must be continuous. Moreover, the tangential component of $\mathbf{A}$ itself must be continuous, since a discontinuity would mean that the induction $\mathbf{B}$ was infinite at the boundary.

The field equations are simpler in the two-dimensional problem of finding the magnetic field in a medium infinite and homogeneous in one direction (which we take as the z^- direction), the currents which produce the field being everywhere in that direction, with the

current density $j_z = j$ depending only on x and y. We make the plausible assumption (to be confirmed by the result) that the vector potential of such a field is also in the z-direction: $A_z = A(x, y)$. The condition (30.4) is then satisfied identically; the magnetic field is everywhere parallel to the xy-plane. We denote by $\mathbf{k}$ a unit vector in the z-direction; then

$$\operatorname{curl}\mathbf{A} = \operatorname{curl} A\mathbf{k} = \operatorname{grad} A \times \mathbf{k}.$$
$$\operatorname{curl}\left(\frac{1}{\mu}\operatorname{curl}\mathbf{A}\right) = \operatorname{curl}\left(\frac{\operatorname{grad} A}{\mu}\times\mathbf{k}\right) = -\mathbf{k}\operatorname{div}\frac{\operatorname{grad} A}{\mu}.$$

Hence equation (30.5) becomes

$$\operatorname{div}\frac{\operatorname{grad} A}{\mu} = -\frac{4\pi}{c}j(x, y), \tag{30.7}$$

i.e. we in fact obtain one equation for the one scalar quantity $A(x, y)$. For a piecewise homogeneous medium, (30.7) becomes

$$\triangle A = -4\pi\mu j(x, y)/c \tag{30.8}$$

[0]† The quantity c curl M is sometimes called the molecular current density. This name, however, is not in complete accordance with the actual physical picture of motion of charges in a conductor. For example, in a metal the conduction electrons, as well as those moving in the atoms, contribute to the magnetization.

with the boundary condition that A and $(1/\mu)\partial A/\partial n$ be continuous at an interface. †
The magnetic field is easily found if the current distribution is symmetrical about the z axis: $j_z = j(r)$ (where r is the distance from that axis). In this case the lines of magnetic force are evidently the circles $r =$ constant. The magnitude of the field is found at once from the formula

$$\oint \mathbf{H} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} \int \mathbf{j} \cdot \mathrm{d}\mathbf{f} \tag{30.9}$$

which is the integral form of (30.2). Thus

$$H(r) = 2J(r)/cr, \tag{30.10}$$

where $J(r)$ is the total current within the radius r.
The reduction of the vector equation (30.5) to a single scalar equation is possible also if the current distribution is axially symmetrical and has in cylindrical polar coordinates r, ϕ, z the form $j_r = j_z = 0, j_\phi = j(r, z)$. We seek the vector potential in the form $A_r = A_z = 0, A_\phi = A(r, z)$. The components of the magnetic induction $\mathbf{B} = \operatorname{curl} \mathbf{A}$ are $B_r = -\partial A/\partial z, B_z = (1/r)\partial(rA)/\partial r, B_\phi = 0$, and the ϕ-component of equation (30.2) gives

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial A}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{1}{\mu r}\frac{\partial}{\partial r}(rA)\right\} = -\frac{4\pi}{c} j(r, z). \tag{30.11}$$

The equations for the magnetic field of the currents can be solved in a general form in the important case where the magnetic properties of the medium may be neglected, i.e. where we can put $\mu = 1$. The vector potential then satisfies in all space the equation
$\triangle \mathbf{A} = -4\pi \mathbf{j}/c$ with no conditions at the interfaces between different media (including the surface of the conductor on which the current flows). The solution of this equation which vanishes at infinity is

$$\mathrm{A} = \frac{1}{c} \int \frac{\mathrm{j}}{R}\, \mathrm{d}V, \tag{30.12}$$

where R is the distance from the volume element $\mathrm{d}V'$ to the point at which A is to be calculated (see Fields, §43). In taking the curl of this equation, we must remember that the integrand $\mathbf{j}, R$ is to be differentiated with respect to the coordinates of this point, of which $\mathbf{j}$ is independent, so that

$$\operatorname{curl}(\mathrm{j}/R) = \operatorname{grad}(1/R) \times \mathrm{j} = -\mathbf{R} \times \mathrm{j}/R^3,$$

where the radius vector $\mathbf{R}$ is from $\mathrm{d}V$ to the point under consideration. Thus

$$\mathbf{B} = \mathbf{H} = \frac{1}{c} \int \frac{\mathrm{j} \times \mathbf{R}}{R^3}\, \mathrm{d}V. \tag{30.13}$$

If the conductor on which the current flows is sufficiently thin (a thin wire), and if we are interested only in the field in the surrounding space, the thickness of the wire may be neglected. In what follows we shall often discuss such linear currents. The integration over the volume of the conductor is then replaced by an integration along its length: the formulae for linear currents are obtained from those for volume currents by making the substitution $\mathrm{j}\mathrm{d}V \to J\ \mathrm{d}1$,

[0]† It should be noticed that the two-dimensional problem with a static magnetic field is equivalent to the two-dimensional electrostatic problem of determining the electric field due to extraneous charges with density $\rho_{\mathrm{ex}}(x, y)$ in a dielectric medium. The equation to be solved in the latter problem is $\operatorname{div}(\varepsilon \operatorname{grad} \phi) = -4\pi\rho_{\mathrm{ex}}$, where ϕ is the field potential; this differs from (30.7) only in that $A, J/c$ and μ are replaced by ϕ, ρ_{ex} and $1/\varepsilon$ respectively. The boundary conditions on A and ϕ are the same. A difference occurs, however, on passing to $\mathbf{E}$ and $\mathbf{B}$ from ϕ and $\mathbf{A}$ respectively. The vectors $\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \phi$ and $\mathbf{B} = \operatorname{curl} \mathbf{A}$ are the same in magnitude but in perpendicular directions at any given point.

where J is the total current in the conductor. For example, from formulae (30.12) and (30.13) we have

$$\mathbf{A} = \frac{J}{c}\oint \frac{\mathrm{d}\mathbf{1}}{R}, \quad \mathbf{H} = \tfrac{J}{c}\oint \frac{\mathrm{d}\mathbf{1}\times\mathbf{R}}{R^3} \tag{30.14}$$

The latter formula is Biot and Savart's law.
This simple formula for the magnetic field of a linear current does not depend on the assumption that $\mu = 1$. Since we neglect the thickness of the conductor, no boundary conditions at its surface need be applied, and the magnetic properties of the conducting material are of no importance (it may even be ferromagnetic). The solution of equation (30.6) for the field in the medium surrounding the conductor is therefore

$$\mathbf{A} = \frac{\mu J}{c}\int \frac{\mathrm{d}\mathbf{1}}{R}, \quad \mathbf{B} = \frac{\mu J}{c}\int \frac{\mathrm{d}\mathbf{1}\times\mathbf{R}}{R^3} \tag{30.15}$$

whatever the magnetic susceptibility of that medium. Thus the presence of the medium simply changes the magnetic induction by a factor μ. The field $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu$ is unchanged.

The problem of determining the magnetic field of linear currents can also be solved as a problem of potential theory. Since we neglect the volume of conductors, we are in fact determining the field in a region containing no currents except along certain line singularities. In the absence of currents, a static magnetic field has a scalar potential, which in a homogeneous medium satisfies Laplace's equation. There is, however, an important difference between the magnetic field potential and the electrostatic potential: the latter is always a one-valued function, because curl $\mathbf{E} = 0$ in all space (including charged regions) and so the change in the potential in going round any closed contour (i.e. the circulation of $\mathbf{E}$ round that contour) is zero. The circulation of the magnetic field round a contour enclosing a linear current is not zero, but $4\pi J/c$. Hence the potential changes by this
amount on each passage round a contour enclosing a linear current, i.e. it is a many-valued function.
If the currents lie in a finite region of space (and $\mu = 1$ everywhere), the vector potential of the magnetic field at a great distance from the conductors is

$$\mathbf{A} = \mathscr{M}\times\mathbf{R}/R^3 \tag{30.16}$$

where

$$\mathscr{M} = \int \mathbf{r}\times\mathbf{j}\mathrm{d}V/2c \tag{30.17}$$

is the total magnetic moment of the system. †
For a linear current, this becomes

$$\mathscr{M} = J\oint \mathbf{r}\times\mathrm{d}\mathbf{1}/2c$$

and can be transformed into an integral over a surface bounded by the line of the current. The product $\mathrm{df} = \frac{1}{2}\mathrm{r}\times\mathrm{d1}$ is equal in magnitude to the area of the triangular surface element formed by the vectors $\mathbf{r}$ and $\mathbf{d1}$. The vector $\mathbf{ddf}$ is independent of the particular surface (bounded by the current) over which it is taken. Thus the magnetic moment of a closed linear current is

$$\mathscr{M} = J\oint \mathrm{d}\mathbf{f}/c. \tag{30.18}$$

In particular, for a plane closed linear current the magnetic moment is simply JS/c, where S is the area of the plane enclosed by the current.
To conclude this section, we may briefly discuss the energy flux in a conductor. The energy dissipated as Joule heat in the conductor is derived from the energy of the electromagnetic field. In a steady state, the equation of continuity which expresses the law of conservation of energy is

$$-\operatorname{div} S = \mathbf{j}\cdot\mathbf{E}, \tag{30.19}$$

where S is the energy flux density, given in a conductor by

$$\mathbf{S} = c\mathbf{E}\times\mathbf{H}/4\pi, \tag{30.20}$$

which is formally the same as the expression for the Poynting vector for the field in a vacuum. This is easily verified directly by calculating div $\mathbf{S}$ from the equations curl $\mathbf{E}=\mathbf{0}$ and (30.2), when we obtain (30.19).

Formula (30.20) also follows independently from the obvious condition that the normal component of $\mathbf{S}$ must be continuous at the surface of a conductor, if we use the continuity of $\mathbf{E}_t$ and $\mathbf{H}_t$ and the validity of (30.20) in the vacuum outside the body.

PROBLEMS ‡

Problem 1. Determine the scalar potential of the magnetic field of a closed linear current.
Solution. We transform the curvilinear integral into one over a surface bounded by the curve, obtaining

$$A = \frac{J}{c}\oint\frac{\mathrm{d}1}{R} = \frac{J}{c}\int \mathrm{df}\times\operatorname{grad}\frac{1}{R},$$
$$B = \operatorname{curl} A = -\frac{J}{c}\int(\mathrm{df}\cdot\operatorname{grad})\operatorname{grad}\frac{1}{R}$$

(where we have used the fact that $\triangle(1/R)=0$). Since $B = -\operatorname{grad}\psi$, we have for the scalar potential

$$\psi = \frac{J}{c}\int \mathrm{df}\cdot\operatorname{grad}\frac{1}{R} = -\frac{J}{c}\int\frac{\mathrm{df}\cdot\mathbf{R}}{R^3}.$$

The integral is, geometrically, the solid angle Ω subtended by the closed contour at the point considered. The above-mentioned many-valuedness of the potential is seen from the fact that, as this point describes a closed path embracing the wire, the angle Ω changes suddenly from 2π to -2π.

Problem 2. Find the magnetic field of a linear current flowing in a circle with radius a.
SOLUTION. We take the origin of cylindrical polar coordinates r,ϕ,z at the centre of the circle, with the angle ϕ measured from the plane which passes through the z-axis and the point at which the field is calculated. The vector potential has only one component, $A_\Phi = A(r,z)$, and by formula (30.14) we have

$$A_\phi = \frac{J}{c}\oint\frac{\cos\phi\ \mathrm{d}l}{R}$$
$$= \frac{2J}{c}\int_0^\pi \frac{a\cos\phi\ \mathrm{d}\phi}{\sqrt{(a^2+r^2+z^2-2ar\cos\phi)}}$$

[0]† See Fields, §44. In the derivation there given, we use explicitly the idea of a current as the result of the motion of individual charged particles. Such a derivation is, of course, quite general, but formula (30.16) can also be obtained by macroscopic arguments (see Problem 4).
‡ In Problems 1-4, $\mu = 1$.

Putting $\theta = \frac{1}{2}(\phi - \pi)$, we find

$$A_\phi = \frac{4J}{ck} \Big/ \frac{a}{r} \left[\left(1 - \frac{1}{2} k^2 \right) K - E \right]$$

where $k^2 = 4ar/\left[(a+r)^2 + z^2\right]$, and K and E are complete elliptic integrals of the first and second kinds:

$$K = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\left(1 - k^2 \sin^2\theta\right)}}, \quad E = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sqrt{\left(1 - k^2 \sin^2\theta\right)}\, \mathrm{d}\theta$$

The components of the induction are

$$B_\phi = 0$$
$$B_r = -\frac{\partial A_\phi}{\partial z} = \frac{J}{c} \frac{2z}{r\sqrt{\left[(a+r)^2 + z^2\right]}} \left[-K + \frac{a^2 + r^2 + z^2}{(a-r)^2 + z^2} E \right]$$
$$B_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rA_\phi) = \frac{J}{c} \frac{2}{\sqrt{\left[(a+r)^2 + z^2\right]}} \left[K + \frac{a^2 - r^2 - z^2}{(a-r)^2 + z^2} E \right].$$

Here we have used the easily verified formulae

$$\frac{\partial K}{\partial k} = \frac{E}{k\left(1 - k^2\right)} - \frac{K}{k}, \quad \frac{\partial E}{\partial k} = \frac{E - K}{k}$$

On the axis ($r = 0$) we have $B_r = 0, B_z = 2\pi a^2 J/c\left(a^2 + z^2\right)^{3/2}$, as can also be found by a straightforward calculation.

Problem 3. Determine the magnetic field in a cylindrical hole in a cylindrical conductor of infinite length carrying a current uniformly distributed over its cross-section (Fig.18).

Solution. If there were no hole, the field in the cylinder would be given by $H'_x = -2\pi jy/c, H'_y = 2\pi jx/c$. The dimensions and axes are as shown in Fig. 18. If a current with density - j were to flow in the inner cylinder, il would produce a field $H''_x = 2\pi jy'/c, H''_y = -2\pi jx'/c$. The required field in the hole is obtained by superposing these two fields. Since $x - x' = OO' = h$, and $y = y'$, we have $H_x = 0, H_y = 2\pi jh/c = 2hJ/\left(b^2 - a^2\right)c$, i.e. a uniform field in the y-direction.

Problem 4. Derive from (30.12) the formula (30.16) for the vector potential of the field far from the currents.

Solution. We write $\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 - \mathbf{r}$, where $\mathbf{R}_0$ and $\mathbf{r}$ are the radius vectors from the origin (situated somewhere among the currents) to the point considered and to the volume element dV respectively. Expanding the integrand

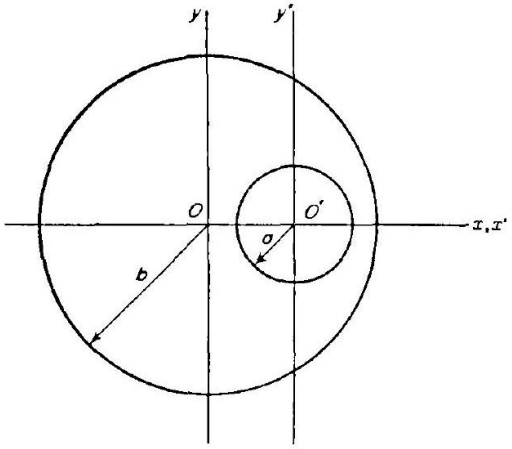


Fig. 18

in powers of r and using the fact that $\int \mathrm{j}\mathrm{d}V \equiv 0$, we have $A_i \cong (R_\mathrm{k}/cR^3)\int x_k j_i \,\mathrm{d}V$. The suffix 0 to R is omitted. Integrating by parts the identity $\int x_i x_k \,\mathrm{div}\,\mathrm{j}\mathrm{d}V = 0$ gives $\int (j_i x_k + j_k x_i)\,\mathrm{d}V = 0$. Hence we can write

$$A_i = \left(R_k/2cR^3\right)\int (x_k j_i - x_i j_k)\,\mathrm{d}V,$$

which agrees with (30.16).

Problem 5. Determine the magnetic field produced by a linear current in a magnetically anisotropic medium (A. S. Viglin, 1954).

Solution. In the anisotropic medium surrounding the conductor we have

$$\mathrm{div}\,\mathbf{B} = \mu_{ik}\partial H_k/\partial x_i = 0, \tag{1}$$

where μ_{ik} is the magnetic permeability tensor of the medium. Instead of introducing the vector potential by $B = \mathrm{curl}\ A$, we use another vector C defined by

$$H_i = e_{ikl}\mu_{km}\partial C_l/\partial x_m \tag{2}$$

where e_{ikl} is the antisymmetrical unit tensor. Then equation (1) is again satisfied identically. We can also impose on the vector $\mathbf{C}$ thus defined the condition

$$\mathrm{div}\,\mathbf{C} \equiv \partial C_1/\partial x_1 = 0 \tag{3}$$

Substituting (2) in curl H = 4πj/c, we obtain $e_{ikl}\partial H_l/\partial x_k = -\mu_{kp}\partial^2 C_i/\partial x_k \partial x_p = 4\pi j_i/c$ (using the condition (3) and the fact that $e_{ikl}e_{lmn} = \delta_{im}\delta_{kn} - \delta_{in}\delta_{km}$). The equation thus obtained for $\mathbf{C}$ is the same in form as that for the electric field potential resulting from charges in an anisotropic medium (§13, Problem 2). The solution is

$$\mathrm{C} = \frac{1}{c}\int \frac{\mathrm{j}\mathrm{d}V}{\sqrt{(|\mu|\mu^{-1}{}_{ik}R_i R_k)}}$$

Where $|_\mu|$ is the determinant of the tensor μ_{ik}, and $\mathbf{R}$ the radius vector from the point considered to $\mathrm{d}V$. For a linear current we have

$$\mathrm{C} = \frac{J}{c\sqrt{|\mu|}}\oint \frac{\mathrm{d}1}{\sqrt{(\mu^{-1}{}_{ik}R_i R_k)}}$$

8.3.3 §31. Thermodynamic relations in a magnetic field

The thermodynamic relations for a magnetic substance in a magnetic field are, as we thall see, very similar to the corresponding relations for a dielectric in an electric field. Their derivation, however, is quite different from that given in §10. This difference is ultimately due to the fact that a magnetic field, unlike an electric field, does no work on charges moving in it (since the force acting on a charge is perpendicular to its velocity). Hence, to calculate the change in the energy of the medium when a magnetic field is applied, we must examine the electric fields induced by the change in the magnetic field and determine the work done by these fields on the currents which produce the magnetic field.

Thus the equation which relates electric and variable magnetic fields must be used. This equation is

$$\operatorname{curl}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \tag{31.1}$$

it follows immediately on averaging the microscopic equation (1.3).
During a time δt, the field $\mathbf{E}$ does work $\delta t \int \mathbf{j}\cdot\mathbf{E}\ \mathrm{d}V$ on the currents $\mathbf{j}$. This quantity with the opposite sign is the work δR "done on the field" by the external e.m.f. which maintains the currents. Substituting

$$\mathbf{j} = c\ \operatorname{curl}\ \mathbf{H}_1 4\pi$$

we have

$$\begin{aligned}\delta R &= -\delta t\frac{c}{4\pi}\int \mathbf{E}\cdot\operatorname{curl}\mathbf{H}\ \mathrm{d}V \\ &= \delta t\frac{c}{4\pi}\int \operatorname{div}(\mathbf{E}\times\mathbf{H})\mathrm{d}V - \delta t\frac{c}{4\pi}\int \mathbf{H}\cdot\operatorname{curl}\mathbf{E}\ \mathrm{d}I\end{aligned}$$

The first integral, on being transformed to an integral over an infinitely distant surface, is seen to be zero. In the second integral we substitute curl $\mathbf{E}$ from (31.1) and put $\delta\mathbf{B} = \delta t \quad \partial\mathbf{B}/\partial t$ for the change in the magnetic induction, obtaining finally

$$\delta R = \int \mathbf{H}\cdot\delta\mathbf{B}\mathrm{d}V/4\pi \tag{31.2}$$

This formula appears entirely analogous to the expression (10.2) for the work done in an infinitesimal change in the electric field. It must be pointed out, however, that the physical analogy between the two formulae is actually not complete, since $\mathbf{H}$, unlike $\mathbf{E}$, is not the mean value of the microscopic field.

Having derived formula (31.2), we can write down all the thermodynamic relations for a magnetic substance in a magnetic field by analogy with those given in §10 for a dielectric in an electric field, simply replacing $\mathbf{E}$ and $\mathbf{D}$ by $\mathbf{H}$ and $\mathbf{B}$ respectively. We shall give some of these formulae here for purposes of reference. The differentials of the total free energy and the total internal energy are

$$\left.\begin{aligned}\delta\mathscr{F} &= -\mathscr{S}\delta T + \textstyle\int \mathbf{H}\cdot\delta\mathbf{B}\mathrm{d}V/4\pi \\ \delta\mathscr{U} &= T\delta\mathscr{S} + \textstyle\int \mathbf{H}\cdot\delta\mathbf{B}\mathrm{d}V/4\pi\end{aligned}\right\} \tag{31.3}$$

and those of the corresponding quantities per unit volume are

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{d}F &= -S\ \mathrm{d}T + \zeta\mathrm{d}\rho + \mathbf{H}\cdot\mathrm{d}\mathbf{B}/4\pi \\ \mathrm{d}U &= T\ \mathrm{d}S + \zeta\mathrm{d}\rho + \mathbf{H}\cdot\mathrm{d}\mathbf{B}/4\pi\end{aligned}\right\} \tag{31.4}$$

We need also the thermodynamic potentials

$$\tilde{U} = U - \mathbf{H}\cdot\mathbf{B}/4\pi, \quad \tilde{F} = F - \mathbf{H}\cdot\mathbf{B}/4\pi \tag{31.5}$$

for which

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{d}\tilde{F} &= -S\ \mathrm{d}T + \zeta \mathrm{d}\rho - \mathbf{B}\cdot\mathrm{d}\mathbf{H}/4\pi \\ \mathrm{d}\tilde{U} &= T\ \mathrm{d}S + \zeta \mathrm{d}\rho - \mathbf{B}\cdot\mathrm{d}\mathbf{H}/4\pi \end{aligned}\right\} \tag{31.6}$$

If the linear relation $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ holds, we can write the expressions for all these quantities in the form

$$\left.\begin{aligned} U &= U_0(S,\rho) + B^2/8\pi\mu, \quad F = F_0(T,\rho) + B^2/8\pi\mu \\ \tilde{U} &= U_0(S,\rho) - \mu H^2/8\pi, \quad \tilde{F} = F_0(T,\rho) - \mu H^2/8\pi \end{aligned}\right\} \tag{31.7}$$

The work δR (or, what is the same thing, the change $\delta\mathscr{F}$ at constant temperature) can be written in a different form, in terms of the current density and the vector potential of the magnetic field. For this purpose we put $\delta\mathbf{B} = \operatorname{curl}\delta\mathbf{A}$ and

$$\begin{aligned} (\delta\mathscr{F})_T &= \frac{1}{4\pi}\int \mathbf{H}\cdot\operatorname{curl}\delta\mathbf{A}\ \mathrm{d}V \\ &= -\frac{1}{4\pi}\int \operatorname{div}(\mathbf{H}\times\delta\mathbf{A})\mathrm{d}V + \frac{1}{4\pi}\int \delta\mathbf{A}\cdot\operatorname{curl}\mathbf{H}\ \mathrm{d}V \end{aligned}$$

The first integral is again zero, and the second gives

$$(\delta\mathscr{F})_T = \int \mathbf{j}\cdot\delta\mathbf{A}\mathrm{d}V/c \tag{31.8}$$

A similar transformation gives

$$(\delta\mathscr{F})_T = -\int \mathbf{A}\cdot\delta\mathbf{j}\mathbf{d}V/c \tag{31.9}$$

It is useful to note that in macroscopic electrodynamics the currents (sources of the magnetic field) are mathematically analogues of the potentials, not of the charges (the sources of the electric field). This is seen by comparing formulae (31.8) and (31.9) with the corresponding results for an electric field:

$$(\delta\mathscr{F})_T = \int \phi\delta\rho\mathrm{d}V', \quad (\delta\tilde{\mathscr{F}})_T = -\int \rho\delta\phi\mathrm{d}V' \tag{31.10}$$

(see (10.13), (10.14)). We observe that the charges and potentials appear in these formulae in the opposite order to the currents and potentials in formulae (31.8), (31.9). †

On account of the complete formal correspondence between the thermodynamic relations (expressed in terms of field and induction) for electric and magnetic fields, the thermodynamic inequalities derived in §18 can also be applied to magnetic fields. In particular, we have seen that it follows from these inequalities that $\varepsilon > 0$. In the electric case this result was of no interest, because it was weaker than the inequality $\varepsilon > 1$ which follows on other grounds. In the magnetic case, however, the corresponding inequality $\mu > 0$ is very important, as it is the only restriction on the values which can be taken by the magnetic permeability.

[0]† The significance of this difference is further discussed in the last footnote to §33.

8.3.4 §32. The total free energy of a magnetic substance

In §11 expressions have been derived for the total free energy $\mathscr{F}$ of a dielectric in an electric field. One of the thermodynamic properties of this quantity is that the change in it gives the work done by the electric field on the body when the charges producing the field remain constant. In a magnetic field a similar part is played by the free energy $\mathscr{F}$, since for given currents producing the field the change in $\mathscr{F}$ is the work done on the body.

The following derivation is entirely analogous to that given in §11. The "total" quantity $\mathscr{F}$ is defined as

$$\tilde{\mathscr{F}} = \int \left(\tilde{F} + \frac{\mathfrak{B}^2}{8\pi} \right) \mathrm{d}V, \tag{32.1}$$

where $\mathfrak{H}$ is the magnetic field which would be produced by the given currents in the absence of the magnetizable medium. The plus sign appears in the parenthesis (instead of the minus sign as in (11.1)) because the value of $\tilde{\mathscr{F}}$ for a magnetic field in a vacuum is $-\int (\mathfrak{H}^2/8\pi)\,\mathrm{d}V$ | (see (31.7)). The integration in (32.1) is taken over all space, including the volume occupied by the conductors in which flow the currents producing the field. †

Let us calculate the change in $\tilde{\mathscr{F}}$ (for a given temperature and no departure from thermodynamic equilibrium in the medium) corresponding to an infinitesimal change in the field. Since $\delta\tilde{F} = -\mathbf{B}\cdot\delta\mathbf{H}/4\pi$, we have

$$\begin{aligned} \delta\mathscr{F} &= -\int (\mathbf{B}\cdot\delta\mathbf{H} - \mathfrak{b}\cdot\delta\mathfrak{b})\mathrm{d}V/4\pi \\ &= -\int (\mathbf{H}-\mathfrak{b})\cdot\delta\mathfrak{b}\mathrm{d}V/4\pi - \int \mathbf{B}\cdot(\delta\mathbf{H}-\delta\mathfrak{b})\mathrm{d}V/4\pi - \int (\mathbf{B}-\mathbf{H})\cdot\delta\mathfrak{b}\mathrm{d}V/4\pi. \end{aligned} \tag{32.2}$$

Introducing the vector potential $\mathfrak{I}$ of the field $\mathfrak{b}$, we can write in the first term

$$\begin{aligned} (\mathbf{H}-\mathfrak{b})\cdot\delta\mathfrak{I} &= (\mathbf{H}-\mathfrak{b})\cdot\operatorname{curl}\delta\mathfrak{I} \\ &= \operatorname{div}[\delta\mathfrak{U}\times(\mathbf{H}-\mathfrak{b})] + \delta\mathfrak{U}\cdot\operatorname{curl}(\mathbf{H}-\mathfrak{b}) \end{aligned}$$

By definition, the fields $\mathbf{H}$ and $\mathfrak{H}$ are produced by the same currents $\mathbf{j}$, the distribution of which over the volume of the conductors is (see §30) independent of the field which they produce, i.e. is independent of the presence or absence of magnetic substances in the surrounding medium. Hence curl $\mathbf{H}$ and curl $\mathfrak{H}$ are both equal to $4\pi\mathrm{j}/c$, and *so* $\operatorname{curl}(\mathbf{H}-\mathfrak{b}) = \mathbf{0}$. The integral of $\operatorname{div}[\delta\mathfrak{U}\times(\mathbf{H}-\mathfrak{b})]$ is transformed into an integral over an infinitely distant surface, and so vanishes.

Similarly, we see that the second term on the right of (32.2) is zero; thus

$$\begin{aligned} \partial\mathscr{F} &= -\int (\mathbf{B}-\mathbf{H})\cdot\delta\mathfrak{b}\mathrm{d}V/4\pi \\ &= -\int \mathbf{M}\cdot\delta\mathfrak{b}\mathrm{d}V. \end{aligned} \tag{(32.3)}$$

The expression which we have obtained for $\delta\mathscr{F}$ is exactly similar to (11.3) for the electrostatic problem. In particular. in a uniform magnetic field $\mathfrak{H}$ we have for $\mathrm{d}\mathscr{F}$ an

expression analogous to (11.5):

[0]† In §11 we took the integration in (11.1) over all space except the volume occupied by the charged conductor producing the field. This was possible because there is no electric field in a conductor, charged or not. There is magnetic field, however, inside the conductors which carry the currents, and it cannot be excluded in calculati the total free energy.

$$\mathrm{d}\tilde{\mathscr{F}} = -\mathscr{S}\mathrm{d}T - \mathscr{M}\cdot\mathrm{d}\mathfrak{J}, \tag{32.4}$$

where $\mathscr{M}$ is the total magnetic moment of the body.
Without repeating the subsequent calculations, we shall write down the following formulae by analogy with those in §11. If the linear relation $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ holds, we have

$$\overrightarrow{\mathscr{F}} - \mathscr{F}_0(V,T) = -\int \frac{1}{2}\mathfrak{S}\cdot\mathrm{M}\mathrm{d}V. \tag{32.5}$$

In particular, if the external field is homogeneous, then

$$\widetilde{\mathscr{F}} - \mathscr{F}_0(V,T) = -\frac{1}{2}\mathfrak{S}\cdot\mathscr{M}. \tag{32.6}$$

In the general case of an arbitrary relation between $\mathbf{B}$ and $\mathbf{H}$, $\mathscr{F}$ can be calculated from the formula

$$\begin{aligned}\mathscr{F} &= \int\left(\widehat{F} + \frac{\mathbf{H}\cdot\mathbf{B}}{8\pi} - \frac{1}{2}\mathbf{M}\cdot\mathfrak{g}\right)\mathrm{d}V\\ &= \int\left(F - \frac{\mathbf{H}\cdot\mathbf{B}}{8\pi} - \frac{1}{2}\mathbf{M}\cdot\mathfrak{g}\right)\mathrm{d}V,\end{aligned} \tag{32.7}$$

which is analogous to (11.12) for dielectrics.
In §11 we gave also the simpler formulae obtained when the dielectric susceptibility is small. The analogous case for the magnetic problem is especially important because, as mentioned above, the magnetic susceptibility of the majority of bodies is indeed small. In this case

$$\hat{\mathscr{F}} - \mathscr{F}_0 = -\frac{1}{2}\chi\int\mathfrak{G}^2\ \mathrm{d}V. \tag{32.8}$$

We can also derive results for the magnetic field analogous to those obtained in §14. These concern the change in the thermodynamic quantities resulting from an infinitesimal change in the magnetic permeability μ, the field sources being assumed unchanged. It is clear from the foregoing that we must consider the change in $\hat{\mathscr{F}}$, and not that in $\mathscr{F}$ as in §14. We shall not repeat the derivation, which is similar to that of (14.1), but merely give the result:

$$\delta\widehat{\mathscr{F}} = -\int\delta\mu H^2\ \mathrm{d}V/8\pi. \tag{32.9}$$

In §14 we used the formula (11.7), an analogue of (32.5), to deduce that the dielectric susceptibility of any substance is positive. In the magnetic case we cannot draw this conclusion, and the magnetic susceptibility may be of either sign. The reason for this marked difference is that the Hamiltonian of a system of charges moving in a magnetic field contains not only terms linear in the field (as in the electric case) but also quadratic terms. Hence, in determining the change in the free energy of the body in the magnetic field by means of perturbation theory as in (14.2), we have a contribution in the first approximation as well as the second. In such a case no general conclusion can be drawn concerning the sign of the variation. It is positive for paramagnetic bodies and negative for diamagnetic ones.

In §14 we also drew conclusions concerning the direction of motion of bodies in an electric field. Similar conclusions follow from (32.9), but, since μ may be either greater or less than 1, there is no universal result. For example, in an almost uniform field paramagnetic bodies ($\mu > 1$) move in the direction of H increasing, and diamagnetic bodies ($\mu < 1$) in the opposite direction.

8.3.5 §33. The energy of a system of currents

Let us consider a system of conductors with currents flowing in them and assume that neither the conductors nor the medium surrounding them are ferromagnetic so that $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ everywhere. According to §31, the total free energy of the system is given in terms of the magnetic field of the currents by

$$\mathscr{F} = \int \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} \mathrm{d}V/8\pi. \tag{33.1}$$

Here we omit the quantity $\mathscr{F}_0$, which is a constant (at a given temperature) and is not related to the currents. The integration in (33.1) is taken over all space, both inside and outside the conductors.

The same energy can also be expressed in terms of the currents by means of the integral

$$\mathscr{F} = \int \mathbf{A} \cdot \mathbf{j} \mathrm{d}V/2c; \tag{33.2}$$

cf. the derivation of (31.8) from (31.2). Here the integration extends only over the conductors, because $\mathbf{j} = 0$ outside them.

Since the field equations are linear, the magnetic field can be written as the sum of the fields resulting from each current alone with no current in the other conductors: $\mathbf{H} = \mathbf{\Sigma H}_a$. Then the total free energy (33.1) is

$$\mathscr{F} = \sum_a \mathscr{F}_{aa} + \sum_{a>b} \mathscr{F}_{ab}, \tag{33.3}$$

where

$$\mathscr{F}_{aa} = \int \mathbf{H}_a \cdot \mathbf{B}_a \, \mathrm{d}V/8\pi, \quad \mathscr{F}_{ab} = \int \mathbf{H}_a \cdot \mathbf{B}_b \, \mathrm{d}V/4\pi. \tag{33.4}$$

We have put $\mathscr{F}_{ab} = \mathscr{F}_{ba}$, since $\mathbf{H}_a \cdot \mathbf{B}_b = \mu \mathbf{H}_a \cdot \mathbf{H}_b = \mathbf{H}_b \cdot \mathbf{B}_a$, where μ is the magnetic permeability at any point. The quantity $\mathscr{F}_{aa}$ may be called the free self-energy of the current in the a th conductor, and $\mathscr{F}_{ab}$ the interaction energy of the a th and b th conductors. It should be borne in mind, however, that these names are strictly correct only if the magnetic properties of both the conductors and the medium are neglected. Otherwise the field, and therefore the energy, of each current depend on the position and magnetic permeability of the other conductors.

The quantities (33.4) can also be expressed in terms of the currents $\mathbf{j}_a$ in each conductor, in accordance with formula (33.2):

$$\mathscr{F}_{aa} = \int \mathbf{j}_a \cdot \mathbf{A}_a \, \mathrm{d}V_a/2c, \quad \mathscr{F}_{ab} = \int \mathbf{j}_a \cdot \mathbf{A}_b \, \mathrm{d}V_a/c = \int \mathbf{j}_b \cdot \mathbf{A}_a \, \mathrm{d}V_b/c. \tag{33.5}$$

The integral in $\mathscr{F}_{aa}$ is here taken only over the volume of the a th conductor; $\mathscr{F}_{ab}$ can be written as either of the two expressions, in which the integration is over the volume of the a th and b th conductor respectively.

When the distribution of the current density over the volume of the conductor is given. $\mathscr{F}_{aa}$ depends only on the total current J_a passing through a cross-section. Both the current density j and the field which it produces will be proportional to J_a. Hence the integral $\mathscr{F}_{aa}$ is proportional to ${J_a}^2$. and we write it

$$\mathscr{F}_{aa} = L_{aa} {J_a}^2/2c^2 \tag{33.6}$$

where L_{aa} is called the self-inductance of the conductor. Similarly, the interaction energy of two currents is proportional to the product $J_a J_b$:

$$\mathscr{F}_{ab} = L_{ab} J_a J_b / c^2 \tag{33.7}$$

The quantity L_{ab} is called the mutual inductance of the conductors. Thus the total free energy of a system of currents is

$$\mathscr{F} = \frac{1}{2c^2} \sum_a L_{aa} J_a^2 + \frac{1}{c^2} \sum_{a>b} L_{ab} J_a J_b = \frac{1}{2c^2} \sum_a \sum_b L_{ab} J_a J_b. \tag{33.8}$$

The condition that this quadratic form should be positive definite places certain restrictions on the values of the coefficients. In particular $L_{aa} > 0$ for all a, and $L_{aa} L_{bb} > {L_{ab}}^2$.

The calculation of the energy of currents in the general case of arbitrary threedimensional conductors requires a complete solution of the field equations, and is a difficult problem. It becomes simpler if the magnetic permeability of both the conductors and the surrounding medium can be taken as unity. It should be noted that the energy of the currents is then no longer dependent on the thermodynamic state (in particular, on the temperature) of the bodies, and hence the free energy in the above formulae may be referred to simply as the energy.

For $\mu = 1$ the vector field potential due to the currents $\mathbf{j}$ is given by formula (30.12). Hence the self-energy of the a th conductor is

$$\mathscr{F}_{aa} = \frac{1}{2c^2} \iint \frac{\mathbf{j} \cdot \mathbf{j}'}{R} \, \mathrm{d}V \, \mathrm{d}V' \tag{33.9}$$

where both integrations are taken over the volume of the conductor considered, and R is the distance between $\mathrm{d}V$ and $\mathrm{d}V'$. Similarly, the mutual energy of two conductors is

$$\mathscr{F}_{ab} = \frac{1}{c^2} \iint \frac{\mathbf{j}_a \cdot \mathbf{j}_b}{R} \, \mathrm{d}V_a \, \mathrm{d}V_b \tag{33.10}$$

where $\mathrm{d}V_a$ and $\mathrm{d}V_b$ are volume elements in the two conductors.

The mutual energy of two linear currents is particularly easy to calculate. In formula (33.10) we change from volume currents to linear ones by replacing $\mathbf{j}_a \, \mathrm{d}V_a$ and $\mathbf{j}_b \, \mathrm{d}V_b$ by $J_a \, \mathrm{d}\mathbf{1}_a$ and $J_b \, \mathrm{d}\mathbf{1}_b$ respectively, and we find that the mutual inductance is $L_{ab} = \oint \oint \mathrm{d}\mathbf{1}_a \cdot \, \mathrm{d}\mathbf{1}_b / R$. In this approximation, therefore, L_{ab} depends only on the shape, size and relative position of the two currents. and not on the distribution of current over the cross-section of each wire. It must be emphasized that this simple formula can be obtained for linear currents without imposing the condition that $\mu = 1$. In the approximation where the thickness of the Wires is neglected, their magnetic properties have no effect on the field which they produce, and therefore no effect on their mutual energy. If the magnetic permeability μ of the medium surrounding the wires is different from unity, the vector potential is, by (30.15), simply multiplied by μ, and therefore so is the magnetic induction. The mutual inductance is therefore multiplied by the same factor, so that

$$L_{ab} = \mu \oint \oint \mathrm{d}\mathbf{l}_a \cdot \, \mathrm{d}\mathbf{l}_b / R \tag{33.11}$$

The self-inductance of linear conductors is much more difficult to calculate; we shall discuss it in §34.

The total energy of a system of linear currents can be written in still another form. To do this, we return to the integral (33.2), which for linear currents becomes

$$\mathscr{F} = \frac{1}{2c} \sum_a J_a \oint \mathrm{A} \cdot \, \mathrm{d}\mathbf{l}_a \tag{33.12}$$

where A is the vector potential of the total field at the element $d1_a$ of the a th conductor. The main error in going from (33.2) to (33.12) arises from neglecting the change in the field (including the field of the current considered) over the cross-section of the wire. Each of the contour integrals in (33.12) can be transformed into a surface integral:

$$\oint \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{l}_a = \int \operatorname{curl} \mathbf{A} \cdot \mathrm{d}\mathbf{f}_a = \int \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{f}_a$$

i.e. it is the flux of the magnetic induction or magnetic flux through the circuit of the a th current. We denote this flux by Φ_a. Then

$$\mathscr{F} = \frac{1}{2c} \sum_a J_a \Phi_a \tag{33.13}$$

Similarly, the free energy $\mathscr{F}$ of a linear current J in an external magnetic field, i.e. the energy without the self-energy of the field sources, can be expressed in terms of the magnetic flux. Evidently

$$\mathscr{F} = J\Phi/c, \tag{33.14}$$

where Φ is the flux of the external field through the circuit of the current J. If the external field is uniform, and $\mu = 1$ in the external medium, then $\Phi = \mathfrak{S} \cdot \int \mathrm{d}\mathfrak{f}$. Introducing the magnetic moment of the current in accordance with (30.18), we have $\mathscr{F} = \mathscr{M} \cdot \mathfrak{S}$.

Knowing the energy of a system of currents as a function of their shape, size and relative position, we can determine the forces on the conductors by simply differentiating with respect to the appropriate coordinates. Here, however, the question arises which characteristics of the currents should be kept constant in the differentiation. It is most convenient to differentiate at constant current. In this case the free energy is represented by $\mathscr{F}$, and so the generalized force F_q in the direction of a generalized coordinate q is $F_q = -(\partial \tilde{\mathscr{F}}/\partial q)_{J,T}$. The suffixes show that the differentiation is effected at constant current and constant temperature. Since we omit the term independent of the currents in the free energy, $\mathscr{F}$ and $\mathscr{F}$ differ only in sign, and so

$$F_q = -\left(\frac{\partial \tilde{\mathscr{F}}}{\partial q}\right)_J = \left(\frac{\partial \mathscr{F}}{\partial q}\right)_J = \frac{1}{2c^2} \sum_{a,b} J_a J_b \frac{\partial L_{ab}}{\partial q}; \tag{33.15}$$

here and henceforward the suffix T to the derivatives is omitted, for brevity.
In particular, the forces exerted on a conductor by its own magnetic field are given by the formula

$$F_q = \frac{1}{2c^2} J^2 \frac{\partial L}{\partial q} \tag{33.16}$$

where L is the self-inductance of the conductor. The nature of these forces can be seen as follows. For given current (and temperature), $\hat{\mathscr{F}}$ tends to a minimum. Since $\mathscr{F} = -LJ^2/2c^2$, this means that the forces on the conductor will tend to increase its selfinductance. The latter, having the dimensions of length, must be proportional to the dimension of the conductor. Thus the effect of the magnetic field is to increase the size of the conductor.

For a current in an external magnetic field we have †

$$\widetilde{\mathscr{F}} = -\mathscr{F} = -\mathscr{M} \cdot \mathfrak{g}. \tag{33.17}$$

In all the above formulae for the energy it is assumed that there is a linear relation between the magnetic field and induction. In the general case where this relation is arbitrary, analogous differential relations can be set up. The change in the free energy resulting from an infinitesimal

change in the field (at constant temperature) is, by (31.8), $\delta\mathscr{F} = \int \mathbf{j}.\delta\mathbf{A}\mathrm{d}V'/c$ or, for a system of linear currents,

$$\delta\mathscr{F} = \frac{1}{c}\sum_a J_a \oint \delta\ \mathrm{A}\cdot\ \mathrm{d}\mathbf{l}_a.$$

Proceeding as in the derivation of (33.13) from (33.12), we have †

$$\delta\mathscr{F} = \frac{1}{c}\sum_a J_a\delta\Phi_a. \tag{33.18}$$

Similarly, we find from (31.9)

$$\delta\hat{\mathscr{F}} = -\frac{1}{c}\sum_a \Phi_a\delta J_a \tag{33.19}$$

Thus we can say that, for a system of linear currents, $\mathscr{F}$ is the thermodynamic potential with respect to the magnetic fluxes. and $\mathscr{F}$ with respect to the currents, the two potentials being related by

$$\widehat{\mathscr{F}} = \mathscr{F} - \frac{1}{c}\sum_a J_a\Phi_a \tag{33.20}$$

Whatever the magnetic properties of the substance, therefore, the thermodynamic relations

$$J_a/c = \partial\mathscr{F}/\hat{C}\Phi_a. \quad \Phi_a/c = -\partial\hat{\mathscr{F}}/\hat{C}J_a \tag{33.21}$$

hold. If these formulae are applied to the case where the field and induction are linearly related, so that $\mathscr{F}$ is given by (33.8), we obtain

$$\Phi_a = \frac{1}{c}\sum_a L_{ab}J_b \tag{33.22}$$

Thus the inductances are the coefficients of proportionality between the magnetic fluxes and the currents which produce the magnetic field. The product $L_{ab}J_b/c$ is the magnetic flux through the circuit of the current J_a due to the current $J_b(b \neq a)$, and $L_{aa}J_a/c$ is that due to the current J_a itself.

8.3.6 §34. The self-inductance of linear conductors

In calculating the self-inductance of a linear conductor its thickness cannot be entirely neglected as it was in calculating the mutual inductance of two conductors. If it were, we

should obtain from (33.9) the self-inductance $L = \oint\oint \mathrm{d}\mathbf{1}\cdot\mathrm{d}\mathbf{1}'/R$, where both integrals are taken along the same circuit, and this integral is logarithmically divergent as $R \to 0$.

The exact value of the self-inductance of a conductor depends on the distribution of current in it, which may vary with the manner of excitation of the current, i.e. with the manner of application of the electromotive force. For a linear conductor, however, the selfinductance does not, to a fairly high accuracy, depend on the distribution of current over the cross-section. †

[0†] There is an obvious analogy between formulae (33.18) and (10.13) in the magnetic and electric cases respectively. In the magnetic case, the induction fluxes play the role of charges. The analogy has a clear physical interpretation. Just as the electric field can be maintained without any external energy supply. by charges on insulated conductors. the magnetic field can be maintained, without any external energy supply. by Superconducting solenoids across which the magnetic fluxes remain constant. It is therefore not surprising that the change in the free energy $\mathscr{F}$ in the electric and magnetic cases is governed by the changes in the charges and in the induction fluxes respectively.

Let us write the self-inductance as $L = L_e + L_i$, where L_e and L_i result from the magnetic field energy outside and inside the conductor respectively. For a linear conductor, the "external" part L_e makes the main contribution to the self-inductance. This is because most of the magnetic energy of a closed linear circuit resides in the field at distances from the wire large compared with its thickness. For the energy per unit length of an infinite straight wire is

$$(\mu_e/8\pi)\int H^2 \cdot 2\pi r \ \mathrm{d}r = (\mu_e/8\pi)\int (2J/cr)^2 \cdot 2\pi r \ \mathrm{d}r = \left(\mu_e J^2/c^2\right)\int \mathrm{d}r/r$$

where r is the distance from the axis of the wire and μ_e the magnetic permeability of the external medium. This integral diverges logarithmically for large r. For a closed linear circuit, of course, this divergence disappears, because the integral is "cut off" at distances of the order of the dimension of the circuit. We obtain an approximate value for the energy on multiplying this integral by the total length l of the wire, and taking l as the upper limit and the radius a of the wire as the lower limit. The result is $(\mu_e J^2 I/c^2)\log(l/a)$, and hence the self-inductance is

$$L = 2\mu_e l \log(l/a) \tag{34.1}$$

This expression is said to be of logarithmic accuracy: its relative error is of the order of $1/\log(l/a)$, and the ratio l/a is assumed to be so large that its logarithm is large. ‡

A particular case of a linear conductor is a solenoid, which consists of a wire wound in a helix, with the turns very close together. Neglecting the thickness of the wire and the distance between the turns, we have simply a conducting cylindrical surface with a "surface" conduction current on it. The equation $\operatorname{curl}\mathbf{H} = 4\pi\mathbf{j}/c$ within the conductor is here replaced by the boundary condition.

$$\mathbf{n}\times(\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = 4\pi\mathbf{g}/c, \tag{34.2}$$

where g is the surface current density, H_1 and H_2 the fields on each side of the surface, and n the unit normal vector into medium 2; cf. the derivation of (29.16).

If the solenoid is an infinitely long cylinder, the magnetic field which it produces can be found very simply. The surface currents flow in circles, and their density $g = nJ$, where J is the current in the wire and n the number of turns per unit length of the solenoid. The field outside the cylinder is zero; the field inside is uniform and along the axis of the cylinder, and is $H = 4\pi nJ/c$. For this field evidently satisfies the equations $\operatorname{div}\mathbf{H} = 0, \operatorname{curl}\mathbf{H} = 0$ in all space outside the conducting surface, and also the boundary condition (34.2) at that surface.

Accordingly, the field energy per unit length of the cylinder is

$$\mu_e H^2 \pi b^2/8\pi = 2\pi^2 n^2 b^2 \mu_e J^2/c^2$$

where b is the radius of the cylinder and μ_e pertains to the material within the solenoid. Neglecting the end effects, we can apply this formula also to a solenoid whose length h is finite, but large compared with b. Then the self-inductance is

$$L = 4\pi^2 n^2 b^2 h\mu_e = 2\pi\mu_e nbl, \tag{34.3}$$

[0]† More precisely, it is independent of the distribution of current provided that the current density varies appreciably only over distances comparable with the thickness a of the wire. If, however, the distribution is such that the current density varies appreciably over distances small compared with a (as happens, for particular reasons, in the skin effect and in superconductors), then the self-inductance does depend on the distribution-

‡ The assertion made above that the self-inductance is independent of the current distribution actually applies not only to the approximation (34.1) but also to the next approximation, in which terms not containing the large logarithm are included (or, what is the same thing, the coefficient of l/a is included in the argument of the logarithm); see the Problems at the end of this section.

where $l = 2\pi bnh$ is the total length of the wire. The greater self-inductance of a solenoid as compared with that of a straight wire of equal length (cf. (34.1)) is, of course, due to the mutual induction between adjoining turns.

PROBLEMS †

Problem 1. Determine the self-inductance of a closed circuit of thin wire of circular cross-section.

SOLUTION. The magnetic field in the wire can be taken to be the same as that inside an infinite straight cylinder: $H = 2\mathrm{Jr}/\mathrm{ca}^2$, where r is the distance from the axis of the wire and a its radius. Hence we find the internal part of the self-inductance:

$$L_i = \frac{2c^2}{J^2}\frac{\mu_i}{8\pi}\int H^2 \, \mathrm{d}V = \frac{1}{2}l_{\mu_i} \tag{1}$$

where l is the length of the wire.

To calculate L_e, we notice that the field outside a thin wire is independent of the distribution of current over its cross-section. In particular, the energy $\mathscr{F}_e$ of the external magnetic field is unchanged if we assume that the current flows only on the surface of the wire. The field inside the wire is then zero, and $\mathscr{F}_e$ may be calculated as the total energy from formula (33.2). On account of the assumed surface distribution of the current, the integral in this formula becomes a line integral along the axis of the wire, and sothe external part of the self-inductance is

$$L_e = \frac{2c^2}{J^2}\frac{J}{2c}\oint [\ \mathrm{A}]_{r=a} \cdot \ \mathrm{d}1$$

where the value of $\mathbf{A}$ in the integrand is taken at the surface of the wire. In obtaining this formula we also use the fact that, in the approximation used here, the field is constant along the perimeter of a cross-section.

Having reduced the problem to that of calculating A for $r = a$, we now make a different assumption concerning the current distribution, namely that the whole current J flows along the axis of the wire. The field on the surface of the wire is, in the approximation considered, unchanged by this assumption (nor would it be changed for a straight wire of circular cross-section). Then, by formula (30.14), we have

$$[\mathrm{A}]_{r=a} = \frac{J}{c}\left[\oint \frac{\mathrm{d}1}{R}\right]_{r=a},$$

Where R is the distance from the element d 1 of the axis to a given point on the surface of the wire. We divide the integral into two parts, one for which $R > \Delta$ and the other for which $R < \Delta$, where Δ is a distance small compared With the dimension of the circuit but large compared with the radius a of the wire. ‡ In the integral where $R > \Delta$, a may be neglected and R taken simply as the distance between two points on the circuit. The vector integral where $R < \Delta$ may be assumed to be along the tangent at the point considered. Denoting by t the unit vector in that direction, we have

$$\left[\int_{R<\Delta}\frac{\mathrm{d}\mathbf{l}}{R}\right]_{r=a} \cong \mathbf{t}\int_{-\Delta}^{\Delta}\frac{\mathrm{d}l}{\sqrt{(a^2+l^2)}} = 2\mathrm{t}\sinh^{-1}(\Delta/a)$$
$$\cong 2\mathrm{t}\log(2\Delta/a)$$

† In Problems 1-6 we assume $\mu_e = 1$.

‡ A similar procedure was used to calculate the capacitance of a thin ring in §2, Problem 4.

This expression can be written as the integral

$$\int_{\Delta>R>\frac{1}{2}a} \mathrm{d}1/R.$$

where R is again the distance between points on the circuit. Adding the two integrals for $R>\Delta$ and $R<\Delta$, we obtain

$$[\mathrm{A}]_{r=a} = \frac{J}{c}\int_{R>\frac{1}{2}a} \frac{\mathrm{d}\mathbf{l}}{R},$$

from which the arbitrary parameter Δ has disappeared, as it should.
The final result is therefore

$$L_e = \iint_{R>\frac{1}{2}a} \frac{\mathrm{d}\mathbf{l}\cdot\ \mathrm{d}\mathbf{l}'}{R} \tag{2}$$

The integration here extends over all pairs of points on the circuit whose distance apart exceeds $\frac{1}{2}a$.
Problem 2. Determine the self-inductance of a thin wire ring (with radius b) of circular cross-section (with radius a).

Solution. The integrand in (2), Problem 1, depends only on the central angle ϕ subtended by the chord R and $R = 2b\sin\frac{1}{2}\phi$, while $\mathrm{d}\mathbf{1}\cdot\mathrm{d}\mathbf{1}' = \mathrm{d}l\ \mathrm{d}l'\cos\phi$. Hence

$$L_e = 2\int_{\phi_0}^{\pi} \frac{\cos\phi\cdot 2\pi b\cdot b\ \mathrm{d}\phi}{2b\sin\frac{1}{2}\phi} = 4\pi b\left[-\log\tan\frac{1}{4}\phi_0 - 2\cos\frac{1}{2}\phi_0\right]$$

The lower limit of integration is determined from $2b\sin\frac{1}{2}\phi_0 = \frac{1}{2}a$, whence $\phi_0 \cong a/2b$. Substituting this value and adding $L_i = \pi b\mu_i$, we have to the required accuracy

$$L = 4\pi b\left[\log(8b/a) - 2 + \frac{1}{4}\mu_i\right]$$

In particular, for $\mu_i = 1$ we obtain

$$L = 4\pi b[\log(8b/a) - (7/4)].$$

Problem 3. Determine the extension of a ring of wire (with $\mu_i = 1$) under the action of the magnetic field of a current flowing in it.

SOLUTION. The internal stresses parallel and perpendicular to the axis are, by (33.16), given by

$$\pi a^2\sigma_{\mathrm{h}} = \frac{J^2}{2c^2}\frac{\partial L}{\partial(2\pi b)}, \quad 2\pi ab\sigma_{\mathrm{l}} = \frac{J^2}{2c^2}\frac{\partial L}{\partial a}$$

Substituting L from Problem 2, we have

$$\sigma_n = \frac{J^2}{\pi a^2c^2}\left[\log\frac{8b}{a} - \frac{3}{4}\right], \quad \sigma_\perp = -\frac{J^2}{a^2c^2}$$

Hence the required relative extension of the ring is

$$\frac{\Delta b}{b} = \frac{1}{E}(\sigma_1 - 2\sigma\sigma_1) = \frac{J^2}{\pi a^2c^2E}\left(\log\frac{8b}{a} - \frac{3}{4} + 2\pi\sigma\right)$$

where E is Young's modulus and σ Poisson's ratio for the wire; see $TE, 85$.
Problem 4. Determine the self-inductance per unit length of a system of two parallel straight

wires (with $\mu_1 = 1$) having circular cross-sections of radii a and b. with their axes a distance h apart, and carrying equal currents J in opposite directions (Fig. 19).

Solution The vector potential of the magnetic field of each current is parallel to the axes of the wires, and [00] the two vector potentials can be added algebraically. For the magnetic field of wire 1 , with a uniformly distributed

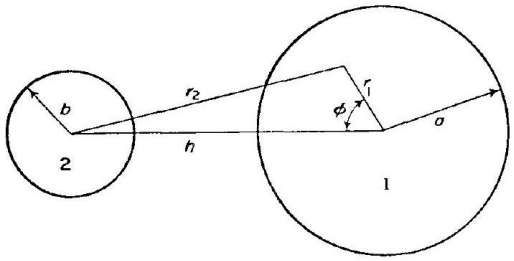


Fig. 19

current $+J$, we have in cylindrical polar coordinates

$$A_z = \frac{J}{c}\left(C - \frac{r^2}{a^2}\right) \text{ for } r < a.$$
$$A_z = \frac{J}{c}\left(C - 1 - 2\log\frac{r}{a}\right) \text{ for } r > a.$$

where C is an arbitrary constant; A_z is continuous at the surface of the wire. The formulae for wire 2 are obtained by substituting b for a and changing the sign of J. Integration over the cross-section of wire 1 in formula (33.2) gives

$$\frac{J^2}{2c^2\pi a^2}\int\left\{\left(C - \frac{r_1^2}{a^2}\right) - \left(C - 1 - 2\log\frac{r_2}{b}\right)\right\}\mathrm{d}f_1$$
$$= \frac{J^2}{2c^2\pi a^2}\int_0^a\int_0^{2\pi}\left\{1 - \frac{r_1^2}{a^2} + \log\frac{h^2 + r_1^2 - 2hr_1\cos\phi}{b^2}\right\} r_1\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}r_1 = \frac{J^2}{2c^2}\left(\frac{1}{2} + 2\log\frac{h}{b}\right)$$

The integration over the cross-section of wire 2 gives the same thing with a in place of b. The required selfinductance per unit length of the double wire is therefore

$$L = 1 + 2\log\left(h^2/ab\right)$$

Problem 5. Determine the self-inductance of a toroidal solenoid.
Solution. We regard the solenoid as a toroidal conducting surface carrying surface currents with density $g = NJ/2\pi r$, where N is the total number of turns and J the current; the coordinates and dimensions are as shown in Fig. 20 (p. 126). The magnetic field outside the solenoid is zero, and inside the solenoid $H_{ir} = H_{iz} = 0$, $H_{i\phi} = 2NJ/cr$, where r, z, ϕ are cylindrical polar coordinates; for this solution satisfies the equations $\operatorname{div}\mathbf{H} = 0$, $\operatorname{curl}\mathbf{H} = 0$ and the boundary condition (34.2). † The energy of the magnetic field in the solenoid is

$$\int\left(H_i^2/8\pi\right)\mathrm{d}V = \left(N^2J^2/c^2\right)\oint z\,\mathrm{d}r/r$$

Where the integration is taken along the perimeter of the cross-section, and is easily effected by putting $z = a\sin\theta$, $r = b + a\cos\theta$. The self-inductance is found to be

$$L = 4\pi N^2\left[b - \sqrt{\left(b^2 - a^2\right)}\right]$$

P ROBLEM 6. Determine the end-effect correction of order $l/$ h to the expression (34.3) (with $\mu_e = \mathbf{I}$) for the Self-inductance of a cylindrical solenoid.

Solution. The self-inductance is calculated as a double integral over the surface of the solenoid:

$$L = \frac{1}{J^2} \iint \frac{\mathrm{g}_1 \cdot \mathrm{g}_2}{R} \, \mathrm{d}f_1 \, \mathrm{d}f_2$$

† It is valid also for an annular solenoid with any cross-section.

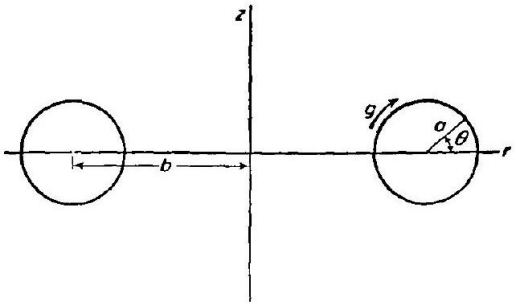


Fig. 20

where $\mathbf{g}$ is the surface current density ($g = nJ$). In cylindrical polar coordinates

$$L = 2\pi b^2 n^2 \int_0^h \int_0^h \int_0^{2\pi} \frac{\cos\phi \, \mathrm{d}\phi \, \mathrm{d}z_1 \, \mathrm{d}z_2}{\sqrt{\left[(z_2 - z_1)^2 + 4b^2 \sin^2 \tfrac{1}{2}\phi\right]}}$$
$$= 8\pi b^2 n^2 \int_0^h \int_0^\pi \frac{(h - \zeta)\cos\phi \mathrm{d}\phi \, \mathrm{d}\zeta}{\sqrt{\left(\zeta^2 + 4b^2 \sin^2 \tfrac{1}{2}\phi\right)}}$$

where ϕ is the angle between the diametral planes through $\mathrm{d}f_1$ and $\mathrm{d}f_2$, and $\zeta = z_2 - z_1$. Effecting the integration with respect to ζ, we have for $h \geqslant b$

$$L \cong 8\pi b^2 n^2 \int_0^\pi \left[h \log \frac{h}{b \sin \tfrac{1}{2}\phi} - h + 2b \sin \frac{1}{2}\phi\right] \cos\phi \mathrm{d}\phi$$

and finally

$$L = 4\pi^2 b^2 n^2 [h - 8b/3\pi]$$

Problem 7. Determine the factor by which the self-inductance of a plane circuit changes when it is placed on the surface of a half-space of magnetic permeability μ_e. The internal part of the self-inductance is neglected.

SOLUTION. It is evident from symmetry that, in the absence of the half-space, the magnetic field of the current is symmetrical about the plane of the circuit, and the lines of magnetic force cross that plane normally. Let this field be $\mathbf{H}_0$. We can satisfy the field equations and the boundary conditions on the surface of the half-space by putting $\mathbf{H} = 2\mu_e \mathbf{H}_0/(\mu_e + 1)$ in the vacuum and $\mathbf{B} = \mu_e \mathbf{H} = 2\mu_e \mathbf{H}_0/(\mu_e + 1)$ in the medium: B_n and $\mathbf{H}_t$ are then continuous at the boundary, and the circulation of $\mathbf{H}$ along any line of force is equal to that of $\mathbf{H}_0$. Hence we easily see that, when the medium is present, the total energy of the field. and therefore the self-inductance of the circuit. are multiplied by $2\mu_e/(\mu_e + 1)$.

8.3.7 §35. Forces in a magnetic field

To determine the forces on matter in a magnetic field hardly any further calculations are necessary, on account of the complete analogy with electrostatics. The analogy is due mainly to the fact that the expressions for the thermodynamic quantities in a magnetic field differ from those for an electric field only in that $\mathbf{E}$ and $\mathbf{D}$ are replaced by $\mathbf{H}$ and $\bar{B}$ respectively. In calculating the stress tensor in §15 we used the fact that the electric field satisfies the equation $\operatorname{curl}\mathbf{E}=0$, and is therefore a potential field. The magnetic field satisfies the equation

$$\operatorname{curl}\mathbf{H}=4\pi\mathbf{j}/c, \tag{35.1}$$

which reduces to $\operatorname{curl}\mathbf{H}=0$ only in the absence of conduction currents. In calculating the stress tensor, however, we must always put $\mathbf{j}=0$. Since $\mathbf{j}$ involves the derivatives of the magnetic field, an allowance for the currents in calculating the stresses would amount to adding to the stress tensor σ_{ik} the very small corrections due to the non-uniformity of the field; cf. the second footnote to §15.

Thus all the formulae obtained in § 815 and 16 for the stress tensor can be applied immediately for a magnetic field. For example, in a fluid medium with $\mathbf{B}=\mu\mathbf{H}$ we have

$$\sigma_{ik}=-P_0(\rho,T)\delta_{ik}-\frac{H^2}{8\pi}\left[\mu-\rho\left(\frac{\partial\mu}{\partial\rho}\right)_T\right]\delta_{ik}+\frac{\mu H_iH_k}{4\pi} \tag{35.2}$$

From this the body forces are calculated by the formula $f_i=\delta\sigma_{ik}/\partial x_k$. If the medium is a conductor carrying a current, the calculation differs from that in §15 in that the equation $\operatorname{curl}\mathbf{H}=0$ is replaced by (35.1).

Differentiating (35.2) and using also the equation $\operatorname{div}\mathbf{B}=\operatorname{div}(\mu\mathbf{H})=0$, we find

$$\mathbf{f}=-\operatorname{grad}P_0+\frac{1}{8\pi}\operatorname{grad}\left[H^2\rho\left(\frac{\partial\mu}{\partial\rho}\right)_T\right]-\frac{H^2}{8\pi}\operatorname{grad}\mu-\frac{\mu}{8\pi}\operatorname{grad}H^2+\frac{\mu}{4\pi}(\mathbf{H}\cdot\operatorname{grad})\mathbf{H}.$$

By a well-known formula of vector analysis,

$$\begin{aligned}(\mathbf{H}\cdot\mathbf{grad})\mathbf{H}&=\frac{1}{2}\operatorname{grad}H^2-\mathbf{H}\times\operatorname{curl}\mathbf{H}\\&=\frac{1}{2}\operatorname{grad}H^2+4\pi\mathbf{j}\times\mathbf{H}/c.\end{aligned}$$

Thus

$$\mathbf{f}=-\operatorname{grad}P_0+\frac{1}{8\pi}\operatorname{grad}\left[H^2\rho\left(\frac{\partial\mu}{\partial\rho}\right)_T\right]-\frac{H^2}{8\pi}\operatorname{grad}\mu+\frac{\mu}{c}\mathbf{J}\times\mathbf{H}. \tag{35.3}$$

The last term does not appear in the corresponding formula (15.12). It would, however, be incorrect to suppose that the presence of this term means that a force can be isolated in $\mathbf{f}$ which is due to the conduction current. The reason is that, by (35.1), the current $\mathbf{j}$ is inseparable from non-uniformity of the field, and another term in (35.3) also involves the space derivatives of the field. When the magnetic permeability of the medium is appreciably different from unity, all the terms in (35.3) are in general of the same order of magnitude.

If, however, as usually happens, μ is close to 1 , the last term in (35.3) gives the main contribution to the force when a conduction current is present, and the remaining terms form only a small correction. In calculating the forces we can then put $\mu=1$, obtaining simply

$$\mathbf{f}=\mathbf{j}\times\mathbf{H}/c. \tag{35.4}$$

The term $-\operatorname{grad} P_0$ is of no interest henceforward. and we omit it. For $\mu = 1$ the properties of the substance have no effect on the magnetic phenomena, and the expression (35.4) for the force is equally valid for fluid and for solid conductors. The total force exerted by a magnetic field on a conductor carrying a current is given by the integral

$$\mathbf{F} = \int \mathbf{j} \times \mathbf{H} \mathrm{d}V/c. \tag{35.5}$$

Formula (35.4) can, of course, be very easily obtained from the familiar expression for the Lorentz force. The macroscopic force on a body at rest in a magnetic field is just the averaged Lorentz force exerted on the charged particles in the body by the microscopic field $\mathbf{h}$: $\mathbf{f} = \rho\mathbf{v} \times \mathbf{h}/c$. For $\mu = 1$ the field $\mathbf{h}$ is equal to the mean field $\mathbf{H}$, and the mean value of $\rho\mathbf{v}$ is the conduction current density.

When a conductor moves, the forces (35.4) do mechanical work on it. At first sight it might appear that this contradicts the result that the Lorentz forces do no work on moving charges. In reality, of course, there is no contradiction, since the work done by the Lorentz forces in a moving conductor includes not only the mechanical work but also the work done by the electromotive forces induced in the conductor during its motion. These two quantities of work are equal and opposite; see the second footnote to §63.

In the expression (35.4) $\mathbf{H}$ is the true value of the magnetic field due both to external sources and to the currents themselves on which the force (35.4) acts. In calculating the total force from (35.5), however, we can take $\mathbf{H}$ to be simply the external field $\mathfrak{H}$ in which the conductor carrying a current is placed. The field of the conductor itself cannot, by the law of conservation of momentum, contribute to the total force acting on the conductor.

The calculation of the forces is particularly simple for a linear conductor. Its magnetic properties are of no significance, and, if $\mu = 1$ in the surrounding medium, the total force on the conductor is given by the line integral

$$\mathbf{F} = J \oint \mathrm{d}\mathbf{l} \times \mathfrak{g}/c \tag{35.6}$$

This expression can be written as an integral over a surface bounded by the current circuit. Using Stokes' theorem, we replace d1 by the operator df $\times$ grad, obtaining $\oint \mathrm{d}1 \times \mathfrak{g} = \int (\mathrm{df} \times \mathrm{grad}) \times \mathfrak{g}$. Now

$$\begin{aligned}(\mathrm{df} \times \mathrm{grad}) \times \mathfrak{S} &= -\mathrm{df} \operatorname{div} \mathfrak{S} + \mathrm{grad}(\mathrm{df} \cdot \mathfrak{H}) \\ &= -\mathrm{df} \operatorname{div} \mathfrak{S} + \mathrm{df} \times \operatorname{curl} \mathfrak{S} + (\mathrm{df} \cdot \mathrm{grad})\mathfrak{S}.\end{aligned}$$

But $\operatorname{div} \mathfrak{S} = 0$, and in the space outside the currents $\operatorname{curl} \mathfrak{I} = 0$ also. Thus

$$\mathbf{F} = J \int (\mathrm{d}\mathbf{f} \cdot \mathrm{grad})\mathfrak{S}/c \tag{35.7}$$

In particular, in an almost uniform external field $\mathfrak{S}$ can be taken outside the integral, together with the operator grad. With the magnetic moment of the current given by (30.18), we then have the obvious result

$$\mathbf{F} = (\mathscr{M} \cdot \mathrm{grad})\mathfrak{S} \tag{35.8}$$

Since $\mathscr{M}$ in this formula is constant, we can also write

$$\mathbf{F} = \mathrm{grad}(\mathscr{M} \cdot \mathfrak{I}), \tag{35.9}$$

in agreement with the expression (33.17) for the energy of the current. The torque acting on a current in an almost uniform field is easily seen to be given by the usual expression

$$\mathbf{K} = \mathscr{M} \times \mathfrak{S} \tag{35.10}$$

PROBLEM

Determine the force on a straight wire carrying a current J and parallel to an infinite circular cylinder with magnetic permeability μ, radius a and axis at a distance b from the wire.

Solution. On account of the relation, mentioned in the second footnore to §30, between two-dimensional problems of electrostatics and magnetostatics, the field of the current is obtained from the result in §7, Problem 3, by changing the notation. The field in the space round the cylinder is the same as that produced in a vacuum by the current J and currents $+J'$ and $-J'$ through A and O' (Fig. 12, §7) respectively, where $J' = (\mu - 1)J/(\mu + 1)$. The field within the cylinder is the same as that due to a current $J" = 2J/(\mu + 1)$ through O. The force per unit length of the conductor is

$$\begin{aligned} F = JB/c &= \frac{2JJ'}{c^2}\left(\frac{1}{OA} - \frac{1}{OO'}\right) \\ &= \frac{2J^2a^2(\mu - 1)}{b\,(b^2 - a^2)\,(\mu + 1)c^2} \end{aligned}$$

Similarly we find (see §7, Problem 4) that a linear conductor passing through a cylindrical hole in a magnetic medium is attracted to the nearest surface of the hole by a force

$$F = 2J^2b(\mu - 1)/\left(a^2 - b^2\right)(\mu + 1)c^2$$

8.3.8 §36. Gyromagnetic phenomena

Uniform rotation of a body (having no magnetic structure) causes a magnetization which is linearly dependent on the angular velocity Ω (the Barnett effect). Phenomenologically, a linear relation between the vectors $\mathscr{M}$ and Ω is possible because both change sign under time reversal. Since both are axial vectors, the relation can hold even in an isotropic body, where it reduces to a simple proportionality between $\mathscr{M}$ and Ω.

There must also be an inverse effect: a freely suspended body, on being magnetized, begins to rotate (the Einstein-de Haas effect). There is a simple thermodynamic relation between the two effects; it can be derived as follows.

As we know (see $SP1, 826$), the thermodynamic potential with respect to the angular velocity (for given temperature and volume of the body) is the free energy $\mathscr{F}'$ of the body in a system of coordinates rotating with it. The angular momentum $\mathbf{L}$ of the body is

$$\mathbf{L} = -\partial\tilde{\mathscr{F}}'/\partial\mathbf{\Omega} \tag{36.1}$$

The gyromagnetic phenomena are described by adding to the free energy a further term, which is the first term containing both Ω and M in an expansion in powers of Ω and of the magnetization $\mathbf{M}$ at each point in the body. This term is linear in both, i.e. it is

$$\tilde{\mathscr{F}}'_{\text{gyro}} = -\int \lambda_{ik}\Omega_i M_k \, \mathrm{d}V = -\lambda_{ik}\Omega_i\mathscr{M}_k \tag{36.2}$$

where λ_{ik} is a constant tensor, in general unsymmetrical.

According to (36.1) and (36.2) the angular momentum acquired by the body as a result of magnetization is related to its total magnetic moment by $L_{\text{gyro},\,i} = \lambda_{ik}\mathscr{M}_k$. It is usual to replace λ_{ik} by the inverse tensor, defined as $g_{ik} = (2mc/e)\lambda^{-1}{}_{ik}$, where e and m are the electron charge and mass. The dimensionless quantities g_{ik} are called gyromagnetic coefficients. Then

$$\mathscr{M}_i = (e/2mc) g_{ik} L_{\text{gyro},k} \tag{36.3}$$

The expression (36.2) also shows that, as regards its magnetic effect, the rotation of the body is equivalent to an external field $\mathfrak{S}_i = \lambda_{ki}\boldsymbol{\Omega}_k$ or

$$\mathfrak{Y}_{\text{i}} = (2mc/e) g_{\text{ki}}^{-1} \Omega_k \tag{36.4}$$

We thus have the possibility, in principle, of calculating the magnetization caused by the rotation. For example, if the magnetic susceptibility χ_{ik} of the body is small, the magnetic moment which it acquires is independent of its shape and is

$$\mathscr{M}_i = \chi_{ik}\mathfrak{S}_k = (2mc/e)\chi_{ik} g^{-1}{}_{\imath k}\Omega_\imath$$

Formulae (36.3) and (36.4) represent respectively the Einstein-de Haas and Barnett effects. We see that both effects are determined by the same tensor g_{ik}.

9 Main Exotic Magnetism

(see my note on magnetism for all other topics)

9.1 V Ferromagnetism and Antiferromagnetism by Landau

9.1.1 §37. Magnetic symmetry of crystals

There is a profound difference between the electric properties of crystals and their magnetic properties, which results from a difference in the behaviour of charges and currents with respect to time reversal.

The invariance of the equations of motion with respect to this change means that the formal substitution $t \to -t$, on being applied to any state of thermodynamic equilibrium of a body, must give some possible equilibrium state. There are then two possibilities: either the state obtained by changing the sign of t is the same as the original state, or it is not.

In this section we denote by $\rho(x, y, z)$ and $\mathbf{j}(x, y, z)$ the true (microscopic) charge and current densities at any given point in the crystal, averaged only over time, and not over "physically infinitesimal" volumes as in the macroscopic theory. These are the functions which determine the electric and magnetic structure of the crystal respectively.

When t is replaced by $-t$, j changes sign. If the state of the body remains unchanged, it follows that $\mathbf{j} = -\mathbf{j}$, i.e. $\mathbf{j} = 0$. Thus there is a reason why bodies can exist in which the function $\mathbf{j}(x, y, z)$ is identically zero. In such bodies, not only the current density but also the (time) average magnetic field and magnetic moment vanish at every point (we are speaking, of course, of states in the absence of an external magnetic field). Such bodies may be said to have no "magnetic structure", and indeed the great majority of bodies fall into this category.

The charge density ρ, on the other hand, is unchanged when $t \to -t$. There is therefore no reason why this function should be identically zero. In other words, there are no crystals without "electric structure", and herein lies the essential difference, mentioned at the beginning of this section, between the electric and the magnetic properties of crystals.

Let us now consider crystals for which the change from t to $-t$ results in a change of state, so that $j \neq 0$. We shall say that such bodies have a magnetic structure. First of all, we note that, although $\mathbf{j}$ is not zero, there can be no total current in an equilibrium state of the body, i.e. the integral $\int j dV$ taken over a unit cell must always be zero. † Otherwise the current would produce a macroscopic magnetic field, and the crystal would have a magnetic energy per unit

volume increasing rapidly with its dimensions. Since such a state is energetically unfavourable, it could not correspond to thermodynamic equilibrium.

The currents j may, however, produce a non-zero macroscopic magnetic moment, i.e.

the integral $\int \mathbf{r} \times \mathbf{j} \mathrm{d}V$, again taken over a unit cell, need not be zero. Accordingly, the bodies for which $\mathbf{j} \neq 0$ may be divided into two types: those in which the macroscopic magnetic moment is not zero, called ferromagnets, and those in which it is zero, called antiferromagnets. What are the possible symmetry groups of the current distribution $\mathbf{j}(x, y, z)$? This symmetry contains, first of all, the usual rotations, reflections and translations, and so the possible symmetry groups of $\mathbf{j}$ always include the usual 230 crystallographic space symmetry groups. These, however, are by no means all. As has already been mentioned, the substitution $t \to -t$ changes the sign of the vector $\mathbf{j}$. For this reason a new symmetry element comes in, namely that resulting from the reversal of all currents; we shall denote this transformation by R. If the current distribution itself has the symmetry R, it follows that $\mathbf{j} = -\mathbf{j}$, i.e. $\mathbf{j} = 0$, and the body has no magnetic structure. A non-zero function $\mathbf{j}(x, y, z)$ may, however, be symmetrical with respect to various combinations of R with the other symmetry elements (rotations, reflections and translations). Thus the problem of determining the possible types of symmetry of the current distribution (the magnetic space groups) amounts to the enumeration of all possible groups containing both the transformations of the ordinary space groups and the combinations of these with R.

If the symmetry of the current distribution is given, the crystallographic symmetry of the particle distribution, which is also the symmetry of the function $\rho(x, y, z)$, is determined. It is the symmetry of the space group which is obtained from the symmetry group of $\mathbf{j}$ by formally regarding the transformation R as the identity (as it is with respect to the function ρ).

If only the macroscopic properties of the body are of interest, however, it is not necessary to know the complete symmetry group of the function $\mathbf{j}(x, y, z)$. These properties depend only on the direction in the crystal, and the translational symmetry of the lattice does not affect them. As regards crystallographic structure, the "symmetry of directions" is specified by the 32 crystal classes. These are the symmetry groups consisting of rotations and reflections only. and are obtained from the space groups by regarding every translation as the identity, and the screw axes and glide planes as simple axes and planes of symmetry. As regards the magnetic properties, the macroscopic symmetry can be classified by groups (consisting of rotations, reflections and combinations of these with R) which may be called the magnetic crystal classes. They are related to the magnetic space groups in the same way as are the ordinary crystal classes to the ordinary space groups. They include, firstly, the usual 32 classes, and those classes augmented by the element R. These augmented classes are, in particular, the macroscopic symmetry groups for all bodies having no magnetic structure, but they occur also in bodies with magnetic structure. This happens if the magnetic space symmetry group of such bodies includes R only in combination with translations. and not alone.

There are also 58 classes in which R enters only in combination with rotations or reflections. Each of these becomes one of the ordinary crystal classes if R is replaced by the identity.

It should be noted that the occurrence of magnetic structure (ferromagnetic or antiferromagnetic) always involves comparatively weak interactions. † Hence the crystal

structure of a magnetic body is only a slight modification of that in the non-magnetic phase, which usually changes into the magnetic phase when the temperature is reduced. In

[0]† It should be emphasized that the cell spoken of here is the true unit cell, whose definition involves the magnetic structure of the crystal, and this "magnetic cell" may be different from the purely crystallographic cell. which relates only to the symmetry of the charge distribution in the lattice (cf. §38 below).

[0]† The exchange interaction between the magnetic moments of atoms usually results in the saturation of the valency bonds and the formation of non-magnetic structures. A magnetic structure results only from the relatively Weak exchange interactions between deep-lying d and f electrons of atoms of elements in the intermediate groups of the periodic system.

this respect ferromagnets, in particular, differ from ordinary pyroelectrics, but are analogous to ferroelectrics.

If the magnetic crystal class of a body is specified, its macroscopic magnetic properties are qualitatively determined. The most important of these is the presence or absence of a macroscopic magnetic moment, i.e. of spontaneous magnetization in the absence of an external field. The magnetic moment M is a vector, behaving as an axial vector (the vector product of two polar vectors) under rotation and reflection, and changing sign under the operation R. The crystal will possess spontaneous magnetization if it has one or more directions such that a vector $\mathbf{M}$ in that direction and having the above-mentioned properties is invariant under all transformations belonging to the magnetic crystal class concerned.

We must again emphasize the difference between these (macroscopic) properties and the corresponding ones in electrostatics. The latter are qualitatively determined by the ordinary crystal class. In particular, a body is pyroelectric if its crystal class admits the existence of a polar vector $\mathbf{P}$ (the polarization). It would, however, be entirely wrong to base conclusions about the existence or otherwise of a macroscopic magnetic moment on the behaviour of the axial vector M with respect to the transformations of the purely structural crystal class of the body concerned, which corresponds to the symmetry of the function $\rho(x, y, z)$; we shall return to this problem in §38, after actually constructing the magnetic classes.

Instead of the symmetry of the function $\mathbf{j}(x, y, z)$, we can use that of the microscopic magnetic moment density distribution $\mathbf{M}(x, y, z) = \mathbf{r} \times \mathbf{j}(x, y, z)$. This in turn may be regarded as the symmetry of the configuration and orientation of the (time) averaged values of the magnetic moments μ of the atoms or ions in the lattice. In a body without magnetic symmetry these averaged values are zero. In a ferromagnet the sum of the atomic moments in each unit cell is non-zero, but in an antiferromagnet it is zero.

A set of atoms in the lattice having equal values of μ is called a magnetic sub-lattice. An antiferromagnet will evidently contain at least two sub-lattices with equal and opposite values of μ. If the directions of the moments μ are parallel or antiparallel for all sub-lattices, such a body is said to be collinear; in the contrary case, it is a non-collinear antiferromagnet.

A ferromagnet also may contain more than one sub-lattice. In the narrow sense, the term "ferromagnetic" applies to bodies in which all the mean atomic magnetic moments are parallel. A crystal is said to be ferrimagnetic if it contains two or more sub-lattices with atomic moments that differ in direction or magnitude. In contrast to the antiferromagnetic case, in these substances the vector sum M of the magnetic moments of the sub-lattices is not zero. A ferromagnet may be collinear, or not, according as the magnetic moments of all its sub-lattices are parallel or antiparallel, or not.

9.1.2 §38. Magnetic classes and space groups

We shall now show how the magnetic symmetry groups are constructed, beginning with the magnetic classes.

As already mentioned in §37, the magnetic classes fall into three types. Type I include [5] the 32 ordinary crystal classes, which do not involve the element R. Type II includes the same 32 classes augmented by R. Each such class contains all the elements of the ordinary class (of the point group $\boldsymbol{G}$) and also all these elements multiplied by R; if the magnetic class is denoted by M, then we can write

$$M = G + RG. \tag{38.1}$$

The transformation R commutes, of course, with all spatial rotations and reflections; hence $RG = GR$, where G is any element of G.

These two types of class are, in a sense. trivial. The non-trivial type III includes the 58 magnetic classes, in which R enters only in combination with rotations or reflections. Each of these becomes one of the ordinary crystal classes of G if R is replaced by the identity. The construction of all magnetic classes of this type is carried out as follows.

Let H denote the set of elements of the group G which are not multiplied by R when the magnetic class $\boldsymbol{M}$ is formed. Such a set includes, by definition, the unit element E, since otherwise M would contain the element R itself, i.e., would belong to type II. The products of any two of the elements in this set are also members of the set. Thus H is a sub-group of G. All other elements of G appear in M multiplied by R; since $R^2 = E$, all products of pairs of these elements belong to $\boldsymbol{H}$. It follows that $\boldsymbol{H}$ is a sub-group of $\boldsymbol{G}$ (and therefore of $\boldsymbol{M}$) with index 2.† The structure of a type III magnetic class M may therefore be written as

$$M = H + RG_1H, \tag{38.2}$$

where G_1 is any element of G that is not an element of H. It is evident that the groups M and $G = H + G_1H$ are isomorphous.

The problem of constructing all the magnetic classes thus amounts to finding the subgroups with index 2 in all the crystal classes. This is easily done by means of the character tables for the irreducible representations of the point groups. Every one-dimensional (other than the unit) representation of the group contains an equal number of characters +1 and -1 ; the elements with characters +1 form a sub-group with index 2 . On changing to the magnetic class, these elements remain the same, while all others are multiplied by R.

The procedure may be illustrated with reference to the point group C_{4v}. The character table for its irreducible representations is (see $QM, 895$)

	E	C_2	$2C_4$	$2\sigma_v$	$2\sigma'_v$
A_1	1	1	1	1	1
A_2	1	1	1	−1	−1
B_1	1	1	−1	1	−1
B_2	1	1	−1	−1	1
E	2	−2	0	0	0

The one-dimensional (other than the unit) representations are A_2, B_1, B_2. In the representation A_2, the elements with characters +1 form the sub-group C_4. The corresponding magnetic class, denoted by $C_{4v}\,(C_4)$, consists of the elements $E, C_2, 2C_4$, $2R\sigma_v, 2R\sigma'_v$. In the representations B_1 and B_2, the elements with characters +1 form the sub-groups C_{2r}, which differ only in the position of the planes σ_v relative to fixed coordinates. These sub-groups are crystallographically indistinguishable, and correspond to the same magnetic class $C_{4v}\,(C_{2v})$. whose elements are $E, C_2, 2RC_4, 2\sigma_v, 2R\sigma'_v$.

On going through all the 32 crystal classes in this way, we obtain the 58 magnetic classes of type III, as listed in Table 1. Each class $\boldsymbol{G}(\boldsymbol{H})$ is defined by an original point group $\boldsymbol{G}$ and a sub-group H thereof which is one of those listed in parentheses after the symbol for the particular group $\boldsymbol{G}$. The crystal classes $\boldsymbol{C}_1, \boldsymbol{C}_3$ and $\boldsymbol{T}$ have no sub-groups with index 2 , and so they give rise to no magnetic classes. The rotation C_3, moreover, never appears multiplied by R in a (non-trivial) magnetic class: the rotation C_3R thrice repeated would give R, which is not a member of such classes. †

It has been mentioned in §37 that the crystal class concerned does not determine whether or not ferromagnetism can exist. To illustrate this, let us consider a tetragonal lattice of identical

[0]† This means that H contains half as many elements as G. The statement is a consequence of a general theorem Which is fairly obvious: a sub-group H of G has index 2 if and only if the product of any two elements of G that do not belong to H is an element of H.

Table 1 Magnetic classes

$\boldsymbol{C_i}\,(\boldsymbol{C_1})$	$\boldsymbol{C_{3v}}\,(\boldsymbol{C_3})$
$\boldsymbol{C_s}\,(\boldsymbol{C_1})$	$D_3\,(C_3)$
$C_2\,(C_1)$	$D_{3d}\,(D_3, S_6, C_{3v})$
$\boldsymbol{C_{2h}}\,(\boldsymbol{C_i}, \boldsymbol{C_2}, \boldsymbol{C_s})$	$\boldsymbol{C_{3h}}\,(\boldsymbol{C_3})$
$C_{2v}\,(C_s, C_2)$	$\boldsymbol{C}_6\,(\boldsymbol{C}_3)$
$D_2\,(C_2)$	$D_{3h}\,(C_{3h}, C_{3v}, D_3)$
$D_{2h}\,(D_2, C_{2h}, C_{2v})$	$\boldsymbol{C_{6h}}\,(\boldsymbol{C_6}, \boldsymbol{S_6}, \boldsymbol{C_{3h}})$
$C_4\,(C_2)$	$C_{bv}\,(C_6, C_{3v})$
$\boldsymbol{S_4}\,(\boldsymbol{C_2})$	$D_6\,(C_6, D_3)$
$D_{2d}\,(S_4, D_2, C_{2v})$	$D_{6h}\,(D_6, C_{6h}, C_{6v}, D_{3d}, D_{3h})$
$D_4\,(C_4, D_2)$	$\boldsymbol{T_h}(\boldsymbol{T})$
$\boldsymbol{C}_{4v}\,(\boldsymbol{C}_4, \boldsymbol{C}_{2v})$	$O(T)$
$C_{4h}\,(C_4, C_{2h}, S_4)$	$T_{\mathrm{d}}(T)$
$D_{4h}\,(D_4, C_{4h}, D_{2h}, C_{4v}, D_{2d})$	$O_h\,(O, T_h, T_d)$
$\boldsymbol{S_6}\,(\boldsymbol{C_3})$	

atoms, with magnetic moments parallel to the tetragonal axis. ‡ Its magnetic crystal class is $\boldsymbol{D}_{4h}\,(\boldsymbol{D}_4)$, containing the transformations§ $E, C_2, 2C_4, 2U_2R, 2U_2'R, I, \sigma_h,\ 2S_4, 2\sigma_vR, 2\sigma_v'R$. All these transformations leave invariant the axial vector M , which is parallel to the fourfold axis. The crystal class D_{4h} itself, however, would not allow the existence of an axial vector: all the components M_x, M_y, M_z would change sign in a rotation about some twofold axis, for example.

Let us now turn to the magnetic space groups. These are in the same relation to the ordinary crystal space groups as the magnetic classes are to the crystal classes, reducing to these if R is replaced by the identity. The total number of magnetic space groups is 1651 : like the magnetic classes, they fall into three types.

Type I contains 230 groups which coincide with the crystal groups and do not involve R; type II has the same 230 groups augmented by R.

The non-trivial type III contains 1191 groups in which R enters only in combination with rotations, reflections or translations. It has the structure (38.2), where $\boldsymbol{H}$ is any sub-group

with index 2 of the crystal space group G, and G_1 is an element of G that is not an element of H. The sub-group H must evidently coincide with the original space group G as regards either translational symmetry or class, having respectively either half as many "rotational" elements (rotations and reflections) as G, or half as many translations. Accordingly, type III may be subdivided into two sub-types.

Sub-type IIIa contains the magnetic space groups for which G_1 in (38.2) is a "rotational" transformation of the crystal group $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{H} + \boldsymbol{G}_1\boldsymbol{H}$ which does not belong to $\boldsymbol{H}$. The trans-

[0]† In abstract symmetry theory, magnetic symmetry is called antisymmetry. This concept was independently proposed by H. Heesch (1929) and A. V. Shubnikov (1945). The antisymmetry classes were found by Shubnikor (1951) as the symmetry groups of geometric figures (polyhedra) with faces of two colours: the element R then corresponds to changing the colour of each face. These classes were derived as magnetic symmetry groups by *B. A.* Tavger and V. M. Zaitsev (1956). The method of derivation given here is due to V. L. Indenbom (1959).
‡ Such, for instance, is the lattice of iron in its ferromagnetic phase. Crystallographically, it is a cubic lattic slightly distorted along one of the fourfold symmetry axes. The distortion is the result of magnetostriction arising simply from the presence of the magnetic structure.
§ The notation for the symmetry elements is everywhere as in *QM*, §§93 and 94 . In particular, U_2 and U_2' ari rotations through 180° about horizontal axes perpendicular to the fourfold axis, σ_h is a reflection in the horizont [3] plane, σ_v and σ_v' are reflections in vertical planes passing through the axes C_4 and U_2, U_2'. The symbols U_2R, σ^R | etc. denote symmetry planes and axes which appear in this class in combination with R.

lational symmetry (Bravais lattice) of a space group M of this type is the same as that of $\boldsymbol{G}$; that is, the unit cell of the magnetic structure is the same as the purely crystallographic one. These magnetic space groups, 674 in number, belong to magnetic classes of type III.
Sub-type IIIbcontains the magnetic space groups for which G_1 in (38.2) may be taken to be a pure translation through one of the basic periods of $\boldsymbol{G}$. The unit cell of the magnetic structure has a volume twice that of the crystallographic unit cell. The set of pure translations and translations multiplied by R forms the magnetic Bravais lattice; there are 22 different lattices of this kind. The magnetic space groups of sub-type IIIb, 517 in number, belong to magnetic classes of type II. †

PROBLEM

List the magnetic classes that allow ferromagnetism.
Solution, The classes of type II do not allow ferromagnetism. It must be emphasized that the same is therefore true of every space group of type II or IIIb that contains translations multiplied by R; these transformations certainly change the sign of $\mathbf{M}$. In other words, for ferromagnetism to occur, it is always necessary that the magnetic unit cell should coincide with the crystallographic one. ‡

Of the classes of type I (which are the same as the ordinary crystal classes), the following allow the existence of an axial vector $\mathbf{M}$: $\boldsymbol{C}_1$ and $\boldsymbol{C}_i$ with $\mathbf{M}$ in any direction; $\boldsymbol{C}_s$ with $\mathbf{M}$ in the plane of symmetry; $\boldsymbol{C}_2, \boldsymbol{C}_{2h}, \boldsymbol{C}_4, \boldsymbol{S}_4, \boldsymbol{C}_{4h}, C_3, C_6, S_6, C_{3h}, C_{6h}$ with $\mathbf{M}$ parallel to the axis of symmetry.

For ferromagnetism to exist in classes of type III, they must never contain the element IR, which changes the sign of the vector M whatever the direction of the latter. Of such classes, the following allow ferromagnetism: $C_2\,(C_1)\,, C_{2h}\,(C_i)$ with M perpendicular to the C_2R axis; $C_s\,(C_1)$ with M in the σR plane; $C_{2v}\,(C_s)$ with M in the $\sigma_v R$ plane and perpendicular to the C_2R axis; $D_2\,(C_2)\,, C_{2v}\,(C_2)\,, D_{2h}\,(C_{2h})$ with M parallel to the C_2 axis; $D_4\,(C_4)$, $C_{4v}\,(C_4)\,, D_{2d}\,(S_4)\,, D_{4h}\,(C_{4h})\,, D_3\,(C_3)\,, C_{3v}\,(C_3)\,, D_{3d}\,(S_6)\,, D_{3h}\,(C_{3h})\,, D_6\,(C_6)\,, C_{6v}\,(C_6)\,, D_{6h}\,(C_{6h})$ with M parallel to the C_4, C_3 or C_6 axis.

9.1.3 §39. Ferromagnets near the Curie point

There is a close analogy between the magnetic properties of ferromagnets and the electric properties of ferroelectrics. Both exhibit spontaneous polarization, magnetic or electric, in macroscopic volumes. In each case, this polarization vanishes at a temperature corresponding to a second-order phase transition (the transition point between the ferromagnetic and paramagnetic phases is called the Curie point).

There are also, however, important differences between ferromagnetic and ferroelectric phenomena, arising from the difference in the microscopic interaction forces which bring

about the spontaneous polarization. In ferroelectrics, the interaction between the molecules in the crystal lattice is essentially anisotropic, and consequently the spontaneous polarization vector is fairly closely related to certain directions in the crystal. The formation of a magnetic

[0†] The magnetic space groups were constructed (as antisymmetry groups) by A. M. Zamorzaev (1953) and by N.
[V]. Belov, N. N. Neronova, and T. S. Smirnova (1955); the latter authors' tables are given by A. V. Shubnikov and
N. V. Belov, Colored Symmetry, Pergamon Press, Oxford, 1964. The most complete tables of the magnetic space Broups and their properties are those given by V. A. Koptsik, Shubnikov Groups (Shubnikovskie gruppy), Moscow S_{tate} University Press, 1966.
‡ This refers (see the last footnote but two) to the symmetry of a lattice already distorted by the very existence of the magnetic structure.

(including ferromagnetic) structure, on the other hand, is due mainly to the exchange interaction of the atoms, which is quite independent of the direction of the total magnetic moment relative to the lattice. † It is true that, together with the exchange interaction, there is also a direct magnetic interaction between the magnetic moments of the atoms. This interaction, however, is an effect of order v^2/c^2 (v being the atomic velocities), since the magnetic moments themselves contain a factor v/c. The effects of this order include also the interaction of the magnetic moments of the atoms with the electric field of the crystal lattice. All these interactions, which may be called relativistic by virtue of the factor $1/c^2$ in them, are weak in comparison with the exchange interaction, so that they can result only in a comparatively slight dependence of the energy of the crystal on the direction of magnetization. This relationship between the exchange and relativistic interactions will be assumed throughout the rest of the chapter. ‡

Consequently, the magnetization of a ferromagnet is a quantity which, in the first approximation (i.e. on the basis of the exchange interaction), is conserved. This fact endows with greater physical significance the thermodynamic theory, in which the magnetization $\mathbf{M}$ is regarded as an independent variable, the actual value of which (as a function of temperature, field, etc.) is afterwards determined by the appropriate conditions of thermal equilibrium.§

We denote by $\Phi(\mathbf{M},\mathbf{H})$ the thermodynamic potential per unit volume of the substance, regarded as a function of the independent variable M (and of the other thermodynamic variables). We shall, for the present, neglect the relativistic interactions, i.e. we shall take into account only the exchange interaction. Then $\Phi(\mathbf{M},0)$ may be a function of the magnitude of $\mathbf{M}$, but not of its direction.

In order to find the thermodynamic quantities when the field $\mathbf{H}$ is not zero, we proceed exactly as in the derivation of (19.3), starting from the relation $\partial\widetilde{\Phi}/\partial\mathbf{H} = -\mathbf{B}/4\pi$. This gives

$$\tilde{\Phi}(\mathbf{M},\mathbf{H}) = \Phi(M,0) - \mathbf{M}\cdot\mathbf{H} - \mathbf{H}^2/8\pi \tag{39.1}$$

Hence the potential Φ is

$$\begin{aligned}\Phi(\mathbf{M},\mathbf{B}) &= \Phi + \mathbf{H}\cdot\mathbf{B}/4\pi \\ &= \Phi(M,0) + H^2/8\pi \\ &= \Phi(M,0) + (\mathbf{B}-4\pi\mathbf{M})^2/8\pi\end{aligned} \tag{39.2}$$

† The exchange interaction is a quantum effect resulting from the symmetry of the wave functions of the system with respect to interchanges of the particles. The interchange symmetry of the wave functions, and therefore the exchange interaction, depend only on the total spin of the system, and not on the direction of the spin; see QM, 860. The importance of the exchange interaction in ferromagnets was first pointed out by Ya. I. Frenkel', Ya. G. Dorfman and W. Heisenberg (1928).

‡ The order of magnitude of the ratio of the relativistic and exchange interactions is given by the ratio U_{ansol}/NT_c, where U_{anso} is the magnetic anisotropy energy (see §40), N the number of atoms per unit volume. and T_c the temperature of the Curie point. For ferromagnets this ratio is usually between 10^{-2} and 10^{-5}. In some ferromagnets (rare-earth metals and their compounds), however, it may be much greater and even reach values [i] the order of unity, both because of the "anomalously" large anisotropy energy and because of the relative weakness of the exchange interactions. There are, of course, only limited possibilities of applying the macroscopli theory to such substances. A detailed discussion of the microscopic mechanisms of the various interactions [19] specific magnetic materials is outside the scope of this book.

§ The collinear ferrimagnets are indistinguishable from ferromagnets in the narrow sense (see the end of §[3n] as regards macroscopic magnetic symmetry and as regards their behaviour in fairly weak magnetic fields. The theory given below relates to both these types of material.

When the magnetic anisotropy of the ferromagnet is neglected, the directions of the vectors **M** and **H** are, of course, the same, and so the vectors in formulae (39.1) and (39.2) are replaced by their magnitudes.

Near the Curie point, the magnetization **M** is small. We shall consider the properties of a ferromagnet in this range in the general Landau theory of second-order phase transitions. † In accordance with this theory, we expand $\Phi(M,0)$ as a series in powers of the vector M , which acts as an order parameter. The expansion of an isotropic function in powers of a vector quantity can contain only even powers:

$$\widetilde{\Phi} = \Phi_0 + AM^2 + BM^4 - MH - H^2/8\pi, \tag{39.3}$$

where Φ_0, A and B are functions only of temperature and pressure. ‡
The Curie point $T = T_c(P)$ is given by the vanishing of the coefficient A : $A > 0$ for $T > T_c$ and $A < 0$ for $T < T_c$. (This relation of the phases occurs in all known ferromagnets, although it is not thermodynamically necessary.) Near the Curie point,

$$A = a\,(T - T_c) \tag{39.4}$$

where a is a positive quantity independent of temperature. The expressions (39.3) and (39.4) differ from (19.3) only in that M and H replace P_z and E_z. The conclusions which follow from these expressions will therefore be stated without repeating the arguments given in §19.
The spontaneous magnetization in the ferromagnetic phase varies with temperature according to

$$M = \sqrt{}\left[a\,(T_c - T)\,/2B\right] \tag{39.5}$$

Above the Curie point there is no spontaneous magnetization, and the magnetic susceptibility is

$$\chi = 1/2a\,(T - T_c)\,, \tag{39.6}$$

i.e., there is paramagnetism with susceptibility inversely proportional to $T - T_c$ (the Curie-Weiss law). Below the Curie point,

$$\chi = (\partial M/\partial H)_{H\to 0} = 1/4a\,(T_c - T)\,. \tag{39.7}$$

It should be pointed out, however, that this quantity is here not the susceptibility in the ordinary sense of the word (i.e. the coefficient of proportionality between M and H), since $M \neq 0$ even when $H = 0$.
The susceptibility (39.7) can actually attain values of the order of unity only in the immediate neighbourhood of the Curie point. Except in this region, we may suppose that the magnetization M changes only very slightly with the magnetic field and may be regarded as a constant for any given temperature. In the following sections we shall assume this to be true.
This constitutes a further difference between ferromagnets and ferroelectrics: for the latter, $\partial P/\partial E$ is in general not small even far from the Curie point. The reason again lies in the smallness of the magnetic moments of the atoms in comparison with the electric dipole moments of the molecules.
It has been mentioned in §19 that the application of an electric field blurs the discrete
† The properties of a ferromagnet in the fluctuation range near the Curie point will be discussed in §47.
‡ The fact that the expansion contains only even powers of the components of M has also another more Profound origin which does not depend on the exchange approximation: **M** is an odd

function under time [teversal, whereas the thermodynamic potential must of course be invariant under time reversal.] second-order phase transition point in ferroelectrics. The same is true, of course, for a ferromagnet in a magnetic field. Since **M** and **H** have the same direction in the exchange approximation, the blurring of the transition occurs in that approximation whatever the crystallographic direction of **H**.

9.1.4 §40. The magnetic anisotropy energy

As already mentioned, the anisotropy of the magnetic properties of ferromagnets is due to the relativistic interactions between their atoms, and these interactions are comparatively weak. In the macroscopic theory, the anisotropy is described by the addition to the thermodynamic potential of the magnetic anisotropy energy, which depends on the direction of magnetization.

The calculation of the anisotropy energy from the microscopic theory would require the use of quantum perturbation theory, the energy of the perturbation being represented by the terms in the Hamiltonian of the crystal which pertain to the relativistic interactions, The general form of the desired expressions, however, can be deduced without such calculations, from simple arguments concerning symmetry.

The Hamiltonian of the relativistic interactions contains terms of the first and second powers in the electron spin vector operators; these are respectively the spin-orbit and spin-spin interactions. Both kinds are small in proportion to v^2/c^2, where v is of the order of magnitude of the velocities of atomic electrons, and c is the velocity of light. The perturbation-theory series for the anisotropy energy is an expansion in powers of this small quantity, but, because of the above-mentioned dependence of the perturbation operator on the spin operators, the anisotropy energy is automatically obtained as a series of powers of the direction cosines of the magnetization vector, i.e. the components of a unit vector m in the direction of **M**. The anisotropy energy U_{aniso} , like the potential Φ itself (cf. the last footnote), is invariant under time reversal, whereas the magnetization **M** changes sign. Hence it follows that the anisotropy energy must be an even function of the components of m.

For uniaxial and biaxial crystals, the expansion of the anisotropy energy begins with squares of these components, and may be written

$$U_{\text{aniso}} = K_{ik} m_i m_k, \tag{40,1}$$

where K_{ik} is a symmetrical tensor of rank two, whose components, like U_{aniso} itself, have the dimensions of energy density. In uniaxial and biaxial crystals, such a tensor has respectively two and three independent components. In the present case, however, it must also be borne in mind that one quadratic combination. namely ${m_x}^2 + {m_y}^2 + {m_z}^2 = 1$, is independent of the direction of **m** and so cannot appear in the anisotropy energy. Hence the expression (40.1) for uniaxial and biaxial crystals contains only one and two independent coefficients respectively.

For example, in uniaxial crystals the anisotropy energy can be written

$$U_{\text{aniso}} = K\left(m_x^2 + m_y^2\right) = K\sin^2\theta$$

or, equivalently, †

$$U_{\text{aniso}} = -Km_z^2 = -K\cos^2\theta$$

where θ is the angle between **m** and the z-axis, taken to be along the principal axis of symmetry of the crystal. If K (a function of temperature) is positive, the anisotropy energy is least for magnetization in the z-direction; this will then be the direction of easy magnetization. Such a ferromagnet is said to be of the "easy-axis" type. If K is negative, the direction of easy magnetization lies in the xy-plane (the basal plane of the crystal); such a ferromagnet is

said to be of the "easy-plane" type. † The expression (40.2) is isotropic in the xy-plane. This isotropy, however, does not occur in the higher-order terms in the expansion of U_{aniso} , and these determine (when $K < 0$) the direction of easy magnetization in the xy-plane. The form of such terms depends on the particular crystal system to which the crystal belongs.
For tetragonal crystals, the fourth-order terms include two independent invariants, $\left(m_x^2 + m_y^2\right)^2$ and $m_x^2 m_y^2$ (the x and y axes being taken along the two twofold axes in the basal plane). The second of these leads to anisotropy in the basal plane.

In a hexagonal crystal, the anisotropy energy contains only one fourth-order term. proportional to $(m_x{}^2 + m_y{}^2)^2$; in this approximation.

$$U_{\text{aniso}} = K_1 \sin^2\theta + K_2 \sin^4\theta \tag{40.3}$$

the coefficient K in (40.2) being here denoted by K_1. The anisotropy in the basal plane, however, occurs only in the sixth-order terms; the anisotropic invariant of this order is

$$\frac{1}{2}\left[(m_x + im_y)^6 + (m_x - im_y)^6\right] = \sin^4\theta \cos 6\phi \tag{40.4}$$

the x-axis being taken along one of the twofold axes in the basal plane, from which the azimuthal angle ϕ is measured.
Lastly, rhombohedral symmetry allows two fourth-order terms, with the invariants

$$\left(m_x^2 + m_y^2\right)^2 = \sin^4\theta \tag{40.5}$$

$$\frac{1}{2} m_z \left[(m_x + im_y)^3 + (m_x - im_y)^3\right] = \cos\theta \sin^3\theta \cos 3\phi \tag{40.6}$$

the y-axis being along one of the twofold axes, and ϕ being measured from the x-axis. The presence of the factor m_z in the second invariant means that the direction of easy magnetization is at a small angle to the basal plane; since m_z is small, the determination of this angle would require the simultaneous inclusion of both fourth-order and sixth-order terms, one of the latter being the term with the invariant (40.4).
Let us now consider ferromagnetic crystals of the cubic system. Their properties differ considerably from those of uniaxial (and biaxial) crystals. This is because the only quadratic combination which is invariant under the cubic symmetry transformations and Which can be formed from the components of the vector m is $m^2 = 1$. The first nonvanishing term in the expansion of the anisotropy energy for a cubic crystal is therefore of the fourth, not the second, order. For this reason, the magnetic anisotropy effects in cubic crystals are in general weaker than in uniaxial and biaxial crystals.
Cubic symmetry allows only one independent fourth-order invariant which depends on the direction of $\mathbf{m}$. The anisotropy energy of a cubic ferromagnet can therefore be expressed as

$$U_{\text{aniso}} = K\left(m_x^2 m_y^2 + m_x^2 m_z^2 + m_y^2 m_z^2\right) \tag{40.7}$$

or

$$U_{\text{aniso}} = -\frac{1}{2} K\left(m_x^4 + m_y^4 + m_z^4\right);$$

these two expressions are evidently equivalent, since their difference is $\frac{1}{2}K$, which is independent of direction.

[0†] An example of a uniaxial ferromagnet is hexagonal cobalt, in which K changes sign, being positive below -530 K and negative above this temperature. The value extrapolated to 0^-K is $\approx 0.8 \times 10^7 \text{erg/cm}^3$. The value of NT_c is $\sim 2 \times 10^{10} \text{erg/cm}^3$.

If $K > 0$, as for example in iron, the anisotropy energy has equal minimum values for three positions of the vector m, namely parallel to the edges of the cube (the x, y, z axes, with crystallographic directions [100], [010], [001]). In this case, therefore, the crystal has three equivalent axes of easy magnetization.

If, on the other hand, $K < 0$, as for example in nickel, then the anisotropy energy is least when ${m_x}^2 = {m_y}^2 = {m_z}^2 = \frac{1}{3}$, i.e. when $\mathbf{m}$ is parallel to any of the four spatial diagonals of the cube, with crystallographic directions [111], [111], etc. These are then the directions of easy magnetization †

The next approximation after (40.7) for the anisotropy energy of a cubic crystal corresponds to the sixth-order terms. Omitting from these the direction-independent invariant $(\mathbf{m^2})^3$ and an expression which differs from (40.7) only by the factor $\mathbf{m^2}$, we are left with just one invariant, which may be taken as ${m_x}^2{m_y}^2{m_z}^2$. Then

$$U_{\text{aniso}} = K_1\left(m_x^2m_y^2 + m_x^2m_z^2 + m_y^2m_z^2\right) + K_2m_x^2m_y^2m_z^2. \tag{40.8}$$

It should be noted that, strictly speaking, a ferromagnetic cubic crystal. when spontaneously magnetized along one of the directions of easy magnetization, ceases to possess cubic symmetry, and so there is a displacement of the atoms, i.e. a distortion of the crystal lattice. Such a crystal, when magnetized parallel to an edge of the cube, becomes slightly tetragonal, while one magnetized parallel to a spatial diagonal becomes rhombohedral. In this respect cubic crystals differ from uniaxial crystals with the direction of easy magnetization along the principal axis of symmetry, where a magnetization in this direction evidently does not change the symmetry of the crystal.

We must again emphasize that the above expansion of the anisotropy energy of a ferromagnet in powers of the components of the unit vector m is not one in powers of the magnetization M itself (which is not small far from the Curie point); the series converges only because the relativistic interactions are weak. Near the Curie point, however, where M is small, it does become an expansion in powers of $\mathbf{M}$. In the Landau theory, this would imply that the ratio K/M^2 in a uniaxial crystal, with K from (40,2), must tend to a non-zero limit as $T \to T_c$. To illustrate this statement, let us consider, for example, the transition from a paramagnetic phase to a ferromagnetic phase of the easy-axis type. According to (39.3) and (40.2), the quadratic terms in the expansion of the thermodynamic potential in powers of the components of M are $A{M_z}^2 + (A + K, M^2)\,({M_x}^2 + {M_y}^2)$. The transition point [15] given by the vanishing of the coefficient of ${M_z}^2$; the coefficient of ${M_x}^2 + {M_y}^2$ does not become zero.

Similarly, in a cubic ferromagnet the ratio K/M^4, with K from (40.7), must tend to a non zero limit.

In the fluctuation range, however, this behaviour of the anisotropy coefficients does not in general occur.

9.1.5 §41. The magnetization curve of ferromagnets

Let us examine the relation between the magnetization of a uniaxial ferromagnet and the magnetic field in it, taking the particular case of an easy-axis material. The anisotropy energy may here be conveniently written in the form

$$U_{\text{aniso}} = \frac{1}{2}\beta M^2\sin^2\theta, \tag{41,1}$$

with the dimensionless coefficient $\beta > 0$ (and $K = \frac{1}{2}\beta M^2$). †
It should be recalled that we suppose the magnitude of $\mathbf{M}$ to be independent of $\mathbf{H}$, so that only rotations of $\mathbf{M}$ are considered. ‡ It is evident from symmetry that the vector $\mathbf{M}$ lies in a plane through the z-axis and the direction of $\mathbf{H}$ (if terms of higher order, anisotropic in the xy-plane,

are neglected in the anisotropy energy). We take this as the xz-plane. The thermodynamic potential, including the anisotropy energy, is§

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi} &= \Phi_0(M) + \frac{1}{2}\beta M_x^2 - \mathbf{M}\cdot\mathbf{H} - H^2/8\pi \\ &= \Phi_0(M) + \frac{1}{2}\beta M^2 \sin^2\theta - M\left(H_x \sin\theta + H_z\cos\theta\right) - H^2/8\pi \end{aligned} \tag{41.2}$$

The dependence of $\mathbf{M}$ on $\mathbf{H}$ is given by the equilibrium condition $\partial\widetilde{\Phi}/\partial\theta = 0$, whence

$$\beta M \sin\theta\cos\theta = H_x\cos\theta - H_z\sin\theta \tag{41.3}$$

This is an algebraic equation of the fourth degree for $\xi = \sin\theta$:

$$(\beta M\xi - H_x)^2\left(1-\xi^2\right) = H_z^2\xi^2$$

in which the coefficients of odd powers of ξ are not zero. This equation has either two or four real roots (all less than unity). Since all such roots correspond to extrema of $\widetilde{\Phi}(\theta)$, it is clear that, in the first case, this function has one minimum and one maximum and, in the second case, two minima and two maxima. In other words, the number of possible directions of the magnetization $\mathbf{M}$ for a given field $\mathbf{H}$ is one and two respectively. In the second case, one direction (corresponding to the lower minimum of $\widetilde{\Phi}$) is thermodynamically completely stable, while the other (corresponding to the higher minimum) is thermodynamically metastable.
Either of the two cases can occur, depending on the values of H_x and H_z. When these two parameters vary continuously, one case passes into the other at the point where one maximum and one minimum coalesce. The curve of $\tilde{\Phi}(\theta)$ then has a point of inflection instead of an extremum, i.e. both $\partial\widetilde{\Phi}/\partial\theta$ and $\partial^2\widetilde{\Phi}/\partial\theta^2$ are zero. Writing equation (41.3) in the form

$$\frac{H_x}{\sin\theta} - \frac{H_z}{\cos\theta} = \beta M$$

and differentiating with respect to θ, we have $H_x/\sin^3\theta = -H_z/\cos^3\theta$. Eliminating θ from these two equations gives

$$H_x^{2/3} + H_z^{2/3} = (\beta M)^{2/3}. \tag{41.4}$$

In the H_xH_z-plane equation (41,4) represents a closed astroid curve of the kind shown in Fig. 21. It divides the plane into two parts, in one of which metastable states can exist, while in the other they cannot. It is evident without further investigation that the region where metastable states do not exist is that outside the curve, because for $H\to\infty$ only one direction of $\mathbf{M}$ can be stable, namely that of the field $\mathbf{H}$.

[0†] The analysis given below is based on the expression (41.1) for the anisotropy energy. It should be mentioned, however. that the expansion of which (41.1) is the first term is usually not rapidly convergent in practice. For a satisfactory quantitative description of the phenomena, it is therefore necessary to include also the term of the lext (fourth) order.

‡ In addition to the rotation of M considered here, another process can occur in ferrites in very strong fields. Where the antiparallel magnetic moments rotate towards each other and become parallel. This is found, however, only in "exchange" fields $H \sim T_c/\mu$; for instance, in the ferrite FeO_2Fe_3 ($T_c \sim 580°K, \mu \sim \mu_B$), these fields are $H \approx 10^7$Oe.

§ By including U_{aniso} in the thermodynamic potential Φ, we imply that the anisotropy constants are defined for given elastic stresses.

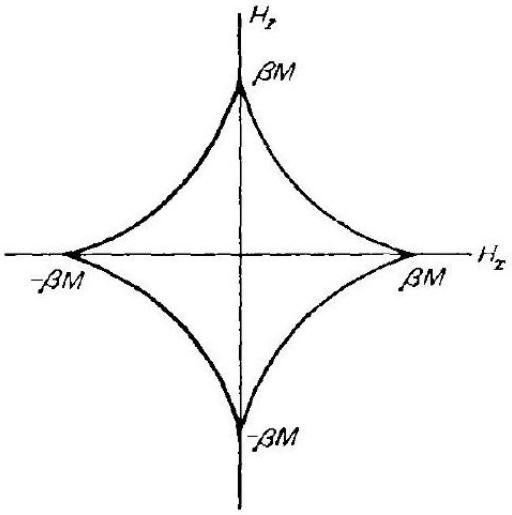


Fig. 21

The existence of metastable states means that what is called hysteresis can occur; this is an irreversible change of magnetization on passing through these states when the external magnetic field is varied. The curve shown in Fig. 21 is therefore the absolute limit of hysteresis; this phenomenon cannot occur for fields outside the curve. †

States in which the field **H** is perpendicular to the direction of easy magnetization ($H_x = H, H_z = 0$) require special consideration. The thermodynamic potential is

$$\widetilde{\Phi} = \Phi_0 - \frac{H^2}{8\pi} + \frac{1}{2}\beta M^2 \sin^2\theta - HM\sin\theta. \tag{41.5}$$

If $H > \beta M, \widetilde{\Phi}$ has only one minimum, at $\theta = \frac{1}{2}\pi$, i.e. the magnetization is parallel to the field. If. however, $H < \beta M$, then $\widetilde{\Phi}$ has a minimum when

$$M_x = M\sin\theta = H/\beta, \tag{41.6}$$

to which there correspond two possible positions of the vector **M** (at angles θ and $\pi - \theta$. symmetrical about the x-axis. Thus in this case there are two equilibrium states, which have the same value of $\widetilde{\Phi}$ and are therefore equally stable.

This result is very important, since it means that two phases can exist in contact in which the field **H** is the same but the magnetization **M** (and therefore the induction **B**) is different Thus a new possibility appears for reducing the total thermodynamic potential of the bodr its volume may be divided into separate regions, in each of which the magnetization ha* one of its two possible directions. These regions are called regions of spontaneous

magnetization or domains. The actual determination of the thermodynamic equilibrium structure of a ferromagnet requires a consideration of the shape and size of the body as a whole. We shall return to this problem in §44.

Let us consider a portion of the body which is small compared with the total volume but large compared with the domains. The field H_x can be regarded as constant in this portion; we denote by **M** and **B** the values of **M** and **B** averaged over its volume. As well as H_x, the transverse component $M_x = H_x/\beta$ of the magnetization is constant. The longitudinal

[0]† The whole of the discussion in this chapter concerns only thermodynamic equilibrium states in ferromagne [e^a] and therefore reversible processes in them. In particular, we entirely ignore the mechanism of hysterel phenomena; these may arise from defects in the crystal, internal stresses, a polycrystalline state, and so on-

component M_z, however, has opposite signs in different domains, so that its mean value certainly cannot exceed $|M_z|$. Since $H_z = 0$ everywhere, the mean induction is therefore

$$\bar{B}_x = H_x\left(1+\frac{4\pi}{\beta}\right), \quad \bar{B}_z < 4\pi\sqrt{\left(M^2 - \frac{H_x^2}{\beta^2}\right)}. \tag{41.7}$$

These formulae give the range of values of the mean induction corresponding to the domain structure of a uniaxial ferromagnet.

The relation between $\mathbf{M}$ and $\mathbf{H}$ for a cubic crystal can in principle be investigated in the same way as was done above for a uniaxial crystal. However, we shall not pause to discuss this, because the equations are more complex, and explicit analytical formulae cannot be obtained.

PROBLEMS

Problem 1. A uniaxial ferromagnetic crystal is in the shape of a spheroid, the axis of easy magnetization being the axis of revolution, and is placed in an external magnetic field $\mathfrak{I}$. Determine the range of values of $\mathfrak{g}$ for which the body has a domain structure.

Solution. According to the general properties of an ellipsoid in a uniform external field (§8), the induction $\overline{\mathbf{B}}$ and field $\overline{\mathbf{H}}(=\mathbf{H})$ averaged over the domain structure are related to $\mathfrak{D}$ by

$$n\bar{B}_z + (1-n)H_z = \mathfrak{S}_z, \quad \frac{1}{2}(1-n)\bar{B}_x + \frac{1}{2}(1+n)H_x = \mathfrak{S}_x,$$

where n is the demagnetizing factor in the direction of the axis of revolution (taken as the z-axis). Putting $H_z = 0$ and using formulae (41.7), we obtain

$$H_x = \frac{\mathfrak{S}_x}{1+2\pi(1-n)/\beta}, \quad \bar{B}_z = \frac{\mathfrak{S}_z}{n} < 4\pi\sqrt{\left(M^2 - \frac{{H_x}^2}{\beta^2}\right)}.$$

Elimination of H_x gives the required inequality

$$\frac{\mathfrak{S}_z^2}{(4\pi n)^2} + \frac{\mathfrak{S}_x^2}{[\beta+2\pi(1-n)]^2} < M^2$$

for the range in which there is a domain structure.

Problem 2. Determine the magnetization averaged over the crystallites (which have uniaxial symmetry) for

[a] polycrystalline body in a strong magnetic field ($H \gg 4\pi M$).

Solution. In a particular crystallite, let θ and ψ be the angles between the direction of easy magnetization and, respectively, $\mathbf{M}$ and $\mathbf{H}$. It is evident that, in a strong field, $\mathbf{M}$ and $\mathbf{H}$ will be in almost the same direction. i.e the angle $\vartheta \equiv \theta - \psi$ is small. Putting in (41.2) $\mathbf{M}\cdot\mathbf{H} = MH\cos(\theta-\psi)$ and equating to zero the derivative $\partial\Phi/\partial\theta$, we have $\vartheta \cong \sin\vartheta = -(\beta M/H)\sin\theta\cos\theta$. The average magnetization is clearly parallel to $\mathbf{H}$, and is

$$\bar{M} = M\overline{\cos\vartheta} = M\left(1 - \overline{\frac{1}{2}\vartheta^2}\right) = M\left(1 - \frac{\beta^2M^2}{2H^2}\overline{\sin^2\theta\cos^2\theta}\right)$$

The bar denotes averaging over the crystallites. Assuming that all directions of the axis of easy magnetization of the crystallites are equally probable, we have

$$\bar{M} = M\left(1 - \frac{\beta^2M^2}{15H^2}\right)$$

Thus the mean magnetization approaches saturation in the manner $\bar{M} - M \propto 1/H^2$.

Problem 3. The same as Problem 2, but for the case where the crystallites have cubic symmetry.

SOLUTION. The conditions for a minimum of the expression

$$-\frac{1}{4}\beta\left(M_x^4+M_y^4+M_z^4\right)-(H_xM_x+H_yM_y+H_zM_z)$$

with $K=\frac{1}{2}\beta M^2$ in (40.7) and the subsidiary condition ${M_x}^2+{M_y}^2+{M_z}^2=$ constant, are

$$\beta M_x^3+H_x=\lambda M_x,\beta M_y^3+H_y=\lambda M_y,\beta M_z^3+H_z=\lambda M_z,$$

where λ is an undetermined Lagrange multiplier. For large H, we therefore have

$$M_x\cong\frac{1}{\lambda}H_x+\frac{1}{\lambda^4}\beta H_x^3+\ldots \text{ etc.}$$

adding the squares of the three equations, we obtain $M^2\cong H^2/\lambda^2$, i.e. $\lambda\cong H/M$. The angle ϑ between $\mathbf{M}$ and $\mathbf{H}$ is found from

$$\begin{aligned}\vartheta^2\cong\sin^2\vartheta&=\frac{(\mathrm{M}\times\mathrm{H})^2}{M^2H^2}\\&=\frac{\beta^2M^6}{H^{10}}\sum H_x^2H_y^2\left(H_x^2-H_y^2\right)^2\end{aligned}$$

where the summation is over cyclic permutations of the suffixes x,y,z. Averaging this expression over the orientations of the crystallites is equivalent to averaging over directions of the vector $\mathbf{H}$. The latter averaging is effected by integrating over the angles which specify the direction of $\mathbf{H}$, and the result is

$$\bar{M}=M\left(1-\overline{\frac{1}{2}\vartheta^2}\right)=M\left(1-\frac{2\beta^2M^6}{105H^2}\right)$$

9.1.6 §42. Magnetostriction of ferromagnets

A change in the magnetization of a ferromagnet in a magnetic field causes a deformation in it; this phenomenon is called magnetostriction, and may be due to either exchange interactions or relativistic interactions in the body. Since the exchange energy depends only on the magnitude M of the magnetization, its value can change only when M changes in the magnetic field. Although the latter change is, in general, very small, the exchange energy is large compared with the anisotropy energy. Hence the magnetostriction effects from each type of interaction may be of comparable magnitude.

This happens. for instance, in uniaxial crystals. Marked deformations resulting from a change in the direction of M occur in fields $H\sim\beta M$; the change in the magnitude M is considerable when $H\sim 4\pi M$. If these two values of H are almost the same, it is in general necessary to take account of both effects in discussing the magnetostriction of uniaxial ferromagnets. We shall not pause here to derive the formulae, which are fairly complex.

In cubic crystals the situation is different, because the anisotropy energy is of the fourth order and therefore relatively small. A considerable magnetostriction, due to the change in the direction of $\mathbf{M}$, occurs even in comparatively weak fields, where the change in the magnitude M may be entirely neglected. Let us consider these effects.

The change in the relativistic interaction energy in the deformed body is described by the inclusion in the thermodynamic potential $\widetilde{\Phi}$ of magnetoelastic terms depending on the components of the elastic stress tensor σ_{ik} and the direction of the vector $\mathbf{M}$ (N. S. Akulov. 1928). The first such terms which do not vanish are linear in σ_{ik}, and quadratic in the direction

cosines of M because of the symmetry with respect to time reversal. In general, therefore, the magnetoelastic energy is given by an expression of the form

$$U_{\mathrm{m-el}} = -a_{iklm}\sigma_{ik}m_l m_m \tag{42.1}$$

where a_{iklm} is a dimensionless tensor of rank four, symmetrical with respect to the pairs of suffixes i,k and l,m (but not with respect to interchange of the two pairs). Near the Curie point, where the expansion in powers of the direction cosines of the vector M is equivalent to one in powers of its components, the quantities a_{iklm}/M^2 tend to constants.

In calculating the number of independent components of the tensor a_{iklm} it must be borne in mind that the terms in (42.1) which involve the components of $\mathbf{m}$ in the form $m_x^2+m_y^2+m_z^2$ are independent of the direction of $\mathbf{m}$, and so may be omitted from the magnetoelastic energy. † Thus we find that, in a cubic crystal, the magnetoelastic energy contains two independent coefficients; we shall write it as

$$\begin{aligned} U_{\mathrm{m-el}} = &-a_1\left(\sigma_{xx}m_x^2+\sigma_{yy}m_y^2+\sigma_{zz}m_z^2\right)\\ &-2a_2\left(\sigma_{xy}m_xm_y+\sigma_{xz}m_xm_z+\sigma_{yz}m_ym_z\right) \end{aligned} \tag{42.2}$$

The strain tensor is obtained by differentiating Φ with respect to the various components σ_{ik} : $u_{ik} = -\partial\Phi/\partial\sigma_{ik}$, where Φ includes also the ordinary elastic energy (with reversed sign; see the first footnote to §17). For a cubic crystal, the latter energy involves three independent elastic coefficients, and can be put in the form

$$\begin{aligned} U_{\mathrm{el}} =&\frac{1}{2}\mu_1\left({\sigma_{xx}}^2+{\sigma_{yy}}^2+{\sigma_{zz}}^2\right)+\frac{1}{2}\mu_2\left(\sigma_{xx}+\sigma_{yy}+\sigma_{zz}\right)^2\\ &+\mu_3\left({\sigma_{xy}}^2+{\sigma_{xz}}^2+{\sigma_{yz}}^2\right), \end{aligned} \tag{42.3}$$

where μ_1,μ_2 and μ_3 are positive. The strain tensor is ‡

$$\left.\begin{aligned} u_{xx} &= (\mu_1+\mu_2)\,\sigma_{xx}+\mu_2\left(\sigma_{yy}+\sigma_{zz}\right)+a_1m_x^2\\ u_{xy} &= \mu_3\sigma_{xy}+a_2m_xm_y \end{aligned}\right\} \tag{42.4}$$

and similarly for the other components.

These formulae give all the magnetostriction effects in the range of fields considered. In particular, if there are no internal stresses the change in the deformation resulting from a change in the direction of magnetization is given by

$$u_{xx} = a_1m_x^2, \quad u_{xy} = a_2m_xm_y, \text{ etc.} \tag{42.5}$$

It should be recalled that the magnitude of the deformation itself is to some extent arbitrary, because the direction of $\mathbf{m}$ for which the deformation is supposed zero is arbitrarily chosen.

The stress tensor found by solving a specific problem (e.g. for a clamped crystal) is in Order of magnitude $\sigma\sim a/\mu$, where a and μ are the orders of magnitude of the coefficients a_{ikl_m} and the elastic coefficients respectively. In this sense, the magnetoelastic energy (per Unit volume, as usual) is of the order of a^2/μ. The coefficients a are of the first order in the relativistic spin-spin interaction, and the magnetoelastic energy is therefore of the second order. In a uniaxial crystal, the anisotropy energy is of the first order in the relativistic interaction, and is therefore usually much larger than the magnetoelastic energy. In cubic tystals, the anisotropy energy is of the second order in this interaction, and is therefore in

[0]† There is consequently some arbitrariness in the choice of the a_{iklm}, which simply reflects the arbitrariness [1]· olved in choosing the direction of m for which (applied mechanical forces being absent) we regard the crystal as ideformed.

‡ In differentiating Φ the third footnote to §17 should be recalled.

general comparable with the magnetoelastic energy. † It may therefore be necessary to take into account simultaneously both forms of energy (for instance, in considering the magnetization curve), which greatly complicates the problem.

Let us now consider magnetostriction in fields so strong ($H \gg 4\pi M$) that the anisotropy energy is unimportant and there is no domain structure, so that the directions of **M** and **H** may be assumed to coincide.

Since the anisotropy energy is neglected, the particular symmetry of the crystal is of no importance, and the formulae given below are valid for any ferromagnet.

Let the body be placed in a uniform external magnetic field $\mathfrak{g}$. Its total thermodynamic potential $\bar{g}$ is ‡

$$\tilde{\mathfrak{g}} = -\mathscr{M} \cdot \mathfrak{S} = -MV\mathfrak{S}, \tag{42.6}$$

where $\mathscr{M} = MV$ is the total magnetic moment of a body uniformly magnetized in the direction of the field; we omit the term $\hat{}_0$ which is unrelated to the magnetic field. The strain tensor averaged over the volume of the body is $\bar{u}_{ik} = -(1/V)\partial\tilde{\mathcal{M}}/\partial\sigma_{ik}$. whence

$$\bar{u}_{ik} = \frac{\mathfrak{H}}{V}\frac{\partial(MV)}{\partial\sigma_{ik}}. \tag{42.7}$$

Thus the deformation is determined by the dependence of the magnetization on the internal stresses.

For cubic symmetry, any symmetrical tensor of rank two characterizing the properties of the crystal reduces to a scalar multiple of δ_{ik}. This is true, in particular, of the tensor $\partial(MV)/\partial\sigma_{ik}$, so that the magnetostriction deformation amounts in this case to a uniform compression or extension.

If we are interested only in the change δV in the total volume of the body, we can obtain it by simply differentiating $\hat{g}$ with respect to the pressure:

$$\delta V = \partial\tilde{\rho}/\partial P = -\mathfrak{H}\lambda(MV)/\partial P, \tag{42.8}$$

where P is to be regarded as a uniform pressure applied to the suface of the body.

PROBLEMS

Problem 1. Find the relative extension of a ferromagnetic cubic crystal as a function of the direction of the magnetization m and the direction of measurement n.

Solution. The relative extension in the direction of the unit vector **n** is given in terms of the strain tensorby $\delta l/l = u_{ik}n_in_k$. Substituting u_{ik} (in the absence of internal stresses) from (42.5), we have

$$\delta l/l = a_1\left(m_x^2n_x^2 + m_y^2n_y^2 + m_z^2n_z^2\right) + a_2\left(m_xm_yn_xn_y + m_xm_zn_xn_z + m_ym_zn_yn_z\right)$$

Only the difference in the values of this quantity for different directions m and n has absolute significance. For instance, if m is along the x-axis, the difference in the values of $\delta l_l l$ along the x and y axes is a_1. If m is along one of the spatial diagonals, the difference in the values of $\delta l/l$ in that direction and along the other three spatial diagonals is $4a_2/9$.

Problem 2. Determine the change in volume in magnetostriction of a ferromagnetic ellipsoid in an external field $\mathfrak{S} \sim 4\pi M$ parallel to one of its axes. The ferromagnet is assumed to be a cubic crystal.§

[0]† In cubic crystals too, however, the magnetoelastic energy may be much smaller than the anisotropy energy In iron at room temperature, for example. the ratio is $\sim 10^{-2}$.

‡ Here the definition of $\overline{\mathcal{O}}$ is that given in §12, which is applicable except when the deformation of the bodyis

SOLUTION. When the anisotropy energy is neglected, the range for which the domain structure exists is given by $\bar{B} < 4\pi M$ when $H = 0$. The bar denotes averaging over the volume of the body; cf. §41. In an ellipsoid $n\bar{B} + (1-n)\bar{H} = \mathfrak{g}$; putting $H = 0$, we find that the domain structure exists when $\mathfrak{G} < 4\pi n M$. Since $n\bar{B} = 4\pi n M = \mathfrak{W}$, the mean magnetization is $\bar{M} = \mathfrak{g}/4\pi n$. Hence the thermodynamic potential is

$$\tilde{\mathcal{G}}^0 = -V \int_0^{\mathfrak{G}} \bar{M}\, \mathrm{d}\mathfrak{G} = -\mathfrak{G}^2 V/8\pi n. \tag{1}$$

If $\mathfrak{W} > 4\pi n M$, the ellipsoid is magnetized entirely in the direction of the field, and $\bar{M} = M$. Then

$$\overline{\mathfrak{g}} = -M\mathfrak{G}V + 2\pi M^2 V n. \tag{2}$$

The expressions (1) and (2) are the same for $\mathfrak{G} = 4\pi M n$.
The required change in volume is obtained by differentiating $\tilde{g}$ owith respect to pressure:

$$\delta V = -\frac{\mathfrak{G}^2}{8\pi n}\frac{\partial V}{\partial P} \text{ for } \mathfrak{H} < 4\pi n M,$$
$$\delta V = -\mathfrak{y}\frac{\partial (MV)}{\partial P} + 2\pi n \frac{\partial\,(M^2 V)}{\partial P} \text{ for } \mathfrak{g} > 4\pi n M.$$

For $\mathfrak{h} \gg 4\pi n M$ we obtain (42.8).

9.1.7 §43. Surface tension of a domain wall

As already mentioned in §41, there exists a wide range of states in which a ferromagnet must have a domain structure, i.e. must consist of regions with different directions of magnetization. This is true, in particular, of a ferromagnet which is not in an external magnetic field.
Thermodynamically, adjacent domains are different phases of a ferromagnet, with different directions of their spontaneous magnetization. Let us consider, first of all, the properties of the phase boundaries (domain walls) as such, and calculate their surface tension (L. D. Landau and E. M. Lifshitz, 1935).
The phase boundaries are in reality fairly narrow transition layers in which the direction of the magnetization varies continuously between its directions in the two adjoining domains. The "width" of such a layer and the manner in which $\mathbf{M}$ varies within it are given by the conditions of thermodynamic equilibrium. The additional energy due to the nonuniformity of the magnetization must be taken into account. The largest contribution to this non-uniformity energy is given by the exchange interaction. Macroscopically, this energy can be expressed in terms of the derivatives of M with respect to the coordinates. This can be done in a general form if the gradient of the direction of $\mathbf{M}$ is supposed relatively small, i.e. if the change in the direction of the magnetic moments occurs over distances large compared with the interatomic distances. In the present case, this condition is evidently fulfilled, because a considerable difference in the directions of the magnetic moments of adjoining atoms would lead to a very large increase in the exchange energy, and is therefore thermodynamically unfavourable.
We denote the non-uniformity energy density by $U_{\text{non-u}}$. There can be no terms of the form $a_{ik}(M)\partial M_i/\partial x_k$ linear in the first derivatives, because of the requirement of symmetry under time reversal, which changes the sign of M but leaves the energy unchanged. The crystal symmetry might allow the existence of terms containing products of the derivatives $\partial M_i/\partial x_k$

appreciably inhomogeneous.
§ In a uniaxial ferromagnet with $\mathfrak{G} \sim 4\pi M$ the anisotropy energy would have to be taken into account, but this is not necessary in a cubic crystal.

with the components of **M** itself. We are interested here in the non-uniformity exchange energy; the corresponding terms in $U_{\text{non-u}}$ must be invariant when the vectors **M** are simultaneously rotated by the same amount throughout all space (with no change in the coordinates used). † The terms involving such products can then only have the form

$$a_i(M)M_l\partial M_l/\partial x_i = \frac{1}{2}\mathrm{a}(M)\cdot\operatorname{grad} M^2.$$

Such terms cannot, however, actually represent the non-uniformity energy, even if the magnitude as well as the direction of M is assumed to change within the crystal. The reason is that not $U_{\text{non-u}}$ itself but only its integral over the volume of the body has a real thermodynamic significance, and such an integration would reduce terms of the above form to expressions depending only on the values of the magnetization on the surface of the body, not on its variation within the body. ‡

For the same reason, we need not include in $U_{\text{non-u}}$, among the terms of the next order of smallness, those linear in the second derivatives of M with respect to the coordinates, since on integration over the volume of the body they become expressions quadratic in the first derivatives. The quadratic expressions are the principal non-vanishing terms in the expansion of the non-uniformity exchange energy.

The most general form of these terms is

$$U_{non-u} = \frac{1}{2}\alpha_{ik}\left(\partial M_l/\partial x_i\right)\left(\partial M_l/\partial x_k\right) \tag{43.1}$$

where α_{ik} is a symmetrical tensor. For the ferromagnetic order to be stable, this expression must be positive definite, i.e. the principal values of the tensor α_{ik} must be positive. In a cubic crystal, this tensor reduces to a scalar ($\alpha_{ik} = \alpha\delta_{ik}, \alpha > 0$), so that §

$$U_{\text{non-u}} = \frac{1}{2}\alpha\left(\partial\mathbf{M}/\partial x_i\right)\cdot\left(\partial\mathbf{M}/\partial x_i\right). \tag{43.2}$$

In a uniaxial crystal, α_{ik} has two independent components, and the non-uniformity energy is of the form

$$U_{\text{non-u}} = \frac{1}{2}\alpha_1\left[(\partial\mathbf{M}/\partial x)^2 + (\partial\mathbf{M}/\partial y)^2\right] + \frac{1}{2}\alpha_2(\partial\mathbf{M}/\partial z)^2 \tag{43.3}$$

It must be emphasized that, far from the Curie point, the expressions (43.1)-(43.3) are to be regarded as the first terms in an expansion in powers of the derivatives of the unit vector $\mathbf{m} = \mathbf{M}/M$, not of the magnetization **M** itself. Only near the Curie point do they become an expansion in powers of the derivatives of **M**. Accordingly, in the Landau theory the coefficients α_{ik} in these expressions should tend, as $T \to T_c$, to non-zero limits. (See §47 regarding the role of fluctuations here.)

As an example, let us consider the boundary between phases in a uniaxial crystal of the easy-axis type, assuming that the vector M is parallel (or antiparallel) to the direction of easy magnetization (the z-axis).

The structure of the transition layer is determined by the condition that the total free energy of the layer be a minimum.|| Here the exchange energy tends to increase the width of

[0]† This means that the scalar expression $U_{\text{non-u}}$ must be so constructed that the magnetic and coordinate vector suffixes are each interchanged among themselves but not with each other.

‡ The symmetry of the crystal may, however, allow the existence of terms having the form $a_{ikl}M_i\partial M_k/\partial x_1$ and not of an exchange nature. This would alter the nature of the ferromagnetic order in the crystal; see §52.

§ In order of magnitude (in iron, for example), $\alpha \sim 10^{-12}$ cm.

|| When the magnetostriction is neglected, there is no need to distinguish the free energy $\mathscr{F}$ from the thermodynamic potential $\bar{g}$. If. however, we intend to take account of the elastic and magnetoelastic energies of the

the layer (i.e. to make the direction of **M** vary less rapidly). The anisotropy energy has the opposite effect, because any deviation of **M** from the direction of easy magnetization increases this energy.

We take the x-axis perpendicular to the plane of the layer; the direction of M depends only on x. The rotation of the vector M across the layer must take place in the yz-plane, i.e. $M_x = 0$ everywhere. This is seen as follows. The non-uniformity and anisotropy energies in a uniaxial crystal are independent of the plane in which the rotation of the magnetization takes place. The presence of a non-zero component M_x would necessarily result in a magnetic field which was thermodynamically unfavourable, because of the additional magnetic energy. For it follows from the equation $\operatorname{div}\mathbf{B} = \mathrm{d}B_x/\mathrm{d}x = 0$ that $B_x =$ constant throughout the transition layer, and, since $M_x = 0$ and $H_x = 0$ within the domains, we find that $B_x = 0$ everywhere. Hence, together with the component $M_x \neq 0$, a field $H_x = -4\pi M_x$ must occur. Correspondingly, the free energy $\tilde{F}$ contains a term † $-M_xH_x - H_x^2/8\pi = H_x^2/8\pi > 0$.
Let θ be the angle between **M** and the z-axis. Then the components of **M** are $M_x = 0$, $M_y = M\sin\theta$, $M_z = M\cos\theta$. The sum of the non-uniformity energy (43.3) and the anisotropy energy (41.1) is the integral

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{2}\alpha_1\left(M_y'^2 + M_z'^2\right) + \frac{1}{2}\beta M_y^2\right]\mathrm{d}x = \frac{1}{2}M^2\int_{-\infty}^{\infty}\left(\alpha_1\theta'^2 + \beta\sin^2\theta\right)\mathrm{d}x \tag{43.4}$$

where the prime denotes differentiation with respect to x. The remaining terms in the free energy are independent of the structure of the layer, and so can be omitted here.

To determine the function $\theta(x)$ which makes this integral a minimum, we write down the corresponding Euler's equation $\alpha_1\theta'' - \beta\sin\theta\cos\theta = 0$. Assuming the width of the transition layer small compared with that of the domains themselves, we can write the boundary conditions on this equation as

$$\theta(+\infty) = 0, \quad \theta(-\infty) = \pi, \quad \theta'(\pm\infty) = 0. \tag{43.5}$$

These state that adjoining domains are magnetized in opposite directions. The first integral of Euler's equation which satisfies these conditions is ‡

$$\theta'^2 - (\beta/\alpha_1)\sin^2\theta = 0 \tag{43.6}$$

A second integration gives

$$\cos\theta = \tanh\left[x\sqrt{(\beta/\alpha_1)}\right] \tag{43.7}$$

which describes the manner of variation of the magnetization in the transition layer. The width of this layer is $\delta \sim \sqrt{(\alpha_1/\beta)}$.

With (43.6), the integral (43.4) becomes

non-uniform deformation (as may sometimes be necessary; see Problem 2), the total free energy must be used. Here it should be remembered that the equilibrium equations of the medium are found by varying its total free energy with respect to the components of the displacement vector **u**; cf. the derivation for a fluid at the end of §15, the equilibrium equation $\mathbf{f} = 0$ being obtained by equating to zero the variation $\delta\mathscr{F}$.

[0]† More precisely, we should use here the thermodynamic potential $\mathscr{F}'$; cf. the end of §44. For a given value of $B_n = B_x$, this potential must have a minimum with respect to M_x or H_x. When $B_x = 0$, however, $\hat{F}$ and F' are the same.

‡ This expression can, of course, be written down directly (without using Euler's equation) if we notice that the integral in (43.4) has the form of the action integral for a one-dimensional motion of a particle in a field whose Dotential energy is $-\beta\sin^2\theta$, with θ acting as the coordinate and x as the time. Then (43.6) expresses the [c] onservation of energy for the particle.

$$M^2\alpha_1\int_{-\infty}^{\infty}\theta'^2\,\mathrm{d}x = M^2\sqrt{(\alpha_1\beta)}\int_0^{\pi}\sin\theta\mathrm{d}\theta$$
$$= 2M^2\sqrt{(\alpha_1\beta)}$$

If the boundary between domains is regarded as a geometrical surface, this quantity is the surface tension which must be ascribed to the boundary in order to take account of the energy needed to create it. The surface tension of a domain wall may be denoted by $M^2\Delta$, where Δ has the dimensions of length. Then

$$\Delta = 2\sqrt{(\alpha_1\beta)}\,. \tag{43.8}$$

PROBLEMS

Problem 1. Determine the surface tension of a domain wall in a cubic ferromagnet with the directions of easy magnetization parallel to the cube edges (the x, y, z axes). The domains are magnetized parallel and antiparallel to the z-axis, and the domain wall is (a) parallel to the (100) plane, (b) parallel to the (110) plane (E. M. Lifshitz, 1944; L. Nel, 1944).

Solution. (a) The domain wall is parallel to the yz-plane, all quantities in it depend only on the coordinate x, and the rotation of the vector M takes place in the yz-plane (as well as the argument in the text of §43 for uniaxial crystals, note that a departure of **M** from the yz-plane in this case would increase the a nisotropy energy). Neglecting the magnetostriction energy, and using formula (43.2) for the non-uniformity energy and (40.7) for the anisotropy energy (with $K = \frac{1}{2}\beta M^2$), we find as the free energy of the wall

$$\frac{1}{2}M^2\int_{-\infty}^{\infty}\left(\alpha\theta'^2 + \beta\sin^2\theta\cos^2\theta\right)\mathrm{d}x$$

where θ is the angle between M and the z-axis. The first integral of Euler's equation for the problem of minimizing this functional, which satisfies the boundary conditions (43.5), is $\alpha\theta'^2 - \beta\sin^2\theta\cos^2\theta = 0$, or $\theta = \sqrt{(\beta/a)}\sin\theta|\cos\theta|$; by writing $|\cos\theta|$, we ensure that the angle θ varies monotonically in the transition layer. This equation has no solution that could describe the structure of a domain wall of finite width (which would demand an allowance for the magnetostriction energy; see Problem 2), but it is adequate for calculating the surface tension, which is not zero even with the above approximations:

$$\Delta_{(100)} = \sqrt{(\alpha\beta)}\cdot 2\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sin\theta\cos\theta\;\mathrm{d}\theta = \sqrt{(\alpha\beta)}$$

(b) The domain wall passes through the z-axis at 45^c to the x and y axes. The need to avoid the presence of a considerable magnetic field again tends to keep the vector M in the wall plane. The magnetic anisotropy in this case, however, moves M slightly out of that plane. Nevertheless, since the anisotropy energy in a cubic crystal is assumed small, this deviation will be small and may with sufficient accuracy be neglected. Then $M_x = M_y = (M, \sqrt{2})\sin\theta, M_z = M\cos\theta$, where θ is again the angle between M and the z-axis, and the anisotropy energy is

$$U_{\text{aniso}} = \frac{1}{8}\beta M^2\sin^2\theta\left(3\cos^2\theta + 1\right)$$

We can write down at once the first integral of Euler's equation for the variational problem:

$$\theta'^2 = A\sin^2\theta\left(\cos^2\theta + B\right), \tag{l}$$

where $A = 3\beta 4\alpha$, $B = \frac{1}{3}$, and the prime denotes differentiation with respect to the coordinate (ξ, say) normal to the wall plane. Hence, again using the conditions (43.5), we find the equation for the wall structure:

$$\sinh \xi_v[A(1+B)] = \sqrt{\frac{1+B}{B} - \cot\theta} \tag{2}$$

i.e.

$$\sinh \sqrt{(\beta/\alpha)}\xi = 2\cot\theta$$

The surface tension is

$$\Delta = \alpha\sqrt{A}\left\{\sqrt{(1+B)} + B\sinh^{-1} B^{-\frac{1}{2}}\right\}, \tag{3}$$

or, with the above values of A and B,

$$\Delta_{(110)} = 1.38\sqrt{(\alpha\beta)}$$

Problem 2. Find the structure of the domain wall in the (100) plane whose surface tension was calculated in Problem 1(a) (E. M. Lifshitz, 1944).

SOLUTION. As already mentioned, a non-zero width of this wall occurs only when the magnetostriction energy is taken into account. The structure of the wall is determined by the condition for the free energy $\mathscr{F}$ to be a minimum; the free energy density $\hat{F}$ is to be expressed in terms of u_{ik} (cf. the fourth footnote to §43). The corresponding expressions for the magnetoelastic and elastic energies are analogous to (42.2) and (42.3) with different coefficients:

$$U_{\text{m-el}} = b_1\left(u_{yy}m_y^2 + u_{zz}m_z^2\right) + 2b_2u_{yz}m_ym_z$$
$$U_{\text{el}} = \frac{1}{2}\lambda_1\left(u_{xx}^2 + u_{yy}^2 + u_{zz}^2\right) + \frac{1}{2}\lambda_2\left(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}\right)^2 + \lambda_3\left(u_{xy}^2 + u_{xz}^2 + u_{yz}^2\right)$$

here we have put $m_x = 0$.

Not only the magnetization distribution but also the strain in the transition layer must be a function of x only. It follows that the y and z components of the displacement vector u must have the form u_y = constant xy, u_z = constant xz; if the constants here were replaced by functions of x, then u_{xy} and u_{xz} would depend on y or z. Thus u_{yy}, u_{zz}, and u_{yz} are constants. From the general equations of elastic equilibrium, $\partial\sigma_{ik}/\partial x_k = 0$, it follows that $\sigma_{ix}{}' = 0$; at $x = \pm\infty$, where the strain is zero, we must have $\sigma_{ix} = 0$, and therefore $\sigma_{xx} = \sigma_{xy} = \sigma_{xz} = 0$ everywhere. Calculating these components of the stress tensor as the derivatives $\sigma_{ik} = \partial\widetilde{F}/\partial u_{ik}$, we find that $u_{xy} = u_{xz} = 0, u_{xx}$ = constant. Thus all the u_{ik} are in fact constant. It is therefore sufficient to calculate their values at infinity, where all the $\sigma_{ik} = 0, m_y = 0, m_z = \pm 1$. The equations $\sigma_{yz} = 0, \sigma_{zz} - \sigma_{yy} = 0$ give

$$u_{yz} = 0, u_{yy} - u_{zz} = b_1/\lambda_1$$

Omitting the constant terms from $U_{\text{m}-el}$ and U_{el} , we find that the further term $U_{\text{m}-et} = ({b_1}^2/\lambda_1)\sin^2\theta$ is to be added to $U_{\text{non-}\,u} + U_{\text{aniso}}$. The determination of $\theta(x)$ thus amounts to solving equation (1) with $A = \beta/\alpha$, $B = 2{b_1}^2/\lambda_1\beta M^2$. The constant B, which represents the ratio of the magnetostriction and anisotropy energies, is small. + Putting $B = 0$ in (3), we obtain the value of $\Delta_{(100)}$ already found in Problem 1(a). From (2) we find as the distribution of magnetization in the wall

$$\sinh \sqrt{(\beta/\alpha)}x = \sqrt{\left(\lambda_1\beta M^2/2b_1^2\right)}\cot\theta$$

The width of this distribution,

$$\delta \sim \sqrt{(\alpha/\beta)} \log\left(\lambda_1 \beta M^2/b_1^2\right)$$

depends considerably on the magnetostriction constant. ‡

Problem 3. In a crystal of the same kind as in Problem 2, find the surface tension of a domain wall between domains magnetized in the [001] and [010] (z and y) directions, in two cases: (a) the wall is parallel to the (100) plane, (b) the wall is parallel to the (011) plane (S. V. Vonsovskii, 1944; L. Nel, 1944).§

Solution. In both cases, the magnetoelastic energy may be neglected.

(a) Here the vector $\mathbf{M}$ remains in the wall (yz) plane as it rotates. The only difference from Problem 1(a) lies in the boundary conditions:

$$\theta(-\infty) = 0, \quad \theta(+\infty) = \frac{1}{2}\pi. \quad \theta'(\pm\infty) = 0.$$

The wall structure is given by the solution

$$\tan\theta = \exp\sqrt{(\beta/\alpha)}x$$

and the surface tension is

$$\Delta 9^c_{(100)} = \frac{1}{2}\sqrt{(\alpha\beta)}.$$

half the value for a 180 -degree wall.

(b) Together with the crystallographic x, y, z axes, we use axes x, η, ζ as shown in Fig. 22: the x-axis is perpendicular to the plane of the diagram, and the arrows show the directions of $\mathbf{M}$ in domains separated by the plane $\eta = 0$. In the transition layer, M rotates over half a circular cone with its axis along the η-axis; $M_\eta = \text{constant} = 1/\sqrt{2}$, so that div $M = M_\eta{}' = 0$, as it should be (the prime denotes differentiation with respect to η). Let ϕ denote the angle between the projection of M on the $x\zeta$-plane and the ζ-axis; ϕ varies from 0 to π. Then $m_\eta = 1/\sqrt{2}, m_\zeta = (1/\sqrt{2})\cos\phi, m_x = (1\sqrt{2})\sin\phi, m_y = \frac{1}{2}(1-\cos\phi), m_z = \frac{1}{2}(1+\cos\phi)$. The nonuniformity and anisotropy energies are

$$U_{\text{non-u}} = \frac{1}{4}\alpha M^2 \phi'^2, \quad U_{\text{aniso}} = \frac{1}{4}\beta M^2 \left(\sin^2\phi - \frac{3}{8}\sin^4\phi\right).$$

0† For example, in iron at room temperature $B \sim 2 \times 10^{-3}$.

‡ As $b_1 \to 0$, this 180 -degree wall (as regards the angle of rotation of the vector $\mathbf{M}$ in it) decays, as it were, into two 90 -degree walls, separated by a region with $\theta = \frac{1}{2}\pi$ which tends to infinity.

In a cubic crystal (unlike a uniaxial one; see the second footnote to §44), a 90 -degree wall is a true phase boundary, since both domains are stable phases and each is magnetized in one of the easy directions.

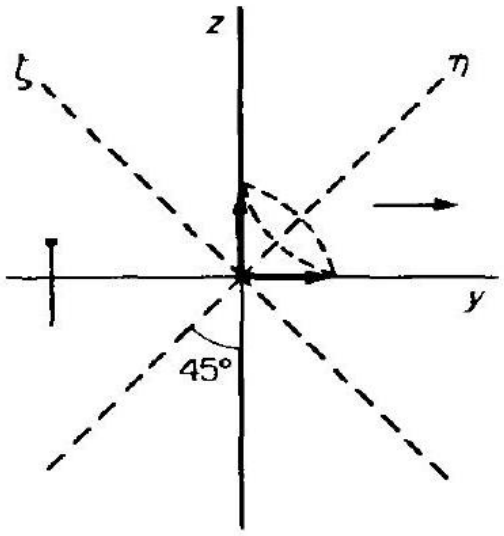


Fig. 22

The surface tension is

$$\begin{aligned}\Delta_{(110)}^{90^\circ} &= \frac{1}{4}\surd(\alpha\beta)\cdot 2\int_0^\pi \sin\theta\left[1-\frac{3}{8}\sin^2\theta\right]^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{1}{2}\surd(\alpha\beta)\left[1+\frac{5}{2\sqrt{6}}\sinh^{-1}\sqrt{\frac{3}{5}}\right] \\ &= 1.73\times\frac{1}{2}\downarrow(\alpha\beta)\end{aligned}$$

Problem 4. Find the surface tension of a domain wall in a uniaxial crystal when the transition between domains takes place by a change in the magnitude of M without rotation, its direction being reversed as M passes through zero. The dependence of the free energy on M (when $\mathbf{H}=0$) is taken in the form of the expansion (39.3), appropriate near the Curie point (V. A. Zhirnov. 1958).

Solution. Throughout the transition layer, M_z is equal to M, and varies in the x-direction, which is perpendicular to the wall plane. The free energy density is, taking into account the non-uniformity energy,

$$F = F_0 - |A|M^2 + BM^4 + \frac{1}{2}\alpha_1 M'^2. \qquad \text{(I)}$$

The equilibrium value of the magnetization within the do mains is here denoted by M_0 : ${M_0}^2 = |A|/2B$; see (39.5). With $\mathbf{m}=\mathbf{M}/M_0(m\neq 1)$, we can write the free energy of the wall as

$$\frac{1}{2}|A|M_0^2\int_{-\infty}^{\infty}\left[\left(1-m^2\right)^2+\left(\alpha_1/|A|\right)m'^2\right]\mathrm{d}x$$

the additive constant in F is chosen so that F is zero within the domains. This integral is to be minimized with the boundary conditions $m(+\infty)=1, m(-\infty)=-1, m'(\pm\infty)=0$. The first integral of Euler's equation for this
variational problem is $\left(\alpha_1/|A|\right)m'^2=\left(1-m^2\right)^2$. Hence

$$m(x)=\tanh\surd\left(|A|/\alpha_1\right)x,$$

and the calculation of the integral gives for the surface tension ${M_0}^2\Delta$ the value

$$\Delta = \frac{4}{3}\sqrt{(\alpha_1|A|)}\,. \tag{2}$$

This wall structure can in principle occur sufficiently close to the Curie point (if $\beta/|A|$ tends to infinity as $T \to T_c$), where a change in the magnitude of M becomes energetically more favourable than a deviation of M from the direction of easy magnetization.

9.1.8 §44. The domain structure of ferromagnets

Let us now ascertain the actual shape and size of the domains. †
Some conclusions concerning the shape of the surfaces separating the domains may be obtained directly from the boundary conditions on the magnetic field. Since the field $\mathbf{H}$ is the same in adjoining domains, the condition of continuity of the normal induction B_n reduces to the continuity of M_n. In uniaxial crystals, the sign of M_z is different in different domains. but M_x and M_y are the same. Under these conditions the continuity of M_n means that the surface of separation must be parallel to the z-axis, i.e. to the direction of easy magnetization.

The shape and size of the domains in thermodynamic equilibrium are given by the condition that the total free energy should be a minimum. They depend considerably on the actual shape and size of the body. In the simplest case, that of a ferromagnet in the form of a flat plate, the domains may in principle form parallel layers across the body from one surface to the other. In what follows we shall take this case.
The formation of an entire new boundary between domains results in an increase in the total surface tension energy. This energy consequently tends to reduce the number of domains, i.e to increase their thickness. The excess energy near the outer surface of the body, where the domains emerge, has the opposite effect. In the body the magnetic field $H = 0$, and the anisotropy energy is also zero, because the vector M is in a direction of easy magnetization. Near the surface, however. this is not so.
The way in which the domains emerge at the surface of the body is different in the limiting cases of large and small magnetic anisotropy. A natural measure of this quantity in the present case is not the coefficient β itself in (41.1) but $\beta/4\pi$. This is seen from the expression $\mu_{xx} = 1+4\pi/\beta$ (41.7) for the transverse magnetic permeability of a uniaxial ferromagnet.

When the magnetic anisotropy is large, the layers must emerge at the surface with no change in the direction of $\mathbf{M}$ (Fig. 23a, p. 154, where for simplicity we suppose that the surface is perpendicular to the direction of easy magnetization). Near the surface there is a magnetic field which penetrates into the surrounding space, and into the body, to distances of the order of the layer thickness a.
In the opposite case of weak anisotropy, a more favourable disposition is that where there is no magnetic field, and M deviates from the direction of easy magnetization. For $\mathbf{H} = 0$ we must have everywhere $\operatorname{div}\mathbf{B} = 4\pi\operatorname{div}\mathbf{M} = 0$, and M_n must be continuous at all

[0]† The concept of domains was first put forward by P. Weiss (1907). The thermodynamic theory of domains was Biven by L. D. Landau and E. M. Lifshitz (1935).

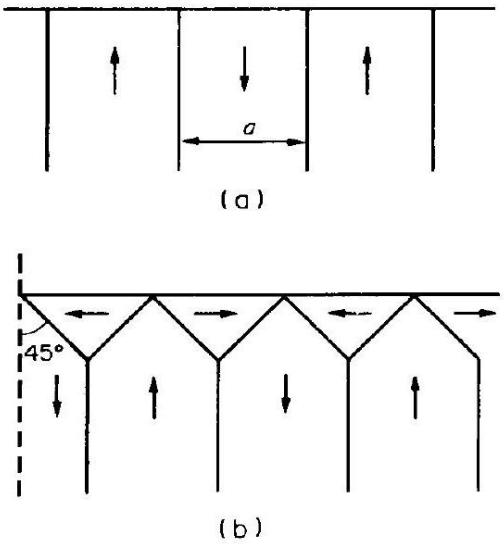


Fig. 23

domain boundaries and at the free surface. This is achieved by the setting up of domains of closure with triangular cross-section (Fig. 23b), in which the magnetization is parallel to the surface of the body. The total volume of these regions, and therefore the anisotropy energy in them, are proportional to the layer thickness a.†

Thus in all cases the emergence of the domains at the surface of the body results in an excess energy which increases with the thickness of the domains. This effect therefore tends to reduce the domain thickness.

The actual thickness of the domains is determined by the equilibrium of the two oppositely acting effects, namely the surface energy of the domain walls and the energy of emergence of the domains at the surface of the body. The number of plane-layer domains in a plate is proportional to $1/a$, while the surface-tension energy at the surfaces separating them is proportional to their total area, i.e. to l/a, where l is the thickness of the plate. The energy of emergence is proportional to a. The sum of these two energies has, as a function of a, a minimum when a has a value proportional to $\sqrt{l}$.

For example, in the case of weak anisotropy (Fig. 23a), the energy of emergence per unit area of the two sides of the plate is $\sim a\beta M^2$; the surface energy is $M^2\Delta l/a$ (the plate thickness l is, of course, assumed much greater than the domain thickness). Hence

$$a \sim \sqrt{(l\Delta/\beta)} \sim \sqrt{(l\delta)}. \tag{44.1}$$

Thus the thickness of the domains increases with the dimension of the body, but the quantitative law $a \propto \sqrt{l}$ of this increase is based on the assumption that the domains are of

constant thickness, and clearly cannot be valid for all values of l. The reason is that the thickness of the domains at the surface of the body cannot exceed some limiting value a_k which depends on the properties of the ferromagnet but not on the shape and size of the body. The value of a_k is determined by the point at which, as a increases, the splitting of the domain

[0]† It should be emphasized that the boundary between the principal domains and the domains of closure, which separates regions where the directions of $\mathbf{M}$ differ by 90°, is not in this case (i.e. in uniaxial crystals) a phase boundary in the literal sense, as is seen from the fact that a state with magnetization perpendicular to the easy axis (when $\mathbf{H} = 0$) is in itself unstable and not a possible phase of matter. Strictly speaking, the distribution of magnetization shown in Fig. 23b relates only to the limit $\beta \to 0$. Even in the first approximation with respect to the small quantity $\beta/4\pi$, deviations from this pattern and transitions between principal domains and domains of closure occur at distances less than the domain thickness a by this small factor, and fields $\sim \beta M$ occur (although this does not affect the estimate of the energy of domain emergence at the surface of the body).

near the surface to a depth $\sim a$ becomes thermodynamically favourable. Such a point must necessarily be reached, since the energy of the emergence of one domain increases as a^2, whereas the excess surface-tension energy resulting from the splitting of the domain increases only as a. Thus we conclude that, as the size of the body, and therefore the domain thickness, increase, a progressive branching of the domains occurs as they approach the surface of the body (E. M. Lifshitz, 1944). † In principle, when l becomes sufficiently great, the branching continues until the thickness of the branches at the surface itself becomes comparable with the domain wall width δ.

The function $a(l)$ can be found for this limiting case. In making estimates, we shall take the particular case of weak anisotropy.

Figure 24 shows the domain branching pattern. The energy of emergence of the domains is here made up of the additional surface energy of wedge-shaped domains and the anisotropy energy due to the deviation of M from the z-axis as a result of branching; here there are no triangular domains of closure. Assuming rapid convergence of the sum over successive branchings, it is sufficient to consider the first wedge, whose length is denoted by h. It is evident from energy favourability arguments that h is much greater than the thickness of the wedge (or, equivalently as regards order of magnitude, than a), i.e. the angle ϑ between the wedge boundary and the z-axis is $\vartheta \sim a/h \ll 1$. The surface energy of the wedge is $\sim hM^2\Delta$, and the anisotropy energy due to the wedge is $\sim ha\beta M^2\vartheta^2 \sim a^3\beta M^2/h$; the energy of emergence, the sum of these two, is least when $h^2 \sim a^3\beta/\Delta$, i.e. when

$$a/h \sim \sqrt{(\Delta/a\beta)} \sim \sqrt{(\delta/a)} \ll 1 \tag{44.2}$$

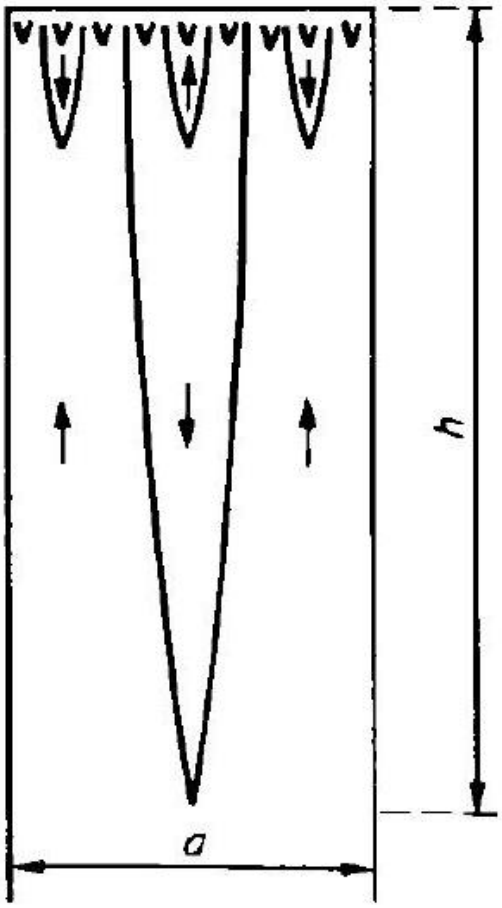


Fig. 24

(with the assumption, of course, that $a \gg \delta$). The energy of emergence per unit area of the plate surface is then $\sim a^{3/2}M^2\sqrt{(\beta\Delta)/a}$. The surface energy of the principal domain boundaries is $\sim M^2\Delta l/a$. Minimizing the sum of these two expressions gives

$$a \sim l^{2/3}(\Delta/\beta)^{1/3} \sim \left(l^2\delta\right)^{1/3} \tag{44.3}$$

(I. A. Privorotskii. 1970). †

To conclude this section. let us consider the phase equilibrium conditions in a ferromagnet from a somewhat more general standpoint than was needed for the above discussion, by no longer assuming that all the components of $\mathbf{H}$ are equal in the two phases: this formulation may be appropriate, for instance, in the treatment of curved domain boundaries.

First of all, the general magnetostatic conditions (29.13) must be satisfied:

$$B_{1n} = B_{2n}, \quad \mathbf{H}_{1t} = \mathbf{H}_{2t}; \tag{44.4}$$

these follow from Maxwell's equations $\operatorname{div}\mathbf{B} = 0$, $\operatorname{curl}\mathbf{H} = 0$. In addition, the thermodynamic condition must be satisfied which expresses the equilibrium with regard to a movement of the interface (in the direction normal to it), i.e. with regard to a transfer of matter from one phase to the other. This condition is represented by the equality in the two phases of the thermodynamic potentials relative to B_n and $\mathbf{H}_t+$ To find these, it is sufficient to rewrite the product $-\mathbf{B}\cdot\mathrm{d}\mathbf{H}$ in the expression for the differential $\mathrm{d}\widetilde{F}$(31.6) (again neglecting magnetostriction) as

$$\begin{aligned} -\mathbf{B}\cdot\mathrm{d}\mathbf{H} &= -\mathbf{B}_t\cdot\ \mathrm{d}\mathbf{H}_t - B_n\ \mathrm{d}H_n \\ &= -\mathbf{d}\left(B_nH_n\right) - \mathbf{B}_t\cdot\ \mathrm{d}\mathbf{H}_t + H_n\ \mathrm{d}B_n. \end{aligned}$$

From this it is clear that the required thermodynamic potential F' is

$$F' = \tilde{F} + B_nH_n/4\pi \tag{44.5}$$

and the boundary condition sought is

$$\boldsymbol{F}_1' = \boldsymbol{F}_2' \tag{44.6}$$

(I. A. Privorotski and M.Ya. Azbel', 1969).

PROBLEM

Determine the energy of the magnetic field near the surface of a ferromagnet at which plane-parallel domains perpendicular to the surface emerge without change in the direction of magnetization (Fig. 23a).

Solution. The problem of determining the magnetic field near such a surface is equivalent to the electrostatic problem of the field due to a plane divided into strips charged alternately positively and negatively with surface charge density $\sigma = \pm M$.

Let the surface of the body be the plane $z = 0$, and let the x-axis be perpendicular to the plane of the domains. The "surface charge density" $\sigma(x)$ is a periodic function with period $2a$ (a being the width of the domains), and its

[0†] The critical value of l at which branching begins varies greatly according to the nature of the magnetic and isotropy and according to the configuration of the sample surface in relation to the crystallographic axes. The initial stages of domain branching have been investigated by E. M. Lifshitz (Journal of Physics 8, 337, 1944).

[0†] The idea of domain branching and the result that in the limit $a \propto l^{2/3}$ were first put forward by L. D. Landau for the intermediate state of superconductors (§57).

‡ This statement is justified in a similar way to the derivation of the ordinary condition of phase equilibrium, the

value in a typical period is $\sigma = -M$ for $-a < x < 0, \sigma = +M$ for $0 < x < a$. Its expansion in Fourier series is

$$\sigma(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \sin \frac{(2n+1)\pi x}{a}, \quad c_n = 4M/(2n+1)\pi$$

The field potential satisfies Laplace's equation

$$\frac{\hat{\tau}^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2} = 0$$

we seek ϕ as a series

$$\phi(x,z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sin \frac{(2n+1)\pi x}{a} e^{\mp(2n+1)\pi z/a}$$

where the two signs in the exponent relate to the half-spaces $z > 0$ and $z < 0$. The coefficients b_n are given by the boundary condition

$$-[\partial\phi/\partial z]_{z=0+} + [\partial\phi/\partial z]_{z=0-} = 4\pi\sigma$$

whence $b_n = 2ac_n/(2n+1)$.
The required field energy can be calculated as the integral $\frac{1}{2}\int \sigma\phi \, \mathrm{d}f$ over the "charged surface". The energy per unit area is

$$\frac{1}{2}\frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} [\sigma\phi]_{z=0} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty} c_n b_n$$
$$= \frac{8aM^2}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^3} = \frac{7aM^2}{\pi^2}\zeta(3)$$

With the zeta function $\zeta(3) = 1.202$, the result is equal to $0.852aM^2$. The width of the domains in the plate is found by minimizing the sum $1.7aM^2 + M^2\Delta l/a$, the first term being the energy of emergence of domains on both sides of the plate, and the second term the surface energy. Hence $a = 0.8\sqrt{(\Delta I)}$ (C. Kittel, 1946).

9.1.9 §45. Single-domain particles

As the dimensions of the body decrease, the formation of any domains at all ultimately becomes thermodynamically unfavourable, so that sufficiently small ferromagnetic particles are uniformly magnetized single domains. The criterion giving their dimension l is obtained by comparing the magnetic energy of a uniformly magnetized particle with the non-uniformity energy which would result if there were considerable non-uniformity in the distribution of the magnetization over its volume. The former energy is of the order of M^2V, and the latter of the order of $\alpha M^2 V/l^2$. The condition for a single domain to be formed is therefore †

$$l \leqslant \sqrt{\alpha} \tag{45.1}$$

In order to ascertain the behaviour of a uniformly magnetized particle in an external magnetic field. we must consider its total free energy, substituting in (32.7) for $\widetilde{F}$ the sum of (39.1) and the anisotropy energy: ‡

equality of the chemical potentials of the two phases, in which the independent variables are the temperature and the pressure, these being equal in the two phases; see SP 1, §81.

$$\hat{\mathscr{F}} = VU_{\text{aniso}} - \frac{1}{2}\mathbf{M}\cdot\int(\mathbf{H}+\mathfrak{g})\mathrm{d}V. \tag{45.2}$$

the integration being taken only over the volume of the body, and the unimportant constant VF_0 being omitted. Let the particle be ellipsoidal. Then the field $\mathbf{H}$ within it is given by (29.14), or

$$H_i = \mathfrak{S}_i - 4\pi n_{ik}M_k \tag{45.3}$$

the second term here is the "demagnetizing field" due to the body. We thus find

$$\mathscr{F} = 2\pi n_{ik}M_iM_kV - V\mathbf{M}\cdot\mathfrak{S} + VU_{\text{aniso}} \tag{45.4}$$

The first term is called the intrinsic magnetostatic energy of the magnetized particle; the second term is the energy of the particle in the external field.

The direction of magnetization of the particle in the external field $\mathfrak{S}$ is determined by the condition that $\mathscr{F}$ be a minimum as a function of the direction of $\mathbf{M}$. For a cubic crystal, the anisotropy energy may be neglected in (45.4). For a uniaxial crystal, writing the anisotropy energy in the form $\frac{1}{2}\beta_{ik}M_iM_k$, we have

$$\mathscr{F} = \frac{1}{2}l\left(4\pi n_{ik}+\beta_{ik}\right)M_iM_k - V\mathfrak{H}\cdot\mathbf{M}. \tag{45.5}$$

The problem thus formulated is mathematically identical with the one in §41 concerning the dependence of the local magnetization $\mathbf{M}$ on the local field $\mathbf{H}$, the only difference being that $\mathbf{H}$ is replaced by $\mathfrak{S}$, and β_{ik} by $4\pi n_{ik}$ or by $4\pi n_{ik}+\beta_{ik}$.

Lastly, let us derive the equation which must be satisfied by the distribution of the magnetization in a single-domain sample, under conditions such that this distribution cannot be supposed uniform. To do so, we must require that the total free energy of the body be a minimum; we write it as the integral

$$\begin{aligned}\mathscr{F} &= \int \tilde{F}\ \mathrm{d}V \\ &= \int\left\{F_0(M) + U_{\text{non-u}} + U_{\text{aniso}} - \mathbf{M}\cdot\mathbf{H} - H^2/8\pi\right\}\mathrm{d}V\end{aligned} \tag{45.6}$$

taken over all space. The variation is with respect to $\mathbf{M}$, which is here a function of the coordinates, the value of $\mathbf{H}$ being specified at every point; the magnitude of $\mathbf{M}$ is fixed, and only its direction varies. Omitting from the integrand terms which depend only on M or on H. we vary the integral

$$\int\left\{\frac{1}{2}\alpha_{ik}M^2\frac{\partial\mathbf{m}}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial\mathbf{m}}{\partial x_k} + U_{\text{aniso}} - M\mathbf{m}\cdot\mathbf{H}\right\}\mathrm{d}V,$$

which is now taken only over the volume of the body (where $\mathbf{M}\neq 0$). Integrating the first term by parts after the variation, we find

$$\begin{aligned}\delta\mathscr{F} = &-\int\left\{\alpha_{ik}M^2\frac{\partial^2\mathbf{m}}{\partial x_i\partial x_k} - \frac{\partial U_{\text{aniso}}}{\partial\mathbf{m}} + M\mathbf{H}\right\}\cdot\delta\mathbf{m}\mathrm{d}V \\ &+\oint\alpha_{ik}M^2\frac{\partial\mathbf{m}}{\partial x_k}\cdot\delta\mathbf{m}\ \mathrm{d}f_i\end{aligned} \tag{45.7}$$

[0†] The term micromagnetism is sometimes used to refer to the properties of assemblies of such particles.
‡ In neglecting the magnetostriction, we make no distinction between the thermodynamic potential and the free energy. considering the latter for a given volume l° of the body.

the second integral is taken over the surface of the body. Since $\mathbf{m}^2 = 1$, we have $\mathbf{m} \cdot \delta\mathbf{m} = 0$, i.e. the variation is of the form $\delta\mathbf{m} = \delta\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{m}$, where $\delta\boldsymbol{\omega}$ is an arbitrary (small) function of the coordinates. The condition $\delta\mathscr{F} = 0$ gives the required equation † when the

coefficient of $\delta\omega$ in the volume integrand is put equal to zero:

$$\mathbf{m} \times \left(\alpha_{ik} M^2 \frac{\partial^2 \mathbf{m}}{\partial x_i \partial x_k} - \frac{\partial U_{\text{anso}}}{\partial \mathbf{m}} + M\mathbf{H} \right) = 0. \tag{45.8}$$

Equating the surface integral to zero, we obtain the boundary condition on this equatiorr, for example, when $\alpha_{ik} = \alpha\delta_{ik}$ the condition is

$$\mathbf{m} \times \partial\mathbf{m}/\partial n = 0, \tag{45.9}$$

where $\mathbf{n}$ is the direction of the normal to the surface of the body.
Together with (45.8), Maxwell's equations

$$\operatorname{div}(\mathbf{H} + 4\pi M\mathbf{m}) = 0, \quad \operatorname{curl}\mathbf{H} = 0 \tag{45.10}$$

must of course be satisfied in all space, with the usual boundary conditions on the surface of the body and the condition $\mathbf{H} \to \mathfrak{S}$ at infinity. ‡.
For a uniformly magnetized (ellipsoidal) body the first term in the parentheses in (45.8) is zero. The remaining equation, with $\mathbf{H}$ from (45.3), is the same as the condition for a minimum of the free energy (45.5).

9.1.10 §46. Orientational transitions

The anisotropy constant of a ferromagnet is a function of temperature, and so can changesign at any point. The direction of the spontaneous magnetization then changes also, and therefore so does the symmetry of the magnetic structure. The resulting transitions between different phases of a magnetic substance are called orientational transitions. Let us see how such transitions occur in a uniaxial hexagonal ferromagnetic crystal (H. Horner and C. M. Varma, 1968).
Since we have in mind to consider the neighbourhood of a point where the anisotropy constant K_1 becomes zero, it is necessary to take into account also the next term in the expansion of the anisotropy energy; for a hexagonal ferromagnet, such an expression for U_{aniso} is given by (40.3).
Let us first suppose that $K_2 > 0$. The minimum of U_{aniso} then corresponds to the following phases, depending on the values of K_1 and K_2 :

$$\left.\begin{array}{l} \text{(I) } \theta = 0, \pi \text{ for } K_1 > 0 \\ \text{(II) } \sin\theta = \pm\sqrt{(-K_1/2K_2)} \text{ for } -2K_2 < K_1 < 0 \\ \text{(III) } \theta = \frac{1}{2}\pi \text{ for } K_1 < -2K_2. \end{array}\right\} \tag{46.1}$$

Phases I and III are of the easy axis and easy plane type respectively. In phase II, the magnetization vector does not have a fixed orientation as in phases I and III; as the temperature varies, its direction changes continuously between $\theta = 0$ (or π) and $\theta = \frac{1}{2}\pi$. The symmetry of this phase (sometimes called the angular phase) is lower than that of both

[0]† It is, of course, the same as the equation of motion (precession) of the magnetic moment in a ferromagnet, if the rate of change $\partial\mathrm{M}/\partial t$ is put equal to zero (see $SP2, 69$).

[0]† The question may arise whether it is correct to vary the integral (45.6) with respect to $\mathbf{m}$ for constant $\mathbf{H}$, even though these are related by the first equation (45.10). In fact, however, if we put (from the second equation) $H = -g$ rad ϕ and calculate the variation of the integral with respect to ϕ, the result is zero by virtue of the first [e] quation. Thus the variation with respect to $\mathbf{H}$ gives no contribution to $\boldsymbol{\delta F}$.

phase I and phase III. The transitions between phases I and II, and II and III. take place as second-order phase transitions at temperatures T_1 and T_2 given by the conditions

$$K_1(T_1) = 0, \quad K_1(T_2) + 2K_2(T_2) = 0. \tag{46.2}$$

We shall take the particular case where $K_1 > 0$ for $T > T_1$. Then $T_2 < T_1$ if $K_2 > 0$.
In the presence of a magnetic field, the thermodynamic potential is

$$\tilde{\Phi} = K_1 \sin^2\theta + K_2 \sin^4\theta - \mathbf{H}\cdot\mathbf{M} \tag{46.3}$$

Only the terms which depend on the direction of M are shown here. Near the transition point between phases I and II, the order parameter is the small quantity $\sin\theta \cong \theta \equiv \eta$. In this range, the thermodynamic potential in a weak transverse magnetic field $H = H_x$ is

$$\tilde{\Phi} = K_1\eta^2 + K_2\eta^4 - MH_x\eta$$

with $K_1 = \text{constant} \times (T - T_1)$. In the usual way (cf. §39), we deduce that at the transition point the transverse susceptibility

$$\chi_\perp = (\partial M_x/\partial H_x)_{H_x\to 0} \cong M\,(\partial\theta/\partial H_x)_{H_x\to 0}$$

tends to infinity in a similar manner to that given by (39.6) and (39.7). Analogously, near the transition point between phases II and III, the order parameter is the small angle $\eta = \frac{1}{2}\pi - \theta$. In a longitudinal field $H = H_z$, the thermodynamic potential contains a term $-MH_z\eta$, and at the transition point the longitudinal susceptibility $\chi_\parallel$becomes infinite.

The above argument is based on the Landau theory of phase transitions. For orientational transitions, this theory is valid almost without restrictions. The closeness to the transition point that is allowable in the Landau theory is determined by a condition (see (47.1) below) having in the denominator the cube of the coefficient α in the term (43.1) of the thermodynamic potential, which arises from the non-uniform distribution of the order parameter. In the present case, this term is due to the exchange interactions in the ferromagnet, whereas the expansion terms relative to the parameter η itself are due to the relativistic interactions. This is the cause of the extreme narrowness of the temperature range near the transition point within which the Landau theory is not valid.

Now let $K_2 < 0$. Then phase II is unstable (U_{aniso} has a maximum and not a minimum), so that the easy-axis phase I must pass directly into the easy-plane phase III. It is clear from the start that this cannot be a second-order transition, since neither of the symmetry groups of phases I and III is a sub-group of the other. The transition takes place as a firstorder phase transition at the point $T = T_0$ which is given by the equality of the thermodynamic potentials in the two phases (i.e., of the values of U_{aniso}):

$$K_1(T_0) + K_2(T_0) = 0 \tag{46.4}$$

The point T_0 lies between T_1 and T_2 as given by equations (46.2) (where now $T_2 > T_1$). In this case, the temperatures T_1 and T_2 determine the limits of metastability of phases I and II respectively; beyond these limits, U_{aniso} has a maximum and not a minimum at $\theta = 0$ or $\frac{1}{2}\pi$.

Orientational transitions can occur not only when the temperature varies (spontaneous transitions) but also when the magnetic field applied to the body changes (field-induced transitions). The transition points occupy curves in the (H, T) phase diagrams (for a given crystallographic orientation of $\mathbf{H}$). As an example, let us consider the phase diagrams of the same uniaxial ferromagnet in a field H_z parallel to the hexagonal axis.

A longitudinal field does not affect the symmetry of the easy-axis phase (EAP in Fig. 25).

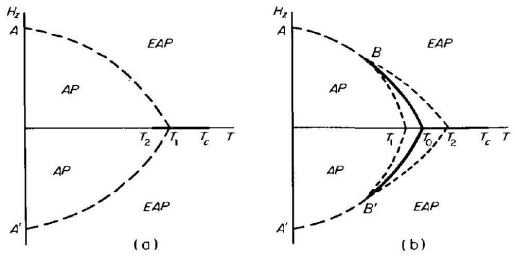


Fig. 25

The easy-plane phase, however, becomes an angular phase (AP), since the field moves the magnetization M out of the basal plane.

Let us first consider the case where $K_2 > 0$. The regions of the two phases are separated by second-order phase transition curves beginning from T_1 on the abscissa axis (dashed curves in Fig. 25a). The upper and lower parts of the diagram correspond to two opposite directions of the longitudinal field, and accordingly to opposite signs of the longitudinal component M_z. Near the curve AT_1, the angle θ is small (near $A'T_1, \pi - \theta$ is small). As far as terms of the fourth order in θ, we have from (46.3)

$$\widetilde{\Phi} = \left(K_1 + \frac{1}{2}MH_z\right)\theta^2 + \left(K_2 - \frac{1}{3}K_1 - \frac{1}{24}MH_z\right)\theta^4. \tag{46.5}$$

The equation of the curve AT_1 is found by equating to zero the coefficient of θ^2 :

$$K_1(T) + \frac{1}{2}MH_z = 0 \tag{46.6}$$

($K_1 < 0$ when $T < T_1$); the curve $A'T_1$ is obviously given by the same equation with the sign of the second term reversed, and is symmetrical with respect to the curve AT_1.

The segment T_2T_c of the abscissa axis is a first-order phase transition line, on which two phases with opposite signs of M_z are in equilibrium. The second-order phase transition which occurs at T_2 in the absence of the field disappears when the field is present; T_2 is a critical point in the (H, T) phase diagram, at which a first-order transition line terminates. Another termination point of this line is the Curie point T_c (at which the magnetization vanishes when $H_z = 0$).

When $K_2 < 0$ (Fig. 25b), the initial part of the boundary ABT_0 between the two phases in the (H, T) diagram (and similarly $A'B'T_o$) is a first-order phase transition curve (the continuous curve BT_o), on either side of which are regions of metastability of the two phases bounded by the dashed curves BT_1 and $BT_2 \cdot$† At B (a tricritical point) the first-order transition curve becomes a second-order one (the dashed curve BA, whose equation is (46.6)). The coordinates of this point are given by the simultaneous vanishing of the

coefficients of θ^2 and θ^4 in the thermodynamic potential (46.5), i.e. by the equations †

$$MH_z = 2\,|K_1(T)|\,, \quad K_1(T) = 4K_2(T). \tag{46.7}$$

Lastly, the segment T_0T_c is a line of first-order transitions between phases with oppositely directed magnetizations $M_z = \pm M$,

[0]† lt is assumed that the interface between two coexistent phases is parallel to the magnetic field, so that H_z is continuous at this interface.

9.1.11 §47. Fluctuations in ferromagnets

The Landau theory of phase transitions, on which the discussion in §39 was based, does not take account of fluctuations of the order parameter, and thus becomes invalid sufficiently near the Curie point. The range of applicability of this theory is determined by the condition

$$|t|/T_c \gg T_c B^2/a\alpha^3, \tag{47.1}$$

where $t = T - T_c, a$ and B are the coefficients in the expansion (39.3), (39.4), and α is of the order of the components of the tensor α_{ik} in (43.1). We must also, of course, have $|t| \ll T_c$ as the condition of closeness to the Curie point. ‡

When the inequality sign in (47.1) is reversed, i.e. in the fluctuation region, the order parameter fluctuations are of decisive importance. The rigorous statistical theory for the Curie point of a ferromagnet in this region would have to be based on the effective Hamiltonian.

$$\mathscr{H}_{\text{eff}} = \int \left\{ at\mathbf{M}^2 + B\left(\mathbf{M}^2\right)^2 + \frac{1}{2}\bar{\alpha}\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x_i} - \mathbf{H}\cdot\mathbf{M} \right\} \mathrm{d}V. \tag{47.2}$$

The function $\mathbf{M}(\mathbf{r})$ is here assumed to vary only slowly, in the sense that its Fourier expansion contains only wave numbers much less than the characteristic reciprocal atomic distance. The coefficients a, B, and $\bar{\alpha}$ are the same as the expansion coefficients in the Landau theory, i.e. are independent of temperature; for simplicity, the derivative term is written on the assumption that the crystal has cubic symmetry, the coefficient being denoted by $\bar{\alpha}$ to distinguish it from the true coefficient α (see below). The effective Hamiltonian (47.2) corresponds to the exchange approximation, neglecting the anisotropy energy; in that approximation, we should also neglect the fluctuations of the magnetic field that are due to those of the magnetization (i.e. the magnetostatic energy of the fluctuations: cf. SP 2, §70). The exchange approximation is characterized by a "degeneracy": the order parameter M has three components, but the effective Hamiltonian is invariant when this vector is rotated through the same angle in all space.

To describe the behaviour of the thermodynamic quantities near a second-order phase transition, use is made of critical indices, defined in a way which will be repeated here as it applies to the Curie point in a ferromagnet. The index α describes the temperature dependence of the specific heat C_p on either side of the Curie point in the absence of [a]

magnetic field: †

$$C_p \propto |t|^{-\alpha} \text{ for } \mathbf{H} = 0. \tag{47.3}$$

The index β describes the temperature dependence of the spontaneous magnetization below the Curie point:

$$M \propto (-t)^{\beta} \text{ for } t < 0, \mathbf{H} = 0. \tag{47.4}$$

The index γ describes the dependence on t of the magnetic susceptibility in the paramagnetic phase:

$$\chi \propto t^{-\gamma} \text{ for } t > 0, \mathbf{H} = 0; \tag{47.5}$$

[0]† At the tricritical point in the (H, T) phase diagram, we can apply the results derived in $SP1, §150$ (within the Landau theory) for the tricritical point in the PT-plane.

‡ In this section. we use the results given in $SP1, §§146-149$. The reader is assumed to be familiar with these. and some of them are mentioned afresh only to make the discussion more coherent. The appropriate references will not be given on every occasion.

see below concerning the behaviour of the susceptibility when $t < 0$. The field dependence of the magnetization at the Curie point itself is written

$$M \propto H^{1/\delta} \text{ for } t = 0 \tag{47.6}$$

The temperature dependence of the correlation radius of the magnetization fluctuations is described by the index v :

$$r_c \propto |t|^{-v} \text{ for } \mathbf{H} = 0 \tag{47.7}$$

At the Curie point itself, the correlation function is a decreasing power function of the distance: ‡

$$G_{ik}(r) = \langle \delta M_i(0) \delta M_k(\mathbf{r}) \rangle \propto r^{-(1+\zeta)} \text{ for } t = 0, \mathbf{H} = 0 \tag{47.8}$$

The critical indices are connected by certain relations, some of which follow from the hypothesis of scale invariance. These relations are universal ones, and in particular do not depend on the number of components of the order parameter; they enable all the abovementioned indices to be expressed in terms of any two of them.

Table 2 gives the values of the critical indices for a ferromagnetic transition. For comparison, we give also the values for other degrees of degeneracy n (where n is the number of components of the order parameter $\mathbf{M}$ in the effective Hamiltonian in the form (47.2); $n = 3$ for a three-dimensional ferromagnet in the exchange approximation).§

In the paramagnetic phase, the correlation function decreases exponentially at distances $r \gg r_c$. In the ferromagnetic phase, we have to distinguish fluctuations with and without a change in the magnitude of $\mathbf{M}$. The degeneracy of the Curie point problem in the exchange approximation makes its appearance here.

The difference does not arise when the change in $\mathbf{M}$, including the change in its direction, takes places over short distances $r \ll r_c$; the correlation function then has the same behaviour (47.8) for all fluctuations. At distances $r \gg r_c$ (wave numbers such that $kr_c \ll 1$),

Table 2

n	α	β	γ	ν	δ	ζ
1	0.110	0.325	1.240	0.630	0.48	0.031
2	-0.007	0.346	1.315	0.669	0.48	0.033
3	-0.115	0.364	1.387	0.705	0.48	0.033

the fluctuations of the direction of $\mathbf{M}$ increase "anomalously" because of the decreased amount of energy needed for this departure from equilibrium; for a rotation of the magnetization uniform throughout the crystal, $k \to 0$, and no energy at all is needed. The correlation function of the fluctuations of the direction of $\mathbf{M}$ at such distances can be derived thermodynamically.

Since M varies slowly, we can separate in the thermodynamic potential the terms related to this variation:

$$gp = s_0(T, M) + \frac{1}{2}\alpha \int \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x_i} \, \mathrm{d}V \tag{47.9}$$

[0]† This refers to the "singular" part of the specific heat: when $\alpha < 0$, the specific heat $C_p = C_{p0}+$ constant $\times |t||\alpha|$. The index α is not to be confused with the coefficient in (47.1), (47.2) and below.

‡ We are everywhere considering only ordinary three-dimensional bodies.

§ The values of the small indices α and ζ are taken from numerical calculations (J. C. Le Guillou and J ZinnJustin, Physical Review B 21, 3976, 1980). The others have been calculated from these two.

where $\}_0$ applies to a uniformly magnetized body. † It must be emphasized that we are here discussing the true thermodynamic potential, and the coefficient α, a function of temperature, is not the same as $\bar{\alpha}$ in the effective Hamiltonian.

In a small rotation of M (without change in magnitude), the term $g_0(T, M)$ is unaltered. If some particular direction of M is chosen as the z-axis, a small deviation from this direction can be described by a small two-dimensional vector $\delta\mathbf{M}_\perp \equiv \mathbf{M}_\perp$ in the xy-plane The corresponding change in the thermodynamic potential is ‡

$$\delta g\rho = \frac{1}{2}\alpha \int \frac{\partial \delta \mathbf{M}_\perp}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial \delta \mathbf{M}_\perp}{\partial x_i}\, \mathrm{d}V. \tag{47.10}$$

Substituting $\delta\mathbf{M}_\perp$ as a Fourier series

$$\delta \mathbf{M}_\perp = \sum_{\mathbf{k}} \delta \mathbf{M}_{\perp \mathbf{k}} e^{\mathrm{ik}\cdot\mathbf{r}}, \quad \delta \mathbf{M}_{\perp \mathbf{k}} = \delta \mathbf{M}^*_{\perp,-k}$$

we find

$$\delta \mathscr{S}\rho = \frac{1}{2} V \alpha \sum_{\mathrm{k}} k^2 \left|\delta M_{\perp \mathrm{k}}\right|^2$$

and the mean square fluctuation

$$\langle \delta M_{\alpha \mathbf{k}} \delta M_{\beta \mathbf{k}} \rangle = \left(T/V\alpha k^2\right) \delta_{\alpha\beta *} \tag{47.11}$$

where α and β are vector suffixes in the xy-plane. The corresponding coordinate correlation function is §

$$G_{\alpha\beta}(r) = (T/4\pi\alpha r)\delta_{\alpha\beta} \tag{47.12}$$

Thus the correlation function of the fluctuations of the direction of M in the ferromagnetic phase decreases according to a low power law ($\sim 1r$) at distances $r \gg r$ whereas the correlation function of the fluctuations of the magnitude M decreases more rapidly.

Using the hypothesis of scale invariance, we can now determine the temperature dependence of the thermodynamic quantity α, expressing it in terms of the critical indices defined above. As already mentioned, when $r \ll r_c$ the correlation functions of all fluctuations of the magnetization, including those of its direction, have the same behaviour (47.8). One feature of scale invariance is precisely that the characteristic distance at which one limiting form changes to the other is r_c. That is, when $r \sim r_c$ the two forms should give the same order of magnitude of G. When $r \sim r_c$, the temperature dependence of G from (47.7) and (47.8) is

$$G \propto r_c^{-(1+\zeta)} \propto (-t)^{v(1+\zeta)}$$

According to (47.12),

$$G \propto (\alpha r_c)^{-1} \sim \alpha^{-1}(-t)^v.$$

[0]† Strictly speaking, we should use here the thermodynamic potential Ω, not go; cf. SP 1. §146. However. according to the theorem of small increments, the derivative term concerned here has the same form for either potential, and the potential will therefore be written as go.

‡ The calculations below are exactly analogous to those in $SP1, 146$.

§ Formula (47.12) can also be derived in microscopic spin-wave theory. It is valid independently of the closeness to the Curie point; far from the latter, the only requirement is that r be much greater than atomic dimensions (see SP2, §71, Problem 4). Neglecting the magnetic anisotropy energy, however, places an upper limi on the range of validity of (47.12). For example, in a uniaxial crystal with the anisotropy energy (41.1). we mus! have $r \leqslant\!< \sqrt{(\beta/\alpha)}$.

Comparison of these two expressions gives

$$\alpha \sim (-t)^{-v\zeta} \tag{47.13}$$

(P. C. Hohenberg and P. C. Martin, 1965). Thus, as $T \to T_c, \alpha$ tends to infinity, though only slowly (since ζ is small). In the Landau theory, it tends to a finite non-zero limit. †

When $\mathbf{H} \neq 0$, the thermodynamic potential (47.9) must contain a further term $-\int HM_z \, \mathrm{d}V$ (when a field is present, the mean direction of M , i.e the z-axis, is of course the same as the direction of $\mathbf{H}$). In a fluctuation of the direction of $\mathbf{M}$ with $\mathbf{M}^2 =$ constant, we have

$$2M\delta M_z + \delta \mathbf{M}_\perp^2 = 0$$

The fluctuation therefore causes the expression (47.10) for the change in $\mathscr{SO}$ to have an additional term

$$-\int H\delta M_z \, \mathrm{d}V = -(H/2M) \int (\delta \mathbf{M}_\perp)^2 \, \mathrm{d}V$$

It is clear that this causes αk^2 in (47.11) to be replaced by $\alpha k^2 + H/M$, so that

$$\langle \delta M_\alpha \delta M_\beta \rangle = \frac{T}{V(\alpha k^2 + H/M)} \delta_{\alpha\beta} \tag{47.14}$$

These formulae yield the susceptibility of the ferromagnetic phase, i.e. the derivative

$$\chi = \frac{\partial}{\partial H} \langle \delta M_z \rangle = -\frac{1}{2M} \frac{\partial}{\partial H} \left\langle (\delta \mathbf{M}_\perp)^2 \right\rangle . \tag{47.15}$$

Substituting $\left\langle (\delta \mathbf{M}_\perp)^2 \right\rangle$ from (47.14) and changing from summation over $\mathbf{k}$ to integration, we find

$$\chi = \frac{T}{VM^2} \int \frac{1}{(\alpha k^2 + H/M)^2} \frac{V d^3 k}{(2\pi)^3},$$

and finally. after evaluating the integral, ‡

$$\chi = T/8\pi(\alpha M)^{3/2} H^{1/2}. \tag{47.16}$$

We see that, in the exchange approximation, the fluctuations of the direction of $\mathbf{M}$ deprive the susceptibility χ in the ferromagnetic phase of its literal significance, as it increases without limit as $H \to 0$. Formula (47.16) is applicable not only near the Curie point. †

By M in the denominator of (47.16) is to be understood its value for $H = 0$. In the fluctuation range (near the Curie point), taking the temperature dependences of M and α from (47.4) and (47.13), we find that in the ferromagnetic phase

$$\chi \propto (-t)^{-3(\beta - v()/2} H^{-1/2}, \quad t < 0. \tag{47.17}$$

In the (temperature) range where the Landau theory is valid, there is a range of values of H for which the ordinary term (39.7) predominates in the susceptibility. For, substituting into (47.16) $M \sim (-at/B)^{1/2}$, we obtain as the condition for this predominance

[0]† It must be emphasized that the possibility of determining the function $\alpha(t)$ depends on the degeneracy of the problem. For the same reason it is possible to determine the temperature dependence of the superfluid density ρ_s of liquid helium near the λ-point; in that case, the degree of degeneracy $n = 2$ (see $SP2, §28$). The quantities $\alpha M^{\frac{3}{2}}$ and ρ_s play an analogous role in the two cases.

‡ The integral is governed by the range $k^2 \sim H_l M\alpha$; for sufficiently small H, this is compatible with the condition $kr_c \ll 1$ for (47.14) to be valid.

$$\sqrt{H} \gg T_c B^{3/4}(a|t|)^{1/4}\alpha^{-3/2}.$$

In the Landau theory, H may be considered weak if $MH \ll AM^2$, i.e. $H \ll (a|t|)^{3/2}B^{-1/2}$. The condition for these two inequalities to be compatible is the same as the condition (47.1) for the Landau theory to be valid.

The exchange approximation becomes invalid in the immediate neighbourhood of the Curie point, where the anisotropy energy becomes considerable on account of the decrease in the exchange energy. The number of order parameter components then varies; for instance, it decreases to one in a uniaxial ferromagnet of the easy-axis type (M_z in place of $\mathbf{M}$; cf. the end of §40). In the Landau theory, this circumstance does not affect the form of the temperature dependence of the spontaneous magnetization and the magnetic susceptibility. In the fluctuation range, however, it is important: the fluctuations of M_2 increase without limit, but those of M_x and M_y remain finite. This alters the values of the critical indices and causes temperature dependence of the anisotropy coefficients. The problem is further complicated by the fact that it may be necessary to take into account also the magnetostatic energy of the magnetic field fluctuations; we shall not pause here to discuss this complex situation.

9.1.12 §48. Antiferromagnets near the Curie point

Like ferromagnetism, an antiferromagnetic structure is established basically by the isotropic exchange interaction of electrons; the weaker relativistic interactions determine the crystallographic orientation of the magnetizations of the sub-lattices. ‡ The antiferromagnets now known are extremely varied in structure and therefore in their particular magnetic properties.

As an illustration, we shall consider only a simple but typical and important case, that of a uniaxial antiferromagnet with two antiparallel magnetic sub-lattices. The atoms in these sub-lattices occupy equivalent lattice sites (that is, the symmetry elements of the magnetic space group include rotations or reflections which interchange the atoms of the different

sub-lattices); otherwise, symmetry would not require strict equality of the magnitudes of the sub-lattice magnetic moments, and the crystal would be ferromagnetic.

Let $\mathbf{M}_1$ and $\mathbf{M}_2$ be the magnetic moments of the two sub-lattices per unit volume. We take as the order parameter, equal to zero in the paramagnetic phase but not in the antiferromagnetic phase, the difference

$$\mathbf{L} = \mathbf{M_1} - \mathbf{M}_2, \tag{48.1}$$

called the antiferromagnetic vector. The magnetization, equal to zero in the absence of a magnetic field, is the sum $\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2$.

In relation to $\mathbf{L}$, the symmetry transformations fall into two classes: those which interchange atoms only within the same sub-lattice, and those which interchange atoms in different sub-lattices. Then $\mathbf{L}$ is transformed simply as an axial vector for the first class, but in addition changes sign for the second class.

Near the Curie point, $\mathbf{L}$ is small. In the Landau theory, the thermodynamic potential $\widetilde{\Phi}$ in this range is expanded in powers of $\mathbf{L}$ and $\mathbf{M}$, as first discussed by Landau in 1933. However,

[0]† It can also be derived in spin-wave theory (see SP2, §71, Problem 2). Neglecting the magnetic anisotropy and the magnetostatic energy of the fluctuations, however, restricts its validity in accordance with the condition (for uniaxial crystals) $H \gg \beta M$ or $H \gg 4\pi M$.

‡ The idea that the exchange interaction may produce a state in which the sub-lattices have antiparallel magnetic moments was first put forward by **L**. Nel (1932). Independently, a similar idea was suggested by **L**. $\mathcal{D}$. Landau (1933), who formulated the concept of the antiferromagnetic state as a thermodynamic phase different from the paramagnetic one, and of the necessary existence of a point of transition between them, This will be called the antiferromagnetic Curie point.

since the magnetization occurs only when the field **H** is present, it would be more correct to expand in terms of **L** and **H** immediately. For a uniaxial crystal, such an expansion is

$$\widetilde{\Phi} = \Phi_0 + AL^2 + BL^4 + D(\mathbf{H}\cdot\mathbf{L})^2 + D'H^2L^2 \\ -\frac{1}{2}\chi_p H^2 + \frac{1}{2}\beta\left(L_x^2 + L_y^2\right) - \frac{1}{2}\gamma\left(H_x^2 + H_y^2\right) - H^2/8\pi \tag{48.2}$$

The first five terms (after Φ_0) are independent of the crystallographic orientation of the vectors **H** and **L**; they are of exchange origin. The next two terms are due to the relativistic interactions; the z-axis is, as usual, taken to be along the principal axis of symmetry of the crystal. A term $\mathbf{H}\cdot\mathbf{L}$ linear in **H** is forbidden by the requirement of invariance under transformations that change the sign of **L**.

If $\beta > 0$, the antiferromagnetic vector **L** is along the z-axis (an antiferromagnet of the easy-axis type). If $\beta < 0, \mathbf{L}$ lies in the basal plane (an antiferromagnet of the easy-plane type). In the former case, the antiferromagnetism corresponds to the vanishing of the function $A(T)$ (the coefficient of ${L_z}^2$); in the latter case, to the vanishing of $A + \frac{1}{2}\beta$ (the coefficient of ${L_x}^2 + {L_y}^2$).

We shall consider an easy-axis antiferromagnet ($\beta > 0$). Near the Curie point, we put as usual $A = a\,(T - T_c)$, and take B to have its value for $T = T_c$; then $B > 0$ is the condition for the state with $L = 0$ to be stable at $T = T_c$. In the paramagnetic phase, $A > 0$ and $L = 0$. In the antiferromagnetic phase, $A < 0$, and minimizing the potential Φ for $H = 0$ gives the usual Landau-theory temperature dependence of L :

$$L = \sqrt{}\left[a\,(T_c - T)\,/2B\right]. \tag{48.3}$$

Differentiating the potential (48.2), using the formula

$$\partial\Phi/\partial\mathbf{H} = -\mathbf{B}'4\pi = -\mathbf{H}/4\pi - \mathbf{M}$$

We find for $L = 0$, i.e. in the paramagnetic phase, †

$$M_x = (\chi_p + \gamma)\,H_x, \quad M_y = (\chi_p + \gamma)\,H_y, \quad M_z = \chi_p H_z \tag{48.4}$$

The constant γ makes the magnetic susceptibility anisotropic in this phase. Because of its relativistic origin, we have $|\gamma| \ll \chi_p$. This constant will be neglected in what follows, so that χ_p will be the isotropic susceptibility for $T > T_c$ · †

In the antiferromagnetic phase, when $H \to 0$ (i.e. when the field dependence of the equilibrium value of **L** is neglected). we have

$$\mathbf{M} = \chi_p\mathbf{H} - 2D\mathbf{L}(\mathbf{L}\cdot\mathbf{H}) - 2D'L^2\mathbf{H} \tag{48.5}$$

If the field is perpendicular to **L**, then

$$\mathbf{M} = \chi_\perp\mathbf{H}, \quad \chi_\perp = \chi_p - 2D'L^2 \\ = \chi_p - (D'a/B)\,(T_c - T) \tag{48.6}$$

In a longitudinal field,

$$\mathbf{M} = \chi_\parallel\mathbf{H}, \quad \chi_\parallel = \chi_\perp - 2DL^2 \\ = \chi_p - (D + D')\,a\,(T_c - T)\,/B \tag{48.7}$$

[0]† The term $-H^2/8\pi$ is separated in (48.2) so that the differentiation of the remaining terms with respect to **H** gives just M.

The susceptibility is anisotropic and remains so even when the relativistic interactions are neglected, i.e. the anisotropy is of exchange origin.

It must also be emphasized that at the Curie point itself the susceptibility remains finite and continuous, but its first derivatives are discontinuous. There is an important difference here from a ferromagnet, for which the susceptibility becomes infinite at the transition point. This difference between the ferromagnetic and antiferromagnetic Curie points is closely related to the difference in the way they are affected by the presence of a magnetic field. In a ferromagnet, any field, however weak. blurs the transition, since by magnetizing the paramagnetic phase it removes the difference in symmetry of the two phases. Antiferromagnetic order, however, cannot be created by a magnetic field; the difference in symmetry between the two phases is maintained even in the presence of a field, and the transition remains sharp.

With the accuracy allowed by the expansion (48.2), the coefficients D and D' in (48.6) and (48.7) may be taken as having their values at $T = T_c$. The discontinuities in the derivatives of the susceptibility are therefore ‡

$$\frac{\partial \chi_p}{\partial T} - \frac{\partial \chi_\perp}{\partial T} = -\frac{aD'}{B}, \frac{\partial \chi_p}{\partial T} - \frac{\partial \chi_\parallel}{\partial T} = -\frac{a\,(D + D')}{B} \tag{48.8}$$

Let us now return to the expression (48.2) for $\widetilde{\Phi}$. The terms with the coefficients D and β depend on the direction of $\mathbf{L}$. We shall assume that $D > 0$ (i.e. $\chi_\perp > \chi_\parallel$), and as before that $\beta > 0$ (an easy-axis antiferromagnet). If the magnetic field is perpendicular to the z-axis, the form of these terms shows that the minimum of $\tilde{\Phi}$ corresponds to $L_x = L_y = 0$, i.e. $\mathbf{L}$ is always in the z-direction. If, however, the field is also along the z-axis, we see that, when the magnetic energy in the field (the first of the terms mentioned) becomes comparable in magnitude with the anisotropy energy, there should be a change in the direction of $\mathbf{L}$.

which rotates into the basal plane. This spin flop of the sub-lattices occurs abruptly at a certain field value $H = H_f$ (L. Nel, 1936), a result proved as follows. The terms in question in (48.2) may be written in the form

$$H_z^2 D L^2 + L^2 \left(-D H_z^2 + \frac{1}{2}\beta \right) \sin^2 \theta,$$

where θ is the angle between $\mathbf{L}$ and the z-axis. It is evident that the minimum of $\tilde{\Phi}$ occurs for $\theta = 0$ if $H_z < H_f$, where

$$H_f^2 = \beta/2D = \beta L^2 / \left(\chi_\perp - \chi_\parallel \right). \tag{48.9}$$

If $H_z > H_f$, however, the value corresponding to equilibrium is $\theta = \frac{1}{2}\pi$, and $\mathbf{L}$ is perpendicular to the z-axis. A similar situation continues to exist far from the Curie point. The flop field H_f depends on the temperature, and the above discussion shows that the curve $H = H_f(T)$ in the TH-plane is a curve of first-order phase transitions. †

In sufficiently strong magnetic fields, the antiferromagnetic structure cannot be thermodynamically stable, since the parallel orientation along the field becomes energetically favourable for the magnetic moments of the two sub-lattices. The disappearance of the antiferromagnetic structure involves a change in symmetry and takes place by a secondorder phase transition. In the TH-plane, therefore, the region in which the antiferromagnetic phase exists is bounded by a curve $H = H_c(T)$. The loss of antiferromagnetism must occur when the magnetic energy in

[0]† In all known cases. the substance becomes paramagnetic at the antiferromagnetic Curie point, i.e. $\chi_p > 0$. The sign of χ_p cannot, however, be deduced from thermodynamic arguments alone.

‡ No general conclusion as to the sign of D and D' can be drawn from purely thermodynamic arguments. In practice, the discontinuity of $\partial\chi_1/\partial T$ is always negative; this means that $D + D' > 0$. That of $\bar{C}\chi_1/\partial T$ is usually negative also, and near the Curie point $\chi_1 > \chi_{11}$; this means that $D > 0$ and $D' > 0$.

the field becomes comparable with the exchange energy. Far from the Curie point, the critical field can be estimated in order of magnitude as $\mu H_c \sim T_c$, where μ is the atomic magnetic moment. As the Curie point is approached, H_c decreases. and becomes zero at that point. The function $H_c(T)$ in this range is easily determined by means of the same expression (48.2) for the thermodynamic potential.

It has been shown above that, if the field $\mathbf{H}$ is perpendicular to the z-axis, $\mathbf{L}$ is always parallel to that axis. The L-dependent terms in the thermodynamic potential are

$$AL^2 + BL^4 + D'H^2L^2 \tag{48.10}$$

From this we see that the presence of the magnetic field replaces the coefficient A by $A + D'H^2$. and the latter is zero at the new transition point. The critical field is therefore given by

$$H_c^2 = -A/D' = a\,(T_c - T)\,/D'. \tag{48.11}$$

If H is parallel to the z-axis. for $H < H_f$ the vector L is again along that axis, but the L dependent terms in (48.2) differ from (48.10) in that D' is replaced by $D + D'$. In this case, therefore,

$$H_c^2 = \frac{a}{D + D'}\,(T_c - T) \tag{48.12}$$

Lastly, if $H > H_f$ the vector $\mathbf{L}$ is perpendicular to the z-axis: in this case, we similarly find for the critical field ‡

$$H_c^2 = \frac{a}{D'}\,(T_c - T - \beta/2a) \tag{48.13}$$

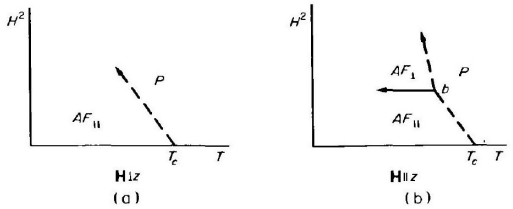


Fig. 26

Figure 26 shows the (T, H^2) phase diagram for an antiferromagnet near the Curie point for both the field directions considered. The dashed lines are second-order transitions, and the continuous line a first-order one; P denotes the paramagnetic phase, $AF_\parallel$and $AF_\perp$ the antiferromagnetic phases with $\mathbf{L}$ respectively parallel and perpendicular to the z-axis. In the Landau theory (which is used for the whole treatment here) the diagrams consist of straight lines. For a longitudinal field there is a bicritical point (b in Fig. 26b) where the first-order phase transition line ends on a second-order one. This point is analogous to the bicritical point in the PT-plane (SP 1, §150, Fig. 67). Its coordinates are

[0†] As has already been stressed more than once. the anisotropic terms in expressions such as (48.2) remain Significant far from the transition point, whether or not L is small, since they are part of the expansion of the telativistic interactions in powers of the components of the unit vector $\mathbf{l} = \mathbf{L}/\mathbf{L}$. Formula (48.9) also is therefore meaningful far from the Curie point, provided that we regard βL^2 as the coefficient in the $\frac{1}{2}\left({l_x}^2 + {l_y}^2\right)$ term in the thermodynamic potential.

‡ The derivation of formulae (48.11)-(48.13) in the Landau theory is due to A. S. Borovik-Romanov (1959)

$$T_b = T_c - \frac{\beta}{2a}\frac{D+D'}{D}, H_b^2 = \beta/2D \tag{48.14}$$

where β, D, D' are the values of the coefficients for $T = T_b$.

9.1.13 §49. The bicritical point for an antiferromagnet

The Landau theory used in §48 becomes inapplicable, as usual, in the immediate neighbourhood of second-order transition curves, i.e. in the fluctuation range. Let us consider this range near a bicritical point in the phase diagram of a uniaxial antiferromagnet (of the easy-axis type) in a longitudinal magnetic field.

The effective Hamiltonian for this problem is

$$\begin{aligned}\mathscr{H}_{\text{eff}} = \int \Bigg\{ aL^2 \left[T - T_b - \frac{D+D'}{a}\left(H_f^2 - H_z^2\right)\right] \\ + BL^4 + DL^2\left(H_f^2 - H_z^2\right)\sin^2\theta + \frac{1}{2}\bar{\alpha}\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial x_i}\Bigg\}\,\mathrm{d}V\end{aligned} \tag{49.1}$$

The integrand consists of the **L**-dependent terms in the expansion (48.2), with $A = (T - T_c)\,a$, the notation T_b and H_f from (48.9) and (48.14), and the addition of a gradient term This Hamiltonian has the same form as for a uniaxial ferromagnet (not in a magnetic [1] field), differing only in the notation: **L** replaces **M**, the expression in the square brackets replaces $T - T_c$, and

$$u = 2D\left(H_f^2 - H_z^2\right) \tag{49.2}$$

replaces the anisotropy constant β of the ferromagnet. When $H_z = H_f$, this constant is zero, and (49.1) reduces to

$$\mathscr{H}_{\text{eff}} = \int \left\{ aL^2\left(T - T_b\right) + BL^4 + \frac{1}{2}\bar{\alpha}\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial x_i}\right\}\mathrm{d}V, \tag{49.3}$$

which is formally the same as the effective Hamiltonian of a ferromagnet in the exchange approximation (47.2). These analogies enable us to elucidate a number of properties of an antiferromagnet near a bicritical point, by using the known results for a ferromagnet (M. E. Fisher and D. R. Nelson, 1974).

The equation $H_z = H_f$ corresponds to a first-order phase transition curve (spin flop). The analogy leads to the conclusion that the thermodynamic properties of the antiferromagnet on this curve near the bicritical point are the same (with appropriate reinterpretation of the quantities) as those of a purely exchange ferromagnet near its Curie point. In particular, as the bicritical point is approached along this curve, the antiferromagnetic vector tends to zero in accordance with

$$L \propto (T_b - T)^{\beta} \tag{49.4}$$

where β is the same as in (47.4). †

Near the bicritical point but off the first-order transition curve, the parameter u is small but not zero. However small the value of u, its importance increases as the second-order transition curve is approached (see the comment at the end of §47): the number of components of the order parameter decreases to one (L_z in the $AF_{\parallel}$phase) or two (L_x and L_y in the $AF_{\perp}$ phase). As u becomes smaller, so does the region in which it is important. The change from $n = 3$ to $n = 1$ or 2 takes place via an intermediate range. It is plausible to assume scale invariance in

that range: only the scale of measurement of u changes as the bicritical point is approached. Accordingly, there is a new cross-over index ϕ : as the scale of $t = T - T_b$ changes, that of u varies as $|t|^\phi$. The index ϕ must be positive, since any value of u, however small, affects the nature of the transition.

In using this hypothesis, we must assume that the phase transition curves near the bicritical point are given by constant values of $x = u/|t|^\phi$. The first-order transition curves correspond to $x = 0$, the second-order ones between P and $AF_\parallel$to some $x_1 > 0$, and those between P and $AF_\perp$ to some $x_2 < 0$. By H_f in the definition (49.2) we must now understand, of course, the actual function $H_f(T)$ that would give the exact solution of the statistical problem with the effective Hamiltonian (49.1). Expanding it in powers of t and omitting from u the constant factor $2H_b$, we find the variable u near the bicritical point as

$$u = H_b - H_z + c\,(T - T_b)\,, \tag{49.5}$$

where c is a constant. The equation of the first-order transition curve is

$$H_z - H_b = c\,(T - T_b)\,,$$

and those of the two second-order transition curves are

$$H_z - H_b = c\,(T - T_b) \pm c_{1,2}\,(T - T_b)^\phi \tag{49.6}$$

Where c_1 and c_2 are positive constants. When $\phi > 1$ (numerical estimates give $\phi \cong 1.25$),

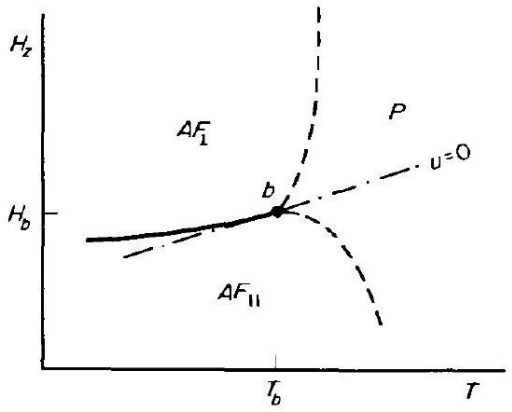


Fig. 27

these curves have the form shown in Fig. 27 in the fluctuation range; all the curves have a common tangent at b.

The hypothesis of scale invariance near the bicritical point also leads to a number of conclusions as to the manner of variation of the magnitude of the antiferromagnetic vector $\mathbf{L}$ as that point is approached from various directions in the T_z-plane, but we shall not pause to discuss these. †

9.1.14 §50. Weak ferromagnetism

There are crystals in which the exchange interaction establishes an antiferromagnetic structure but the comparatively weak relativistic interactions cause a slight distortion of this struc-

[0]† The index γ in this case has no direct physical significance, since it is related to the field $\mathbf{h}$, which would appear as a term $-h \cdot L$ in the effective Hamiltonian, but has no real existence in an antiferromagnet.

ture, as a result of which a magnetization $\mathbf{M}$ appears which is "anomalously" small in proportion to the ratio of relativistic to exchange interactions. This is called weak ferromagnetism ‡

The exchange interaction itself allows any orientation of the antiferromagnetic vector $\mathbf{L}$ in the crystal. A particular crystallographic orientation of $\mathbf{L}$ is established only by the relativistic interactions described by terms anisotropic with respect to $\mathbf{L}$ in the expansion of the thermodynamic potential. It may happen that the symmetry of the resulting structure would in itself allow the existence of a ferromagnetic moment $\mathbf{M}$ also.§ It is in such cases that weak ferromagnetism occurs: among the relativistic terms in the expansion of the thermodynamic potential, there are some which give rise to the required distortion of the antiferromagnetic structure.l This will be shown by means of a characteristic example.

Let us consider rhombohedral crystals belonging to the space group D_{3d}^6. As we know (see $QM, 893$), the crystal class $\boldsymbol{D}_{3d}$ contains the following symmetry elements: a threefold axis of symmetry C_3 (trigonal axis), three twofold axes perpendicular to it (denoted by U_2). and a centre of inversion I; in consequence, there are three planes of symmetry σ_d, each passing through the C_3 axis and perpendicular to one of the U_2 axes (and thus bisecting the

angle between the other two). In the space group $\boldsymbol{D}_{3d}^6$, the σ_d planes become glide planes with a translation of half a period along the trigonal axis. This gives an arrangement of the axes and centre of inversion in each unit cell as shown in Fig. 28. The vertical segment is one period along the trigonal axis (a spatial diagonal of the rhombohedral cell), whose length is arbitrarily taken as unity. The twofold axes pass through the points $\frac{1}{4}$ and $\frac{3}{4}$. The centre of inversion occurs at 0 and $\frac{1}{2}$ (marked by crosses in Fig. 28). The vertical planes σ_d are not shown.

In the antiferromagnets $FeCO_3$ and $MnCO_3$, each unit cell contains two magnetic ions (Fe^{++}or Mn^{++}), which occupy positions at the equivalent points 0 and $\frac{1}{2}$ on the trigonal axis. The exchange interaction establishes a magnetic structure in which the moments of these two ions are antiparallel. In $FeCO_3$ the moments of the Fe^{++}ions are along the nigonal axis (Fig. 29). It is easy to see that such a structure is invariant under all transformtions of the class $\boldsymbol{D}_{3d}$, and therefore does not allow ferromagnetism: the existence of a vector $\mathbf{M}$ along the trigonal axis is excluded by the presence of the U_2 axes, and of one in the basal plane by that of the C_3 axis.

In the antiferromagnet $MnCO_3$, the magnetic moments of the ions lie in the basal (xy) plane, which is perpendicular to the trigonal (z) axis (Fig. 30). If the moments lie in one of the σ_{d} planes, which we then take as the xz-plane, the magnetic structure has the symmetry elements (in addition to the unit element) ${U_2}^{(y)}, I, {\sigma_d}^{(xz)}$, i.e. belongs to the magnetic class which coincides with the ordinary class $\boldsymbol{C}_{2h}$; it allows the existence of a vector $\mathbf{M}$ in the y-direction. If, on the other hand, the moments lie along one of the U_2 axes, which we then take as the x-axis, the magnetic structure has the symmetry elements ${U_2}^{(x)}R, I, {\sigma_d}^{(xz)}R$, i.e. belongs to the magnetic class $\boldsymbol{C}_{2h}\,(\boldsymbol{C}_i)$; it too allows the existence of a vector $\mathbf{M}$ in the y direction. In either case, $\mathbf{M}$ arises from the turning of the moments of the two ions in each unit cell to lie oppositely in the xy-plane (Fig. 31).

Going on to a quantitative theory, we again define vectors $\mathbf{M} = \mathbf{M_1} + \mathbf{M_2}$ and $\mathbf{L} = M_1 - M_2$, where the suffixes 1 and 2 refer to the two magnetic sub-lattices. The unit vector in the direction of $\mathbf{L}$ is denoted by $\mathbf{l}$.

Let us consider the expansion of the thermodynamic potential Φ (for $\mathbf{H} = 0$) in powers of $\mathbf{M}$ and $\mathbf{I}$. The expansion in powers of $\mathbf{M}$ is permissible because this quantity is small in a

[0†] See M. E. Fisher and D. R. Nelson, Physical Review Letters 32. 1350, 1974.

‡ With the terminology described at the end of §37, it would be more correctly named "weak ferrimagnetism".

§ For this, it is always necessary that the magnetic unit cell should be the same as the crystallographic one; see the end of §38.

|| The theory of weak ferromagnetism is due to I. E. Dzyaloshinskii (1957).

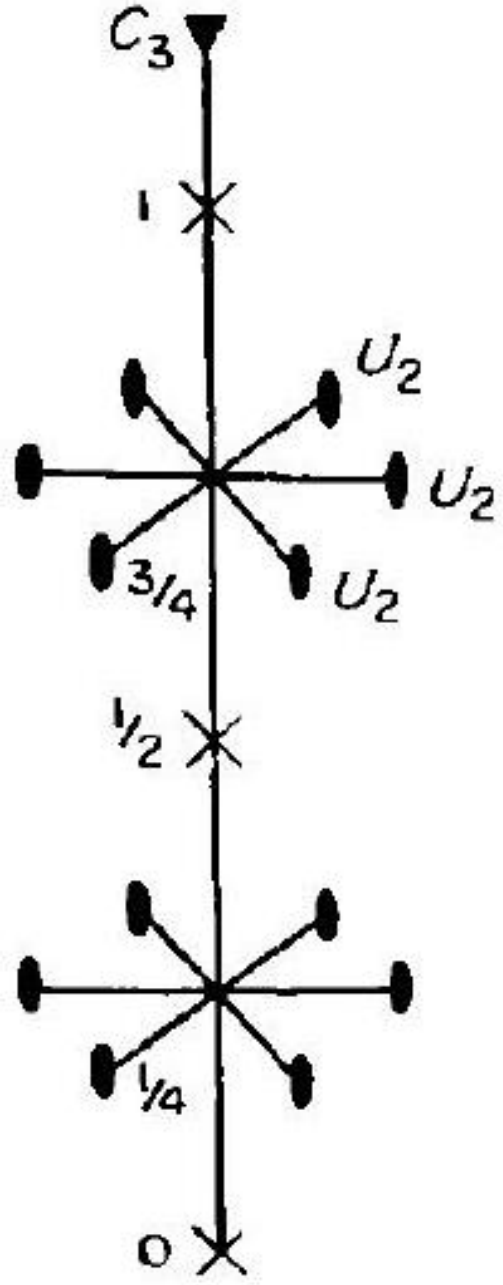


Fig. 28

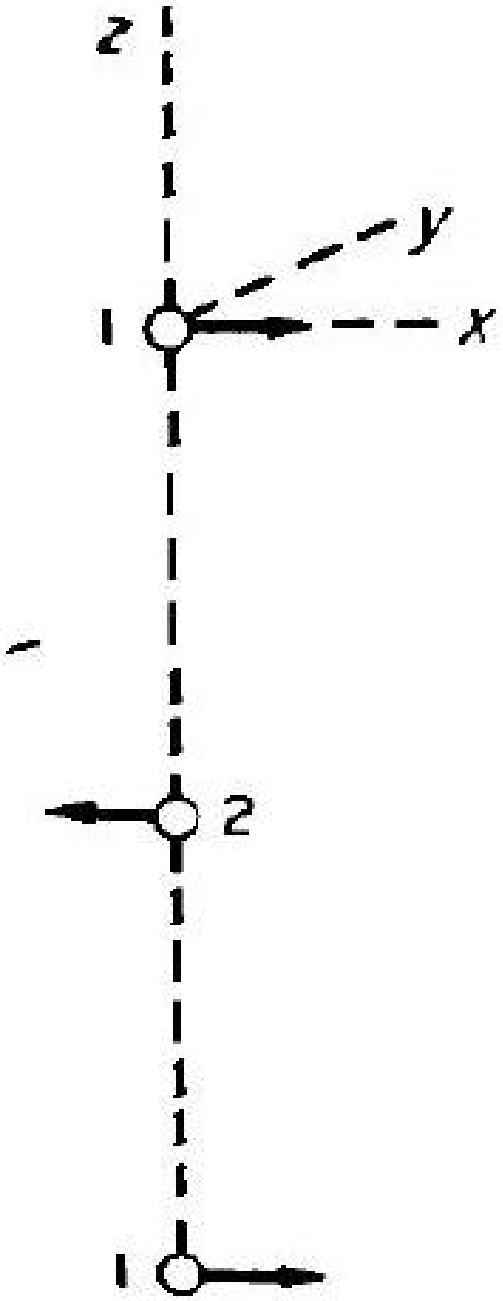
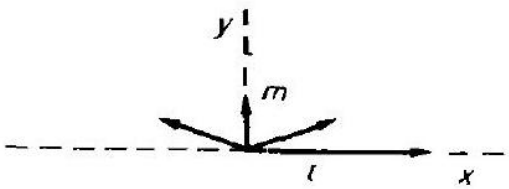


Fig. 30



F1G 31

weak ferromagnet. The expansion of the anisotropy energy in powers of 1 is based, as usual, on the relative smallness of the relativistic interactions. There is thus no assumption of

nearness to a second-order phase transition point (L small); the theory given here is therefore not subject to the limitations inherent in the Landau theory.

The expansion terms must be invariant under all transformations in the group D_{3d}^6. The first terms in such an expansion are

$$\Phi = \Phi_0(L) + BM^2 + D(\mathbf{l}\cdot\mathbf{M})^2 - \frac{1}{2}\beta M_z^2 - \frac{1}{2}\gamma L^2 l_z^2 + \zeta L\,(M_x l_y - M_y l_x)\,, \tag{50.1}$$

where $\Phi_0(L)$ is a function isotropic with respect to $\mathbf{L}$. The first two terms (after Φ_0) are of exchange origin; here $B > 0$ (otherwise, there would exist a spontaneous magnetization independent of the antiferromagnetism, i.e. the body would be an ordinary exchange ferromagnet). The next three terms are of the first order ($\sim v^2/c^2$) in the relativistic interactions. † The last of these may be put in the form $L\zeta\cdot\mathbf{M}\times\mathbf{l}$, where ζ is a vector parallel to the z-axis. ‡

It is obvious that all the terms in (50.1) except the last are invariant. To test the invariance of the last term, it is sufficient to do so with respect to the C_3 axis, one of the U_2 axes, and the inversion I. The invariance under rotations about the trigonal (z) axis is evident from the form which shows the z-component of $\mathbf{M}\times\mathbf{I}$; here it is important that the rotations do not interchange atoms between different sub-lattices, so that $\mathbf{M}$ and $\mathbf{I}$ are transformed in the same manner. The invariance under inversion follows from that of M and I separately; for M this follows from its being an axial vector, for I we need also to note that in the structure considered the inversion interchanges atoms only within each sublattice. The transformation $U_2{}^{(x)}$ interchanges atoms with oppositely directed moments; under such a rotation, therefore, $M_x, M_y \to M_x, -M_y; l_x, l_y \to -l_x, l_y$; and the invariance of $M_x l_y - M_y l_x$ is obvious.

We shall suppose that $\gamma < 0$. Then the vector I is in the basal plane ($I_z = 0$). Taking as the xz-plane the plane containing $\boldsymbol{I}$, and minimizing Φ with respect to $\mathbf{M}$ for a given $\mathbf{L}$, we find for the ferromagnetic moment

$$M_x = 0, M_y = (\zeta/2B)L_x, M_z = 0 \tag{50.2}$$

Since $|\zeta| \ll B, M$ is in fact small. We see that the occurrence of weak ferromagnetism is due to the last term in (50.1), which is bilinear in $\mathbf{M}$ and $\mathbf{I}$. The close relation between the direction of $\mathbf{M}$ and the antiferromagnetic structure is characteristic of weak ferromagnetism; in the present case, $\mathbf{M}$ is in the same basal plane and is perpendicular to $\mathbf{L}$.§

When a field is present, the dependence of the magnetization on $\mathbf{H}$ is given by the conditions for a minimum of the thermodynamic potential $\widetilde{\Phi} = \Phi - \mathbf{M}\cdot\mathbf{H} - \boldsymbol{H}^2/8\pi$. The minimization is to be effected with respect to the orientation of the structure in the basal

plane and with respect to the components of $\mathbf{M}$. It is evident that, when the magnetic anisotropy in the basal plane is neglected, the magnetization rotates to a position such that its component $\mathbf{M}_\perp$ in the basal plane is parallel to the field $\mathbf{H}_\perp$, and $\mathbf{L}$ is accordingly perpendicular to $\mathbf{H}_\perp$ · † The minimization of $\widetilde{\Phi}$ with respect to $\mathbf{M}_\perp$ and M_z then gives

$$M_z = \chi_\parallel H_z, \quad M_\perp = \chi_\perp\,(H_D + H_\perp)\,, \tag{50.3}$$

[0]† The factors L^2 and L in the last two terms are written only in order to make all the coefficients in (50.1) dimensionless, and do not signify an expansion in powers of L.

‡ The microscopic origin of such a term is due to the spin-antisymmetric interaction which occurs as a secondorder effect in perturbation theory, the perturbation being the mixed terms bilinear in the exchange and relativistic spin orbit interactions. See T. Moriya. in Magnetism (ed. by G. T. Rado and H. Suhl). Vol. 1. Academic Press, New York, 1963, p. 85.

§ In the approximation corresponding to the thermodynamic potential (50.1), there is no magnetic anisotropy in the basal plane, and the direction of $\mathbf{L}$ in that plane remains arbitrary. Anisotropy in the basal plane, and therefore a particular orientation of $\mathbf{L}$, occur only when higher-order terms (up to the sixth order) are taken into account. Terms then also come in which are mixed as regards the z and the x or y components of the vectors, so that the magnetic moments deviate from the basal plane by a small angle.

where the susceptibilities are

$$\chi_{\text{II}} = 1/(2B - \beta), \chi_{\perp} = 1/2B \tag{50.4}$$

and

$$H_D = |\zeta| L \tag{50.5}$$

is the Dzyaloshinskii field, i.e. the "effective field" which determines the spontaneous magnetization of a weak ferromagnet. Since $|\beta| \ll B$, we have $\chi_{\text{II}} \cong \chi_{\perp}$.
Another property of these substances is one which appears when a field $\mathbf{H}$ is applied, and is found near the point of transition to the paramagnetic phase. In the Landau theory, we expand the function $\Phi_0(L)$ in this region in powers of L :

$$\Phi_0(L) = \Phi_0(0) + AL^2 + CL^4$$

Let the vector $\mathbf{L}$ be in the positive x-direction. We take the particular case where $\zeta > 0$‡; then M is in the positive y-direction. The field H is assumed to be in that direction also. The thermodynamic potential is

$$\widetilde{\Phi} = \Phi_0(0) + AL^2 + CL^4 + BM^2 - \zeta LM - HM - H^2/8\pi; \tag{50.6}$$

near the Curie point, the expansion of the anisotropy energy in powers of the unit vector I becomes one in powers of $\mathbf{L}$ itself. In the absence of a field, $M = \zeta L/2B$, and the expansion (50.6) becomes

$$\Phi = \Phi_0 + \left(A - \zeta^2/4B\right) L^2 + CL^4$$

The Curie point is given by the vanishing of the coefficient of L^2; near this point, therefore,

$$A - \zeta^2/4B = a\,(T - T_c)$$

$(a > 0)$. The remaining coefficients are taken to have their values at $T = T_c($ with $C > 0)$. When the field is present, elimination of M from the equations $\partial\widetilde{\Phi}/\partial L = 0, \partial\widetilde{\Phi}/\partial M = 0$ gives the following equation for L :

$$2CL^3 + a\,(T - T_c)\,L - \zeta H/4B = 0. \tag{50.7}$$

This shows that the magnetic field blurs the phase transition in a weak ferromagnet, as in an ordinary one.§ The antiferromagnetic vector also is non-zero on both sides of T_c; the

magnetic field creates antiferromagnetic order in the paramagnetic phase, thus removing the difference between the symmetry properties of the two phases (A. S. Borovik. Romanov and V. I. Ozhogin, 1960). When $T > T_c, L$ decreases beyond a certain distance from T_c according to

$$L = \zeta H/4aB\,(T - T_c)\,.$$

[0]† It is assumed here that $D > 0$; when $D < 0$, the presence of the term $-|D|(1 \cdot \mathbf{M})^2$ with a large coefficient $|D|$ may have the result that 1 and $\mathbf{H}_{\perp}$ are no longer at right angles.
The neglect of the anisotropy in the basal plane imposes certain lower limits on the fields concerned.
‡ The sign of ζ is arbitrary in the sense that it depends on the definition of $\mathbf{L} = \mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2$ according to which magnetic atoms in the crystal are taken as the sub-lattices 1 and 2 . But when the choice has been made in a given crystal the sign of ζ is definite, and determines the direction of $\mathbf{M}$ with respect to that of $\mathbf{L}$ and the crystallographic axes.
§ Equation (50.7) has the same form as (19.4) for a ferroelectric in an electric field and the corresponding equation for an ordinary ferromagnet in a magnetic field.

9.1.15 §51. Piezomagnetism and the magnetoelectric effect

The phenomena of piezomagnetism and the magnet oelectric effect in antiferromagnets are closely related to the magnetic symmetry.

Piezomagnetism is the occurrence of magnetization when elastic stresses are applied to the crystal; it is analogous to piezoelectricity, and is represented by the presence in the thermodynamic potential of the crystal of a term linear both in the field and in the elastic stress tensor:

$$\widetilde{\Phi}_{pm} = -\lambda_{i,kl} H_i \sigma_{kl}, \tag{51.1}$$

where $\lambda_{i,kl}$ is a tensor symmetrical in the suffixes k and l; cf. (17.7). This term causes the induction $B_i = -4\pi\partial\widetilde{\Phi}/\partial H_i$ to contain a further term $4\pi\lambda_{i,kl}\sigma_{kl}$. Thus, when $\mathbf{H} = 0$, there is a magnetization linear in the stress:

$$M_i = \lambda_{i,kl}\sigma_{kl} \tag{51.2}$$

Another manifestation of the same property is linear magnetostriction, i.e. the occurrence of a strain linear in the field applied to the crystal:

$$u_{kl} = -\partial\widetilde{\Phi}_{pm}/\partial\sigma_{kl} = \lambda_{i,kl} H_i \tag{51.3}$$

Time reversal changes the sign of the field $\mathbf{H}$ (and of the magnetization $\mathbf{M}$) while leaving the tensor σ_{kl} unchanged; the thermodynamic potential must also remain unchanged. of course. The piezomagnetic tensor $\lambda_{i,kl}$ therefore changes sign under time reversal. In turn. it follows that piezomagnetism is possible only in bodies having a magnetic structure without this, their properties are invariant under the transformation R, and therefore $\lambda_{i,kl} = -\lambda_{i,kl} = 0$. Piezomagnetism is possible in antiferromagnets belonging to certain magnetic symmetry classes which contain R only in combination with rotations or reflections, or else do not contain R at all (B. A. Tavger and V. M. Zatsev, 1956).

The magnetoelectric effect consists in a linear relation bet ween the magnetic and electric fields in matter; it causes, for example, a magnetization proportional to the electric field present (L. D. Landau and E. M. Lifshitz, 1956). This effect is described by a term in the thermodynamic potential that is linear in both the magnetic field and the electric field:

$$\widetilde{\Phi}_{m-e} = -\alpha_{ik} E_i H_k, \tag{51.4}$$

where α_{ik} is an unsymmetrical tensor. When $\mathbf{H} = 0$, the electric field generates in the substance a magnetization

$$M_k = x_{ik} E_i \tag{51.5}$$

and when $\mathbf{E} = 0$ the magnetic field generates an electric polarization

$$P_i = \alpha_{ik} H_k$$

Like piezomagnetism, the magnetoelectric effect is possible only for certain magnetil ymmetry classes; the magnetoelectric tensor α_{ik} is odd under time reversal and zero in bodies without a magnetic structure. Since $\mathbf{E}$ is a polar vector and $\mathbf{H}$ an axial one, α_{ik} is always zero if the crystal symmetry contains the inversion I; for the magnetoelectric effect to exist, the inversion can occur only in the combination IR.

PROBLEMS †

PROBLEM 1. Find the non-zero components of the piezomagnetic tensor in the antiferromagnet $FeCO_3$ with the structure shown in Fig. 29).

SOLUTION. As already mentioned in §50, the magnetic class of this structure is the same as the crystal class D_{34} and does not contain the element R at all. The transformations of this class leave invariant the expression

$$\widetilde{\Phi}_{pm} = -\lambda_1 \left[\left(\sigma_{xx} - \sigma_{yy} \right) H_x - 2\sigma_{xy} H_y \right] - \lambda_2 \left(\sigma_{xz} H_y - \sigma_{yz} H_x \right),$$

the z-axis being along the threefold symmetry axis, and the x-axis along one of the horizontal twofold axes. (This expression for the class $\boldsymbol{D_3}$ in the piezoelectric case has been found in §17, Problem 1; it remains valid in the piezomagnetic case for the class $\boldsymbol{D}_{3d} = \boldsymbol{D}_3 \times \boldsymbol{C}_i$ also, since the spatial inversion I leaves unchanged both the tensor σ_{ik} of rank two and the axial vector $\mathbf{H}$.) The magnetization is therefore

$$M_x = \lambda_1 \left(\sigma_{xx} - \sigma_{yy} \right) - \lambda_2 \sigma_{yz}, \quad M_y = -2\lambda_1 \sigma_{xy} + \lambda_2 \sigma_{xz}$$

Problem 2. The same as Problem 1, but for the magnetic class $\boldsymbol{D}_{4h}\,(\boldsymbol{D}_{2h})$ · ‡

Solution. This class has the elements (besides the unit element) $C_2, 2C_4R, 2U_2, 2U'_2R, I, \sigma_h, 2\sigma_v, 2\sigma'_vR$; the notation is everywhere as in QM, §95. These transformations leave invariant the expression

$$\Phi_{pm} = -\lambda_1 \left(\sigma_{xz} H_y + \sigma_{yz} H_x \right) - \lambda_2 \sigma_{xy} H_z,$$

the z-axis being along the fourfold symmetry axis, the x and y axes along two horizontal twofold axes. The magnetization is therefore

$$M_x = \lambda_1 \sigma_{yz}, \quad M_y = \lambda_1 \sigma_{xz}, \quad M_z = \lambda_2 \sigma_{xy}.$$

Problem 3. Find the non-zero components of the magnetoelectric tensor for the antiferromagnet chromium sesquioxide (Cr_2O_3). This crystal belongs to the space group D^6_{3d} (see §50) and contains in each unit cell four chromium atoms at the equivalent points $u, \frac{1}{2}-u, \frac{1}{2}+u, 1-u\,\left(u<\frac{1}{4}\right)$ on the trigonal axis: their magnetic moments are along this axis (Fig. 32).

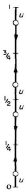


Fig. 32

Solution. The antiferromagnet in question belongs to the magnetic class $\boldsymbol{D}_{3\mathbf{d}}\,(\boldsymbol{D}_3)$, which contains the elements $2C_3, 3U_2, IR, 2S_6R, 3\sigma_dR$. These transformations leave invariant the expression

$$\Phi_{m-e} = -\alpha_{\parallel} E_z H_z - \alpha_{\perp} \left(E_x H_x + E_y H_y \right),$$

the z-axis being along the trigonal axis; the non-zero components are therefore $\alpha_{xx} = \alpha_{yy} = \alpha_1, \alpha_{zz} = \alpha_M$.

[0†] The examples given below are due to I. E. Dzyaloshnski (1957, 1959).

‡ The antiferromagnets manganese difluoride (MnF_2) and cobalt difluoride (CoF_2) are of this type

9.1.16 §52. Helicoidal magnetic structures

A special category of magnetic structures consists of those in which the periods of the "magnetic lattice" are incommensurate with the periods of the original crystal lattice. Various mechanisms are possible for the formation of such structures; here we shall consider one mechanism noted by I. E. Dzyaloshinski (1964), which allows a simple formulation in macroscopic terms. This will be done for a specific example, that of a crystal of the cubic class $\boldsymbol{T}$, in which the exchange interaction alone would give a purely ferromagnetic order of the magnetic moments (V. G. Bar'yakhtar and E. P. Stefanovskii, 1969). †

For the structure in fact to exist, it must be stable under small perturbations which remove the macroscopic spatial uniformity of the crystal. This condition has been tacitly assumed to be satisfied throughout the discussion up to now. The additional nonuniformity energy resulting from the perturbation was given by (43.1); since this is positive definite, the necessary stability does exist.

The expression (43.2) was derived in §43 as the first non-vanishing term in the expansion of the non-uniformity energy in a cubic crystal in powers of the derivatives of the magnetization M. There, however, we were concerned only with the energy of exchange origin. It was also noted that the crystal symmetry may allow the existence of nonexchange (relativistic) terms containing products of the derivatives $\partial M_i/\partial x_k$ and the components M_i; for this to occur, the symmetry must not include a centre of inversion. The crystal class $\boldsymbol{T}$ is such a class; it allows the existence of a term of the form $\mathbf{M}\cdot\mathbf{curl}\mathbf{M}$ that is invariant under the symmetry operations in it. The non-uniformity energy thus has the form

$$U_{\text{non-u}} = \gamma\mathbf{M}\cdot\ \text{curl}\ \mathbf{M} + \frac{1}{2}\alpha\left[(\text{grad}\, M_x)^2 + (\text{grad}\, M_y)^2 + (\text{grad}\, M_z)^2\right]. \tag{52.1}$$

The condition $\alpha > 0$ does not here guarantee the stability of the uniform state.
We must take into account, however, the fact that the first-order term in the derivatives in (52.1) contains an extra small factor ($\sim v^2/c^2$) in comparison with the second-order term, because of its relativistic origin ‡; this means that $\gamma \ll \alpha/a$, where a is the lattice constant. It is thus possible to find a new stable state while remaining within the range of validity of the expansion (52.1): the simple ferromagnetic structure is distorted in a nonuniform manner, but only over distances much greater than a, so that the derivatives remain small.

The value of M is determined by the basic exchange interactions (which are not related to the non-uniformity). The "large-scale" structure is determined by the minimization of

$$\frac{1}{2}\alpha'\left[(\partial M_x/\partial_x)^2 + (\partial M_y/\partial y)^2 + (\partial M_z/\partial z)^2\right].$$

the energy (52.1). For a given M, this structure consists in a slow change in the direction of $\mathbf{M}$.†
We seek $\mathbf{M}(\mathbf{r})$ as a periodic function

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}) = \frac{M}{\sqrt{2}}\left(\mathbf{m}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + \mathbf{m}^* e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\right); \tag{52.3}$$

if $\mathbf{M}^2 = M^2$ is constant, the square of the complex unit vector $\mathbf{m}\,(\mathbf{m}\cdot\mathbf{m}^* = 1)$ must be zero: $\mathbf{m}^2 = 0$. Such a vector may be expressed as $\mathbf{m} = (\mathbf{m}_1 + i\mathbf{m}_2)/\sqrt{2}$, where $\mathbf{m}_1$ and $\mathbf{m}_2$ are two mutually perpendicular real unit vectors. Then

[0]† Manganese silicide (MnSi) and iron germanide (FeGe) crystals are of this kind, with magnetic ions Mn and Fe which belong to the space group T^4, with a simple cubic Bravais lattice.

‡ The first term in (52.1) is not invariant under a simultaneous equal rotation of the vectors M at every point in space; it does not satisfy the condition stated in the second footnote to §43.

The relativistic terms may also occur as quadratic ones; for example, cubic symmetry allows a term of the form

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}) = \mathbf{M}\left(\mathbf{m}_1 \cos \mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \mathbf{m}_2 \sin \mathbf{k}\cdot\mathbf{r}\right). \tag{52.3}$$

Substitution of (52.2) in (52.1) gives

$$\begin{aligned} U_{\text{non-u}} &= iM^2\gamma\mathbf{k}\cdot\mathbf{m}\times\mathbf{m}^* + \frac{1}{2}\alpha M^2k^2 \\ &= M^2\gamma\mathbf{k}\cdot\mathbf{m}_1\times\mathbf{m}_2 + \frac{1}{2}\alpha M^2k^2. \end{aligned}$$

This expression has a minimum as a function of $\mathbf{k}$ if the vectors $\mathbf{k}$ and $\mathbf{m}_1\times\mathbf{m}_2$ are collinear (parallel if $\gamma < 0$ and antiparallel if $\gamma > 0$) and

$$k = \gamma/\alpha \lessapprox 1/a. \tag{52.4}$$

Thus the presence of a small additional term in $U_{\text{non-u}}$, linear in the derivatives, causes the occurrence of a helicoidal magnetic structure superimposed on the basic ferromagnetic structure: the magnetic moments of the atoms lie in planes perpendicular to the direction of $\mathbf{k}$, and the directions of the moments rotate slowly in successive layers of atoms. The ends of the atomic moment vectors on a straight line parallel to $\mathbf{k}$ form a helix. The pitch $2\pi/k$ of the helix is the period of the superlattice; it is large in comparison with the crystallographic periods, and is in general incommensurate with them. ‡ Phases having structures of this type are said to be incommensurate.

In the approximation considered here, the direction of $\mathbf{k}$ relative to the crystallographic axes remains indeterminate. It is determined by the minimization of the sum of the anisotropy energy (40.7) and the relativistic part of the non-uniformity energy. We shall not pause to discuss this topic.

9.2 Magnetic semiconductors and insulators

(chapter 17)
(мб это же в твердом теле будет написано.)

9.2.1 Exchange interactions in magnetic semiconductors and insulators

(мб это и проработаю когда буду готовиться к экзамену)

9.2.2 Ferromagnetic insulators

(в книге от Левена что-то про них написано)

9.3 Other Magnetic Properties and Special Magnetic Media

(чего только там нет, укажу многое потом, много статей про многие материалы есть.)

[0]† To avoid complications having no fundamental significance, we assume that $U_{\text{non-u}}$ is much less than U_{exch} (so that M is determined only by the latter), but is also much greater than the relativistic anisotropy energy U_{aniso} (so that the latter may be neglected in determining the change in the direction of $\mathbf{M}$). These conditions may be satisfied in the neighbourhood of the Curie point, neither too close to it to satisfy the first inequality nor too far from it to satisfy the second. We shall not pause to set out the explicit limits of this range.

‡ The situation discussed here is exactly analogous to that in cholesteric liquid crystals (see SP 1, § 140). In these, the presence of a term $\mathbf{n}$ curl $\mathbf{n}$ in the energy (where $\mathbf{n}$ is the "director" unit vector of the crystal) again leads to the occurrence of a helicoidal structure.

9.3.1 Magnetoresistance

(???? maybe see not on kinetics about it. I don't know, how is it?)

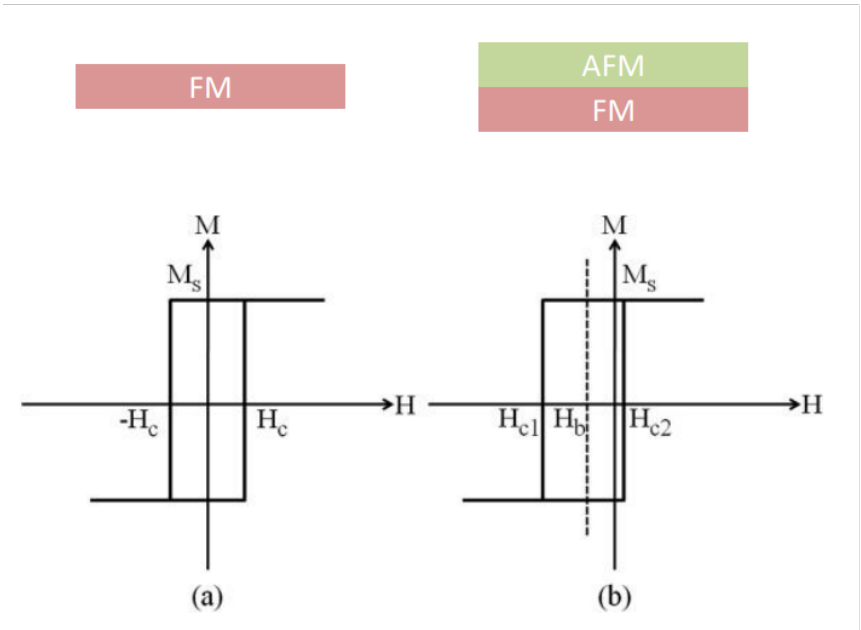
9.3.2 Superparamagnetism

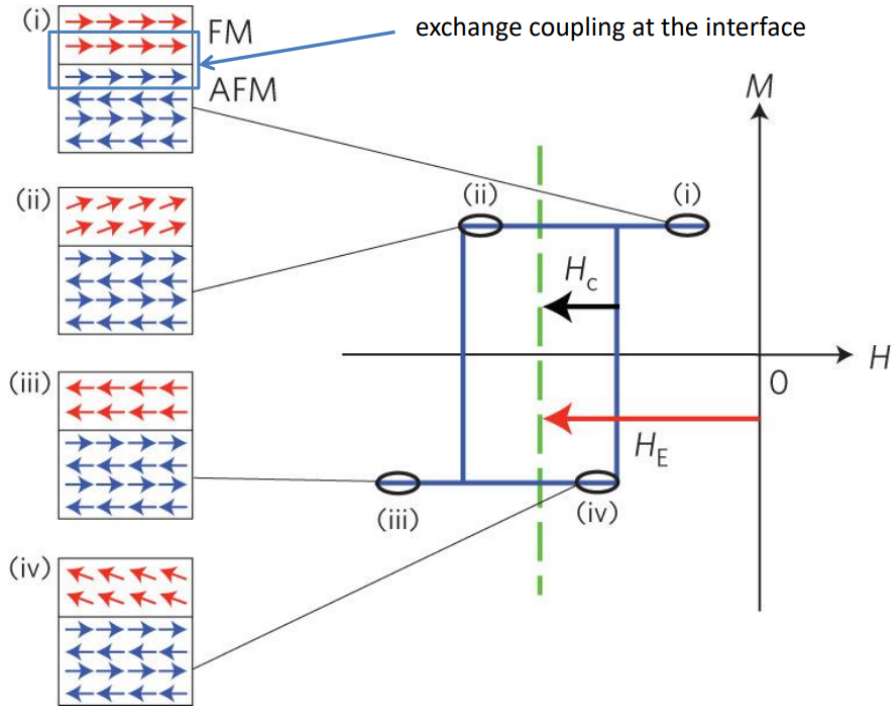
(?? что это вообще?)

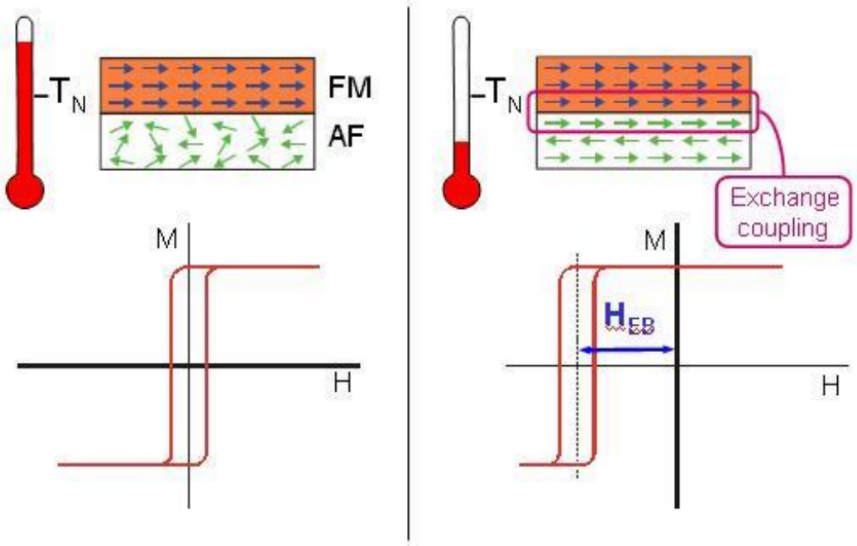
9.3.3 Ferrimagnetism

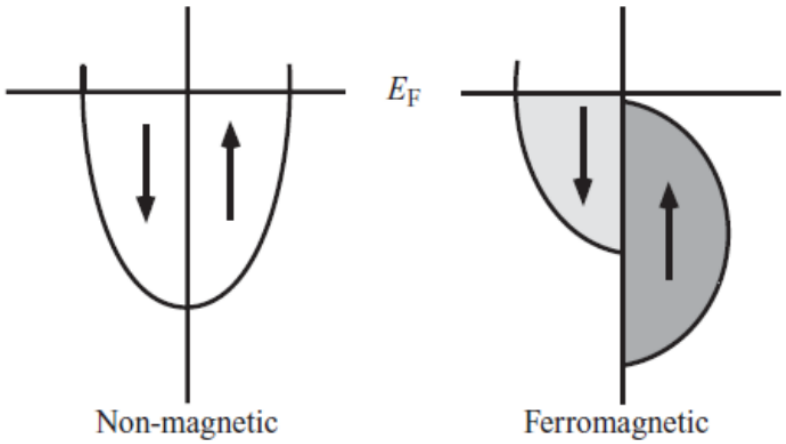
О том, что если поместить ферромагнит рядом с антиферромагнитом (??)

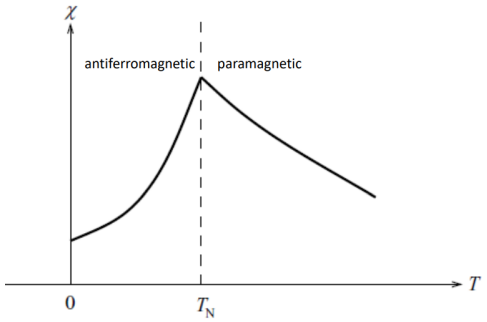
(?? хз на самом деле.)

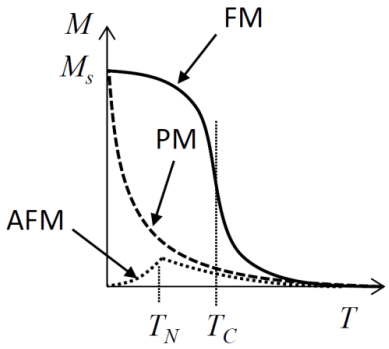


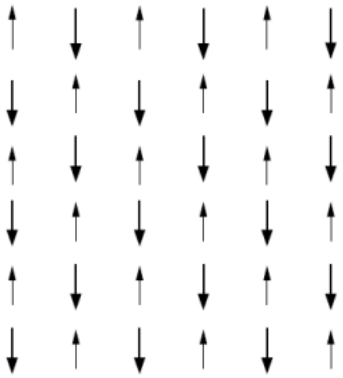

(i)
FM
AFM
exchange coupling at the interface
M
(ii)
(i)
(ii)
H_c
H
(iii)
0
H_E
(iii)
(iv)
(iv)

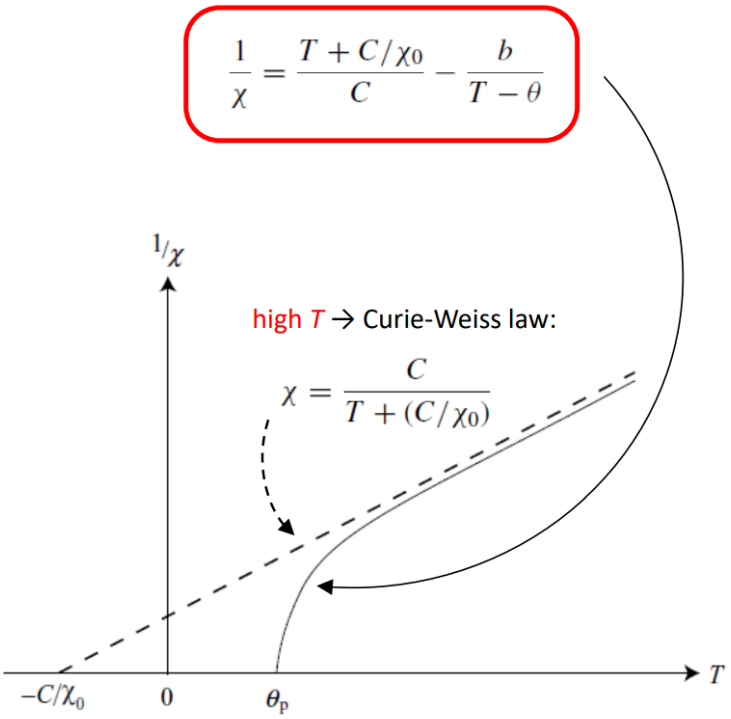

T_N
FM
AF
M
H
T_N
Exchange coupling
M
H_{EB}
H

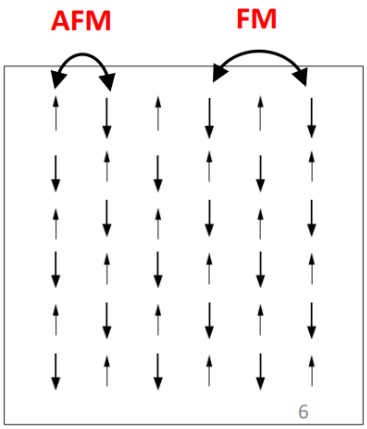

E_F
Non-magnetic
Ferromagnetic


χ
antiferromagnetic
paramagnetic
T
0
T_N


M
M_s
FM
PM
AFM
T_N
T_C
T







10 Main Special Effects in Media

(for others - see the later part)

10.1 Electrodynamic Fluctuations

(позже свяжу с случ проц, пока что мы понимаем, что это есть, так что нужно что-то сказать про это)

(чисто для электрических явлений все)

10.1.1 Johnson–Nyquist noise

(????)

10.1.2 Shot noise

(??)

10.2 Other Effects in Media

10.2.1 Hall Effect: Introduction

(see cond matter for now about it)

суть

Theory

Если проводник находится во внешнем магнитном поле $\mathbf{H}$, то связь между плотностью тока и напряженностью электрического поля по-прежнему дается соотношениями $j_i = \sigma_{ik}E_k$ но компоненты тензора проводимости σ_{ik} являются функциями $\mathbf{H}$ и, что особенно существенно, уже не симметричны по индексам ik. Симметрия этого тензора была доказана в §21, исходя из принципа симметрии кинетических коэффициентов.

Но в магнитном поле, как известно, формулировка этого принципа несколько меняется: одновременно с перестановкой индексов у кинетических коэффициентов должно быть изменено на обратное также и направление магнитного поля (см. V, §120). Поэтому для компонент тензора $\sigma_{ik}(\mathbf{H})$ будем теперь иметь соотношения

$$\sigma_{ik}(\mathbf{H}) = \sigma_{ki}(-\mathbf{H})$$

Величины же $\sigma_{ik}(\mathbf{H})$ и $\sigma_{ki}(\mathbf{H})$ отнюдь не равны друг другу, Как и всякий общий тензор второго ранга, тензор σ_{ik} можно разделить на симметричную и антисимметричную части, которые мы обозначим соответственно как s_{ik} и a_{ik}:

$$\sigma_{ik} = s_{ik} + a_{ik}$$

По определению,

$$s_{ik}(\mathbf{H}) = s_{ki}(\mathbf{H}), \quad a_{ik}(\mathbf{H}) = -a_{ki}(\mathbf{H})$$

а из (22.1) следует, что

$$s_{ik}(\mathbf{H}) = s_{ki}(-\mathbf{H}) = s_{ik}(-\mathbf{H})$$
$$a_{ik}(\mathbf{H}) = a_{ki}(-\mathbf{H}) = -a_{ik}(-\mathbf{H})$$

Таким образом, компоненты тензора s_{ik} являются четными, а тензора a_{ik} - нечетными функциями магнитного поля.

Как известно, всякий антисимметричный тензор второго ранга a_{ik} эквивалентен (дуален) некоторому аксиальному вектору, с которым его компоненты связаны следующим образом:

$$a_{xy} = a_z, \quad a_{xz} = -a_y, \quad a_{yz} = a_x$$

С помощью этого вектора компоненты произведения $a_{ik}E_k$ могут быть написаны в виде компонент векторного произведения $[\mathbf{Ea}]$:

$$j_i = \sigma_{ik}E_k = s_{ik}E_k + [\mathbf{Ea}]_i$$

Джоулево тепло, выделяющееся при прохождении тока, определяется произведением jE.

В силу перпендикулярности векторов [Ea] и $\mathbf{E}$ их произведение обращается тождественно в нуль, так что

$$\mathbf{jE} = s_{ik}E_iE_k$$

т.е. джоулево тепло определяется (при заданной напряженности E) одной лишь симметричной частью тензора проводимости.

Если магнитное поле достаточно слабое, можно разложить компоненты тензора проводимости по его степеням.

Ввиду нечетности функции a $\mathbf{a}(\mathbf{H})$, в разложение этого вектора войдут только члены нечетных степеней.

Первые члены разложения линейны по полю, т.е. имеют вид

$$a_i = \alpha_{ik} H_k$$

Векторы a и $\mathbf{H}$ оба аксиальны; поэтому постоянные α_{ik} составляют обычный (полярный) тензор.

В разложение же четных функций $s_{ik}(\mathbf{H})$ входят только члены с четными степенями.

Первый член разложения есть проводимость $\sigma_{ik}^{(0)}$ в отсутствие поля, а первые поправочные члены квадратичны по полю:

$$s_{ik} = \sigma_{ik}^{(0)} + \beta_{iklm} H_l H_m$$

Тензор β_{iklm} симметричен как по индексам ik, Так и по индексам lm.

Таким образом, основной, линейный по полю, эффект влия-

(????)

состоит, как мы видим, в появлении тока, перпендикулярноГо к электрическому полю и по величине пропоршионального напря- Женности магнитного поля.

Следует, однако, иметь в виду, что в обшем случае произвольной анизотропной среды холловский ToK не является единственным, перпендикулярным к E; Такие составляющие может иметь и не холловский ток $s_{ik} E_k$.

Эффект Холла имеет и другой аспект, явствующий из обратных формул, выражающих поле $\mathbf{E}$ через плотность тока:

$$E_i = \sigma_{ik}^{-1} j_k$$

Обратный тензор σ_{ik}^{-1}, как и прямой, можно разложить на симметричную часть (которую мы обозначим как ρ_{ik}) и антисимметричную, дуальную некоторому аксиальному вектору $\mathbf{b}$:

$$E_i = \rho_{ik} j_i + [\mathbf{jb}]_i$$

Тензор ρ_{ik} и вектор $\mathbf{b}$ обладают такими же свойствами, как и s_{ik} и a.

В частности, в слабых полях вектор b линеен по магнитному полю.

В формулах (22.10) эффект Холла представляется членом $[\mathbf{jb}]$, т.е.

появлением электрического поля, перпендикулярного к току и по величине пропорционального магнитному полю (и току $\mathbf{j}$).

Все написанные выше соотношения очень упрошаются.

если проводник изотропен.

В этом случае из соображений симметрии очевидно, что вектор b (или a) может быть направлен только вдоль магнитного поля.

Единственными же отличными от нуля компонентами тензора ρ_{ik} являются $\rho_{xx} = \rho_{yy}$ и ρ_{zz}, где ось z выбрана вдоль направления поля.

Обозначив эти две величины через $\rho_\perp$ и $\rho_\parallel$ и выбрав плоскость xz проходящей через направление тока, будем иметь

$$E_x = \rho_\perp j_x, \quad E_y = -b j_x, \quad E_z = \rho_\parallel j_z$$

Отсюда видно, что в изотропном проводнике холловское поле есть единственное электрическое поле, перпендикулярное одновременно току и магнитному полю.

В слабых магнитных полях связь векторов $\mathbf{b}$ и $\mathbf{H}$ дается (в изотропном теле) просто соотношением

$$\mathbf{b} = -R\mathbf{H}$$

Постоянная R)постояиная Холла) может быть как положительной, так и отрицательной.

Что касается квадратичных по $\mathbf{H}$ членов в зависимости между $\mathbf{E}$ и $\mathbf{j}$ (входящих через тензор ρ_{ik}), то их вид ясен из того, что единственными векторами, которые можно составить из j и $\mathbf{H}$ (линейными по j и квадратичными по $\mathbf{H}$) являются $\mathbf{H}(\mathbf{jH})$ и $\mathbf{jH}^2$.

Поэтому общий вид зависимости между $\mathbf{E}$ и j в изотропном теле с учетом квадратичных по $\mathbf{H}$ членов дается формулой

$$\mathbf{E} = \rho^{(0)}\mathbf{j} + R[\mathbf{Hj}] + \beta_1 \mathbf{j}H^2 + \beta_2 \mathbf{H}(\mathbf{Hj})$$

ЛЛ8-?

Выразить компоненты обратного тензора σ_{ik}^{-1} через компоненты s_{ik} и a

Проще всего производить вычисления, выбрав систему координат x, y, z, в которой тензор s_{ik} приведен к главным осям, после чего по виду получающихся выражений легко заключить об их обшей форме в произвольной системе координат.

Определитель тензора:

$$|\sigma| = \begin{vmatrix} s_{xx} & a_z & -a_y \\ -a_z & s_{yy} & a_x \\ a_y & -a_x & s_{zz} \end{vmatrix} = s_{xx}s_{yy}s_{zz} + s_{xx}a_x^2 + s_{yy}a_y^2 + s_{zz}a_z^2$$

Очевидно, что в общем случае

$$|\sigma| = |s| + s_{ik}a_i a_k$$

Составляя также миноры этого определителя, найдем компоненты обратного тензора

$$\sigma_{xx}^{-1} = \rho_{xx} = \frac{s_{yy}s_{zz} + a_x^2}{|\sigma|}, \quad \sigma_{xy}^{-1} = \rho_{xy} + b_z = \frac{a_x a_y - a_z s_{zz}}{|\sigma|}, \quad \cdots$$

Общие выражения, переходящие в эти при нашем выборе системы координат:

$$\rho_{ik} = \frac{1}{|\sigma|}\left\{s_{ik}^{-1}|s| + a_i a_k\right\}, \quad b_i = -\frac{1}{|\sigma|}s_{ik}a_k,$$

чем и решается поставленная задача.

10.2.2 Electrocapillarity (???)

(скипаю, потому что нет в теормине)

суть

Theory

Наличие зарядов на границе между двумя проводящими средами влияет на поверхностное натяжение на ней; это явление называют электрокапилл.яриостито.

Фактически речь идет при Этом о двух жидких средах - обычно о границе между жидКим металлом (ртуть) и раствором электролита.

Обозначим через φ_1 и φ_2 потенциалы обоих проводников, а через e_1 и e_2 - заряды, расположенные у их поверхности сопри- косновения.

Последние равны по величине и противоположны По знаку, образуя, таким образом, вдоль этой поверхности так называемый двойной слой.

для дифференциала потенциала $\widetilde{\Phi}$ системы двух проводниКОВ, с учетом их поверхности раздела, при заданных давлении и TemIIepaгуре, hmeem

$$d\widetilde{\Phi} = \alpha dS - e_1 d\varphi_1 - e_2 d\varphi_2$$

Член αdS представляет собой работу обратимого измерения площади S поверхности раздела (α - коэффициент поверхностного натяжения; см. **V**, §154).

Вместо термодинамического потенциала $\widetilde{\Phi}$ в (25.1) можно писать только его поверхностную часть $\widetilde{\Phi}_s$, так как объемная часть при заданных давлении и температуре все равно постоянна и не интересует нас здесь.

Обозначив $e_1 = -e_2 \equiv e$ и вводя разность потенциалов $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$, перепишем (25.1) в виде

$$d\widetilde{\Phi}_s = \alpha dS - e d\varphi$$

Отсюда следует, что

$$\left(\frac{\partial \widetilde{\Phi}_s}{\partial S}\right)_{\varphi} = \alpha$$

причем α выражено в функции от φ. Интегрируя это соотношение, найдем, что $\widetilde{\Phi}_s = \alpha S$. Подставив это обратно в (25.2), получим $d(\alpha S) = \alpha dS - e d\varphi$ или $S d\alpha = -e d\varphi$, откуда

$$\sigma = -\left(\frac{\partial \alpha}{\partial \varphi}\right)_{P,T}$$

где $\sigma = e/S$ - заряд, приходящийся на 1 $\mathbf{cm}^2$ поверхности.

основная формула электрокапиллярных явлений

Соотношение (25.4) является основной формулой теории электрокапиллярных явлений.

В состоянии равновесия термодинамический потенциал Φ должен быть минимален при заданных значениях электрических потенциалов проводников.

Рассматривая его как функцию поверхностных зарядов e, напишем необходимые условия минимума:

$$\frac{\partial \widetilde{\Phi}_s}{\partial e} = 0, \quad \frac{\partial^2 \widetilde{\Phi}_s}{\partial e^2} > 0$$

где производные подразумеваются взятыми при постоянной площади S. Для вычисления производных выразим $\widetilde{\Phi}_s$ через термодинамический потенциал $\bar{\Phi}_s = \Phi_s(e)$ согласно

$$\widetilde{\Phi}_s = \Phi_s(e) - e_1\varphi_1 - e_2\varphi_2 = \Phi_s(e) - e\varphi$$

Условие равенства нулю первой производной дает

$$\frac{\partial \widetilde{\Phi}_s}{\partial e} = \frac{\partial \Phi_s}{\partial e} - \varphi = 0$$

после чего условие положительности второй производной принимает вид

$$\frac{\partial^2 \widetilde{\Phi}_s}{\partial e^2} = \frac{\partial^2 \Phi_s}{\partial e^2} = \frac{\partial \varphi}{\partial e} = \frac{1}{S}\frac{\partial \varphi}{\partial \sigma} > 0$$

или

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \varphi} > 0$$

Это условие естественно было ожидать, если рассматривать двойной слой у поверхности как «конденсатор» с емкостью $\partial e/\partial\varphi$. Продифференцировав равенство (25.4) по φ и используя (25.7), мы находим, что

$$\frac{\partial^2\alpha}{\partial\varphi^2} < 0$$

Это значит, что в точке, в которой $\partial\alpha/\partial\varphi = -\sigma = 0$, кривая зависимости α от φ имеет максимум.

10.3 Phenomena with Temperature Gradient

(??? see not on kinetics for them, there are a lot of them)

10.3.1 Thermoelectric Phenomena

мотивация

часто хочется спросить, а какое влияние температуры на ток?

достаточно типичный вопрос, на который зрелый физик отвечать должен.

Эти явления уже столько раз встречались, что очень прямо хочется взять - и собрать их наконец-то уже!!!!

обзор термоэлектрических явлений

Условие отсутствия тока в металле в постоянстве суммы $e\varphi + \zeta_0$

Условие отсутствия тока в металле заключается в наличии термодинамического равновесия по отношению к электронам проводимости.

Оно требует, как известно, наряду с постоянством (вдоль тела) температуры также и постоянства суммы $e\varphi + \zeta_0$, где ζ_0 - химический потенциал электронов проводимости в металле при $)\varphi = 0)$.

Если мы имеем дело с металлом, не однородным по своему составу, то ζ_0 меняется вдоль него даже при постоянной температуре.

Поэтому постоянство электрического потенциала φ в этом случае отнюдь не приводит к отсутствию тока в металле, хотя напряженность $\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\varphi$ и равна нулю.

Это обстоятельство делает неудобным обычное определение φ (как результата усреднения истинного потенциала), если мы хотим включить в рассмотрение также и неоднородные проводники.

Естественно принять в качестве нового определения потенциала сумму $\varphi + \zeta_0/e$, которую мы и будем обозначать ниже просто как φ.

В однородном металле такое изменение сводится к добавлению к потенциалу несущественной постоянной.

Соответственно «напряженность» $\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\varphi$ (которой мы и будем пользоваться) совпадает с истинной средней напряженностью лишь в однородном металле, а в общем случае отличается от нее градиентом некоторой функции состояния.

(!!!)

При таком определении ток обращается в нуль вместе с напряженностью в термодинамически равновесном (по отношению к электронам проводимости) состоянии, и связь между $\mathbf{j}$ и $\mathbf{E}$ будет даваться формулой $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$(или $j_i = \sigma_{ik}E_k$) даже в неоднородном по своему составу металле.

Рассмотрим теперь неравномерно нагретый металл, в котором, во всяком случае, нет (электронного) термодинамического равновесия.

Тогда напряженность **E** отлична от нуля даже и в отсутствие тока.

связь между E и j

Поскольку градиент температуры малый, то тупо будем добавлять линейный член:))))

В общем случае, когда отлична от нуля как плотность тока j, так и градиент температуры ∇T, связь между этими величинами и напряженностью поля может быть написана в виде

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\sigma}\mathbf{j} + \alpha\nabla T$$

Здесь σ - обычная проводимость, а α - еще одна величина, характеризующая электрические свойства металла.

Мы предполагаем здесь для простоты, что вещество изотропно (или обладает кубической симметрией), в связи с чем пишем коэффициенты пропорциональности в виде скалярных величин.

Линейная зависимость **E** от ∇T представляет собой, разумеется, лишь первый член разложения, достаточный ввиду малости градиента температуры (фактически всегда имеющей место).

Эта же зависимость может быть написанна в виде

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} - \alpha\nabla T)$$

Видим, что в неравномерно нагретом металле может течь ток и при равной нулю напряженности **E**.

плотность потока энергии

Наряду с плотностью электрического тока j рассмотрим также и плотность потока энергии, которую обозначим буквой q

Прежде всего, из этого потока следует выделить величину $\varphi\mathbf{j}$, связанную с тем, что каждая заряженная частица (электрон) переносит с собой энергию $e\varphi$.

Разность $\mathbf{q} - \varphi\mathbf{j}$, однако, уже не зависит от самого потенциала и может быть представлена, в общем случае, в виде линейной функции градиентов $\nabla\varphi = -\mathbf{E}$ и ∇T, аналогично формуле (26.2) для плотности тока.

Напишем пока эту формулу в виде

$$\mathbf{q} - \varphi\mathbf{j} = \beta\mathbf{E} - \gamma\nabla T$$

Принцип симметрии кинетических коэффициентов позволяет связать коэффициент β с коэффициентом α в выражении (26.2). Для этого вычислим скорость изменения полной энтропии проводника.

Количество тепла, выделяющееся в единицу времени в единице объема тела, есть - div q.

Поэтому можно написать

$$\frac{d\,\mathbf{S}}{dt} = -\int \frac{\operatorname{div}\mathbf{q}}{T}dV$$

Далее, пишем, используя уравнение $\operatorname{div}\mathbf{j} = 0$,

$$\frac{1}{T}\operatorname{div}\mathbf{q} = \frac{1}{T}\{\operatorname{div}(\mathbf{q} - \varphi\mathbf{j}) + \operatorname{div}\varphi\mathbf{j}\} = \frac{1}{T}\operatorname{div}(\mathbf{q} - \varphi\mathbf{j}) - \frac{\mathbf{E}\mathbf{j}}{T}$$

Интеграл от первого члена преобразуем по частям и в результате получаем

$$\frac{d\,\mathbf{S}}{dt} = \int \frac{\mathbf{E}\mathbf{j}}{T}dV - \int \frac{(\mathbf{q} - \varphi\mathbf{j})\nabla T}{T^2}dV$$

Эта формула показывает, что, если выбрать в качестве величин $\partial x_a/\partial t$(
см. §21)
компоненты векторов $\mathbf{j}$ и $\mathbf{q} - \varphi\mathbf{j}$, то соответствующими величинами X_a будут компоненты векторов $-\mathbf{E}/T$ и $\nabla T/T^2$. Соответственно этому, в соотношениях

$$\mathbf{j} = \sigma T\frac{\mathbf{E}}{T} - \sigma\alpha T^2\frac{\nabla T}{T^2}$$
$$\mathbf{q} - \varphi\mathbf{j} = \beta T\frac{\mathbf{E}}{T} - \gamma T^2\frac{\nabla T}{T^2}$$

должны быть равными коэффициенты $\sigma\alpha T^2$ и βT.

Таким образом, $\beta = \sigma\alpha T$, и мы имеем

$$\mathbf{q} - \varphi\mathbf{j} = \sigma\alpha T\mathbf{E} - \gamma\nabla T$$

Наконец, выразив здесь $\mathbf{E}$ через $\mathbf{j}$ и ∇T согласно (26.1), получим окончательно следующее выражение:

$$\mathbf{q} = (\varphi + \alpha T)\mathbf{j} - x\nabla T$$

где введено обозначение $x = \gamma - T\alpha^2\sigma$. Величина ж является не чем иным, как обычным коэффициентом теплопроводности, определяющим поток тепла в отсутствие электрического тока.

Следует указать, что условие положительности производной $d\,\mathbf{S}/dt$ не накладывает каких-либо новых ограничений на термоэлектрические коэффициенты.

При подстановке (26.1) и (26.4) в (26.3) получается

$$\frac{d\,\mathbf{S}}{dt} = \int\left(\frac{\mathbf{j}^2}{\sigma T} + \frac{\mathbf{c}(\nabla T)^2}{T^2}\right)dV > 0$$

откуда следуют лишь условия положительности коэффициентов Тепло- и электропроводности.

В написанных выIIе формулах молчаливо подразумевалось, ЧТо неоднородность давления (или плотности) при постоянной температуре не может привести к возникновению пОлЯ (или тока) в проводнике; на этом основании в (26.2) и (26.4) не были написаны члены, пропорциональные ∇p. В действительности наличие таких членов противоречило бы закону возрастания энтропиИ: в подынтегральном выражении в (26.5) появились бы члены

со знакопеременными произведениями $\mathbf{j}\nabla p$ и $\nabla T\nabla p$, в результате чего интеграл не смог бы быть существенно положительным.

Соотношения (26.1) и (26.4) содержат в себе различные термоэлектрические эффекты.

Рассмотрим тепло - div q, выделяющееся ежесекундно в единице объема проводника.

Дифференцируя выражение (26.4), найдем

$$Q = -\operatorname{div}\mathbf{q} = \operatorname{div}(x\nabla T) + \mathbf{E}\mathbf{j} - \mathbf{j}(\alpha T)$$

или, подставив сюда (26.1),

$$Q = \operatorname{div}(x\nabla T) + \frac{j^2}{\sigma} - T\mathbf{j}\nabla\alpha$$

Первый член в этой сумме связан с чистой теплопроводностью, а второй член, пропорциональный квадрату тока, можно назвать джоулевым теплом.

Нас интересует здесь третий член, содержащий специфические термоэлектрические эффекты.

Предположим, что проводник однороден по составу, а давление, как это обычно имеет место, постоянно вдоль него.

Изменение величины α связано только с градиентом температуры, и можно написать $\nabla\alpha = (d\alpha/dT)\nabla T$. Таким образом, интересующее нас выделение тепла (эффект Томсоиа) равно

$$\rho \mathbf{j} \nabla T, \text{ где } \rho = -T\frac{d\alpha}{dT}$$

Величину ρ называют коэффициентом Томсоиа.

Отметим, что этот эффект пропорционален первой степени тока, а не его квадрату, как джоулево тепло.

Поэтому он меняет знак при изменении направления тока на обратное.

Коэффициент ρ может быть как положительным, так и отрицательным.

Если $\rho > 0$, то томсоновское тепло положительно (тепло выделяется) при течении тока в направлении возрастания температуры, а при течении тока в противоположном направлении - тепло поглощается; при $\rho < 0$ соотношения обратны.

эффект пельтье

Другой тепловой эффект (эффект пельтье) возникает при прохождении тока через контакт (спай) двух различных металЛоВ.

На поверхности контакта непрерывны температура, потенциал, а также нормальные компоненты векторов плотности тока и плотности потока энергии.

Отмечая индексами 1 и 2 значения величин, относящиеся к двум металлам, и приравнивая значения нормальных компонент q (26.4) по обеим сторонам контакта, получим ввиду непрерывности φ, T, j_x:

$$\left(- \sim \frac{\partial T}{\partial x}\right)\Bigg|_1^2 = -j_x T\left(\alpha_2 - \alpha_1\right)$$

Ось x направлена по нормали к поверхности.

Если положительное направление оси x есть направление от металла 1 к металлу 2, то выражение, стоящее в левой части равенства, есть количество тепла, отводимое в 1 с с 1 см ^{2} поверхности контакта путем теплопроводности.

Этот отвод компенсирует выделяющееся в контакте тепло, представляемое выражением в правой части равенства.

Таким образом, на единице площади контакта выделяется (в 1 с) тепло, равное

$$\Pi_{12} j, \text{ где } \Pi_{12} = -T\left(\alpha_2 - \alpha_1\right)$$

Величину Π_{12} называют коэфдициентом Пельтве.

Как и эф- фект Томсона, этот эффект пропорционален первой степени тока и меняет знак при изменении направления тока на обратное.

Отметим, что коэффициент Пельтье обладает свойством аддитивности, выражающимся равенством $\Pi_{13} = \Pi_{12} + \Pi_{23}$, где индексы 1,2,3 относятся к трем различным металлам.

Сравнение формул (26.7) и (26.8) показывает, что коэффициенты Томсона и Пельтье связаны соотношени- ey

$$\rho_2 - \rho_1 = T\frac{d}{dT}\frac{\Pi_{12}}{T}$$

Далее, рассмотрим разомкнутую цепь с двумя контактами, причем два крайних проводника представляют собой одинаковые металлы (металл 1, рис.

17). Предположим, что спаи (точки b и c) находятся при различных температурах T_1 и T_2, а температуры обоих концов цепи (точки a и d) одинаковы.

Тогда между этими концами существует разность потенциалов, называемая термоэлектродвижсущей силой; обозначим ее через $\mathbf{E}_T$. Для вычисления этой силы полагаем в (26.1)$\mathbf{j} = 0$ и интегрируем напряженность $\mathbf{E} = \alpha\nabla T$ вдоль всей длины цепи (ось x):

$$\mathbf{E}_T = \int_a^d \alpha \frac{dT}{dx} dx = \int_a^d \alpha dT$$

Интегрирование от c до d и от a до b означает интегрирование по температуре от T_2 до T_1 в первом металле, а интегрирование от b до c есть интегрирование по dT в пределах от T_1 до T_2 во втором металле.

Поэтому находим

$$\mathbf{E}_T = \int_{T_1}^{T_2} (\alpha_2 - \alpha_1)\, dT$$

Сравнивая с (26.8), мы видим, что термоэлектродвижушая сила связана с коэффициентом Пельтье следующим соотношением:

$$\mathbf{E}_T = -\int_{T_1}^{T_2} \frac{\Pi_{12}}{T} dT$$

Формулы (26.9) и (26.11) называют соотиоиениями Томсона ($W.$ Thomson, 1854)

В заключение этого параграфа выпишем формулы для тока и потока тепла в анизотропном проводнике.

Эти формулы выводятся с помощью принципа симметрии кинетических коэффициентов аналогично выводу формул (26.1),(26.4) и имеют вид

$$E_i = \sigma_{ik}^{-1} j_k + \alpha_{ik} \frac{\partial T}{\partial x_k}$$
$$q_i - \varphi j_i = T\alpha_{ki} j_k - x_{ik} \frac{\partial T}{\partial x_k}$$

Здесь σ_{ik}^{-1} - тензор, обратный тензору проводимости σ_{ik}; тензоры σ_{ik} и x_{ik} симметричны.

Термоэлектрический же тензор α_{ik} в общем случае несимметричен

11 Electrodynamics in Media by Batygin Toptygin

Пример 7.1. Показать, что плотность наведенного внутри среды объемного заряда связана с вектором электрической поляризачии соотношением

$$\bar{\rho}_{int}(\boldsymbol{r}) = -\operatorname{div} \boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}) \tag{7.16}$$

Какой смысл приобретает это соотношение на границе тела?

Решение. Рассмотрим некоторое электронейтральное тело, находящееся в вакууме, при наличии вне тела сторонних электрических зарядов ρ_{ext}. Полный электрический дипольный момент тела $\mathscr{P}$ можно представить в виде интеграла по объему тела от вектора электрической поляризации: $\mathscr{P} = \int \boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}) dV$. С другой стороны, дипольный момент можно записать через макроскопическую плотность заряда: $\mathscr{P} = \int \boldsymbol{r}\bar{\rho}_{\text{int}}(\boldsymbol{r}) dV$.

Последний интеграл не зависит от выбора начала отсчета, если выполняется условие электронейтральности $\int \bar{\rho}_{\text{int}}(\boldsymbol{r})dV = 0$. Приравняем два полученных выше выражения для $\mathscr{P}$, умножив их предварительно на постоянный вектор a:

$$\int (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{P})dV = \int \bar{\rho}_{\text{int}}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})dV \tag{1}$$

Используем тождества $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{P}\cdot\nabla)(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r}) = \nabla\cdot[\boldsymbol{P}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})] - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})(\nabla\cdot\boldsymbol{P})$ и применим к интегралу от полной дивергенции в (1) теорему Остроградского-Гаусса:

$$\int \bar{\rho}_{\text{int}}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})dV = \oint_S [\boldsymbol{P}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})]\cdot d\boldsymbol{S} - \int (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})(\nabla\cdot\boldsymbol{P})dV \tag{2}$$

Поверхность, по которой производится интегрирование в (2), можно выбрать за пределами рассматриваемого тела, где $\boldsymbol{P} = 0$. Опуская вектор $\boldsymbol{a}$ в оставшемся равенстве, получаем

$$\int \boldsymbol{r}\bar{\rho}_{\text{int}}(\boldsymbol{r})dV = -\int \boldsymbol{r}\,\text{div}\,\boldsymbol{P}dV \tag{3}$$

Из этого равенства следует, что плотность наведенного заряда можно отождествить с дивергенцией вектора электрической поляризации согласно (7.16). На границе тела вектор $\boldsymbol{P}$ скачком обращается в нуль. В равенстве (7.16) в этом случае необходимо выполнить предельный переход, аналогичный тому, который привел к соотношению (2.18), и учесть, что вне тела $\boldsymbol{P} = 0$. В результате находим плотность поверхностного макроскопического заряда, индуцируемого на поверхности поляризованного тела:

$$\sigma_{int} = P_n$$

Полученные выше плотности зарядов (7.16), (7.17) относятся к диэлектрикам - таким веществам, внутренние заряды которых могут смещаться лишь на микроскопические расстояния. Поэтому указанные величины называют еще плотностями связанных зарядов. Внутри проводников заряды перемещаются свободно, поэтому всегда $\bar{\rho}_{\text{int}} = 0, \boldsymbol{P} = 0$, но может присутствовать поверхностный заряд, который выражается через внешнее поле (см. главу 8).

Пример 7.2. Показать, что в отсутствие зарядов, способных свободно перемешаться по всему объему тела (свободных зарядов), плотность наведенного внутри среды объемного тока (тока намагничения) связана с вектором магнитной поляризачии соотношением

$$\bar{\boldsymbol{j}}_{\text{int}}(\boldsymbol{r}) = c\,\text{rot}\,\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}) \tag{7.18}$$

Записать предельный вид этого соотношения на границе тела.

Решение. Используем тот же прием, что в примере 7.1: приравниваем два интеграла для полного магнитного момента тела $\boldsymbol{\mathcal{M}}$, умноженные на постоянный вектор $\boldsymbol{a}$. Получаем равенства

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{M} = \frac{1}{2c}\int \boldsymbol{a}\cdot\left[\boldsymbol{r}\times\bar{\boldsymbol{j}}_{int}\right]dV = \int \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{M}dV \tag{1}$$

Затем используем тождество

$$2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}\cdot\text{rot}[\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r}] = \boldsymbol{a}\cdot[\boldsymbol{r}\times\text{rot}\,\boldsymbol{M}] - \nabla\cdot[\boldsymbol{M}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r})] \tag{2}$$

и приводим равенство (l.) к виду

$$\frac{1}{2c}\int \boldsymbol{a}\cdot\left[\boldsymbol{r}\times\bar{\boldsymbol{j}}_{int}\right]dV = \frac{1}{2}\int \boldsymbol{a}\cdot[\boldsymbol{r}\times\text{rot}\,\boldsymbol{M}]dV \tag{3}$$

из которого следует (7.18). Предельный вид этой формулы на границе тела, где $\boldsymbol{M}$ скачком обращается в нуль, можно получить по аналогии с (2.58). Скачок вектора намагниченности определяет поверхностный ток согласно соотношению

$$\boldsymbol{i}_{int} = c\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{M} \tag{7.19}$$

где $\boldsymbol{n}$ - орт нормали к поверхности тела.
С помощью полученных выше выражений (7.16), (7.18) уравнения (7.13), (7.14) для статических полей приобретают вид

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = 0, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{D} = 4\pi\rho_{ext} \tag{7.20}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}_{\text{ext}}\,, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0 \tag{7.21}$$

Здесь введены два новых вектора поля: вектор электрической индукции

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{E} + 4\pi\boldsymbol{P} \tag{7.22}$$

и вектор напряженности магнитного поля

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{B} - 4\pi\boldsymbol{M} \tag{7.23}$$

Уравнения связи. Системы уравнений (7.20), (7.21) не являются замкнутыми, пока не установлена связь между векторами соответственно D и $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}$ и $\boldsymbol{B}$. Для широкого класса веществ оказывается возможным найти вид уравнений связи на основе общефизических соображений и экспериментальных данных общего характера, не привлекая конкретных сведений о внутренней структуре вещества. Речь идет о средах, у которых в отсутствие внешних полей отсутствуют и векторы электрической и магнитной поляризации. Если внешние поля малы по сравнению с внутриатомными, то векторы электрической поляризации $\boldsymbol{P}$ и намагниченности $\boldsymbol{M}$ являются линейными функциями компонент соответствующих внешних полей. Для изотропных тел имеем в этом случае

$$\boldsymbol{P} = \alpha\boldsymbol{E}, \quad \boldsymbol{M} = \chi\boldsymbol{H}, \tag{7.24}$$

где коэффициенты пропорциональности α, χ не зависят от внешних полей и называются диэлектрической и магнитной восприимчивостями соответственно. Но эти величины, разумеется, различны для разных веществ, зависят от плотности и в общем случае от температуры. В постоянном электрическом поле всегда $\alpha > 0$, магнитная же восприимчивость может быть как положительной, так и отрицательной. Вещества с $\chi > 0$ называются парамагнетиками, вещества с $\chi < 0$ - диамагнетиками.

Если проводящее тело, т. е. тело, которое содержит в своем составе свободные заряды, имеет форму замкнутого контура, то при наличии подходящего источника энергии (сторонних ЭДС) в нем может поддерживаться отличное от нуля электрическое поле и течь ток. В случае достаточно слабых полей связь между плотностью тока $\boldsymbol{j} \equiv \overline{\boldsymbol{j}}_{\text{int}}$ и электрическим полем $\boldsymbol{E}$ дается законом Ома

$$\boldsymbol{j} = \kappa\boldsymbol{E} \tag{7.25}$$

где электропроводность κ является макроскопической характеристикой среды и не зависит от $\boldsymbol{E}$.

С помощью соотношений (7.22), (7.23), (7.24) находим уравнения связи:

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon\boldsymbol{E}, \quad \boldsymbol{B} = \mu\boldsymbol{H} \tag{7.2}$$

где коэффициенты пропорциональности

$$\varepsilon = 1 + 4\pi\alpha, \quad \mu = 1 + 4\pi\chi \tag{7.27}$$

носят название соответственно диэлектрической и магнитной проницаемостей. В анизотропных средах как восприимчивости, так и проницаемости, а также и электропроводность представляют собой тензоры второго ранга, связь между которыми является очевидным обобщением формул (7.27):

$$\varepsilon_{\sigma\nu} = \delta_{\sigma\nu} + 4\pi\alpha_{\sigma\nu}, \quad \mu_{\sigma\nu} = \delta_{\sigma\nu} + 4\pi\chi_{\sigma\nu} \tag{7.28}$$

Уравнения связи (7.26) в этом случае принимают вид

$$D_\sigma = \varepsilon_{\sigma\nu}E_\nu, \quad B_\sigma = \mu_{\sigma\nu}H_\nu \tag{7.29}$$

В очень сильных внешних полях линейные соотношения (7.24), (7.26) теряют силу и уравнения связи приобретают нелинейный характер. Кроме того, существуют вещества, у которых при определенных температурах имеется спонтанная поляризация (сегнетоэлектрики, ферромагнетики). Во всех этих случаях уравнения связи сильно усложняются.

11.1 7 Equations of Constant Electric and Magnetic Fields in Media

(тут какая-то очень не особенная теория, поэтмоу не вставлял её

11.1.1 7.3. Polarization of Matter in a Constant Field

Электрическая поляризация. Вычисление электрической и магнитной проницаемостей различных сред удается произвести как правило лишь в некоторых упрощенных моделях. Для разреженных молекулярных газов проницаемости связаны простыми соотношениями с поляризуемостями отдельных молекул. Под поляризуемостью некоторой системы частиц понимают в общем случае тензор второго ранга, связывающий вектор наведенного дипольного момента $\boldsymbol{p}$ с вектором действующего на систему поля $\boldsymbol{E}$:

$$p_\kappa = \beta_{\kappa\nu}E_\nu \tag{7.30}$$

где $\beta_{\kappa\nu}$ - тензор поляризуемости. Поляризуемости атомов и молекул вычисляются квантовомеханическими методами (см. задачи 6.62, 7.5, 7.17, 7.19).

Если молекулы обладают электрическими дипольными моментами в отсутствие внешнего поля, то для вычисления вектора поляризации в заданном поле следует использовать распределение Больцмана

$$dN\left(q_i\right) = C\exp\left[-\frac{U\left(q_i\right)}{T}\right]d\Gamma \tag{7.31}$$

Здесь dN - число частиц в элементе объема $d\Gamma$ в пространстве обобщенных координат, $U\left(q_i\right)$ - потенциальная энергия одной частицы во внешнем поле, q_i - совокупность обобщенных координат, характеризующих положение и ориентацию частицы, T - температура в энергетических единицах, C - постоянная нормировки.Распределение молекул по импульсам в равновесном состоянии является максвелловским:

$$dN = f_0(p)d^3p = \frac{n}{(2\pi mT)^{3/2}}\exp\left(-\frac{p^2}{2mT}\right)d^3p \tag{7.32}$$

где n - плотность числа частиц со всеми энергиями, которая может зависеть от координат в неоднородной системе, m - масса молекулы. Распределение Максвелла предполагает, что частицы движутся по классическим законам.

Пример 7.3. Разреженный статистически равновесный газ состоит из одинаковых дипольных молекул с моментами p и имеет кониентрацию N. Пренебрегая взаимодействием молекул и деформачией их электронных оболочек, вычислить зависимость вектора поляризачии $\boldsymbol{P}$ от приложенного электрического поля $\boldsymbol{E}$. Вычислить также диэлектрическую проницаемость среды и указать критерий применимости линейной зависимости (7.24).

Решение. Вычисляем проекцию P вектора поляризации на направление внешнего поля с помощью распределения Больцмана (7.31)

$$P = Np\frac{\int\limits_0^\pi \cos\vartheta \exp[(pE/T)\cos\vartheta]\sin\vartheta d\vartheta}{\int\limits_0^\pi \exp[(pE/T)\cos\vartheta]\sin\vartheta d\vartheta} = \frac{\partial}{\partial a}\ln\int\limits_{-1}^{1} e^{ax}dx \tag{1}$$

где $U = -pE\cos\vartheta$ - энергия взаимодействия диполя с внешним полем, $a = pE/T, x = \cos\vartheta$. Произведя вычисления, получим

$$P = Np\frac{d}{da}\ln\left(\frac{2}{a}\operatorname{sh} a\right) = NpL(pE/T) \tag{2}$$

где $L(a)$ называется функцией Ланжевена:

$$L(a) = \operatorname{cth} a - \frac{1}{a} \tag{7.33}$$

Функция Ланжевена близка к единице при $a \gg 1$, а при малом аргументе разлагается в ряд

$$L(a) = \frac{a}{3} - \frac{a^3}{45} + \ldots, \quad a \ll 1 \tag{3}$$

Поэтому при $pE \gg T$ имеет место насыщение, все диполи ориентированы вдоль поля. При $pE \ll T$ зависимость поляризации от поля линейна с коэффициентом пропорциональности $\alpha = Np^2/3T$. Это приводит к диэлектрической проницаемости

$$\varepsilon = 1 + \frac{4\pi Np^2}{3T} \tag{7.34}$$

Несложные молекулы имеют дипольные моменты порядка произведения элементарного заряда на линейный размер молекулы (боровский радиус), т. е. $p \approx 10^{-18}$ CGS единиц. Граница между линейной зависимостью поляризации от напряженности поля и областью насыщения соответствует значению поля $E_c \approx T/p$, или $E_c \approx 10^4$CGSE $\approx 3 \times 10^6$ В/ см при $T \approx \approx 300K \approx 0.03$ эВ. Для газа при нормальных условиях ($N \approx 3 \times 10^{19}$ см$^{-3}$ имеем $\varepsilon - 1 \approx 4 \times 10^{-3}$.

Пример 7.4. Молекуль диэлектрика сферически симметричны и не имеют дипольных моментов в отсутствие действующего на них поля. Кончентрачия молекул N и их поляризуемость β известны. Найти зависимость диэлектрической проничаемости в от концентрачии и поляризуемости молекул. При этом следует учесть возможное отличие действующего на молекулу электрического поля $\mathscr{E}$ от среднего (макроскопического) поля $\boldsymbol{E}$, вызванное присутствием других молекул.

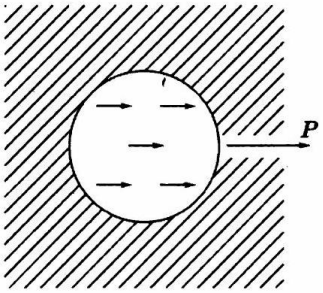


Рис. 7.1

Решение. Если действующее на молекулу поле совпадает со средним, т. е. $\mathscr{E} = \boldsymbol{E}$, то наведенный дипольный момент одной молекулы $\boldsymbol{p} = \beta\boldsymbol{E}$, вектор поляризации $\boldsymbol{P} = N\boldsymbol{p} = N\beta\boldsymbol{E} = \alpha\boldsymbol{E}$.

$$\varepsilon = 1 + 4\pi\alpha = 1 + 4\pi N\beta \tag{7.35}$$

Для учета влияния окружающих молекул на заданную окружим ее сферой радиуса $a \gg N^{-1/3}$ (рис. 7.1) и представим действующее поле как сумму двух полей, $\boldsymbol{E} = \mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2$, где $\mathscr{E}_1$ - поле внешних зарядов и всех молекул, находящихся вне шара радиусом a; $\mathscr{E}_2$ - поле молекул, находящихся внутри шара. Поле $\boldsymbol{E}_1$ является макроскопическим, и его можно вычислить как поле в центре шара, вырезанного в равномерно поляризованном диэлектрике. По принципу суперпозиции $\boldsymbol{E}_1 = \boldsymbol{E} - \boldsymbol{E}_i$, где $\boldsymbol{E}_i = -4\pi\boldsymbol{P}/3$ - поле равномерно поляризованного шара внутри него (см. задачу 7.3). В итоге получаем $\mathscr{E}_1 = \boldsymbol{E} + 4\pi\boldsymbol{P}/3$.

Поле $\mathscr{E}_2$ просто вычисляется в двух предельных случаях: а) молекулы внутри шара распределены совершенно беспорядочно; поле отдельного диполя, усредненное по объему шара, дает нуль, т. е. $\boldsymbol{E}_2 = 0$; б) молекулы находятся в узлах кубической решетки. При этом $\boldsymbol{E}_2 = 0$ в силу симметрии (см. поле отдельного диполя в примере 2.5). Для указанных случаев имеем

$$\mathscr{E} = \boldsymbol{E} + \frac{4\pi}{3}\boldsymbol{P} \tag{7.36}$$

и далее $\boldsymbol{P} = N\beta\mathscr{E} = N\beta(\boldsymbol{E} + 4\pi\boldsymbol{P}/3)$, откуда следует

$$\boldsymbol{P} = \frac{N\beta\boldsymbol{E}}{1 - 4\pi N\beta/3} = \alpha\boldsymbol{E}, \quad \varepsilon = 1 + 4\pi\alpha = 1 + \frac{N\beta}{1 - 4\pi N\beta/3}$$

или

$$\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2} = \frac{4\pi}{3}N\beta \tag{7.37}$$

Соотношения (7.36), (7.37) называются формулами Клаузиуса-Мосотти. В тех случаях, когда они используются в оптической области спектра, их выражают через коэффициент преломления $n = \sqrt{\varepsilon}$ (см. главу 12) и называют формулами Лоренц-Лорентца. Эти соотношения подтверждаются опытными данными о поляяризации жидкостей, состоящих из молекул с квазиупругими диполями, но не описывают веществ с твердыми диполями.

Магнитная поляризация вещества представляет собой чисто квантовое явление. Магнитный момент системы заряженных частиц, находящихся в магнитном поле в состоянии статистического равновесия, равен нулю, если частицы движутся по классическим законам (см. задачи 7.15*, 7.21*). Поэтому вычисление магнитной восприимчивости производится на основе квантовой механики (задачи 7.17*, 7.19*, 7.22, 7.23). Даже модели, в которых предполагается существование классических электронных орбит в атомах (задачи 7.16, 7.18) по существу имеют

квантовый характер, так как в классической физике атом неустойчив и стационарные орбиты в нем не могут существовать (см., например, задачу 5.119).

Электропроводность. Для вычисления электропроводности требует найти электрический ток, возникающий под действием слабого электрического поля. Эти задачи решаются с использованием классической функции распределения либо квантовомеханической матрицы плотности в зависимости от характера движения частиц. Уравнение для матрицы плотности приведено в дополнении 3 (см. (Д3.42)). Функция распределения $f(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}, t)$ заряженных частиц, находящихся в электромагнитном поле, удовлетворяет

уравнению Больцмана

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{r}} + e\left(\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}\right) \cdot \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{p}} = I[f] \tag{7.38}$$

Функция распределения нормируется условием

$$\int f(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}, t) d^3p = n(\boldsymbol{r}, t) \tag{7.39}$$

где $n(\boldsymbol{r}, t)$ - плотность числа частиц. В многокомпонентной системе нужно описывать каждую компоненту своей функцией распределения.

Правая часть уравнения (7.38) называется интегралом столкновений. Интеграл столкновений описывает процессы взаимного рассеяния частиц и должен содержать подробную информацию о законах их взаимодействия. Для каждой системы он имеет свой, как правило достаточно сложный вид. В большинстве случаев (хотя и не всегда) уравнение (7.38) представляет собой интегродифференциальное уравнение относительно функции распределения. Для получения полукачественных результатов интеграл столкновений часто записывают в приближении времени релаксации:

$$I[f] = -\frac{f - f_0}{\tau(p)} \tag{7.40}$$

где f_0 - равновесная функция распределения, $\tau(p)$ - время релаксации, которое может зависеть от энергии частиц. Эта величина должна рассматриваться как феноменологический подгоночный параметр, который подбирается из условия наилучшего согласия с опытными данными или с более строгой теорией. Смысл этого параметра становится понятным из рассмотрения пространственно однородной системы в отсутствие внешних полей:

$$\frac{\partial f(p,t)}{\partial t} = -\frac{1}{\tau}\left[f(p,t) - f_0(p)\right]$$

откуда следует экспоненциальный закон релаксации неравновесного распределения

$$f(p,t) = f_0(p) + \delta f(p,0) e^{-t/\tau(p)} \tag{7.41}$$

где $f_0(p) + \delta f(p,0)$ - начальная неравновесная функция распределения. Следует иметь в виду, что приближение к равновесию может происходить по более сложному закону (например, определяться несколькими различными временами релаксации), поэтому возможность использования приближения (7.40) следует проверять в каждом конкретном случае.

Пример 7.5. Вычислить в приближении времени релаксачии $\tau = \text{const}$ э.ектропроводность полупроводника. Концентрачия n свободных носителей заряда

достаточно мала, поэтому равновесную функцию распределения можно считать классической (максвелловской), см. (7.32).

Решение. Записываем стационарное кинетическое уравнение для однородной системы заряженных частиц в однородном электрическом поле:

$$e\boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{p}}=-\frac{\delta f}{\tau} \tag{1}$$

Считая формально E малой величиной (это означает, что $eE\tau \ll p$) и учитывая, что неравновесная добавка к функции распределения также имеет порядок E, линеаризуем уравнение (1):

$$e\boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial f_0}{\partial \boldsymbol{p}}=-\frac{\delta f}{\tau} \tag{2}$$

Подставив в (2) в качестве f_0 распределение Максвелла (7.32), найдем неравновесную часть функции распределения:

$$\delta f=\frac{\tau e}{T}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{v}f_0(p) \tag{3}$$

Электрический ток вычисляется по формуле

$$\boldsymbol{j}=e\int \boldsymbol{v}\delta f(\boldsymbol{p})d^3p \tag{4}$$

из которой находим тензор электропроводности:

$$\kappa_{\alpha\beta}=\frac{e^2\tau}{T}\int v_\alpha v_\beta f_0(p)d^3p \tag{5}$$

При изотропном распределении частиц по импульсам электропроводность изотропна: $\kappa_{\alpha\beta}=\kappa\delta_{\alpha\beta}$, где

$$\kappa=\frac{ne^2\tau}{m} \tag{7.42}$$

- формула Друде.

Рекомендуемая литература: [Ландау и Лифшиц, Электродинамика сплошных сред; Ландау и Лифшиц, Статистическая физика; Ландау и Лифшиц, Квантовая механика; Тамм (1976); Бредов и др., Классическая электродинамика; Сивухин, Электричество; Пайерлс (1988); Лифшиц и Питаевский, Физическая кинетика; Фрелих (1960)].

Задачи

7.1. Получить формулу (7.16) наглядным способом, предполагая, что электрическая поляризация $\boldsymbol{P}$ создается в веществе одинаковыми элементарными диполями $p=el$, и подсчитывая заряд, заключенный внутри произвольной замкнутой поверхности.

7.2. Получить формулу (7.18) наглядным способом, предполагая, что магнитная поляризация M создается замкнутыми круговыми микроскопическими токами, циркулирующими в веществе, и вычисляя ток, протекающей через произвольную поверхность внутри вещества.

7.3. Диэлектрический шар радиуса a равномерно поляризован (вектор поляризации $\boldsymbol{P}=$ const) и находится в вакууме. Вычислить электрическое поле внутри и вне шара на основе модельных соображений, рассматривая относительный сдвиг на малое расстояние положительных и отрицательных зарядов.

7.4. Вычислить поляризуемость атома водорода β в слабом внешнем электрическом поле с помощью следующей классической модели. Пусть плотность электронного облака описывается функцией $\rho(r) = -(e_0/\pi a_B^3)\exp(-2r/a_B)$, где e_0 - элементарный заряд, a_B - постоянная (боровский радиус). Деформацией электронного облака пренебречь. Как изменится поляризуемость, если считать, что электронное облако имеет постоянную плотность внутри сферы радиусом a_B?

7.5*. Вычислить поляризуемость атома водорода в основном состоянии квантовомеханическим методом (см. общую формулу в задаче 6.62).

7.6*. Молекула состоит из двух атомов, находящихся на расстоянии a. Атомы сферически симметричны, их поляризуемости равны β' и β''. Найти тензор поляризуемости молекулы, считая радиусы атомов малыми по сравнению с a. Рассмотреть, в частности, случай $\beta' = \beta''$.

7.7. Исходя из закона сохранения энергии доказать, что тензор поляризуемости молекулы в постоянном поле является симметричным.

7.8. Диэлектрик состоит из одинаковых молекул, не имеющих дипольных моментов в отсутствие внешнего поля. Тензор поляризуемости отдельной молекулы β_{ik} известен. Найти коэффициент поляризации диэлектрика α; рассмотреть два случая: а) все молекулы ориентированы одинаково; б) молекулы ориентированы беспорядочно [1]. Учитывать отличие действующего на молекулу поля от среднего с помощью формулы КлаузиусаМосотти.

7.9*. Если поляризуемости молекулы в разных направлениях различны, то энергия взаимодействия молекулы с внешним полем будет зависеть от ее ориентации. Поэтому наряду с деформационным механизмом поляризации будет действовать ориентационный механизм, хотя молекула и не имеет постоянного электрического момента. Это вызовет температурную зависимость диэлектрической постоянной вещества, состоящего из беспорядочно ориентированных неполярных молекул. Исследовать данный эффект на примере двухатомного газа, находящегося в слабом постоянном электрическом поле. Вычислить коэффициент поляризации диэлектрика α. Продольная поляризуемость молекулы газа β_1, поперечная β_2.

7.10. Две молекулы в газе имеют дипольные моменты p_1 и p_2 и находятся на расстоянии R друг от друга. Вследствие столкновений с другими молекулами их ориентации будут меняться; вероятность данной взаимной ориентации определяется формулой Больцмана (7.31), в которой U будет энергией взаимодействия двух диполей. Считая выполненным условие $U \ll kT$, показать, что величина U, усредненная по распределению Больцмана [2], имеет вид

$$U(R) = -\frac{2p_1^2 p_2^2}{3TR^6}$$

7.11. Молекула с электрическим дипольным моментом p взаимодействует с неполярной молекулой, поляризуемость которой β. Показать, что энергия взаимодействия, усредненная по возможным ориентациям дипольного момента [2], имеет вид:

$$U(R) = -\frac{\beta p^2}{R^6}$$

где R - расстояние между молекулами.

7.12^. В диэлектрике, находящемся в постоянном электрическом поле, наряду с дипольным моментом (вектором поляризации $\mathbf{P}$) существуют

[01] Случай а) может иметь место в твердых телах, кристаллических и аморфных; случай б) в газах, жидкостях и твердых телах. Но следует иметь в виду, что твердое тело в отличие от газа

в общем случае также моменты высших порядков. Найти плотности объемных и поверхностных зарядов, эквивалентных квадрупольной поляризации Q_{ik} (Q_{ik} - составляющие квадрупольного момента единицы объема диэлектрика).

7.13. Вычисление диэлектрической проницаемости полярных веществ, для которых неприменима формула Клаузиуса-Мосотти, можно произвести следующим приближенным методом, принадлежащим Онзагеру.

Рассматривается малая сфера, внутри которой может поместиться только одна молекула. Принимается, что вне этой сферы находится однородный диэлектрик с диэлектрической проницаемостью ε, внутри сферы вакуум, и что поле внутри сферы совпадает с эффективным полем, действующим на молекулу. Это поле определяется путем решения макроскопических уравнений электростатики. Найти таким способом связь диэлектрической проницаемости вещества ε с поляризуемостью его молекул β.

7.14*. Однородный изотропный диэлектрик имеет диэлектрическую проницаемость ε и не имеет спонтанной поляризации в отсутствие внешнего поля. Поэтому в любом выделенном макроскопическом объеме V без внешнего поля дипольный момент, усредненный по равновесным конфигурациям распределения зарядов, $\langle \mathscr{P} \rangle_0 = 0$, однако мгновенное значение момента флуктуирует и $\mathscr{P} \neq 0$. По этой причине в общем случае $\langle \mathscr{P}^2 \rangle_0 \neq 0$. Показать, что $\langle \mathscr{P}^2 \rangle_0$ выражается через диэлектрическую проницаемость:

$$\left\langle \mathscr{P}^2 \right\rangle_0 = \frac{VT(1+2\varepsilon)(\varepsilon-1)}{4\pi\varepsilon}$$

где T - температура, V - объем макроскопического шара внутри диэлектрика, $\langle \mathscr{P}^2 \rangle_0$ - средний квадрат флуктуационного (в отсутствие какого-либо внешнего поля) дипольного момента этого шара.

7.15*. Показать, что магнитный момент системы заряженных частиц, обусловленный их движением в магнитном поле по законам классической механики, в стационарном состоянии равен нулю (теорема Бора-Ван Левен). Для этого записать среднее по ансамблю Гиббса значение энергии рассматриваемой системы при наличии магнитного поля и в его отсутствие и убедиться, что энергия не зависит от внешнего поля.

7.16. Атомы (молекулы) статистически равновесного разреженного газа (концентрация N, температура T) имеют собственные магнитные моменты $\boldsymbol{\mu}$. Предполагая, что электроны в атомах движутся по стационарным классическим орбитам, показать, что при включении магнитного поля
каждый атом приобретет дополнительную кинетическую энергию $\Delta K = -\boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{H}$. Вычислить вектор магнитной поляризации $\boldsymbol{M}$ и парамагнитную восприимчивость газа, вызванную ориентацией магнитных моментов атомов. Согласуются ли полученные результаты с теоремой, доказанной в предыдущей задаче?

7.17*. Произвести квантовомеханический расчет намагниченности и парамагнитной восприимчивости статистически равновесного разреженного атомарного газа, помещенного в слабое магнитное поле. Квантовомеханический оператор полного магнитного момента отдельного атома имеет вид (ср. с формулой (6.86))

$$\hat{\boldsymbol{\mu}} = \mu_B(\hat{\boldsymbol{J}} + \hat{\boldsymbol{S}}) \tag{7.43}$$

где μ_B - магнетон Бора, $\hat{\boldsymbol{J}} = \hat{\boldsymbol{L}} + \hat{\boldsymbol{S}}, \hat{\boldsymbol{S}}$ - безразмерные операторы полного и спинового механических моментов электронной оболочки атома. Атом находится в основном состоянии с определенными значениями квантовых чисел J, L, S. Магнитное поле слабое

представляет собою единую систему сильно взаимодействующих частиц. Поэтому представление об отдельных молекулах в составе твердого тела может оказаться лишенным смысла.

[2] В задачах 7.10 и 7.11 при усреднении по направлениям дипольных моментов следует использовать формулы, полученные в задаче 1.33 .

и неспособно разорвать LS-связь.

7.18. Пусть атомы в квазиклассической модели (см. задачу 7.16) сферически симметричны и не имеют собственных магнитных моментов. Вычислить диамагнитную восприимчивость атомов, обусловленную ларморовской прецессией электронных оболочек во внешнем магнитном поле.

7.19*. Произвести квантовомеханический расчет диамагнитной восприимчивости атомарного газа. Электронные оболочки атомов имеют квантовые числа $L = S = 0$.

7.20. Атом со сферически симметричным распределением заряда помещен во внешнее однородное магнитное поле $\boldsymbol{H}$. Показать, что добавочное поле около ядра, обусловленное диамагнитным током (ларморовской прецессией электронов), равно

$$\Delta \boldsymbol{H} = -\frac{e\boldsymbol{H}}{3mc^2}\varphi(0)$$

где $\varphi(0)$ - электростатический потенциал, создаваемый около ядра атомными электронами, e и m - заряд и масса электрона.

7.21*. Рассмотреть систему, состоящую из частиц с зарядом и массой m, каждая из которых движется на фиксированном расстоянии a от некоторого центра (классические ротаторы). Эта система находится в
магнитном поле в состоянии статистического равновесия. Показать, что полная магнитная восприимчивость такой системы равна нулю.

7.22. В простейшей модели свободные электроны в металлах можно рассматривать как идеальный Ферми-газ при температуре T, близкой к абсолютному нулю. Вычислить парамагнитную восприимчивость электронного газа, вызванную ориентацией их спиновых магнитных моментов в слабом магнитном поле. Концентрация электронов $N, T = 0$, влияние магнитного поля на движение электронов в пространстве не учитывать.

Указание. В отсутствие магнитного поля энергия Ферми ϵ_F (т. е. энергия наивысшего заполненного уровня) при $T \to 0$ выражается в виде $\epsilon_F = \hbar^2 \left(3\pi^2 N\right)^{2/3}/2m$, где m - масса электрона, N - их концентрация.

7.23. Разреженный электронный газ подчиняется статистике Максвелла-Больцмана и находится в слабом однородном магнитном поле при температуре T. Вычислить магнитную восприимчивость электронного газа, выделив из нее часть, обусловленную ориентацией спиновых магнитных моментов, и вклад, вызванный влиянием магнитного поля на орбитальное движение частиц. Использовать квантовомеханическое выражение для энергии электрона в магнитном поле.

Указание. Электрон в однородном магнитном поле обладает энергией [Ландау и Лифшиц, Квантовая механика]

$$\mathscr{E}_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega_B + \frac{p_z^2}{2m} - \mu_B m_s B \tag{7.44}$$

Здесь $\omega_B = |e|B/mc$ - циклотронная частота, $n = 0, 1 \cdots, m_s = \pm 1/2$. Значения энергии вырождены ввиду неопределенности положения ларморовского кружка, число квантовых состояний в объеме V и интервале dp_z есть

$$dQ = \frac{eBV}{(2\pi\hbar)^2 c}dp_z \tag{7.45}$$

7.24*. Ионизированный газ состоит из ионов (заряд Ze, средняя концентрация N_0) и электронов (заряд $-e$, средняя концентрация n_0). Газ в целом электронейтрален, т. е. $ZN_0 = n_0$, и находится в состоянии статистического равновесия при температуре T. Считая, что такой газ описывается классической статистикой, и что энергия

взаимодействия частиц друг с другом невелика по сравнению с тепловой энергией T, найти распределение плотности заряда вблизи отдельного иона.

7.25. Бесконечная проводящая пластинка, ограниченная плоскостями $x = h$ и $x = -h$, находится в постоянном и однородном поперечном электрическом поле E_0. Пластинка в целом электронейтральна, средняя концентрация «свободных зарядов» N_0, диэлектрическая проницаемость ε. Считая изменение концентрации под действием приложенного поля малой ($|N - N_0| \ll N_0$), найти распределение поля внутри пластинки и определить толщину слоя, в котором концентрируется «поверхностный» заряд. Частицы-носители заряда подчиняются распределению Больцмана.

7.26*. Слой электролита находится между двумя бесконечными плоскими электродами, $x = h$ и $x = -h$, на которые подана разность потенциалов $2\varphi_0$. Электролит состоит из ионов двух сортов, их заряды $+e$ и $-e$, средняя концентрация при отсутствии внешнего поля N_0. Диэлектрическая проницаемость электролита ε. Найти распределение потенциала между электродами. Частицы подчиняются распределению Больцмана.

Указание. Использовать метод решения, примененный в задаче 7.24*.

7.27*. Найти распределение заряда и потенциала вокруг примесного иона с зарядом Ze в металле. Использовать простейшую модель металла в виде вырожденного ($T \to 0$) электронного газа со средней концентрацией n_0, заряд которого нейтрализован неподвижными положительными ионами.

Указание. Использовать квазиклассическую модель Томаса-Ферми (см. [Ландау и Лифшиц, Квантовая механика]).

7.28. В приближении времени релаксации $\tau(\epsilon)$ вычислить электропроводность вырожденного электронного газа, имеющего концентрацию n.

7.29. Равновесная плазма с концентрацией электронов n и неподвижными ионами находится в слабом однородном магнитном поле $\boldsymbol{B} = \text{const}$. Вычислить в приближении времени релаксации $\tau = \text{const}$ ток в плазме, возникающий под действием слабого электрического поля, и тензор электропроводности. Учесть в токе члены не выше первого порядка относительно B.

7.30*. Решить предыдущую задачу без ограничения величины магнитного поля. Вычислить анизотропный тензор электропроводности, проанализировать случаи слабого и сильного магнитного поля.

11.1.2 7.4. Answers and Solutions

7.1. Рассмотрим произвольныый объем V внутри диэлектрика, окруженный поверхностью S, и подсчитаем электрический заряд $q_{\text{int}} = \int\limits_V \rho_{\text{int}}\, dV$ внутри этого объема. Указанный заряд создается только теми
диполями, которые пересекаются поверхностью S (см. рис. 7.2). Все прочие диполи находятся целиком либо внутри, либо вне объема и не дают вклада в суммарный заряд. Элемент поверхности dS пересекает в среднем $Nl \cdot dS$ диполей; их заряд, остающийся внутри замкнутой поверхности, $dq_{int} = -eN\boldsymbol{l} \cdot d\boldsymbol{S} = -\boldsymbol{P} \cdot d\boldsymbol{S}$. Отсюда $q_{int} = -\oint_S \boldsymbol{P} \cdot d\boldsymbol{S} = -\int\limits_V \operatorname{div} \boldsymbol{P} dV$, что и приводит к (7.16).

7.2. Магнитный момент отдельного элементарного тока записываем в виде $\boldsymbol{m} = is\boldsymbol{n}/c$, где i - сила элементарного молекулярного тока, s - площадь кружка, $\boldsymbol{n}$ - единичная нормаль к плоскости кружка (см. формулу (2.60)). Изобразим произвольный замкнутый контур внутри вещества (рис. 7.3).

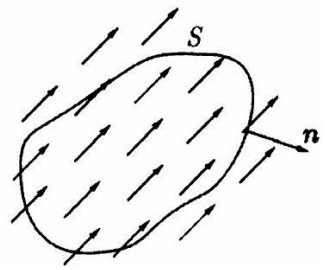


Рис. 7.2

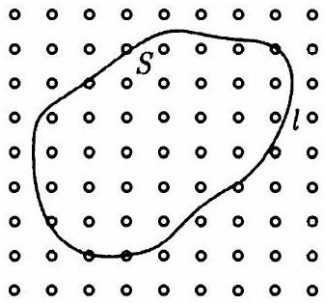


Рис. 7.3

Ток намагничения J_{int} через поверхность S, ограниченную контуром l, создается только теми замкнутыми элементарными токами, которые проткнуты этим контуром. Остальные токи либо пересекают поверхность S дважды, либо не пересекают ее вовсе и не дают вклада в J_{int}. Отрезок $d\boldsymbol{l}$ контура пересекает в среднем $s(\boldsymbol{n}\cdot d\boldsymbol{l})N$ молекулярных токов и вносит в полный ток вклад $dJ_{int} = is(\boldsymbol{n}\cdot d\boldsymbol{l})N = c\boldsymbol{M}\cdot d\boldsymbol{l}$; отсюда $J_{\text{int}} = c\oint_l \boldsymbol{M}\cdot d\boldsymbol{l} = c\int\limits_S \operatorname{rot}\boldsymbol{M}\cdot d\boldsymbol{S}$. Ввиду произвольности выбранного контура из последнего соотношения следует (7.18).

7.3. Пусть концентрация элементарных диполей $\boldsymbol{p} = e\boldsymbol{l}$ в поляризованном шаре N, так что полный дипольный момент шара $\mathscr{P} = 4\pi a^3\boldsymbol{P}/3$, где $\boldsymbol{P} = N\boldsymbol{p}$ - вектор поляризации. Ввиду условия $l \ll a$ поляризованный шар можно рассматривать как совокупность двух шаров с зарядами $q = \pm 4\pi a^3 Ne/3$, центры которых раздвинуты на расстояние l (рис. 7.4). Во внешней области каждый шар создает поле как точечный заряд, расположенный в соответствующем центре, т. е. два шара создадут поле диполя с моментом $q\boldsymbol{l} = \mathscr{P}$, потенциал которого

$$\varphi_e(\boldsymbol{r}) = \frac{\mathscr{P}\cdot\boldsymbol{r}}{r^3} \tag{1}$$

(см. формулу (2.21)).

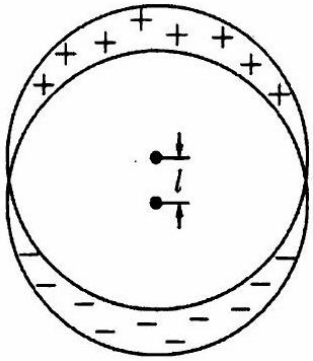


Рис. 7.4

Внутри поляризованного шара, на расстоянии $r < a$ от его центра, поле создается только внутренними зарядами, находящимися на расстояниях, меньших r. Внешние заряды не создают поля во внутренней области. Поэтому в ней также применима формула (1), но с заменой $\mathscr{P}$ на дипольный момент внутренней области, равный $\mathscr{P}\mathscr{P}r^3/a^3$:

$$\varphi_i(\boldsymbol{r}) = \frac{\mathscr{P}\cdot\boldsymbol{r}}{a^3} \tag{2}$$

Напряженность поля во внешней области была вычислена в задаче 2.21, во внутренней области имеем

$$\boldsymbol{E}_i = -\nabla\varphi_i(\boldsymbol{r}) = -\frac{\mathscr{P}}{a^3} = -\frac{4\pi}{3}\boldsymbol{P} \tag{3}$$

7.4. $\beta = 3a_B^3/4$. При равномерном распределении заряда в электронном облаке $\beta = a_B^3$.

7.5. Атом водорода в основном состоянии сферически симметричен, тензор его поляризуемости диагонален. Общая формула (см. (3) из решения задачи 6.62) принимает вид

$$\beta = 2\sum_n{}' \frac{e^2|\langle n|z|0\rangle\,|^2}{\mathscr{E}_n - \mathscr{E}_0} \tag{1}$$

Наибольшую сложность представляет здесь суммирование по промежуточным состояниям n. Следуя [Ландау и Лифшиц, Квантовая механика], вводим вместо координаты z вспомогательный оператор

$$z = \frac{m}{\hbar}\frac{d\hat{\zeta}}{dt} \tag{2}$$

где m - масса электрона. Матричный элемент оператора производной по времени с волновыми функциями стационарных состояний вычисляется по правилу $\langle n|\dot{\hat{\zeta}}|0\rangle = i\,(\mathscr{E}_0 - \mathscr{E}_n)\,\langle n|\hat{\zeta}|0\rangle/\hbar$, что позволяет избавиться в (1) от энергетического знаменателя и произвести суммирование:

$$\beta = \frac{2ime^2}{\hbar^2}\langle 0|z\hat{\zeta}|0\rangle \tag{3}$$

Находим теперь результат действия $\hat{\zeta}$ на волновую функцию основного состояния атома водорода, записав его в виде

$$\hat{\zeta}|0\rangle = q(\boldsymbol{r})|0\rangle \tag{4}$$

где $q(\boldsymbol{r})$ - новая неизвестная функция. С помощью (2), (4) и формулы (Д3.34) из первой части книги имеем

$$z|0\rangle = \frac{m}{\hbar}\frac{d\hat{\zeta}}{dt}|0\rangle = \frac{im}{\hbar^2}(\hat{\mathscr{H}}\hat{\zeta} - \hat{\zeta}\hat{\mathscr{H}})|0\rangle = \frac{im}{\hbar^2}\left(\hat{\mathscr{H}} - \mathscr{E}_0\right)q(\boldsymbol{r})|0\rangle \tag{5}$$

Подставив в (5) гамильтониан атома водорода

$$\hat{\mathscr{H}} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta + U(r) \tag{6}$$

получим уравнение для определения $q(\boldsymbol{r})$:

$$\frac{1}{2}|0\rangle\Delta q + \nabla q\cdot\nabla|0\rangle = iz|0\rangle \tag{7}$$

Нам требуется только частное решение этого уравнения, выражающееся через величины, входящие в его правую часть.

Подставляя в (7) волновую функцию основного состояния $|0\rangle = \exp(-r/a_B)/\sqrt{\pi a_B^3}$, где $a_B = \hbar^2/me^2$ - боровский радиус, и используя
зависимость от полярного угла ϑ, определяемую правой частью $z = r\cos\vartheta$, ищем решение в виде $q(\boldsymbol{r}) = f(r)\cos\vartheta$. Получаем уравнение

$$\frac{1}{2}f'' + \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a_B}\right)f' - \frac{1}{r^2}f = ir \tag{8}$$

частное решение которого имеет вид

$$f(r) = -ia_B r\left(a_B + \frac{r}{2}\right) \tag{9}$$

В итоге находим с помощью (2), (3), (9)

$$\beta = \frac{2i}{a_B}\langle 0|rf(r)\cos^2\vartheta|0\rangle = \frac{9}{2}a_B^3 \tag{10}$$

Сравнение с результатом предыдущей задачи показывает, что классические модели дают правильный порядок величины (если заимствовать из квантовой механики значение радиуса атома), но не позволяют получить правильный числовой множитель.

7.6. Из симметрии молекулы очевидно, что одна из главных осей тензора поляризуемости будет совпадать с осью молекулы, а две другие оси могут быть выбраны произвольно в плоскости, перпендикулярной оси молекулы. Поэтому из трех главных значений тензора поляризуемости только два будут различны: $\beta^{(1)}, \beta^{(2)} = \beta^{(3)}$. Для их определения нужно отдельно рассмотреть следующие случаи:

а) Внешнее поле направлено по оси молекулы. Очевидно, что индуцированный дипольный момент каждого из атомов будет направлен вдоль внешнего поля. Обозначив эти моменты соответственно через $\boldsymbol{p}'$ и $\boldsymbol{p}''$, получим для их определения два уравнения

$$\boldsymbol{p}' = \beta'(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{E}'), \quad \boldsymbol{p}'' = \beta''(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{E}'') \tag{1}$$

где $\boldsymbol{E}$ - внешнее поле, $\boldsymbol{E}'$ и $\boldsymbol{E}''$ - дополнительные поля, вызываемые в центре каждого из атомов присутствием другого атома. Поля $\boldsymbol{E}'$ и $\boldsymbol{E}''$ можно выразить через дипольные моменты соответствующих атомов, воспользовавшись формулой для напряженности поля, создаваемого диполем с моментом $\boldsymbol{p}$ и учитывая, что все векторы направлены вдоль оси молекулы. Определяя затем p' и p'' из системы (1), с помощью формулы $p = p' + p'' = \beta^{(1)}E$ найдем

$$\beta^{(1)} = \left[\frac{1}{\beta'} - \frac{2(a^3 + 2\beta')}{a^3(a^3 + 2\beta'')}\right]^{-1} + \left[\frac{1}{\beta'} - \frac{2(a^3 + 2\beta'')}{a^3(a^3 + 2\beta')}\right]^{-1} \tag{2}$$

б) Внешнее поле перпендикулярно оси молекулы. Аналогичным путем получаем

$$\beta^{(2)} = \beta^{(3)} = \left[\frac{1}{\beta'} + \frac{a^3 - \beta'}{a^3(a^3 - \beta'')}\right]^{-1} + \left[\frac{1}{\beta''} + \frac{a^3 - \beta''}{a^3(a^3\beta')}\right]^{-1} \tag{3}$$

При $\beta' = \beta''$ выражения $\beta^{(1)}$ и $\beta^{(2)}$ упрощаются:

$$\beta^{(1)} = 2\beta'/\left(1 - 2\beta'/a^3\right), \quad \beta^{(2)} = 2\beta'/\left(1 + 2\beta'/a^3\right) \tag{4}$$

Средняя поляризуемость

$$\bar{\beta} = \frac{1}{3}\left(\beta^{(1)} + \beta^{(2)}\right) = \frac{2}{3}\beta'\left(\frac{1}{1-2\beta'/a^3} + \frac{2}{1+\beta'/a^3}\right) \tag{5}$$

7.8. а) Диэлектрик в целом будет анизотропным. Главные значения тензора поляризуемости диэлектрика (ср. 7.37):

$$\alpha^{(i)} = \frac{N\beta^{(i)}}{1 - 4\pi N\beta^{(i)}/3}$$

б) В случае беспорядочной ориентации молекул в макроскопических объемах диэлектрика не будет никаких физически выделенных направлений, кроме направления внешнего поля. Поэтому средний дипольный момент молекулы $\overline{\boldsymbol{p}}$ будет пропорционален действующему на молекулу полю $\mathscr{E}$:

$$\overline{\boldsymbol{p}} = \beta\mathscr{E}$$

С другой стороны, имеем, очевидно:

$$\bar{p}_i = \overline{\beta_{ik}\mathscr{E}_k} = \bar{\beta}_{ik}\mathscr{E}_k$$

где усреднение производится по макроскопическому малому объему. Из сравнения двух последних формул следует, что

$$\beta = \bar{\beta}_{11} = \bar{\beta}_{22} = \bar{\beta}_{33}, \quad \bar{\beta}_{ik} = 0 \quad (\text{ при } i \neq k)$$

Таким образом,

$$\beta = \frac{1}{3}\left(\overline{\beta_{11} + \beta_{22} + \beta_{33}}\right)$$

Но сумма диагональных компонент тензора есть инвариант, равный сумме главных значений $\beta^{(1)} + \beta^{(2)} + \beta^{(3)}$ (см. формулу 1.263). Поэтому

$$\beta = \frac{1}{3}\left(\beta^{(1)} + \beta^{(2)} + \beta^{(3)}\right)$$

Коэффициент поляризации диэлектрика α связан с β обычной формулой (см. пример 7.4).

7.9. Если ось молекулы ориентирована под углом θ к направлению внешнего поля $\boldsymbol{E}_0$, то энергия молекулы запишется в виде

$$W = -\frac{1}{2}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{E}_0 = -\frac{1}{2}\left(\beta_1\cos^2\theta + \beta_2\sin^2\theta\right)E_0^2$$

Число частиц в единице объема, оси которых направлены под углом θ относительно $\boldsymbol{E}_0$, дается формулой Больцмана 7.31 . Вектор поляризации определяется формулой $\boldsymbol{P} = N\overline{\boldsymbol{p}}$, где $\overline{\boldsymbol{p}}$ - усредненный по распределению Больцмана дипольный момент одной молекулы, N - число частиц в единице объема. Поскольку в отсутствие поля молекулы ориентированы хаотически, $\bar{p}$ будет иметь направление внешнего поля.

В соответствии с этим вычисляем величину $\bar{p}$ по формуле

$$\bar{p} = \frac{1}{N}\int p_{\parallel}dN = \frac{E_0\int\limits_0^{\pi}\exp\left(-\frac{W(\theta)}{T}\right)\left(\beta_1\cos^2\theta + \beta_2\sin^2\theta\right)\sin\theta d\theta}{\int\limits_0^{\pi}\exp\left(-\frac{W(\theta)}{T}\right)\sin\theta d\theta}$$

где через $p_{\|}$обозначена компонента дипольного момента молекулы, параллельная полю. По условию задачи поле - слабое, поэтому достаточно учитывать только члены, линейные по $a = (\beta_1 - \beta_2) E_0^2/2T \ll 1$. Использовав далее формулы $P = N\bar{p} = \alpha E_0$, получим окончательно

$$\alpha = N\beta_2 + \frac{1}{3}N(\beta_1 - \beta_2)\left[1 + \frac{2}{15}\frac{(\beta_1 - \beta_2) E_0^2}{T}\right]$$

Как видно из этой формулы, зависимость между P и E_0 получается нелинейной, и α не является коэффициентом пропорциональности, не зависящим от E_0. Оценим величину поправочного члена при обычных температурах ($T = 300$ K). Считая $\beta_1 - \beta_2$ порядка 10^{-24} cm^3, получим $T/(\beta_1 - -\beta_2) \approx 10^6$. Таким образом, этот член мал, если $E_0 \ll 10^3$ В/см. Пренебрегая поправочным членом, получим для α прежнее выражение:

$$\alpha = \frac{1}{3}N(\beta_1 + 2\beta_2)$$

(см. задачу 7.8).

7.12. Дополнительный потенциал, обусловленный квадрупольной поляризацией диэлектрика, запишется в виде

$$\varphi = \frac{1}{2}\int \frac{\partial^2(1/R)}{\partial x_i \partial x_k} Q_{ik} dV \tag{1}$$

где R - расстояние от точки наблюдения до элемента объема dV, а интегрирование ведется по объему диэлектрика. С другой стороны, потенциал объемных и поверхностных зарядов в общем случае имеет вид

$$\varphi = \int \frac{\rho'}{R} dV + \int \frac{\sigma'}{R} dS + \int \tau' \cdot \nabla\left(\frac{1}{R}\right) dS \tag{2}$$

где ρ' - плотность объемных зарядов, σ' - плотность поверхностных зарядов, τ' - мощность двойного слоя. Приведя (1) к виду (2), получим

$$\rho' = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 Q_{ik}}{\partial x_i \partial x_k}, \quad \sigma' = -\frac{1}{2}\frac{\partial Q_{in}}{\partial x_i}, \quad \tau'_k = \frac{1}{2}Q_{ki} n_i \tag{3}$$

Таким образом, квадрупольная поляризация эквивалентна объемным зарядам ρ' внутри диэлектрика, поверхностным зарядам σ' и двойному электрическому слою с мощностью τ' на поверхности диэлектрика. Поскольку плотности объемных и поверхностных зарядов в диэлектрике связаны с вектором поляризации формулами $\rho' = -\operatorname{div} \boldsymbol{P}', \sigma' = P'_n$, то из (3) следует, что квадрупольная поляризация эквивалентна дополнительной дипольной поляризации

$$P'_k = -\frac{1}{2}\frac{\partial Q_{ik}}{\partial x_i}$$

и двойному слою с мощностью τ'_k.

Формулы (3) можно получить также из рассмотрения энергии диэлектрика, обусловленной квадрупольной поляризацией.

7.13. $\varepsilon = \frac{1}{4}\left[1 + 3x + 3\left(1 + \frac{2}{3}x + x^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]$,

где $x = 4\pi N\beta$. Поляризуемость β для полярных веществ в слабых полях дается формулой

$$\beta = \frac{p^2}{3T}$$

где p - дипольный момент молекулы, T - температура.

При $x \ll 1$, когда отличие действующего на молекулу поля от среднего поля становится очень малым,

$$\varepsilon = 1 + x = 1 + 4\pi N\beta$$

7.14. Описываем заряды внутри шара микроскопически, на основе классического распределения Больцмана (7.31), а вне шара рассматриваем диэлектрик как сплошную среду, характеризуемую диэлектрической проницаемостью ε. Пусть a-й заряд внутри шара смещается на вектор u_a относительно равновесного положения. Совокупность таких смещений обозначим через $Q = Q(u_1, \dots u_a, \dots)$. В отсутствие внешнего поля смещения носят чисто флуктуационный характер. Взаимодействие зарядов описывается потенциальной энергией $U_0(Q)$, которая включает взаимодействие зарядов, находящихся внутри шара, между собой. Взаймодействие с зарядами вне шара происходит по поверхности и пренебрежимо мало ввиду макроскопичности шара. Дипольный момент шара выражается в виде

$$\mathscr{P} = \sum_a e_a \boldsymbol{u}_a \tag{1}$$

Ввиду отсутствия спонтанной поляризации среднее статистическое дипольного момента равно нулю:

$$\langle \mathscr{P} \rangle_0 = \int \mathscr{P} \exp\left(-\frac{U_0(Q)}{T}\right) dQ = 0 \tag{2}$$

При включении внешнего поля внутри шара возникает однородное электрическое поле с напряженностью (см. задачу 8.11)

$$\mathscr{E} = \frac{3\varepsilon}{2\varepsilon + 1} \boldsymbol{E} \tag{3}$$

Это поле создается внешними источниками и внешними (относительно шара) зарядами диэлектрика. В результате потенциальная энергия зарядов внутри шара приобретет добавочное слагаемое

$$U(Q, \boldsymbol{E}) = U_0(Q) - \sum_a e_a \boldsymbol{u}_a \cdot \boldsymbol{E} = U_0(Q) - \frac{3\varepsilon}{2\varepsilon + 1} \mathscr{P} \cdot \boldsymbol{E} \tag{4}$$

Эту потенциальную энергию нужно теперь использовать в распределении Больцмана при вычислении дипольного момента, наведенного внешним полем:

$$\langle \mathscr{P}(\boldsymbol{E}) \rangle = \int \mathscr{P} \exp\left(-\frac{U}{T}\right) dQ \Big/ \int \exp\left(-\frac{U}{T}\right) dQ \tag{5}$$

Считая поле $\boldsymbol{E}$ слабым, разлагаем экспоненту в ряд и получаем

$$\exp\left(-\frac{U}{T}\right) = \left[1 + \frac{3\varepsilon}{2\varepsilon + 1} \frac{\mathscr{P} \cdot \boldsymbol{E}}{T}\right] \exp\left(-\frac{U_0}{T}\right) \tag{6}$$

Используя (2), находим

$$\langle \mathscr{P}_\mu(\boldsymbol{E}) \rangle = \frac{3\varepsilon E_\nu}{(2\varepsilon + 1)T} \frac{\int \mathscr{P}_\mu \mathscr{P}_\nu \exp\left(-\frac{U_0}{T}\right) dQ}{\int \exp\left(-\frac{U_0}{T}\right) dQ} = \frac{3\varepsilon E_\nu}{(2\varepsilon + 1)T} \langle \mathscr{P}_\mu \mathscr{P}_\nu \rangle_0 \tag{7}$$

Среднее от компонент дипольного момента преобразуем исходя из соображений симметрии:

$$\langle \mathscr{P}_\mu \mathscr{P}_\nu \rangle_0 = \frac{1}{3} \langle \mathscr{P}^2 \rangle_0 \delta_{\mu\nu} \tag{8}$$

Левую часть равенства (7) можно записать через проекцию P_μ вектора электрической поляризации:

$$\langle \mathscr{P}_\mu(\boldsymbol{E}) \rangle = V P_\mu = \frac{V(\varepsilon - 1)}{4\pi} E_\mu \tag{9}$$

Подставляя в (7) результаты (8) и (9), получаем формулу, приведенную в условии задачи.

Обращаем внимание читателя на то, что эта формула устанавливает связь между откликом среды на внешнее возмущение, характеризуемым диэлектрической проницаемостью ε, и флуктуацией внутреннего параметра среды ($\langle \mathscr{P}^2 \rangle_0$) при статистическом равновесии в отсутствие внешнего возмущения. Это соотношение представляет собой частный случай флуктуационно-диссипационной теоремы (ФДТ). Общее соотношение такого рода для возмущения, зависящего от времени, см. в разделе 13.2.

7.15. Пусть в отсутствие внешнего магнитного поля система частиц имеет функцию Гамильтона

$$\mathscr{H}_0 = \sum_a \frac{p_a^2}{2m_a} + U \tag{1}$$

где потенциальная энергия U - функция координат. При наличии магнитного поля функция Гамильтона примет вид (см. (4.65'))

$$\mathscr{H} = \sum_a \frac{1}{2m_a} \left(\boldsymbol{P}_a - \frac{e_a}{c} \boldsymbol{A}_a \right)^2 + U \tag{2}$$

где $\boldsymbol{P}_a$ - обобщенный импульс a-й частицы, $\boldsymbol{A}_a$ - векторный потенциал внешнего поля в точке, где находится частица. Средняя по ансамблю Гиббса энергия системы (ее внутренняя энергия в термодинамическом смысле) выразится интегралом по фазовому пространству

$$\overline{\mathscr{E}} = \frac{1}{Z} \int \mathscr{H} \exp\left(-\frac{\mathscr{H}}{T} \right) d\Gamma \tag{3}$$

где $d\Gamma = \prod_i dP_i dx_i$ - элемент фазового объема. Произведем в (3) замену переменных

$$\boldsymbol{P}_a - \frac{e_a}{c} \boldsymbol{A}_a \to \boldsymbol{p}_a \tag{4}$$

оставив координаты прежними. При такой замене $\mathscr{H}$ в (3) превращается в $\mathscr{H}_0$, а $d\Gamma = \prod_i dp_i dx_i$, так как якобиан перехода к новым переменным равен 1. В итоге внутренняя энергия системы в магнитном поле выразится точно так же, как в отсутствие поля, т. е. энергия не зависит от поля. Тело, не имевшее магнитного момента в отсутствие поля, не приобретет его и при включении поля. Но этот результат имеет место только в классическом случае. Он теряет силу, если частицы движутся по квантовым законам.

7.16. Пусть электроны в атоме движутся со скоростями $\boldsymbol{v}_a$. При наложении поля $\boldsymbol{H}$ каждый электрон испытывает ларморовскую прецессию с угловой скоростью $\boldsymbol{\Omega}_L = -e\boldsymbol{H}/2mc$ (см. задачу 4.102) и приобретает добавочную скорость

$$\Delta \boldsymbol{v}_a = \boldsymbol{\Omega}_L \times \boldsymbol{r}_a \tag{1}$$

Изменение кинетической энергии электронов
(2) $\Delta K = \frac{m}{2}\sum\limits_a \left[(\boldsymbol{v}_a + \Delta\boldsymbol{v}_a)^2 - \boldsymbol{v}_a^2\right] \approx m\sum\limits_a \boldsymbol{v}_a \cdot \Delta\boldsymbol{v}_a = m\boldsymbol{\Omega}_L \cdot \sum\limits_a \boldsymbol{r}_a \times \boldsymbol{v}_a$

где опущено слагаемое второго порядка по малой скорости Δv. Воспользовавшись формулой связи (4.76) между механическим и магнитным орбитальными моментами, $\boldsymbol{\mu}_a = e\boldsymbol{r}_a \times \boldsymbol{p}_a/2mc$, и очевидным выражением
$\boldsymbol{\mu} = \sum\limits_a \boldsymbol{\mu}_a$ для полного магнитного момента атома, находим соотношение, приведенное в условии задачи. Заметим, что по физическому смыслу было бы правильнее в выражении для $\boldsymbol{\Omega}_L$ вместо $\boldsymbol{H}$ писать $\boldsymbol{B}$. Но ввиду малости магнитной восприимчивости у газов допускаемая при этом ошибка очень мала.

Дальнейшие расчеты намагниченности и магнитной восприимчивости производятся так же, как для электрической поляризации в примере 7.3, т. е. с помощью распределения Больцмана. Намагниченность в общем случае выражается через функцию Ланжевена

$$M = N\mu L(\mu H/T) \tag{3}$$

При $\mu H \ll T$ зависимость между M и H линейна, магнитная восприимчивость имеет значение

$$\chi = \frac{N\mu^2}{3T} \propto \frac{1}{T} \tag{4}$$

(закон Кюри для парамагнетика). Полученные результаты не противоречат теореме Бора-Ван Левен, так как рассмотренная в этой задаче модель не является чисто классической: предположение о существовании стационарных орбит электронов в атомах несовместимо с классической механикой и электродинамикой.
7.17. Оператор взаимодействия атома с полем в линейном приближении по полю имеет вид

$$\hat{V} = -\hat{\boldsymbol{\mu}} \cdot \boldsymbol{H} \tag{1}$$

В отсутствие внешнего поля уровни энергии при заданных L, S, J, M_J вырождены по M_J с кратностью $2J+1$, но в магнитном поле вырождение снимается. Для решения задачи нужно найти по теории возмущений поправки к уровням энергии и затем вычислить средний магнитный момент атома в магнитном поле, пользуясь матрицей плотности в энергетическом представлении(см. формулы (Д3.43), (Д3.44)).

Выбираем в качестве оси квантования Oz направление поля $\boldsymbol{H}$. Тогда согласно стационарной теории возмущений поправки к уровням энергии должны вычисляться по формуле

$$\Delta\mathscr{E}_{LSJM_J} = -\left\langle LSJM_J\right| \hat{\mu}_z \left|LSJM_J\right\rangle H \tag{2}$$

Для вычисления написанного матричного элемента удобно представить оператор магнитного момента в виде

$$\hat{\boldsymbol{\mu}} = \hat{G}\hat{\boldsymbol{J}} \tag{3}$$

где $\hat{G}$ - некоторый скалярный оператор. Используя явный вид $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ из условия задачи, записываем

$$\hat{G}\hat{\boldsymbol{J}} = \mu_B(\hat{\boldsymbol{J}} + \hat{\boldsymbol{S}}) \tag{4}$$

и умножаем обе части равенства справа скалярно на оператор $\hat{J}$. После этого вычисляем диагональные матричные элементы от обеих частей равенства:

$$\langle LSJM_J|\,\hat{G}\hat{\boldsymbol{J}}^2\,|LSJM_J\rangle = \mu_B\,\langle LSJM_J|\,\hat{\boldsymbol{J}}^2 + \hat{\boldsymbol{S}}\cdot\hat{\boldsymbol{J}}\,|LSJM_J\rangle \tag{5}$$

Имеем, очевидно,

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{J}}^2\,|LSJM_J\rangle &= J(J+1)\,|LSJM_J\rangle\\ \hat{\boldsymbol{L}}^2\,|LSJM_J\rangle &= L(L+1)\,|LSJM_J\rangle\\ \hat{\boldsymbol{S}}^2\,|LSJM_J\rangle &= S(S+1)\,|LSJM_J\rangle\end{aligned} \tag{6}$$

Наконец, возводя в квадрат обе части равенства $\hat{\boldsymbol{J}} - \hat{\boldsymbol{S}} = \hat{\boldsymbol{L}}$ и пользуясь (6), находим

$$2\hat{\boldsymbol{S}}\cdot\hat{\boldsymbol{J}}\,|LSJM_J\rangle = [J(J+1) - L(L+1) + S(S+1)]\,|LSJM_J\rangle \tag{7}$$

С помощью (6) и (7) находим матричный элемент

$$\langle LSJM_J|\,\hat{G}\,|LSJM_J\rangle = g\mu_B \tag{8}$$

и вычисляем уровни энергии

$$\Delta\mathscr{E}_{LSJM_J} = -g\mu_B H M_J \tag{9}$$

Здесь

$$g = 1 + \frac{J(J+1) - L(L+1) + S(S+1)}{2J(J+1)} \tag{10}$$

- гиромагнитный множитель, или множитель Ланде.

Намагниченность газа вычисляем с помощью вероятности (Д3.44), подставляя значения энергии уровней (9):

$$M = Ng\mu_B \frac{\sum\limits_{m=-J}^{m=J} me^{am}}{\sum\limits_{m=-J}^{m=J} e^{am}} = Ng\mu_B \frac{d}{da}\ln\left(\sum_{m=-J}^{m=J} e^{am}\right) \tag{11}$$

где $a = g\mu_B H/T$, сумма по m под знаком логарифма представляет собой статистическую сумму, относящуюся к отдельному атому. Вычисляя ее с помощью формулы для конечной геометрической прогрессии, получаем
$M = M_0 L_J(aJ)$, где $L_J(x) = \left(1+\frac{1}{2J}\right)\operatorname{cth}\left[\left(1+\frac{1}{2J}\right)x\right] - \frac{1}{2J}\operatorname{cth}\left(\frac{x}{2J}\right)$

- квантовая функция Ланжевена (или функция Бриллюэна). Величина $M_0 = Ng\mu_B J$ представляет собой намагниченность насыщения и достигается при низких температурах ($aJ \gg 1$). Если выполняется противоположное неравенство, то намагниченность пропорциональна магнитному полю и парамагнитная восприимчивость выражается в виде

$$\chi = \frac{Ng^2\mu_B^2 J(J+1)}{3T} \tag{13}$$

Переход к квазиклассической модели предыдущей задачи происходит при $J \gg 1$. В этом случае магнитный момент атома выражается в виде $\mu \approx g\mu_B J$, а квантовая функция Ланжевена переходит в классическую, $L_J(x) \to L(x)$ при $J \to \infty$.

Парамагнитная восприимчивость газов в обычных условиях очень мала. Подставляя в (13) $N \approx 3 \times 10^{19}$ см ^{3} и $T \approx 10^{-14}$ эрг, получаем $\chi \approx 10^{-7}$. Для сравнения диэлектрическая восприимчивость при тех же условиях $\alpha \approx 10^{-3}$. Разница обусловлена тем, что намагниченность связана с движением частиц и магнитная восприимчивость приобретает лишний малый множитель $(v/c)^2 \approx 10^{-4}$, где v - скорость атомных электронов.

7.18. За счет ларморовской прецессии каждый электрон приобретает добавочную скорость Δv, величина которой дается формулой (1) из решения задачи 7.16. Вводя объемную плотность заряда электронной оболочки $\rho(r)$, вычисляем магнитный момент атома, вызванный ларморовской прецессией:

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{1}{2c}\int \boldsymbol{r} \times \rho \Delta \boldsymbol{v} dV = \frac{1}{2c}\int \rho \boldsymbol{r} \times [\boldsymbol{\Omega}_L \times \boldsymbol{r}]\, dV \tag{1}$$

Ввиду сферической симметрии $\rho(r)$ вектор $\boldsymbol{\mu}$ направлен вдоль $\boldsymbol{\Omega}_L$:

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{1}{2c}\boldsymbol{\Omega}_L \int \rho \left(x^2 + y^2\right) dV \tag{2}$$

где оси Ox, Oy ориентированы перпендикулярно $\boldsymbol{H}$. Очевидно, можно записать

$$\int \rho \left(x^2 + y^2\right) dV = \frac{2}{3} Z e a^2 \tag{3}$$

где Ze - полный заряд электронной оболочки, a^2 - средний по всем электронам квадрат их расстояния от ядра. В итоге получаем из (2) и (3)

$$\boldsymbol{M} = N\boldsymbol{\mu} = \chi \boldsymbol{H}, \quad \text{где} \quad \chi = -\frac{N Z e^2 a^2}{6mc^2} < 0 \tag{4}$$

- диамагнитная восприимчивость. Диамагнитный момент атома направлен противоположно магнитному полю, а диамагнитная восприимчивость отрицательна.

  7.19. Если орбитальный и спиновый моменты электронной оболочки атома равны нулю, то оператор (7.43) даст нулевое значение для магнитного момента во всех порядках теории возмущений, а ненулевой результат будет связан с квадратичным по векторному потенциалу слагаемым в операторе взаимодействия (6.57). Поскольку мы имеем дело не с квантованным, а с постоянным внешним полем, подставляем в (6.57) $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{H} \times \boldsymbol{r}/2$ и записываем оператор взаимодействия электронной оболочки с магнитным полем в виде

$$\hat{V} = \frac{e^2}{8mc^2} \sum_a [\boldsymbol{H} \times \boldsymbol{r}_a]^2 \tag{1}$$

Поправка к энергии атома в первом порядке теории возмущений выражается интегралом

$$\Delta \mathscr{E} = \int \psi^*(q) \hat{V} \psi(q) dq \tag{2}$$

где q - совокупность координат всех электронов атома. В силу сферической симметрии электронной оболочки при интегрировании по углам $\sin^2 \vartheta_a$, входящий в векторное произведение, можно заменить его средним значением $2/3$. В итоге будем иметь

$$\Delta\mathscr{E} = \frac{e^2}{12mc^2} H^2 \sum_a \langle\psi|r_a^2|\psi\rangle \tag{3}$$

Магнитный момент атома можно вычислить по формуле $\mu = -\partial\Delta\mathscr{E}/\partial H$ (см. ниже раздел 9.3), и при концентрации атомов N вычисление намагниченности дает

$$\boldsymbol{M} = N\boldsymbol{\mu} = \chi\boldsymbol{H}, \quad \text{где} \quad \chi = -\frac{Ne^2}{6mc^2} \sum_a \langle\psi|r_a^2|\psi\rangle \tag{4}$$

Сумму квадратов атомных электронов в (4), усредненных по квантовому состоянию атома, можно заменить произведением Za^2, где a^2 - квадрат расстояния, усредненный по всем электронам. После этого квантовая формула для диамагнитной восприимчивости совпадет с квазиклассической, полученной в предыдущей задаче.

Численное значение диамагнитной восприимчивости газов очень мало. Оценку можно получить, подставив в (4) квадрат боровского радиуса. При нормальном давлении будем иметь $\chi \approx 10^{-10}$. Для конденсированных тел, у которых концентрация частиц выше на 4 порядка, будем иметь всего $\chi \approx 10^{-6}$.

7.21. Полная магнитная восприимчивость равна сумме парамагнитной и диамагнитной восприимчивостей (см. задачи 7.16, 7.18, 7.19*):

$$\chi = \frac{N\mu^2}{3T} - \frac{Ne^2}{6mc^2}\overline{r^2} \tag{1}$$

Входящий в эту формулу магнитный момент одного ротатора μ может быть вычислен следующим образом. На основе известной теоремы (см. формулу (2.61)) имеем

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{e}{2mc} K \tag{2}$$

где K - момент количества движения частицы. В случае ротатора K связан с кинетической энергией формулой

$$W_k = \frac{K^2}{2ma^2} \tag{3}$$

Поэтому среднее статистическое значение $\overline{K^2}$ выражается через среднюю кинетическую энергию:

$$\overline{K^2} = 2ma^3\bar{W}_k \tag{4}$$

Но средняя кинетическая энергия $\bar{W}_k$ может быть найдена по теореме о равномерном распределении энергии по степеням свободы. Поскольку ротатор имеет две степени свободы, $\bar{W}_k = kT$. Подставляя (4) и (2) в (1), находим $\chi = 0$. Этот результат находится в соответствии с общей теоремой Бора-Ван Левен (см. задачу 7.15*), согласно которой полный магнитный момент тела, подчиняющегося классической статистике, равен нулю. Отличный от нуля магнитный момент получается только в том случае, когда делается предположение о существовании дискретных электронных орбит в атомах. Но такое предположение означает выход за рамки классической теории.

7.22. В отсутствие поля каждая пара электронов с одинаковой энергией имеет в соответствии с принципом Паули противоположно направленные проекции спина, и макроскопический магнитный момент системы равен нулю. При включении поля каждый электрон приобретает добавочную энергию $\pm\mu_B B$ в зависимости от направления проекции его спина. Таким образом, уровни Ферми электронов с разными проекциями спинов раздвигаются на величину $2\mu_B B$. Но в статистически равновесной

системе должен установиться единый для всех частиц уровень Ферми. Это означает, что часть электронов изменит проекцию спина. Концентрация N' электронов, испытавших переворот спина, можно определить из условия $\epsilon_{F+} = \epsilon_{F-}$, или
(1) $\frac{\hbar^2}{2m}(6\pi)^{2/3}\left(\frac{N}{2} - N'\right)^{2/3} + \mu_B B = \frac{\hbar^2}{2m}(6\pi)^{2/3}\left(\frac{N}{2} + N'\right)^{2/3} - \mu_B B.$

Это же условие обеспечивает минимум внутренней и свободной энергий при $T = 0$.

В слабом поле ($\mu_B B \ll \epsilon_F$) будем иметь $N' \ll N$ и из (1) получим

$$N' = \frac{3\mu_B B}{4\epsilon_F} N. \tag{2}$$

Намагниченность вычисляем по формуле $M = 2\mu_B N'$ и находим парамагнитную восприимчивость полностью ($T = 0$) вырожденного электронного газа

$$\chi_{\text{para}} = \frac{3\mu_B^2 N}{2\epsilon_F} \tag{3}$$

Температурные поправки к (3) имеют порядок величины $(T/\epsilon_F)^2 \approx 10^{-4}$ для большинства металлов при комнатных температурах. Поэтому «парамагнетизм Паули» (3) в отличие от закона Кюри (см. формулу (4) в задаче 7.16 и (13) в 7.17*) практически не зависит от температуры.

Вырожденный электронный газ обладает также диамагнитной восприимчивостью («диамагнетизм Ландау»), причем

$$\chi_{\text{dia}} = -\frac{1}{3}\chi_{\text{para}}\,, \quad \chi = \chi_{\text{para}} + \chi_{\text{dia}} = \frac{2}{3}\chi_{\text{para}} \tag{4}$$

(см. «Статистическую физику» Ландау и Лифшица, а также следующую задачу).

7.23. Для расчета намагниченности используем формулы статистической физики для свободной энергии $F = -T \ln Z$ (см. (Д3.46) и $M = -\partial F/\partial B$ (см. раздел 9.3). Поскольку газ разреженный и однородный, взаимодействием между электронами пренебрегаем и вычисляем свободную энергию (на единицу объема газа) по формуле $F = -NT \ln z$, где z - статистическая сумма, относящаяся к одному электрону, который считаем квазинезависимой равновесной подсистемой. С помощью данных, приведенных в условии задачи, находим

$$z = z_s z_{orb}, \quad z_s = \sum_{m_s=-1/2}^{m_s=1/2} \exp\left(-\frac{2\mu_B B m_s}{T}\right) = 2\,\mathrm{ch}\left(\frac{\mu_B B}{T}\right) \tag{1}$$

$$z_{\text{orb}} = \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{\hbar\omega_B}{2T}(2n+1)\right) \int \exp\left(-\frac{p_z^2}{2mT}\right) \frac{eBV\,dp_z}{(2\pi\hbar)^2 c} = \tag{2}$$

$$= \sqrt{2\pi m T}\,\frac{eBV}{(2\pi\hbar)_1^2 c}\,\frac{1}{2\,\mathrm{sh}\,(\hbar\omega_B/2T)}$$

где z_s относится к спиновым состояниям, z_{orb} - к состояниям орбитального движения. Далее учитываем, что $\hbar\omega_B/2 = \mu_B B$ и $\mu_B B \ll T$. Производя разложение гиперболических функций по малому аргументу, находим

$$M = NT\left(\frac{\partial z_s}{\partial B} + \frac{\partial z_{orb}}{\partial B}\right) = \frac{N\mu_B^2 B}{T} - \frac{N\mu_B^2 B}{3T} \tag{3}$$

Первое слагаемое в правой части описывает парамагнитный эффект, второе - диамагнитный. Соответствующие восприимчивости теперь зависят от температуры, но соотношение между ними остается таким же, как для вырожденного газа:

$$\chi_{\text{para}} = \frac{N\mu_B^2}{T}, \quad \chi_{dia} = -\frac{1}{3}\chi_{\text{para}} \tag{4}$$

7.24. Концентрации ионов (N) и электронов (n) определяются по формуле Больцмана (7.31)[3]

$$N = N_0 \exp\left(-\frac{Ze\varphi}{T}\right), \quad n = n_0 \exp\left(\frac{e\varphi}{T}\right) \tag{1}$$

где $\varphi(x, y, z)$ - электростатический потенциал. Множители перед экспонентами выбраны так, чтобы при $T \to \infty$, когда взаимодействие частиц становится несущественным, N и n переходили бы в N_0 и n_0. На основе (1) плотность заряда запишется в виде

$$\rho = ZeN - en = e\left(ZN_0 e^{-\frac{Ze\varphi}{T}} - n_0 e^{\frac{e\varphi}{T}}\right) \tag{2}$$

Потенциал φ должен быть определен путем решения уравнения Пуассона:

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho = -4\pi e\left(ZN_0 e^{-\frac{Ze\varphi}{T}} - n_0 e^{\frac{e\varphi}{T}}\right) \tag{3}$$

Чтобы решить это уравнение, используем условие малости энергии взаимодействия по сравнению с тепловой энергией:

$$\left|\frac{Ze\varphi}{T}\right| \ll 1, \quad \left|\frac{e\varphi}{T}\right| \ll 1$$

Разлагая экспоненты в ряд с точностью до членов, линейных по φ, и используя условие электронейтральности газа $ZN_0 = n_0$, получим

$$\rho = -\frac{\kappa^2}{4\pi}\varphi, \quad \kappa^2 = \frac{4\pi e^2\left(Z^2 N_0 + n_0\right)}{T} \tag{4}$$

Это позволяет записать уравнение (3) в виде

$$\Delta\varphi = \kappa^2\varphi \tag{5}$$

Потенциал φ может зависеть только от расстояния r до рассматриваемого иона. Сферически симметричное решение (5) имеет вид

$$\varphi = C_1\frac{e^{-\kappa r}}{r} + C_2\frac{e^{\kappa r}}{r}$$

Потенциал не может возрастать на бесконечности, поэтому $C_2 = 0.C_1$ определяется из условия, что при $r \ll 1/\kappa$ потенциал должен переходить в чисто кулоновский потенциал рассматриваемого иона:

$$\varphi|_{r\ll 1/\kappa} = \frac{Ze}{r} = \frac{C_1}{r}, \quad C_1 = Ze$$

Таким образом, ион окружен «облаком» электронов и других ионов, плотность которого убывает по экспоненциальному закону, а средний радиус $1/\kappa$ тем меньше, чем ниже температура.

Рассмотренный в этой задаче метод вычисления потенциала принадлежит Дебаю и Хюккелю и применялся ими в теории сильных электролитов. Константа $1/\kappa$ называется

[3] В этой и трех последующих задачах рассматриваемые величины усредняются по статистическому ансамблю, но не по объему.

радиусом Дебая-Хюккеля.
7.25. Электрическая индукция внутри пластинки описывается формулой

$$D(x) = E_0 \frac{\operatorname{ch} \kappa x}{\operatorname{ch} \kappa h}$$

где $\kappa = \sqrt{4\pi e^2 n_0 \cdot \varepsilon kT}$. При $\kappa h \gg 1$ имеем вблизи поверхностей $x = \pm h$

$$D(x) = E_0 e^{-\kappa(h-|x|)}$$

отсюда следует, что при $|x - h| \gg 1/\kappa, D(x) = 0$, т. е. поле проникает в проводник на глубину $1/\kappa$. В слое такой же толщины концентрируется заряд

$$\rho = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial D}{\partial x} = \pm\frac{\kappa E_0}{4\pi} e^{-\kappa(h-|x|)}$$

Плотность «поверхностного» заряда, которая рассматривается в макроскопической теории, получается интегрированием ρ. На границе $x = h$ получим

$$\sigma = \int \rho dx = -\frac{\kappa E_0}{4\pi} \int\limits_0^\infty e^{-\kappa x'} dx' = \frac{E_0}{4\pi}$$

что совпадает с обычным граничным условием на поверхности проводника.
7.26.

$$\varphi = \varphi_0 \frac{\operatorname{sh} \kappa x}{\operatorname{sh} \kappa h}, \quad \kappa = \sqrt{\frac{8\pi e^2 n_0}{\varepsilon kT}}$$

Значение κ^2 в данном случае получается вдвое большим, чем в предыдущей задаче, так как имеются два сорта подвижных ионов.
7.27. В отличие от задачи 7.24*, здесь электроны подчиняются распределению Ферми. Исходим из предположения, что состояния электронов в окрестности иона квазиклассичны. Совместив начало координат с местонахождением иона, обозначим через $n(r)$ концентрацию электронов. Вдали от иона имеем граничные условия $n(r)|_{r\to 0} \to n_0$, $\varphi(r)|_{r\to 0} \to 0$, где $\varphi(r)$ - электростатический потенциал. При температуре $T \to 0$ заполнены все уровни энергии электронов от 0 до уровня Ферми ϵ_F, который вдали от иона определяется условиями

$$\frac{2}{(2\pi\hbar)^3} \cdot \frac{4}{3}\pi p_F^3 = n_0, \quad \epsilon_F = \frac{p_F^2}{2m} = \frac{\left(3\pi^2 n_0\right)^{2/3} \hbar^2}{2m} \tag{1}$$

Здесь импульс Ферми p_F определяется из равенства числа заполненных квантовых состояний $p_F^3/3\pi^2\hbar^3$ числу электронов n_0 (в расчете на единицу объема).

Энергия Ферми сохраняет значение (1) всюду в пространстве, так как в противном случае электроны перейдут в места с меньшим значением ϵ_F. Но при конечных r под ϵ_F надо понимать сумму кинетической и потенциальной энергий, т. е. величину

$$\epsilon_F = \frac{\left(3\pi^2\right)^{2/3} \hbar^2}{2m} n^{2/3}(r) - e\varphi(r) \tag{2}$$

Выражая $n(r)$ из равенств (1) и (2), находим

$$n(r) = n_0 \left[1 + \frac{e\varphi(r)}{\epsilon_F}\right]^{3/2} \approx n_0 \left[1 + 3\frac{e\varphi(r)}{2\epsilon_F}\right] \tag{3}$$

С помощью (3) находим распределение плотности заряда вокруг иона $\rho(r) = -\left(3e^2 n_0/2\epsilon_F\right)\varphi(r)$ и получаем для потенциала уравнение (5) из решения задачи 7.24*, в котором постоянная экранировки

$$\kappa^2 = \frac{4me^2}{\hbar^2}\left(\frac{3n_0}{\pi}\right)^{1/3} = \frac{8}{a_B\lambda_F} \tag{4}$$

где $a_B = \hbar^2/me^2$ - боровский радиус, $\lambda_F = 2\pi\hbar/p_F$ длина волны деБройля электрона, находящегося на уровне Ферми.

7.28. Используем кинетическое уравнение, как в примере 7.5. В качестве равновесной функции распределения $f_0(\epsilon)$ в уравнение (2) подставим «ступеньку Ферми» $f_0(\epsilon) = 1, \epsilon \leqslant \epsilon_F; f_0(\epsilon) = 0, \epsilon > \epsilon_F$, где ϵ_F - энергия Ферми, которая выражается через концентрацию частиц (см. условие задачи 7.21). Пользуясь соотношением $\boldsymbol{v} = \partial\epsilon/\partial\boldsymbol{p}$, записываем

$$\delta f = -e(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{v})\tau(\epsilon)\frac{\partial f_0}{\partial\epsilon} \tag{1}$$

и получаем выражение для тока

$$\boldsymbol{j} = -e^2\int\tau(\epsilon)\boldsymbol{v}(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{v})\frac{\partial f_0}{\partial\epsilon}\frac{2d^3p}{(2\pi\hbar)^3} \tag{2}$$

где последняя дробь под интегралом представляет собой число квантовых состояний с учетом двух проекций спина. Для вырожденного электронного газа имеем $\partial f_0/\partial\epsilon = -\delta\left(\epsilon - \epsilon_F\right)$. Подставляя в (2) требуемые величины и производя интегрирование по энергии с помощью дельта-функции, получим коэффициент пропорциональности между током и напряженностью электрического поля:

$$\kappa = \frac{ne^2\tau\left(\epsilon_F\right)}{m} \tag{3}$$

Результат совпадает с формулой Друде (7.42).

В реальных металлах электронный газ взаимодействует с кристаллической решеткой. Это приводит к тому, что зависимость энергии частицы от ее импульса $\epsilon(\boldsymbol{p})$ усложняется, эффективная масса носителей заряда может стать анизотропной, а поверхность Ферми в импульсном пространстве несферической. В этом случае изложенная простая модель неприменима.

7.29. Неравновесная добавка к функции распределения электронов с учетом в первом порядке слабых электрического и магнитного полей вычисляется из кинетического уравнения и имеет вид

$$\delta f = \left(-e(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{v})\tau + \frac{e^2\tau^2}{mc}[\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}]\cdot\boldsymbol{p}\right)\frac{\partial f_0}{\partial\epsilon} \tag{1}$$

Пользуясь этой функцией распределения, вычисляем плотность тока:

$$\boldsymbol{j} = \kappa\boldsymbol{E} + \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{a} \tag{2}$$

где

$$\kappa = \frac{ne^2\tau}{m}, \quad \boldsymbol{a} = \frac{ne^3\tau^2}{m^2c}\boldsymbol{B} \tag{3}$$

Электропроводность в результате действия магнитного поля становится анизотропной,

$$\kappa_{\alpha\beta} = \kappa\delta_{\alpha\beta} - e_{\alpha\beta\gamma}a_\gamma \tag{4}$$

возникает ток, перпендикулярный магнитному полю (ток Холла).
Обратная зависимость между током и электрическим полем в том же приближении имеет вид

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{\kappa}\boldsymbol{j} - R[\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{B}], \tag{5}$$

где $R = 1/$ сеп - постоянная Холла.
7.30. Записываем стационарное кинетическое уравнение с учетом членов только первого порядка по E, но без ограничения на величину B:

$$e\boldsymbol{E} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \boldsymbol{p}} + \frac{e}{c}[\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}] \cdot \frac{\partial \delta f}{\partial \boldsymbol{p}} = -\frac{\delta f}{\tau} \tag{1}$$

Умножаем обе части (1) на ev и преобразуем это уравнение в алгебраическое уравнение для тока $j = e\int v\delta f d^3p$ путем интегрирования по импульсам. После умножения на τ получаем

$$\kappa\boldsymbol{E} = \boldsymbol{j} - \tau\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{\omega}_B \tag{2}$$

где κ дается формулой (3) предыдущей задачи, $\boldsymbol{\omega}_B = e\boldsymbol{B}/mc$ - циклотронная частота. Разрешая уравнение (2) относительно компонент j, находим $j_\alpha = \kappa_{\alpha\beta}E_\beta$, где тензор электропроводности имеет вид

(3) $\kappa_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \kappa_\perp & \kappa_H & 0 \\ -\kappa_H & \kappa_\perp & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_\parallel \end{pmatrix}$, где $\kappa_\perp = \frac{\kappa}{1+(\omega_B\tau)^2}, \kappa_H = \frac{\kappa(\omega_B\tau)}{1+(\omega_B\tau)^2}, \kappa_\parallel = \kappa.$

Значки $\perp$, $|$ обозначают направления, перпендикулярное и параллельное магнитному полю. Составляющая κ_H ответственна за ток Холла.

Величина $\omega_B\tau$ представляет собой угол поворота поперечного импульса частицы за время релаксации при ее движении по спиральной траектории. При $\omega_B\tau \ll 1$ роль магнитного поля мала, и электропроводность почти изотропна. В обратном предельном случае, $\omega_B\tau \gg 1$, электропроводность резко анизотропна: $\kappa_\parallel \gg \kappa_H \gg \kappa_\perp$.

11.2 8 Electrostatics of Conductors and Dielectrics

11.2.1 8.1. Basic Concepts and Methods of Electrostatics

Уравнения и граничные условия. Электростатическое поле в диэлектрике характеризуется вектором напряженности электрического поля $\boldsymbol{E}$ и вектором электрической индукции D, которые удовлетворяют, согласно (7.20), уравнениям

$$\left.\begin{array}{ll} \operatorname{rot}\boldsymbol{E} = 0, & \oint_l \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l} = 0, \\ \operatorname{div}\boldsymbol{D} = 4\pi\rho_{ext}, & \oint_S \boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{S} = 4\pi q \end{array}\right\}$$

и уравнению связи (7.26)

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon\boldsymbol{E} \quad \text{либо} \quad D_\mu = \varepsilon_{\mu\nu}E_\nu \tag{8.2}$$

(последняя форма используется для анизотропного диэлектрика). Здесь ρ_{ext} - плотность внешних по отношению к диэлектрику зарядов, q - полный внешний заряд внутри поверхности S. Плотности связанных макроскопических объемных и поверхностных зарядов диэлектрика (которые мы будем в этой главе обозначать через ρ, σ без каких-либо индексов) даются формулами (7.16), (7.17). Векторы поля на

границах разделов разных диэлектриков удовлетворяют граничным условиям, которые получаются из интегральных уравнений (8.1) и имеют вид (см. вывод формул (2.17), (2.18))

$$(\boldsymbol{E}_2 - \boldsymbol{E}_1) \times \boldsymbol{n} = 0, \quad (\boldsymbol{D}_2 - \boldsymbol{D}_1) \cdot \boldsymbol{n} = 4\pi\sigma_{\text{ext}} \tag{8.3}$$

Для описания поля удобно пользоваться скалярной величиной - электростатическим потенциалом $\varphi(\boldsymbol{r})$:

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\varphi, \quad \varphi(\boldsymbol{r}) = \int_r^{r_0} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{r} \tag{8.4}$$

где $\varphi(\boldsymbol{r}_0) = 0$. Потенциал удовлетворяет уравнению, следующему из (8.1), (8.2):

$$\operatorname{div}(\varepsilon \operatorname{grad}\varphi) = -4\pi\rho_{ext} \tag{8.5}$$

которое в тех областях, где диэлектрик однороден, сводится к уравнению Пуассона

$$\Delta\varphi = -\frac{4\pi\rho_{ext}}{\varepsilon} \tag{8.6}$$

Граничные условия для электростатического потенциала на границе раздела сред с разными диэлектрическими свойствами следуют из (8.1), (8.2) и для изотропных диэлектриков имеют вид (ср. с (2.19), (2.20))

$$\varphi_1 = \varphi_2, \quad \varepsilon_1\frac{\partial\varphi_1}{\partial n} - \varepsilon_2\frac{\partial\varphi_2}{\partial n} = 4\pi\sigma_{ext} \tag{8.7}$$

Орт нормали $\boldsymbol{n}$ направлен из первой среды во вторую.
Внутри проводников свободные заряды распределяются всегда таким образом, чтобы электрическое поле было равно нулю. Из электростатической теоремы Гаусса следует, что при этом внутри проводника $\rho = 0$, свободные заряды локализуются в тонком поверхностном слое (см. задачи 7.25, 7.26). Граничные условия на поверхности S проводника имеют вид

$$\boldsymbol{E}_\tau|_S = 0, \quad \varphi|_S = \text{ const.} \tag{8.8}$$

Поверхностную плотность заряда на проводнике можно найти по формулам

$$\sigma = \frac{1}{4\pi}D_n = -\frac{\varepsilon}{4\pi}\frac{\partial\varphi}{\partial n} \tag{8.9}$$

В общем случае поверхностный заряд проводника распределяется неравномерно, и его распределение нельзя указать заранее. Но может быть задан полный заряд проводника q, и в этом случае граничные условия следует дополнить уравнением

$$\int_S \nabla_\mu\varphi dS_\mu = -\frac{4\pi q}{\varepsilon} \tag{8.10}$$

где интегрирование производтся по поверхности проводника.
Пример 8.1. Пусть имеется система проводников и диэлектриков, в общем случае анизотропных, занимающих конечную область пространства. Доказать, что решение электростатической задачи единственно,
если задано распределение сторонних зарядов ρ_{ext} в диэлектриках, а также либо электростатические потенчиалы φ_i проводников, либо их полные заряды q_i. При

доказательстве использовать свойство симметрии диэлектрического тензора $\varepsilon_{\mu\nu} = \varepsilon_{\nu\mu}$ и положительность его главных значений $\varepsilon^{(\mu)} > 1$ (см. раздел 8.3).

Решение. Проводим доказательство от противного. Пусть φ_1, φ_2 - два разных потенциала, удовлетворяющих уравнению

$$\nabla_\mu \varepsilon_{\mu\nu} \nabla_\nu \varphi_{1,2} = -4\pi \rho_{ext} \tag{1}$$

и граничным условиям

$$\varphi_{1,2}|_{r\to\infty} \to 0, \quad \varphi_{1,2}|_{S_i} = \varphi_i \tag{2}$$

либо

$$\varphi_{1,2}|_{r\to\infty} \to 0, \quad \varphi_{1,2}|_{S_i} = \text{const}, \quad \oint_{S_i} \varepsilon_{\mu\nu} \nabla_\nu \varphi_{1,2} dS_\mu = -4\pi q_i$$

Применим теорему Остроградского-Гаусса к вектору $a_\mu = \psi \varepsilon_{\mu\nu} \nabla_\nu \psi$, где $\psi = \varphi_1 - \varphi_2$:

$$\int \psi \nabla_\mu \varepsilon_{\mu\nu} \nabla_\nu \psi dV + \int \varepsilon_{\mu\nu} \nabla_\mu \psi \nabla_\nu \psi dV = \oint_S \psi \varepsilon_{\mu\nu} \nabla_\nu \psi dS_\mu \tag{4}$$

Здесь интегрирование распространяется на все пространство, занятое диэлектриками, а S включает в себя бесконечно удаленную поверхность и поверхности всех проводников. Первый интеграл в левой части обращается в нуль в силу равенства (1), а интеграл в правой части равен нулю из-за граничных условий (2), (3). Таким образом,

$$\int \varepsilon_{\mu\nu} \left(\nabla_\mu \psi\right) \left(\nabla_\nu \psi\right) dV = 0 \tag{5}$$

Записывая подынтегральное выражение в главных осях диэлектрического тензора, убеждаемся, что потенциалы φ_1, φ_2 различаются не более чем на постоянную и описывают одно и то же электростатическое поле.

Потенциальные и емкостные коэффициенты. Емкостью C конденсатора называется отношение заряда q на одной из его обкладок (первой) к разности потенциалов $V = \varphi_1 - \varphi_2$ между обкладками:

$$C = \frac{q}{V} \tag{8.11}$$

Емкостью уединенного проводника называется отношение заряда проводника к его потенциалу (потенциал должен обращаться в нуль на бесконечности).

Если имеется n проводников, находящихся в диэлектрической среде, в которой связь между электрической индукцией и напряженностью поля линейна, то потенциалы V_i проводников зависят от их зарядов q_i по линейному закону:

$$V_i = \sum_{k=1}^{n} s_{ik} q_k \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{8.12}$$

Величины s_{ik} называются потенциальными коэффициентами. Они зависят от взаимного расположения, формы и геометрических размеров проводников, а также от диэлектрической проницаемости окружающей среды. Матрица s симметрична:

$$s_{ik} = s_{ki} \tag{8.13}$$

(см. задачу 8.27). Величина s_{ik} представляет собой потенциал, который приобретает i-й проводник, если сообщить k-му проводнику заряд $q_k = 1$, а остальные проводники оставить незаряженными. Все $s_{ik} > 0$.

Из равенств (8.12) следует, что и заряды проводников являются линейными однородными функциями их потенциалов

$$q_i = \sum_{k=1}^{n} c_{ik} V_k \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{8.14}$$

Величины c_{ik} называются емкостными коэффициентами, причем $c_{ii} > 0$ (собственные емкости); $c_{ik} = c_{ki} < 0, i \neq k$ (взаимные емкости). Величины c_{ik} представляют собой заряд, приобретаемый i-м проводником, когда все проводники кроме k-го заземлены, а k-й проводник имеет потенциал $V_k = 1$. Матрицы s_{ik} и c_{ik} являются взаимно обратными.

В случае одиночного проводника имеется единственный емкостной коэффициент c_{11}, который называется просто емкостью. Емкость конденсатора (8.11) может быть выражена через емкостные коэффициенты его обкладок (см. задачу 8.31).

Во многих случаях необходимо знать поляризуемость проводящего или диэлектрического тела во внешнем однородном электрическом поле. Так называют тензор второго ранга $\beta_{\mu\nu}$, связывающий проекции дипольного момента $\mathscr{P}_\mu$ тела с напряженностью $\mathscr{E}_\nu$ поля вдали от тела

$$\mathscr{P}_\mu = V \beta_{\mu\nu} \mathscr{E}_\nu \tag{8.15}$$

Здесь объем тела выделен в отдельный множитель, поэтому тензор $\beta_{\mu\nu}$ является безразмерной величиной и характеризует анизотропию формы, а в случае диэлектрика - и диэлектрическую восприимчивость его вещества (ср. с формулой (7.29)). Иногда множитель V в (8.15) не выделяют, в этом случае тензор поляризуемости приобретает размерность объема (см., например, задачи 7.4, 7.5).

Пример 8.2. Доказать электростатическую теорему взаимности Грина: если потенциалы проводников равныи $V_1, V_2, \ldots, V_n$, когда их зарядыя $q_1, q_2, \ldots, q_n$, и равныя $V_1', V_2', \ldots, V_n'$, когда их зарядыя $q_1', q_2', \ldots, q_n'$, то имеет место соотношение

$$\sum_{i=1}^{n} q_i V_i' = \sum_{i=1}^{n} q_i' V_i \tag{8.16}$$

При этом диэлектрическая среда между проводниками может быть неоднородной и анизотропной, но сторонние заряды в диэлектрике должны отсутствовать.

Решение. Исходим из тождества, представляющего собой обобщение соотношения (4) в примере (8.1):
$\int (\varphi' \nabla_\mu \varepsilon_{\mu\nu} \nabla_\nu \varphi - \varphi \nabla_\mu \varepsilon_{\mu\nu} \nabla_\nu \varphi')\, dV = \oint_S (\varphi' \varepsilon_{\mu\nu} \nabla_\nu \varphi dS_\mu - \varphi \varepsilon_{\mu\nu} \nabla_\nu \varphi')\, dS_\mu$.
Ввиду отсутствия сторонних зарядов в диэлектрике дифференциальные слагаемые под интегралом в левой части равенства обращаются в нуль. В правой части остается сумма интегралов по поверхностям проводников, которая в силу граничных условий на проводниках приводит к (8.16).

Рекомендуемая литература: [Тамм (1976); Ландау и Лифшиц, Электродинамика сплошных сред; Френкель (1935); Смайт (1954); Бредов и др., Классическая электродинамика; Батыгин и Топтыгин (2002); Зоммерфельд (1958); Власов (1955)].

Задачи

8.1. Точечный заряд q расположен на плоской границе раздела двух однородных бесконечных диэлектриков с проницаемостями ε_1 и ε_2. Найти потенциал φ напряженность $\boldsymbol{E}$ и индукцию $\boldsymbol{D}$ электрического поля.

8.2. От некоторой прямой, на которой находится точечный заряд q, расходятся веерообразно три полуплоскости, образующие три двугранных угла

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\,(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=2\pi)$. Пространство внутри каждого из углов заполнено однородным диэлектриком с проницаемостью соответственно ε_1, $\varepsilon_2, \varepsilon_3$. Определить потенциал φ, напряженность $\boldsymbol{E}$ и индукцию $\boldsymbol{D}$ электрического поля.

8.3. Центр проводящего шара радиуса a, заряд которого q, находится на плоской границе раздела двух бесконечных однородных диэлектриков с проницаемостями ε_1 и ε_2. Найти потенциал φ электрического поля, а также распределение заряда σ на шаре.

8.4. Пространство между обкладками сферического конденсатора частично заполнено диэлектриком, расположенным внутри телесного угла Ω с вершиной в центре обкладок. Радиусы обкладок a и b, проницаемость диэлектрика ε. Найти емкость C конденсатора.

8.5. Внутри сферического конденсатора с радиусами обкладок a и b диэлектрическая проницаемость меняется по закону

$$\varepsilon(r)=\begin{cases}\varepsilon_1=\text{ const} & \text{при} \quad a\leqslant r<c\\ \varepsilon_2=\text{ const} & \text{при} \quad c\leqslant r\leqslant b\end{cases}$$

где $a<c<b$.

Найти емкость C конденсатора, распределение связанных зарядов σ_{int} и полный связанный заряд в диэлектрике.

8.6. Сферический конденсатор с радиусами обкладок a и b заполнен диэлектриком, проницаемость которого зависит от расстояния r до центра по зajкнну $\varepsilon(r)=\varepsilon_0 a^2/r^2$. Показать, что емкость такого конденсатора равна емкости плоского конденсатора, заполненного однородным диэлектриком с проницаемостью ε_0, у которого площадь обкладки $4\pi a^2$, расстояние между обкладками $b-a$ (краевым эффектом пренебречь).

8.7. Плоский конденсатор заполнен диэлектриком, проницаемость которого изменяется по закону $\varepsilon=\varepsilon_0(x+a)/a, 0\leqslant x\leqslant a$, где a - расстояние между обкладками, ось x направлена перпендикулярно обкладкам, площадь которых S. Пренебрегая краевым эффектом, найти емкость C такого конденсатора и распределение в нем связанных зарядов, если к обкладкам приложена разность потенциалов V.

8.8. Точечный заряд q находится в точке A на расстоянии a от плоской границы раздела двух бесконечно протяженных однородных диэлектриков
с проницаемостями ε_1 и ε_2 (рис. 8.1). Найти потенциал φ электрического поля методом изображений.

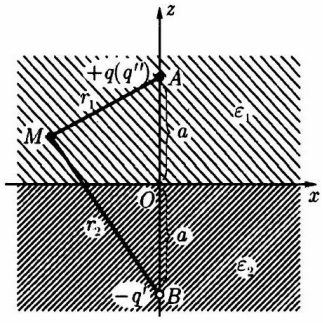


Рис. 8.1

Указание. Решение искать в виде

$$\begin{aligned}\varphi_1&=\tfrac{q}{\varepsilon_1 r_1}-\tfrac{q'}{\varepsilon_1 r_2} \quad &\text{при} \quad z\geqslant 0\\ \varphi_2&=\tfrac{q''}{\varepsilon_2 r_1} \quad &\text{при} \quad z<0\end{aligned}$$

где $-q'$ и q'' - искомые эффективные заряды, расположенные соответственно в точках B и A, r_1 и r_2 указаны на рисунке.

8.9. Найти плотность σ_{int} связанных поверхностных зарядов, наведенных на плоской

границе раздела двух однородных диэлектриков ε_1 и ε_2 точечным зарядом q (см. задачу 8.8). Какой результат получится при $\varepsilon_2 \to \infty$, каков его физический смысл?

8.10. Двугранный угол между двумя заземленными проводящими плоскостями равен α_0. Внутри угла находится точечный заряд q. Найти методом электрических изображений электрическое поле. Рассмотреть случаи $\alpha_0 = 90°, \alpha_0 = 60°$ и $\alpha_0 = 45°$.

8.11*. Однородный шар радиуса a с диэлектрической проницаемостью ε_1, погружен в однородный неограниченный диэлектрик ε_2. На большом расстоянии от шара в диэлектрике имеется однородное электрическое поле, напряженность которого $\boldsymbol{E}_0$. Найти поле φ во всем пространстве. Построить картину силовых линий для двух случаев: $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ и $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$; найти распределение связанных зарядов.

8.12. Неограниченный диэлектрик был сначала однороден и равномерно поляризован (вектор поляризации $\boldsymbol{P} = \text{const}$). Затем в нем вырезали сферическую полость. Определить изменение электрического поля $\Delta\boldsymbol{E}$ в полости в двух случаях: а) если при образовании полости поляризация в окружающем диэлектрике не изменилась [1]; б) если вследствие изменения поля поляризация изменяется, т. е. $\boldsymbol{P} = (\varepsilon - 1)\boldsymbol{E}/4\pi$.

8.13. Незаряженный металлический шар радиуса R вносится в электрическое поле, которое в отсутствие шара было однородным и равным $\boldsymbol{E}_0$.

Диэлектрическая проницаемость окружающей среды $\varepsilon_0 = \text{const}$. Определить результирующее поле φ и плотность поверхностных зарядов σ на шаре.

8.14*. Проводящий шар радиуса R находится в поле точечного заряда q, отстоящсго от центра шара на расстояние $a > R$. Система погружена в однородный диэлектрик с проницаемостью ε. Найти потенциал поля φ и распределение σ индуцированных зарядов на шаре, если задан а) потенциал шара V (на бесконечности $\varphi = 0$); б) заряд шара Q. Представить потенциал в виде суммы потенциалов нескольких точечных зарядовизображений.

Указание. Использовать решение уравнения Лапласа в виде ряда по шаровым гармоникам и разложение поля точечного заряда, полученное в задаче 2.30 .

8.15. В проводнике с потенциалом V имеется сферическая полость радиуса R, заполненная диэлектриком с проницаемостью ε. На расстоянии a от центра полости ($a < R$) находится точечный заряд q. Определить поле в полости. Найти эквивалентную систему зарядов-изображений.

8.16. Заземленная проводящая плоскость имеет выступ в форме полусферы радиуса a. Центр сферы лежит на плоскости. На оси симметрии системы, на расстоянии $b > a$ от плоскости находится точечный заряд q. Используя метод изображений, найти поле φ, а также заряд q', индуцированный на выступе.

8.17. Проводящий шар радиуса R_1 находится в однородном диэлектрике с проницаемостью ε_1. Внутри шара имеется сферическая полость радиуса R_2, заполненная однородным диэлектриком с проницаемостью ε_2. В полости на расстоянии a от ее центра ($a < R_2$) расположен точечный заряд q. Найти поле φ во всем пространстве.

8.18. Точечный заряд q находится внутри диэлектрического шара радиуса R с проницаемостью ε_1 на расстоянии a от центра шара. Диэлектрическая проницаемость среды вне шара равна ε_2. Найти поле φ во всем пространстве. Рассмотреть, в частности, случай $a = 0$ (заряд в центре шара).

8.19*. Изолированная металлическая сфера радиуса a находится внутри полой металлической сферы радиуса b. Расстояние между центрами сфер равно c, причем $c \ll a, c \ll b$. Эти сферы образуют сферический конденсатор. Вычислить поправку к емкости ΔC, вызванную отклонением от концентричности, в первом неисчезающем приближении.

[1] Это имеет место, если диэлектрик («электрет») состоит из полярных молекул, ориентация которых фиксирована.

8.20. Электростатическое поле образовано двумя проводящими цилиндрами с параллельными осями, радиусами R_1, R_2 и зарядами на единицу длины $\pm\kappa$. Расстояние между осями цилиндров $a > R_1 + R_2$. Найти емкость C на единицу длины конденсатора, обкладками которого служат указанные цилиндры ($C = \kappa/(\varphi_1 - \varphi_2)$, где φ_1 и φ_2 - потенциалы цилиндров).

Указание. Воспользоваться результатом задачи 2.51 .

8.21. Оси двух одинаковых проводящих цилиндров с радиусами R находятся на расстоянии $2a$ друг от друга. Цилиндры несут заряды $\pm\kappa$ на единицу длины. Найти распределение зарядов σ на поверхностях цилиндров.

8.22. Конденсатор образован двумя цилиндрическими проводящими поверхностями с радиусами R_1 и $R_2 > R_1$. Расстояние между осями цилиндров $a < R_2 - R_1$. Найти емкость C конденсатора.

8.23. Определить поле φ точечного заряда в однородной анизотропной среде, характеризуемой тензором диэлектрической проницаемости ε_{ik}.

8.24. В пустоте находится плоскопараллельная пластинка из анизотропного однородного диэлектрика с тензором проницаемости ε_{ik}. Вне пластинки однородное электрическое поле $\boldsymbol{E}_0$. Используя граничные условия для вектора поля, определить поле $\boldsymbol{E}$ внутри пластинки.

8.25. Найти емкость C плоского конденсатора с площадью обкладок S и расстоянием между ними a, если пространство между обкладками заполнено анизотропным диэлектриком с проницаемостью ε_{ik}. Краевым эффектом пренебречь.

8.26. Найти изменение направления линий вектора $\boldsymbol{E}$ при переходе из пустоты в анизотропный диэлектрик. Воспользоваться результатом задачи 8.24 .

8.27. Доказать с помощью теоремы взаимности Грина (9.16) свойство симметрии потенциальных коэффициентов $s_{ik} = s_{ki}$.

8.28. Система состоит из двух проводников, удаленных от всех других проводников. Проводник 1 заключен внутри полого проводника 2. Выразить емкости C и C' конденсатора и уединенного проводника, образующих эту систему, через ее емкостные коэффициенты. Доказать, что взаимные емкости проводника 1 и любого проводника, находящегося вне проводника 2, равны нулю.

8.29. Выразить потенциальные коэффициенты s_{ik} через емкостные c_{ik} в случае системы двух проводников.

8.30. Емкости двух уединенных проводников равны C_1 и C_2. Эти проводники находятся в однородном диэлектрике с проницаемостью ε на расстоянии r, большом по сравнению с их собственными размерами. Вычислить емкостные коэффициенты системы.

Указание. Определить сначала потенциальные коэффициенты с точностью до величины $1/r$.

8.31. Емкостные коэффициенты системы двух проводников равны c_{11}, $c_{22}, c_{12} = c_{21}$. Найти емкость C конденсатора, обкладками которого служат эти два проводника.

8.32. Четыре одинаковые проводящие сферы расположены по углам квадрата. Сфера 1 несет заряд q. Затем она соединяется тонкой проволочкой поочередно на время, достаточное для установления равновесия, со сферами 2, 3, 4 (нумерация проводников циклическая). Найти распределение заряда между проводниками по окончании всех операций. Потенциальные коэффициенты системы заданы.

8.33. Три одинаковые проводящие сферы с радиусами a находятся в вершинах равностороннего треугольника со стороной $b \geqslant a$. Вначале все сферы имели одинаковые заряды q. Затем они по очереди заземлялись на время, достаточное для установления равновесия. Какой заряд остается на каждой сфере по окончании всех операций?

8.34. Замкнутая проводящая поверхность с потенциалом V_1 содержит внутри себя проводник с потенциалом V_0. При этом потенциал в некоторой точке P между

проводящими поверхностями равен V_P. Пусть. теперь проводники заземлены, а в точку P помещен заряд q. Какие заряды будут при этом индуцированы на проводниках?

8.35. Показать, что в отсутствие точечного заряда геометрическое место точек, из которых единичный заряд индуцирует на некотором заземленном проводнике заряд одной и той же величины, совпадает с эквипотенциальной поверхностью поля этого проводника.

8.36. Два проводника с собственными емкостями c_{11} и c_{22} и взаимной емкостью c_{12}, составляющие часть некоторой системы изолированных проводников, соединены тонкой проволокой. Какова собственная емкость объединенного проводника, коэффициенты взаимной емкости его и остальных проводников системы?

8.37*. Проводник заряжается путем последовательных подсоединений к разрядному шарику электрофора. Шарик электрофора после каждого подсоединения вновь заряжается, приобретая при этом заряд Q. При первом подсоединении на проводник с шарика переходит заряд q. Какой заряд получит проводник после очень большого числа подсоединений?

11.2.2 8.2. Special Methods of Electrostatics

В этом разделе собраны задачи, решение которых как правило требует специальных математических методов и приемов. Многочисленные методы решения задач электростатики изложены во многих учебниках и монографиях, в частности [Гринберг (1948); Ландау и Лифшиц, Электродинамика сплошных сред; Пановский и Филипс (1963); Смайт (1954); Стрэттон (1948); Шимони (1964); Джексон (1975)]. Наиболее часто используемые методы перечислены ниже. Они разъясняются на примерах решения ряда классических задач.

Метод разделения переменных в криволинейных координатах см. задачи $8.38^\star - 8.42, 8.56^\star$ и др.

Метод интегральных преобразований - см. задачи $8.50^\star, 8.54^\star$ и др.

Метод инверсии основан на преобразовании инверсии. Это - такое преобразование пространства, при котором каждая его точка переходит в точку, сопряженную относительно некоторой, надлежащим образом выбранной сферы инверсии радиуса R. Если сферическими координатами (с началом в центре сферы инверсии) первоначальной точки являются r, ϑ, α, то сферическими координатами инвертированной точки будут $r' = R^2/r, \vartheta, \alpha$. В векторной форме

$$\boldsymbol{r}' = \frac{R^2\boldsymbol{r}}{r^2}, \quad \boldsymbol{r} = \frac{R^2\boldsymbol{r}'}{r'^2} \tag{8.17}$$

Преобразование инверсии обладает свойством конформности. При инверсии сфера преобразуется в сферу. Если, в частности, центр инверсии лежит на преобразуемой сфере, то последняя преобразуется в плоскость (и наоборот).

Уравнение Лапласа инвариантно относительно преобразования инверсии: если функция $\varphi(\boldsymbol{r})$ является решением уравнения Лапласа в исходном пространстве, то

$$\varphi'(\boldsymbol{r}') = \frac{r}{R}\varphi(\boldsymbol{r}) = \frac{R}{r'}\varphi\left(\frac{R^2}{r'^2}\boldsymbol{r}'\right) \tag{8.18}$$

представляет собой решение уравнения Лапласа в инвертированном пространстве.

Основная задача, которую можно решить методом инверсии, формулируется так. Нужно найти поле системы заземленных проводников и точечных зарядов q_i, находящихся в точках $\boldsymbol{r}_i$. Потенциал на бесконечности $V = \text{const}$.

Для решения задачи произведем инверсию с таким расчетом, чтобы поверхности проводников приобрели более простую форму. При этом точечные заряды q_i заменяются зарядами

$$q_i' = \frac{R}{r_i} q_i \tag{8.19}$$

находящимися в точках $\boldsymbol{r}_i' = R^2 \boldsymbol{r}_i / r_i^2$. Кроме того, в точке $r' = 0$ появляется точечный заряд

$$q_0 = -RV \tag{8.20}$$

В инвертированной системе решаем электростатическую задачу - находим потенциал $\varphi'(\boldsymbol{r}')$. Потенциал $\varphi(\boldsymbol{r})$ получаем с помощью обратного преобразования (см. задачи 8.61*, 8.62).

Решение граничной задачи с помощью функций Грина. Пусть имеется область объемом V, ограниченная поверхностью S, внутри которой находится однородный диэлектрик с диэлектрической проницаемостью ε. Внутри объема могут находиться также сторонние заряды с объемной плотностью ρ_{ext} , а на поверхности S задан либо электростатический потенциал

$$\varphi|_S = f(\boldsymbol{r}) \tag{8.21}$$

(граничные условия Дирихле) либо его нормальная производная

$$\left.\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right|_S = F(\boldsymbol{r}) \tag{8.22}$$

(граничные условия Неймана). Требуется найти внутри поверхности потенциал $\varphi(\boldsymbol{r})$, удовлетворяющий уравнению Пуассона (8.6).

Используем для решения этой задачи тождество Грина (1.98),

$$\int\limits_V (\varphi \Delta\psi - \psi \Delta\varphi) dV = \oint\limits_S \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) dS \tag{8.23}$$

выбрав в качестве φ искомый потенциал, а в качестве ψ - функцию Грина $G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$, удовлетворяющую уравнению Пуассона для единичного точечного заряда:

$$\Delta' G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = -\frac{4\pi}{\varepsilon} \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}') \tag{8.24}$$

Если во всем пространстве имеется один точечный заряд, то функция Грина имеет вид $G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = 1/\varepsilon |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|$ (ср. с формулой (1.225)). Но при наличии вне рассматриваемого объема других зарядов, заданных не явно, а через посредство соответствующего граничного условия на S, вид функции Грина усложняется:

$$G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = \frac{1}{\varepsilon |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} + \mathscr{G}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') \tag{8.25}$$

Здесь $\mathscr{G}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$ удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta' \mathscr{G}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = 0$ и, следовательно, учитывает действие зарядов, находящихся вне заданного объема.

При задании граничных условий Дирихле (8.21) подберем функцию $\mathscr{G}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$ так, чтобы при любом $\boldsymbol{r}$ выполнялось условие

$$G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')|_S = 0 \tag{8.26}$$

когда координаты $\boldsymbol{r}'$ принадлежат поверхности S.
Подставляем в (8.23) правые части равенств (8.6), (8.24) и используем граничное условие (8.26). Получаем

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \int\limits_V G\left(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}'\right) \rho_{ext}\left(\boldsymbol{r}'\right) dV' - \frac{\varepsilon}{4\pi} \oint\limits_S \varphi\left(\boldsymbol{r}'\right) \frac{\partial G\left(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}'\right)}{\partial n'} dS' \tag{8.27}$$

Поскольку значение φ на поверхности S задано, то и вся правая часть последнего равенства известна, если построена функция Грина, т. е. это равенство дает решение задачи в заданной области.

В случае граничных условий Неймана (8.22) для потенциала необходимо наложить некоторое условие на производную $\partial G/\partial n'$. Указанная производная удовлетворяет интегральному условию

$$\oint\limits_S \frac{\partial G\left(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}'\right)}{\partial n'} dS' = -\frac{4\pi}{\varepsilon} \tag{8.28}$$

следующему из уравнения (8.24). Простейшее условие, согласующееся с (8.28), имеет вид (см. [Джексон (1975)])

$$\left.\frac{\partial G\left(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}'\right)}{\partial n'}\right|_S = -\frac{4\pi}{\varepsilon S} \tag{8.29}$$

когда координаты $\boldsymbol{r}'$ принадлежат поверхности S, а $\boldsymbol{r}$ - любое. В этом случае получим из (8.23)

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \int\limits_V G\left(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}'\right) \rho_{\text{ext}}\ \left(\boldsymbol{r}'\right) dV' + \frac{\varepsilon}{4\pi} \oint\limits_S G\left(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}'\right) \frac{\partial \varphi\left(\boldsymbol{r}'\right)}{\partial n'} dS' + \bar{\varphi} \tag{8.30}$$

где $\bar{\varphi} = \oint_S \varphi dS/S$ - среднее значение потенциала на поверхности S, которое может быть выбрано произвольно. Равенство (8.30) дает решение электростатической задачи внутри области при задании на границе условия Неймана (8.22).

Пример 8.3. Внутри сферической металлической оболочки радиуса a, заполненной однородным диэлектриком, на расстоянии $b < a$ от чентра находится точечный заряд q. Потенчиал оболочки поддерживается равным нулю. Найти поле внутри сферы.

Решение. Построим функцию Грина, удовлетворяющую внутри сферы уравнению (8.24), а на ее поверхности - условию (8.21). Это достигается путем выбора $\mathscr{G}\left(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}'\right)$ в виде потенциала точечного заряда

$$\mathscr{G}\left(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}'\right) = \frac{q_*}{\left|\boldsymbol{r}_* - \boldsymbol{r}'\right|} \tag{1}$$

величина q_* и положение $r_*(r)$ которого подбираются так, чтобы выполнить условие (8.21). Из соображений симметрии очевидно, что r и r_*, отсчитываемые от центра сферы, должны быть направлены вдоль одной прямой. Выбирая ось Oz сферической системы координат вдоль этой прямой, получим из (9.21) условие для определения параметров q_* и r_*:

$$\frac{1}{\sqrt{r^2 + a^2 - 2ar\cos\theta}} + \frac{q_*}{\sqrt{r_*^2 + a^2 - 2ar_*\cos\theta}} = 0 \tag{2}$$

Последнее уравнение имеет два решения: $q_* = -1, r_* = r$ (тривиальное решение, потенциал равен нулю всюду в пространстве) и $q_* = -a/r, r_* = a^2/r$. Второе решение и позволяет построить функцию Грина, которая в сферических координатах имеет вид

$$G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \frac{1}{\sqrt{r^2+r'^2-2rr'\cos\vartheta'}} - \frac{a/r}{\sqrt{r_*^2+r'^2-2r_*r'\cos\vartheta'}} \tag{3}$$

Здесь ϑ' - угол между векторами $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{r}'$. Вычисляя затем потенциал с помощью (8.27), где следует положить $\rho_{\text{ext}}\ (\boldsymbol{r}') = q\delta(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{r}'), \varphi = 0$ на S, получим

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \frac{q}{\varepsilon\sqrt{r^2+b^2-2br\cos\vartheta}} - \frac{q}{\varepsilon\sqrt{r^2b^2/a^2+a^2-2br\cos\vartheta}} \tag{4}$$

где ϑ стал углом между линией расположения зарядов и радиусом-вектором r.

Метод конформных отображений функциями комплексного переменного $z = x + iy$ широко применяется при решении двумерных электростатических задач. Плоскость (x, y) в этом методе выступает как комплексная плоскость переменного z. Функция $w(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ отображает точки плоскости z в соответствующие точки комплексной плоскости w, на осях которой откладываются величины (u, v). Особую ценность для физических приложений представляют такие функции $w(z)$, которые однозначны и дифференцируемы (аналитичны) в некоторой области комплексной плоскости (x, y), за исключением конечного числа особых точек.

Дифференцируемость функций комплексного переменного накладывает на них значительно более жесткие ограничения, чем дифференцируемость функций действительных переменных. А именно, производная $w'(z_0)$ в точке z_0, определяемая как предел

$$w'(z_0) = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{w(z_0+\Delta z)-w(z_0)}{\Delta z}$$

не должна зависеть от способа стремления Δz к нулю (в частности, от того, по какому направлению сближаются точки $z_0 + \Delta z$ и z_0 в комплексной плоскости). Ясно, что произвольная дифференцируемая функция двух действительных переменных $f(x, y)$ таким

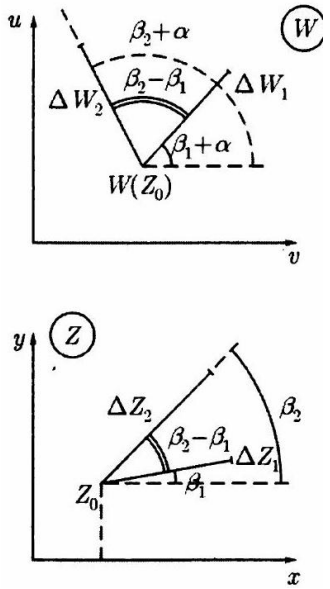


Рис. 8.2

свойством не обладает, так как в общем случае, например, $\partial f/\partial x \neq \partial f/\partial y$.

Дифференцируемость функции комплексного переменного $w(z)$, осуществляющей отображение плоскости z на плоскость w, влечет за собой два важных следствия.

1.' Конформность - сохранение углов между пересекающимися линиями при отображении аналитической функцией. Это свойство становится очевидным, если выразить в точке пересечения z_0 на плоскости z малые приращения вдоль каждой кривой через модуль и фазу: $\Delta z_{1,2} = \varrho_{1,2}e^{i\beta_{1,2}}$. Очевидно, что угол между кривыми равен

разности аргументов $\beta_2 - \beta_1$ (см. рис. 8.2). С другой стороны, на плоскости w имеем вдоль соответствующих кривых приращения $\Delta w_{1,2} \approx w'(z_0)\,\Delta z_{1,2}$, и, если $w'(z_0) = \varrho e^{i\alpha} \neq 0$, разность аргументов этих приращений тоже равна $\beta_2 - \beta_1$, так как значение производной аналитической функции
не зависит от направления приращения. Обе кривые в точке пересечения на плоскости w оказались повернутыми на один и тот же угол α, а угол между ними остался прежним.
2. Действительная $u(x, y)$ и мнимая $v(x, y)$ части аналитической функции являются функциями гармоническими, т. е. удовлетворяют двумерному уравнению Лапласа. Чтобы в этом убедиться, вычислим первую производную dw/dz двумя способами, сближая точки вдоль Ox и вдоль Oy. В первом случае имеем $\Delta z = \Delta x$ и

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

во втором $\Delta z = i\Delta y$ и

$$\frac{dw}{dz} = -i\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

Приравнивая два выражения для dw/dz, находим условия Коши-Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \tag{8.31}$$

ранее полученные Даламбером и Эйлером. Из условий Коши-Римана и равенства перекрестных производных $\partial^2 f/\partial x\partial y = \partial^2 f/\partial y\partial x$ следуют уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0 \tag{8.32}$$

которым удовлетворяют по отдельности действительная и мнимая части аналитической функции.

Рассмотренные свойства аналитических функций комплексного переменного позволяют использовать их для решения двумерных электростатических задач на вычисление полей заряженных металлических тел, погруженных в однородную диэлектрическую среду. Если действительная часть $u(x, y)$ комплексной функции w подобрана таким образом, что уравнение $u(x, y) = \text{const}$ описывает поверхность двумерного металлического электрода, то $u(x, y)$ в окружающем диэлектрике будет представлять собой электростатический потенциал, который удовлетворяет уравнению Лапласа. Вычислим электростатическую индукцию:

$$D_x = -\varepsilon\frac{\partial u}{\partial x} = -\varepsilon\frac{\partial v}{\partial y}, \quad D_y = -\varepsilon\frac{\partial u}{\partial y} = \varepsilon\frac{\partial v}{\partial x}$$

Здесь использованы соотношения Коши-Римана (8.31). Составляя уравнение для силовых линий вектора индукции,

$$\frac{dx}{D_x} = \frac{dy}{D_y}$$

получим

$$\frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy = 0 \quad \text{или} \quad v(x, y) = \text{const}.$$

Таким образом, мнимая часть $v(x, y) = \text{const}$ аналитической функции w при разных const описывает семейство силовых линий электростатического поля, которые

ортогональны эквипотенциальным поверхностям $u(x,y) = \text{const}$. С равным основанием можно в качестве электростатического потенциала использовать мнимую часть $v(x,y)$. Тогда уравнение $u(x,y) = \text{const}$ будет изображать семейство силовых линий.

Вычислим емкость (на единицу длины, отсчитываемой перпендикулярно плоскости (x,y)) конденсатора, образованного двумя заряженными металлическими поверхностями $u(x,y) = c_1$ и $u(x,y) = c_2$ (рис. 8.3). На них поддерживаются потенциалы V_1, V_2. Вычисляем заряд на внутренней поверхности:

$$q = \frac{1}{4\pi}\oint D_n dS = -\frac{\varepsilon}{4\pi}\oint\left(\frac{\partial u}{\partial x}(\boldsymbol{e}_x\cdot\boldsymbol{n}) + \frac{\partial u}{\partial y}(\boldsymbol{e}_y\cdot\boldsymbol{n})\right)dS =$$
$$= \frac{\varepsilon}{4\pi}\oint\left(\frac{\partial v}{\partial x}(\boldsymbol{e}_x\cdot\boldsymbol{\tau}) + \frac{\partial v}{\partial y}(\boldsymbol{e}_y\cdot\boldsymbol{\tau})\right)dS = \frac{\varepsilon}{4\pi}\oint\nabla v\cdot\boldsymbol{\tau}\,dS \tag{8.33}$$

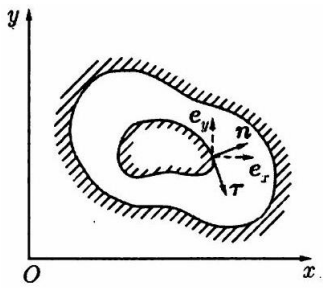


Рис. 8.3

Здесь τ - орт, касательный к эквипотенциальной поверхности (рис. 8.3) и использованы условия Коши-Римана. Заметим, что интеграл по замкнутому контуру здесь не изображает работу и не равен нулю! Емкость вычисляется по формуле (8.11).

Если требуется найти заряд на части поверхности, это можно сделать согласно (8.33) с помощью формулы

$$q = \frac{\varepsilon}{4\pi}(v_2 - v_1) \tag{8.34}$$

где v_1, v_2 относятся к начальной и конечной точкам пути интегрирования.

Пример 8.4. Вычислить емкость конденсатора, образованного двумя коаксиальными круглыми чилиндрическими оболочками, с помощью аналитической функции $w(z) = \ln z, z = x + iy = re^{i\alpha}$. Исследовать также с помощью указанной функции структуру электрического поля, которое создается металлическими плоскостями с разными потенциалами, расходящимися веерообразно от оси Oz.

Решение. Имеем $w = u + iv = \ln r + i\alpha$, т. е.

$$u(x,y) = \ln r = \ln\sqrt{x^2+y^2}, \quad v(x,y) = \alpha = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} \tag{1}$$

Выбирая в качестве потенциальной функции u, находим эквипотенциальные линии в плоскости (x,y) : $r^2 = x^2 + y^2 = \text{const}$, окружности. Силовые линии определяются условием $v = \alpha = \operatorname{arctg}(y/x) = \text{const}$ - прямые, расходящиеся радиально из начала координат. В плоскости w рассматриваемая система представляет собой плоский конденсатор (рис. 8.4). Если внутренний цилиндр радиуса a находится под потенциалом V, а внешний радиуса b заземлен, то в аналитическую функцию нужно ввести соответствующие константы: $w(z) = -(V/\ln(b/a))\ln z + V\ln b/\ln(b/a)$. Мнимая часть $v(x,y)$ принимает вид $v(x,y) = -V\operatorname{arctg}(y/x)/\ln(b/a) = -V\alpha/\ln(b/a)$. Вычислив заряд согласно (8.34), считая $\alpha = 2\pi$ в точке $1, \alpha = 0$ в точке 2, находим $q = \varepsilon V/2\ln(b/a)$ и получаем емкость $C = \varepsilon/2\ln(b/a)$.

Выбрав в качестве потенциала функцию v, получим поверхности равного потенциала в виде плоскостей, расходящихся от оси Oz (рис. 8.5).

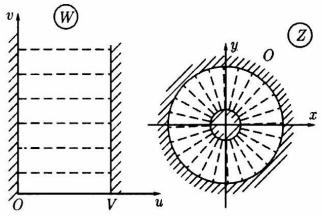


Рис. 8.4

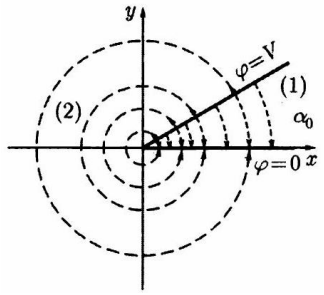


Рис. 8.5

Потенциал в областях 1 и 2 описывается функциями соответственно

$$\varphi_1 = \frac{V}{\alpha_0}\alpha = \frac{V}{\alpha_0}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$$

$$\varphi_2 = -\frac{V}{2\pi-\alpha_0}(\alpha-2\pi) = -\frac{V}{2\pi-\alpha_0}\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}-2\pi\right) \tag{2}$$

Силовые линии электрического поля представляют собой дуги окружностей. Отличные от нуля компоненты записываются в цилиндрических координатах в виде

$$E_{\alpha 1} = -\frac{V}{\alpha_0 r}, \quad E_{\alpha 2} = \frac{V}{(2\pi-\alpha_0)\,r} \tag{3}$$

При $\alpha_0 \ll 1$ поле в основном сосредоточено между пластинами (рис. 8.6), при заданном r имеем $|E_{\alpha 2}/E_{\alpha 1}| \approx \alpha_0/2\pi \ll 1$. При $\alpha_0 = \pi$ пластины, находящиеся под разными потенциалами, расположены «в стык» (рис. 8.7), структура поля симметрична относительно плоскости $y = 0$.

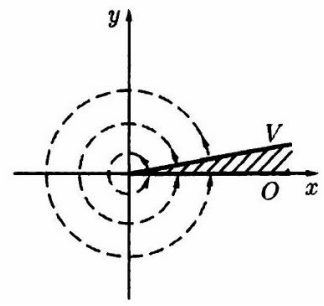


Рис. 8.6

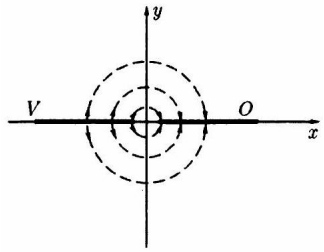


Рис. 8.7

Задачи

8.38*. Проводящий эллипсоид с зарядом q и полуосями a, b, c помещен в однородный диэлектрик с проницаемостью ε. Найти потенциал φ, а также емкость эллипсоида C и поверхностную плотность заряда σ на его поверхности.

Указание. Воспользоваться эллипсоидальными координатами (см. задачу 1.94). Искать потенциал в виде $\varphi(\xi)$.

8.39. Исходя из результатов предыдущей задачи найти потенциалы и емкости вытянутого и сплюснутого эллипсоидов вращения. Рассмотреть частные случаи тонкого длинного стержня и тонкого диска. Емкость C и потенциал φ вытянутого эллипсоида вращения найти также, используя результат задачи 2.8 .

8.40ˆ. Проводящий эллипсоид с зарядом q находится в пустоте в однородном внешнем поле, напряженность $\boldsymbol{E}_0$ которого параллельна одной из осей эллипсоида. Найти потенциал φ полного электрического поля.

Указание. Воспользоваться эллипсоидальными координатами задачи 1.94. Граничные условия на поверхности эллипсоида ($\xi = 0$) могут выполняться только, если зависимость потенциала φ', вызванного наведенными зарядами, от η, ζ, будет такая же, как у внешнего поля:

$$\varphi' = \varphi_0(\xi, \eta, \zeta) F(\xi)$$

8.41. Напряженность поля в плоском конденсаторе равна E_0. На заземленной обкладке имеется проводящий выступ в форме половины вытянутого эллипсоида вращения, ось симметрии которого перпендикулярна к плоскостям обкладок. Расстояние между обкладками велико по сравнению с размерами выступа. Найти электрическое поле φ в конденсаторе. Определить, во сколько раз максимальное значение напряженности поля $E_{\max}$ превосходит E_0[2]

8.42. Проводящий незаряженный эллипсоид находится во внешнем однородном поле $\boldsymbol{E}_0$, ориентированном произвольно по отношению к его осям. Найти полное электрическое поле φ. Рассмотреть поле на больших расстояниях от эллипсоида, выразив его через коэффициенты деполяризации:

$$n^{(x)} = \frac{abc}{2} \int_0^\infty \frac{ds}{(s+a^2)\, R_s}, \quad n^{(y)} = \frac{abc}{2} \int_0^\infty \frac{ds}{(s+b^2)\, R_s}$$

$$n^{(z)} = \frac{abc}{2} \int_0^\infty \frac{ds}{(s+c^2)\, R_s} \quad \left(R_s = \sqrt{(s+a^2)\,(s+b^2)\,(s+c^2)} \right)$$

8.43. Найти выражения коэффициентов деполяризации, введенных в предыдущей задаче, в случае вытянутого эллипсоида вращения

[2] Результат задачи поясняет принцип работы громоотвода.

($a > b = c$). Рассмотреть частные случаи очень вытянутого эллипсоида (стержня) и эллипсоида, близкого к шару.

8.44. Найти коэффициенты деполяризации для сплюснутого проводящего эллипсоида ($a = b > c$). Рассмотреть, в частности, случай диска.

8.45*. Диэлектрический эллипсоид с полуосями a, b, c находится в однородном внешнем поле с напряженностью $\boldsymbol{E}_0$. Диэлектрическая проницаемость эллипсоида ε_1, а окружающего его однородного диэлектрика ε_2. Найти потенциал φ результирующего электрического поля (воспользоваться указанием к задаче 8.40*). Найти напряженность $\boldsymbol{E}$ электрического поля внутри эллипсоида, а также потенциал φ_2 вне эллипсоида на больших от него расстояниях, выразив его через составляющие поляризуемости эллипсоида по главным осям.

8.46. Эллипсоид вращения с диэлектрической проницаемостью ε_1 находится во внешнем однородном поле $\boldsymbol{E}_0$ в однородной диэлектрической среде ε_2. Найти энергию U эллипсоида в этом поле и приложенный к нему вращательный момент N. Рассмотреть также случай проводящего эллипсоида вращения.

8.47*. Показать, что при сообщении проводящей жидкой сферической капле достаточно большого заряда капля теряет устойчивость. Найти это критическое значение заряда q_c. Радиус капли R, коэффициент поверхностного натяжения α.

Указание. Сравнить энергию сферической капли с энергией деформированной капли, имеющей форму вытянутого эллипсоида вращения. Площадь поверхности такого эллипсоида

$$S = 2\pi b^2 + \frac{2\pi b a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arccos \frac{b}{a} \quad (a > b = c).$$

8.48*. Однородное электрическое поле $\boldsymbol{E}_0 \| Oz$ в полупространстве $z < 0$ ограничено заземленной проводящей плоскостью $z = 0$ с круглым отверстием радиуса a. Найти поле φ во всем пространстве. Рассмотреть, в частности, поле на больших расстояниях за отверстием (в полупространстве $z > 0$).

Указание. Воспользоваться сплюснутыми сфероидальными координатами (см. задачу 1.95) с $c = 0$. Искать решение во всем пространстве в виде $\varphi = -E_0 z F(\xi)$.

8.49. Найти распределение зарядов σ на проводящей плоскости в предыдущей задаче.

8.50*. Внутри клиновидной области пространства, ограниченной двумя пересекающимися под углом β заземленными проводящими полуплоскостями OA и OB, в точке $N(\boldsymbol{r}_0)$ находится точечный заряд q (рис. 8.8). Цилиндрические координаты заряда $(r_0, \gamma, 0)$; ось Oz направлена вдоль ребра клина, азимутальный угол α отсчитывается от грани OA. Доказать, что потенциал $\varphi(r, \alpha, z)$ может быть записан в виде

где

$$\varphi(r, \alpha, z) = \int_0^\infty \varphi_k(r, \alpha) \cos kz dk$$

$$\varphi_k(r, \alpha) = \frac{8q}{\beta} \begin{cases} \sum\limits_{n=1}^{\infty} K_{n\pi/\beta}(kr_0)\, I_{n\pi/\beta}(kr) \sin(n\pi\gamma/\beta) \sin(n\pi\alpha/\beta) \text{ при } r < r_0, \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} I_{n\pi/\beta}(kr_0)\, K_{n\pi/\beta}(kr) \sin(n\pi\gamma/\beta) \sin(n\pi\alpha/\beta) \text{ при } r > r_0, \end{cases}$$

$I_{n\pi/\beta}$ и $K_{n\pi/\beta}$ - цилинддрические функции.

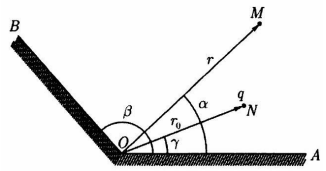


Рис. 8.8

8.51. Доказать, что потенциал поля точечного заряда в клиновидной области, найденный в предыдущей задаче, можно представить в виде

$$\varphi(r,\alpha,z)=\frac{q}{\beta\sqrt{2rr_0}}\int\limits_{\eta}^{\infty}\left[\frac{\operatorname{sh}(\pi\zeta/\beta)}{\operatorname{ch}(\pi\zeta/\beta)-\cos(\pi(\alpha-\gamma)/\beta)}-\right.$$
$$\left.-\frac{\operatorname{sh}(\pi\zeta/\beta)}{\operatorname{ch}(\pi\zeta/\beta)-\cos(\pi(\alpha+\gamma)/\beta)}\right]\frac{d\zeta}{\sqrt{\operatorname{ch}\zeta-\operatorname{ch}\eta}}$$

где

$$\operatorname{ch}\eta=\frac{r_0^2+r^2+z^2}{2rr_0},\quad \eta>0$$

Указание. Воспользоваться формулами:

$$\int\limits_0^{\infty}K_\nu(kr)I_\nu\left(kr_0\right)\cos kzdk=\frac{1}{2\sqrt{2rr_0}}\int\limits_{\eta}^{\infty}\frac{e^{-\xi\nu}d\xi}{\sqrt{\operatorname{ch}\xi-\operatorname{ch}\eta}}$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty}p^n\cos nx=\frac{1}{2}\left(\frac{1-p^2}{1-2p\cos x+p^2}-1\right)$$

8.52. Найти поле φ заряда q, находящегося вблизи проводящей полуплоскости $\alpha=0$ в точке r_0 с. цилиндрическими координатами $(r_0,\gamma,z=0)$.

Указание. Воспользоваться результатами задачи 8.51. Для вычисления интеграла сделать подстановку $\operatorname{ch}(\zeta/2)=\operatorname{ch}(\eta/2)\operatorname{ch}u$, где $0<u<\infty$.

8.53. Найти распределение σ поверхностного заряда вблизи ребра проводящего клина с двугранным углом β (угол отсчитывается вне проводника). Клин находится в поле произвольным образом распределенного заряда.

Указание. Сначала рассмотреть случай, когда вблизи клина находится один точечный заряд, воспользовавшись результатом задачи 8.50* и формулой

$$\int\limits_0^{\infty}K_\nu(k\rho)k^\nu\cos kzdk=2^{\nu-1}\sqrt{\pi}\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\frac{\rho^\nu}{\left(\rho^2+z^2\right)^{\nu+1/2}}$$

8.54*. Точечный заряд q находится на расстоянии a от однородной плоскопараллельной диэлектрической пластинки толщиной c. Найти электрическое поле, воспользовавшись тем, что как произведение $J_0\left(kr_1\right)e^{\pm kz}$ (r_1,z - цилиндрические координаты точки, J_0 - функция Бесселя), так и $\int\limits_0^{\infty}A(k)J_0\left(kr_1\right)e^{\pm kz}dk$ ($A(k)$ - произвольная функция от k) удовлетворяют уравнению Лапласа.

Указание. Применить разложение:

$$\frac{1}{\sqrt{r_1^2+z^2}}=\int\limits_0^\infty e^{-k|z|}J_0\left(kr_1\right)dk$$

8.55. В плоский конденсатор с расстоянием a между обкладками вставлена плоскопараллельная плитка из диэлектрика, толщина которой $a/2$ и проницаемость ε. Плитка касается одной из обкладок, обкладки заземлены. На поверхность диэлектрика нанесен заряд q, который можно рассматривать как точечный. Найти поле φ в конденсаторе. Выяснить, в частности, какой вид оно имеет вблизи заряда. Представить это поле в виде суперпозиции изображений.

8.56*. Радиусы обкладок неконцентрического сферического конденсатора равны a_1 и a_2, расстояние между их центрами равно $b\,(a_1+b<a_2)$; внешняя обкладка заземлена, внутренняя поддерживается при потенциале V. Найти поле φ внутри такого конденсатора. Определить также его емкость C.

Указание. Решать задачу в бисферических координатах (см. задачу 1.97). Сделав подстановку $\varphi=\sqrt{2\operatorname{ch}\xi-2\cos\eta}\psi$, произвести в уравнении для ψ разделение переменных и воспользоваться свойствами полиномов Лежандра, в частности, разложением

$$\frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}\xi-\cos\eta}}=\sqrt{2}\sum_{l=0}^{\infty}e^{-(l+1/2)|\xi|}P_l(\cos\eta)$$

8.57. Найти емкость слабо неконцентрического сферического конденсатора $(b\leqslant a_1,a_2)$ с точностью до b^2, исходя из результата предыдущей задачи (ср. с задачей 8.19*).

8.58. Расстояние между центрами двух проводящих сфер с радиусами a_1 и a_2 равно $b\,(b>a_1+a_2)$. Найти емкостные коэффициенты c_{ik} системы, используя бисферические координаты.

8.59. Две проводящие сферы, рассмотренные в предыдущей задаче, находятся на большом расстоянии друг от друга $(b\gg a_1,a_2)$. Найти емкостные коэффициенты c_{ik} с точностью до $1/b^4$.

8.60. Показать, что функция (8.18) удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta'\varphi'\left(\boldsymbol{r}'\right)=0$, если $\Delta\varphi(\boldsymbol{r})=0$.

8.61*. Две проводящие сферы с равными радиусами a касаются друг друга. Найти емкость C системы методом инверсии. Найти также электрическое поле φ системы, когда сферам сообщен заряд q.

Указание. Воспользоваться результатом задачи 8.55.

8.62. Решить методом инверсии задачу о поле заземленной сферы радиуса R, вблизи которой на расстоянии $a(a>R)$ от ее центра находится точечный заряд q (см. задачу 8.14*).

Указание. Считать известным потенциал равномерно заряженной сферы при отсутствии точечного заряда.

8.63*. Поверхность проводника образована двумя сферами с радиусами R_1 и R_2, пересекающимися по окружности радиуса a. Найти емкость C этого проводника, исходя из результата решения задачи 8.51 о проводящем клине в поле точечного заряда и применяя метод инверсии.

Указание. Поверхность рассматриваемого проводника описывается в тороидальных координатах (см. задачу 1.98) уравнениями

$$\xi=\xi_1=\text{ const }\,,\quad \xi=\xi_2=\text{const}\quad\left(\sin\xi_1=\pm a/R_1,\sin\xi_2=\pm a/R_2\right)$$

Достаточно рассмотреть преобразование координат в плоскости, перпендикулярной ребру клина и проходящей через центр инверсии, который должен быть взят на линии

пересечения сфер. Для определения заряда q проводника при заданном его потенциале удобно воспользоваться тем, что поле на больших расстояниях от проводника имеет вид $\varphi = q/r - V$, где $-V$ - потенциал на бесконечности.

8.64. Найти емкости C следующих проводников:

а) полого сферического сегмента с радиусом R и углом раствора 2θ;

б) полушара радиуса R

8.65. Проводник образован двумя сферами с одинаковыми радиусами a, поверхности которых пересекаются под углом $\pi/3$ друг к другу. Найти емкость C проводника.

8.66. С помощью функции Грина (3) из примера 8.3 вычислить потенциал, создаваемый равномерно заряженным кольцом радиуса b с зарядом q, расположенным внутри заземленной сферической оболочки радиусом $a > b$. Центр кольца совпадает с центром сферы.

8.67. Решить предыдущую задачу для случая, когда поле внутри сферической оболочки создается равномерно заряженным отрезком с зарядом q, совпадающим с одним из диаметров.

Указание. В сферических координатах с полярной осью вдоль отрезка объемное распределение заряда имеет вид

$$\rho_{\text{ext}}\ (r', \vartheta') = \frac{q}{2a}\frac{1}{2\pi r'^2}\left[\delta\left(\cos\vartheta' - 1\right) + \delta\left(\cos\vartheta' + 1\right)\right]$$

8.68. Исследовать поле, потенциал и силовые линии которого описываются аналитической функцией $z = l\,\mathrm{ch}\,w, l = \text{const}$.

а) Найти форму проводников, поле которых можно представить указанной функцией.

б) Найти силовые линии и эквипотенциальные поверхности, созданные заряженной бесконечно длинной тонкой металлической полосой конечной ширины.

в) Найти силовые линии и эквипотенциальные поверхности, созданные заряженными металлическими взаимно перпендикулярными плоскостью и полуплоскостью. Край полуплоскости находится на конечном расстоянии от плоскости.

8.69^. Бесконечно длинные круговые цилиндры с радиусами R_1, R_2 и расстоянием между параллельными осями L погружены в однородную диэлектрическую среду с проницаемостью ε. Воспользовавшись аналитической функцией

$$w = \ln\frac{z + ia}{z - ia}$$

вычислить емкость системы на единицу длины. Рассмотреть случаи $L < R_2 - R_1$ и $L > R_2 + R_1$.

11.2.3 8.3. Energy, Forces and Thermodynamic Relations for Conductors and Dielectrics

Термодинамические функции диэлектрика. Для вычисления термодинамических функций системы, состоящей из заряженных диэлектриков и проводников, необходимо найти элементарную работу, связанную с изменением электрического поля. Пусть заряд i-го проводника получит приращение δq_i, а плотность сторонних зарядов в диэлектрике возрастет на $\delta\rho_{\text{ext}}\,(\boldsymbol{r})$. Поскольку на перенос малого заряда δq из бесконечности (где потенциал равен нулю) в заданную точку затрачивается работа $\varphi(\boldsymbol{r})\delta q$, то полную работу можно представить в виде

$$\delta A = \sum_i \varphi_i \delta q_i + \int \varphi \delta \rho_{ext} dV \tag{8.35}$$

где сумма берется по всем проводникам, а интеграл - по всему пространству вне проводников, включая как области, занятые диэлектриками, так и вакуум.

Приращение заряда проводника можно выразить через приращение индукции вблизи его поверхности с помощью формулы (8.9):

$$\delta q_i = -\frac{1}{4\pi}\oint_{S_i} \delta D_n dS_i$$

где нормаль, внешняя по отношению к диэлектрику, направлена внутрь проводника. Приращение плотности внешних зарядов в диэлектрике записываем с помощью (7.20) в виде $\operatorname{div}\delta\boldsymbol{D}/4\pi$ и преобразуем объемный интеграл, используя тождество $\operatorname{div}\varphi\delta\boldsymbol{D} = \varphi\operatorname{div}\delta\boldsymbol{D} + \delta\boldsymbol{D}\cdot\nabla\varphi$:

$$\int \varphi\delta\rho_{\text{ext}}\, dV = \frac{1}{4\pi}\sum_i \varphi_i \oint_{S_i} D_n dS_i + \frac{1}{4\pi}\oint_{S\to\infty} \varphi D_n dS + \frac{1}{4\pi}\int \boldsymbol{E}\cdot\delta\boldsymbol{D}dV.$$

Здесь всюду нормаль - внешняя по отношению к области, занятой диэлектриком или вакуумом. Подставив это выражение в (9.35), получим

$$\delta A = \frac{1}{4\pi}\int \boldsymbol{E}\cdot\delta\boldsymbol{D}dV \tag{8.36}$$

Интеграл распространен на все пространство, связь между $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{D}$ не конкретизирована.

Поскольку термодинамическое состояние диэлектрика зависит от его плотности, температуры, электрического поля и, возможно, других параметров, то в зависимости от внешних условий элементарная работа (8.36) может характеризовать изменение разных термодинамических потенциалов. В случае теплоизолированного статистически равновесного тела работа электрических сил производится при постоянной энтропии и представляет собой изменение внутренней энергии $\mathcal{U}$. Полное изменение внутренней энергии согласно первому закону термодинамики складывается из теплоты и работы и имеет вид

$$\delta\mathcal{U} = T\delta\mathcal{S} + \frac{1}{4\pi}\int \boldsymbol{E}\cdot\delta\boldsymbol{D}dV \tag{8.37}$$

Здесь в отличие от (ДЗ.46), внутренняя энергия тела обозначена через $\mathcal{U}$, $\mathcal{S}$ - энтропия тела, T - его температура, а для малых приращений термодинамических величин использован символ δ, чтобыотличать их от элемента интегрирования dV. В (8:37) не включена механическая работа за счет изменения объема тела.

Если рассматриваемое тело находится в тепловом контакте с окружающими равновесными телами и его температура не изменяется, то работа
представляет собой изменение свободной энергии Гельмгольца $\mathscr{F}$, а ее полное изменение запишется в виде

$$\delta\mathscr{F} = -\mathcal{S}dT + \frac{1}{4\pi}\int \boldsymbol{E}\cdot\delta\boldsymbol{D}dV \tag{8.38}$$

Приведенные выше изменения термодинамических потенциалов можно записать и для удельных величин, относящихся к единице объема диэлектрика:

$$dU = TdS + \zeta d\tau + \frac{1}{4\pi}\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{D} \tag{8.39}$$

$$dF = -SdT + \zeta d\tau + \frac{1}{4\pi}\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{D} \tag{8.40}$$

Поскольку рассматриваемый объем может обмениваться с окружающим диэлектриком частицами, то в (8.38), (8.39) включено соответствующее слагаемое, содержащее изменение плотности массы $d\tau$ и химический потенциал, отнесенный к единице массы, $\zeta = \mu/m$, где μ - химической потенциал, входящий в (ДЗ.47) и отнесенный к одной частице с массой m.

В качестве независимой электрической величины в (8.38), (8.39) выступает индукция D, которая определяется зарядами проводников (и сторонними зарядами в диэлектрике). Несложно перейти к независимой переменной $\boldsymbol{E}$, определяемой потенциалами проводников. Это достигается введением новых термодинамических потенциалов

$$\tilde{U}(S,\tau,\boldsymbol{E}) = U - \frac{1}{4\pi}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}, \quad \tilde{F}(T,\tau,\boldsymbol{E}) = F - \frac{1}{4\pi}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D} \tag{8.41}$$

дифференциалы которых запишутся в виде

$$d\tilde{U} = TdS + \zeta d\tau - \frac{1}{4\pi}\boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{E}, \quad d\tilde{F} = -SdT + \zeta d\tau - \frac{1}{4\pi}\boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{E} \tag{8.42}$$

Через термодинамические функции можно выразить электрическое поле и индукцию в диэлектрике:

$$\boldsymbol{E} = 4\pi\left(\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{D}}\right)_{S,\tau} = 4\pi\left(\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{D}}\right)_{T,\tau}, \quad \boldsymbol{D} = -4\pi\left(\frac{\partial \tilde{U}}{\partial \boldsymbol{E}}\right)_{S,\tau} = -4\pi\left(\frac{\partial \tilde{F}}{\partial \boldsymbol{E}}\right)_{T,\tau} \tag{8.43}$$

Пример 8.5. Вычислить добавки к термодинамическим функциям $U, \tilde{U}, F, \tilde{F}, S, \zeta$ диэлектрика, вызванные наличием электрического поля. Диэлектрик изотропный, его уравнение связи $\boldsymbol{D} = \varepsilon(T,\tau)\boldsymbol{E}$.

Решение. Исходим из соотношения (8.43)

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{D}}\right)_{T,\tau} = \frac{\boldsymbol{E}}{4\pi} = \frac{\boldsymbol{D}}{4\pi\varepsilon(T,\tau)} \tag{1}$$

Интегрируя обе части равенства, получаем

$$F(T,\tau,D) - F_0(T,\tau) = \frac{D^2}{8\pi\varepsilon} \tag{8.44}$$

Диэлектрическая проницаемость ε не зависит от поля, поэтому ее можно выразить только через энтропию и плотность диэлектрика: $\varepsilon(S,\tau)$. Пользуясь термодинамическим соотношением $U = F + TS$, получим

$$U(S,\tau,D) - U_0(S,\tau) = \frac{D^2}{8\pi\varepsilon} \tag{8.45}$$

Далее находим

$$\tilde{U} - U_0(S,\tau) = -\frac{\varepsilon E^2}{8\pi}, \quad \tilde{F} - F_0(T,\tau) = -\frac{\varepsilon E^2}{8\pi} \tag{8.46}$$

$$S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_{\tau,\boldsymbol{D}} = S_0(T,\tau) + \frac{D^2}{8\pi\varepsilon^2}\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial T}\right)_{\tau} \tag{8.47}$$

$$\zeta = \left(\frac{\partial F}{\partial \tau}\right)_{T,\boldsymbol{D}} = \zeta_0(T,\tau) - \frac{D^2}{8\pi\varepsilon^2}\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau}\right)_{T} \tag{8.48}$$

где можно записать, разумеется, $D^2/\varepsilon^2 = E^2$.

Выше получены плотности термодинамических величин в системе, состоящей из

заряженных проводников и диэлектриков, в которых могут находиться сторонние заряды. Поэтому плотность электрической энергии отлична от нуля и вне диэлектрика (в вакууме), тогда как S и ζ в вакууме равны нулю. Проводящие тела вносят вклад в термодинамические функции S_0, U_0 и др. без поля, но полевая добавка от внутренних свойств проводников не зависит, так как поле в них не проникает.

Пример 8.6. Записать энергию электростатического поля (т. е. зависящую от поля часть внутренней энергии системы проводников и диэлектриков) $W = \mathcal{U} - \mathcal{U}_0$ через заряды проводников q_i и их потенциаль V_i для случая, когда сторонние заряды в диэлектрике отсутствуют. Выразить указанную энергию через потенциальные (9.12) и емкостные (8.14) коэффичиенты.

Решение. Записываем энергию (8.44) в виде

$$W = \int \frac{\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{D}}{8\pi} dV \tag{1}$$

где из объема интегрирования исключены проводники, внутри которых $\boldsymbol{E} = 0$. Далее используем равенства $\boldsymbol{E} = -\nabla\varphi, \nabla(\varphi\boldsymbol{D}) = \varphi\nabla\cdot\boldsymbol{D} + \boldsymbol{D}\cdot\nabla\varphi$, уравнение Максвелла $\nabla\cdot\boldsymbol{D} = 0$ и теорему Остроградского-Гаусса. Получим

$$W = -\sum_i V_i \oint_{S_i} \frac{D_n}{8\pi} dS_i = \frac{1}{2}\sum_i q_i V_i \tag{8.49}$$

Сумма берется по всем проводникам. С помощью формул (8.12), (8.14) находим

$$W = \frac{1}{2}\sum_i s_{ik} q_i q_k = \frac{1}{2}\sum_i c_{ik} V_i V_k \tag{8.50}$$

Полученные формулы пригодны и для неоднородного диэлектрика.

Пример 8.7. В однородное внешнее поле $\mathscr{E}$ в вакууме вносится диэлектрическое или проводящее незаряженное тело. Выразить изменение внутренней энергии тела через его поляризуемость, считая тело теплоизолированным и пренебрегая изменением объема.

Решение. В случае диэлектрика имеем

$$\mathcal{U} - \mathcal{U}_0 = \int \frac{\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D} - \mathscr{E}^2}{8\pi} dV = \frac{1}{8\pi}\int (\boldsymbol{E} + \mathscr{E})\cdot(\boldsymbol{D} - \mathscr{E}) dV - \frac{1}{8\pi}\int \mathscr{E}\cdot(\boldsymbol{D} - \boldsymbol{E}) dV.$$

Подынтегральное выражение первого интеграла в правой части записываем в виде

$$(\boldsymbol{E} + \mathscr{E})\cdot(\boldsymbol{D} - \mathscr{E}) = -\left[\nabla(\varphi + \varphi_0)\right]\cdot(\boldsymbol{D} - \mathscr{E}) = -\nabla\cdot\left[(\varphi + \varphi_0)(\boldsymbol{D} - \mathscr{E})\right],$$

где φ_0, φ - потенциалы неискаженного и искаженного диэлектриком поля. Здесь учтено, что $\nabla\cdot\boldsymbol{D} = \nabla\cdot\mathscr{E} = 0$. Интеграл от полной дивергенции обращается в нуль из-за стремления к нулю разности $D - \boldsymbol{E}$ на больших расстояниях от тела. В результате, заменяя $\boldsymbol{D} - \boldsymbol{E} = 4\pi\boldsymbol{P}$, получим

$$\mathcal{U} - \mathcal{U}_0 = -\frac{1}{2}\int \boldsymbol{P}\cdot\mathscr{E} dV = -\frac{1}{2}\mathscr{P}\cdot\mathscr{E} = -\frac{1}{2}V\beta_{\mu\nu}\mathscr{E}_\mu\mathscr{E}_\nu \tag{8.51}$$

Последнее равенство является следствием однородности внешнего поля,

$$\mathscr{P} = \int \boldsymbol{P} dV, \quad \mathscr{P}_\mu = V\beta_{\mu\nu}\mathscr{E}_\nu$$

- дипольный момент диэлектрического тела, $\beta_{\mu\nu}$ - его поляризуемость (см. (8.15)). При этом поляризация и поле внутри тела могут быть неоднородными. Однородность поля сохраняется только для тел, имеющих форму эллипсоида (см. задачу 8.45*).

В случае проводника

$$\mathcal{U}-\mathcal{U}_0=\int\frac{\boldsymbol{E}^2-\mathscr{E}^2}{8\pi}dV=\frac{1}{8\pi}\int\limits_{\text{out}}(\boldsymbol{E}+\mathscr{E})\cdot(\boldsymbol{E}-\mathscr{E})dV-\frac{1}{8\pi}\int\limits_V\mathscr{E}^2dV$$

где первый интеграл берется по области вакуума, а второй - по объему V проводника, внутри которого $\boldsymbol{E}=0$. Производя преобразования, аналогичные выполненным выше, приводим искомую величину к виду

$$\mathcal{U}-\mathcal{U}_0=-\frac{1}{8\pi}\oint_S\varphi_0\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S}$$

где интеграл берется по поверхности проводника. Записываем для однородного поля $\varphi_0=-\mathscr{E}\cdot\boldsymbol{r}$, где начало отсчета радиуса-вектора произвольно, и получаем под интегралом величину $\boldsymbol{r}E_ndS/8\pi=-\boldsymbol{r}\sigma dS/2$, где σ - поверхностная плотность заряда на проводнике. В итоге получаем электрический дипольный момент проводника во внешнем однородном поле

$$\mathscr{P}=\oint_S r\sigma dS,\quad \mathscr{P}_\mu=\beta_{\mu\nu}\mathscr{E}_\nu \tag{8.5}$$

Энергия проводника записывается через его дипольный момент в том же виде (8.51), что и для диэлектрика.

Силы, действующие на проводники и диэлектрики в электрическом поле. Пусть проводник окружен диэлектриком с проницаемостью ε. Поверхностная плотность его заряда, согласно (8.9), $\sigma=D_n/4\pi$. Сила, приложенная к элементу $dq=\sigma dS$ заряда поверхности проводника, выразится как $d\boldsymbol{F}=\boldsymbol{E}_{ef}dq$, где $\boldsymbol{E}_{ef}$ - напряженность поля, создаваемая всеми зарядами, кроме dq. На расстояниях от поверхности, малых по сравнению с линейными размерами dS, эта площадка создает электростатическую индукцию $D'=\pm2\pi\sigma\boldsymbol{n}$ как бесконечная заряженная плоскость, разных направлений по обе стороны от площадки. Все прочие заряды, находящиеся за пределами выбранной площадки, создают вблизи нее однородную индукцию D_{ef}.

Суммарная индукция внутри проводника равна нулю: $\boldsymbol{D}_{ef}-2\pi\sigma\boldsymbol{n}=0$ (нормаль - внешняя относительно проводника). Отсюда находим $\boldsymbol{D}_{ef}=2\pi\sigma\boldsymbol{n}$ и силу, приложенную к единичной площади поверхности проводника:

$$\boldsymbol{f}_s=\frac{d\boldsymbol{F}}{dS}=\frac{2\pi\sigma^2\boldsymbol{n}}{\varepsilon}=\frac{\varepsilon E^2}{8\pi}\boldsymbol{n} \tag{8.53}$$

Сила направлена по нормали к поверхности и стремится увеличить объем проводника.

Вычислим теперь плотность силы f, действующей на элементы диэлектрической среды при их малом перемещении и деформации. Если через $u(r)$ обозначить вектор малого перемещения элемента среды, находившегося в точке с координатами r, то затраченная на это работа запишется в виде

$$\delta A=\int\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r})dV$$

где интегрирование производится по объему диэлектрика. Поскольку работа электрических сил производится за счет убыли энергии, то величина элементарной работы с противоположным знаком равна приращению электрической энергии, т. е.

$$\delta W = -\int \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}) dV \tag{8.54}$$

Эту энергию в термодинамическом смысле нужно понимать как внутреннюю энергию, если диэлектрик теплоизолирован, или как свободную энергию, если процесс деформации изотермичен. Используя (8.44) или (8.45), находим

$$W = \int \frac{\varepsilon E^2}{8\pi} dV \tag{8.55}$$

Если поле создается сторонними зарядами в диэлектрике, то ту же самую энергию (8.55) можно преобразовать к другому виду

$$\tilde{W} = \frac{1}{2} \int \rho_{ext} \varphi dV \tag{8.56}$$

(см. раздел 2.1).
Приращение энергии при малых смещениях элементов среды представим в виде

$$\delta \tilde{W} = \frac{1}{2} \int \varphi \delta \rho_{ext} dV + \frac{1}{2} \int \delta\varphi \rho_{ext} dV$$

и в виде

$$\begin{aligned} \delta \dot{W} = \frac{1}{8\pi} \int E^2 \delta\varepsilon dV + \frac{1}{4\pi} \int \boldsymbol{D} \cdot \delta \boldsymbol{E} dV = \\ = \frac{1}{8\pi} \int E^2 \delta\varepsilon dV + \frac{1}{4\pi} \int \nabla \cdot \boldsymbol{D} \delta\varphi dV - \frac{1}{4\pi} \int\limits_{S\to\infty} \delta\varphi \boldsymbol{D} \cdot d\boldsymbol{S} \end{aligned}$$

где символом δ обозначено малое изменение соответствующей величины в данной точке пространства (локальное изменение). Интеграл по бесконечно удаленной поверхности в последнем равенстве обращается в нуль для конечной системы. В итоге получаем

$$\delta W = 2\delta \tilde{W} - \delta W = -\frac{1}{8\pi} \int E^2 \delta\varepsilon dV + \int \varphi \delta \rho_{ext} dV \tag{8.57}$$

Рассматриваем величину $\varepsilon(\tau)$ как функцию плотности массы (второй аргумент - температура или энтропия - постоянен). Имеем

$$\delta\varepsilon = (\partial\varepsilon/\partial\tau)\delta\tau \tag{8.58}$$

причем локальное изменение плотности складывается из двух частей: за счет перемещения в данную точку элемента среды с другой плотностью $\tau(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{u}) \approx \tau(\boldsymbol{r}) - \boldsymbol{u} \cdot \nabla\tau$ и за счет его сжатия или расширения при перемещении. Малые добавки аддитивны. Второе изменение плотности выражается через дивергенцию вектора деформации:

$$\delta'\tau = -\tau \frac{\delta' V}{V} = -\tau \frac{\oint u_n dS}{V} = -\tau \operatorname{div} \boldsymbol{u}$$

Объединяя оба результата, получаем

$$\delta\tau = -\tau \nabla \cdot \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u} \cdot \nabla\tau = -\nabla \cdot (\tau \boldsymbol{u}) \tag{8.59}$$

Точно такое же изменение испытает плотность сторонних зарядов:

$$\delta\rho_{ext} = -\nabla \cdot (\rho_{ext} u) \tag{8.60}$$

Подставив (8.58)-(8.60) в (8.57), получим

$$\delta W = -\frac{1}{8\pi}\int E^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau}\,\mathrm{div}(\tau \boldsymbol{u}) dV + \int \varphi\,\mathrm{div}\,(\rho_{exs} u)\,dV$$

Использование тождества (1.85) и теоремы Остроградского-Гаусса позволяет представить правую часть в форме (8.54), где

$$\boldsymbol{f} = \rho_{ext}\boldsymbol{E} - \frac{1}{8\pi}E^2\nabla\varepsilon + \frac{1}{8\pi}\nabla\left(E^2\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\tau\right) \tag{8.61}$$

Первое слагаемое представляет собой силу, действующую на сторонние заряды в диэлектрике. Второе слагаемое связано с неоднородностью самого диэлектрика. Третий член не дает вклада в полную силу, действующую на диэлектрическое тело, но влияет на распределение в нем внутренних напряжений (электрострикция).

Формула (8.61) применима только к жидким и газообразным диэлектрикам, у которых изменение диэлектрических свойств связано с изменением плотности. У твердых диэлектриков возможны деформации сдвигового характера, не вызывающие изменения плотности, но приводящие к изменению электрических свойств, которые здесь не учтены. Кроме того, полученная формула дает лишь силу, вызванную электрическим полем. В неподвижной жидкости действует еще сила гидростатического давления $-\nabla p_0(\tau, T)$, которую нужно добавить к (8.61) для получения полной силы. Величина p_0 - давление в жидкости.

Тензор напряжений. Объемные силы, действующие на сторонние и связанные заряды в некотором объеме V, можно заменить эквивалентной системой поверхностных напряжений, приложенных к поверхности S этого объема:

$$\boldsymbol{F} = \int\limits_V \boldsymbol{f} dV = \oint\limits_S \vec{\sigma}_{\boldsymbol{n}} dS \tag{8.62}$$

где $\vec{\sigma}_{\boldsymbol{n}}$ - поверхностная сила, приложенная к единичной площадке с внешней нормалью $\boldsymbol{n}$. Поверхностные напряжения описываются тензором напряжений $\sigma_{\mu\nu}$, а величина $\vec{\sigma}_n$ представляет собой проекцию $\sigma_{\mu\nu}$ на направление внешней нормали $\boldsymbol{n}$ к элементу dS : $\left(\vec{\sigma}_{\boldsymbol{n}}\right)_\mu = \sigma_{\mu\nu} n_\nu$.

Преобразование от $\boldsymbol{f}$ к $\sigma_{\mu\nu}$ легко осуществить, воспользовавшись тождеством (1.275) и (8.62):

$$\int\limits_V f_\mu dV = \oint\limits_S \sigma_{\mu\nu} n_\nu dS = \int\limits_V \frac{\partial \sigma_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} dV$$

откуда следует

$$f_\mu = \frac{\partial \sigma_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} \tag{8.63}$$

Тензор напряжений строится на основе (8.63) и (8.61). Он имеет вид

$$\sigma_{\mu\nu} = \frac{\varepsilon}{4\pi}E_\mu E_\nu - \frac{1}{8\pi}E^2\left(\varepsilon - \frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\tau\right)\delta_{\mu\nu} \tag{8.64}$$

и представляет собой обобщение на случай наличия диэлектрика максвелловского тензора напряжений, определенного равенством (4.131) при $H = 0$. Для учета гидростатического давления нужно добавить к (8.64) слагаемое $p_0\delta_{\mu\nu}$.

Член в (8.61), (8.64), содержащий производную от диэлектрической проницаемости по плотности (стрикционный член), вообще говоря, не мал. Однако, при вычислении

равнодействующей сил, приложенных к диэлектрическому телу, этот член не дает вклада и может быть отброшен (подробности см. в [Тамм (1976)], & 34). В этом случае можно использовать более простой (максвелловский) тензор

$$\vec{\sigma}'_n = \frac{\varepsilon}{4\pi}\left(E_n\boldsymbol{E} - \frac{1}{2}E^2\boldsymbol{n}\right) \tag{8.65}$$

На поверхности проводника $\boldsymbol{E}\|\boldsymbol{n}$, поэтому

$$\boldsymbol{f}_s = \vec{\sigma}_n = \boldsymbol{n}\frac{\varepsilon E^2}{8\pi} \tag{8.66}$$

Пример 8.8. Записать условие равновесия плоской границы между атмосферой ($\varepsilon = 1$) и жидким диэлектриком, в котором имеется электростатическое поле E.

Решение. Силы, приложенные к поверхности с двух сторон, должны быть равны по величине и противоположны по направлениям: $(\sigma_{\mu\nu} + \ + p_0\delta_{\mu\nu})\, n_\nu = -\left(\sigma'_{\mu\nu} + p_{atm}\delta_{\mu\nu}\right) n'_\nu$, где $\boldsymbol{n}' = -\boldsymbol{n}$. Кроме того, имеем граничные условия для компонент поля: $\boldsymbol{E}'_t = \boldsymbol{E}_t, E'_n = \varepsilon E_n$. Из этих равенств находим

$$p_0(\tau, T) - p_{atm} = -\frac{\varepsilon - 1}{8\pi}\left(\varepsilon E_n^2 + E_t^2\right) + \frac{\tau E^2}{8\pi}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau} \tag{8.67}$$

Сегнетоэлектрики. Выше рассматривалось возникновение электрической поляризации в диэлектрике под действием внешних зарядов или внешнего электрического поля. В некоторых ионных кристаллах поляризация возникает при их деформациях (растяжении или сжатии в определенных направлениях). Это явление называется пьезоэлектрическим эффектом.

К числу пьезоэлектриков относятся турмалин, винная кислота, сегнетова соль, титанат бария и др. У некоторых пьезоэлектриков поляризация наблюдается и в отсутствие внешних нагрузок, а также внешнего электрического поля. Такие вещества, обладающие спонтанной поляризацией, называются пироэлектриками (турмалин - один из самых известных пироэлектриков).

Наиболее важным классом пироэлектриков являются сегнетоэлектрики, которые обладают следующими основными особенностями.

1. Имеют спонтанную поляризацию в определенной области температур. В этой области диэлектрик находится в такой кристаллической модификации (упорядоченной фазе), которая характеризуется некоторой спонтанной поляризацией. Температуры перехода из упорядоченной фазы в неупорядоченную называются диэлектрическими температурами Кюри T_C. Так, титанат бария $BaTiO_3$ имеет спонтанную поляризацию при $T < T_C = 393$ K $= 120°$C; сегнетова соль $NaKC_4H_4O_6 \cdot 4H_2O$ имеет две точки Кюри, $T_{C1} = 255K = -18°C, T_{C2} = 297K = 24°$C и обладает спонтанной поляризацией при температурах $T_{C1} < T < T_{C2}$.

2. Переход из неупорядоченной в упорядоченную фазу может быть фазовым переходом второго или первого рода. В первом случае спонтанная поляризация нарастает плавно по мере удаления от температуры Кюри, во втором случае она возникает скачком.

3. Прямая, параллельная направлению спонтанной поляризации в сегнетоэлектрике, называется полярной осью. Полярных осей у сегнетоэлектрика может быть одна (сегнетова соль) или несколько (титанат бария). Приложением внешнего поля вдоль полярной оси направление поляризации можно изменить на противоположное.

4. Вблизи температуры Кюри диэлектрическая проницаемость аномально велика (до 10^4). Зависимость индукции D от электрического поля нелинейна и неоднозначна.

5. Сегнетоэлектричество - достаточно распространенное явление, которое находит все более широкие практические применения. Известны многие десятки сегнетоэлектрических веществ.

Основные свойства сегнетоэлектриков можно объяснить на основе феноменологической термодинамики. Начнем с рассмотрения спонтанной поляризации на основе теории Л. Д. Ландау (см. [Ландау и Лифшиц, Статистическая физика]) фазовых переходов второго рода. Для анализа свойств сегнетоэлектриков эту теорию применил В. Л. Гинзбург [3] ([Гинзбург (1949)],

см. также [Гинзбург (2001)]). Анализ основан на предположении, что удельный термодинамический потенциал Гиббса Ф вблизи точки Кюри и в отсутствие внешнего электрического поля можно представить в виде разложения по четным степеням вектора поляризации
$$

$$\Phi(p,T,P) = \Phi_0(p,T) + \frac{1}{2}\alpha(p,T)P^2 + \frac{1}{4}\beta(p,T)P^4 \tag{8.68}$$

$$

где высшими степенями пренебрегается, а диэлектрик предполагается изотропным. Величина P представляет собой проекцию вектора поляризации на полярную ось и должна входить в четных степенях, поскольку энергия изотропного тела не может зависеть от направления $\boldsymbol{P}$. Поляризация в данном случае играет роль «параметра порядка», отличного от нуля в упорядоченной фазе. Ее равновесное значение при заданном давлении p и температуре T определяется из условия минимума термодинамического потенциала

$$\frac{\partial \Phi}{\partial P} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial P^2} > 0 \tag{8.69}$$

В применении к (8.68) условия (8.69) дают

$$P\left(\alpha + \beta P^2\right) = 0, \quad \alpha + 3\beta P^2 > 0 \tag{8.70}$$

Теперь рассматриваем две области температур. При $T > T_C$ (неупорядоченная фаза) равновесная поляризация $P = 0$, и из (8.70) следует $\alpha > 0$. При $T < T_C$ (упорядоченная фаза) находим из (8.70) равновесное значение поляризации:

$$P_0^2 = -\frac{\alpha}{\beta} > 0, \quad \alpha < 0, \quad \beta > 0 \tag{8.71}$$

Чтобы равновесная поляризация отсутствовала в неупорядоченной фазе, необходимо считать $\beta > 0$ и при $T > T_C$. Таким образом, вблизи температуры Кюри ($|T - T_C| << T_C$) зависимость коэффициентов разложения α, β от температуры выглядит следующим образом:

$$\alpha(p,T) \approx a(p)\left(T - T_C\right), \quad \beta(p,T) \approx \beta\left(p, T_C\right) = \text{ const.} \tag{8.72}$$

Эти соотношения позволяют найти температурную зависимость спонтанной поляризации вблизи температуры Кюри:

[03] Виталий Лазаревич Гинзбург (1916) - выдающийся советский физик-теоретик, получивший важные результаты в теории сегнетоэлектричества, сверхтекучести и сверхпроводимости,

$$P_0^2 = \frac{a}{\beta}\left(T_C - T\right), \quad T < T_C \tag{8.73}$$

классической и квантовой электродинамике, физике космических лучей, физике плазмы, радиоастрономии, астрофизике и др. За работы по сверхтекучести и сверхпроводимости (см. раздел 9.4) ему присуждена в 2003 г. Нобелевская премия.

Зависимость термодинамического потенциала Гиббса от поляризации, иллюстрирующая возникновение спонтанной поляризации, приведена на рис. 8.9.

Для вычисления диэлектрической восприимчивости включим внешнее электрическое поле, которое добавит к плотности термодинамического потенциала (8.68) слагаемое $-PE$:

$$\Phi(p,T,P) = \Phi_0(p,T) + \frac{1}{2}\alpha(p,T)P^2 + \frac{1}{4}\beta(p,T)P^4 - PE \tag{8.74}$$

Условия равновесия сегнетоэлектрика (8.69) во внешнем поле принимают вид

$$P\left(\alpha + \beta P^2\right) - E = 0, \quad \alpha + 3\beta P^2 > 0 \tag{8.75}$$

При $T > T_C$ спонтанная поляризация отсутствует, и в слабом поле можно пренебречь кубическим членом: $P = E/\alpha = (\varepsilon - 1)E/4\pi$, откуда

$$\varepsilon \approx \frac{C}{T - T_C} \tag{8.76}$$

Здесь $C = 4\pi/a$ - константа Кюри, а зависимость (8.76) от температуры называется законом Кюри-Вейсса. Константа

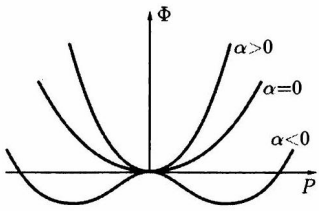


Рис. 8.9

Кюри лежит в пределах $10^3 - 10^5$, поэтому диэлектрическая проницаемость вблизи температуры Кюри весьма велика.

В упорядоченной фазе ($T < T_C$) при наличии внешнего поля полная поляризация зависит от поля согласно первому уравнению (8.75):

$$E = \alpha P + \beta P^3 \tag{8.77}$$

График этой зависимости приведен на рис. 8.10.

Участок ab на кривой $P(E)$ соответствует неустойчивому состоянию. На этом участке, как видно из рисунка, $dE/dP < 0$, тогда как минимум термодинамического потенциала имеет место при $dE/dP > 0$, что совпадает со вторым условием (8.75). Из рисунка видно также, что

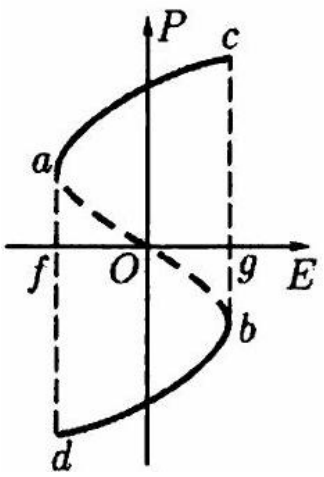


Рис. 8.10 при уменьшении поля E и изменении его знака поляризация P меняет знак не сразу, а при достижении полем некоторой конечной
величины, которая определяется точками f и g. Изменение направления поляризации происходит скачком (переход из точки a в точку d и из точки b в точку c).

В слабом поле E нетрудно выделить ту часть поляризации P_{ind} , которая создается полем. Записываем $P = P_0 + P_{\text{ind}}$, $P_{\text{ind}} \ll P_0$, где $P_0 = -\alpha/\beta$, и находим из (8.76) $P_{\text{ind}} = -E/2\alpha$. Из сравнения с аналогичной формулой для неупорядоченной фазы следует, что диэлектрическая восприимчивость в точке Кюри испытывает скачок и уменьшается в два раза при переходе в упорядоченную фазу.

Как уже отмечалось, существуют такие сегнетоэлектрики, у которых спонтанная поляризация возникает скачком при некоторой температуре T_0, а значение температуры T_C, при которой диэлектрическая проницаемость имеет особенность, на несколько градусов ниже T_0. Такие случаи интерпретируются как фазовые переходы первого рода, и их оказывается возможным объяснить путем некоторой модификации изложенной выше теории.

Пусть параметр $\beta < 0$ в разложении (8.74). Среда с такой свободной энергией Гиббса становится неустойчивой относительно спонтанного роста P при всех температурах, при которых выполняется указанное неравенство, и использованное разложение становится некорректным. Его нужно продолжить,

$$\Phi(p, T, P) = \Phi_0(p, T) + \frac{1}{2}\alpha(p, T)P^2 + \frac{1}{4}\beta(p, T)P^4 + \frac{1}{6}\gamma(p, T)P^6 - PE \qquad (8.78)$$

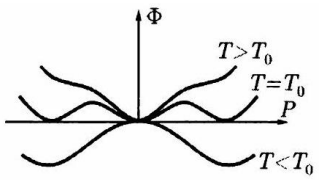


Рис. 8.11

причем нужно потребовать выполнения неравенства $\gamma > 0$ (разложение ГинзбургаДевоншира). Для того, чтобы при некоторой температуре T_0 скачком возникла спонтанная поляризация, требуется поведение термодинамического потенциала как функции температуры и поляризации, схематически изображенное на рис. 8.11. Кривая при $T = T_0$ имеет три минимума одинаковой глубины, что означает возможность существования при этой температуре трех равновесных значений поляризации, $P_0 = 0$ и $\pm P_0 \neq 0$. Спонтанная поляризация в точке фазового перехода должна удовлетворять условию

$$\alpha + \frac{1}{2}\beta P_0^2 + \frac{1}{3}\gamma P_0^4 = 0 \tag{8.79}$$

вытекающему из (8.78), и условию экстремума

$$\frac{\partial \Phi}{\partial P} = P_0\left(\alpha + \beta P_0^2 + \gamma P_0^4\right) = 0 \tag{8.80}$$

Исключив из двух последних равенств γP_0^4, находим

$$P_0^2 = -\frac{4\alpha}{\beta} > 0, \quad \gamma = \frac{3\beta^2}{16\alpha} \tag{8.81}$$

Поскольку $\beta < 0$, то должно быть $\alpha > 0$ в точке фазового перехода. Таким образом, при переходе из области $T > T_0$ в область $T < T_0$ поляризация скачком меняется от нуля до значения $\sqrt{3|\beta|/4\gamma}$. Скачок диэлектрической проницаемости при фазовом переходе вычисляется в задаче 8.85 .

Остановимся на недостатках и ограничениях изложенной теории сегнетоэлектриков. Она является феноменологической и не позволяет вычислить коэффициенты разложения α, β, γ. Теорию, устанавливающую их связь с микроскопическими параметрами вещества, можно найти в книгах [Вакс (1973), Блинц и Жекш (1975)]. Рассмотренная теория применима вблизи точки фазового перехода, но не слишком близко к ней. Причиной последнего ограничения является наличие флуктуаций поляризации, которые не должны превосходить ее среднего значения $\overline{P_0}$. Именно с этим средним значением мы и имели дело в изложенной термодинамической теории. Наконец, сегнетоэлектрик достаточно больших размеров в отсутствие внешнего поля разбивается на области с противоположной поляризацией домены. Выше рассматривались только однодоменные сегнетоэлектрики.

Рекомендуемая литература: [Ландау и Лифшиц, Статистическая физика; Кубо (1970); Бредов и др., Классическая электродинамика; Сивухин, Электричество; Тода и др. (1983); Батыгин и Топтыгин (2002); Барфут (1970); Струков и Леванюк (1995); Лайнс и Гласс (1981); Галицкий и Ермаченко (1988)].

Задачи

8.70. Формула (8.45) дает изменение плотности внутренней энергии теплоизолированного тела при включении электрического поля. При этом температура тела может изменяться. Вычислить изменение плотности внутренней энергии при изотермическом ($T = \text{const}$) процессе. Изменениями объема и плотности массы пренебречь.

8.71. Вычислить теплоту Q на единицу объема, которую получает или отдает диэлектрик при изотермическом изменении поля от 0 до E.

8.72. Записать плотности термодинамических функций для анизотропного диэлектрика с линейным уравнением связи $D_\mu = \varepsilon_{\mu\nu} E_\nu$. Исходя из термодинамических соотношений, доказать, что тензор диэлектрической проницаемости анизотропного диэлектрика симметричен, $\varepsilon_{\mu\nu} = \varepsilon_{\nu\mu}$.

8.73. Вычислить производную dT/dD^2, характеризующую изменение температуры теплоизолированного диэлектрика при его поляризации (электрокалорический эффект). Изменением плотности пренебречь.

8.74. В газообразном диэлектрике, состоящем из жестких дипольных молекул, электрическое поле адиабатически нарастает от нуля до E. Вычислить изменение температуры $T_2 - T_1$ (в градусах Кельвина) с помощью диэлектрической проницаемости (7.34). Оценить по порядку величины эффект охлаждения $\Delta T/T$ для газа при

нормальных условиях.

8.75. Пусть в изотропной диэлектрической среде с проницаемостью ε_1 создано поле $\boldsymbol{E}_1$. Затем в эту среду внесено незаряженное диэлектрическое тело объемом V с диэлектрической проницаемостью ε_2. Показать, что внутренняя энергия системы изменится на величину

$$U = \frac{1}{8\pi} \int\limits_V (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\, \boldsymbol{E}_1 \cdot \boldsymbol{E}_2 dV \tag{8.82}$$

где $\boldsymbol{E}_2$ - электрическое поле после внесения тела. Величину U можно рассматривать как энергию взаимодействия диэлектрического тела с внешним полем.

8.76. Вычислить изменение теплоемкости диэлектрика при постоянном объеме и электрической индукции $C_{VD} - C_{V0}$ за счет включения электрического поля. Сравнить эту разность с разностью $C_{VE} - C_{V0}$, считая уравнение связи между D и E линейным.

8.77. Вычислить разность удельных теплоемкостей диэлектрика C_E - $-C_D$, не предполагая линейного характера зависимости между D и E. При этом остаются фиксированными также либо объем V, либо давление p.

8.78. Доказать, что удельные теплоемкости диэлектрика могут быть представлены формулами

$$C_D = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_D, \quad C_E = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_E - E\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_D$$

где P - удельный дипольный момент диэлектрика, а индексы указывают, какой параметр остается постоянным.

8.79. В нелинейном случае диэлектрическая восприимчивость $\alpha = \partial P/\partial E$ зависит от условий процесса поляризации: остается ли диэлектрик теплоизолированным, или он находится в контакте с термостатом, поддерживающим его при постоянной температуре. Найти связь между адиабатической и изотермической восприимчивостями:

$$\alpha_S = \frac{C_P}{C_E}\alpha_T$$

где теплоемкости C_P, C_E соответствуют постоянству поляризации и электрического поля.

Указание. Применить метод якобианов.

8.80ˆ. Диэлектрическое тело поляризуется в воздухе во внешнем однородном электрическом поле $\mathscr{E}$, причем форма тела такова, что электрическое поле E внутри тела тоже остается однородным. Считая процесс поляризации изотермическим и изобарическим, вычислить изменение объема тела $\Delta V \ll V$ («электрострикция»), выразив его через поляризуемость, сжимаемость и внешнее поле.

8.81. В условиях предыдущей задачи вычислить теплоту Q, приобретаемую телом в процессе поляризации.

8.82. Пусть в жидком диэлектрике электрическое поле возрастает изотермически от нуля до заданного значения E. Показать с помощью формулы (8.61), что в пренебрежении изменением плотности давление увеличивается на величину:

$$p - p_0 = \frac{\tau E^2}{8\pi}\frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} \tag{8.83}$$

8.83. Вычислить плотность электрической силы f, действующей в однородном незаряженном газообразном диэлектрике. Воспользоваться формулой (7.34) для диэлектрической проницаемости газа.

8.84. Сделать то же самое, использовав для диэлектрической проницаемости формулу

(7.37).

8.85. Пользуясь разложением (8.78), вычислить скачок диэлектрической проницаемости сегнетоэлектрика при фазовом переходе первого рода. Найти связь между температурами T_0 и T_C.

8.86. а) С какой силой f_0 на единицу площади притягиваются друг к другу в вакууме обкладки плоского конденсатора, если расстояние между ними a, разность потенциалов V; б) какое новое значение f примет эта сила, если заряженный конденсатор отделить от батареи, а потом либо наполнить его жидким диэлектриком с проницаемостью ε, либо вставить в него плитку из твердого диэлектрика с тем же ε, толщина которой чуть-чуть меньше a, так что она не касается обкладок; в) какова будет сила f притяжения обкладок, если сначала либо залить конденсатор жидким диэлектриком, либо вставить в него плитку из диэлектрика, а потом зарядить?

8.87. Обкладки плоского конденсатора находятся на расстоянии h_1 друг от друга и имеют форму прямоугольников со сторонами a и b. Между пластинами параллельно им помещена плитка из диэлектрика ε, имеющая форму параллелепипеда с толщиной h_2 и основанием $a \times b$. Плитка не полностью вставлена в конденсатор - внутри него находится часть x стороны a. Найти силу F, с которой плитка втягивается в конденсатор, в двух случаях: а) на обкладках поддерживается постоянная разность потенциалов V; б) постоянен заряд q обкладок. Краевые эффекты не учитывать.

8.88ˆ. Плоский конденсатор погружен в несжимаемую жидкость с диэлектрической проницаемостью ε и плотностью τ так, что его обкладки расположены вертикально. Расстояние между ними d, разность потенциалов V. Определить высоту h поднятия жидкости в конденсаторе.

Указание. Применить формулу (8.67).

8.89. Как направлено максвеллово натяжение σ'_n, действующее на площадку dS, нормаль $\boldsymbol{n}$ к которой составляет угол ϑ с направлением поля $\boldsymbol{E}$? Какова величина σ'_n? Как направлено стрикционное натяжение σ''_n?

8.90. Два одинаковых точечных заряда q находятся в однородном жидком диэлектрике ε на расстоянии a друг от друга. Вычислить с помощью максвеллова или полного тензора натяжений силу $\boldsymbol{F}$, действующую на каждый из зарядов. Выяснить, из каких составляющих складывается сила электрического взаимодействия зарядов $q^2/a^2\varepsilon$. Для сравнения вычислить силы, приложенные: а) к плоскости симметрии, перпендикулярной линии, соединяющей заряды; б) к поверхности малой сферы, в центре которой находится один из зарядов.

8.91. Незаряженная проводящая сфера радиуса R с массой m плавает в жидкости с диэлектрической проницаемостью ε и плотностью τ, погрузившись в нее на четверть своего объема. До какого потенциала φ_0 нужно
зарядить сферу, чтобы она погрузилась наполовину? Решить задачу: а) с использованием тензора натяжений Максвелла; б) с использованием полного тензора натяжений, включающего стрикционный член.

8.92. Найти силу F, приложенную к точечному заряду в задаче 8.8 (сила электрического изображения). Решить задачу несколькими способами, в частности, с помощью тензора натяжений Максвелла. Если заряд способен двигаться через диэлектрики, описать качественно характер этого движения.

8.93*. Два однородных диэлектрика с проницаемостями ε_1 и ε_2 заполняют все пространство, соприкасаясь вдоль бесконечной плоскости. Два заряда q_1 и q_2 находятся на прямой, перпендикулярной к этой плоскости, на равных расстояниях a по разные стороны от нее. Найти силы F_1 и F_2, действующие на каждый из зарядов. Чем объясняется неравенство этих сил?

8.94. Точечный заряд q находится в однородном диэлектрике на расстоянии a от плоской

границы бесконечно протяженного проводника. Найти электрическое поле φ в диэлектрике, распределение σ индуцированных зарядов на металле и силу F, действующую на заряд q.

8.95. Электрический диполь с моментом $\boldsymbol{p}$ находится в однородном диэлектрике вблизи плоской границы бесконечно протяженного проводника. Найти потенциальную энергию взаимодействия U диполя с индуцированными зарядами, силу $\boldsymbol{F}$ и вращательный момент N, приложенные к диполю.

8.96*. Два одинаковых точечных заряда $q_1 = q_2 = q$ находятся на расстоянии a друг от друга в твердом диэлектрике с проницаемостью ε_1. Заряды расположены в центрах малых сферических полостей радиуса R. Найти силы, действующие на заряды. Сравнить с электрическими натяжениями, приложенными к плоскости симметрии, перпендикулярной линии, соединяющей заряды.

8.97*. Диэлектрический шар радиуса R с проницаемостью ε_1 находится в однородном диэлектрике с проницаемостью ε_2. На расстоянии $a > R$ от центра шара расположен точечный заряд q. Найти поле φ во всем пространстве и получить соответствующим предельным переходом поле проводящего шара; найти также силу, действующую на заряд q вследствие созданной им поляризации шара. Как изменится эта сила, если поместить симметрично относительно центра диэлектрического шара другой такой же точечный заряд?

8.98*. Изолированная металлическая сфера радиуса a находится внутри полой металлической сферы радиуса b. Расстояние между центрами сфер равно c, причем $c \ll a, c \ll b$. Полный заряд внутренней сферы равен q. Определить распределение заряда σ на внутренней сфере и действующую на нее силу F с точностью до членов, линейных по c.

8.99. Найти энергию U и силу F взаимодействия точечного заряда q с заземленным проводящим шаром радиуса R. Заряд находится на расстоянии a от центра шара. Система помещена в однородную диэлектрическую среду с проницаемостью ε.

8.100. Точечный заряд q находится в диэлектрике на расстоянии a от центра проводящей изолированной сферы радиуса R. Заряд сферы Q. Найти энергию U и силу F взаимодействия заряда со сферой.

8.101. Каким условиям должен удовлетворять пробный заряд q (в смысле его величины и положения в пространстве), чтобы можно было с его помощью исследовать поле системы зарядов, находящихся на проводящих и диэлектрических телах, в частности, поле заряженного шара в однородном диэлектрике?

8.102^. Электрический диполь $\boldsymbol{p}$ находится в однородном диэлектрике на расстоянии r от центра заземленного проводящего шара радиуса R. Найти систему изображений, эквивалентную индуцированным зарядам, энергию взаимодействия U диполя с шаром, силу F и вращательный момент N, приложенные к диполю. Рассмотреть предельный случай $r \to R$ $(r > R)$.

8.103. В проводнике вырезана сферическая полость радиуса R. В центре полости находится электрический диполь с моментом p. Найти распределение σ зарядов, индуцированных на поверхности полости. Какое поле $\boldsymbol{E}'$ создается в полости этими зарядами?

8.104*. В однородном диэлектрике с проницаемостью ε имеется электрическое поле, потенциал которого в окрестности некоторой точки O может быть представлен в виде

$$\varphi_1 = \sum_{l,m} \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} a_{lm} r^l Y_{lm}(\vartheta, \alpha)$$

Пусть затем в окрестности точки O нарушена однородность и нейтральность диэлектрика (например, туда помещен проводник, вообще говоря, заряженный, или

диэлектрик с проницаемостью $\varepsilon_1 \neq \varepsilon$). Вследствие
этого, потенциал электрического поля вне области неоднородности примет теперь вид $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, где

$$\varphi_2 = \sum_{l,m} \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \varepsilon^{-1} r^{-(l+1)} Q_{lm} Y_{lm}(\vartheta, \alpha)$$

- потенциал поля, вызванного свободными и связанными зарядами в области неоднородности (множитель ε введен для удобства). Найти потенциальную энергию U взаимодействия области неоднородности с внешним полем φ_1.

Указание. Рассмотреть электрические натяжения, действующие на замкнутую поверхность, охватывающую область неоднородности. Использовать результат задачи 2.66

8.105. Найти энергию взаимодействия со слабо меняющимся внешним полем U_0 малой области неоднородности в диэлектрике (см. предыдущую задачу). Вследствие быстрой сходимости достаточно ограничиться членами с $l = 0$ и 1 . Результат представить в векторной форме. Найти в этом приближении силу $\boldsymbol{F}$ и вращательный момент $\boldsymbol{N}$, приложенные к области неоднородности.

8.106. Показать, что незаряженное диэлектрическое тело с проницаемостью ε_0, находящееся в диэлектрике с проницаемостью ε, втягивается в область с большей напряженностью электрического поля, если $\varepsilon_0 > \varepsilon$, и выталкивается из этой области, если $\varepsilon_0 < \varepsilon$.

Указание. Использовать формулу (8.82).

8.107. В общем случае компоненты дипольного момента p, приобретенного диэлектрическим телом во внешнем однородном поле $\boldsymbol{E}$, можно представить в виде $p_i = \beta_{ik} E_k$, где β_{ik} - симметричный тензор поляризуемости тела. Какую ориентацию стремится занять это тело во внешнем однородном поле? Тело не заряжено, $\beta_{ik} x_i x_k > 0, x_i (i = 1, 2, 3)$ - произвольный вектор.

8.108. Стержень из диэлектрика с проницаемостью ε_1 погружен в однородную жидкую диэлектрическую среду с проницаемостью ε_2. Какую он займет ориентацию, если систему поместить в однородное внешнее поле? Какую ориентацию займет тонкий диск, находящийся в жидком диэлектрике?

8.109. Найти силу F, действующую на диэлектрический шар со стороны точечного заряда q (см. условие задачи 8.97*).

Рассмотреть предельный случай проводящего шара. Решить задачу двумя способами: методом задачи 8.104$\hat{}$ и с помощью формулы (8.82).

8.110. Собственные емкости двух проводников, находящихся в однородном диэлектрике, C_1 и C_2, расстояние между проводниками r много больше их размеров. Найти действующую между ними силу F, если поддерживаются постоянными либо их потенциалы V_1 и V_2, либо заряды q_1 и q_2.

8.111. Два одинаковых сферических конденсатора с радиусами внутренних и внешних обкладок, соответственно a и b, изолированы и находятся на большом расстоянии r друг от друга. Внутренним сферам сообщены заряды q и q_1, после чего внешние сферы соединяются проволокой. Найти (приближенно) изменение ΔW энергии системы.

8.112. Заземленная внешняя обкладка сферического конденсатора имеет малую толщину. В ней проделано небольшое отверстие, через которое проходит изолированный провод, соединяющий внутреннюю обкладку конденсатора с третьим проводником, находящимся на большим расстоянии r от конденсатора. Собственная емкость этого проводника C и вместе с внутренней обкладкой конденсатора он несет заряд q. Радиус внешней обкладки конденсатора b, радиус внутренней обкладки a. Найти силу F,

действующую на третий проводник.
8.113*. Для удаления одной заряженной частицы из проводника требуется затратить некоторую работу $A > 0$, которая называется работой выхода и зависит как от рода проводника и его термодинамического состояния, так и от рода частицы (электрон, ион).

1. Выразить работу выхода через поверхностную плотность κ дипольного момента, образующего двойной электрический слой на поверхности проводника (двойной электрический слой рассмотрен в примере 2.6 и задача 2.42, 2.43).

2. Выразить разность потенциалов $\varphi_b - \varphi_a$, которая установится между двумя проводниками при их соприкосновении, через их работы выхода A_a, A_b.

3. Выразить через работы выхода двух проводников A_a, A_b электростатический потенциал φ и электрическое поле внутри двугранного угла γ, образованного указанными проводниками. Проводники находятся в вакууме и соприкасаются вдоль бесконечной полуплоскости (см. рис. 8.32).
   8.114. Плоский конденсатор имеет обкладки в виде дисков радиусом a с расстоянием $h \ll a$ между ними и заполнен диэлектриком с проницаемостью ε. Заряд $q(t)$ на обкладках медленно изменяется. Пренебрегая
   краевым эффектом, вычислить изменение dW/dt электростатической энергии конденсатора и показать, что это изменение совпадает с потоком вектора Пойнтинга через боковую поверхность.

Указание. Вычислить магнитное поле в конденсаторе с помощью уравнения Максвелла (11.12) и соображений симметрии.

11.2.4 8.4. Answers and Solutions

8.1.

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \frac{2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}\frac{q}{r}, \quad \boldsymbol{D}_1 = \frac{2\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}\frac{q\boldsymbol{r}}{r^3}, \quad \boldsymbol{D}_2 = \frac{2\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}\frac{q\boldsymbol{r}}{r^3}$$

8.2.
$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \frac{2\pi}{\varepsilon_1\alpha_1 + \varepsilon_2\alpha_2 + \varepsilon_3\alpha_3}\frac{q}{r}, \quad \boldsymbol{D}_i = \frac{2\pi\varepsilon_i}{\varepsilon_1\alpha_1 + \varepsilon_2\alpha_2 + \varepsilon_3\alpha_3}\frac{q\boldsymbol{r}}{r^3}.$
8.3. Граничным условиям ($\varphi = \text{const}$ на поверхности проводника и $\varphi = 0$ при $r \to \infty$) можно удовлетворить потенциалом вида $\varphi = C/r$; постоянная C определяется из условия $\oint D_n dS = 4\pi q, C = 2/(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$. От$\int\limits_S$ сюда находим потенциал $\varphi = 2q/(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\, r$ и распределение поверхностных зарядов:

$$\sigma_1 = \frac{q\varepsilon_1}{2\pi a^2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}, \quad \sigma_2 = \frac{q\varepsilon_2}{2\pi a^2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}$$
$$\sigma_{1\text{ int}} = \frac{q(\varepsilon_1 - 1)}{2\pi a^2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}, \quad \sigma_{2int} = \frac{q(\varepsilon_2 - 1)}{2\pi a^2(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}$$

8.4.

$$C = \left[\frac{(\varepsilon - 1)\Omega}{4\pi} + 1\right]\frac{ab}{b - a}$$

8.5.

$$C = \left[\frac{1}{\varepsilon_1}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{c}\right) + \frac{1}{\varepsilon_2}\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{b}\right)\right]^{-1}$$

Связанные заряды находятся в местах неоднородности диэлектрика т. е. на сферах радиусов a, b, c:
$\sigma_{a\ \mathrm{int}} = -\frac{q}{4\pi a^2}\cdot\frac{\varepsilon_1-1}{\varepsilon_1}, \sigma_{b\ \mathrm{int}} = -\frac{q}{4\pi b^2}\cdot\frac{\varepsilon_2-1}{\varepsilon_2}, \sigma_{c\ \mathrm{int}} = -\frac{q}{4\pi c^2}\left(\frac{1}{\varepsilon_2}-\frac{1}{\varepsilon_1}\right)$,
где q - заряд внутренней обкладки конденсатора.
Полный связанный заряд в конденсаторе равен нулю.
8.7. Емкость конденсатора

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{4\pi a \ln 2}$$

Поверхностная плотность связанных зарядов

$$\sigma_{\mathrm{int}} = -\sigma\left(1 - 1/\varepsilon_0\right) \quad \text{при} \quad x = 0,$$
$$\sigma_{\mathrm{int}} = \sigma\left(1 - 1/2\varepsilon_0\right) \quad \text{при} \quad x = a.$$

Объемная плотность $\rho_{\mathrm{int}} = -\sigma a/\varepsilon_0(x+a)^2$ (σ - заряд обкладки при $x = 0$).
8.8. При $z \geqslant 0$:

$$\varphi = \varphi_1 = \frac{q}{\varepsilon_1 r_1} + \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{\varepsilon_1(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}\frac{q}{r_2}$$

при $z \leqslant 0$:

$$\varphi = \varphi_2 = \frac{2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}\frac{q}{r_1}$$

8.9.
$\sigma_{int} = \frac{1}{4\pi}\left[(\varepsilon_2 - 1)\frac{\partial\varphi_2}{\partial z} - (\varepsilon_1 - 1)\frac{\partial\varphi_1}{\partial z}\right]\Big|_{z=0} = \frac{qa}{2\pi r^3}\frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{\varepsilon_1(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}$,
где $r = \sqrt{x^2+y^2+a^2} = r_1|_{z=0} = r_2|_{z=0}$.
При $\varepsilon_2 \to \infty$ получаем случай точечного заряда q, находящегося в диэлектрике ε_1, у границы с плоским проводником. При этом $\sigma_{int} \to -qa/2\pi\varepsilon_1 r^3$. Эта предельная плотность на самом деле представляет собой
сумму плотностей связанного заряда на границе диэлектрика и свободного заряда на поверхности проводника.
8.10. Поле внутри двугранного угла создается системами зарядов, изображенными на рис. 8.12.

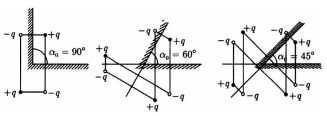


Рис. 8.12
8.11. Введем полярные координаты, выбрав полюс в центре сферы и ось $Oz \| \boldsymbol{E}_0$. Потенциал можно искать в виде ряда по полиномам Лежандра (ср. с решением задачи 8.14). Окончательный результат:

$$\varphi_1 = -\frac{3\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2}E_0 r\cos\vartheta \quad \text{при} \quad r < a$$
$$\varphi_2 = -E_0 r\cos\vartheta + \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)E_0 a^3\cos\vartheta}{(\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2)r^2} \quad \text{при} \quad r > a$$

Внутри шара получается однородное электрическое поле, напряженность которого

$$E_1 = \frac{3\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2}E_0 \begin{cases} > E_0 & \text{при} \quad \varepsilon_2 > \varepsilon_1 \\ < E_0 & \text{при} \quad \varepsilon_2 < \varepsilon_1 \end{cases}$$

Вне шара на внешнее однородное поле E_0 накладывается поле электрического диполя, момент которого

$$p = E_0 a^3 \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2}$$

Это вторичное поле вызвано связанными зарядами на поверхности диэлектрического шара:

$$\sigma_{\text{int}} = \frac{3}{4\pi} \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} E_0 \cos\vartheta, \quad \rho_{\text{int}} = 0$$

Легко понять причину такого распределения зарядов, представив себе каждый малый элемент поляризованного диэлектрика в виде элементарного диполя.

8.12. Для диэлектрика с неизменной поляризацией $\boldsymbol{E} = 4\pi\boldsymbol{P}/3$ (см. задачу 2.38).

Для обычного диэлектрика

$$\Delta\boldsymbol{E} = -\frac{12\pi\varepsilon}{(2\varepsilon+1)(\varepsilon-1)}\boldsymbol{P}$$

8.13.

$$\varphi = -\boldsymbol{E}_0 \cdot \boldsymbol{r} + \frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}{r^3} (r \geqslant R)$$

где $\boldsymbol{p} = R^3\boldsymbol{E}_0$, R^3 - поляризуемость шара; $\sigma = 3\varepsilon_0 E_0 \cos\vartheta/4\pi$.

8.14. Выберем полюс сферической системы координат в центре шара (рис. 8.13), полярную ось проведем через точечный заряд. Будем искать потенциал в форме

$$\varphi(r, \vartheta, \alpha) = \frac{q}{\varepsilon r_1} +$$

Рис. 8.13

$$+ \sum_{l,m} \left(a_{lm} r^l + \frac{b_{lm}}{r^{l+1}} \right) P_{lm}(\cos\vartheta) e^{im\alpha} \tag{1}$$

где r_1 - расстояние от q_1 до точки наблюдения. Ряд, входящий в (1), очевидно, описывает поле зарядов, индуцированных на шаре. Это поле должно исчезать на бесконечности, поэтому $a_{lm} = 0$. Вследствие симметрии потенциал не зависит от угла α, поэтому члены с $m \neq 0$ также отсутствуют. Оставшиеся константы $b_l \equiv b_{l0}$ определим из граничных условий.

В случае а) потенциал шара $\varphi(R, \vartheta) = V = \text{const}$. Воспользуемся разложением для q/r_1 из задачи 2.30:

$$\varphi(R, \vartheta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{qR^l}{\varepsilon a^{l+1}} + \frac{b^l}{R^{l+1}} \right) P_l(\cos\vartheta) = V$$

Отсюда $b_l = -qR^{2l+1}/\varepsilon a^{l+1}$ при $l \neq 0, b_0 = VR - Rq/\varepsilon a$, так что потенциал вне шара

$$\varphi(r, \vartheta) = \frac{q}{\varepsilon r_1} + \frac{VR}{r} - \frac{qR}{\varepsilon a} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{R^2}{a} \right)^l \frac{P_l(\cos\vartheta)}{r^{l+1}} \tag{2}$$

Теперь находим плотность зарядов, наведенных на поверхности шара:

$$\sigma(R, \vartheta) = -\frac{\varepsilon}{4\pi} \frac{\partial\varphi}{\partial r}\bigg|_{r=R} = \frac{\varepsilon V}{4\pi R} - \frac{q}{4\pi} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \frac{R^{l+1}}{a^{l+1}} P_l(\cos\vartheta) \tag{3}$$

В случае б) потенциал V неизвестен и должен быть выражен через заряд Q шара. Очевидно,

$$Q = 2\pi \int \sigma(R,\vartheta) R^2 \sin\vartheta d\vartheta = \varepsilon V R - \frac{qR}{a}$$

откуда $V = Q/\varepsilon R + q/\varepsilon a$. Используя задачу 2.30, можно записать (2) в виде:

$$\varphi = \frac{q}{\varepsilon r_1} + \frac{Q+q'}{\varepsilon r} - \frac{q'}{\varepsilon r_2} \tag{4}$$

где

$$q' = q\frac{R}{a}, \quad r_2 = \sqrt{r^2 + a'^2 - 2a'r\cos\vartheta}, \quad a' = \frac{R^2}{a}$$

Таким образом, потенциал точечного заряда и заряженного шара в области $r > a$ сводится к потенциалу четырех точечных зарядов, расположенных на оси симметрии: заряда q на расстоянии a от начала координат и трех его изображений - зарядов Q и $q' = qR/a$ в начале координат и заряда $-q'$ в гармонически сопряженной относительно поверхности шара точке $a' = R^2/a$. Заряд $-q'$ описывает действие зарядов, индуцированных на ближайшей к q стороне поверхности шара. Знак этих зарядов, очевидно, противоположен знаку q. Заряд $+q'$ описывает действие зарядов одного с q знака, индуцированных на удаленной от q части шара.

Если шар нейтрален, то член с Q отсутствует. Если шар заземлен ($V = 0$), то потенциал принимает вид

$$\varphi = \frac{q}{\varepsilon r_1} - \frac{q'}{\varepsilon r_2} \tag{5}$$

8.15.

$$\varphi(M) = \frac{q}{\varepsilon r_1} - \frac{q'}{\varepsilon r_2} + V$$

(рис. 8.14), где

$$q' = q\frac{R}{a}, \quad a' = \frac{R^2}{a}$$

8.16.

Рис. 8.14

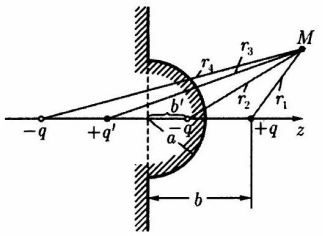


Рис. 8.15

$$\varphi(M) = \frac{q}{r_1} - \frac{q'}{r_2} + \frac{q'}{r_3} - \frac{q}{r_4}V$$

(рис. 8.15), где

$$q' = \frac{qa}{b}, \quad b' = \frac{a^2}{b}$$

Заряд на выступе равен

$$Q = -q\left[1 - \frac{b^2 - a^2}{b\sqrt{a^2 + b^2}}\right]$$

8.17. $\varphi \equiv \varphi_1 = q/\varepsilon r_1$ - вне шара, $\varphi \equiv \varphi_3 = q/\varepsilon_1 R_1$ - в проводнике, $\varphi \equiv \varphi_2 = q/\varepsilon_2 r_1 - q'/\varepsilon_2 r_2 + q/\varepsilon_1 R_1$ - в полости (рис. 8.16), где $q' = qR_2/a, \quad a' = R_2^2/a$.
8.18.

$$\varphi_1 = \frac{q}{\varepsilon_1 r_1} + q\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{l+1}{\varepsilon_1 l + \varepsilon_2(l+1)}\frac{a^l r^l}{R^{2l+1}}P_l(\cos\vartheta) \quad \text{при} \quad r \leqslant R$$

$$\varphi_2 = q\sum_{l=0}^{\infty}\frac{2l+1}{\varepsilon_1 l + \varepsilon_2(l+1)}\frac{a^l}{r^{l+1}}P_l(\cos\vartheta) \quad \text{при} \quad r \geqslant R$$

где r_1 - расстояние от точки наблюдения до заряда q.

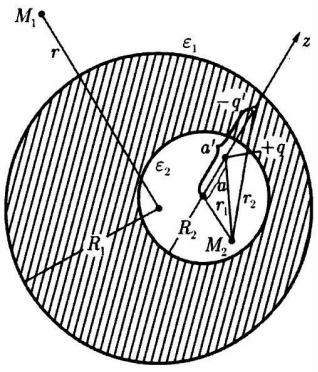


Рис. 8.16
При $a = 0$,

$$\varphi_1 = \frac{q}{\varepsilon_1 r} + \left(1 - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\right)\frac{q}{\varepsilon_2 R}, \quad \varphi_2 = \frac{q}{\varepsilon_2 r}.$$

8.19.

$$\Delta C = \frac{a^2 b^2 c^2}{(b-a)^2\,(b^3 - a^3)}$$

8.20.

$$C = \frac{\kappa}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{1}{2}\left[\operatorname{arcch}\frac{a^2 - R_1^2 - R_2^2}{2R_1 R_2}\right]^{-1}$$

8.21.

$$\sigma = \pm\frac{|E|}{4\pi} = \pm\frac{\kappa}{2\pi}\left[\frac{R + (a-b)\cos\alpha}{R^2 + (a-b)^2 + 2R(a-b)\cos\alpha} - \right.$$
$$\left. - \frac{R + (a+b)\cos\alpha}{R^2 + (a+b)^2 + 2R(a+b)\cos\alpha}\right],$$

где $b = \sqrt{a^2 - R^2}$, угол $0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi$ характеризует положение точки на поверхности одного из цилиндров. Плотность поверхностных зарядов обладает зеркальной (т. е. с изменением знака) симметрией относительно плоскости, расположенной посредине между цилиндрами.

8.22.

$$C = \frac{1}{2}\left[\operatorname{arcch}\frac{R_1^2 + R_2^2 - a^2}{2R_1R_2}\right]^{-1}$$

8.23. Если оси Ox, Oy, Oz параллельны главным осям тензора ε_{ik}, то

$$\varphi(x,y,z) = \frac{e'}{r'} = \frac{e}{\sqrt{\varepsilon^{(x)}\varepsilon^{(y)}\varepsilon^{(z)}}}\left[\frac{x^2}{\varepsilon^{(x)}} + \frac{y^2}{\varepsilon^{(y)}} + \frac{z^2}{\varepsilon^{(z)}}\right]^{-\frac{1}{2}} \tag{1}$$

При произвольной ориентации координатной системы формула (1) запишется в виде

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \frac{e}{\sqrt{|\varepsilon_{ik}|\,\varepsilon_{ik}^{-1}x_ix_k}} \tag{2}$$

где $|\varepsilon_{ik}|$ - определитель тензора ε_{ik}.

8.24.

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 - \frac{(\varepsilon_{ik} - \delta_{ik})\,n_iE_{0k}}{\varepsilon_{lm}n_ln_m}\boldsymbol{n}$$

8.25. $C = S\varepsilon^{(z)}/4\pi a$, где z - координата, нормальная к пластинам конденсатора.

8.26. Если выбрать оси Ox, Oz в плоскости $(\boldsymbol{E}_0, \boldsymbol{n}), Oz \| \boldsymbol{n}$, то

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{E_x}{E_z} = \frac{\varepsilon_{zz}\operatorname{tg}\vartheta_0}{1 - \varepsilon_{zx}\operatorname{tg}\vartheta_0}$$

где $\operatorname{tg}\dot{\vartheta}_0 = E_{0x}/E_{0z}$. При этом силовая линия в диэлектрике остается в плоскости $(\boldsymbol{E}_0, \boldsymbol{n})$.

8.27. Из теоремы взаимности Грина и формулы (8.12) находим $\sum\limits_{i,k}(s_{ik} - s_{ki})\,q_iq'_k = 0$. Поскольку заряды проводников q_i, q'_k независимы, из этого равенства следует искомое соотношение.

8.28. Обозначим через q_1 заряд первого проводника и через q' заряд на внешней поверхности второго проводника (заряд на внутренней поверхности второго проводника равен $-q_1$, как это следует из электростатической теоремы Гаусса). Система (8.14) принимает вид:

$$\left.\begin{aligned} q_1 &= c_{11}V_1 + c_{12}V_2 \\ -q_1 + q' &= c_{12}V_1 + c_{22}V_2 \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Сложив эти уравнения, получим

$$q' = (c_{11} + c_{12})\,V_1 + (c_{12} + c_{22})\,V_2 \tag{2}$$

Заданием q' определяется поле во всем внешнем пространстве, в частности, потенциал V_2 второго проводника. Равенство (2) должно, таким образом, иметь место при любых значениях V_1 и фиксированных q', V_2, что может быть, только если

$$c_{11} + c_{12} = 0 \tag{3}$$

При этом первое из уравнений (1) принимает вид:

$$q_1 = c_{11}\,(V_1 - V_2) \tag{4}$$

Из (2), (3) и (4) следует, что

$$C = c_{11} = -c_{12} = -c_{21}, \quad C' = c_{12} + c_{22}$$

8.29.

$$s_{11} = \frac{c_{22}}{c_{11}c_{22} - c_{12}^2}, \quad s_{22} = \frac{c_{11}}{c_{11}c_{22} - c_{12}^2}, \quad s_{12} = s_{21} = -\frac{c_{12}}{c_{11}c_{22} - c_{12}^2}.$$

8.30.

$$c_{11} \approx C_1, \quad c_{22} \approx C_2, \quad c_{12} = c_{21} \approx -\frac{C_1 C_2}{\varepsilon r}$$

8.31.

$$C = \frac{c_{11}c_{22} - c_{12}^2}{c_{11} + c_{22} + 2c_{12}}$$

8.32.

$$q_1 = \frac{s_{11} - 2s_{12} + s_{13}}{s_{11} - s_{12}}\frac{q}{8}, \quad q_2 = \frac{q}{2}, \quad q_3 = \frac{q}{4}, \quad q_4 = \frac{s_{11} - s_{13}}{s_{11} - s_{12}}\frac{q}{8}$$

8.33.

$$q_1 = -\frac{2a}{b}q, \quad q_2 = -\frac{a}{b}, \quad q_3 = \frac{3a^2}{b^2}q$$

8.34.

$$q_1 = q\frac{V_0 - V_P}{V_1 - V_0}, \quad q_0 = q\frac{V_1 - V_P}{V_0 - V_1}$$

8.36. Собственная емкость объединенного проводника:

$$c_{00} = c_{11} + c_{22} + 2c_{12}$$

Взаимная емкость объединенного проводника и i-го проводника системы:

$$c_{0i} = c_{1i} + c_{2i}$$

8.37. Шарик и проводник приобретают при соприкосновении один и тот же потенциал

$$V_1 = qs_{11} + (Q - q)s_{12} = qs_{12} + (Q - q)s_{22} = V_2$$

откуда

$$\frac{s_{11} - s_{12}}{s_{22} - s_{12}} = \frac{Q}{q} - 1 \tag{1}$$

где s_{ik} - потенциальные коэффициенты (индексы 1 и 2 относятся соответственно к шарику и к проводнику).

Обозначим через q_k заряд проводника после k-го подсоединения. Из равенства потенциалов проводника и шарика при соприкосновении следует:

$$q_k s_{11} + (Q + q_{k-1} - q_k)\, s_{12} = q_k s_{12} + (Q - q + q_{k-1})\, s_{22}$$

Отсюда, используя (1), получим рекуррентное соотношение, связывающее q_{k-1} и q_k:

$$q_k = q + \frac{q}{Q} q_{k-1} \tag{2}$$

Последовательное применение формулы (2) с переходом в дальнейшем к пределу $k \to \infty$ дает окончательно:

$$q = \lim_{k\to\infty} q_k = q\left[1 + \frac{q}{Q} + \left(\frac{q}{Q}\right)^2 + \left(\frac{q}{Q}\right)^3 + \ldots\right] = \frac{qQ}{Q-q}$$

8.38. Уравнение Лапласа принимает вид:

$$\frac{d}{d\xi}\left(R_\xi \frac{d\varphi}{d\xi}\right) = 0, \quad R_\xi = \sqrt{(\xi+a^2)(\xi+b^2)(\xi+c^2)}$$

Это уравнение должно быть проинтегрировано с граничными условиями $\varphi = \text{const}$ при $\xi = 0$ (на поверхности эллипсоида), $\varphi \to 0$ при $\xi \to \infty$. Выполняя интегрирование и воспользовавшись для определения постоянной интегрирования тем, что при $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \to \infty, \xi \to r^2$, получим:

$$\varphi(\xi) = \frac{q}{2\varepsilon}\int\limits_\xi^\infty \frac{d\xi}{R_\xi}, \quad \frac{1}{C} = \frac{1}{2\varepsilon}\int\limits_0^\infty \frac{d\xi}{R_\xi}$$

Отсюда

$$\sigma = -\frac{\varepsilon}{4\pi}\frac{\partial\varphi}{\partial n}\bigg|_{\xi=0} = -\frac{\varepsilon}{4\pi}\left(\frac{1}{h_1}\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right)_{\xi=0} = \frac{q}{4\pi abc}\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right)^{-1/2}.$$

Плотности зарядов на концах полуосей прямо пропорциональны длинам полуосей: $\sigma_a : \sigma_b : \sigma_c = a : b : c$.

8.39. При $a = b > c$ (сплюснутый эллипсоид):

$$\varphi = \frac{q}{\sqrt{a^2-c^2}}\operatorname{arcctg}\sqrt{\frac{a^2-c^2}{\xi+c^2}}, \quad C = \frac{\sqrt{a^2-c^2}}{\arccos(c/a)}$$

В частности, при $c = 0$ (диск) $C = 2a/\pi$.

При $a > b = c$ (вытянутый эллипсоид):

$$\varphi = \frac{q}{2\varepsilon\sqrt{a^2-b^2}}\ln\frac{\sqrt{\xi+a^2}+\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{\xi+a^2}-\sqrt{a^2-b^2}}, \quad C = \frac{\varepsilon\sqrt{a^2-b^2}}{\ln\left[\left(a+\sqrt{a^2-b^2}\right)/b\right]}$$

В частности, при $b \ll a$ (стержень):

$$C = \frac{\varepsilon a}{\ln(2a/b)}$$

8.40. Будем сначала считать эллипсоид незаряженным: $q = 0$. Если внешнее однородное поле $\boldsymbol{E}_0$ параллельно оси Ox, то

$$\varphi_0 = -E_0 x = \mp E_0\sqrt{\frac{(\xi+a^2)(\eta+a^2)(\xi+a^2)}{(b^2-a^2)(c^2-a^2)}}$$

Знак минус соответствует $x > 0$, знак плюс $x < 0$. Как функция φ_0, так и потенциал φ' поля наведенных на эллипсоиде зарядов удовлетворяют уравнению Лапласа.

Подставляя $\varphi' = \varphi_0 F(\xi)$ в уравнение Лапласа, получим уравнение для определения неизвестной функции $F(\xi)$:

$$\frac{d^2F}{d\xi^2} + \frac{dF}{d\xi}\frac{d}{d\xi}\ln\left[R_\xi\left(\xi + a^2\right)\right] = 0$$

Это уравнение легко интегрируется. Решение, удовлетворяющее граничным условиям, имеет вид

$$\varphi|_{q=0} = \varphi_0\left\{1 - \int\limits_\xi^\infty \frac{d\xi}{(\xi + a^2)\,R_\xi} \Big/ \int\limits_0^\infty \frac{d\xi}{(\xi + a^2)\,R_\xi}\right\}$$

Если эллипсоид имеет собственный заряд q, то решение, удовлетворяющее условиям $\varphi|_{\xi=0} = \text{const}$ и $-\oint_S \partial\varphi/\partial n dS = 4\pi q$ (S - замкнутая поверхность, содержащая внутри себя эллипсоид), можно получить по принципу суперпозиции (см. задачу 8.42):

$$\varphi|_q = \varphi_{q=0} + \frac{1}{2}q\int\limits_\xi^\infty \frac{d\xi}{R_\xi}$$

8.41. Потенциал имеет тот же вид, что и в предыдущей задаче. Входящие в выражение потенциала интегралы могут быть выражены через элементарные функции - это имеет место во всех случаях, когда эллипсоид обладает симметрией вращения. В итоге получим:

$$\varphi = -E_0 x + E_0 x\left[\ln\frac{\sqrt{1+\xi/a^2}+e}{\sqrt{1+\xi/a^2}-e} - \frac{2e}{\sqrt{1+\xi/a^2}}\right]\left[\ln\frac{1+e}{1-e} - 2e\right]^{-1}$$

где a - большая и b - малая полуось, $e = \sqrt{1-b^2/a^2}$ - эксцентриситет эллипсоида, ось x направлена перпендикулярно плоскости,

$$x = \frac{a}{e}\sqrt{\left(1+\frac{\xi}{a^2}\right)\left(1+\frac{\zeta}{a^2}\right)}$$

(см. задачу 1.96). Напряженность поля достигает максимального значения в вершине эллипсоида:

$$\frac{E_{\max}}{E_0} = -\frac{1}{E_0 h_\xi}\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\bigg|_{\xi,0,\zeta=-b^2} = \frac{2e^3\left(1-e^2\right)^{-1}}{\ln[(1+e)/(1-e)] - 2e} = \frac{1}{n^{(x)}}$$

где $n^{(x)}$ - коэффициент деполяризации (см. задачу 8.43). В случае сферы $e = 0$ и $E_{\max}/E_0 = 3$. В случае очень вытянутого стержня (громоотвод):

$$\frac{E_{\max}}{E_0} = \frac{a^2}{b^2}\left(\ln\frac{2a}{b} - 1\right)^{-1}, \cdot a \gg b$$

поэтому искровой пробой воздуха значительно более вероятен у конца такого громоотвода, чем на других его участках.

8.42. Поле на произвольных расстояниях от эллипсоида получается как суперпозиция трех полей вида, установленного в задаче 8.40* (поле $\boldsymbol{E}_0$ разлагаем на составляющие, параллельные главным осям эллипсоида).

На больших расстояниях от эллипсоида:

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}{r^3}, \quad p_x = \beta^{(x)}E_x, \quad p_y = \beta^{(y)}E_y, \quad p_z = \beta^{(z)}E_z$$

Главные значения тензора поляризуемости эллипсоида:

$$\beta^{(x)} = \frac{abc}{3n^{(x)}}, \quad \beta^{(y)} = \frac{abc}{3n^{(y)}}, \quad \beta^{(z)} = \frac{abc}{3n^{(z)}}$$

8.43.

$$n^{(x)} = \frac{1-e^2}{2e^2}\left(\ln\frac{1+e}{1-e} - 2e\right) \leqslant \frac{1}{3}, \quad n^{(y)} = n^{(z)} = \frac{1-n^{(x)}}{2}$$

где $e = \sqrt{1-b^2/a^2}$ - эксцентриситет эллипсоида.
В случае $e \to 1$ (стержень):

$$n^{(x)} = 0, \quad n^{(y)} = n^{(z)} = \frac{1}{2}$$

В случае $e \ll 1$ (форма, близкая к шару):

$$n^{(x)} = \frac{1}{3} - \frac{2}{15}e^2, \quad n^{(y)} = n^{(z)} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}e^2$$

8.44.
$n^{(z)} = \frac{1+e^2}{e^3}(e - \operatorname{arctg} e) \geqslant \frac{1}{3}, n^{(x)} = n^{(y)} = \frac{1-n^{(z)}}{2}, e = \sqrt{a^2/c^2 - 1}$.
В частном случае диска: $n^{(z)} = 1, n^{(x)} = n^{(y)} = 0$.
8.45. $\varphi = \varphi_x = \varphi_y = \varphi_z$.

Внутри эллипсоида:

$$\varphi_x = \varphi_{1x} = \frac{-E_0 x}{1 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\, n^{(x)}/\varepsilon_2}$$

Вне эллипсоида:

$$\varphi_x = \varphi_{2x} = -E_0 x + E_0 x \frac{abc\,(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{2\left[\varepsilon_2 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\, n^{(x)}\right]} \int\limits_{\xi}^{\infty} \frac{d\xi}{(\xi + a^2)\, R_\xi}$$

где

$$n^{(x)} = \frac{1}{2} abc \int\limits_{0}^{\infty} \frac{d\xi}{(\xi + a^2)\, R_\xi}$$

φ_y и φ_z определяются аналогичными выражениями, в которых x нужно заменить соответственно на y и z, a на b и c. Внутри эллипсоида однородное поле:

$$\boldsymbol{E}_1 = \frac{E_{0x}\boldsymbol{e}_x}{1 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\, n^{(x)}/\varepsilon_2} + \frac{E_{0y}\boldsymbol{e}_y}{1 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\, n^{(y)}/\varepsilon_2} + \frac{E_{0z}\boldsymbol{e}_z}{1 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\, n^{(z)}/\varepsilon_2}$$

На больших расстояниях от эллипсоида:

$$\varphi_2 = -\boldsymbol{E}_0 \cdot \boldsymbol{r} + \frac{\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{r}}{r^3}$$

где $p_x = \beta^{(x)} E_x$,

$$\beta^{(x)} = \frac{abc}{3\left(\varepsilon_2/\left(\varepsilon_1 - \varepsilon_2\right) + n^{(x)}\right)}$$

и т.д.
8.46. Воспользовавшись формулой (8.82), получим:

$$U = E_0^2 \frac{abc\,(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)\left\{2\left[\varepsilon_2 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\,n\right]\sin^2\vartheta + \left[\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)\,n\right]\cos^2\vartheta\right\}}{6\left[\varepsilon_2 + \varepsilon_1 + n\,(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)\right]\left[\varepsilon_2 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\,n\right]}$$

$$N = -\frac{\partial U}{\partial \vartheta} = E_0^2 \frac{abc\,(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)^2\,(3n-1)\sin 2\vartheta}{6\left[\varepsilon_2 + \varepsilon_1 + n\,(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)\right]\left[\varepsilon_2 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\,n\right]}$$

где ϑ - угол между осью симметрии и полем $\boldsymbol{E}_0, n$ - коэффициент деполяризации относительно оси симметрии эллипсоида (см., например, решение предыдущей задачи).

Из последней формулы видно, что внешнее поле стремится повернуть ось симметрии вытянутого ($n < 1/3$) и сплюснутого ($n > 1/3$) эллипсоида в положение, параллельное и перпендикулярное полю соответственно.

В случае проводящего эллипсоида, $\varepsilon_1 \to \infty$ и

$$N = E_0^2 \frac{abc(3n-1)\sin 2\vartheta}{6n(1-n)}$$

8.47. Потенциальную энергию жидкой заряженной капли, имеющей форму эллипсоида вращения с эксцентриситетом $e = \sqrt{1 - b^2/a^2}$ и объемом, равным объему сферы с радиусом R (заряд q), можно выразить формулой
(1) $U(e) = \frac{q^2}{2C} + \alpha S = \frac{q^2\,\sqrt[3]{1-e^2}}{4Re} \ln\frac{1+e}{1-e} + 2\pi R^2\alpha\left(\sqrt[3]{1-e^2} + \frac{\arcsin e}{e\,\sqrt[3]{1-e^2}}\right)$
(воспользоваться выражением для емкости C вытянутого эллипсоида вращения, приведенным в ответе к задаче 8.39.

Чтобы ответить на вопрос об устойчивости заряженной сферической капли, надо выяснить характер зависимости энергии (1) от e при малых e. Разложим U в ряд с точностью до e^4:

$$U(e) = \frac{q^2}{2R} + 4\pi R^2\alpha + \frac{e^4}{45}\left(8\pi R^2\alpha - \frac{q^2}{2R}\right)$$

Из последней формулы видно, что если заряд капли $q < q_c = \sqrt{16\pi R^3\alpha}$, то при малых деформациях капля стремится вернуться в сферическое состояние - капля устойчива. При $q > q_c$, поскольку возникшая деформация продолжает увеличиваться - капля неустойчива. Процесс кончается расщеплением неустойчивой капли на две или большее количество [4] более мелких устойчивых капель. То, что в конце концов получаются устойчивые капли, видно из выражения q_c. С уменьшением размеров капли критический заряд q_c уменьшается пропорционально корню квадратному из ее объема, в

то время как заряд капли q уменьшается в среднем пропорционально объему; поэтому при достаточно малых размерах капли условия устойчивости начинают выполняться.
8.48.

$$\varphi = -\frac{E_0 z}{\pi}\left(\operatorname{arctg}\frac{a}{\sqrt{\xi}} - \frac{a}{\sqrt{\xi}}\right) = -\frac{E_0}{\pi}\sqrt{-\eta}\left(\frac{\sqrt{\xi}}{a}\operatorname{arctg}\frac{a}{\sqrt{\xi}} - 1\right)$$

где $\sqrt{\xi}$ нужно брать со знаком плюс при $z > 0$ и со знаком минус при $z < 0$. На больших расстояниях за отверстием $\xi \approx r^2$ и поле приобретает вид

$$\varphi \approx \frac{E_0 a^3 z}{3\pi r^3} \quad \text{при } z > 0$$

Такой характер имеет поле электрического диполя, ось которого совпадает с осью z, а момент $p = E_0 a^3/3\pi$. Отсюда видно, что силовые линии, проходящие через отверстие,

[04] Легко непосредственно проверить, что, например, при расщеплении заряженной капли на две равные сферические капли энергия уменьшается в $2^{\frac{2}{3}}$ раза.

замыкаются на обратной стороне металлического экрана.
8.49.

$$\sigma = -\frac{E_0}{4\pi^2}\left(\pi - \arcsin\frac{a}{r_1} + \frac{a}{\sqrt{r_1^2 - a^2}}\right) \quad \text{при } z = -0$$

$$\sigma = -\frac{E_0}{4\pi^2}\left(\frac{a}{\sqrt{r_1^2 - a^2}} - \arcsin\frac{a}{r_1}\right) \quad \text{при } z = +0$$

где $r_1 = \sqrt{\xi + a^2}$ - расстояние от центра отверстия до точки наблюдения на плоскости.
8.50. Нужно решить уравнение $\Delta\varphi = -4\pi q\delta\left(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0\right)$; дельта-функция должна быть при этом записана в цилиндрических координатах:

$$\delta\left(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0\right) = \frac{1}{r_0}\delta\left(r - r_0\right)\delta(\alpha - \gamma)\delta(z)$$

Компонента Фурье

$$\varphi_k(r, \alpha) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(r, \alpha, z)\cos kz dk \tag{1}$$

потенциала $\varphi(r, \alpha, z)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi_k}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi_k}{\partial\alpha^2} - k^2\varphi_k = -\frac{4q}{r_0}\delta\left(r - r_0\right)\delta(\alpha - \gamma) \tag{2}$$

и граничным условиям (см. рис. 8.8):

$$\varphi_k(r, 0) = \varphi_k(r, \beta) = 0 \tag{3}$$

$$\varphi_k(\infty, \alpha) = 0 \tag{4}$$

Рассмотрим соответствующее (2) однородное уравнение. Частными его решениями, удовлетворяющими (3), являются произведения $R_n(r)\sin(n\pi\alpha/\beta)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, где величина $R_n(r)$ равна с точностью до постоянного множителя либо $I_{n\pi/\beta}(kr)$, либо $K_{n\pi/\beta}(kr)$. Будем искать решение неоднородного уравнения (2) в виде суперпозиции таких частных решений:

$$\varphi_k = \begin{cases} \sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n I_{n\pi/\beta}(kr)\sin(n\pi\alpha/\beta) & \text{при } r < a \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} B_n K_{n\pi/\beta}(kr)\sin(n\pi\alpha/\beta) & \text{при } r > a \end{cases} \tag{5}$$

При написании (5) мы учли, что потенциал φ_k должен удовлетворять (4) и быть ограниченным при $r = 0$.

Для определения постоянных A_n и B_n воспользуемся, во-первых, непрерывностью потенциала при $r = r_0$: Это даст

$$\frac{B_n}{A_n} = \frac{I_{n\pi/\beta}\left(kr_0\right)}{K_{n\pi/\beta}\left(kr_0\right)} \tag{6}$$

Во-вторых, потребуем, чтобы потенциал (5) удовлетворял уравнению (2). Подставив (5) в (2), помножим обе части получившегося равенства на $\sin(m\pi\alpha/\beta)(m = 1, 2, \ldots)$ и проинтегрируем по α от 0 до β. Учитывая ортогональность функций $\sin(n\pi\alpha/\beta)$ в указанном промежутке, получим

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR_m}{dr}\right)-\left(k^2+\frac{m^2\pi^2}{\beta^2 r^2}\right)R_m=-\frac{8q}{\beta r_0}\delta\left(r-r_0\right)\sin\frac{m\pi\gamma}{\beta} \tag{7}$$

где

$$R_m(r)=\begin{cases}A_m I_{m\pi/\beta}(kr) & \text{при } r<a\\ B_m K_{m\pi/\beta}(kr) & \text{при } r>a\end{cases}$$

Функция $R_m(r)$ непрерывна при $r=r_0$, но ее первая производная по r испытывает при этом скачок

$$b\equiv R_m'\left(r_0+0\right)-R_m'\left(r_0-0\right)=kB_m K_{m\pi/\beta}'\left(kr_0\right)-kA_m I_{m\pi/\beta}'\left(kr_0\right)$$

Поэтому вторая производная $R_m(r)$ будет равна $R_m''(r)=b\delta\left(r-r_0\right)$.
Подставляя это выражение в (7) и отбрасывая члены, ограниченные при $r=r_0$, получим второе уравнение для определения A_n, B_n:

$$kB_n K_{n\pi/\beta}'\left(kr_0\right)-kA_n I_{n\pi/\beta}'\left(kr_0\right)=-\frac{8q}{\beta r_0}\sin\frac{n\pi\gamma}{\beta} \tag{8}$$

При упрощении выражений для A_n и B_n полезно воспользоваться формулой

$$K_\nu(x)I_\nu'(x)-K_\nu'(x)I_\nu(x)=\frac{1}{x}$$

8.52.

$$\varphi(r,\alpha,z)=\frac{2q}{\pi}\left(\frac{1}{R_0}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{\operatorname{ch}(\eta/2)+\cos[(\alpha-\gamma)/2]}{\operatorname{ch}(\eta/2)-\cos[(\alpha-\gamma)/2]}}-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{R_0'}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{\operatorname{ch}(\eta/2)+\cos[(\alpha+\gamma)/2]}{\operatorname{ch}(\eta/2)-\cos[(\alpha+\gamma)/2]}}\right)$$

где

$$R_0=\sqrt{r_0^2+r^2+z^2-2rr_0\cos(\gamma-\alpha)}=\sqrt{2rr_0(\operatorname{ch}\eta-\cos(\gamma-\alpha))}$$
$$R_0'=\sqrt{r_0^2+r^2+z^2-2rr_0\cos(\gamma+\alpha)}=\sqrt{2rr_0(\operatorname{ch}\eta-\cos(\gamma+\alpha))}$$

8.53. $\sigma=\text{const}\cdot r^{(\pi/\beta-1)}$, где r - расстояние до ребра клина. В частном случае клина, находящегося в поле точечного заряда (см. задачу 8.50*),

$$\text{const}=-\frac{q\sqrt{\pi}r_0^{\pi/\beta}\sin(\pi\gamma/\beta)}{\beta^2\left(r_0^2+z^2\right)^{\pi/\beta+1/2}}\frac{\Gamma(\pi/\beta+1/2)}{\Gamma(\pi/\beta+1)}$$

Отсюда видно, что $\sigma\to 0$ при $r\to 0$ и $\beta<\pi$; $\sigma\to\infty$ при $r\to 0$ и $\beta>\pi$. В частном случае, когда заряд находится у края плоскости,

$$\sigma\propto\frac{1}{\sqrt{r}}$$

8.54. Поместим заряд q в начале координат, а ось Oz направим перпендикулярно поверхности пластинки. Тогда уравнения передней и задней поверхностей ее примут вид $z=a$ и $z=a+c$ соответственно. Будем искать потенциал в виде

$$
\left.
\begin{aligned}
\varphi_1 &= q\int_0^\infty J_0(kr_1)\,e^{-k|z|}dk + \int_0^\infty A_1(k)J_0(kr_1)\,e^{kz}dk \qquad (-\infty < z < a),\\
(1)\ \varphi_2 &= \int_0^\infty B_1(k)J_0(kr_1)\,e^{-kz}dk + \int_0^\infty B_2(k)J_0(kr_1)\,e^{kz}dk \qquad (a < z < b),\\
\varphi_3 &= \int_0^\infty A_2(k)J_0(kr_1)\,e^{-kz}dk \quad (b = a + c < z < \infty)
\end{aligned}
\right\}
$$

Граничные условия на поверхностях пластинки дадут систему четырех алгебраических уравнений для определения коэффициентов A_1, A_2, B_1, B_2. Решая эту систему, получим:

$$
\begin{aligned}
A_1 &= q\beta\frac{e^{-2kb} - e^{-2ka}}{1-\beta^2e^{-2kc}}, \quad A_2 = q\frac{1-\beta^2}{1-\beta^2e^{-2kc}}\\
B_1 &= \frac{q(1-\beta)}{1-\beta^2e^{-2kc}}, \quad B_2 = \frac{q\beta(1-\beta)e^{-2kb}}{1-\beta^2e^{-2kc}}
\end{aligned}
\tag{2}
$$

где $\beta = (\varepsilon-1)/(\varepsilon+1), b = a + c$.
Формулы (2) совместно с (1) дают решение нашей задачи. На больших расстояниях за пластинкой ($z > 0$) поле принимает вид:

$$
\varphi(r_1, z) \approx \frac{q}{\sqrt{r_1^2+z^2}} + \frac{pz}{(r_1^2+z^2)^{3/2}}
$$

где $r_1 = \sqrt{x^2+y^2}, p = -(\varepsilon-1)^2cq/2\varepsilon$.
8.55.

$$
\varphi(M) = \frac{2q}{\varepsilon+1}\int_0^\infty \frac{\operatorname{sh} k(a-|z|)}{\operatorname{ch} ka}J_0(kr_1)\,dk
$$

где $r_1 = \sqrt{x^2+y^2}$ (рис. 8.17).

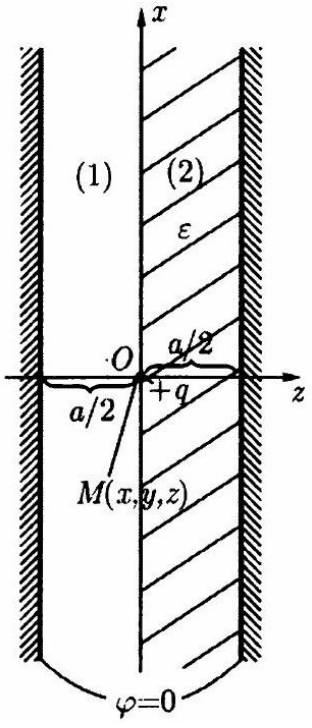


Рис. 8.17

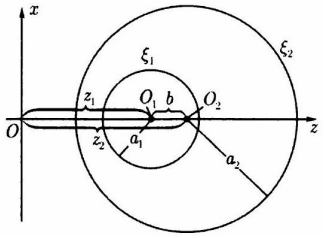


Рис. 8.18

При $\sqrt{z^2+r_1^2}\to 0$ (вблизи заряда)

$$\varphi\to\frac{2q}{(\varepsilon+1)\sqrt{r_1^2+z^2}}$$

(ср. с задачей 8.1).

Потенциал φ можно представить в виде

$$\varphi=\frac{2q}{\varepsilon+1}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{r_1^2+(z-2an)^2}}$$

Соответствующая система изображений приведена на рис. 8.19б.

8.56. Можно ввести бисферические координаты так, чтобы поверхности внутренней и внешней обкладок были координатными поверхностями $\xi=\xi_1$ и $\xi=\xi_2$ соответственно. Для этого нужно провести ось z через центры обкладок так, как это показано на рис. 8.18. Координаты центров обкладок будут при этом равны $z_1=a\operatorname{cth}\xi_1, z_2=a\operatorname{cth}\xi_2$ (a - параметр бисферических координат). Радиусы обкладок связаны с величинами a,ξ_1,ξ_2 уравнениями $a=a_1\operatorname{sh}\xi_1, a=a_2\operatorname{sh}\xi_2, b=z_2-z_1=a(\operatorname{cth}\xi_2-\operatorname{cth}\xi_1)$, откуда

$$\operatorname{ch}\xi_1=\frac{a_2^2-a_1^2-b^2}{2a_1b},\quad \operatorname{ch}\xi_2=\frac{a_2^2+b^2-a_1^2}{2a_2b} \tag{1}$$

Функция ψ в пространстве между обкладками конденсатора удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2}+\frac{1}{\sin\eta}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\sin\eta\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right)+\frac{1}{\sin^2\eta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\alpha^2}-\frac{1}{4}\psi=0 \tag{2}$$

Производя в уравнении (2) разделение переменных и учитывая, что в нашем случае ψ не зависит от азимутального угла α, найдем частные решения этого уравнения, ограниченные при $\eta=0,\pi$:

$$\psi_l(\xi,\eta)=\left[A_l\operatorname{ch}\left(l+\frac{1}{2}\right)\xi+B_l\operatorname{sh}\left(l+\frac{1}{2}\right)\xi\right]P_l(\cos\eta) \tag{3}$$

где $l=0,1,2,3,\ldots$

Будем искать ψ в виде ряда $\psi(\xi,\eta)=\sum\limits_{l=0}^{\infty}\psi_l(\xi,\eta)$. Коэффициенты A_l и B_l определяются из граничных условий $\psi(\xi_2,\eta)=0$,

$$\psi(\xi_1,\eta)=V(2\operatorname{ch}\xi_1-2\cos\eta)^{-1/2}=V\sum_{l=0}^{\infty}\exp\left[-\left(l+\frac{1}{2}\right)\xi_1\right]P_l(\cos\eta)$$

Окончательно получим:

$$\varphi(\xi,\eta)=V\sqrt{2\operatorname{ch}\xi-2\cos\eta}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\exp\left[-(l+1/2)\xi_1\right]\operatorname{sh}(l+1/2)\left(\xi-\xi_2\right)}{\operatorname{sh}(l+1/2)\left(\xi_1-\xi_2\right)}P_l(\cos\eta)\qquad(4)$$

Емкость конденсатора

$$C=\frac{q_1}{V}=\frac{1}{4\pi V}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{1}{h_\xi}\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}h_\eta h_\alpha\Bigg|_{\xi=\xi_1}d\eta d\alpha$$

Знак «+» в последней формуле объясняется тем, что вдоль внешней нормали к внутренней обкладке координата ξ убывает. Подставляя сюда (4) и используя ортогональность полиномов Лежандра, получим:

$$C=\frac{a_1}{2}+a_1\operatorname{sh}\xi_1\sum_{l=0}^{\infty}e^{-(2l+1)\xi_1}\operatorname{cth}\left(l+\frac{1}{2}\right)\left(\xi_1-\xi_2\right)$$

8.57.

$$C=\frac{a_1a_2}{a_2-a_1}+\frac{a_1^2a_2^2b^2}{\left(a_2-a_1\right)^2\left(a_2^3-a_1^3\right)}$$

8.58.

$$c_{11}=\frac{a_1}{2}+a_1\operatorname{sh}\xi_1\sum_{l=0}^{\infty}\exp\left[-\left(l+\frac{1}{2}\right)\xi_1\right]\operatorname{cth}\left(l+\frac{1}{2}\right)\left(\xi_1+\xi_2\right)$$

$$c_{22}=\frac{a_2}{2}+a_2\operatorname{sh}\xi_2\sum_{l=0}^{\infty}\exp\left[-\left(l+\frac{1}{2}\right)\xi_2\right]\operatorname{cth}\left(l+\frac{1}{2}\right)\left(\xi_1+\xi_2\right)$$

$$c_{12}=-a_1\operatorname{sh}\xi_1\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\exp\left[-(l+1/2)\left(\xi_1+\xi_2\right)\right]}{\operatorname{sh}(l+1/2)\left(\xi_1+\xi_2\right)}$$

где $\operatorname{ch}\xi_1=\left(b^2+a_1^2-a_2^2\right)/2ba_1, \operatorname{ch}\xi_2=\left(b^2-a_1^2+a_2^2\right)/2ba_2$.
Поверхности первого и второго проводников описываются уравнениями $\xi=-\xi_1$ и $\xi=\xi_2$ соответственно, причем $a_1\operatorname{sh}\xi_1=a_2\operatorname{sh}\xi_2$.

8.59.

$$c_{11}=a_1\left(1+mn+mn^3+m^2n^2\right)$$
$$c_{12}=-a_1n(1+mn)$$
$$c_{22}=a_2\left(1+mn+m^3n+m^2n^2\right)$$

где $m=a_1/b, n=a_2/b$.
8.61. Пусть потенциал сфер равен нулю, потенциал на бесконечности равен $-V$. Произведем инверсию системы в сфере радиуса $R=2a$, центр которой находится в точке касания проводящих сфер (рис. 8.19а), сфера инверсии изображена пунктиром). После инверсии система примет вид плоского конденсатора (рис. 8.19б), сфера инверсии изображена пунктиром) с расстоянием $2R$ между заземленными обкладками. Внутренности сфер соответствует при этом внешняя область конденсатора. В центр инверсии в конденсаторе попадает бесконечно удаленная точка первоначальной системы

с потенциалом V. Этому соответствует точечный заряд $q_0' = -RV$ в центре инверсии. Поле в инвертированной системе может быть, согласно задаче 8.55($\varepsilon = 1$), получено как поле следующей бесконечной системы изображений: точечные заряды $(-1)^n q_0'$ находятся в точках $z_n' = 2Rn$

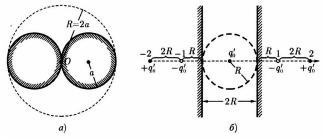


Рис. 8.19

оси z', проходящей через центр инверсии перпендикулярно к обкладкам конденсатора. Поскольку мы интересуемся емкостью, нужно найти полный заряд первоначальной системы:

$$q = 2\sum_{n=1}^{\infty} q_n = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q_n' R}{z_n'} = q_0' \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -q_0' \ln 2 = RV \ln 2$$

При выполнении суммирования мы воспользовались известным разложением в ряд $\ln 2$. Отсюда емкость

$$C = \frac{q}{V} = 2a \ln 2$$

Для определения потенциала с помощью формул (8.17), (8.18) запишем $\boldsymbol{r}$ и r' в цилиндрических координатах (ось z совпадает с осью симметрии системы, начало координат в точке касания сфер). Тогда $z' = R^2 z/r^2, r_1' = R^2 r_1/r_2, r^2 = r_1^2 + z^2$ и для потенциала получим

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \frac{q}{C} - \frac{R^2 q}{Cr} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sh} k\,(R - R^2|z|/r^2)}{\operatorname{ch} kR} J_0\left(\frac{kR^2 r_1}{r^2}\right) dk$$

Член q/C добавлен для того, чтобы $\varphi(\boldsymbol{r})$ обращался в нуль при $r \to \infty$.

8.63. Угол β, под которым пересекаются сферические поверхности (будем отсчитывать его вне проводника) выражается формулами:

$$\beta = \begin{cases} 2\pi - |\xi_2 - \xi_1|\,, & \text{если } \xi_1 \text{ и } \xi_2 \text{ одного знака} \\ 2\pi - |\xi_1 + \xi_2|\,, & \text{если } \xi_1 \text{ и } \xi_2 \text{ разных знаков.} \end{cases}$$

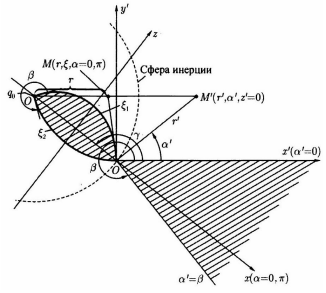


Рис. 8.20

Выбрав центр инверсии O на линии пересечения сфер, положив радиус инверсии равным $2a$ и производя инверсию, получим клин с двугранным углом β и ребром (ось Oz'), перпендикулярным плоскости симметрии ($\alpha = 0, \pi$) рассматриваемого проводника. На рис. 8.20 изображен случай $\xi_1 > 0, \xi_2 < 0$. При инверсии в точке O появится заряд

$q_0' = -2a$ V. Как легко может быть показано, угол $\gamma = \xi_1$, если отсчитывать γ от той грани клина, в которую переходит сферическая поверхность $\xi = \xi_1$. При преобразовании инверсии поверхности $\xi = \text{const}$ переходят в полуплоскости $\alpha' = \text{const}$, причем

$$\xi = \begin{cases} \gamma - \alpha' & \text{при } 0 \leqslant \alpha' \leqslant \pi + \gamma \\ \gamma - \alpha' + 2\pi & \text{при } \pi + \gamma < \alpha' < \beta (\text{ если } \beta > \pi + \gamma) \end{cases} \tag{1}$$

Расстояния r и r' могут быть выражены через координаты ρ, ξ точки наблюдения M (при этом нужно использовать соотношения между декартовыми и тороидальными координатами из задачи 1.98, а также рассмотреть
тодобные треугольники $OO'M'$ и $OO'M$):

$$r = \frac{2ae^{\rho/2}}{\sqrt{2(\operatorname{ch}\rho - \cos\xi)}}, \quad r' = 2ae^{-\rho}$$

Используя выражение для потенциала клина, полученное в задаче 8.51, а также формулы (1) и (2), получим после некоторых преобразований следующее выражение для емкости:

$$C = \frac{q}{V} = \lim_{r\to\infty} \frac{r(\varphi + V)}{V} =$$

$$= \frac{a}{\pi} \int_0^\infty \frac{d\zeta}{\operatorname{sh}\zeta/2} \left(\frac{\pi}{\beta} \frac{\operatorname{sh}(\pi\zeta/\beta)}{\operatorname{ch}(\pi\zeta/\beta) - \cos(2\pi\gamma/\beta)} - \frac{\pi}{\beta} \frac{\operatorname{sh}(\pi\zeta/\beta)}{\operatorname{ch}(\pi\zeta/\beta) - 1} + \frac{\operatorname{sh}\zeta}{\operatorname{ch}\zeta - 1} \right).$$

8.64. а)

$$C = \frac{R}{\pi}(\sin\theta + \theta)$$

б)

$$C = 2R\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \approx \frac{11}{13}R$$

интеграл из решения задачи 8.63 берется подстановкой $e^{-\zeta/2} = x$.

8.65.

$$C = \frac{a}{2}\left(5 - \frac{4}{\sqrt{3}}\right)$$

8.66. Имеем согласно формуле (8.27), полагая $\varphi = 0$ на поверхности сферической оболочки

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \int_V G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')\, \rho_{ext}(\boldsymbol{r}')\, dV' \tag{1}$$

где

$$\rho_{ext}(\boldsymbol{r}') = \frac{q}{2\pi b^2} \delta(b - r')\, \delta(\cos\vartheta') \tag{2}$$

- объемная плотность заряда кольца, расположенного в плоскости (x, y). Угол θ в формуле (3) примера 8.3 нужно выразить через углы (ϑ, α) и (ϑ', α')
по формуле 1.259. Использование производящей функции для полиномов Лежандра (1.182) и теоремы сложения сферических функций (1.195), а также формул (1.184) позволяет получить из (1), (2) искомый потенциал в виде ряда по

полиномам Лежандра:

$$\varphi(r,\vartheta)=q\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-1)!!}{2^n n!}P_{2n}(\cos\vartheta)\begin{cases}r^{2n}\left(b^{-2n-1}-b^{2n}a^{-4n-1}\right), & r<b;\\ b^{2n}\left(r^{-2n-1}-r^{2n}a^{-4n-1}\right), & a\geqslant r>b.\end{cases}$$

8.67.

$$\varphi(r,\vartheta)=\frac{q}{a}\left\{\ln\frac{a}{r}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n+1}{2n(2n+1)}\left[1-\left(\frac{r}{a}\right)^{2n}\right]P_{2n}(\cos\vartheta)\right\}$$

8.68. В равенстве $x+iy=l\,\mathrm{ch}(u+iv)$ отделяем действительную и мнимую части и находим

$$x=l\,\mathrm{ch}\,u\cos v,\quad y=l\,\mathrm{sh}\,u\sin v \tag{1}$$

Разрешая эти уравнения относительно $\cos v$ и $\sin v$, исключаем v и получаем форму кривой в комплексной плоскости z, соответствующую условию $u=\mathrm{const}$:

$$\frac{x^2}{l^2\,\mathrm{ch}^2\,u}+\frac{y^2}{l^2\,\mathrm{sh}^2\,u}=1 \tag{2}$$

Эти кривые представляют собой семейство софокусных эллипсов с одинаковыми фокусными расстояниями

$$l=\sqrt{l^2\,\mathrm{ch}^2\,u-l^2\,\mathrm{sh}^2\,u} \tag{3}$$

Исключая u из уравнений (1), аналогичным образом получаем отображение

$$\frac{x^2}{l^2\cos^2 v}-\frac{y^2}{l^2\sin^2 v}=1 \tag{4}$$

прямых $v=\mathrm{const}$ на семейство софокусных гипербол.

Эти семейства кривых взаимно перпендикулярны. Они могут описывать поле цилиндрических проводников, границы сечений которых имеют форму эллипсов или гипербол (рис. 8.21). В частности, эллипс (1) при $u\ll 1$
вырождается в тонкую полосу шириной l. Эллипсы с конечными u будут описывать поверхности равного потенциала заряженной полосы, а гиперболы представляют собой силовые линии электрического поля (рис. 8.22). Гипербола (4) при $v\ll 1$ и $x\geqslant l$ вырождается в полупрямую. Вторая гипербола при $v=\pi/2$ вырождается в прямую, совпадающую с осью y. Гиперболы с $0<v<\pi/2$ описывают поверхности равного потенциала, создаваемые заряженными плоскостью и полуплоскостью, а эллипсы представляют собой силовые линии (рис. 8.23).

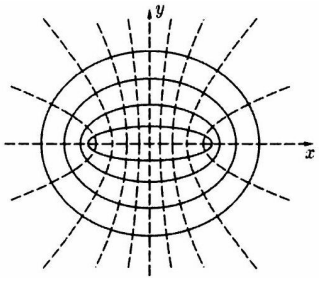


Рис. 8.21

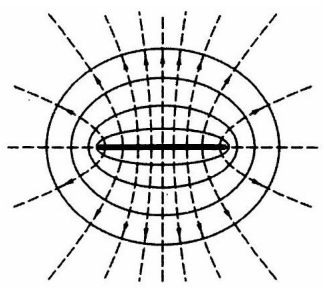


Рис. 8.22

8.69. Устанавливаем форму кривых в z-плоскости, соответствующих заданной аналитической функции. Для этого записываем

$$e^{u+iv} = \frac{x+a+iy}{x-a+iy}, \quad e^{u-iv} = \frac{x+a-iy}{x-a-iy} \tag{1}$$

и перемножаем почленно записанные два равенства. Это позволяет исключить v и получить уравнение окружности

$$(x - a\operatorname{cth} u)^2 + y^2 = a^2 \operatorname{sh}^{-2} u \tag{2}$$

на которую отображаются прямые $u = \text{const}$. Аналогичным образом, деля почленно равенства (1), находим второе семейство окружностей,

$$x^2 + (y + a\cot v)^2 = a^2 \sin^{-2} v \tag{3}$$

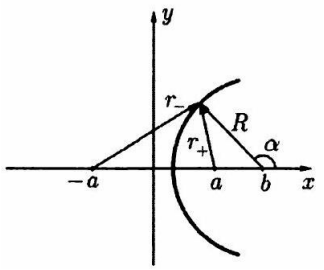


Рис. 8.24

ортогональных первому семейству. Из этих результатов следует, что рассматриваемой функцией можно описать поле заряженных проводников кругового сечения.

Чтобы подобрать нужные радиусы и требуемое расстояние между осями, запишем потенциал, создаваемый двумя нитями с зарядами на единицу длины $\mp\kappa$, находящимися в точках $y = 0, x = \mp a$, в цилиндрических координатах (рис. 8.24):

$$\varphi = \frac{2\kappa}{\varepsilon} \ln \frac{r_-}{r_+}, \quad r_- = \sqrt{(b+a)^2 + R^2 - 2R(b+a)\cos\alpha} \tag{4}$$
$$r_+ = \sqrt{(b-a)^2 + R^2 - 2R(b-a)\cos\alpha}$$

где b - координата центра, а R - радиус окружности равного потенциала. На этой окружности $\varphi = \text{const}$, $\partial\varphi/\partial\alpha = 0$. Второе равенство позволяет найти связь между R и b. Произведя дифференцирование и освободившись от знаменателей, находим $b = \pm\sqrt{R^2 + a^2}$. Выбирая $b_1 > 0$, получаем две возможные связи расстояния $L = b_1 - b_2$ между центрами эквипотенциальных окружностей и их радиусами $R_1 > R_2$:

$$L = \sqrt{R_1^2 + a^2} + \sqrt{R_2^2 + a^2} > R_1 + R_2$$
$$L = \sqrt{R_1^2 + a^2} - \sqrt{R_2^2 + a^2} < R_1 - R_2 \tag{5}$$

Каждое из этих равенств позволяет определить параметр $a > 0$ через заданные величины:

$$a^2 = \frac{\left[R_1^2 - (L + R_2)^2\right]\left[R_1^2 - (L - R_2)^2\right]}{4L^2} > 0. \tag{6}$$

Емкость на единицу длины определяется по формуле $C = \kappa / |\varphi_1 - \varphi_2|$, где φ_1, φ_2 - потенциалы на двух обкладках конденсатора. Вычисляем эти потенциалы в точках $\alpha = \pi/2$. Получаем

$$C = \varepsilon \left[\ln \frac{\left(\sqrt{R_1^2 + a^2} + a\right)\left(\sqrt{R_2^2 + a^2} + a\right)}{\left(\sqrt{R_1^2 + a^2} - a\right)\left(\sqrt{R_2^2 + a^2} - a\right)} \right]^{-1}, L > R_1 + R_2 \tag{7}$$

$$C = \varepsilon \left[\ln \frac{\left(\sqrt{R_1^2 + a^2} - a\right)\left(\sqrt{R_2^2 + a^2} + a\right)}{\left(\sqrt{R_1^2 + a^2} + a\right)\left(\sqrt{R_2^2 + a^2} - a\right)} \right]^{-1}, L < R_1 - R_2 \tag{8}$$

где величина a дается формулой (6) (см. рис. 8.25, 8.26).

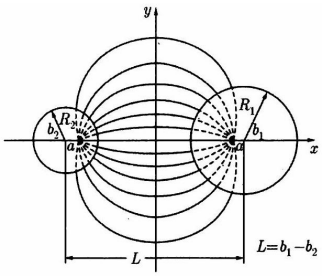


Рис. 8.25

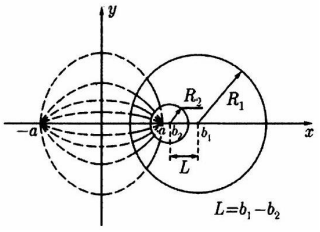


Рис. 8.26

8.70. Из (8.38), (8.47), находим

$$\left(\frac{\partial U}{\partial D^2}\right)_{T,\tau} = T\left(\frac{\partial S}{\partial D^2}\right)_{T,\tau} + \frac{1}{8\pi\varepsilon} = \frac{1}{8\pi\varepsilon}\left[1 + \frac{T}{\varepsilon}\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial T}\right)_{\tau}\right]$$

откуда следует

$$U\left(T, \tau, D^2\right) = U_0(T, \tau) + \frac{D^2}{8\pi\varepsilon}\left[1 + \frac{T}{\varepsilon}\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial T}\right)_{\tau}\right]$$

Изменения внутренней энергии при изотермическом и адиабатическом процессах различны.
8.71.

$$Q = T\Delta S = \frac{TE^2}{8\pi}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial T}\right)_\tau$$

8.72. Полевая добавка к термодинамическим функциям U, F имеет вид

$$\frac{1}{8\pi}\left(\hat{\varepsilon}^{-1}\right)_{\mu\nu} D_\mu D_\nu = \frac{1}{8\pi}\varepsilon_{\mu\nu}E_\mu E_\nu$$

добавка к $\tilde{U}, \tilde{F}$ имеет противоположный знак. Симметрия диэлектрического тензора следует из равенства перекрестных производных от функции состояния U:

$$\frac{\partial^2\tilde{U}}{\partial E_\mu \partial E_\nu} = \frac{\partial^2\tilde{U}}{\partial E_\nu \partial E_\mu}$$

8.73.

$$\frac{dT}{dD^2} = -\frac{T}{8\pi\varepsilon^2 C_D}\frac{d\varepsilon}{dT}, \quad C_D = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_D$$

- теплоемкость диэлектрика при постоянной индукции.
  8.74. Ввиду малого отличия ε для газов от единицы (см. оценку в примере 8.3) формулу, полученную в предыдущей задаче, можно записать в упрощенном виде

$$\frac{dT}{dE^2} = -\frac{T}{8\pi C_V}\frac{d\varepsilon}{dT}$$

где в пренебрежении влиянием электрического поля на теплоемкость $C_D \approx$ $\approx C_V = (5/2)N$. В этих формулах температура выражена в энергетических единицах, теплоемкость относится к единице объема и имеет размерность обратную объему. Множитель 5/2 - безразмернаяя теплоемкость на одну молекулу, имеющую пять степеней свободы (три поступательные и две вращательные). Воспользовавшись (7.33) и перейдя к температуре, выраженной в градусах Кельвина, после интегрирования получим $T_2^2 - T_1^2 = 2p^2E^2/15k_B^2, k_B$ - постоянная Больцмана, или

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{p^2E^2}{15k_B^2T^2} = \frac{E^2}{15E_c^2}$$

где $E_c \approx 3 \times 10^6$ В/ см - значение напряженности, при которой поляризация диэлектрика приобретает нелинейный характер. При $E \ll E_c$ электрокалорический эффект мал.
8.75. Решается по образцу примера (8.7).
8.76. С помощью (8.47) получаем
$C_{VD} - C_{V0} = \frac{TD^2}{8\pi\varepsilon^2}\left[\left(\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial T^2}\right)_\tau - \frac{2}{\varepsilon}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial T}\right)_\tau^2\right], C_{VE} - C_{V0} = \frac{TE^2}{8\pi}\left(\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial T^2}\right)_\tau$
8.77. При нелинейной связи между D и E пользуемся методом якобианов:

$$C_D = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_D = T\frac{\partial(S,D)}{\partial(T,D)} = T\frac{\partial(S,D)}{\partial(T,E)}\frac{\partial(T,E)}{\partial(T,D} = \tag{1}$$
$$= T\left(\frac{\partial E}{\partial D}\right)_T\left[\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_E\left(\frac{\partial D}{\partial E}\right)_T - \left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_T\left(\frac{\partial D}{\partial T}\right)_E\right]$$

Из равенства перекрестных производных свободной энергии $\tilde{F}$ в (8.42) находим

$$\left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_T = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial D}{\partial T}\right)_E \tag{2}$$

и получаем окончательно в общем (нелинейном) случае

$$C_E - C_D = \frac{T(\partial D/\partial T)_E^2}{4\pi(\partial D/\partial E)_T} \tag{3}$$

При $D = \varepsilon E$ уравнение (3) дает

$$C_E - C_D = \frac{TE^2}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial T}\right)_\tau^2 \tag{4}$$

Это же значение разности можно получить из результатов предыдущей задачи. Условие $\tau = \text{const}$ означает, что C_D, C_E вычисляются при постоянном объеме. Если поддерживается постоянное давление, то в (3), (4) производные нужно брать при $p = \text{const}$.

8.80. Вводим термодинамический потенциал Гиббса тела $\tilde{\Phi}(T, p, \mathscr{E}) = \tilde{U} - T\tilde{S} + pV$, полный дифференциал которого с помощью (8.51) записываем в виде

$$d\tilde{\Phi} = -\tilde{S}dT + Vdp - \mathscr{P}d\mathscr{E} \tag{1}$$

(здесь мы направили внешнее поле вдоль одной из главных осей тензора поляризуемости, чтобы направления векторов $\mathscr{P}$ и $\mathscr{E}$ совпадали. Поляризуемость в этом направлении в дальнейшем обозначаем через β). Из равенства перекрестных производных находим

$$\left(\frac{\partial \mathscr{P}}{\partial p}\right)_{T\mathscr{E}} = -\left(\frac{\partial V}{\partial \mathscr{E}}\right)_{Tp} \tag{2}$$

Дифференцируя равенство $\mathscr{P} = V\beta\mathscr{E}$, получаем из (2)

$$\left(\frac{\partial V}{\partial \mathscr{E}}\right)_{Tp} = V\mathscr{E}\left[\beta\kappa - \left(\frac{\partial \beta}{\partial p}\right)_T\right] \tag{3}$$

где $\kappa = -(1/V)(\partial V/\partial p)_T$ - изотермическая сжимаемость. Уравнение (3) можно проинтегрировать по V и по $\mathscr{E}$ путем разделения переменных, имея в виду, что поляризуемость и сжимаемость при фиксированных T и p не зависят от объема (и от внешнего поля). Считая эффект электрострикции малым, находим

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{1}{2}\mathscr{E}^2\left[\beta\kappa - \left(\frac{\partial \beta}{\partial p}\right)_T\right] \tag{4}$$

8.81. $Q = T\Delta S$, где ΔS - приращение энтропии, обусловленное внешним полем. Вычисляя энтропию через $\tilde{\Phi}(T, p, \mathscr{E})$, находим

$$\dot{Q} = \frac{1}{2}VT\mathscr{E}^2\left[\beta k + \left(\frac{\partial \beta}{\partial T}\right)_p\right]$$

где $k = (1/V)(\partial V/\partial T)_p$ - коэффициент теплового расширения.

8.83.

$$f = \frac{\varepsilon - 1}{8\pi}\nabla E^2$$

8.84.

$$\boldsymbol{f} = \frac{(\varepsilon-1)(\varepsilon+2)}{24\pi}\nabla E^2$$

8.85. Использовав первую формулу (8.72), находим

$$\Delta\varepsilon = \varepsilon|_{T>T_0} - \varepsilon|_{T<T_0} = \frac{16\pi\gamma}{\beta^2}, \quad T_0 - T_C = \frac{3\beta^2}{15a\gamma}$$

8.86. а) $f_0 = \frac{E_0^2}{8\pi} = \frac{V^2}{8\pi d^2}$;
б) $f_0 = \frac{D^2}{8\pi\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon}f_0$ (жидкий диэлектрик),
$f = \frac{D^2}{8\pi} = f_0$ (твердый диэлектрик);
в) $f = \frac{\varepsilon E^7}{8\pi} = \varepsilon f_0$ (жидкий диэлектрик),
$f = \frac{\varepsilon E^2}{8\pi} = \varepsilon^2 f_0$ (твердый диэлектрик).
8.87. а) $F = \frac{(\varepsilon-1)bh_2V^2}{8\pi\varepsilon h_1\left[h_1 - \frac{h_2(\varepsilon-1)}{\varepsilon}\right]}$;
б) $F = -\frac{2\pi q^2 h_1 h_2[h_1\varepsilon - h_2(\varepsilon-1)](\varepsilon-1)}{b[\varepsilon a h_1 - (\varepsilon-1)h_2 x]^2}$. Общие знаки минус говорят о втягивании диэлектрика в конденсатор (координата x стремится уменьшиться).
8.88. Сравним давление в точках A и B жидкости (рис. 8.27). В точке B давление равно атмосферному $p_{\text{атм.}}$ Давление в точке A можно найти двумя способами. С одной стороны, по формуле (8.67) при $\tau = \text{const}$ (несжимаемая жидкость) имеем $p_A = p_{\text{атм}} + \frac{E^2}{8\pi}\frac{\tau\partial\varepsilon}{\partial\tau}$ (здесь $p_{\text{атм}} = p_0, E = V/d$). С другой стороны, p_A отличается от давления у поверхности жидкости в конденсаторе, определяемого формулой (8.67), на величину гидростатического давления $rgh, p_A = rgh + \tau\frac{E^8}{8\pi}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau} -$

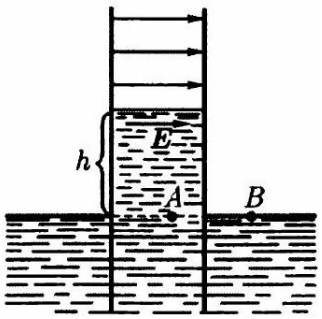


Рис. 8.27 $-\frac{\varepsilon-1}{8\pi}E^2 + p_{\text{атм}}$. Сравнивая, получим

$$h = \frac{\varepsilon-1}{8\pi g\tau}E^2$$

8.89. Тензор максвеллова натяжения σ_n' направлен так, что электрическое поле $\boldsymbol{E}$ делит пополам угол между $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{\sigma_n'}$ (рис. 8.28). $|\boldsymbol{\sigma}_n'| = w = \frac{\varepsilon E^2}{8\pi}$ при любой ориентации площадки. Стрикционное натяжение $\sigma_n'' = \frac{E^2\tau\boldsymbol{n}}{8\pi}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}$
имеет всегда характер «отрицательного давления» - оно направлено вдоль нормали $\boldsymbol{n}$ к площадке.
8.90. а) Введем цилиндрические

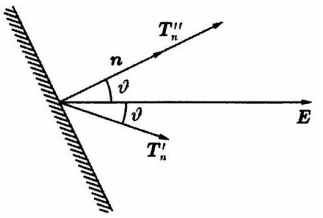


Рис. 8.28 координаты, как показано на рис. 8.29а. На плоскости xy поле имеет радиальное направление, его величина $E = \frac{2qr}{\varepsilon(r^2+a^2/4)^{3/2}}$. Для вычисления силы F, действующей на один из зарядов, например, на левый, нужно просуммировать напряжения, приложенные к элементам dS этой плоскости со стороны, обращенной к другому заряду:

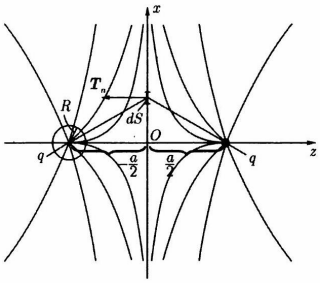
$$\sigma_z dS = -\frac{\varepsilon}{8\pi}E^2 dS = -\frac{\varepsilon q^2}{2\pi}\frac{r^2}{\left(r^2+a^2/4\right)^3\varepsilon^2}dS$$

если воспользоваться максвелловым тензором натяжений. Отсюда

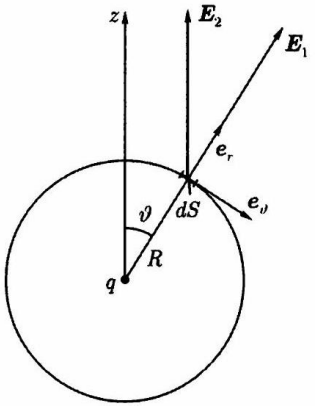
$$F_z = \int \sigma_z dS = -\frac{1}{2\pi}\varepsilon q^2 \int\limits_0^\infty \frac{r^2 2\pi r dr}{\varepsilon^2\left(r^2+a^2/4\right)^3} = -\frac{q^2}{\varepsilon a^2}$$

Именно такое значение обычно принимается для силы, действующей между зарядами в однородном диэлектрике. Однако, если провести то же самое вычисление с полным тензором натяжений, то сила будет равна $F_z + +\Delta F_z$, где $\Delta F_z = q^2\varepsilon^{-2}a^{-2}\tau\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}$ получается за счет стрикционного члена. Но в теории, учитывающей электрострикционные натяжения, нужно также учитывать явление втягивания жидкости в поле и связанное с этим повышение гидростатического давления в жидкости на величину $\Delta p = \frac{E^2\tau}{8\pi}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}$, согласно 8.67. Результирующая гидростатическая сила $\Delta F_{zh} = -\frac{q^2\tau}{\varepsilon^2 a^2}\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau} = -\Delta F_z$. Полная сила взаимодействия зарядов $F_z + \Delta F_z + \Delta F_{zh} = -\frac{q^2}{\varepsilon a^2}$ совпадает с той силой, которая получается без учета стрикционных сил и представляет собой, таким образом, результирующую электрических и механических сил.

б) Те же результаты получаются, если рассматривать действие натяжений на поверхности малой сферы радиуса R с центром в той точке,



а)



б)

Рис. 8.29

где находится заряд q, испытывающий действие силы (рис. 8.29б). Введем сферические координаты и рассмотрим максвелловы натяжения $T'_n = \frac{\varepsilon}{4\pi}\left(\boldsymbol{E}E_r - \frac{1}{2}E^2\boldsymbol{e}_r\right)$, где $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2$, $\boldsymbol{E}_1 = \frac{q}{\varepsilon R^2}\boldsymbol{e}_r$ - поле заряда, испытывающего действие силы, $\boldsymbol{E}_2 = \frac{q}{\varepsilon a^2}\left(\boldsymbol{e}_\vartheta\sin\vartheta - \boldsymbol{e}_r\cos\vartheta\right)$

- поле второго заряда, которое можно рассматривать как однородное, так как расстояние между зарядами $a \gg R$. Просуммировав натяжения, приложенные к поверхности сферы, получим

$$\boldsymbol{F} = \int \boldsymbol{T}'_n dS = \frac{q}{\varepsilon a^2} e_z.$$

Рассмотрение стрикционных натяжений опять не дало бы ничего нового из-за гидростатической компенсации.

8.91.

$$\varphi_0 = \sqrt{\frac{8mg}{\varepsilon - 1}}$$

где g - ускорение силы тяжести.

8.92.

$$F = \frac{q^2 (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{4a^2 \varepsilon_2 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}$$

При $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ заряд отталкивается от границы диэлектриков, при $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ - притягивается. Заряд, находившийся вначале в среде с большим ε, отталкиваясь от границы, стремится уйти на бесконечность. Заряд, находившийся сначала в среде с меньшим ε, притягивается к границе, пересекает ее и затем, будучи уже в другой среде, отталкиваясь от границы удаляется на бесконечность. (Сказанное будет справедливо только в том случае, если пренебречь силой трения, действующей на заряд со стороны среды.)

Приведенное значение силы F можно получить разными способами: а) рассматривая взаимодействие двух точечных зарядов q' и q''; б) вычисляя силу, действующую на точечный заряд со стороны связанных зарядов, находящихся на границе раздела диэлектриков; в) с помощью тензора натяжений Максвелла. В последнем случае удобно рассмотреть натяжения, приложенные либо к плоскости раздела диэлектриков, либо к поверхности малой сферы, окружающей заряд.

8.93.

$$F_1 = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} \frac{q_1^2}{4a^2} + \frac{q_1 q_2}{2 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) a^2}$$

$$F_2 = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2 (\varepsilon_1 + \varepsilon_1)} \frac{q_2^2}{4a^2} + \frac{q_1 q_2}{2 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) a^2}$$

Неравенство сил, действующих на заряды q_1 и q_2 объясняется тем, что эти заряды сами по себе не образуют замкнутую механическую систему; имеются еще связанные заряды на границе раздела диэлектриков. Векторная сумма сил, приложенных к этой границе и к зарядам q_1 и q_2, равна нулю, как и должно быть.

8.94. Если положить в металле $\varphi = 0$, то в диэлектрике $\varphi = q/\varepsilon r_1$ - $-q/\varepsilon r^2$ (см. рис. 8.1: заряд q в точке A, заряд $-q$ в точке $B; \varepsilon_1 = \varepsilon$, $\varepsilon_2 = \infty$). Член $-q/\varepsilon r_2$, обусловленный наведенным зарядом проводника и связанными зарядами диэлектрика, имеет такой вид, как если бы он описывал поле точечного заряда $-q/\varepsilon$, находящегося в точке с координатой $z = -a$. Заряд $-q/\varepsilon$ называется изображением заряда q/ε относительно плоскости $z = 0$ (множитель $1/\varepsilon$ учитывает влияние диэлектрика).

$$\sigma = -\frac{qa}{2\pi r^3}, \quad F = -\frac{q^2}{4a^2 \varepsilon}$$

где $\boldsymbol{r}$ - радиус-вектор в плоскости $z = 0$.

8.95. Пусть диполь находится в точке $(0, 0, z)$. Если проекции дипольного момента $\boldsymbol{p}$ на оси x, y, z равны $p\sin\alpha, 0, p\cos\alpha$, то проекции его изображения $\boldsymbol{p}'$ на те же оси будут $-p\sin\alpha, 0, p\cos\alpha$.

$$U = \frac{(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{p})r^2 - 3(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r})(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r})}{2\varepsilon r^5} = -\frac{p^2}{16\varepsilon z^3}\left(1+\cos^2\alpha\right),^5$$

$$F = -\frac{3p^2}{16\varepsilon z^4}\left(1+\cos^2\alpha\right), \quad N_\alpha = -\frac{p^2\sin 2\alpha}{16\varepsilon z^3}$$

При любой ориентации $\boldsymbol{p}$ диполь притягивается к плоскости. Вращательный момент $\boldsymbol{N}$ стремится установить диполь вдоль положительного или отрицательного направления оси $z(\alpha = 0, \pi)$. Момент $N = 0$ также и при $\alpha = \pi/2$, но это положение равновесия неустойчиво.

8.96. Силу F, приложенную к заряду q, можно найти, помножив q_1 на напряженность поля, созданную вторым зарядом q_2 в полости, где находится q_1. Так как полость мала, поле в ней будет однородным с напряженностью, равной

$$\frac{3\varepsilon E_0}{2\varepsilon+1} = \frac{3q}{(2\varepsilon+1)a^2}$$

где $E_0 = \frac{q}{\varepsilon a^2}$ - однородное поле в окрестности полости.

Отсюда

$$F = \frac{3q^2}{(2\varepsilon+1)a^2}$$

Эта сила отличается от той, которая действовала бы между такими же зарядами в однородном жидком диэлектрике с тем же значением ε (см. задачу 8.90). Если бы мы аналогично задаче 8.30 попробовали найти силу, приложенную к плоскости симметрии, то получили бы при учете только максвелловых натяжений значение силы $F_1 = \frac{q^2}{\varepsilon a^2}$, отличающееся как от силы F, приложенной к самому заряду, так и от полной электрической силы натяжений (не учтен стрикционный член, имеющий сложный

вид в случае твердого тела). Такая же сила будет действовать на любую область диэлектрика, охватывающую полость с заключенным в ней зарядом. Часть этой силы $\frac{3q^2}{(2\varepsilon+1)a^2}$ приложена к точечному заряду q, другая часть $F' = -\frac{(2\varepsilon-1)q^2}{(2\varepsilon+1)a^2\varepsilon}$ - к связанным зарядам, наведенным на поверхности полости.

8.97.

$$\varphi_1(r,\vartheta) = q\sum_{l=0}^{\infty}\frac{2l+1}{l\varepsilon_1+(l+1)\varepsilon_2}\cdot\frac{r^l}{a^{l+1}}P_l(\cos\vartheta) \quad \text{при} \quad r \leqslant J$$

$\varphi_2(r,\vartheta) = \frac{q}{\varepsilon_2 r_1} + q\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{l}{l\varepsilon_1+(l+1)\varepsilon_2}\cdot\frac{R^{2l+1}}{a^{l+1}}\cdot\frac{P_l(\cos\vartheta)}{r^{l+1}}$ при $r \geqslant R$,

где r_6 - расстояние от q до точки наблюдения. Здесь потенциал не может быть представлен простой системой изображений, в отличие от случая проводящего шара. При $\varepsilon_1 \to \infty$ получим результат задачи 8.14*.

$$

---

[05] Множитель 1/2 в выражении U возникает благодаря тому, что поле $\boldsymbol{E}'$ дипольного момента p' пропорционально p. При увеличении p на ds (и неизменной ориентации) энергия взаимодействия возрастает на $dU = -\boldsymbol{E}'d\boldsymbol{p}$, откуда $U = \int_0^p dU = -\frac{1}{2}(\boldsymbol{E}'\cdot\boldsymbol{p})$ (ср. с решением задачи 8.104*.

$$F = -\frac{q^2\,(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{\varepsilon_2} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{l(l+1)}{l\varepsilon_1 + (l+1)\varepsilon_2} \frac{R^{2l+1}}{a^{2l+3}}$$

$$F = \frac{q^2}{\varepsilon_2 (2a)^2} - \frac{2q^2\,(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{\varepsilon_2} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l(2l+1)}{2l\varepsilon_1 + (2l+1)\varepsilon_2} \frac{R^{4l+1}}{a^{4l+3}}$$

$$

Сила отталкивания одноименных зарядов ослабляется поляризацией диэлектрика при $\varepsilon_2 > \varepsilon_2$ и усиливается при $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$.

8.98. Обозначим поверхности внутренней и внешней сфер соответственно через S_1 и S_2 и положим потенциал внешней сферы равным нулю. Удобно решать задачу в сферической системе координат с полярной осью, направленной вдоль линии, соединяющей центры сфер, и с началом координат в центре внутренней сферы(рис. 8.30). В этих координатах уравнение поверхности S_1 запишется в виде $r = a$. Чтобы получить уравнение поверхности S_2, заметим, что из треугольника $OO'A$ следует:

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + c^2 - 2cR\cos\vartheta}} \tag{1}$$

Из (1) с точностью до членов первого порядка по c находим уравнение поверхности S_2:

$$R(\vartheta) = b + cP_1(\cos\vartheta) \tag{2}$$

где

$$P_1(\cos\vartheta) = \cos\vartheta$$

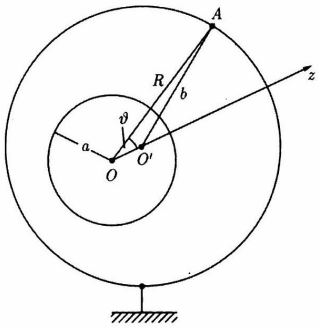


Рис. 8.30

Член $cP_1(\cos\vartheta) = c\cos\vartheta$ в (2) описывает отклонение от сферической симметрии, которое обращается в нуль при $c \to 0$. Естественно искать потенциал в виде разложения по сферическим гармоникам, ограничившись первыми двумя членами. При этом второй член, учитывающий отклонение от сферической симметрии, должен быть пропорционален c.

Итак, положим

$$\varphi(r, \vartheta) = \left(A_1 + \frac{B_1}{r}\right) + c\left(A_2 + \frac{B_2}{r}\right)\cos\vartheta \tag{3}$$

где A_i и B_i определяются из граничных условий:

$$\varphi|_{S_1} = \text{ const }, \quad \varphi|_{S_2} = 0, \quad \oint_{S_1} \frac{\partial\varphi}{\partial n} dS_1 = -4\pi q$$

Окончательно:

$$\varphi = q\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b}\right) + \frac{qc}{b^3 - a^3}\left(r - \frac{a^3}{r^2}\right)\cos\vartheta$$

Отсюда плотность заряда на внутренней сфере:

$$\sigma = \frac{q}{4\pi a^2} - \frac{3qc}{4\pi\left(b^3 - a^3\right)}\cos\vartheta$$

сила, действующая на внутреннюю сферу:

$$F = -\frac{qc}{b^3 - a^3}$$

8.99. При увеличении заряда q на dq энергия U его взаимодействия с шаром возрастет на $dU = \varphi' dq$, где φ' - потенциал индуцированных на шаре зарядов. Но этот потенциал сам пропорционален q : $\varphi' = \text{const} \cdot q$. Поэтому

$$U = \int_0^q dU = \frac{\text{const}}{2} q^2 = \frac{1}{2}\varphi' q \tag{1}$$

Если бы величина φ' не зависела от q (потенциал внешнего поля), то энергия взаимодействия была бы вдвое больше ($U = \varphi' q$). Используя (1) и результаты задачи 8.14*, получим

$$U = -\frac{q^2 R}{2\varepsilon\left(a^2 - R^2\right)}$$

откуда

$$F = -\frac{q^2 a R}{\varepsilon\left(a^2 - R^2\right)^2}$$

8.100.

$$U = \frac{Qq}{\varepsilon a} - \frac{q^2 R^3}{2a^2\varepsilon\left(a^2 - R^2\right)}; \quad F = \frac{Qq}{\varepsilon a^2} - \frac{q^2 R^3\left(2a^2 - R^2\right)}{\varepsilon a^3\left(a^2 - R^2\right)^2}$$

В случае одноименных зарядов $Qq > 0$, и сила взаимодействия может обратиться в нуль, а при достаточно больших q или малых расстояниях a даже стать отрицательной (притяжение).

8.101. Пробный заряд q должен быть мал по сравнению с зарядами, расположенными на других проводниках и диэлектриках, и не должен находиться слишком близко к местам неоднородности среды, например, к границам проводников и диэлектриков, чтобы обратное влияние зарядов, наводимых пробным телом, было мало. Например, при измерении электрического поля заряженного проводящего шара нужно, чтобы сила электрического изображения была мала по сравнению с измеряемой силой $\frac{qQ}{a^2}$ (Q - заряд шара, a - расстояние от пробного заряда до центра шара). Это приводит к условию (см. ответ предыдущей задачи)

$$\left|\frac{Q}{q}\right| \gg 2\frac{(2a/R - 1)^2}{(a/R)(a/R - 1)^2}$$

которое выполняется только при не слишком малых a/R и не слишком больших q/Q.

8.102. Изображением электрического диполя $\boldsymbol{p} = p\left(\boldsymbol{e}_x \sin\alpha + \boldsymbol{e}_z \cos\alpha\right)$ в заземленном шаре является система, состоящая из точечного заряда $q = \frac{pR}{r^2}\cos\alpha$ и диполя

$\boldsymbol{p}' = p\left(\frac{R}{r}\right)^3(-\boldsymbol{e}_x\sin\alpha + \boldsymbol{e}_z\cos\alpha)$, находящихся в точке A' (рис. 8.31) на расстоянии $r' = \frac{R^2}{r}$ от центра шара.

$$U = -\frac{p^2R\left(r^2\cos^2\alpha + R^2\right)}{2\varepsilon\left(r^2 - R^2\right)^3}$$

$$F = -\frac{p^2Rr}{\varepsilon\left(r^2 - R^2\right)^4}\left[\left(2r^2 + R^2\right)\cos^4\alpha + 3R^2\right]$$

$$N = -\frac{p^2Rr^2\sin 2\alpha}{2\varepsilon\left(r^2 - R^2\right)^3}$$

В предельном случае $r \to R$ получим, полагая $r = R + z$, $R \to \infty$, $z = \text{const}$, результаты задачи 8.95 (диполь у проводящей плоскости).

8.103. $\sigma = -\left(3p/4\pi R^3\right)\cos\vartheta$, где ϑ - угол между $\boldsymbol{p}$ и направлением из центра в точку наблюдения.

Индуцированные заряды создают в полости однородное поле $E = \frac{p}{R^3}$.

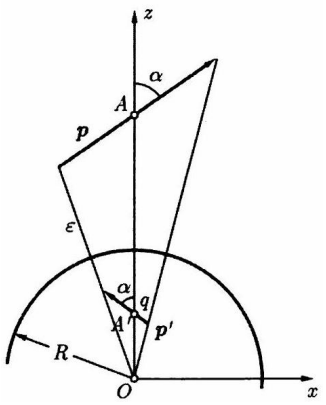


Рис. 8.31

8.104. Силы, действующие на неоднородность, могут быть получены дифференцированием величины

$$U' = \sum_{l,m} a_{lm}Q^*_{lm} \tag{1}$$

при постоянных Q^*_{lm}.

Величина U' отличается от истинной энергии взаимодействия области неоднородности с внешним полем U, определяемой работой, которую надо совершить, чтобы при наличии неоднородности создать поле φ (ср. с (8.68)). При нахождении такой энергии нужно учитывать, что моменты Q_{lm} зависят от внешнего поля. В частности, если область неоднородности представляет собой незаряженный проводник или диэлектрик, то истинная энергия взаимодействия неоднородности с внешним полем определяется формулой

$$U = \frac{1}{2}\sum_{l,m} a_{lm}Q^*_{lm} \tag{2}$$

Коэффициент 1/2 можно получить так же, как это сделано в решении задачи 8.79, учитывая, что в этом случае Q_{lm} пропорциональны a_{lm}. При нахождении обобщенных сил с помощью выраженная (2) путем дифференцирования по обобщенным координатам как Q_{lm}, так и a_{lm} следует считать переменными величинами.

8.105. $U_0 = q\varphi_0 - \boldsymbol{p}\boldsymbol{E}_0$,

при этом
$\varphi_1 = \varphi_0 - \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{E}_0$, $\varphi_2 = \frac{q}{\varepsilon r} + \frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}{\varepsilon r^3}$, $\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E}_0 + (\boldsymbol{p}\cdot\nabla)\boldsymbol{E}_0$, $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{p}\times\boldsymbol{E}_0$ (вращательный момент вычисляется относительно начала координат).
8.107. Тело стремится занять такое положение, при котором его потенциальная энергия $U = -\frac{1}{2}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{E}$ - минимальна. Удобно направить координатные оси вдоль главных осей тензора β_{ik}, тогда $U = -\frac{1}{2}\left(\beta^{(x)}E_x^2 + +\beta^{(y)}E_y^2 + \beta^{(z)}E_z^2\right)$. Отсюда видно, что если $\beta^{(x)} \geqslant \beta^{(y)} \geqslant \beta^{(z)} > 0$, то
минимум U имеет место, когда $\boldsymbol{E}\|Ox$; если же $\beta^{(x)} \leqslant \beta^{(y)} \leqslant \beta^{(z)} < 0$, то минимум получается при $\boldsymbol{E}\|Oz$.
8.108. Ось стержня и плоскость диска стремятся установиться при $\varepsilon_1 > \varepsilon_9$ параллельно направлению поля, а при $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ - перпендикулярно.
8.109.

$$F = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2} q^2 \sum_{l=0}^{\infty} \frac{l(l+1)}{l\varepsilon_1 + (l+1)\varepsilon_2} \cdot \frac{R^{2l+1}}{a^{2l+3}}$$

При $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$ происходит притяжение, при $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$ - отталкивание. В случае проводящего шара $\varepsilon_1 \to \infty$. Суммируя геометрическую прогрессию, найдем энергию взаимодействия $U = -q^2 R/2\varepsilon_2\left(R^2 - a^2\right)$, откуда

$$F = -\frac{q^2 a R}{2\varepsilon_2\left(a^2 - R^2\right)^2}$$

(ср. с задачей 8.99).
Сделаем некоторые замечания к вычислению силы с помощью формулы (8.82). Рассмотрим величину $U' = (1/8\pi)\int\limits_{V'}\left(\varepsilon_2 - \varepsilon_1\right)\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}_1 dV'$. Объем V' ограничен сферой S, бесконечно близкой к поверхности диэлектрического шара и находящейся целиком внутри него. Интеграл, входящий в выражение U', лишь на бесконечно малую величину отличается от потенциальной энергии U взаимодействия точечного заряда с шаром. Введем вместо напряженностей суммарного поля $\boldsymbol{E}$ и поля точечного заряда $\boldsymbol{E}_1$ в однородном диэлектрике ε_2 соответствующие потенциалы и вынесем постоянную величину $(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)$ за знак интеграла. Тогда $U' = \left(\left(\varepsilon_2 - \right. \right. \left. \left. -\varepsilon_1\right)/8\pi\right)\int\limits_{V'}\nabla\varphi\cdot\nabla\varphi_1 dV'$. Применив формулу Грина $\int\nabla\varphi\cdot\nabla\varphi_1 dV = \oint_S \varphi\frac{\partial\varphi_1}{\partial n}dS + \int\varphi\Delta\varphi_1 dV$, и воспользовавшись тем, что внутри шара $\Delta\varphi_1 = 0$, найдем для U следующее выражение:

$$U = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2} q^2 \sum_{l=0}^{\infty} \frac{l}{l\varepsilon_1 + (l+1)\varepsilon_2} \cdot \frac{R^{2l+1}}{a^{2l+3}}$$

Оно совпадает с выражением, получающимся из формулы (2) задачи 8.104*. Отсюда для F получим приведенное выше значение.
8.110.

$$F = \left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)_V = \frac{C_1 C_2}{\varepsilon r^2}\left(V_1 V_2 - \frac{C_1 V_1^2}{\varepsilon r} - \frac{C_2 V_2^2}{\varepsilon r}\right)$$

либо

$$F = -\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)_q = \frac{q_1 q_2}{\varepsilon r^2}$$

8.111. Энергия уменьшается на величину

$$\Delta W = \frac{(q-q')^2 (r-b)}{4br}$$

8.112. С точностью до $1/r$,

$$F = -\frac{C^2 b q^2}{r^3 \left[C + ab(b-a)^{-1}\right]^2}$$

8.113. 1. На поверхности проводника (и любого твердого тела) образуется двойной электрический слой, поскольку легкие и подвижные электроны с большей вероятностью, чем тяжелые ионы, оказываются на периферии среды. Образующийся таким образом поверхностный дипольный момент существенно зависит от чистоты поверхности и качества ее обработки. Он зависит также от свойств и количества посторонних молекул, особенно полярных, которые могут специально высаживаться на поверхность или налипать на нее из атмосферы. В отсутствие таких примесей работа выхода является характерным параметром, присущим данному телу и его термодинамическому состоянию.

Требуемую связь между κ и A можно найти с помощью формулы (2.25), если записать ее в виде

$$\varphi_2 - \varphi_1 = 4\pi \int\limits_{-\infty}^{\infty} z\rho(z)dz \tag{1}$$

где φ_1, φ_2 - электростатические потенциалы соответственно внутри проводника и вне его на значительном расстоянии от поверхности, $\rho(z)$ плотность электрического заряда, причем все эти величины в отличие от обычных макроскопических величин не усреднены по координате z, отсчитываемой вдоль нормали к поверхности. Фактически интегрирование в (1) производится по длине в десяток атомных расстояний, так как вне этого интервала $\rho(z) \to 0$. Интеграл характеризует плотность дипольного момента на поверхности проводника и может иметь оба знака в зависимости от
распределения зарядов в переходном слое:

$$\kappa_z = \int\limits_{-\infty}^{\infty} z\rho(z)dz = \pm\kappa$$

где $\kappa > 0$ совпадает с плотностью дипольного момента, которая была определена как существенно положительная величина в формуле (2.25).

Работа по удалению частицы из проводника совершается против электрических сил, поэтому

$$A = -e \int\limits_{11}^{(2)} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = e\left(\varphi_2 - \varphi_1\right) = 4\pi e \kappa_z \tag{2}$$

Величины e, κ_z зависят не только от свойств поверхности, но и от рода частицы, удаляемой из проводника.
2.

$$\varphi_b - \varphi_a = \frac{A_b - A_a}{e} \tag{3}$$

Контактная разность потенциалов (3) возникает при установлении равновесия между соприкасающимися проводниками. При этом часть частиц перейдет в проводник с

большей работой выхода. Величину (3) можно получить, рассмотрев перемещение одной частицы из точки A в точку B

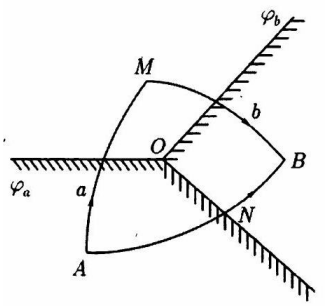


Рис. 8.32 (рис. 8.32) по двум путям: один путь, ANB, проходит внутри проводников a и b, и работа по нему равна нулю. Другой путь, AMB, захватывает внешнюю область (вакуум).
3. В цилиндрических координатах r, α

$$\varphi = \varphi_a + \frac{\varphi_b - \varphi_a}{\gamma}\alpha, \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant \gamma; \quad E_\alpha = \frac{\varphi_a - \varphi_b}{\gamma r} \tag{4}$$

Здесь радиус r не должен превышать масштаб точности обработки поверхности и, разумеется, атомных расстояний.

8.114.

$$\frac{dW}{dt} = \frac{4h}{\varepsilon a^2} q\dot{q}$$

11.3 9 Direct Current and Magnetic Field in Media

11.3.1 9.1. Direct Current

Уравнения и граничные условия с учетом сторонних ЭДС. Объемная плотность постоянного тока $j(\boldsymbol{r})$ удовлетворяет уравнению (2.48)

$$\operatorname{div} \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) = 0 \tag{9.1}$$

которое является следствием закона сохранения электрического заряда. В проводящей среде с удельной электропроводностью $\kappa(\boldsymbol{r})$ плотность тока связана с напряженностью электрического поля законом Ома (7.25). При наличии во всем проводнике только электростатических сил их воздействие на свободные заряды проводника привело бы к перетеканию зарядов и выравниванию потенциалов вплоть до установления состояния с $\boldsymbol{E} = 0$ и прекращения тока. Для того, чтобы существовал стационарный ток, необходимо наличие в проводящей среде сил неэлектростатических, которые поддерживали бы разность потенциалов между разными частями проводника. Эти силы называются сторонними электродвижущими силами (ЭДС). Примером таких сторонних (неэлектростатических) сил является ЭДС индукции, рассматривавшаяся в разделе 2.3 и вызванная изменением во времени магнитного поля. К ним относятся также статические силы, возникающие из-за химической и физической неоднородности проводника (гальванический элемент, аккумулятор, градиент температуры, градиент концентрации и др.). Сторонние силы можно характеризовать эквивалентной напряженностью их поля $\boldsymbol{E}_{\text{ext}}$. Закон Ома (7.25) с учетом сторонних ЭДС примет вид

$$\boldsymbol{j} = \kappa\,(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{E}_{\text{ext}}\,)\,. \tag{9.2}$$

Для описания электрического поля $\boldsymbol{E}$ и распределения токов $\boldsymbol{j}$ в проводнике при наличии сторонних сил удобно, как и в электростатике, ввести
скалярный потенциал φ, связанный с напряженностью поля формулой (2.8): $\boldsymbol{E} = -\nabla\varphi$. Из последнего соотношения и уравнений (9.1), (9.2) следует дифференциальное уравнение для φ:

$$\nabla \cdot (\kappa\nabla\varphi) = \nabla \cdot \kappa\boldsymbol{E}_{\text{ext}} \tag{9.3}$$

На поверхностях разрыва κ или $\boldsymbol{j}_{\text{ext}} = \kappa\boldsymbol{E}_{\text{ext}}$ уравнение (9.3) заменяется граничными условиями

$$\kappa_2 E_{2n} - \kappa_1 E_{1n} = j_{1n}^{(\text{ext}\,)} - j_{2n}^{(\text{ext}\,)}, \quad \cdot\varphi_1 = \varphi_2 \tag{9.4}$$

На поверхности изоляторов ($\kappa = 0$) первое условие (10.4) принимает вид $j_n = 0$ или

$$\kappa E_n + j_n^{(ext)} = 0 \tag{9.5}$$

Если среда состоит из ряда однородных областей и не содержит внутри себя сторонних ЭДС, то внутри каждой такой области

$$\Delta\varphi_k = 0 \tag{9.6}$$

а на границе i-й и k-й областей (суммирования нет!)

$$\varphi_i = \varphi_k, \quad \kappa_i \frac{\partial\varphi_i}{\partial n} = \kappa_k \frac{\partial\varphi_k}{\partial n}. \tag{9.7}$$

Из сравнения этих уравнений с уравнениями раздела 8.1 видно, что существует тесное соответствие между основной токовой задачей по определению потенциала φ и аналогичной задачей электростатики при наличии сред. Решение токовой задачи может быть получено из решения задачи электростатики (и наоборот), если заменить величины электростатические на токовые:

$$\left.\begin{array}{rl} \text{Electro-} & \text{Steady} \\ \text{statics} & \text{currents} \\ \varepsilon & \kappa, \\ \varphi & \varphi, \\ D = -\varepsilon\nabla\varphi & -\kappa\nabla\varphi, \\ 4\pi\rho & -\nabla \cdot \boldsymbol{j}_{\text{ext}}\,, \\ 4\pi\sigma & j_{1n}^{(\text{ext}\,)} - j_{2n}^{(\text{ext})}\,. \end{array}\right\} \tag{9.8}$$

Методы электростатики могут быть, следовательно, применены и для решения задачи о распределении в проводящей среде постоянного тока, а
существование сторонних ЭДС должно учитываться и в чисто электростатических задачах с $\boldsymbol{j} = 0$. Электростатическое поле $\boldsymbol{E}$ внутри проводника в этом случае не будет равно нулю:

$$\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{E}_{ext} \tag{9.9}$$

В дополнение к перечисленным в разделе 9.3 методам решения электростатических (и токовых) задач обратим внимание читателя на возможности вариационных методов. Их суть можно уяснить из обстоятельно разобранного примера Казанцева (2002).

Если в среду с конечной проводимостью $\kappa(\boldsymbol{r})$ помещен идеальный ($\kappa \to \infty$) проводник - электрод, то на его поверхности S имеет место условие

$$\varphi|_S = \text{ const.} \tag{9.10}$$

Токовая задача с идеальными проводниками аналогична электростатической задаче о поле системы проводников, помещенных в диэлектрическую среду. Как и в электростатическом случае, могут встретиться два основных варианта токовой задачи: а) заданы потенциалы электродов $\varphi_k = V_k$; б) заданы исходящие от электродов токи

$$J_k = \oint\limits_{S_k} j_n dS_k = -\oint\limits_{S_k} \kappa \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS_k \tag{9.11}$$

Из последнего равенства видно, что аналогичными в смысле (9.8) величинами являются заряд k-го проводника q_k в электростатической задаче и и ток $J_k/4\pi$ от k-го электрода в токовой задаче.

Потенциалы V_k электродов являются линейными функциями токов J_k, стекающих с электродов:

$$\left.\begin{array}{c} V_1 = R_{11}J_1 + R_{12}J_2 + \ldots + R_{1n}J_n \\ V_2 = R_{21}J_1 + R_{22}J_2 + \ldots + R_{2n}J_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ V_n = R_{n1}J_1 + R_{n2}J_2 + \ldots + R_{nn}J_n \end{array}\right\} \tag{9.12}$$

Коэффициенты пропорциональности R_{ik} называются коэффициентами сопротивления. Они не зависят от потенциалов V_k и токов J_k и определяются исключительно геометрией электродов и распределением проводимости κ. Коэффициенты R_{ik} аналогичны потенциальным коэффициентам s_{ik} электростатической задачи (см. задачу 9.17*).

Квазилинейные проводники и законы Кирхгофа. В технике самые распространенные проводники - квазилинейные, поперечные размеры которых малы по сравнению с их длиной, а ток течет вдоль оси проводника. В силу закона сохранения электрического заряда сила постоянного тока $J = \text{const}$ во всех сечениях проводника, даже если площадь сечения $S(l)$ изменяется вдоль его длины. Применим уравнение (9.2) к этому случаю. Проинтегрируем его вдоль осевой линии проводника между сечениями 1 и 2, предварительно поделив обе части равенства на κ:

$$\int\limits_1^2 \frac{\boldsymbol{j} \cdot d\boldsymbol{l}}{\kappa} = \int\limits_1^2 \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} + \int\limits_1^2 \boldsymbol{E}^{(ext)} \cdot d\boldsymbol{l}$$

Если проводник однороден и его сечение постоянно, то $\boldsymbol{j} \cdot d\boldsymbol{l} = \text{Jdl/S}$ и интеграл в левой части выражается через сопротивление R_{12} рассматриваемого участка:

$$\int\limits_1^2 \frac{j \cdot dl}{\kappa} = JR_{12}, \quad R_{12} = \frac{l_{12}}{\kappa S} \tag{9.13}$$

Заметим, что для проводника переменного сечения обобщение формулы (9.13) для сопротивления

$$R_{12} = \int\limits_1^2 \frac{dl}{\kappa S(l)} \tag{9.14}$$

дает лишь приближенную оценку снизу (см. [Казанцев (2002)]). Это объясняется тем, что распределение тока по сечению переменной величины неравномерно и его плотность во внешней области сечения в местах расширения ниже, а в местах сужения - выше средней.

Интегралы в правой части (9.12) можно записать в виде $\int_1^2 \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = \varphi_1 - \varphi_2$ и

$$\int_1^2 \boldsymbol{E}^{(ext)} \cdot d\boldsymbol{l} = \mathscr{E}_{12}^{(ext)} \tag{9.15}$$

где последняя величина представляет собой стороннюю ЭДС, действующую на рассматриваемом участке провода. Таким образом, закон Ома для участка проводника в общем случае принимает вид

$$JR_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 + \mathscr{E}_{12}^{(ext)} \tag{9.16}$$

Для замкнутого провода разность электростатических потенциалов обращается в нуль, и закон Ома приобретает вид

$$JR = \mathscr{E}^{(ext)} \tag{9.17}$$

где в сопротивление R должно быть включено и сопротивление источника сторонней ЭДС.

При наличии разветвлений проводов на каждом неразветвленном участке ток подчиняется закону Ома в форме уравнения (9.16). Расчет силы тока на каждом участке разветвленной цепи можно выполнить на основе двух законов Кирхгофа, которые сформулированы ниже и представляют собой следствия закона сохранения электрического заряда и закона Ома.

а) Первый закон Кирхгофа. Пусть к точке разветвления (узел с номером a, рис. 9.1) подходят токи от других узлов $b \neq a$, втекающие и вытекающие из нее (направление обхода соответствующего участка показано стрелкой). Поскольку заряд в стационарном случае не может накапливаться, то должно выполняться равенство

$$\sum_b J_{ba} = 0, \quad a = 1, 2, \ldots \tag{9.1}$$

где силы токов J_{ba} считаются положительными, если направление от b к a совпадает с направлением обхода соответствующего участка контура, и наоборот. Уравнение (9.18) должно быть записано для каждого узла разветвленной цепи.

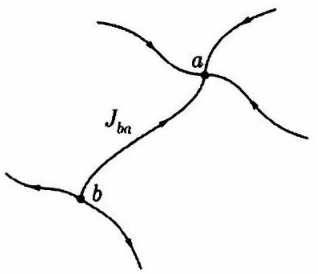


Рис. 9.1

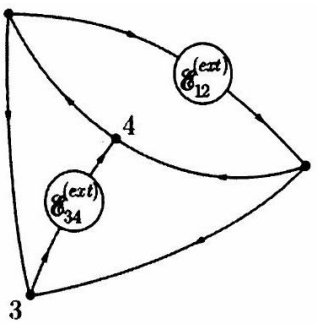


Рис. 9.2

б) Второй закон Кирхгофа. Выберем в разветвленной цепи произвольный замкнутый контур (рис. 9.2) и произвольное направление обхода вдоль
него. Для участка ab этого контура справедливо уравнение типа (9.16). Суммируя обе части уравнения по всем участкам выбранного контура, получим

$$\sum J_{ab}R_{ab} = \sum \mathscr{E}_{ab}^{(ext)} \tag{9.19}$$

так как разность электростатических потенциалов вдоль замкнутого контура $\sum(\varphi_a - \varphi_b)$ обращается в нуль. Нужно составить минимально необходимое число уравнений такого типа, в которых должны быть представлены все неразветвленные участки цепи. Уравнения (9.18), (9.19) позволяют выразить силы токов в каждом звене цепи через их сопротивления и сторонние ЭДС. Рационализация указанных уравнений («метод контурных токов») изложена в книге Смайта (см. главу VI, & 6).

Джоулевы потери и транспортные явления в постоянном электрическом поле. При протекании тока в проводнике электрическое поле совершает работу, равную $\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E}$ в расчете на единицу объема за единицу времени (см. условие примера 2.15). При наличии в проводнике кроме электрического поля также сторонних ЭДС полная удельная работа над зарядами будет равна $\boldsymbol{j}\cdot(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{E}_{\text{ext}})$. При постоянстве электрических величин и сторонних сил эта работа превращается в тепло и расходуется на нагрев проводника (джоулево тепловыделение). Плотность мощности джоулева тепловыделения с помощью (9.2) можно записать в разных формах:

$$Q = \boldsymbol{j}\cdot(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{E}_{ext}) = \kappa\,(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{E}_{ext})^2 = \frac{j^2}{\kappa} \tag{9.20}$$

Наиболее универсальным является последнее выражение (через плотность тока), которое справедливо независимо от наличия сторонних ЭДС.

Полное тепловыделение $\mathcal{Q}$ в проводнике дается интегралом по его объему от плотности (9.20). В случае замкнутого квазилинейного проводника с помощью замены (2.40) $jdV \to Jdl$ находим

$$\mathcal{Q} = \int QdV = \int \boldsymbol{j}\cdot(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{E}_{\text{ext}})\,dV = J\oint_l(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{E}_{\text{ext}})\cdot d\boldsymbol{l} = J\mathscr{E}_{\text{ext}} \tag{9.21}$$

где $\mathscr{E}_{ext} = \oint_l \boldsymbol{E}_{\text{ext}}\cdot d\boldsymbol{l}$ - полная сторонняя ЭДС, а циркуляция постоянного электрического поля по замкнутому контуру равна нулю.

Электрический ток в проводнике представляет собой один из процессов переноса (транспортных процессов), при котором через поперечное сечение проводника переносится электрический заряд. Поскольку электрический ток вызывается движением частиц - носителей заряда; то протекание
тока сопровождается переносом и других физических субстанций, в первую очередь транспортировкой энергии, так как перемещающиеся частицы переносят свою кинетическую и потенциальную энергию. Процессы переноса становятся более

разнообразными, если проводник неоднороден по составу или в нем в силу внешних условий поддерживается градиент температуры. Рассмотрим в первую очередь перенос электричества и тепла в однородном по химическому составу проводнике, в котором созданы градиенты электростатического потенциала $\boldsymbol{E} = -\nabla\varphi$ и температуры ∇T (не предполагая наличия других сторонних ЭДС).

Из качественных соображений ясно, что градиент температуры создаст дополнительный электрический ток, так как частицы - носители заряда будут диффундировать из более нагретых мест проводника в менее нагретые. Кроме того, градиент температуры создает, согласно закону теплопроводности Фурье, поток тепла $-\xi\nabla T$, где ξ - положительный коэффициент. Дополнительный поток тепла будет создан электрическим полем, вызывающим направленное движение частиц. Наконец, с электрическим током будет связан поток потенциальной энергии φj частиц. Поэтому плотности потоков электричества j и энергии $\boldsymbol{q}$ следует записать с учетом всех перечисленных факторов:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{j} &= \kappa\boldsymbol{E} + \beta\nabla T \\ \boldsymbol{q} &= \varphi\boldsymbol{j} + \gamma\boldsymbol{E} - \xi\nabla T \end{aligned} \tag{9.22}$$

Кинетические коэффициенты $\kappa, \beta, \gamma, \xi$ не зависят от электрического поля, но зависят от природы и термодинамического состояния проводника, в частности, от его температуры. Поэтому градиент температуры ∇T в (9.22) должен рассматриваться как достаточно малая величина, высшими членами разложения по которой можно пренебречь. Сравнение первого уравнения (9.22) с (9.2) показывает, что в данном случае $\boldsymbol{E}_{\text{ext}} = \beta\nabla T/\kappa$.

Кинетические коэффициенты не являются независимыми. Связь между ними устанавливается на основе принципа симметрии кинетических коэффициентов Онсагера, который является следствием обратимости во времени уравнений квантовой и классической механики. Обоснование принципа Онсагера можно найти в курсах статистической физики и физической кинетики (см., например, [Ландау и Лифшиц, Статистическая физика; Ландау и Лифшиц, Электродинамика сплошных сред; Де Гроот и Мазур (1964); Дьярмати (1974)]). Его можно сформулировать следующим образом.

Пусть имеется набор макроскопических параметров $x_a, a = 1, 2, \ldots n$, которые характеризуют термодинамическое состояние неравновесной макроскопической системы, причем равновесному состоянию отвечают значения $x_a = 0$. Тогда при малом отклонении от равновесия удельную энтропию
системы можно представить в виде разложения

$$S\left(x_1, x_2, \ldots x_n\right) = S_0 - \frac{1}{2}\sum_{a,b}\alpha_{ab}x_a x_b, \quad \alpha_{ab} = \alpha_{ba} = \frac{\partial^2 S}{\partial x_a \partial x_b} \tag{9.23}$$

где S_0 - равновесная энтропия, а члены первого порядка обратились в нуль вследствие максимальности энтропии при равновесии. Коэффициенты разложения α_{ab} зависят только от равновесных величин. Наряду с параметрами x_a определим сопряженные с ними в термодинамическом смысле величины

$$X_a = -\frac{\partial S}{\partial x_a} = \sum_b \alpha_{ab}x_b \tag{9.24}$$

которые иногда называют «обобщенными термодинамическими силами».
Переход к равновесию сопровождается возрастанием энтропии, изменение которой выражается через скорости изменения параметров $\dot{x}_a$:

$$\frac{d\mathscr{S}}{dt} = \int \frac{dS}{dt} dV = -\int \sum_a X_a \dot{x}_a dV \tag{9.25}$$

Скорости $\dot{x}_a = J_a$ в неравновесной термодинамике часто называют «потоками».

Важный постулат неравновесной термодинамики, обобщающий опытные данные о поведении слабо неравновесных систем, утверждает, что скорости изменения термодинамических параметров $\dot{x}_a$ при малых отклонениях от равновесия являются линейными функциями самих этих параметров x_a, которые полностью определяют скорости релаксации. С равным основанием можно считать величины $\dot{x}_a$ линейными функциями обобщенных термодинамических сил X_a, поскольку x_a и X_a связаны линейными соотношениями (9.24). В итоге можем записать линейные уравнения:

$$\dot{x}_a = -\sum_b \lambda_{ab} X_b, \quad a = 1, 2, \dots n \tag{9.26}$$

Именно к кинетическим коэффициентам λ_{ab}, описывающим переход к равновесию, относится принцип симметрии, математическая формулировка которого имеет вид:

$$\lambda_{ab} = \lambda_{ba} \tag{9.27}$$

При наличии внешнего магнитного поля кинетические коэффициенты могут от него зависеть, и в этом случае принцип симметрии приобретает форму

$$\lambda_{ab}(\boldsymbol{B}) = \lambda_{ba}(-\boldsymbol{B}) \tag{9.28}$$

В качестве параметров x_a, характеризующих неравновесное состояние системы, можно выбирать разные величины. Каждому набору параметров соответствует свой набор обобщенных термодинамических сил. Критерием правильности выбора кинетических коэффициентов является возможность представить скорость роста энтропии (9.25) в виде интеграла от суммы произведений обобщенных сил на «потоки». Принципу симметрии Онсагера подчиняются не любые коэффициенты, а только те, которые связывают «потоки» с обобщенными силами.

Пример 9.1. Из принципа симметрии Онсагера найти связь между коэффициентами β и γ, входящими в выражения потоков электричества и энергии (9.22).

Решение. Выделим произвольный малый элемент объема ΔV системы и вычислим энергию, втекающую через его поверхность в единицу времени:

$$\Delta\mathcal{Q} = -\oint \boldsymbol{q} \cdot d\boldsymbol{S} = -\int \nabla \cdot \boldsymbol{q} dV \approx -(\nabla \cdot \boldsymbol{q})\Delta V \tag{1}$$

Эта энергия диссипирует, превращаясь в тепло, что позволяет найти возрастание энтропии системы:

$$\frac{d\mathscr{S}}{dt} = -\int\limits_V \frac{\nabla \cdot \boldsymbol{q}}{T} dV \tag{2}$$

Это выражение следует привести к виду (9.25), что достигается преобразованием подынтегрального выражения:

$$-\frac{\nabla \cdot \boldsymbol{q}}{T} = -\frac{\nabla \cdot (\varphi \boldsymbol{j})}{T} - \frac{\nabla \cdot (\boldsymbol{q} - \varphi \boldsymbol{j})}{T} = \frac{\boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{E}}{T} - \frac{(\boldsymbol{q} - \varphi \boldsymbol{j}) \cdot \nabla T}{T^2} - \nabla \cdot \frac{\boldsymbol{q} - \varphi \boldsymbol{j}}{T} \tag{3}$$

При получении первого слагаемого в правой части использовано уравнение (9.1). Последнее слагаемое (полная дивергенция) дает нуль при интегрировании по всему

объему системы, так как поток энергии и электрический ток за пределами системы отсутствуют. Поэтому (2) можно заменить выражением

$$\frac{d\mathscr{S}}{dt} = \int\limits_V \left\{ \frac{\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{E}}{T} - \frac{(\boldsymbol{q}-\varphi\boldsymbol{j})\cdot\nabla T}{T^2} \right\} dV \tag{4}$$

Выбираем в качестве «потоков» величины $\boldsymbol{j}$ и $\boldsymbol{q}-\varphi\boldsymbol{j}$. Тогда, согласно (9.22), (9.25) и (4), имеем обобщенные силы

$$\boldsymbol{X}_j = -\frac{\boldsymbol{E}}{T}, \quad \boldsymbol{X}_q = \frac{\nabla T}{T^2} \tag{5}$$

и находим кинетические коэффициенты

$$\lambda_{jj} = \kappa T, \quad \lambda_{qq} = \xi T^2, \quad \lambda_{jq} = -\beta T^2, \quad \lambda_{qj} = \gamma T. \tag{6}$$

Принцип симметрии Онсагера дает

$$\gamma = -\beta T \tag{7}$$

Пример 9.2. Записать плотность мощности тепловыделения для общего случая, когда проводник неоднороден по химическому составу и в нем поддерживается градиент температуры.

Решение. С помощью формул (1) и (7) из предыдущего примера, а также уравнений (9.22) находим плотность мощности тепловыделения

$$Q = \frac{\Delta\mathcal{Q}}{\Delta V} = -\nabla\cdot\boldsymbol{q} = \frac{j^2}{\kappa} + \nabla\cdot(\eta\nabla T) + T\boldsymbol{j}\cdot\nabla\left(\frac{\beta}{\kappa}\right). \tag{9.29}$$

Первое слагаемое в правой части (1) представляет собой джоулево тепловыделение, второе слагаемое связано с теплопроводностью. Коэффициент теплопроводности $\eta = \xi - \beta^2 T/\kappa$. Последнее слагаемое линейно относительно плотности тока и связано с химической и термической неоднородностью проводника. Оно содержит термоэлектрические эффекты, которые рассмотрены в задачах 9.27-9.29.

Рекомендуемая литература: [Ландау и Лифшиц, Электродинамика сплошных сред; Смайт (1954); Френкель (1935); Пановский и Филипс (1963); Шимони (1964); Зоммерфельд (1958); Тамм (1976); Гринберг (1948); Нейман и Демирчян (1981a); Дыхне (1970a); Дыхне (1970b); Виноградов (2001); Де Гроот и Мазур (1964); Дьярмати (1974); Мартинсон и Недоспасов (1993); Фокин (1996)].

Задачи

9.1*. В отсутствие тока проводник квазинейтрален, плотности зарядов ионов и электронов в нем скомпенсированы: $\rho = \rho_i + \rho_e = 0$. Найти плотность заряда внутри проводника с магнитной проницаемостью μ, по которому течет постоянный ток с плотностью j.

Указание. Учесть действие магнитной силы на электроны проводимости, движущиеся с некоторой постоянной дрейфовой скоростью u.

9.2. - Аккумуляторная батарея с малым внутренним сопротивлением и ЭДС $\mathscr{E}$ не может обеспечить питания током J некоторого прибора в течение длительного времени. Чтобы продлить срок службы батареи, включают прибор и батарею в сеть постоянного тока параллельно друг другу через сопротивление R. Напряжение V в сети неустойчиво и меняется от V_1 до V_2 ($V_1 > V_2 > \mathscr{E}$). Сопротивление R подбирают так, чтобы при $V = V_1$ батарея не давала тока. Какой ток J будет давать батарея при $V = V_2$?

9.3. Каковы должны быть параметры обмотки гальванометра с вращающейся катушкой, чтобы при заданных ЭДС цепи и внешнем сопротивлении R (соединение последовательное) отброс гальванометра был максимальным? Угол отброса стрелки гальванометра пропорционален числу витков n катушки и току J в цепи. Вследствие ограниченности объема, занимаемого катушкой в кожухе прибора, произведение nS, где S - сечение провода катушки, является приблизительно постоянным.

9.4. Квадратная сетка из однородной проволоки состоит из n^2 одинаковых квадратных ячеек. Сопротивление стороны ячейки равно r. Ток входит в один из углов сетки и выходит из противоположного угла. Найти сопротивление R всей сетки для случаев $n = 2, 3, 4$.

Указание. Для уменьшения числа контурных токов использовать симметрию цепи.

9.5*. Телеграфная линия (рис. 9.3) подвешена на n изоляторах в точках $A_1, A_2, \ldots, A_n$ (роль второго провода играет земля). Отрезки линии $AA_1, A_1A_2, \ldots, A_nA_{n+1}$ имеют одно и то же сопротивление R. При

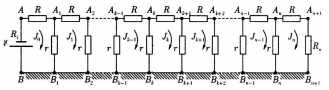


Рис. 9.3

сухой изоляции сопротивление изоляторов бесконечно. При сырой изоляции возникает утечка через изоляторы в землю; сопротивление каждого из изоляторов при этом становится равным r. Между концом A линии и землей включена батарея с ЭДС $\mathscr{E}$ и внутренним сопротивлением R_i. Конец A_{n+1}
через нагрузку с сопротивлением R_a также соединен с землей. Найти ток на каждом из участков линии, а также ток, протекающий через нагрузку. Во сколько раз ЭДС батареи при сырой изоляции должна быть больше ЭДС при сухой изоляции, чтобы ток через нагрузку был в обоих случаях один и тот же? Рассмотреть, в частности, случай $R_a = 0$.

Указание. Рассмотреть контурные токи в цепочке контуров, каждый из которых образован отрезком $A_{k-1}A_k$ линии и утечками через изоляторы A_{k-1} и A_k. Решением получившегося разностного уравнения второго порядка является гиперболический косинус.

9.6*. Подземный кабель имеет постоянное сопротивление ρ на единицу длины. Изоляция кабеля несовершенна и через нее происходит утечка. Проводимость утечки на единицу длины кабеля постоянна и равна $1/\rho'$. Роль обратного провода играет земля. Найти дифференциальное уравнение, которое описывает распределение постоянного тока в кабеле. Найти связь между током в кабеле $J(x)$ и разностью потенциалов $\varphi(x)$ между жилой кабеля и землей.

Указание. Исходить из уравнения (1) в решении задачи 9.5*.

9.7*. К одному из концов подземного кабеля длиной a, с сопротивлением на единицу длины ρ и проводимостью утечки $\frac{1}{\rho'}$ (на единицу длины) подключена заземленная одним полюсом батарея с ЭДС $\mathscr{E}$ и внутренним сопротивлением R_i. Второй конец кабеля подключен к заземленной нагрузке с сопротивлением R_a. Найти распределение тока $J(x)$ по длине кабеля. Рассмотреть, в частности, случай $R_i = R_a = 0$. Выполнить для проверки результата предельный переход к случаю кабеля без утечки.

Указание. Исходить либо из дифференциального уравнения, полученного в задаче 9.6*, либо из формулы (7) в решении задачи 9.5*.

9.8. В пространство между обкладками плоского конденсатора вставлены две плоскопараллельные проводящие пластинки, плотно прилегающие друг к другу и к обкладкам конденсатора. Пластинки имеют толщины h_1 и h_2, их проводимости и диэлектрические проницаемости κ_1, κ_2 и $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ соответственно. На обкладки

конденсатора, изготовленные из материала с проводимостью, много большей чем κ_1 и κ_2, подана разность потенциалов V. Найти напряженность E электрического поля, электрическую индукцию D и плотность тока j в пластинках, а также плотности свободных σ_{ext} и связанных σ_{int} зарядов на всех трех границах разделта.

9.9. Найти закон преломления линий тока на гладкой поверхности раздела двух сред с проводимостями κ_1 и κ_2.

9.10. По бесконечному прямолинейному проводу радиусом a с электропроводностью κ течет постоянный электрический ток с плотностью j. Вычислить поток вектора Пойнтинга через поверхность провода и показать, что он восполняет джоулевы потери внутри проводника.

9.11*. Постоянный ток J течет по бесконечно длинному прямому проводу радиуса a с проводимостью κ. Провод окружен толстой коаксиальной с ним проводящей цилиндрической оболочкой, служащей обратным проводом. Внутренний радиус оболочки b, наружный радиус $c \to \infty$. Найти электрический потенциал φ и магнитное поле H во всем пространстве. Найти также распределение σ поверхностных зарядов. Диэлектрическая проницаемость среды между проводниками равна ε.

9.12. Три проводника с круглыми сечениями одного и того же радиуса r соединены последовательно, образуя замкнутое кольцо. Длины проводников $l_0, l_1, l_2 \gg r$, проводимости $\kappa_0, \kappa_1, \kappa_2$. По объему проводника с проводимостью κ_0 равномерно распределена сторонняя ЭДС $\mathscr{E}_0$, не зависящая от времени. Найти электрическое поле E и распределение электрических зарядов внутри кольца.

9.13. Найти потоки энергии γ через поверхности трех проводников, рассмотренных в задаче 9.12. Получить таким способом закон ДжоуляЛенца.

9.14. Распределение тока в трехмерном проводнике с проводимостью κ обладает такой симметрией, что во всех точках каждой его эквипотенциальной поверхности напряженность электрического поля, а следовательно, и плотность тока имеют одно и то же значение. Доказать, что в этом случае сопротивление проводника выражается той же формулой, что и сопротивление квазилинейного проводника с переменным поперечным сечением [1].

9.15. Используя результат предыдущей задачи, найти сопротивления R:

а) сферического конденсатора с радиусами обкладок a и $b, a < b$, заполненного однородной средой с проводимостью κ;

б) такого же конденсатора, заполненного двумя однородными слоями с проводимостями κ_1 и κ_2 (слой с κ_1 прилегает к внутренней обкладке), границей раздела между которыми является сфера радиуса c;

в) цилиндрического конденсатора с радиусом обкладок a и $b, a < b$ и длиной l, заполненного средой с проводимостью κ (краевого эффекта не рассматривать).

9.16. Заземление осуществляется с помощью идеально проводящего шара радиуса a, наполовину утопленного в землю (проводимость земли $\kappa_1 = \text{const}$). Слой земли радиуса b, концентрический с шаром и прилегающий к нему, имеет искусственно повышенную проводимость κ_2. Найти сопротивление R такого заземлителя.

9.17*. Система идеальных проводников (электродов) находится в среде с проводимостью $\kappa(\boldsymbol{r})$ и диэлектрической проницаемостью $\varepsilon(\boldsymbol{r})$, обладающей тем свойством, что $\kappa(\boldsymbol{r})/\varepsilon(\boldsymbol{r}) = \text{const}$ во всех точках пространства [2]. Найти связь между потенциальными коэффициентами s_{ik} и коэффициентами сопротивления R_{ik} этой системы проводников. Как связаны между собой заряды q_k электродов и исходящие от них токи J_k?

9.18. Конденсатор произвольной формы заполнен однородным диэлектриком с проницаемостью ε. Найти емкость C этого конденсатора, если известно, что при

[01] Сформулированные условия совпадают с условиями, при выполнении которых можно пользоваться электростатической теоремой Гаусса в соответствующей электростатической задаче.

заполнении его однородным проводником с проводимостью κ он оказывает постоянному току сопротивление R.

9.19. Система электродов характеризуется коэффициентами сопротивления R_{ik}. Найти количество тепла Q, выделяемое в единицу времени токами в пространстве между электродами, если известны токи J_k, исходящие от электродов.

9.20. Две идеально проводящие сферы с радиусами a и b находятся в однородной среде с проводимостью κ и диэлектрической проницаемостью ε. Расстояние между центрами сфер равно l. Ток J подводится к одной из сфер и отводится от другой сферы. Найти сопротивление $R = (V_a - V_b)/J$ среды между сферами, где V_a, V_b - потенциалы сфер, J - ток, текущий от сферы с радиусом a.

Указание. Выразить R_{ik} через емкостные коэффициенты c_{ik} системы двух сфер (см. задачу 8.58).

9.21. Концы некоторой цепи заземлены с помощью двух идеально проводящих сфер (радиусы их a_1 и a_2), наполовину утопленных в землю, служащую вторым проводом. Расстояние между сферамн $l \gg a_1, a_2$, проводимость земли $\kappa = \text{const}$. Найти сопротивление R между заземлителями.

9.22. Решить предыдущую задачу, если заземлители осуществляются в виде двух одинаковых эллипсоидов вращения, с объемом V и эксцентриситетом e_0. Оси вращения эллипсоидов перпендикулярны к поверхности земли, а центры лежат на ней. Какая форма заземлителей выгоднее (обеспечивает меньшее сопротивление)?

9.23. В среду с электропроводностью κ погружены наполовину два сферических идеально проводящих электрода с одинаковыми радиусами a, имеющими потенциалы $V/2$ и $-V/2$. Вычислить ток J, текущий от одного электрода к другому, и показать, что он равен току, стекающему с отдельного электрода, потенциал V которого относительно бесконечно удаленных точек равен разности потенциалов между двумя электродами.

9.24*. Частицы с зарядом e и массой m могут в неограниченном количестве испускаться плоским электродом $x = 0$ под действием электрического поля. Испущенные с нулевой скоростью частицы ускоряются в направлении к другому плоскому электроду, параллельному первому и отстоящему от него на расстояние a. Разность потенциалов между электродами φ_0. Эмиссия из первого электрода продолжается до тех пор, пока поле образовавшегося между электродами объемного заряда с плотностью ρ не скомпенсирует внешнее поле у поверхности первого электрода, так что напряженность результирующего поля $-\partial\varphi/\partial x|_{x=0} = 0$. Найти зависимость плотности стационарного тока j между электродами от разности потенциалов φ_0.

Указание. Потенциал в пространстве между электродами определяется уравнением Пуассона $\Delta\varphi = -4\pi\rho, \rho = j/v$, где v - скорость частиц в данной точке пространства.

9.25. В анизотропном проводнике электропроводность $\kappa_{\mu\nu}$ является тензорной величиной. Показать, что принцип симметрии Онсагера требует симметрии тензора электропроводности.

9.26. Найти ограничения, которые накладывает на кинетические коэффициенты в уравнениях (9.22) закон возрастания энтропии неравновесной системы.

9.27. Показать с помощью формулы (9.29), что при наличии в проводнике из однородного материала электрического тока и градиента температуры в нем возникает тепловыделение Томсона, плотность мощности которого

$$Q_{Th} = \varrho j \cdot \nabla T \tag{9.30}$$

Его знак зависит от взаимной ориентации тока и градиента температуры. Вычислить

[02] Иначе это условие можно сформулировать так: вместо среды с проводимостью κ пространство между идеальными проводниками заполняют диэлектрической средой, проницаемость ε которой пропорциональна κ в каждой точке пространства, так что $\varepsilon/\kappa = \text{const}$.

коэффициент Томсона ϱ.

9.28. Пользуясь уравнением (9.29), показать, что на контакте (спае) двух проводников разного химического состава при прохождении электрического тока выделяется (поглощается) в расчете на единицу площади тепло

$$Q_P = \Pi_{12} j \tag{9.31}$$

зависящее от направления тока (эффект Пельтье). Вычислить коэффициент Пельтье Π_{12}.

9.29. Разомкнутая цепь состоит из двух разных квазилинейных проводников 1 и 2, причем места их контактов находятся при разных температурах T_1 и T_2 (рис. 9.4). Показать с помощью первого уравнения (9.22), что

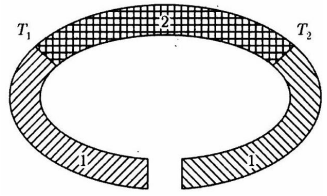


Рис. 9.4

на концах цепи образуется разность потенциалов (термоЭДС)

$$\mathscr{E}_T = \int_{T_1}^{T_2} \left(\frac{\beta_1}{\kappa_1} - \frac{\beta_2}{\kappa_2} \right) dT = \int_{T_1}^{T_2} \frac{\Pi_{12}}{T} dT \tag{9.32}$$

где Π_{12} - коэффициент Пельтье, определенный в предыдущей задаче.

9.30*. Проводник состоит из областей с удельными электропроводностями κ_1 и κ_2, распределенными по случайному закону, так что его электропроводность $\kappa(x, y)$ представляет собой случайную функцию точки в плоскости xy и не зависит от координаты z. Области 1 и 2 статистически эквивалентны, т. е. занимают равные площади в плоскости xy. Ток течет в плоскости xy и в каждой точке (локально) подчиняется закону Ома $\boldsymbol{j} = \kappa(x, y)\boldsymbol{E}$, где $\mathscr{E}$ - напряженность электрического поля. Вычислить эффективное значение электропроводности K, которое входит в макроскопический закон Ома $\boldsymbol{J} = K\boldsymbol{E}$, связывающий средние по объему проводника значения плотности тока $\boldsymbol{J} = (1/V)\int \boldsymbol{j} dV$ и электрического поля $\boldsymbol{E} = (1/V)\int \mathscr{E} dV$. Вычислить также относительные квадратичные флуктуации силы тока и напряженности поля $\Delta_J = \left(\langle j^2 \rangle - J^2\right)/J^2, \Delta_E = \left(\langle \mathscr{E}^2 \rangle - E^2\right)/E^2$.

9.31**. Обобщить предыдущую задачу на случай, когда в направлении оси Oz приложено внешнее магнитное поле $\boldsymbol{H}_0$. При этом локальный закон Ома можно записать в виде (см. ответ к задаче 8.28)

$$\boldsymbol{j} + \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{n} = \kappa \mathscr{E}$$

где $\boldsymbol{n}$ - безразмерный векторный параметр Холла, направленный вдоль $\boldsymbol{H}_0$. Найти эффективное значение электропроводности K и параметр Холла N, входящие в закон Ома для усредненных значений $\boldsymbol{J}, \boldsymbol{E}$:

$$\boldsymbol{J} + \boldsymbol{J} \times \boldsymbol{N} = K\boldsymbol{E}$$

Рассмотреть по отдельности случай, когда флуктуирует κ, а $\boldsymbol{n}$ остается постоянным, и случай постоянной κ при флуктуациях $\boldsymbol{n}$.

11.3.2 9.2. The Magnetic Field in Magnets

Уравнения и граничные условия. Магнитное поле в средах описывается вектором магнитной индукции $\boldsymbol{B}$ и вектором напряженности магнитного поля $\boldsymbol{H}$, которые в статическм случае удовлетворяют уравнениям (7.21)

$$\left.\begin{array}{ll} \operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}, & \oint_l \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{l} = \frac{4\pi}{c}J \\ \operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0, & \oint_S \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S} = 0 \end{array}\right\} \tag{9.33}$$

и уравнению связи (7.26)

$$\boldsymbol{B} = \mu\boldsymbol{H} \quad \text{либо} \quad B_\alpha = \mu_{\alpha\beta}H_\beta \tag{9.34}$$

(последние уравнения используются для изотропных и анизотропных диа- и парамагнетиков. О ферромагнетиках см. ниже). В (9.33) величина j - плотность тока проводимости, а J - полный ток проводимости через поверхность, опирающуюся на контур l. Плотность объемного и поверхностного тока намагничения (который определяется совокупностью «молекулярных» токов) дается формулами (7.18), (7.19):

$$\boldsymbol{j}_{int} = c\operatorname{rot}\boldsymbol{M}, \quad \boldsymbol{i}_{int} = c\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{M}_2 - \boldsymbol{M}_1) \tag{9.35}$$

где $M_2 - M_1$ - скачок вектора намагниченности на границе. Этот вектор связан с $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{H}$ соотношением

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{H} + 4\pi\boldsymbol{M} \tag{9.36}$$

Векторы поля на границах раздела магнетиков удовлетворяют граничным условиям, которые выводятся из интегральных уравнений (9.33) и имеют вид, сходный с (2.58):

$$\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{B}_2 - \boldsymbol{B}_1) = 0, \quad \boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{H}_2 - \boldsymbol{H}_1) = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{i} \tag{9.37}$$

Если всю среду, включая и проводники с током, можно считать однородной и изотропной ($\mu = \text{const}$), то напряженность магнитного поля $\boldsymbol{H}$ в ней, согласно (9.33), (9.34) и (9.37), будет такой же, как в вакууме при том же распределении токов проводимости, а магнитная индукция $\boldsymbol{B} = \mu\boldsymbol{H}$ изменится в μ раз. Напомним, что именно магнитная индукция $\boldsymbol{B}$ представляет собой усредненное микроскопическое магнитное поле. Поэтому макроскопическая сила Лоренца, действующая на точечную заряженную частицу в среде, определяется напряженностью электрического поля и магнитной индукцией:

$$\boldsymbol{F} = e\boldsymbol{E} + \frac{e}{c}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B} \tag{9.38}$$

Уравнения (9.33) допускают введение векторного потенциала $\boldsymbol{A}$,

$$\boldsymbol{B} = \operatorname{rot}\boldsymbol{A} \tag{9.39}$$

удовлетворяющего в однородной изотропной среде уравнению

$$\Delta\boldsymbol{A} = -\frac{4\pi\mu}{c}\boldsymbol{j} \tag{9.40}$$

Ферромагнетики и спонтанная намагниченность. Скалярный потенциал. Ферромагнетики отличаются от диа- и парамагнетиков в следующих отношениях: а) многие из них обладают «остаточной намагниченностью», т. е. спонтанной намагниченностью в отсутствие внешнего магнитного поля $\boldsymbol{H}$; б) связь

между векторами $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{H}$ нелинейна и неоднозначна, она зависит от истории процесса намагничивания (гистерезис). Для приближенного расчета магнитных полей в ферромагнетиках используют модель «идеализированного ферромагнетика», принимая линейную связь между векторами поля в виде

$$\boldsymbol{B} = \mu\boldsymbol{H} + 4\pi\boldsymbol{M}_0 \tag{9.41}$$

Магнитомягкие материалы имеют большую магнитную проницаемость, $\mu \approx 10^2 \div 10^6$ (см. [Григорьев и Мейлихов (1991)]). Намагниченность $\boldsymbol{M}_0$ должна рассматриваться как не зависящая от $\boldsymbol{H}$ величина, свойственная постоянному магниту. Она может быть заданной функцией координат.

Поле, создаваемое постоянными магнитами, удобно рассчитывать методом скалярного потенциала. В отсутствие токов проводимости имеем уравнения

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{H} = 0, \quad \operatorname{div}\boldsymbol{B} = 0, \quad \boldsymbol{B} = \mu\boldsymbol{H} + 4\pi\boldsymbol{M}_0 \tag{9.42}$$

Первое из этих уравнений позволяет ввести псевдоскалярный потенциал ψ (см. пример 2.12) соотношением $\boldsymbol{H} = -\nabla\psi$. Потенциал удовлетворяет уравнению, аналогичному уравнению (8.5) для электростатического потенциала в неоднородном диэлектрике:

$$\nabla \cdot (\mu\nabla\psi) = -4\pi\rho_m \tag{9.43}$$

где величина

$$\rho_m(\boldsymbol{r}) = -\nabla \cdot \boldsymbol{M}_0(\boldsymbol{r}) \tag{9.44}$$

играет роль объемной плотности сторонних «магнитных зарядов». На границе постоянного магнита возникают и поверхностные «магнитные заряды». В однородном ферромагнетике псевдоскалярный потенциал удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\Delta\psi = -\frac{4\pi\rho_m}{\mu} \tag{9.45}$$

В этом случае к задачам магнитостатики применимы все методы электростатики, рассмотренные в главе 8.

Рекомендуемая литература: [Тамм (1976); Ландау и Лифшиц, Электродинамика сплошных сред; Батыгин и Топтыгин (2002); Джексон (1975); Бредов и др., Классическая электродинамика; Френкель (1949); Стрэттон (1948); Смайт (1954); Шимони (1964); Пановский и Филипс (1963); Нейман и Демирчан (1981а)].

Задачи

9.32. Вычислить напряженность магнитного поля $\boldsymbol{H}$ и магнитную индукцию B, создаваемые постоянным током J, текущим по бесконечному цилиндрическому проводнику кругового сечения радиуса a. Магнитная проницаемость проводника равна μ_0, окружающего проводник вещества μ. Решить задачу наиболее простым способом - с помощью уравнения Максвелла в интегральной форме (9.33), а также путем введения векторного потенциала $\boldsymbol{A}$.

9.33. Решить предыдущую задачу для полого цилиндрического проводника (внутренний радиус a, наружный b).

9.34. Свести задачу магнитостатики об определении поля, создаваемого заданными токами в неоднородной среде с линейным уравнением связи между векторами поля $\boldsymbol{B} = \mu(\boldsymbol{r})\boldsymbol{H}$, к задаче электростатики. Для этого представить магнитное поле в виде суммы двух полей: $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_0 + \boldsymbol{H}'$, где $\boldsymbol{H}_0$ - «первичное» поле, которое создавалось бы

тем же распределением токов в пустом пространстве, а $\boldsymbol{H}'$ - поле, обусловленное наличием магнетиков. Ввести для $\boldsymbol{H}'$ скалярный потенциал ψ, получить для ψ уравнение и граничные условия.

9.35. Контур с током лежит в плоскости раздела двух сред с магнитными проницаемостями μ_1 и μ_2. Вычислить напряженность магнитного поля $\boldsymbol{H}$ во всем пространстве, считая известным поле, создаваемое этим контуром в вакууме.

9.36. Бесконечный прямой провод с током J расположен параллельно плоской границе двух сред с магнитными проницаемостями μ_1 и μ_2. Расстояние от провода до границы a. Вычислить магнитное поле.

Указание. Применить метод изображений, подобно тому как это делалось в задачах электростатики (раздел 8.1).

9.37. В однородное магнитное поле $\boldsymbol{H}_0$ вносится шар радиуса a с магнитной проницаемостью μ. Определить результирующее поле $\boldsymbol{H}$, индуцированный магнитный момент $\boldsymbol{m}$ и плотность токов j_{int}, эквивалентных приобретаемой шаром намагниченности.

9.38. Найти форму силовых линий магнитного поля внутри и вне шара, рассмотренного в предыдущей задаче.

Указание. Использовать формулу, полученную в задаче (2.79).

9.39. В магнетике с магнитной проницаемостью μ_e имеется однородное магнитное поле $\boldsymbol{H}$. Из магнетика вырезают шар радиуса a и вставляют вместо него другой концентрический шар радиуса b с магнитной проницаемостью μ_i. Можно ли подобрать μ_i и b таким образом, чтобы поле в области $r > a$ осталось прежним?

9.40*. Анизотропный неферромагнитный шар вносится в однородное магнитное поле. Найти результирующее поле $\boldsymbol{H}$ и момент сил $\boldsymbol{N}$, действующих на шар.

9.41. Вычислить магнитное поле, которое создается тонким прямым проводом с током J в анизотропном магнетике. Провод ориентирован в направлении одной из главных осей тензора $\mu_{\alpha\beta}$.

9.42. Бесконечно длинная полая цилиндрическая оболочка с внутренним радиусом a и внешним радиусом b находится во внешнем однородном магнитном поле $\boldsymbol{H}_0$, перпендикулярном ее оси. Магнитная проницаемость цилиндра μ_1, окружающего пространства μ_2. Найти напряженность поля H в полости. Рассмотреть, в частности, случай $\mu_1 \gg \mu_2$.

9.43. Полая сфера, внутренний и наружный радиусы которой соответственно a и b, помещена во внешнее однородное магнитное поле $\boldsymbol{H}_0$. Магнитная проницаемость сферы μ_1, окружающего пространства μ_2. Найти поле H в полости. Рассмотреть, в частности, случай $\mu_1 \gg \mu_2$.

9.44. Вычислить изменение $\Delta\Phi$ потока магнитной индукции через сечение полого шара радиуса a, рассмотренного в предыдущей задаче, относительно первоначального потока, который существовал в однородном магнетике. Сечение проходит через центр шара перпендикулярно направлению внешнего поля.

9.45. Бесконечный прямолинейный провод радиуса a с магнитной проницаемостью μ_1 находится во внешнем однородном поперечном поле $\boldsymbol{H}_0$ в среде с магнитной проницаемостью μ_2. По проводу течет постоянный ток J. Найти результирующее магнитное поле внутри и вне провода.

9.46. В некоторой ограниченной области задано распределение намагниченности $\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r})$. Определить скалярный ψ и векторный $\boldsymbol{A}$ потенциалы, создаваемые этим распределением намагниченности. Показать прямым вычислением, что векторы $\boldsymbol{B} = \operatorname{rot}\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{H} = -\operatorname{grad}\psi$ связаны соотношением $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{H} + 4\pi\boldsymbol{M}$.

9.47. Тело произвольной формы намагничено однородно. Показать, что скалярный потенциал магнитного поля, создаваемого этим телом, мож-

но записать в виде

$$\psi = -\boldsymbol{M} \cdot \operatorname{grad} \varphi$$

где M - намагниченность, а φ - электростатический потенциал равномерно заряженного (с плотностью $\rho = 1$) тела такой же формы и размеров.

9.48. Ток J течет по прямолинейному проводу, совпадающему с осью Oz. От оси расходятся веерообразно три полуплоскости. образующие три двугранных угла: $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\,(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 2\pi)$. Пространство внутри каждого из углов заполнено однородным магнетиком с магнитными проницаемостями соответственно μ_1, μ_2, μ_3. Определить магнитное поле $H_i (i = 1, 2, 3)$ в каждом из двугранных углов.

9.49ˆ. Пользуясь уравнением связи (9.41), найти поле равномерно намагниченного постоянного магнита сферической формы. Магнитная проницаемость сферы μ_1, внешней среды μ_2.

9.50ˆ. Найти поле, создаваемое бесконечным цилиндром радиуса a, намагниченным однородно. Вектор намагниченности $\boldsymbol{M}_0$ перпендикулярен оси цилиндра. Магнитная проницаемость цилиндра μ_1, окружающей среды μ_2.

9.51. Эллипсоид из магнитного материала с проницаемостью μ внесен в однородное магнитное поле $\boldsymbol{H}_0$. Вычислить внутреннее поле и магнитный момент эллипсоида. Рассмотреть частные случаи тонкого диска, тонкого длинного стержня и сферы.

9.52*. Эллипсоид из анизотропного материала с магнитной проницаемостью μ_{ik} внесен во внешнее однородное магнитное поле $\boldsymbol{H}_0$. Вычислить внутреннее поле $\boldsymbol{H}_1$ в эллипсоиде.

11.3.3 9.3. Energy, Forces and Thermodynamic Relations for Magnets

Термодинамические функции магнетика. Рассмотрим ограниченную систему, которая состоит из вещества и токов, создающих магнитное поле. Поскольку магнитное поле само по себе работы не производит, то отличная от нуля работа возможна только при наличии в системе электрического поля $\boldsymbol{E}$. Источники тока производят над системой «вещество + поле» за время δt работу

$$\delta A = -\delta t \int \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{E} dV$$

где интеграл распространен на все пространство. В последнее соотношение подставляем $\boldsymbol{j} = c\nabla \times \boldsymbol{H}/4\pi$ и преобразуем интеграл с помощью теоремы Остроградского-Гаусса:

$$\delta A = -\frac{c\delta t}{4\pi} \int \boldsymbol{H} \cdot [\nabla \times \boldsymbol{E}] dV$$

Вихревое электрическое поле возникает при изменении магнитного поля в соответствии с уравнением индукции (7.8):

$$\delta t \nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\delta t}{c} \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = -\frac{1}{c} \delta \boldsymbol{B}$$

Таким образом, элементарная работа генерации магнитного поля выражается через приращение магнитной индукции:

$$\delta A = \frac{1}{4\pi} \int \boldsymbol{H} \cdot \delta \boldsymbol{B} dV \tag{9.46}$$

Полученная формула формально аналогична выражению (8.36) в электростатике. Фактически же магнитная индукция является аналогом напряженности электрического поля, а не электрической индукции.

Как и в случае диэлектриков, в зависимости от внешних условий элементарная работа (9.46) может характеризовать изменение разных термодинамических потенциалов. В случае теплоизолированного статистически равновесного тела работа электрических сил производится при постоянной энтропии и представляет собой изменение внутренней энергии $\mathcal{U}$. Полное изменение внутренней энергии согласно первому закону термодинамики складывается из теплоты и работы и имеет вид

$$\delta\mathcal{U} = T\delta\mathcal{S} + \frac{1}{4\pi}\int \boldsymbol{H}\cdot\delta\boldsymbol{B}dV \tag{9.47}$$

Здесь в отличие от (ДЗ.46), внутренняя энергия тела обозначена через $\mathcal{U}$, $\mathcal{S}$ - энтропия тела, T - его температура, а для малых приращений термодинамических величин использован символ δ, чтобы отличать их от элемента интегрирования dV. В (9.47) не включена механическая работа за счет изменения объема тела.

Если рассматриваемое тело находится в тепловом контакте с окружающими равновесными телами и его температура не изменяется, то работа представляет собой изменение свободной энергии Гельмгольца $\mathscr{F}$, а ее полное изменение запишется в виде

$$\delta\mathscr{F} = -\mathcal{S}dT + \frac{1}{4\pi}\int \boldsymbol{H}\cdot\delta\boldsymbol{B}dV \tag{9.48}$$

Приведенные выше изменения термодинамических потенциалов можно записать и для удельных величин, относящихся к единице объема магнетика:

$$dU(S,\tau,\boldsymbol{B}) = TdS + \zeta d\tau + \frac{1}{4\pi}\boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{B} \tag{9.49}$$

$$dF(T,\tau,\boldsymbol{B}) = -SdT + \zeta d\tau + \frac{1}{4\pi}\boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{B} \tag{9.5}$$

Поскольку рассматриваемый объем может обмениваться с окружающим веществом частицами, то в (9.49), (9.50) включено соответствующее слагаемое, содержащее изменение плотности массы $d\tau$ и химический потенциал, отнесенный к единице массы, $\zeta = \mu/m$, где μ - химической потенциал, входящий в (ДЗ.47) и отнесенный к одной частице с массой m.

В отличие от локальных величин T, S, τ, которые существуют только внутри рассматриваемого тела, магнитная индукция B отлична от нуля и за его пределами. Поэтому часто бывают удобны такие термодинамические потенциалы U_*, F_*, у которых независимой полевой переменной выступает намагниченность M, равная нулю за пределами тела. Эти потенциалы вводятся соотношениями

$$U_*(S,\tau,\boldsymbol{M}) = U(S,\tau,\boldsymbol{B}) - \frac{H^2}{8\pi}, \quad F_*(T,\tau,\boldsymbol{M}) = F(T,\tau,\boldsymbol{B}) - \frac{H^2}{8\pi} \tag{9.51}$$

и имеют полные дифференциалы

$$\begin{aligned} dU_* &= TdS + \zeta d\tau + \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{M} \\ dF_* &= -SdT + \zeta d\tau + \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{M} \end{aligned} \tag{9.52}$$

Наконец, можно ввести такие термодинамические потенциалы, для которых независимой переменной будет вектор $\boldsymbol{H}$, определяемый токами проводимости:

$$\tilde{U}(S,\tau,\boldsymbol{H}) = U - \frac{1}{4\pi}\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B}, \quad \tilde{F}(T,\tau,\boldsymbol{H}) = F - \frac{1}{4\pi}\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B}$$

Их дифференциалы запишутся в виде

$$d\tilde{U} = TdS + \zeta d\tau - \frac{1}{4\pi}\boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{H}, \quad d\tilde{F} = -SdT + \zeta d\tau - \frac{1}{4\pi}\boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{H} \tag{9.55}$$

Через термодинамические функции можно выразить магнитное поле и магнитную индукцию в магнетике:

$$\boldsymbol{H} = 4\pi\left(\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{B}}\right)_{S,\tau} = 4\pi\left(\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{B}}\right)_{T,\tau}, \quad \boldsymbol{B} = -4\pi\left(\frac{\partial \tilde{U}}{\partial \boldsymbol{H}}\right)_{S,\tau} = -4\pi\left(\frac{\partial \tilde{F}}{\partial \boldsymbol{H}}\right)_{T,\tau} \tag{9.56}$$

Пример 9.3. Вычислить добавки к удельным термодинамическим функциям $U, \tilde{U}, F, \tilde{F}, S, \zeta$ магнетика, вызванные наличием магнитного поля. Магнетик изотропный, его уравнение связи линейное: $\boldsymbol{B} = \mu(T,\tau)\boldsymbol{H}$.

Решение. По аналогии с примером 8.5 получим

$$F(T,\tau,B) - F_0(T,\tau) = \frac{B^2}{8\pi\mu}, \quad U(S,\tau,B) - U_0(S,\tau) = \frac{B^2}{8\pi\mu} \tag{9.57}$$

Здесь в первой формуле магнитную проницаемость μ, не зависящую от поля, следует выразить через температуру и плотность магнетика, а во второй - через энтропию и плотность.

$$\tilde{U} - U_0(S,\tau) = -\frac{\mu H^2}{8\pi}, \quad \tilde{F} - F_0(T,\tau) = -\frac{\mu H^2}{8\pi} \tag{9.58}$$

$$S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_{\tau,B} = S_0(T,\tau) + \frac{B^2}{8\pi\mu^2}\left(\frac{\partial \mu}{\partial T}\right)_{\tau} \tag{9.59}$$

$$\zeta = \left(\frac{\partial F}{\partial \tau}\right)_{T,\boldsymbol{B}} = \zeta_0(T,\tau) - \frac{B^2}{8\pi\mu^2}\left(\frac{\partial \mu}{\partial \tau}\right)_{T} \tag{9.60}$$

Пример 9.4. В однородное внешнее магнитное поле $\mathscr{H}$ в вакууме вносится диэлектрическое тело с магнитной проницаемостью μ. Выразить изменение внутренней энергии тела через его магнитный момент, считая тело теплоизолированным и пренебрегая изменением объема. Как изменится свободная энергия тела, если вместо теплоизоляции в нем поддерживается постоянная температура?

Решение. В соответствии с (9.57), изменение внутренней энергии тела
$\Delta\mathcal{U} = \int \frac{\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B} - \mathscr{H}^2}{8\pi} dV = \frac{1}{8\pi}\int(\boldsymbol{H}+\mathscr{H})\cdot(\boldsymbol{B}-\mathscr{H})dV - \frac{1}{2}\int \boldsymbol{M}\cdot\mathscr{H}dV,$
где из подынтегрального выражения вычтена плотность магнитной энергии в отсутствие тела, а само выражение преобразовано с учетом формулы $\boldsymbol{B} - \boldsymbol{H} = 4\pi\boldsymbol{M}$. В правой части (1) в первом интеграле выражаем через векторные потенциалы разность $\boldsymbol{B} - \mathscr{H} = \nabla\cdot(\boldsymbol{A} - \mathscr{A})$. Здесь $\boldsymbol{A}, \mathscr{A}$ - векторные потенциалы при наличии и в отсутствие магнетика. С помощью формул векторного анализа записываем тождество
(2) $(\boldsymbol{H}+\mathscr{H})\cdot(\boldsymbol{B}-\mathscr{H}) = [\nabla\times(\boldsymbol{H}+\mathscr{H})]\cdot(\boldsymbol{A}-\mathscr{A}) + \nabla\cdot[(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A})\cdot(\boldsymbol{H}+\mathscr{H})]$.

Первое слагаемое в правой части дает нуль из-за отсутствия токов проводимости: $\nabla\times(\boldsymbol{H}+\mathscr{H}) = 0$. Второе слагаемое дает нуль при интегрировании по всему пространству. В итоге получаем из (1)

$$\Delta\mathcal{U} = -\frac{1}{2}\int \boldsymbol{M}\cdot\mathscr{H}dV = -\frac{1}{2}\mathscr{M}\cdot\mathscr{H} \tag{9.61}$$

где

$$\boldsymbol{M} = \int \boldsymbol{M} dV \tag{9.62}$$

- магнитный момент тела. В случае изотермического процесса та же величина (9.61) будет представлять собой изменение свободной энергии.

Пример 9.5. Магнитное поле в однородной среде с магнитной проницаемостью $\mu(T, \tau)$ создается тонкими квазилинейными проводниками с токами. По аналогии с токами в вакууме (см. раздел 2.2) выразить энергию магнитного поля через коэффициенты индуктивности. Найти зависимость этих коэффичиентов от магнитной проничаемости среды.

Решение. При фиксированных значениях температуры и плотности среды энергия магнитного поля представляет собой часть свободной энергии (9.57) системы:

$$\Delta\mathscr{F} = \frac{1}{8\pi} \int \boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{B} dV \tag{1}$$

Преобразуем эту формулу путем, обратным тому, который был использован при переходе от (2.75) к (2.76). Получим

$$\Delta\mathscr{F} = \frac{1}{2c} \int \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{j} dV \tag{2}$$

Интеграл по объему можно представить в виде суммы интегралов по квазилинейным контурам:

$$\Delta\mathscr{F} = \sum_b \frac{J_b}{2c} \oint \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{l}_b \tag{3}$$

Это позволяет выразить энергию через магнитные потоки $\Phi_b = \oint \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{S}_b$:

$$\Delta\mathscr{F} = \frac{1}{2c} \sum_b J_b \Phi_b \tag{4}$$

Представление в виде суммы по контурам возможно и для векторного потенциала:

$$\boldsymbol{A} = \sum_a \boldsymbol{A}_a, \quad \boldsymbol{A}_a(\boldsymbol{r}_b) = \frac{\mu J_a}{c} \oint \frac{d\boldsymbol{l}_a}{R_{ab}} \tag{5}$$

где использовано решение (2.50') с добавленным согласно (9.40) множителем μ, R_{ab} - расстояние между элементами длин dl_a и dl_b. В итоге свободная энергия (3) оказывается выраженной в виде суммы

$$\Delta\mathscr{F} = \sum_a \frac{J_a^2}{2c^2} L_{aa} + \sum_{a<b} \frac{J_a J_b}{c^2} L_{ab}, \tag{9.63}$$

где

$$L_{ab} = \mu \int \frac{dl_a \cdot dl_b}{R_{ab}} \tag{9.64}$$

- коэффициент взаимной индукции контуров с током a и b, L_{aa} - коэффициент самоиндукции. Его нужно вычислять с учетом конечности сечения проводника, т. е. по формуле (2.74) с добавлением в правую часть множителя μ.

Сравнивая (9.66) с формулой (4), находим выражение для магнитного потока через контур a:

$$\Phi_a = \frac{1}{c}\sum_b L_{ab} J_b$$

Этот поток обусловлен полем $\boldsymbol{B}_a$, которое создается током J_a, текущим в этом же контуре, и полями $B_b, b \neq a$ всех прочих контуров.

Силы в магнитном поле. Сравнение полученных выше результатов с (2.68), (2.75) показывает, что при $\mu = 1$ величина $\Delta\mathscr{F}$ переходит в рассмотренную в разделе 2.2 энергию W системы токов. Поэтому обобщенные силы при постоянных токах в контурах следует вычислять по формуле

$$F_\alpha = \left(\frac{\partial \Delta\mathscr{F}}{\partial q_\alpha}\right)_{T,J} \tag{9.65}$$

где q_α - обобщенная координата. Аналогом «потенциальной функции» U, использовавшейся в разделе 2.2, является величина $\Delta\widetilde{F}$, которая может быть получена из (9.58) и отличается от $\Delta\mathscr{F}$ только знаком (ср. (9.57) и (9.58)).

Формула Ампера (2.45) для силы, действующей на элемент квазилинейного тока, в магнетике будет выражаться через магнитную индукцию:

$$d\boldsymbol{F} = \frac{J}{c} d\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{B}. \tag{9.6}$$

Аналогия между электрическими и магнитными явлениями позволяет получить из формулы (8.61) выражение для плотности силы, приложенной к жидкому магнетику с линейной связью $\boldsymbol{B} = \mu\boldsymbol{H}$:

$$\boldsymbol{f} = \frac{1}{c}\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{B} - \frac{1}{8\pi} H^2 \nabla\mu + \frac{1}{8\pi}\nabla\left(H^2 \frac{\partial\mu}{\partial\tau}\tau\right) \tag{9.67}$$

Здесь в случае неферромагнитной электропроводной жидкости главный вклад дает первое слагаемое с током проводимости j. Этой силе соответствует тензор натяжений

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi} H_\alpha B_\beta - \frac{H^2}{8\pi}\left(\mu - \tau\frac{\partial\mu}{\partial\tau}\right)\delta_{\alpha\beta}. \tag{9.68}$$

Ферромагнетизм. Ниже мы рассмотрим основы феноменологической термодинамической теории ферромагнетизма и простейшие микроскопические модели. Основные опытные данные:

1. Спонтанная (в отсутствие внешнего магнитного поля) намагниченность M_0, достигающая при низких температурах значений порядка нескольких тысяч гаусс.

2. Исчезновение спонтанной намагниченности при повышении температуры до значений, превышающих характерное для каждого ферромагнетика значение T_C - температуру Кюри. При $T > T_C$ ферромагнетик переходит чаще всего в парамагнитное состояние.

3. Температуры Кюри чистых элементов (Fe, Co) превышают 10^3 K $= 0,1$ эВ, у других элементов и соединений достигают сотен либо десятков K. $\square$

4. Магнитная восприимчивость ферромагнетиков достигает значений $10^4 \div 10^5$; намагничивание до насыщения происходит в относительно слабых полях до ≈ 100 Э.

5. В ферромагнитных кристаллах имеет место зависимость магнитных величин от направления - магнитная анизотропия.

Бросается в глаза сходство между ферромагнетиками и сегнетоэлектриками (см. раздел 8.3), хотя последние стали изучаться значительно позже ферромагнетиков. Ввиду отмеченного сходства сегнетоэлектрики иногда называют «ферроэлектриками».

Возникновение спонтанной намагниченности ниже температуры Кюри указывает на процесс магнитного упорядочения, поэтому переход в ферромагнитное состояние естественно рассматривать как фазовый переход 2-го рода и применить к нему теорию Ландау. При этом сохраняют силу многие формулы из теории сегнетоэлектричества, полученные в разделе 8.3.

Термодинамический потенциал Гиббса для ферромагнетика в слабом магнитном поле H вблизи точки Кюри можно записать в виде, сходном с (8.74):

$$\Phi(p,T,M) = \Phi_0(p,T) + \frac{1}{2}\alpha(p,T)M^2 + \frac{1}{4}\beta(p,T)M^4 - MH. \tag{9.69}$$

Зависимость феноменологических параметров α, β от температуры дается формулами (8.72). Температурная зависимость равновесной намагниченности получается из (8.73):

$$M_0 = \sqrt{\frac{a}{\beta}(T_C - T)}, \quad T < T_C \tag{9.70}$$

Магнитная восприимчивость при $T = T_C$ имеет особенность и описывается в парамагнитной области ($T > T_C$) законом Кюри-Вейсса

$$\chi = \frac{C}{T - T_C}, \quad T > T_C \tag{9.7}$$

В упорядоченной фазе ($T < T_C$) имеем

$$\chi = \frac{C}{2\,(T - T_C)}, \quad T < T_C \tag{9.72}$$

Как уже отмечалось в разделе 8.3, в области сильных флуктуаций параметра порядка вблизи точки Кюри теория Ландау неприменима. Например, для железа область применимости определяется неравенством $|T - T_C| \gg 0,02T_C$. Кроме того, изложенная теория не позволяет найти T_C и коэффициенты a, β, C.

Первый шаг в построении микроскопической теории ферромагнетизма сделал французский физик П. Вейсс (1907), который ввел в рассмотрение внутреннее («молекулярное») магнитное поле

$$\boldsymbol{H}_{\text{mol}} = \lambda \boldsymbol{M} \tag{9.7}$$

выстраивающее магнитные моменты ферромагнетика параллельно друг другу. Природа этого поля в то время не была известна. Естественное предположение о том, что внутримолекулярное поле создается взаимодействием элементарных магнитных моментов, не согласовывалось с опытными данными. Из опыта для типичных ферромагнетиков (например, железа) следует
значение спонтанной намагниченности $M_0 \approx 10^3$ Гс и постоянной молекулярного поля $\lambda \approx 10^4$, так что $H_{\text{mol}} \approx 10^7$ Э. В то же время магнитный момент атома (порядка магнетона Бора) на межатомных расстояниях создает значительно меньшее поле порядка $\mu_B/a^3 \approx 10^3 \div 10^4$ Э.

Природа молекулярного поля Вейсса нашла объяснение в трудах Я. И. Френкеля и В. Гейзенберга на основе квантовой механики. Рассмотрим простейший вариант модели

ферромагнетика, предложенной Гейзенбергом. Пусть каждый атом локализован в своем узле и имеет магнитный момент, квантовомеханический оператор которого $\widehat{\boldsymbol{\mu}} = 2\mu_B\widehat{\boldsymbol{S}}$. Здесь мы учли, что главная роль в ферромагнетизме принадлежит спиновым магнитным моментам, и будем считать $\widehat{\boldsymbol{S}}$ оператором спинового механического момента атома. Спин атома взаимодействует с внешним полем $\boldsymbol{H}$ и со спинами ближайших соседей. Взаимодействие между спинами имеет квантовомеханическую природу и носит «обменный» характер, обусловленный антисимметрией (см. (Д3.6)) полной волновой функции электронной системы. В основе обменного взаимодействия лежат кулоновские электрические силы (а не слабые магнитные), способные обеспечить нужную величину эффективного поля. Считая все атомы одинаковыми, запишем оператор обменного взаимодействия между спинами в виде $\widehat{u}_{ik} = -4I\widehat{\boldsymbol{S}}_i \cdot \widehat{\boldsymbol{S}}_k$, где $I > 0$ - константа обменного взаимодействия, имеющая размерность энергии. Положительность этой постоянной делает состояние с параллельными спинами энергетически выгодным.

Чтобы перейти к приближению самосогласованного молекулярного поля, заменим воздействие соседних спинов на выделенный спин S некоторым средним полем ([Кубо (1967), Бердышев (1992)]), выражающимся через средний спин:

$$4I\sum_{i=1}^{z}\widehat{\boldsymbol{S}}_i \cdot \widehat{\boldsymbol{S}} \to 2zI\overline{\boldsymbol{S}} \cdot \widehat{\boldsymbol{S}} = 2\mu_B\boldsymbol{H}_{\text{mol}} \cdot \widehat{\boldsymbol{S}}$$

где z - число ближайших соседей. Поскольку макроскопическая намагниченность в рассматриваемой модели должна выражаться в виде $\boldsymbol{M} = 2\mu_B N\bar{S}$, где N - средняя концентрация спинов, то самосогласованное поле приобретает вид (9.73). Константа молекулярного поля Вейсса $\lambda = zI/\mu_B^2 N$ определяется квантовомеханическим обменным взаимодействием между электронами.

Таким образом, каждому локализованному спину в ферромагнетике можно сопоставить гамильтониан

$$\widehat{V} = -2\mu_B\left(\boldsymbol{H} + \boldsymbol{H}_{mol}\right) \cdot \widehat{\boldsymbol{S}} = -2\mu_B(\boldsymbol{H} + \lambda\boldsymbol{M}) \cdot \widehat{\boldsymbol{S}} \tag{9.74}$$

В дальнейшем мы будем считать ферромагнетик изотропным и направления $\boldsymbol{M}$ и $\boldsymbol{H}$ одинаковыми.

Пример 9.6. На основе гамильтониана (9.74) получить уравнение связи между намагниченностью и магнитным полем в ферромагнетике. Вычислить спонтанную намагниченность как функцию температуры (построить графики). Выразить температуру Кюри через константу обменного взаимодействия.

Решение. Пользуясь результатами задачи 7.17 или выполнив усреднение заново, получим уравнение связи в параметрической форме:

$$\frac{M}{M_0} = L_S(aS), \quad \frac{M}{M_0} = \frac{T}{4zIS}a - \frac{H}{\lambda M_0}, \quad 0 \leqslant a < \infty \tag{1}$$

где $M_0 = 2\mu_B NS$ - намагниченность насыщения, $L_S(x)$ - функция Бриллюэна, определенная равенством (12) из решения задачи 7.17. Величина S - квантовое число, определяющее полный спин атома (предполагается, что орбитальный момент не вносит вклада в ферромагнетизм). Возможны значения $S = 1/2, 1, 3/2\ldots$ Наименьшее значение $S = 1/2$ отвечает предельному квантовому случаю, когда в атоме имеется один неспаренный электронный спин, случай $S \gg 1$ соответствует классическому пределу.

Для вычисления спонтанной намагниченности полагаем в (1) $H = 0$ и находим точки пересечения прямой $y_1(x) = x$ с линией $y_2(x) = L_S\left(4zIS^2x/T\right)$ (см. рис. 9.5 для $S = 1/2$), причем $x = M/M_0$. Кроме

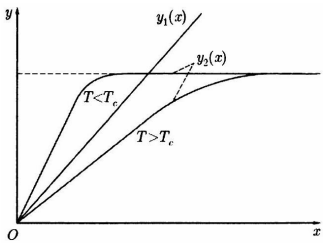


Рис. 9.5

корня $x = 0$, отвечающего нулевой намагниченности, возможны еще значения $x = x_0 > 0, x_0 < 1$, которым соответствует намагниченность $M = x_0 M_0 > 0$. Ненулевой корень имеется только при $dy_2(x)/\,dx|_{x=0} < 1$, когда касательная к кривой $y_2(x)$ при $x = 0$ проходит выше прямой $y_1(x) = x$. Вычислив указанную производную, находим условие существования спонтанной поляризации, из которого определяется температура Кюри ферромагнетика:

$$T_C = \frac{4zS(S+1)I}{3} = \frac{4}{3}\mu_B^2 S(S+1)N\lambda \tag{9.75}$$

Зависимость намагниченности от температуры приведена на рис. 9.6.

Основные черты поведения ферромагнетика описывает также модель Изинга. Эта модель непосредственно относится к анизотропному ферромагнетику, в котором электронные спины, локализованные в узлах кристаллической решетки, могут быть направлены только вдоль или противоположно некоторому фиксированному направлению. Обменное взаимодействие спинов в этой модели можно описать функцией

$$V = -I \sum_{i,k} \sigma_i \sigma_k \tag{9.76}$$

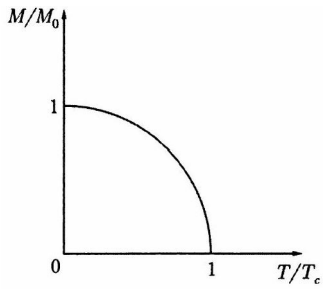


Рис. 9.6

где учитывается только взаимодействие ближайших соседей, а величины σ_i, σ_k принимают значения ± 1 (собственные значения $\widehat{\sigma}_z$-матрицы Паули). При $I > 0$ взаимодействие (9.76) способствует параллельному расположению спинов. Более простая, чем теория Гейзенберга, модель Изинга позволяет вычислить термодинамические потенциалы и рассчитать термодинамические параметры ферромагнетика, хотя даже в этой упрощенной модели точный расчет произвести нелегко (см., например, [Уайт (1985), Бердышев (1992)]).

Мы выполним, следуя Кубо (1967), приближенное вычисление термодинамических функций в модели Изинга. Спиновая часть внутренней энергии системы должна вычисляться путем усреднения энергии (9.76) по равновесному распределению спинов. Точное выражение для среднего с
помощью формул (ДЗ.44) и (ДЗ.46) следует записать в виде

$$\langle V \rangle = \frac{1}{Z} \sum_{\{\sigma\}} V(\{\sigma\}) \exp\left(-\frac{V(\{\sigma\})}{T}\right)$$

где суммирование нужно произвести по всем переменным $\{\sigma\}$ ферромагнетика. Чтобы не заниматься вычислением этой сложной суммы, мы введем при усреднении упрощающее предположение, что корреляция между спинами полностью отсутствует и они в этом смысле образуют идеальный газ. При этом сама усредняемая энергия учитывает обменную спиновую корреляцию. В этом приближении имеем

$$\langle V\rangle = -I\left(\bar{N}_{\uparrow\uparrow} + \bar{N}_{\downarrow\downarrow} - \bar{N}_{\uparrow\downarrow}\right) \tag{9.77}$$

где через $\bar{N}_{\uparrow\uparrow}, \bar{N}_{\downarrow\downarrow}, \bar{N}_{\uparrow\downarrow}$ обозначено полное число пар спинов в ферромагнетике с соответствующими ориентациями. Пусть $N_\uparrow$ и $N_\downarrow$ - число спинов, направленных соответственно вверх и вниз, а $N = N_\uparrow + N_\downarrow$ - полное число спинов. Намагниченность ферромагнетика зависит от избытка спинов одного направления, т. е. от величины $x = (N_\uparrow - N_\downarrow)/N$.

В отсутствие корреляции вероятности того, что в данном узле находится спин заданного направления, равны

$$w_\uparrow = \frac{N_\uparrow}{N} = \frac{1}{2}(1+x), \quad w_\downarrow = \frac{N_\downarrow}{N} = \frac{1}{2}(1-x)$$

независимо от направления спинов в соседних узлах. Если число ближайших соседей z для каждого узла, то среднее число пар со спином вверх

$$N_{\uparrow\uparrow} = \frac{1}{2}zN_\uparrow w_\uparrow = \frac{1}{8}zN(1+x)^2$$

Множитель $1/2$ в исходном выражении учитывает тот факт, что в произведение $zw_\uparrow \cdot N_\uparrow$ каждый спин нужного направления входит дважды - один раз в качестве центрального спина и второй раз в качестве одного из ближайших соседей. Аналогичным образом находим

$$\bar{N}_{\downarrow\downarrow} = \frac{1}{8}zN(1-x)^2, \quad \bar{N}_{\uparrow\downarrow} = \frac{1}{4}zN\left(1-x^2\right)$$

(в последнем выражении двойного учета нет). В итоге получаем из (9.77) ту часть внутренней энергии U, которая связана с взаимодействием спинов:

$$U(x) = \langle V\rangle = -\frac{1}{2}zINx^2 \tag{9.78}$$

Для определения всех термодинамических потенциалов системы нужно еще вычислить ее энтропию. Вычисляем ее по формуле Больцмана $S = \ln \Delta\Gamma$, где $\Delta\Gamma$ - число микросостояний, которыми реализуется макросостояние системы с заданными x и N. В отсутствие корреляций между спинами все возможные перестановки спинов равновероятны, поэтому

$$\Delta\Gamma = \frac{N!}{N_\uparrow! N_\downarrow!}, \quad S = N\ln 2 - \frac{1}{2}N[(1+x)\ln(1+x) + (1-x)\ln(1-x)] \tag{9.79}$$

Здесь использована формула Стирлинга $\ln N! \approx N\ln N - N$ для всех трех чисел N, которые считаются большими.

С учетом внешнего магнитного поля H и полученных значений U и S записываем потенциал Гиббса в виде

$$\Phi = \Phi_0 + \frac{1}{2}NT[(1+x)\ln(1+x) + (1-x)\ln(1-x)] - \frac{1}{2}zINx^2 - \mu_B NxH. \tag{9.80}$$

Здесь $-\mu_B H$ - энергия отдельного спина во внешнем поле, Nx - число нескомпенсированных спинов, Φ_0 - вклад от степеней свободы ферромагнетика, не связанных с взаимодействием спинов. В пренебрежении эффектами, связанными с наличием границ, можно считать величину (9.80) удельным термодинамическим потенциалом, если N - число спинов на единицу объема.

Пример 9.7. Из условия минимума потенциала Ф при фиксированных p, T и H вычислить равновесную намагниченность $M = \mu_B N x_{eq}$ ферромагнетика в модели Изинга и исследовать устойчивость полученных состояний. В частности, показать, что состояние со спонтанной намагниченностью $M > 0$ при $T < T_C$ и $H = 0$ соответствует минимуму термодинамического потенциала.

Решение. Приравнивая нулю первую производную по x от потенциала Гиббса (9.80), получим уравнение, из которого определяется x_{eq}. Записав $x_{eq} = M/M_0$, где $M_0 = \mu_B N$ - намагниченность насыщения, после некоторых преобразований получим

$$\frac{M}{M_0} = \text{th}\left(\frac{\mu_B(H + \lambda M)}{T}\right) \tag{1}$$

Это - нелинейное уравнение связи между M и H. Сравнивая его с уравнениями (1) примера 9.6, убеждаемся, что при $S = 1/2$ они становятся тождественными полученному выше уравнению (1), если учесть, что $L_{1/2}(x) = \text{th}\, x$.

Условие устойчивости равновесного состояния имеет вид

$$\left.\frac{d^2\Phi}{dx^2}\right|_{x_{eq}} = NT_C\left[\frac{T}{T_C}\frac{1}{1 - x_{eq}} - 1\right] > 0 \tag{2}$$

где $T_C = zI$ Состояние с $x_{eq} = 0$ устойчиво при $T > T_C$ и неустойчиво при $T < T_C$. Если $x_{eq} > 0$, воспользуемся уравнением (1) при $H = 0$ и получим

$$\left.\frac{d^2\Phi}{dx^2}\right|_{x_{eq}} = \frac{NT_C}{y}[\text{sh}\, y - y] > 0 \tag{3}$$

Написанное неравенство выполняется при любом $y = 2T_C M/TM_0 > 0$, что возможно лишь при температурах ниже точки Кюри. Таким образом, состояние со спонтанной намагниченностью термодинамически устойчиво.

Ферромагнетики достаточно больших размеров состоят из макроскопических областей, намагниченных до насыщения - магнитных доменов. Выше рассматривались свойства ферромагнетика в пределах отдельного домена.

Антиферромагнетизм. Антиферромагнетиками называются магнитоупорядоченные вещества, которые в кристаллическом состоянии имеют две или несколько подрешеток с упорядоченными магнитными моментами, имеющими разные направления в разных подрешетках. Но при сложении намагниченности подрешеток взаимно компенсируются и результирующая намагниченность равна нулю. Антиферромагнетиками являются $Cr, Mn, K_2O, MnO, FeCl_2$ и многие другие элементы и соединения.

Применим метод самосогласованного поля к исследованию свойств антиферромагнетизма в простейшей модели. Пусть антиферромагнетик состоит из двух подрешеток, a и b, с одинаковыми числами атомов $N/2$ на единицу объема и с одинаковыми спинами. Учитываем взаимодействие только с ближайшими соседями, в предположении, что соседние спины стремятся принять антипараллельные направления. В этом случае можно использовать представление (9.73) для молекулярного поля, действующего на магнитные моменты каждой из подрешеток, со следующими изменениями:

а) заменить I на $-I$, считая по-прежнему $I > 0$;

б) заменить N на $N/2$;
в) поле в каждой из подрешеток будет определяться намагниченностью второй подрешетки.

В результате будем иметь

$$\boldsymbol{H}_{mol}^{(a)} = \boldsymbol{H} - 2\lambda \boldsymbol{M}^{(b)}, \quad \boldsymbol{H}_{mol}^{(b)} = \boldsymbol{H} - 2\lambda \boldsymbol{M}^{(a)} \tag{9.81}$$

где постоянная молекулярного поля имеет прежнее значение $\lambda = zI/\mu_B^2 N > 0$ и добавлено внешнее магнитное поле. Уравнения связи для намагниченностей двух подрешеток получаются из равенств (1) примера 9.6 формальной заменой $I \to -I, N \to N/2$ (при этом $\lambda \to -2\lambda$):

$$\begin{aligned} \frac{\boldsymbol{l}_a \cdot \boldsymbol{M}^{(a)}}{M_0} &= L_S\left(\frac{2\mu_B S}{T}\left|\boldsymbol{H} - 2\lambda \boldsymbol{M}^{(b)}\right|\right) \\ \frac{\boldsymbol{l}_b \cdot \boldsymbol{M}^{(b)}}{M_0} &= L_S\left(\frac{2\mu_B S}{T}\left|\boldsymbol{H} - 2\lambda \boldsymbol{M}^{(a)}\right|\right) \end{aligned} \tag{9.82}$$

Здесь $M_0 = \mu_B S N$ - одинаковые намагниченности насыщения подрешеток, в левые части равенств входят проекции намагниченностей на соответствующие локальные поля:

$$\boldsymbol{l}_{a,b} = \frac{\boldsymbol{H} - 2\lambda \boldsymbol{M}^{(b,a)}}{|\boldsymbol{H} - 2\lambda \boldsymbol{M}^{(b,a)}|} \tag{9.83}$$

Анализ свойств антиферромагнетика на основе уравнений (9.82) производится в задачах $9.81 - 9.83^{\star}$.

Рекомендуемая литература: [Ландау и Лифшиц, Электродинамика сплошных сред; Ландау и Лифшиц, Статистическая физика; Тамм (1976); Батыгин и Топтыгин (2002); Смайт (1954); Кубо (1970); Кубо (1967); Бердышев (1992); Леонтович (1983); Уайт (1985); Завадский и Вальков (1980); Изюмов и Скрябин (1987)].

Задачи

9.53. В бесконечном соленоиде с радиусом a и числом витков n на единицу длины медленно изменяется сила тока $J(t)$. Внутри соленоида магнетик с проницаемостью μ. Вычислить изменение магнитной энергии dW/dt на единицу длины соленоида и показать, что оно обеспечивается потоком вектора Пойнтинга через боковую поверхность соленоида.

Указание. Электрическое поле внутри соленоида вычислить из закона электромагнитной индукции (11.11).

9.54. Вычислить магнитную индукцию $\boldsymbol{B}$ и напряженность магнитного поля $\boldsymbol{H}$ на оси соленоида с густой намоткой, имеющего форму цилиндра.

Высота цилиндра h, радиус a, число витков на единицу длины n, сила тока J. Снаружи и внутри соленоида находится однородная среда с магнитной проницаемостью μ.

9.55. Найти коэффициент самоиндукции $\mathscr{L}$ на единицу длины бесконечного цилиндрического соленоида с густой намоткой и с произвольной (не обязательно круговой) формой сечения. Площадь сечения S, число витков на единицу длины n. Соленоид заполнен однородным магнетиком с проницаемостью μ.

9.56. Найти коэффициент самоиндукции L тороидального соленоида, заполненного магнетиком с проницаемостью μ. Радиус тора b, число витков N, сечение тора - круг радиуса a. Определить самоиндукцию на единицу длины соленоида в предельном случае $b \to \infty$ ($N/b = \text{const}$). Решить ту же задачу для тороидального соленоида, сечение

которого - прямоугольник со сторонами a и h. Как изменится самоиндукция, если равномерно распределенный ток будет течь, сохраняя то же направление, не по проводу, намотанному на тор, а прямо по полой оболочке тора?

9.57. Линия состоит из двух коаксиальных тонких цилиндрических оболочек с радиусами a и $b(a < b)$, пространство между ними заполнено веществом с магнитной проницаемостью μ. Найти самоиндукцию $\mathscr{L}$ на единицу длины.

9.58. Вычислить коэффициент самоиндукции $\mathscr{L}$ на единицу длины двухпроводной линии. Линия находится в среде с магнитной проницаемостью μ и состоит из двух параллельных прямых проводов, радиусы которых a и b, расстояние между осевыми линиями h, магнитная проницаемость материала μ_0. По проводам текут равные по величине, но противоположно направленные токи J.

9.59*. Показать, что коэффициент самоиндукции тонкого замкнутого проводника с круговой формой сечения можно приближенно вычислить по формуле

$$L = \frac{\mu_0 l}{2} + L', {}^{3}$$

где μ_0 - магнитная проницаемость проводника, l - его длина, L' - коэффициент взаимной индукции двух линейных контуров. Один из контуров совпадает с осевой линией рассматриваемого квазилинейного проводника,

другой - с линией, по которой пересекается с поверхностью проводника произвольная незамкнутая поверхность S, опирающаяся на его осевую линию (рис. 9.7).

9.60. На основе результата предыдущей задачи вычислить коэффициент самоиндукции L тонкого проволочного кольца радиуса b. Радиус провода $a \ll b$, магнитные проницаемости провода и внешней среды различны.

9.61. Вычислить самоиндук-

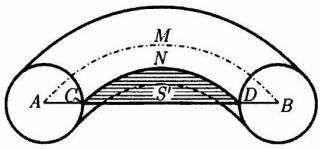


Рис. 9.7

цию L проволочного квадрата со стороной b. Радиус провода $a \ll b$, магнитная проницаемость окружающего пространства μ, внутри провода $\mu_0 = 1$.

Указание. Использовать формулы, полученные в задачах 9.59^, 2.114.

9.62. Прямолинейный провод с током J расположен параллельно оси бесконечного кругового цилиндра на расстоянии b от нее. Радиус цилиндра $a(a < b)$, магнитная проницаемость μ. Найти силу взаимодействия f на единицу длины [4].

Указание. Применить метод изображений.

9.63. Прямолинейный провод с током J расположен внутри бесконечной цилиндрической полости, вырезанной в однородной магнитной среде. Провод расположен параллельно оси цилиндра на расстоянии b от нее. Радиус цилиндра a, магнитная проницаемость магнетика μ. Найти силу взаимодействия f на единицу длины.

9.64. Небольшой постоянный магнит, момент которого m, находится в пустоте вблизи плоской границы вещества с магнитной проницаемостью μ. Определить силу F и вращающий момент N, действующие на постоянный магнит.

Указание. Применить метод изображений.

9.65. Контур с током находится на плоской границе двух сред с магнитными

[03] Первый и второй члены в выражении L могут быть названы соответственно внутренней и внешней самоиндукцией, так как они определяют магнитную энергию, запасенную внутри проводника и вне его.

проницаемостями μ_1 и μ_2. Выразить самоиндукцию L контура через ее значение L_0 для того же контура в вакууме.

9.66. Вычислить изменение внутренней энергии ΔU магнетика при изотермическом намагничивании (магнитная индукция изменяется от 0 до B). Сравнить полученную величину с $U - U_0$, определенной согласно 9.57 для адиабатического процесса. Изменением объема и плотности массы пренебречь.

9.67*. Пользуясь принципом Нернста в формулировке Планка и соотношением (9.55) для $d\widetilde{F}$, показать, что магнитная восприимчивость любого магнетика должна удовлетворять условию $(\partial\chi/\partial T)_\tau \to 0$ при $T \to 0$. Принцип Нернста утверждает, что $S(T, a_i)|_{T\to 0} \to 0$, т. е. энтропия равновесного тела при стремлении абсолютной температуры к нулю стремится к нулю при любых фиксированных значениях внешних параметров (давления, внешних полей, фазового состояния). Удовлетворяют ли этому условию парамагнитные восприимчивости вырожденного электронного газа (задача 7.22) и разреженного атомарного газа (задача 7.17)?

9.68. Кристаллический парамагнетик, магнитная восприимчивость которого в некоторой области температур подчиняется закону Кюри $\chi(T) = C/T, C = \text{const}$, теплоизолирован и находится в магнитном поле B при температуре T. Как изменится его температура при выключении поля?

9.69. Парамагнетик, подчиняющийся закону Кюри (см. предыдущую задачу), изотермически и обратимо намагничивается при температуре T_0 в магнитном поле, возрастающем от 0 до H, и затем изотермически размагничивается до нуля. Вычислить теплоту Q, получаемую телом в этих процессах. Согласуется ли ее знак с результатом предыдущей задачи об адиабатическом размагничивании?

9.70^. «Идеальными парамагнетиками» называются вещества, намагниченность M которых зависит от величин H и T только через их отношение [5], т.е. $M = f(H/T)$ (рассматриваем изотропную среду). Предполагая плотность вещества неизменной, показать, что у идеального парамагнетика внутренняя энергия U_*, определенная согласно (9.68) и рассматриваемая как функция температуры и намагниченности, на самом деле не зависит от M. Выразить энтропию S и U_* через теплоемкость C_{V0}, предполагая ее зависимость от температуры вида $C_{V0} = bT^3, b = \text{const}$, и через функцию $f(H/T)$.

9.71. Магнетик поляризуется в воздухе во внешнем однородном магнитном поле H. Считая поле также однородным внутри тела, а процесс намагничивания изотермическим и изобарическим, вычислить изменение

объема тела $\Delta V \ll V$, выразив его через поле H, магнитную восприимчивость χ и изотермическую сжимаемость $\beta = -(1/V)(\partial V/\partial p)_T$, где p - давление.

Указание. Может быть решена по образцу более сложной задачи 8.80.

9.72. Для изотропного магнетика выразить через намагниченность M и магнитную восприимчивость $\chi(T, \tau)$ связанные с намагничением добавки к величинам U_*, F_*. Эти величины определены равенствами (9.68). Найти аналогичную добавку к энтропии S. Плотность массы τ считать неизменной.

9.73. Вычислить изменение $C_{VB} - C_{V0}$ теплоемкости магнетика при постоянных объеме и магнитной индукции, вызванное включением магнитного поля. Сравнить эту разность с разностью $C_{VH} - C_{V0}$, пользуясь уравнением связи $B = \mu(T, \tau)H$.

9.74. Вычислить разность удельных теплоемкостей магнетика $C_H - C_B$, не предполагая линейного характера зависимости между B и H. При этом сохраняются постоянными также либо объем V, либо давление p.

[04] Из результатов задач 9.36, 9.62 легко получить решение электростатических задач об определении поля, создаваемого заряженной нитью.

[05] Такая зависимость возможна только в ограниченном интервале параметров.

9.75. Доказать, что удельные теплоемкости магнетика можно представить формулами

$$C_B = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_B, \quad C_H = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_H - H\left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_H$$

где M - удельный дипольный момент магнетика, а индексы указывают, какой параметр остается постоянным.

9.76. В нелинейном случае магнитная восприимчивость $\chi = \partial M/\partial H$ зависит от условий процесса поляризации: остается ли магнетик теплоизолированным, или он находится в контакте с термостатом, поддерживающим его при постоянной температуре. Найти связь между адиабатической и изотермической восприимчивостями:

$$\chi_S = \frac{C_M}{C_H}\chi_T$$

где теплоемкости C_M, C_H соответствуют постоянству намагниченности и магнитного поля.

9.77. На основе соотношений (9.69)-(9.72) вычислить скачок теплоемкости $\Delta C_p = C_p|_{T=T_C+0} - C_p|_{T=T_C-0}$ ферромагнетика в точке Кюри.

9.78. Магнитная восприимчивость парамагнетика дается законом Кюри-Вейсса $\chi(T) = C/(T - T_C)$, уравнение связи линейно: $M = \chi H$. Известна также теплоемкость C_M. Вычислить удельные величины U_*, S как функции температуры и намагниченности M (считая плотность вещества неизменной). Сравнить полученные формулы с результатом задачи 9.70* для «идеального парамагнетика».

9.79. Вычислить в аналитической форме зависимость намагниченности от температуры в модели самосогласованного молекулярного поля (пример 9.6) в области температур $T_C - T \ll T_C$ и $T \ll T_C$.

9.80. Вычислить в модели самосогласованного поля (пример 9.6) магнитную восприимчивость ферромагнетика вблизи точки Кюри в парамагнитной и ферромагнитной фазах. Вычислить также намагниченность в точке Кюри при наличии слабого внешнего поля.

9.81. Из уравнений (9.82) для антиферромагнетика найти область температур, в которой существует отличная от нуля спонтанная намагниченность подрешеток.

9.82. Вычислить магнитную восприимчивость антиферромагнетика в парамагнитной фазе, в которой отсутствует спонтанная намагниченность подрешеток. Среду в отсутствие внешнего поля считать изотропной.

9.83*. Вычислить магнитную восприимчивость антиферромагнетика при температурах ниже точки перехода в антиферромагнитное состояние. При этом следует учесть, чтто результирующая намагниченность при всех температурах отсутствует, но в среде имеется выделенное направление, определяемое противоположными направлениями намагниченностей подрешеток, и магнитные восприимчивости в разных направлениях могут различаться.

11.3.4 9.4. Electrical and Magnetic Properties of Superconductors

Основные опытные факты. Первый сверхпроводник открыл голландский физик Х. Камерлинг-Оннес [6] в 1911 г. Ртуть при охлаждении до

[06] Любопытно, что при присуждении Нобелевской премии Камерлинг-Оннесу в 1913 г. «за исследования свойств тел при низких температурах, которые, в частности, привели к получению жидкого гелия», нобелевский комитет не счел нужным выделить в своем решении открытие сверхпроводимости. История изучения сверхпроводимости и современные задачи в этой области отражены в статьях Нобелевского лауреата В. Л. Гинзбурга (2004, 2005).

температуры $T_c = 4.15$ K переходила в состояние, в котором ее электропроводность повышалась более чем на 10 порядков по сравнению с электропроводностью лучших проводников (Cu, Ag), т.е. сопротивление падало фактически до нуля. Кроме ртути, в сверхпроводящее состояние переходят многие другие металлы и их соединения. Долгое время наиболее высокотемпературным сверхпроводником считалось соединение Nb_3Ge ($T_c \approx 23$ K). Но во второй половине 1980 -х годов в Европе и Америке были синтезированы высокотемпературные сверхпроводники, например, $Bi_4(SrCa)_6CuO_{16}, T_c \approx 105$ K, $Tl_2BaCa_2Cu_3O_{10}, T_c \approx 125$ K. В настоящее время поиск высокотемпературных сверхпроводников интенсивно продолжается и они находят все новые области применения.

1. Итак, главное свойство сверхпроводников - падение электрического сопротивления до нуля, которое происходит в узком интервале температур порядка долей градуса при охлаждении их ниже критической температуры.

2. Достаточно слабое магнитное поле всегда выталкивается из сверхпроводника, независимо от его предыстории, т. е. от того, до или после перехода проводника в сверхпроводящее состояние оно было включено (эффект Мейсснера-Оксенфельда). Это объясняется тем, что внешнее магнитное поле вызывает электрический ток в тонком поверхностном слое сверхпроводника. Созданное этим током вторичное магнитное поле компенсирует внешнее поле. В этом отношении сверхпроводник существенно отличается от идеального проводника (т. е. проводника с высокой проводимостью). Магнитное поле обладает свойством «вмороженности» в хорошо проводящую среду (подробнее см. раздел 10.3), поэтому первоначально имевшееся в «идеальном» проводнике поле будет в нем сохраняться даже при выключении внешнего поля.

Плотность поверхностного тока в сверхпроводнике можно найти с помощью второго соотношения (9.37):

$$\boldsymbol{i} = \frac{c}{4\pi}\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{H} \tag{9.84}$$

Здесь $\boldsymbol{n}$ - внешняя нормаль, $\boldsymbol{H}$ - напряженность магнйтного поля вне сверхпроводника, который мы будем считать находящимся в вакууме. Внутри сверхпроводника поле равно нулю, поэтому внешнее поле, в которое помещен сверхпроводник, перестраивается таким образом, что на его поверхности

$$\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{H} \equiv H_n = 0 \tag{9.85}$$

Касательная проекция поля испытывает на этой поверхности скачок в соответствии с (9.84).

Пример 9.8. Внешнее магнитное поле H параллельно боковой поверхности сверхпроводника, имеюшего форму длинного кругового цилиндра радиуса a. Вычислить магнитный момент $\boldsymbol{M}$ на единицу объема сверхпроводника, создаваемый поверхностным током (9.84), и его поляризуемость во внешнем поле. Сравнить поляризуемость сверхпроводника с поляризуемостью большинства обычных диамагнетиков ($\chi \sim 10^{-6}$).

Решение. По формуле (2.59), используя выражение для тока (9.84), находим магнитный момент на единицу длины цилиндра и из него получаем $\boldsymbol{M} = -(1/4\pi)\boldsymbol{H}$. Этот результат показывает, что сверхпроводник ведет себя в магнитном поле как идеальный диамагнетик с магнитной восприимчивостью $\chi = -1/4\pi$ и магнитной проницаемостью $\mu = 0$. Поле внутри такого диамагнетика ослабляется до нуля. Его магнитная восприимчивость на пять порядков превышает восприимчивость обычных

металлов.
3. При любой температуре достаточно

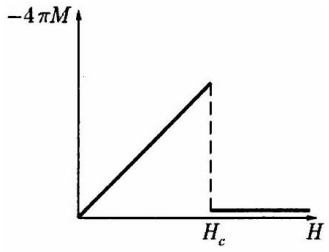


Рис. 9.8 сильное магнитное поле разрушает сверхпроводимость и проникает внутрь сверхпроводника. По поведению во внешнем магнитном поле различают сверхпроводники первого и второго рода. К первой группе относится большинство чистых металлов, во второй преобладают сплавы и химические соединения, в том числе высокотемпературные сверхпроводники-керамики. В схематической форме кривые зависимости намагниченности от внешнего магнитного поля для цилиндров, ориентированных вдоль поля, приведены на рис. 9.8 для сверхпроводника I рода и на рис. 9.9 для сверхпроводника II рода. Начальный прямолинейный участок в обоих случаях соответствует эффекту Мейсснера-Оксенфельда, когда магнитное поле в толще сверхпроводника отсутствует.

У сверхпроводников I рода при увеличении поля до значения $H_c(T)$, зависящего от температуры, магнитное поле «скачком» проникает в толщу сверхпроводника и он превращается в нормальный металл. При этом намагниченность уменьшается на 5-6 порядков. Зависимость критического поля, разрушающего сверхпроводимость, от температуры хорошо описывается эмпирической формулой

$$H_c(T) = H_c(0)\left[1 - (T/T_c)^2\right] \tag{9.86}$$

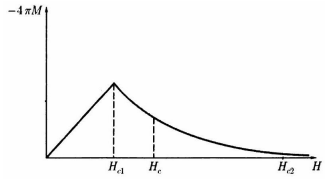


Рис. 9.9
Значение H_c для чистых металлов составляет сотни эрстед (400 Э для Hg, 800 Э для Pb).

У сверхпроводников II рода уменьшение магнитного момента происходит постепенно, в интервале от H_{c1} до H_{c2}, причем второе критическое поле, при котором весь сверхпроводник переходит в нормальное состояние, достигает значений порядка 10^5 Э. Кривая намагниченности необратима и зависит от предыстории процесса (гистерезис). Между значениями H_{c1} и H_{c2} сверхпроводник находится в смешанном состоянии, в котором сверхпроводящие и нормальные области чередуются. При увеличении поля сверх H_{c1} нормальные области зарождаются в виде тонких нитей, пронизывающих сверхпроводник. В аналогичном состоянии в некотором интервале значений поля может находиться и сверхпроводник I рода сложной формы, поле внутри которого неоднородно. Области, в которых $H < H_c$, останутся сверхпроводящими, а области с $H \geqslant H_c$ перейдут в нормальное состояние. Такое состояние называется промежуточным.
4. Если возбудить незатухающий ток в сверхпроводящем кольце, то плоскость кольца будет пронизывать некоторый магнитный поток Ф, зависящий от силы тока. Как показали тонкие эксперименты, магнитный поток квантуется:

$$\Phi = n\Phi_0, \quad \Phi_0 = \frac{\pi\hbar c}{e_0} \approx 2 \times 10^{-7}\text{Гс} \cdot \text{ см}^2, \quad n = 0, 1, 2 \ldots \tag{9.87}$$

где e_0 - элементарный заряд. Квант магнитного потока Φ_0 - вполне заметная величина. В капилляре диаметром порядка 10^{-3} см одному кванту потока соответствует магнитная индукция порядка 0.1 Гс. Квантование магнитного потока, создаваемого сверхпроводящим током, указывает на квантовую природу сверхпроводимости.

5. Изотопический эффект в сверхпроводимости был открыт при исследовании сверхпроводящих свойств различных изотопов ртути. При изменении массового числа M изотопа изменялась критическая температура сверхпроводимости по закону

$$T_c M^{1/2} = \text{ const} \tag{9.88}$$

Изотопический эффект свидетельствует о связи явления сверхпроводимости с колебаниями кристаллической решетки, так как частота колебаний иона в решетке обратно пропорциональна $M^{1/2}$.

Термодинамика сверхпроводников. Основные термодинамические свойства вещества, связанные со сверхпроводимостью, можно описать, если известна зависимость $T_c(T)$. Воспользуемся результатами примера (9.8). При намагничивании сверхпроводника в полях, не проникающих в его толщу, элементарная работа на единицу объема $\delta A = -\boldsymbol{M} \cdot d\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H} \cdot d\boldsymbol{H}/4\pi$. При изотермическом изменении поля от 0 до H запишем удельную свободную энергию Гельмгольца в виде (ср. с формулой (9.64); здесь через H обозначено внешнее поле, в котором находится сверхпроводник)

$$F_s(T, H) = F_s(T, 0) + \frac{H^2}{8\pi} \tag{9.89}$$

(изменением объема и связанной с этим работой пренебрегаем). Пусть поле становится равным критическому: $H \to H_c(T)$. Сверхпроводник переходит в нормальное состояние и его свободная энергия за вычетом энергии поля в объеме тела становится равной $F_n(T, H) = F_n(T) - \boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{H}/2 \approx F_n(T)$, так как магнитный момент неферромагнитного вещества пренебрежимо мал по сравнению со сверхпроводящим. Таким образом, получаем связь между свободными энергиями сверхпроводящего и несверхпроводящего состояний при заданной температуре $T < T_c$:

$$F_n(T) = F_s(T, 0) + \frac{H_c^2(T)}{8\pi} \tag{9.90}$$

Из этого соотношения следует, что $F_n(T) > F_s(T, 0)$ и при $T < T_c$ осуществляется состояние с меньшей свободной энергией, т. е. сверхпроводящее. Следует отметить, что величина $H_c(T)$ хорошо измеряется только у сверхпроводников I рода. У сверхпроводников II рода эта величина («термодинамическое критическое поле») лежит между значениями H_{c1} и H_{c2} (рис. 9.9) и непосредственно не измеряется, но может быть вычислено. Термодинамические свойства сверхпроводников I рода рассматриваются в задачах (9.84)-(9.86).

Задачи

9.84. Пользуясь соотношениями (9.89) и (9.86), вычислить разность энтропий нормального и сверхпроводящего состояний в интервале температур $0 \leqslant T \leqslant T_0$ при наличии внешнего магнитного поля $0 \leqslant H \leqslant H_c(T)$. На этой основе указать

классификацию фазовых переходов (первого или второго рода) из сверхпроводящего в нормальное состояние.

9.85. Вычислить скрытую теплоту перехода из сверхпроводящего в нормальное состояние, вызванного разрушением сверхпроводимости магнитным полем $H > H_c$. Сравнить этот эффект с адиабатическим и изотермическим размагничиванием парамагнетика (см. задачи 9.68°, 9.69.)

9.86. Вычислить скачок теплоемкости $\Delta C = C_s - C_n$ вещества в точке фазового перехода T_c из нормального в сверхпроводящее состояние. Найти значение ΔC в калориях на см ^{3} и на градус Кельвина для свинца, у которого $T_c \approx 7.2$ K, $H_c(0) \approx 803$ Э.

Феноменологическая магнитостатика сверхпроводников. В простейшей модели сверхпроводника предполагается, что свободные электроны вещества (с концентрацией n) можно разделить на две группы: нормальные и сверхпроводящие, т. е. $n = n_n + n_s$. Соотношение между этими группами зависит от температуры: $n \geqslant n_s \geqslant 0$ при $0 \leqslant T \leqslant T_c$. В статическом случае электрический ток создается только сверхпроводящими электронами, так как они движутся сквозь сверхпроводник без всякого трения. Учтем возможность проникновения магнитного поля в тонкий поверхностный слой и будем рассматривать плотность тока и магнитную индукцию внутри сверхпроводника как функции координат.

Записываем плотность сверхпроводящего тока $\boldsymbol{j}_s(\boldsymbol{r}) = en_s(\boldsymbol{r})\boldsymbol{v}_s(\boldsymbol{r})$ и плотность кинетической энергии сверхпроводящих электронов:

$$w = \frac{n_s m v_s^2}{2} = \frac{m j_s^2}{2e^2 n_s}$$

С помощью макроскопического уравнения Максвелла (8.9), $\operatorname{rot} \boldsymbol{B} = 4\pi j_s/c$, в котором производная по времени и j_{ext} равны нулю, а ток $\bar{j}_{\text{int}}$ обозначен через $\boldsymbol{j}_s$, выражаем плотность кинетической энергии через магнитное поле:

$$w = \frac{\lambda^2}{8\pi}(\operatorname{rot} \boldsymbol{B})^2$$

где параметр

$$\lambda = \sqrt{\frac{mc^2}{4\pi e^2 n_s}} \tag{9.91}$$

имеет размерность длины.

Пример 9.9. Найти уравнение, описывающее распределение магнитного поля внутри сверхпроводника. Для этого записать свободную энергию Гельмгольца как функционал (интеграл) от магнитной индукции и использовать условие минимума свободной энергии в равновесном состоянии.

Решение. Свободную энергию (включая энергию поля в объеме тела) записываем в виде интеграла по объему сверхпроводника:

$$\mathscr{F}_s[T, \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})] = \mathscr{F}_s(T) + \frac{1}{8\pi}\int\limits_V \left[B^2 + \lambda^2(\operatorname{rot} \boldsymbol{B})^2\right] dV \tag{1}$$

Считаем объем тела и температуру неизменными при изменениях магнитного поля. Далее следует записать необходимое условие минимума для функционала $\mathscr{F}_s[\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})]$, т. е. равенство нулю его первой вариации при варьировании поля, как это делалось многократно в разделе 4.3. При этом предполагаем, что

$$\delta \boldsymbol{B} = 0 \tag{2}$$

на границе сверхпроводника, на которой задано внешнее поле. Получаем

$$\delta\mathscr{F}_s[\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})] = \frac{1}{4\pi}\int\limits_V \left(\boldsymbol{B}\cdot\delta\boldsymbol{B} + \lambda^2\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{rot}\,\delta\boldsymbol{B}\right)dV = 0 \tag{3}$$

С помощью тождества

$$\lambda^2\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{rot}\,\delta\boldsymbol{B} = \delta\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{rot}\,\lambda^2\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{B} - \mathrm{div}\left[\lambda^2\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{B}\times\delta\boldsymbol{B}\right]$$

и теоремы Остроградского-Гаусса, а также граничного условия (2) приводим условие (3) к виду

$$\int\limits_V \left(\boldsymbol{B} + \mathrm{rot}\,\lambda^2\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{B}\right)\cdot\delta\boldsymbol{B}dV = 0 \tag{4}$$

и получаем искомое уравнение

$$\mathrm{rot}\,\lambda^2\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{B} + \boldsymbol{B} = 0 \tag{9.92}$$

С помощью уравнения Максвелла полученному соотношению можно придать вид уравнения связи между сверхпроводящим током и магнитным полем:

$$\frac{4\pi}{c}\,\mathrm{rot}\left(\lambda^2\boldsymbol{j}_s\right) + \boldsymbol{B} = 0 \tag{9.93}$$

Параметр λ имеет смысл глубины проникновения магнитного поля в сверхпроводник. Поскольку число сверхпроводящих электронов зависит от температуры, то и λ является функцией температуры. Для чистых металлов $\lambda \approx 10^{-5} \div 10^{-6}$ см.

Изложенная феноменологическая теория была развита немецкими физиками братьями Ф. и Г. Лондонами в 1935 г. Соотношения (9.92)-(9.93) носят их имя. Теория Лондонов используется в задачах 9.87-9.97.

Задачи

9.87. Записать уравнения Максвелла и материальное уравнение, описывающие статическое электромагнитное поле в сверхпроводнике. Вывести уравнения, описывающие в этом случае распределение тока и магнитного поля.

9.88. Сверхпроводник заполняет полупространство $x \geqslant 0$, при $x < 0$ - вакуум. В вакууме существует однородное магнитное поле $\boldsymbol{H}_0 \| Oy$. Найти распределение магнитного поля и токов в сверхпроводнике в статическом случае.

9.89. Найти силу, действующую на единицу поверхности сверхпроводника, рассмотренного в предыдущей задаче. В какую сторону направлена эта сила?

9.90*. Сверхпроводящая пленка толщиной $2a$, расположенная симметрично относительно плоскости $x = 0$, находится в однородном магнитном поле $\boldsymbol{H}_0 \| Oz$. Найти распределение магнитного поля по объему пленки, а также средний магнитный момент единицы объема.

9.91. В сверхпроводящей пленке, рассмотренной в предыдущей задаче и находящейся в вакууме, течет ток в направлении оси Oz. Сила тока равна i на единицу длины сечения пленки в направлении оси Oy. Найти

распределение тока по сечению пленки и магнитное поле внутри и снаружи пленки. Рассмотреть, в частности, предельные случаи $\lambda \ll a$ и $\lambda \gg a$.

9.92*. Первоначально в свободном пространстве (вакууме) в области $x > 0$ расположена система проводников, в которой текут токи с объемной плотностью $\boldsymbol{j}(x, y, z)$, создающие поле $\boldsymbol{H}(x, y, z)$, причем $j_x(x, y, z) = 0$ всюду в пространстве. Затем полупространство

$x \leqslant 0$ заполняется сверхпроводником. Используя метод изображений, вычислить результирующее поле $\boldsymbol{H}'(x, y, z)$ в области $x > 0$.

Указание. Проанализировать уравнения для векторного потенциала и граничное условие на поверхности сверхпроводника.

9.93. Бесконечно длинный круговой сверхпроводящий цилиндр находится во внешнем однородном магнитном поле $\boldsymbol{H}_0 \| Oz$. Ось цилиндра параллельна полю. Найти распределение магнитного поля по объему цилиндра и средний магнитный момент единицы объема.

9.94. Сверхпроводящий шар радиуса a находится во внешнем однородном магнитном поле H_0. Найти распределение токов в шаре и магнитное поле во всем пространстве. Рассмотреть предельные случаи $a \gg \lambda$ и $a \ll \lambda$.

9.95. По бесконечно длинному сверхпроводящему прямому проводу кругового сечения (радиус a) течет ток J. Найти распределение плотности тока j по сечению провода и магнитное поле во всем пространстве.

9.96. Сверхпроводящее плоское кольцо с самоиндукцией L, в котором течет ток J, вдвигается полностью в однородное магнитное поле $\boldsymbol{H}_0$. Найти ток J', который будет после этого протекать по кольцу. Площадь осевого сечения кольца S. Нормаль к плоскости кольца составляет с направлением $\boldsymbol{H}_0$ угол ϑ.

9.97. Проводящее кольцо с самоиндукцией L находится в нормальном состоянии во внешнем магнитном поле (магнитный поток через контур кольца равен Φ_0). Затем температура понижается, и кольцо переводится в сверхпроводящее состояние. Какой ток будет течь по кольцу, если теперь выключить внешнее магнитное поле?

9.98. По сверхпроводящему прямому проводу радиусом a, находящемуся во внешнем продольном магнитном поле H_0, течет ток J. Каково критическое значение тока J_c, при котором провод теряет сверхпроводящие свойства?

9.99. Внешнее магнитное поле H_0 приложено перпендикулярно сверхпроводящему прямому проводу. Найти критическое значение тока J_c, при котором в проводе появляется несверхпроводящая область.

Полуфеноменологическая квантовая теория Гинзбурга-Ландау. В отсутствие магнитного поля переход в сверхпроводящее состояние представляет собой фазовый переход второго рода (см. задачу 9.84). Следовательно, ниже температуры перехода в системе должен появляться параметр порядка. Гинзбург и Ландау (1950), считая сверхпроводимость квантовым явлением, ввели комплексный параметр порядка Ψ и приписали ему смысл «эффективной волновой функции сверхпроводящих электронов». В однородном и изотропном сверхпроводнике без магнитного поля параметр порядка не зависит от координат. Термодинамический потенциал Гиббса вблизи температуры фазового перехода T_c можно записать в виде разложения (8.68), но по степеням $|\Psi|^2$ и (для удобства дальнейших записей) с измененными численными коэффициентами:

$$\Phi(p, T, \Psi) = \Phi_0(p, T) + \alpha(p, T)|\Psi|^2 + \frac{1}{2}\beta(p, T)|\Psi|^4 \tag{9.94}$$

Используя условия минимума термодинамического потенциала при равновесии, находим вблизи температуры Кюри (см. формулы (8.71), (8.72))

$$\alpha(p, T) \approx a(p)\,(T - T_c)\,, a > 0; \quad \beta(p, T) \approx \beta\,(p, T_c) = \text{ const } > 0 \tag{9.95}$$

и значения равновесного параметра порядка

$$|\Psi_0|^2 = -\frac{\alpha}{\beta} = \frac{a}{\beta}\,(T_c - T)\,, T < T_c; \quad |\Psi_0|^2 = 0, T > T_c \tag{9.96}$$

При $T > T_c$ параметр порядка $|\Psi_0|^2 = 0$, поэтому $\Phi_0(p, T)$ в разложении (9.94)

представляет собой термодинамический потенциал нормального состояния. Подставляя (9.95), (9.96) в (9.94), находим равновесный термодинамический потенциал сверхпроводящего состояния:

$$\Phi_s(p,T) = \Phi_n(p,T) - \frac{a^2}{2\beta}\left(T_c - T\right)^2 \tag{9.97}$$

Через термодинамические параметры a, β, T_c легко выразить критическое поле $H_c(0)$, разрушающее сверхпроводимость. Пренебрегая изменениями объема, имеем из (9.97) и (9.90)

$$\Phi_n(p,T) - \Phi_s(p,T) = F_n(T) - F_s(T) = \frac{H_c^2(T)}{8\pi} = \frac{a^2}{2\beta}\left(T_c - T\right)^2 \tag{9.98}$$

Вблизи точки Кюри из (9.86) находим $H_c(T) \approx 2H_c(0)\left(1 - T/T_c\right)$, что позволяет получить

$$H_c(0) = \frac{\pi a^2}{\beta} T_c^2 \tag{9.99}$$

Если сверхпроводник слабо неоднороден, то параметр порядка Ψ будет зависеть от координат и в разложение термодинамического потенциала войдет слагаемое, пропорциональное $|\nabla\Psi|^2$:

$$\Phi_s = \Phi_n + \alpha(p,T)|\Psi|^2 + \frac{1}{2}\beta(p,T)|\Psi|^4 + g|\nabla\Psi|^2 \tag{9.100}$$

Здесь оптущены члены более высокого порядка по градиенту. На постоянный множитель должно быть наложено условие $g > 0$, в противном случае однородное состояние сверхпроводника ($\nabla\Psi = 0$) не будет соответствовать минимуму Φ_s и, следовательно, не будет равновесным.

Введем теперь удобную нормировку волновой функции и постоянной g. Для этого используем сведения из микроскопической теории сверхпроводимости, которые не были известны при создании теории ГинзбургаЛандау. Как было установлено позже в работах американских физиков Дж. Бардина, Л. Купера и Дж. Шриффера (БКШ), а также советского исследователя Н. Н. Боголюбова [7], носителями электрического тока в сверхпроводниках являются спаренные электроны - куперовские пары. Связь между электронами в куперовской паре осуществляется в результате обмена фононами, т. е. квантами колебаний кристаллической решетки. Заряд куперовской пары равен удвоенному заряду электрона, а ее масса - удвоенной массе электрона.

Естественно интерпретировать Ψ как макроскопическую волновую функцию, описывающую коллективное (когерентное) движение куперовских пар. Тогда удобно нормировать Ψ условием

$$|\Psi(\boldsymbol{r})|^2 = \frac{n_s}{2} \tag{9.101}$$

где $n_s/2$ - число куперовских пар в единице объема. Если выбрать $g = \hbar^2/2m_*$, где $m_* = 2m$ - масса куперовской пары, то последнее слагаемое

в правой части (9.100) примет вид слагаемого, отвечающего кинетической энергии частицы в нерелятивистском квантовом лагранжиане (4.100):
$$

[07] Николай Николаевич Боголюбов (1909-) - выдающийся советский физик-теоретик и математик, получивший важнейшие научные результаты в теории сверхтекучести и сверхпроводимости, классической и квантовой статистике, теории нелинейных колебаний, теории элементарных частиц и квантовой теории поля. Создатель многочисленной советской школы теоретической физики.

$$\frac{\hbar^2}{2m_*}|\nabla\Psi|^2 = \frac{1}{2m_*}|-i\hbar\nabla\Psi|^2 = \frac{1}{2m_*}|\widehat{\boldsymbol{p}}\Psi|^2 \tag{9.102}$$

$$

В квазиклассическом приближении этому слагаемому можно сопоставить величину

$$\frac{p^2}{2m_*}\cdot\frac{n_s}{2}$$

- плотность кинетической энергии куперовских пар.

Введение традиционного квантовомеханического слагаемого в плотность термодинамического потенциала (9.100) позволяет учесть взаимодействие сверхпроводника с магнитным полем по обычным правилам квантовой механики. Следует заменить оператор

$$\widehat{\boldsymbol{p}} = -i\hbar\nabla \quad \text{на} \quad \widehat{\boldsymbol{p}} - \frac{q}{c}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) \tag{9.103}$$

где $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ - векторный потенциал, $q = 2e$ - заряд куперовской пары. При такой замене теория остается калибровочно инвариантной, произвол в выборе векторного потенциала не сказывается на значениях наблюдаемых величин (см, в частности, задачи 4.124, 4.131).

Запишем полный термодинамический потенциал сверхпроводника, включающий также энергию магнитного поля:

$$\Phi_{compl} = \Phi_0 + \int\limits_V \left\{\alpha|\Psi|^2 + \frac{1}{2}\beta(p,T)|\Psi|^4 + \right.$$
$$\left. + \frac{\hbar^2}{4m}\left|\nabla\Psi + \frac{2e}{i\hbar c}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\Psi\right|^2 + \frac{(\nabla\times\boldsymbol{A})^2}{8\pi}\right\} dV \tag{9.104}$$

где Φ_0 не зависит от Φ_0 и $\boldsymbol{A}$, а интегрирование производится по объему сверхпроводника. Систему уравнений для определения Ψ и $\boldsymbol{A}$ в неоднородном сверхпроводнике можно получить из условия минимума функционала (9.104), как это делалось многократно в разделе 4.3.

Пример 9.10. Из равенства нулю первой вариачии термодинамического потенчиала $\Phi_{\text{сотрl}}\,[\Psi,\Psi^*,\boldsymbol{A}]$ при фиксированном значении $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$, рассматривая $\delta\Psi^*(\boldsymbol{r})$ как независимое малое приращение комплексного параметра порядка, получить нелинейное уравнение Шредингера для Ψ внутри
сверхпроводника

$$\frac{\hbar^2}{4m}\left(\nabla - \frac{2ie}{\hbar c}\boldsymbol{A}\right)^2\Psi + \alpha\Psi + \beta|\Psi|^2\Psi = 0 \tag{9.105}$$

и граничное условие [8] на его поверхности S:

$$\boldsymbol{n}\left(i\hbar\nabla\Psi + \frac{2e}{c}\boldsymbol{A}\Psi\right) = 0 \quad \text{на} \quad S \tag{9.106}$$

Решение. Рассматривая $\delta\Psi^*(\boldsymbol{r})$ и $\delta\Psi(\boldsymbol{r})$ как независимые вариации и варьируя $\Psi^*(\boldsymbol{r})$, получаем из (9.104) с помощью теоремы ОстроградскогоГаусса

$$\delta\Phi_{\text{compl}} = \int\limits_V \delta\Psi^* \left\{\alpha\Psi + \beta|\Psi|^2\Psi + \frac{\hbar^2}{4m}\left(\nabla - \frac{2ie}{\hbar c}\boldsymbol{A}\right)^2\Psi\right\} dV + \\ + \oint_S \delta\Psi^* \left(i\hbar\nabla\Psi + \frac{2e}{c}\boldsymbol{A}\Psi\right)\cdot \boldsymbol{n} dS = 0$$

откуда при произвольной функции $\delta\Psi^*(\boldsymbol{r})$ получаем равенства (9.105), (9.106).

Пример 9.11. Получить из (9.104) уравнение для магнитного поля в сверхпроводнике и выражение для тока, варьируя векторный потенциал $\boldsymbol{A}$ внутри объема при заданном его значении на поверхности и при фиксированном параметре порядка $\Psi(\boldsymbol{r})$.

Решение. Варьирование (9.104) по $\boldsymbol{A}$ с последующим преобразованием подынтегрального выражения приводит к условию

$$\delta\Phi_{\text{compl}} = \int\limits_V \delta\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\cdot\left\{\frac{ie\hbar}{2mc}\left(\Psi^*\nabla\Psi - \Psi\nabla\Psi^*\right) + \right. \\ \left. + \frac{2e^2}{mc^2}\boldsymbol{A}|\Psi|^2 + \frac{1}{4\pi}\nabla\times[\nabla\times\boldsymbol{A}]\right\} dV = 0$$

Поверхностный интеграл обратился в нуль, так как векторный потенциал задан на поверхности сверхпроводника и $\delta\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})|_S = 0$. Используя выражение $\boldsymbol{B} = \nabla\times\boldsymbol{A}$, находим уравнение Максвелла

$$\text{rot}\, B = \frac{4\pi}{c} j_s \tag{9.107}$$

в котором сверхпроводящий ток имеет вид

$$j_s = -\frac{ie\hbar}{2m}\left(\Psi^*\nabla\Psi - \Psi\nabla\Psi^*\right) - \frac{2e^2}{mc}\boldsymbol{A}|\Psi|^2 \tag{9.108}$$

Электрический ток (9.108) имеет обычный, известный из квантовой механики вид (ср. с ответом к задаче 4.130, который представляет собой ток вероятности для частицы с зарядом e и массой m).

Пример 9.12. Записать уравнения Гинзбурга-Ландау через безразмерную функцию $\psi(\boldsymbol{r}) = \sqrt{2/n_s^0}\Psi(\boldsymbol{r})$, где n_s^0 - средняя по объему кониентрация сверхпроводящих электронов, и через параметры

$$\lambda = \sqrt{\frac{mc^2}{4\pi e^2 n_s^0}}, \quad \xi = \frac{\hbar}{\sqrt{4m|\alpha|}} \tag{9.109}$$

имеющие размерности длины.

Решение. С помощью соотношений (9.96) и (9.101) находим связь между концентрацией куперовских пар в однородном сверхпроводнике и термодинамическими параметрами: $n_s^0 = 2|\alpha|/\beta$. Это позволяет записать уравнения (9.105)-(9.108) в виде

[08] Более общее граничное условие и примеры его использования содержатся в статье Андрюшина и др. (1993)

$$\xi^2\left(i\nabla+\frac{2e}{\hbar c}\boldsymbol{A}\right)^2\psi-\psi+|\psi|^2\psi=0 \tag{9.110}$$

$$\nabla\times[\nabla\times\boldsymbol{A}]=-i\frac{\pi\hbar c}{4\pi e\lambda^2}\left(\psi^*\nabla\psi-\psi\nabla\psi^*\right)-\frac{1}{\lambda^2}|\psi|^2\boldsymbol{A} \tag{9.111}$$

$$\boldsymbol{n}\cdot\left(i\nabla+\frac{2e}{\hbar c}\boldsymbol{A}\right)\psi=0 \tag{9.112}$$

Задачи

9.100. Показать, что условию (9.106) можно придать вид $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{j}_s|_S=0$, т. е. оно выражает собой требование обращения в нуль нормальной составляющей тока на поверхности сверхпроводника. Такое условие выполняется на границе с вакуумом или диэлектриком, но не выполняется на границе с другим сверхпроводником или нормальным металлом.

9.101. Показать, что выражение (9.108) для сверхпроводящего тока калибровочно инвариантно, т. е. не изменяется при переходе к другому векторному потенциалу $\boldsymbol{A}'=\boldsymbol{A}+\nabla\varphi$, если при этом также надлежащим образом (каким?) преобразуется волновая функция Ψ.

9.102. Проанализировать уравнения (9.110)-(9.112) для одномерного случая и выяснить смысл входящих в них длин λ,ξ. Выяснить пределы применимости уравнений Ф. и Г. Лондонов (9.92)-(9.93).

9.103*. Вывести условие квантования (9.87) магнитного потока в сверхпроводнике. Для этого рассмотреть полость цилиндрической формы (рис. 9.10) в массивном сверхпроводнике, вдоль оси которой приложено магнитное поле. Записав параметр порядка в виде $\psi=\exp(i\phi(\boldsymbol{r}))$, где $\phi(\boldsymbol{r})$ - действительная фаза, воспользоваться условием однозначности волновой функции при обходе по замкнутому контуру.

9.104. Металлическая пленка толщиной



Рис. 9.10 $\delta\ll\lambda$ нанесена на поверхность диэлектрического цилиндра радиусом $a\gg\delta$, находящегося в продольном магнитном поле. Сначала температура $T>T_c$, пленка несверхпроводящая. Затем температура понижается до значения $T<T_c$ и внешнее поле выключается. Найти правило квантования магнитного потока внутри цилиндра.

Элементы микроскопической теории сверхпроводимости. Следующие важные положения лежат в основе микроскопической теории, объясняющей механизм сверхпроводимости на основе внутреннего строения соответствующих веществ:

1. Любые два электрона испытывают кулоновское отталкивание. Но между ними возможно и результирующее притяжение, если они одновременно взаимодействуют с другой системой частиц. В сверхпроводниках притяжение осуществляется при

взаимодействии электронов с колебаниями кристаллической решетки - фононами. В простейшей такого рода модели модели «желе» (т. е. электронно-ионной плазмы, когда ионы не образуют упорядоченной решетки и ведут себя как жидкость) эффективный потенциал взаимодействия двух электронов с учетом окружающих частиц имеет вид

$$V_{ef}(\boldsymbol{k},\omega)=\frac{4\pi e^2}{\kappa^2+k^2}\left(1+\frac{\omega_k^2}{\omega^2-\omega_k^2}\right) \tag{9.113}$$

Здесь потенциал записан в представлении Фурье (вывод этой формулы см. далее в главе 11), κ - постоянная экранировки, ω_k - частота собственных колебаний ионной системы. При $\omega<\omega_k$ это потенциал притяжения двух электронов. При $\omega_k=0$ он переходит в экранированный кулоновский потенциал, рассмотренный в задачах 7.24, 7.27, и описывает отталкивание.

2. Пара электронов, находящихся в вырожденном электронном газе, может находиться в связанном состоянии при любом сколь угодно малом притяжении между электронами. Получающиеся таким образом связанные пары электронов называются куперовскими парами. Они представляют собой составные частицы с нулевыми спинами (бозоны), число их в любом квантовом состоянии может быть произвольным, в отличие от отдельных электронов, подчиняющихся принципу запрета Паули. Эти частицы могут перемещаться когерентно без сопротивления и без разрушения, выступая носителями электрического тока в сверхпроводнике. Сверхпроводимость, таким образом, можно рассматривать как сверхтекучесть куперовских пар.

Пример 9.13. Пусть в вырожденном (температура $T\to 0$) электронном газе между электронами существует притяжение, которое определяется некоторым потенциалом $V(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2)$. Матричные элементы $V_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}'}$ потенциала взаимодействия, отвечающие переходам пары электронов из состояния с волновыми векторами $(\boldsymbol{k}',-\boldsymbol{k}')$ в другое состояние $(\boldsymbol{k},-\boldsymbol{k})$, отличны от нуля лишь в узком слое вблизи заполненной сферы Ферми:

$$V_{kk'}=\begin{cases}-V<0, & \text{при} \quad k_F\leqslant k,k'\leqslant k_F+\Delta k\\ 0 \text{ в остальном пространстве.}\end{cases} \tag{9.114}$$

Здесь k_F - волновой вектор электрона на поверхности Ферми, $\Delta k\approx\approx\omega_D/v_F$ - толщина слоя, в котором существенно взаимодействие с колебаниями решетки, ω_D - характерная частота фонона, v_F - скорость электрона на поверхности Ферми. Учитывая только взаимодействие между рассматриваемой парой электронов и считая все остальные электроны вырожденным идеальным ферми-газом, показать, что связанное состояние возможно при любом сколь угодно малом притяжении V. Вычислить энергию связи E куперовской пары.

Решение. Ищем координатную волновую функцию $\psi_E(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2)$ и энергию связи пары электронов из уравнения Шредингера, записанного в системе центра масс:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}(\Delta_1+\Delta_2)\psi_E+V(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2)\psi_E=(E+2\epsilon_F)\psi \tag{1}$$

Волновая функция в системе центра масс зависит от разности радиусоввекторов: $\psi_E(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2)=\psi_E(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)$. Энергия E отсчитывается от уровня Ферми каждого электрона и в случае связанного состояния должна удовлетворять условию $E<0$.

Переходим в $\boldsymbol{k}$-пространство, разлагая искомую функцию $\psi_E(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)$ в ряд Фурье по состояниям $\psi_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2)=L^{-3}\exp[i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)]$, в которых электроны имеют волновые векторы $(\boldsymbol{k},-\boldsymbol{k})$. Волновые функции $\psi_{\boldsymbol{k}}$ нормированы условием $\int\limits_{(L^3)}\psi^*_{k'}\psi_k d^3r_1d^3r_2=\delta_{kk'}$ в ящике объемом L^3. Разложение имеет вид

$$\psi_E(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)=\sum_{\boldsymbol{k}}\varphi(\boldsymbol{k})\psi_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2) \tag{2}$$

$$\varphi(\boldsymbol{k})=\int\psi_E(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)\,\psi^*_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2)\,d^3r_1d^3r_2$$

Слагаемое с потенциалом взаимодействия преобразуется следующим образом:
(3)

$$\int V(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2)\,\psi_E(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2)\,\psi^*_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2)\,d^3r_1d^3r_2=$$

$$=\sum_{\boldsymbol{k}'}\varphi(\boldsymbol{k}')\int\psi^*_{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2)\,V(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2)\,\psi_{\boldsymbol{k}'}(\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2)\,d^3r_1d^3r_2=\sum_{\boldsymbol{k}'}V_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}'}\varphi(\boldsymbol{k}')$$

После этих преобразований уравнение Шредингера принимает вид

$$(E+2\epsilon_F-2\epsilon_k)\,\varphi(\boldsymbol{k})=\sum_{\boldsymbol{k}'}V_{\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}'}\varphi(\boldsymbol{k}')=-\frac{V}{L^3}\sum_{\boldsymbol{k}'}\varphi(\boldsymbol{k}') \tag{4}$$

Здесь $\epsilon_k=\hbar^2k^2/2m$ и всюду $\varphi(\boldsymbol{k})=0$ при $k\leqslant k_F$, так как все состояния при $k\leqslant k_F$ заняты фоновыми электронами.

В последнем равенстве (4) использовано (9.114), поэтому указанное равенство справедливо только для значений k и k' внутри слоя вблизи сферы Ферми. Вне этого слоя правая часть обращается в нуль.

Поделив обе части равенства (4) на величину $(E+2\epsilon_F-2\epsilon_k)$ и просуммировав их по k, можем сократить общий множитель $\sum\limits_k\varphi(k)\neq0$ и получим трансцендентное уравнение для определения энергии связи E:

$$1=-V\sum_k\frac{1}{E+2\epsilon_F-2\epsilon_k} \tag{5}$$

Перейдем в этом уравнении к интегрированию по энергиям, введя плотность $N(\epsilon_k)$ числа квантовых состояний на единичный интервал энергии. Уравнение (5) примет вид

$$1=V\int\limits_0^{\hbar\omega_D}N(\epsilon_k)\,\frac{d\epsilon}{2\epsilon-E} \tag{6}$$

где введена переменная интегрирования $\epsilon=\epsilon_k-\epsilon_F$. Ввиду неравенства $\hbar\omega_D\ll\epsilon_F$ в аргументе $N(\epsilon_k)$ заменяем ϵ_k на ϵ_F и выносим этот множитель из-под знака интеграла. После интегрирования получаем

$$\frac{2}{VN(\epsilon_F)}=\ln\frac{E-2\hbar\omega_D}{E} \tag{7}$$

Здесь безразмерная величина $g=VN(\epsilon_F)$ выполняет роль константы связи куперовской пары. Даже при $g\ll1$ возможно связанное состояние:

$$E=-\hbar\omega_De^{-2/g} \tag{8}$$

Заполненная сфера Ферми не позволяет разорвать эту связь. Куперовские пары способна создавать только малая часть электронов из энергетического слоя толщиной $\hbar\omega_D\ll\epsilon_F$.

Рекомендуемая литература: [Гинзбург и Ландау (1950); Теория сверхпроводимости (1960); Бардин и Шриффер (1962); Де Жен (1968); Шриффер (1970); Тилли и Тилли (1977); Роуз-Инс и Родерик (1972); Кресин (1978); Высокотемпературные сверхпроводники (1988); Шмидт (2000)].

11.3.5 9.5. Answers and Solutions

9.1. $\rho = \mu j^2/c^2\rho_e$. Это малая релятивистская поправка, порядок которой $u^2/c^2 \ll 1$ относительно ρ_e.
9.2.

$$\frac{J}{J_2} = \frac{V_1 - V_2}{V_2 - \mathscr{E}}$$

9.3. Сопротивление катушки гальванометра должно быть равно внешнему сопротивлению R.
9.4. $R = 3r/2$ при $n = 2, R = 13r/7$ при $n = 3, R = 47r/22$ при $n = 4$. Использование соображений симметрии позволяет, например, в случае $n = 3$ ограничиться всего тремя контурными токами.
9.5. Введем контурные токи, как показано на рис. 9.3. Уравнение Кирхгофа для ячейки $B_kA_kA_{k+1}B_{k+1}$ имеет вид

$$J_{k+1} + J_{k+1} = \left(2 + \frac{R}{r}\right) J_k \tag{1}$$

Это линейное разностное уравнение второго порядка имеет два линейно независимых решения: $e^{k\alpha}$ и $e^{-k\alpha}$, где

$$\operatorname{sh}\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{R}{r}} \tag{2}$$

Общее решение (1) имеет вид $J_k = A'e^{k\alpha} + B'e^{-k\alpha}$. В данном случае удобно, перегруппировав члены, записать (1) в форме

$$J_k = A \operatorname{ch}(\beta - k)\alpha \tag{3}$$

где A и β - произвольные постоянные. Определим их из граничных условий на концах линии. Рассмотрим последнюю ячейку. Уравнение Кирхгофа для этой ячейки принимает вид

$$J_n\,(R + R_a + r) - J_{n-1}r = 0 \tag{4}$$

Подставив в (4) выражения токов J_n и J_{n-1} из (3) и используя (2), получим после сокращения на A уравнение для определения β:

$$\operatorname{th}\beta\alpha = \frac{R_a \operatorname{ch} n\alpha + \sqrt{Rr}\operatorname{sh}\left(n + \frac{1}{2}\right)\alpha}{R_a \operatorname{sh} n\alpha + \sqrt{Rr}\operatorname{ch}\left(n + \frac{1}{2}\right)\alpha} \tag{5}$$

Значение постоянной A можно получить, составив уравнение Кирхгофа для начальной ячейки линии:

$$J_0\,(R + R_i + r) - J_1 r = \mathscr{E}. \tag{6}$$

Из (6) после некоторых преобразований находим, что

$$A = \frac{\mathscr{E}}{R_i \operatorname{ch}\beta\alpha + \sqrt{Rr}\operatorname{sh}\left(\beta+\frac{1}{2}\right)\alpha}$$

Окончательно получаем для тока на отрезке A_kA_{k+1} линии следующее выражение:

$$J_k = \frac{\mathscr{E}\operatorname{ch}(\beta-k)\alpha}{R_i \operatorname{ch}\beta\alpha + \sqrt{Rr}\operatorname{sh}\left(\beta+\frac{1}{2}\right)\alpha}. \tag{7}$$

Входящие в (7) постоянные α и β определяются уравнениями (2), (5).
При сухой изоляции $r \to \infty, \alpha \to 0$ и (7), как и следует ожидать, принимает вид:

$$J_k = \frac{\mathscr{E}}{R_i + R_a + (n+1)R} \tag{8}$$

Из (7) и (8) находим для отношения ЭДС $\mathscr{E}_0$ и $\mathscr{E}$, обеспечивающих один и тот же ток через нагрузку при сухой и сырой изоляции, выражение:

$$\frac{\mathscr{E}}{\mathscr{E}_0} = \frac{R_i \operatorname{ch}\beta\alpha + \sqrt{Rr}\operatorname{sh}\left(\beta+\frac{1}{2}\right)\alpha}{[R_i + R_a + (n+1)R]\operatorname{ch}\left(\beta-n+\frac{1}{2}\right)\alpha} \tag{9}$$

Если сопротивление нагрузки $R_a = 0$, то уравнение (5) упрощается и из него в этом случае следует, что

$$\beta = n + \frac{1}{2} \tag{10}$$

9.6. Если $J(x), \varphi(x)$ - ток и потенциал жилы (относительно земли) в сечении с координатой x, то

$$\varphi(x) = -\rho'\frac{dJ}{dx}, \quad J = -\rho\frac{d\varphi}{dx}, \quad \frac{d^2J}{dx^2} = \frac{\rho}{\rho'}J$$

9.7.

$$J(x) = \frac{\mathscr{E}\operatorname{ch}s\,(x-x_0)}{R_i \operatorname{ch}sx_0 + \sqrt{\rho\rho'}\operatorname{sh}sx_0} \tag{1}$$

где $s = \sqrt{\frac{\rho}{\rho'}}$. Постоянная x_0 определяется из уравнения

$$\operatorname{th}s\,(x_0-a) = \frac{R_a}{\sqrt{\rho\rho'}} \tag{2}$$

При $R_i = R_a = 0$

$$J(x) = \frac{\mathscr{E}\operatorname{ch}s\,(x-x_0)}{\sqrt{\rho\rho'}\operatorname{sh}sa} \tag{3}$$

Если нет утечки, то $\rho' \to \infty, x_0 \to a, s \to 0$ и вдоль кабеля ток принимает постоянное значение:

$$J_0 = \frac{\mathscr{E}}{R_i + \rho a + R_a}$$

При использовании формулы (7) из решения задачи 9.5* нужно положить

[09] При выводе этого и нижеследующих выражении полезно помнить, что формулы гиперболической тригонометрии получаются из формул обычной тригонометрии заменами $\cos i\alpha \to \operatorname{ch}\alpha, \sin i\alpha \to i\operatorname{sh}\alpha$.

$$R = \rho dx, \quad r = \frac{\rho'}{dx}, \quad k = \frac{x}{dx}, \quad n = \frac{a}{dx}$$

Тогда из уравнения (2) решения задачи 9.5* следует, что $\alpha = sdx$. Величина β в этом решении связана с x_0 соотношением $\beta = x_0/dx$, так что $\beta\alpha = x_0 s$. Подстановка этих выражений в уравнения (5) и (7) решения задачи 9.5ˆ приводит к приведенным выше формулам (1) и (2).

9.8.

$$E_1 = \frac{\kappa_2 V}{\kappa_1 h_2 + \kappa_2 h_1}, \quad D_1 = \frac{\varepsilon_1 \kappa_2 V}{\kappa_1 h_2 + \kappa_2 h_1}$$
$$E_2 = \frac{\kappa_1 V}{\kappa_1 h_2 + \kappa_2 h_1}, \quad D_2 = \frac{\varepsilon_2 \kappa_1 V}{\kappa_1 h_2 + \kappa_2 h_1}$$
$$j_1 = j_2 = \frac{\kappa_1 \kappa_2 V}{\kappa_1 h_2 + \kappa_2 h_1}$$

На границе раздела между пластинками:

$$\sigma_{int} = \frac{E_2 - E_1}{4\pi} - \sigma_{ext} = \frac{\kappa_2 (\varepsilon_1 - 1) - \kappa_1 (\varepsilon_2 - 1)}{4\pi (\kappa_1 h_2 + \kappa_2 h_1)} V$$
$$\sigma_{ext} = \frac{D_2 - D_1}{4\pi} = \frac{(\varepsilon_2 \kappa_1 - \varepsilon_1 \kappa_2) V}{4\pi (\kappa_1 h_2 + \kappa_2 h_1)}$$

Величина V больше нуля, если первая пластинка прилегает к положительно заряженной обкладке. У границы обкладки и первой пластинки:

$$\sigma_{\text{ext}} = \frac{D_1}{4\pi}, \quad \sigma_{\text{int}} = \frac{E_1 - D_1}{4\pi}$$

У границы обкладки и второй пластинки:

$$\sigma_{ext} = -\frac{D_2}{4\pi}, \quad \sigma_{int} = -\frac{E_2 - D_2}{4\pi}$$

9.9.

$$\frac{\operatorname{tg} \beta_1}{\operatorname{tg} \beta_2} = \frac{\kappa_1}{\kappa_2}$$

где β_1, β_2 - углы, образованные линией тока с нормалью к поверхности раздела в первой и второй среде.

9.11.

$$\varphi = \begin{cases} \frac{Jz}{\pi a^2 \kappa}, & 0 \leqslant r \leqslant a \\ \frac{Jz \ln(r/b)}{\pi a^2 \ln(a/b)}, & a < r \leqslant b \\ 0, & r > b \end{cases}$$

Из этой формулы видно, что электрическое поле в пространстве между проводниками не направлено по оси z. Наличие отличной от нуля радиальной составляющей электрического поля E_r говорит о том, что на цилиндрических поверхностях проводников имеются поверхностные заряды с плотностями

$$\sigma_1 = \left.\frac{\varepsilon E_r}{4\pi}\right|_{r=a} = \frac{\varepsilon J z}{4\pi^2 a^3 \kappa \ln \frac{a}{b}}, \quad \sigma_2 = \left.\frac{\varepsilon E_r}{4\pi}\right|_{r=b} = -\frac{\varepsilon J z}{4\pi^2 a^2 b \kappa \ln \frac{a}{b}}$$

При $z = 0$ плотности σ_1 и σ_2 обращаются в нуль. Положение сечения, на котором $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$, не является определенным. Это сечение может быть смещено, если на провод

поместить добавочный постоянный заряд. Заряды $q_1 = 2\pi a\sigma_1$. и $q_2 = 2\pi b\sigma_2 = -q_1$, приходящиеся на единицу длины
провода и оболочки (при одном и том же z), связаны с разностью потенциалов между ними

$$V = \int_a^b E_r dr = -\frac{Jz}{a^2\kappa}$$

соотношением

$$\frac{q_1}{V} = \frac{1}{2\ln(b/a)} = \text{ const.}$$

Отношение q_1/V совпадает в данном случае с емкостью на единицу длины цилиндрического конденсатора в электростатической задаче.

Магнитное поле имеет, очевидно, тот же вид, что и поле бесконечно длинного прямого провода с током J. Это объясняется тем, что плотность тока в бесконечно толстой оболочке равна нулю, вследствие чего обратный ток не создает магнитного поля.
9.12. $E_0 = -k\left(\kappa_2 l_1 + \kappa_1 l_2\right)\mathscr{E}_0$, $E_1 = k\kappa_2\mathscr{E}_0$, $E_2 = k\kappa_1\mathscr{E}_0$, где $k = \kappa_0/l_0\left(\kappa_0\kappa_1 l_2 + \kappa_0\kappa_2 l_1 + \kappa_1\kappa_2 l_0\right), \mathscr{E}_0 = E_{\text{ext}}\, l_0$ - ЭДС источника. Внутри него электрическое поле направлено противоположно току ($E_0 < 0$).

Заряды, создающие это электрическое поле, возникают на границах раздела проводников с разными проводимостями и могут быть определены с помощью граничных условий; например, заряд на границе 01 равен

$$q_{01} = \frac{r^2}{4}\left(E_1 - E_0\right)$$

9.13. Рассмотрим, например, поток энергии через поверхность 0 -го проводника, в котором действует ЭДС. Магнитное поле вблизи поверхности совпадает с полем бесконечно длинного прямого провода $H = 2J/cr$. Вектор Пойнтинга $\gamma = c\left(\boldsymbol{E}_0 \times \boldsymbol{H}\right)/4\pi$ ($\boldsymbol{E}_0$ - напряженность электрического поля в 0 -м проводнике, направленная противоположно току, см., задачу 9.12), как легко убедиться, направлен из проводника по нормали к его поверхности. Величина потока энергии через поверхность этого проводника, следовательно, равна $2\pi r l_0\gamma = JV$, где $V = E_0 l_0$ - разность потенциалов на концах проводника. Величина JV представляет собой разность между работой ЭДС $\mathscr{E}J$ ($\mathscr{E} = E_{ext}l_0$) и джоулевыми потерями в единицу времени в самом источнике.

Энергия JV вытекает ежесекундно через наружную поверхность источника, течет в окружающем проводники пространстве (в основном вне проводников) и втекает внутрь 1-го и 2-го проводников через их поверхности, превращаясь внутри этих проводников в джоулево тепло. В том, что
общее количество энергии, втекающей в 1-й и 2-й проводники за единицу времени, равно JV_1, JV_2, легко убедиться, рассмотрев вектор Пойнтинга так же, как выше.
9.14. $R = \int_1^2 dl/\kappa S$, где элемент dl направлен по нормали к эквипотенциальной поверхности с площадью S; цифрами 1 и 2 обозначены граничные поверхности.
9.15.
а) $R = \frac{1}{4\pi\kappa}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$
б) $R = \frac{1}{4\pi\kappa_1}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{c}\right) + \frac{1}{4\pi\kappa_2}\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{b}\right)$;
в) $R = \frac{1}{2\pi l\kappa}\ln\frac{b}{a}$.
9.16.

$$R = \frac{1}{2\pi\kappa_2}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) + \frac{1}{2\pi\kappa_1 b}$$

9.17.

$$J_k = \frac{4\pi\kappa}{\varepsilon} q_k, \quad R_{ik} = \frac{\varepsilon}{4\pi\kappa} s_{ik}$$

9.18.

$$C = \frac{\varepsilon}{4\pi\kappa R}$$

9.19.

$$Q = \sum_{i,k} R_{ik} J_i J_k$$

9.20.

$$R = \frac{\varepsilon}{4\pi\kappa}\left(s_{11} - 2s_{12} + s_{22}\right) = \frac{\varepsilon}{4\pi\kappa}\frac{c_{11} + 2c_{12} + c_{22}}{c_{12}^2 - c_{11}c_{22}}$$

9.21. $R = \frac{V_1 - V_2}{J} = R_1 + R_2 - \frac{1}{\pi\kappa l} \approx R_1 + R_2$,
где $R_1 = 1/2\pi\kappa a_1, R_2 = 1/2\pi\kappa a_2$ - сопротивления уединенных заземлителей (см. задачу 9.16).
9.22. Обозначим через $e_0 = \sqrt{1 - b^2/a^2}$ эксцентриситет эллипсоидов вращения (b/a - отношение меньшей полуоси к большей). Тогда

$$R = \frac{1}{\kappa}\left(\frac{4}{3\pi^2 V}\right)^{1/3} \frac{\left(1 - e_0^2\right)^{1/6}}{e_0} \arccos\sqrt{1 - e_0^2}$$

- в случае сплюснутого эллипсоида вращения,

$$R = \frac{1}{\kappa} \cdot \frac{\left(1 - e_0^2\right)^{1/3}}{\left(6\pi^2 V\right)^{1/3} e_0} \ln\frac{1 + e_0}{1 - e_0}$$

- в случае вытянутого эллипсоида вращения.

Более выгодной (при фиксированном объеме V) является сильно вытянутая или, наоборот, очень сплюснутая форма заземлителей.
9.23. $J = 2\pi\kappa V a$.
9.24. Плотность тока в пространстве между электродами

$$j = \rho v \tag{1}$$

не зависит от x($v(x)$ - скорость частиц в данной точке x). Скорость связана с потенциалом $\varphi(x)$ формулой

$$v = \sqrt{-\frac{2e\varphi}{m}} \tag{2}$$

($\varphi = 0$ при $x = 0$).
Из (1) и (2) следует, что $\rho = j\sqrt{-m/2e\varphi}$, так как уравнение Пуассона принимает вид

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = -4\pi j\sqrt{-\frac{m}{2e\varphi}} \tag{3}$$

Интегрируя (3) с граничными условиями $d\varphi/\,dx|_{x=0} = 0$ и $\varphi|_{x=a} = \varphi_0$, получим

$$j = \frac{1}{9\pi a^2}\sqrt{\frac{2|e|}{m}}\,|\varphi_0|^{\frac{3}{2}} \tag{4}$$

(«закон трех вторых»).

9.26. Используя равенство (4) из примера 9.1 и подставив в него величины (9.22), получим на основе закона возрастания энтропии

$$\frac{d\mathscr{S}}{dt} = \int\limits_V \left\{\frac{j^2}{\kappa T} + \frac{\eta(\nabla T)^2}{T^2}\right\} dV \geqslant 0$$

где $\eta = \xi - \beta^2 T/\kappa$ - коэффициент теплопроводности. Это приводит к неравенствам $\kappa > 0, \eta > 0$.

9.27.

$$\varrho = T\frac{d}{dT}\left(\frac{\dot\beta}{\kappa}\right)$$

9.28. Интегрируем обе части уравнения (9.29) по малому интервалу $2h$ оси Oz, включающему место спая. Ось направлена вдоль тока перпендикулярно спаю. Первые два слагаемых в правой части дадут малые вклады, а последнее ввиду скачка величин β и κ на спае даст конечный вклад $Q_P = jT\,(\beta_2/\kappa_2 - \beta_1/\kappa_1) = \Pi_{12} j$, где Π_{12} - коэффициент Пельтье. Величина Q_P представляет собой мощность тепловыделения на единицу поверхности контакта.

9.30. Микроскопические значения тока и электрического поля удовлетворяют в каждой области однородности κ уравнениям

$$\boldsymbol{j} = \kappa\mathscr{E}, \quad \nabla\times\mathscr{E} = 0, \quad \nabla\cdot\boldsymbol{j} = 0 \tag{1}$$

Следуя Дыхне (1970а), введем новые микроскопические величины

$$\boldsymbol{j}' = (\kappa_1\kappa_2)^{1/2}\,[\boldsymbol{e}_z\times\mathscr{E}]\,, \quad \boldsymbol{E}' = (\kappa_1\kappa_2)^{-1/2}\,[\boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{j}] \tag{2}$$

где e_z - декартов орт. Пользуясь уравнениями (1), убеждаемся, что в каждой из областей однородности

$$\nabla\times\mathscr{E}' = 0, \quad \nabla\cdot\boldsymbol{j}' = 0 \tag{3}$$

и выполняется локальный закон Ома

$$j' = \kappa'\boldsymbol{E}' \tag{4}$$

где

$$\kappa' = \frac{\kappa_1\kappa_2}{\kappa} = \begin{cases} \kappa_2 & \text{в области} \quad 1, \\ \kappa_1 & \text{в области} \quad 2. \end{cases} \tag{5}$$

Но поскольку области 1 и 2 статистически эквивалентны, то электропроводность в макроскопическом законе Ома для величин $\boldsymbol{J}', \boldsymbol{E}'$ должна быть той же самой, что и для величин $\boldsymbol{J}, \boldsymbol{E}$, т. е.

$$\boldsymbol{J}' = K\boldsymbol{E}' \tag{6}$$

Усредняя по объему равенство (2), находим

(7) $\boldsymbol{J}' = (\kappa_1\kappa_2)^{1/2}\,[\boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{E}]\,, \quad \boldsymbol{E}' = (\kappa_1\kappa_2)^{-1/2}\,[\boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{J}] = (\kappa_1\kappa_2)^{-1/2}\,K\,[\boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{E}]$,

где в последнем равенстве йспользовано определение K, приведенное в условии задачи. Подставив (7) в (6), найдем

$$K = (\kappa_1 \kappa_2)^{1/2} \tag{8}$$

Путем аналогичных расчетов находим

$$\Delta_J = \Delta_E = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\kappa_1}{\kappa_2}\right)^{1/4} - \left(\frac{\kappa_2}{\kappa_1}\right)^{1/4}\right]^2 \geqslant 0 \tag{9}$$

9.31. См. оригинальную работу Дыхне (1970b).

9.32. Рассмотрим решение задачи методом векторного потенциала. Если направить ось z вдоль оси цилиндра, то декартовы компоненты $\boldsymbol{A}$ будут удовлетворять уравнениям:

$$\Delta A_x = 0, \quad \Delta A_y = 0, \quad \Delta A_z = -\frac{4\pi\mu_0}{c} j_z \tag{1}$$

причем $j_z = 0$ при $r > a$, $j_z = \frac{J}{\pi a^2}$ при $r \leqslant a$.

Поскольку в уравнения для A_x и A_y заданный ток J не входит, эти компоненты можно считать равными нулю; A_z будет зависеть только от расстояния r до оси z. Интегрируя уравнение для A_z и используя условия непрерывности A_z и H_α на границе $r = a$ и ограниченности H при $r = 0$, получим:

при $r < a$

$$A_z = C - \frac{\mu_0 J}{c}\left(\frac{r}{a}\right)^2, \quad B_\alpha = \frac{2\mu_0 J}{ca^2} r, \quad H_\alpha = \frac{2J}{ca^2} r; \tag{2}$$

при $r > a$

$$A_z = C - \frac{J}{c}\left(\mu_0 + 2\mu \ln\frac{r}{a}\right), \quad B_\alpha = \frac{2\mu J}{cr}, \quad H_\alpha = \frac{2J}{cr}$$

Константа C - произвольна.

9.33. При $r < a$

$$A_z = C_1, \quad \boldsymbol{B} = 0$$

при $a \leqslant r \leqslant b$

$$A_z = \frac{2\mu_0 J a^2}{c\,(b^2 - a^2)}\left(\ln\frac{r}{a} - \frac{r^2}{2a^2}\right) + C_2, \quad A_\alpha = \frac{2\mu_0 J}{c\,(b^2 - a^2)}\left(r - \frac{a^2}{r}\right)$$

при $r > b$

$$A_z = \frac{2\mu J}{c} \ln\frac{b}{r} + C_3, \quad B_\alpha = \frac{2\mu J}{cr}$$

Остальные компоненты $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ равны нулю. Две любые константы, входящие в A_z, можно выразить через третью, использовав условия непрерывности векторного потенциала на границах.

9.34. Вторичное поле $\boldsymbol{H'}$ удовлетворяет уравнению $\operatorname{rot} \boldsymbol{H'} = 0$, т. е. является потенциальным. Введя скалярный потенциал по формуле $\boldsymbol{H'} = -\operatorname{grad}\psi$, получим для него уравнение, совпадающее с уравнением электростатики в неоднородной среде:

$$\operatorname{div}(\mu \operatorname{grad}\psi) = -4\pi\rho_m$$

где величина

$$\rho_m = -\frac{1}{4\pi}\boldsymbol{H}_0 \cdot \nabla\mu$$

играет роль плотности магнитных зарядов.
На границе раздела двух сред должны выполняться условия для касательных компонент поля:

$$H'_{1\tau} = H'_{2\tau} \quad \text{или} \quad \frac{\partial\psi_1}{\partial\tau} = \frac{\partial\psi_2}{\partial\tau}$$

и для нормальных компонент поля:

$$\mu_2 H'_{2n} - \mu_1 H'_{1n} = (\mu_1 - \mu_2) H_{0n} \quad \text{или} \quad \mu_1\frac{\partial\psi_1}{\partial n} - \mu_2\frac{\partial\psi_2}{\partial n} = 4\pi\sigma_m$$

Здесь величина

$$\sigma_m = \frac{1}{4\pi}(\mu_1 - \mu_2) H_{0n}$$

играет роль плотности поверхностного заряда. Заметим, что это выражение для σ_m может быть получено и из формулы для объемной плотности ρ_m путем предельного перехода:

$$\sigma_m = \lim_{h\to 0}\rho_m h$$

Заменим поверхность раздела тонким слоем толщиной h. Тогда $\operatorname{grad}\mu$ будет направлен по нормали к слою и будет равен $(\mu_2 - \mu_1)/h$, откуда

$$\rho_m = -\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{\mu_2 - \mu_1}{h}H_{0n}, \quad \sigma_m = \lim_{h\to 0}\rho_m h = \frac{1}{4\pi}(\mu_1 - \mu_2) H_{0n}$$

9.35.

$$\boldsymbol{H}_1 = \frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2}\boldsymbol{H}_0, \quad \boldsymbol{H}_2 = \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2}\boldsymbol{H}_0$$

где $\boldsymbol{H}_0$ - поле, создаваемое контуром с током в вакууме, $\boldsymbol{H}_1, \boldsymbol{H}_2$ - поля в средах с проницаемостями μ_1, μ_2.
9.36. Магнитное поле в среде 1 совпадает с полем, создаваемым в вакууме двумя прямолинейными токами

$$J_1 = \mu J \quad \text{и} \quad J_2 = \frac{\mu_1(\mu_2 - \mu_1)}{\mu_1 + \mu_2}J$$

ток J_1 течет по тому же проводу, что и начальный ток J; ток J_2 течет вдоль провода, который является зеркальным изображением первого провода относительно плоскости раздела сред.

Магнитное поле в среде 2 совпадает с полем, которое создается в вакууме током $J_1 = 2\mu_1\mu_2/(\mu_1 + \mu_2)J$, текущим по тому же проводу, что и начальный ток J.
9.37. Векторы поля удовлетворяют во всем пространстве однородным уравнениям $\operatorname{rot}\boldsymbol{H} = 0, \operatorname{div}\boldsymbol{B} = 0$, поэтому можно ввести скалярный потенциал $\psi(\boldsymbol{H} = -\operatorname{grad}\psi)$, который будет удовлетворять уравнению Лапласа. В результате задача магнитостатики сведена к задаче электростатики. Решение имеет вид (см. задачу 8.11):

внутри шара

$$\boldsymbol{H}_1 = \frac{3}{\mu + 2}\boldsymbol{H}_0$$

вне шара

$$\boldsymbol{H}_2 = \boldsymbol{H}_0 + \boldsymbol{H}_{dip}$$

где $\boldsymbol{H}_{dip}$ - поле, создаваемое магнитным диполем с моментом

$$\boldsymbol{m} = \frac{\mu - 1}{\mu + 2} a^3 \boldsymbol{H}_0$$

Поскольку поле внутри шара однородно, намагниченность постоянна:

$$\boldsymbol{M} = \frac{3\boldsymbol{m}}{4\pi a^3} = \frac{3(\mu - 1)}{4\pi(\mu + 2)} \boldsymbol{H}_0$$

Плотность эквивалентного объемного тока будет поэтому равна нулю:

$$j_{int} = c \operatorname{rot} \boldsymbol{M} = 0$$

Плотность поверхностного тока можно определить по формуле (9.35)

$$\boldsymbol{i}_{int} = c\,[\boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{M}_2 - \boldsymbol{M}_1)]$$

Подставляя $\boldsymbol{M}_2 = 0$ и $\boldsymbol{M}_1 = \boldsymbol{M}$, найдем:

$$\boldsymbol{i}_{\text{int}} = \boldsymbol{e}_\alpha \frac{3c(\mu - 1)}{4\pi(\mu + 2)} H_0 \sin\vartheta$$

Интересно отметить, что такой поверхностный ток можно получить, если заставить вращаться вокруг одного из диаметров сферу, заряженную равномерно по поверхности (см. задачу 2.86).

9.38. Силовые линии представляют собой линии пересечения плоскостей $\alpha = \text{const}$ с поверхностью вращения вокруг оси Oz

$$\left[1 + \frac{2(\mu - 1)}{\mu + 2} \left(\frac{a}{r}\right)^3\right] \left(x^2 + y^2\right) = \text{ const}$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

9.39.

$$\left(\frac{b}{a}\right)^3 = \frac{(\mu_e - 1)(\mu_i + 2)}{(\mu_i - 1)(\mu_e + 2)} \leqslant 1 \quad \text{при } \mu_i > \mu_e$$

9.40. Если направить оси координат вдоль главных осей тензора магнитной проницаемости, то внутри шара компоненты поля будут равны $3H_{0k}/\left(\mu^{(k)} + 2\right)$, где $\boldsymbol{H}_0$ - внешнее поле. Вне шара

$$\boldsymbol{H}_2 = \boldsymbol{H}_0 + \boldsymbol{H}_{dip}$$

где $\boldsymbol{H}_{\text{dip}}$ - поле магнитного диполя с моментом $\boldsymbol{m}$, причем

$$m_k = \frac{\mu^{(k)} - 1}{\mu^{(k)} + 2} a^3 H_{0k}$$

Момент сил, действующих на шар:

$$\boldsymbol{N} = \boldsymbol{m} \times \boldsymbol{H}_0.$$

9.41. Из соображений симметрии следует, что векторы поля лежат в плоскости, перпендикулярной проводу. Направляем ось Oz вдоль провода и вводим векторный

потенциал $A_z \equiv A(x,y), B_x = \partial A/\partial y, B_y = -\partial A/\partial x$. Он должен вычисляться из уравнения

$$\mu^{(x)}\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \mu^{(y)}\frac{\partial^2 A}{\partial y^2} = -\frac{4\pi\mu^{(x)}\mu^{(y)}}{c} J\delta(x)\delta(y). \tag{1}$$

Переходя к переменным $x' = x/\sqrt{\mu^{(x)}}, y' = y/\sqrt{\mu^{(y)}}$, приводим уравнение (1) к виду

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y'^2} = -\frac{4\pi\sqrt{\mu^{(x)}\mu^{(y)}}}{c} J\delta\left(x'\right)\delta\left(y'\right). \tag{2}$$

Задача свелась к нахождению магнитного поля провода с эффективным током $J\sqrt{\mu^{(x)}\mu^{(y)}}$ в изотропной среде. Использовав результат задачи 9.32, находим

$$B_x = -\frac{2Jy\sqrt{\mu^{(x)}}}{cr'^2}, \quad B_y = \frac{2Jx\sqrt{\mu^{(y)}}}{cr'^2}$$

где $r' = \sqrt{x^2/\mu^{(x)} + y^2/\mu^{(y)}}$.

9.42.

$$H = \left[1 - \frac{\left[1-(a/b)^2\right]\left(\mu_1-\mu_2\right)^2}{\left(\mu_1+\mu_2\right)^2 - (a/b)^2\left(\mu_1-\mu_2\right)^2}\right] H_0$$

При $\mu_1 \gg \mu_2$ поле в полости сильно ослабляется - происходит магнитная экранировка.

9.43.

$$H = \left[1 - \frac{2\left[1-(a/b)^3\right]\left(\mu_1-\mu_2\right)^2}{\left(\mu_1+2\mu_2\right)\left(2\mu_1+\mu_2\right) - 2(a/b)^3\left(\mu_1-\mu_2\right)^2}\right] H_0$$

При $\mu_1 \gg \mu_2$ поле сильно ослабляется ($H \ll H_0$).

9.44.

$$\Delta\Phi = B_0\frac{2\pi\left(a^3-b^3\right)}{a}\left(\frac{\mu_1-1}{\mu_1+2} - \frac{\mu_2-1}{\mu_2+2}\right)$$

9.45. Магнитное поле

$$\boldsymbol{H} = \operatorname{rot}\boldsymbol{A}$$

где

$$\begin{aligned} A_z &= -\tfrac{\mu_1 J}{4\pi a^2}r^2 + \tfrac{2\mu_1}{\mu_1+\mu_2}B_0 r\sin\alpha && \text{при } r < a \\ A_z &= \tfrac{\mu_2 J}{2\pi}\ln\tfrac{a}{r} + \left(1 + \tfrac{\mu_1-\mu_2}{\mu_1+\mu_2}\cdot\tfrac{a^2}{r^2}\right)B_0 r\sin\alpha && \text{при } r > a \end{aligned}$$

Ось z направлена вдоль оси цилиндра; остальные компоненты $\boldsymbol{A}$ равны нулю.

9.48.

$$\boldsymbol{H}_i = \frac{1}{\mu_i}\cdot\frac{2\pi\mu_1\mu_2\mu_3}{\mu_1\mu_2\alpha_3 + \mu_2\mu_3\alpha_1 + \mu_1\mu_3\alpha_2}\boldsymbol{H}_0$$

где $\boldsymbol{H}_0$ - поле, которое создается тем же током в вакууме.

9.49. Во внешней области индукция $\boldsymbol{B}$ и магнитное поле $\boldsymbol{H}$ связаны обычным соотношением $\boldsymbol{B}_2 = \mu_2\boldsymbol{H}_2$. Внутри шара, согласно (9.41), $\boldsymbol{B}_1 = \mu_1\boldsymbol{H}_1 + 4\pi\boldsymbol{M}_0$, где $\boldsymbol{M}_0$ - постоянная намагниченность. Вводя скалярный потенциал, как в задаче 9.37, получим

$$\psi_1 = -\boldsymbol{H}_1\cdot\boldsymbol{r}, \quad \psi_2 = \frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{r}}{r^3}$$

где

$$\boldsymbol{H}_1 = -\frac{4\pi \boldsymbol{M}_0}{2\mu_2 + \mu_1}, \quad \boldsymbol{m} = \frac{4\pi a^3 \boldsymbol{M}_0}{2\mu_2 + \mu_1}$$

Таким образом, поле внутри шара однородно, а вне шара совпадает с полем магнитного диполя с моментом $\boldsymbol{m}$.

9.50. Поле внутри цилиндра:

$$\boldsymbol{H}_1 = -\frac{4\pi \boldsymbol{M}_0}{\mu_2 + \mu_1}$$

Поле вне цилиндра:

$$\boldsymbol{H}_2 = \frac{2\boldsymbol{r}(\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{r})}{r^4} - \frac{\boldsymbol{m}}{r^2}$$

где $\boldsymbol{M}_0$ - постоянная намагниченность,

$$\boldsymbol{m} = \frac{4\pi a^2 \boldsymbol{M}_0}{\mu_2 + \mu_1}$$

9.51. Искомые величины можно получить путем замены в ответе к задаче 8.45 электрических величин на соответствующие магнитные. В частности, при произвольном выборе координатных осей внутреннее поле $\boldsymbol{H}_1$ в эллипсоиде запишется в виде

$$H_{1k} = H_{0k} - 4\pi N_{kl} M_l$$

где $\boldsymbol{M}$ - вектор намагниченности, N_{kl} - коэффициенты размагничивания (компоненты тензора размагничивающего действия формы). Главные значения этого тензора были определены в задачах 8.42-8.44, обозначались через $n^{(i)}$ и назывались там коэффициентами деполяризации. Для предельных случаев они имеют следующие значения:

Форма	$N^{(x)}$	$N^{(y)}$	$N^{(z)}$	Ориентация
диск	0	0	1	перпендикулярно оси Oz
стержень	0	1/2	1/2	вдоль оси Ox
сфера	1/3	1/3	1/3	произвольно

9.52. Формула, приведенная в ответе предыдущей задачи, остается справедливой и в случае анизотропного магнетика. Имеет место еще одно соотношение, связывающее $\boldsymbol{M}$ и $\boldsymbol{H}_1$:

$$H_{1k} + 4\pi M_k = \mu_{kl} H_{1l}$$

Из этих двух формул получаем

$$H_{0k} = b_{km} H_{1m}$$

где

$$b_{km} = \delta_{km} - N_{km} + N_{kl}\mu_{lm}$$

Отсюда

$$H_{1k} = b^{-1}_{km} H_{0m}$$

где b^{-1}_{km} - компоненты обратного тензора. Они могут быть определены с помощью формул, полученных в задаче 1.27.

Рассмотрим один частный случай. Выберем оси координат вдоль главных осей эллипсоида. Если тензор μ_{ik} имеет в этих осях диагональный вид:

$$\mu_{ik} = \begin{pmatrix} \mu^{(x)} & 0 & 0 \\ 0 & \mu^{(y)} & 0 \\ 0 & 0 & \mu^{(z)} \end{pmatrix}$$

то тензор b_{ik} будет диагональным, поэтому и обратный тензор b_{ik}^{-1} также будет диагональным:

$$b_{ik}^{-1} = \begin{pmatrix} \left[1 + N^{(x)}\left(\mu^{(x)} - 1\right)\right]^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \left[1 + N^{(y)}\left(\mu^{(y)} - 1\right)\right]^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \left[1 + N^{(z)}\left(\mu^{(z)} - 1\right)\right]^{-1} \end{pmatrix}$$

9.53.

$$\frac{dW}{dt} = \frac{4\pi^2 \mu n^2 a^2}{c^2} J\dot{J}$$

9.54. $B_z = \mu H_z = \frac{2\pi\mu n J}{c}\left(\cos\theta_1 + + \cos\theta_2\right)$, где (см. рис. 9.11):

$$\cos\theta_1 = \frac{h - z}{\sqrt{a^2 + (h - z)^2}}$$

$$\cos\theta_2 = \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}}$$

9.55. $\mathscr{L} = 4\pi\mu n^2 S$. Для соленоида большой, но конечной длины h, пренебрегая краевым эффектом, по-

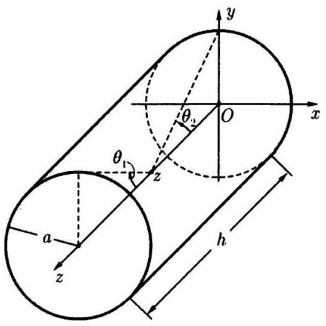


Рис. 9.11

лучим полную индуктивность

$$L = 4\pi\mu n^2 Sh$$

9.56. Для кругового сечения

$$L = 4\pi\mu N^2\left(b - \sqrt{b^2 - a^2}\right).$$

Самоиндукция на единицу длины $\mathscr{L} = \frac{L}{2\pi b}$ для бесконечного соленоида получится, если сделать предельный переход $b \to \infty$ при заданном числе витков на единицу длины $n = \frac{N}{2\pi b}$:

$$\mathscr{L} = 4\pi^2 \mu n^2 a^2 = 4\pi\mu n^2 S$$

(ср. с задачей 9.55).
Для прямоугольного сечения

$$L = 2\mu N^2 h \ln \frac{2b+a}{2b-a}.$$

При $b \gg a$ опять имеем $\mathscr{L} = 4\pi\mu n^2 S$.
Если ток течет непосредственно по оболочке тора, то самоиндукция уменьшается в N^2 раз по сравнению с самоиндукцией тора, обмотанного проводом. В соответствии с этим будем иметь:

$$L = 4\pi\mu \left(b - \sqrt{b^2 - a^2}\right)$$

для тора круглого сечения и

$$L = 2\mu h \ln \frac{2b+a}{2b-a}$$

для тора прямоугольного сечения.

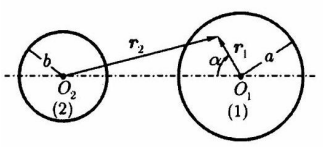


Рис. 9.12
9.57. $\mathscr{L} = 2\mu \ln \frac{b}{a}$.
9.58. Вычислим магнитную энергию единицы длины линии по формуле (2) примера 9.5). Векторный потенциал прямого провода с током был получен в задаче (9.32). Для провода 1 (рис. 9.12) запишем его в виде
(1)

$$\left.\begin{array}{lll} A_{1z} = C - \mu_0 \frac{Jr_1^2}{ca^2} & \text{при} & r_1 < a \\ A_{1z} = C - \frac{J}{c}\left(\mu_0 + 2\mu \ln \frac{r_1}{a}\right) & \text{при} & r_1 > a. \end{array}\right\}$$

Векторный потенциал, создаваемый проводом 2, получится при замене в (1) J на $-J, a$ на b и r_1 на r_2.

Находим магнитную энергию:

$$\Delta\mathscr{F} = \frac{J}{2\pi ca^2} \int\limits_{(1)} (A_{1z} + A_{2z})\, dS_1 - \frac{J}{2\pi cb^2} \int\limits_{(2)} (A_{1z} + A_{2z})\, dS_2 \qquad (2)$$

Интегралы, входящие в (2), берутся в элементарных функциях. Учитывая затем связь между коэффициентом индуктивности и магнитной энергией системы, получим окончательно:

$$\mathscr{L} = \mu_0 + 2\mu \ln \frac{h^2}{ab}$$

9.59. Полная магнитная энергия тока, протекающего по проводнику, складывается из двух частей:

$$\Delta\mathscr{F} = \Delta\mathscr{F}_1 + \Delta\mathscr{F}_2 \qquad (1)$$

где

$$\Delta\mathscr{F}_1 = \frac{\mu_0}{8\pi} \int H_1^2 dV$$

- энергия, запасенная внутри проводника и интегрирование ведется по объему проводника,

$$\Delta\mathscr{F}_2 = \frac{\mu}{8\pi}\int H_2^2 dV$$

- энергия, запасенная в остальном пространстве.

Предположим, что можно ввести параметр r_0; имеющий размерность длины и удовлетворяющий условию

$$a \ll r_0 \ll R \tag{2}$$

где a - радиус проводника, R — радиус кривизны осевой линии проводника (который в общем случае меняется от точки к точке). Тогда на расстояниях, меньших r_0, магнитное поле можно считать совпадающим с полем бесконечного прямого провода. В частности, внутри провода:

$$H_1 = \frac{2Jr}{ca^2}$$

(см. задачу 9.32). Это позволяет найти «внутреннюю» энергию $\Delta\mathscr{F}_1$:

$$\Delta\mathscr{F}_1 = \frac{\mu_0 l J^2}{4c^2} \tag{3}$$

Для определения «внешней» энергии $\Delta\mathscr{F}_2$ построим вспомогательную поверхность S, опирающуюся на произвольный контур, лежащий на поверхности проводника, и введем скалярный потенциал ψ. Скалярный потенциал будет испытывать на S скачок

$$\psi_+ - \psi_- = \frac{4\pi}{c}J \tag{4}$$

Интеграл, через который выражается $\Delta\mathscr{F}_2$, можно преобразовать следующим образом:

$$\int(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H})dV = -\int \boldsymbol{B}\cdot\nabla\psi dV = -\int \operatorname{div}(\psi\boldsymbol{B})dV = -\oint \psi B_n dS$$

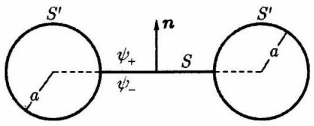


Рис. 9.13

(здесь опущен индекс 2 и использовано уравнение $\operatorname{div}\boldsymbol{B} = 0$). В последнем интеграле интегрирование должно проводиться по обеим сторонам вспомогательной поверхности S и по поверхности проводника S' (см. рис. 9.13), на котором изображено сечение проводника некоторой плоскостью). Интеграл по бесконечно удаленной поверхности обращается в нуль вследствие конечных размеров проводника с током. Таким образом,

$$\Delta\mathscr{F}_2 = -\frac{1}{8\pi}\int\limits_{S'}\psi B_n dS + \frac{1}{8\pi}\int\limits_{S}\psi_+ B_n dS - \frac{1}{8\pi}\int\limits_{S}\psi_- B_n dS \tag{5}$$

Первый из этих интегралов обращается в нуль, так как в силу условия (2) магнитное поле на поверхности S' совпадает с полем прямолинейного провода и имеет, следовательно,

только касательную составляющую. Для преобразования других двух интегралов нужно использовать равенство (4) и условие непрерывности компоненты B_n. Получим

$$W_2 = \frac{J}{2c}\int\limits_S B_n dS \tag{6}$$

На больших расстояниях от провода ($r > r_0$) магнитное поле не зависит от распределения тока по сечению проводника, поэтому можно считать, что ток течет по оси. На малых расстояниях ($a \leqslant r < r_0$) это поле совпадает с магнитным полем бесконечного круглого цилиндра, и тоже можно считать, что ток течет по оси. Таким образом, интеграл в формуле (6) представляет собою поток магнитной индукции, создаваемой током, текущим по оси проводника, через поверхность, которая опирается на замкнутый контур, лежащий на поверхности проводника. Используя выражение потока через коэффициент взаимной индукции, получим

$$\Delta\mathscr{F}_2 = \frac{J^2}{2c^2}L' \tag{7}$$

С помощью формул (1), (3), (7), используя связь между коэффициентом самоиндукции и магнитной энергией системы, получим требуемую формулу для коэффициента самоиндукции:

$$L = \frac{\mu_0 l}{2} + L' \tag{8}$$

9.60. Используя результат предыдущей задачи и задачи 2.106, получим

$$L' = 4\pi\mu b\left(\ln\frac{8b}{a} - 2\right)$$

где μ_0 - магнитная проницаемость среды, в которой находится проводник. Полная самоиндукция

$$L = 4\pi b\left(\mu\ln\frac{8b}{a} - 2\mu + \frac{1}{4}\mu_0\right)$$

или, если $\mu_0 = \mu = 1$,

$$L = 4\pi b\left(\ln\frac{8b}{a} - \frac{7}{4}\right)$$

9.61. $L = 2\mu_0 b + 8\mu b\left[\ln\frac{2b}{a(1+\sqrt{2})} + \sqrt{2} - 2\right]$.

9.62. $f = \frac{2J^2a^2(\mu-1)}{c^2b(b^2-a^2)(\mu+1)}$.

9.63. $f = \frac{2J^2b(\mu-1)}{c^2(a^2-b^2)(\mu+1)}$.

9.64. $F = \frac{3}{16}\cdot\frac{\mu-1}{\mu+2}\cdot\frac{m^2\left(1+\cos^2\theta\right)}{a^4}$, $\quad N = \frac{\mu-1}{\mu+2}\cdot\frac{m^2\sin\theta\cos\theta}{8a^3}$, где $a-$ расстояние от магнита до плоскости, θ - угол между $\boldsymbol{m}$ и нормалью к плоскости. При $\mu \gg 1$ (мягкое железо в слабом магнитном поле) получим такой же результат, как в случае электрического диполя, находящегося вблизи металлической плоскости (см. задачу 8.95).

9.65. Согласно результату задачи 9.35,

$$\boldsymbol{B}_1 = \mu_1\boldsymbol{H}_1 = \frac{2\mu_1\mu_2}{\mu_1+\mu_2}\boldsymbol{H}_0, \quad \boldsymbol{B}_2 = \mu_2\boldsymbol{H}_2 = \frac{2\mu_1\mu_2}{\mu_1+\mu_2}\boldsymbol{H}_0 \tag{1}$$

где $\boldsymbol{H}_0$ - напряженность магнитного поля, создаваемая контуром с током в вакууме. Выражая магнитную энергию через $\boldsymbol{H}_0$ и используя связь энергии с коэффициентом самоиндукции, находим

$$L = \frac{2\mu_1\mu_2}{\mu_1+\mu_2} L_0$$

9.66.

$$\Delta U = \frac{B^2}{8\pi\mu}\left(1 + \frac{T}{\mu}\frac{\partial\mu(T,\tau)}{\partial T}\right)$$

9.67. При $\tau = \text{const}$ записываем (9.55) в форме $d\widetilde{F} = -SdT$ - $-\frac{1}{4\pi}B_\alpha dH_\alpha$ и используем равенство перекрестных производных:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial H_\alpha}\right)_{T,\tau} = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial B_\alpha}{\partial T}\right)_{H_\alpha,\tau} = \left(\frac{\partial M_\alpha}{\partial T}\right)_{H_\alpha,\tau} \tag{1}$$

При $T \to 0$ производная от энтропии в левой части стремится к нулю в силу принципа Нернста. При линейном уравнении связи $M_\alpha = \chi_{\alpha\beta}H_\beta$ это дает $\left(\partial\chi_{\alpha\beta}/\partial T\right)_\tau H_\beta \to 0$ при $T \to 0$ и, поскольку H_β - независимые переменные, отсюда следует

$$\left(\frac{\partial\chi_{\alpha\beta}}{\partial T}\right)_\tau \to 0 \quad \text{при} \quad T \to 0 \tag{2}$$

Если зависимость $M(H)$ нелинейна (как у парамагнетика при насыщении, см. формулу (12) в решении задачи (7.17)), то выполняется условие, следующее из (1):

$$\left(\frac{\partial M_\alpha}{\partial T}\right)_{H_\alpha,\tau} \to 0 \quad \text{при} \quad T \to 0 \tag{3}$$

9.68. В теплоизолированном парамагнетике процесс размагничивания происходит адиабатически, т. е. при

$$S\left(T, B^2\right) = \text{ const }, \quad dS = \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_B dT + \left(\frac{\partial S}{\partial B^2}\right)_T dB^2 = 0 \tag{1}$$

С помощью формулы (9.59) находим

(2) $\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_B = \frac{C_{VB}}{T} = \frac{C_{V0}}{T} - \frac{B^2}{8\pi}\frac{d^2}{dT^2}\left(\frac{1}{\mu}\right), \left(\frac{\partial S}{\partial B^2}\right)_T = -\frac{1}{8\pi}\frac{d}{dT}\left(\frac{1}{\mu}\right),$

где $C_{V0} = T\left(\partial S_0/\partial T\right)_\tau$ - теплоемкость магнетика в отсутствие магнитного поля. В результате получаем из (1) общую связь между температурой и магнитным полем:

$$dT = \frac{T}{8\pi C_{VB}}\frac{d}{dT}\left(\frac{1}{\mu}\right) \tag{3}$$

Если магнитная восприимчивость зависит от T по закону Кюри, то $d(1/\mu)/dT > 0$ и знаки приращений температуры и поля совпадают. Поэтому при размагничивании происходит охлаждение парамагнетика. Для конкретной оценки эффекта сделаем в (3) замены $C_{VB} \approx C_{V0} \approx bT^3$ (пренебрегли влиянием поля на теплоемкость, использовали низкотемпературную асимптотику теплоемкости кристаллов) и $1/\mu \approx 1 - 4\pi\chi = 1 - 4\pi C/T$ (предполагаем неравенство $4\pi C/T \ll 1$). Тогда

$$dT = \frac{C}{2bT^4} dB^2 \tag{4}$$

Из-за четвертой степени температуры в знаменателе эффект охлаждения велик при низких температурах, и таким способом получают температуры ниже $1K$ (а в системе

ядерных спинов даже до $10^{-6}K$, см. [Физический энциклопедический словарь]). Но следует иметь в виду, что при $T \to 0$ закон Кюри несправедлив (см. задачу 9.67*).
9.69. При изотермическом намагничивании тело отдает тепло, $Q = -\mathrm{CH}^2/2T_0 < 0$, при размагничивании - получает такое же тепло.
9.70. Из (9.52) записываем дифференциал

$$dS = \frac{1}{T}\left(\frac{\partial U_*}{\partial T}\right)_M dT + \left[\frac{1}{T}\left(\frac{\partial U_*}{\partial M}\right)_T - \frac{H}{T}\right] dM \tag{1}$$

Приравнивая перекрестные производные, учтем, что $d(H/T)_M/dT = 0$, так как условие $M = \text{const}$ приводит к постоянству отношения H/T. Получим

$$\left(\frac{\partial U_*}{\partial M}\right)_T = 0, \quad U_*(T) = \frac{1}{4}bT^4$$

$$S(T,H) = \frac{1}{3}bT^3 - \frac{H}{T}f\left(\frac{H}{T}\right) + \int\limits_0^{H/T} f(x)dx + \text{ const.} \tag{2}$$

Здесь const можно определить из принципа Нернста $S(T,H)|_{T\to 0} \to 0$ (см. задачу 9.67*), если известна функция $f(x)$.
9.71.

$$\left(\frac{\partial V}{\partial H}\right)_{p,T} = -\left(\frac{\partial M}{\partial p}\right)_{H,T}, \quad \frac{\Delta V}{V} = \frac{H^2}{2}\left(\beta\chi - \frac{\partial \chi}{\partial p}\right)$$

9.72. Интегрируя равенства (9.52), (9.53) или пользуясь уже вычисленными величинами (9.58), (9.59), находим

$$U_*(S,M) = U_0(S) + \frac{M^2}{2\chi(S)}, \quad F_*(T,M) = F_0(T) + \frac{M^2}{2\chi(T)}$$

$$S(T,M) = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_M = S_0(T) + \frac{M^2}{2\chi^2(T)}\frac{d\chi}{dT} \tag{1}$$

Аргумент τ всюду опущен. Проверим выполнимость термодинамического тождества Гиббса-Гельмгольца $U_* = F_* + TS$. Подставив в него величины из (1), получаем

$$U_0(S) = F_0(T) + TS_0(T) + \frac{M^2T}{2\chi^2}\frac{d\chi}{dT} \tag{2}$$

В левой части переходим к переменной T, представив $S = S_0(T) + \Delta S$, где ΔS - добавка, вызванная магнитным полем. В первом порядке по ΔS, что соответствует линейной связи $M = \chi H$ и квадратичной по полю поправке к энергиям, убеждаемся в справедливости равенства (2), из которого следует очевидная связь $U_0(T) = F_0(T) + TS_0(T)$. Таким образом, в переменных T, M имеем

$$U_*(T,M) = U_0(T) + \frac{M^2}{2\chi(T)}\left(1 + \frac{T}{\chi(T)}\frac{d\chi}{dT}\right) \tag{3}$$

Для парамагнетика, подчиняющегося закону Кюри, $\chi = C/T$ и $U_* = U_0(T)$ в согласии с результатом задачи 9.70*.
9.73.
$C_{VB} - C_{V0} = \frac{TB^2}{8\pi\mu^2}\left[\left(\frac{\partial^2\mu}{\partial T^2}\right)_\tau - \frac{2}{\mu}\left(\frac{\partial\mu}{\partial T}\right)_\tau^2\right], \quad C_{VE} - C_{V0} = \frac{TH^2}{8\pi}\left(\frac{\partial^2\mu}{\partial T^2}\right)_\tau$
9.74.

$$C_H - C_B = \frac{T(\partial B/\partial T)_H^2}{4\pi(\partial B/\partial H)_T} \tag{1}$$

При $B = \mu H$ уравнение (1) дает

$$C_H - C_B = \frac{TH^2}{4\pi\mu}\left(\frac{\partial\mu}{\partial T}\right)_\tau^2 \tag{2}$$

Это же значение разности можно получить из результатов предыдущей задачи. Условие $\tau = \text{const}$ означает, что C_B, C_H вычисляются при постоянном объеме. Если поддерживается постоянное давление, то в (1), (2) производные нужно брать при $p = \text{const}$.

9.77. $\Delta C_p = -T_C a^2/2\beta$.

9.78.

$$U_*(T,M) = \int C_M(T)dT - \frac{T_C M^2}{2C} + \text{ const}, \; S = \int \frac{C_M(T)}{T}dT - \frac{M^2}{2C} + \text{ const}$$

где теплоемкость C_M (при постоянной плотности и намагниченности) не зависит от намагниченности.

9.79. При $T_C - T \ll T_C$, разлагая функцию Бриллюэна в ряд до членов 3 -го порядка, получим

$$M = M_0\sqrt{\frac{10(S+1)^2}{3\left[(S+1)^2+S^2\right]}\left(1-\frac{T}{T_C}\right)}$$

$$M = M_0\left[1 - \frac{1}{S}\exp\left(-\frac{3T_C}{(S+1)T}\right)\right] \text{ при } T \ll T_C$$

9.80.

$$\chi = \frac{C}{T-T_C} \quad \text{при } T > T_C, \quad \chi = \frac{C}{2\left(T_C - T\right))} \quad \text{при} \quad T < T_C$$

$$M = M_0\left(\frac{3H}{\lambda M_0}\right)^{1/3} \quad \text{при } T = T_C$$

Здесь константа Кюри $C = \mu_B^2 N$.

9.81. Полагаем в уравнениях (9.82) $H = 0$ и получаем с помощью (9.83) равенства

$$-\frac{\boldsymbol{M}^{(b)}\cdot\boldsymbol{M}^{(a)}}{M^{(b)}M_0} = L_S\left(\frac{4\mu_B S\lambda}{T}\left|\boldsymbol{M}^{(b)}\right|\right)$$

$$-\frac{\boldsymbol{M}^{(a)}\cdot\boldsymbol{M}^{(b)}}{M^{(a)}M_0} = L_S\left(\frac{4\mu_B S\lambda}{T}\left|\boldsymbol{M}^{(a)}\right|\right)$$

Поскольку правые части положительны, то корни, отличные от нуля, возможны только при $\left(\boldsymbol{M}^{(a)}\cdot\boldsymbol{M}^{(b)}\right) < 0$. Ищем решение в виде $\boldsymbol{M}^{(a)} = -\boldsymbol{M}^{(b)} = \boldsymbol{M}$ и получаем для отношения $x = M/M_0$ в точности такие же уравнения, как в примере 9.6. Следовательно, антиферромагнитное состояние со спонтанной намагниченностью подрешеток существует при температурах $0 \leqslant T \leqslant T_C$, где температура Кюри дается равенством (9.75) из примера 9.6 (иногда ее называют температурой Нееля и обозначают через T_N).

9.82. В рассматриваемой области температур спонтанная намагниченность отсутствует, а индуцированная направлена вдоль локального поля, поэтому левые части уравнений (9.82)

принимают вид $M^{(a,b)}/M_0$. Удерживая в правых частях первые неисчезающие члены, находим

$$M = M^{(a)} + M^{(b)} = \frac{C}{T+T_C}H, \quad \chi(T) = \frac{C}{T+T_C}$$

где T_C дается формулой (9.75), $C = 4S(S+1)\mu_B^2 N/3$ (ср. с ответом к задаче 7.17).

9.83. 1. Внешнее магнитное поле перпендикулярно направлению намагниченности подрешеток. В уравнениях (9.82) полагаем $\boldsymbol{M}^{(a,b)} = \boldsymbol{M}_{sp}^{(a,b)} + \boldsymbol{M}_{ind}^{(a,b)}$, где величины $\boldsymbol{M}_{sp}^{(a,b)}$ соответствуют $\boldsymbol{H} = 0, \boldsymbol{M}_{ind}^{(a,b)}$ - добавки, обязанные внешнему полю. Ищем решение указанных уравнений
в виде $\boldsymbol{M}_{ind}^{(a,b)} = \boldsymbol{H}/2\lambda$. После подстановки в уравнения (9.82) из аргументов функции L_S поле H выпадает, члены первого порядка по H не входят и в левые части в силу условия $\boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{M}_{sp}^{(a,b)} = 0$. Малыми членами второго порядка пренебрегаем. Остаются уже рассматривавшиеся в задаче 9.81 уравнения для спонтанной намагниченности. Записывая $\boldsymbol{M}_{\text{ind}} = \boldsymbol{M}_{\text{ind}}^{(a)} + +\boldsymbol{M}_{\text{ind}}^{(b)} = \boldsymbol{H}/\lambda$, находим

$$\chi_\perp = \frac{1}{\lambda} = \frac{\mu_B^2 N}{zI} \ll 1$$

Это значение имеет место в области $T < T_0$, в которой $2\lambda M_{sp}^{(a,b)} \gg |H - -2\lambda M_{\text{ind}}^{(a,b)}|$. В самой точке Кюри $M_{sp}^{(a,b)} = 0$, антиферромагнетик становится изотропным в рассматриваемой модели, и применим результат предыдущей задачи $\chi_\perp = \chi_\parallel = \chi = 1/2\lambda$.
2. Магнитное поле направлено вдоль намагниченности $M_{sp}^{(a)} = -M_{sp}^{(b)}$. В уравнения (9.82) подставляем $l_a = e_a, l_b = -e_a$, где e_a - единичный вектор в направлении $\boldsymbol{M}_{sp}^{(a)}$. Намагниченности $\boldsymbol{M}_{ind}^{(a)}, \boldsymbol{M}_{ind}^{(b)}$ направлены вдоль магнитного поля. Из (9.82) получим

$$\begin{aligned} M_{sp}^{(a)} + M_{ind}^{(a)} &= L_S\left(\frac{2\mu_B S}{T}\left(2\lambda M_{sp}^{(a)} + H - 2\lambda M_{ind}^{(b)}\right)\right) \\ M_{sp}^{(a)} - M_{ind}^{(b)} &= L_S\left(\frac{2\mu_B S}{T}\left(2\lambda M_{sp}^{(a)} - H + 2\lambda M_{ind}^{(a)}\right)\right) \end{aligned} \tag{1}$$

При температурах, не слишком близких к точке Кюри, локальное поле подрешеток велико по сравнению с внешним полем. Разлагаем правые части по малым добавкам и из получившихся линейных уравнений находим
(2) $M_{ind} = M_{ind}^{(a)} + M_{ind}^{(b)} = \frac{4\mu_B S M_0}{T}\left(-\lambda M_{ind} + H\right) L_S'\left(\frac{4\lambda\mu_B S M_{sp}^{(a)}}{T}\right)$.

Это позволяет найти магнитную восприимчивость:

$$M_{\text{ind}} = \chi_\parallel H, \quad \chi_\parallel = \frac{4\mu_B^2 S^2 N L_S'}{T + 4\lambda\mu_B^2 S^2 N L_S'} \tag{3}$$

Здесь L_S' - производная от функции Бриллюэна по ее аргументу. При низких температурах аргумент велик, $L_S'(x)|_{x\gg 1} \approx (1/4S^2)\, e^{-x/S}$, и $\chi_\parallel \to 0$
при $T \to 0$. При $T \to T_C$ аргумент мал, $L_S'(x)|_{x\ll 1} \approx (S+1)/3S$, и в этом пределе получаем результат предыдущей задачи $\chi_\parallel = C/\left(T + T_C\right)$.
9.84. Согласно (9.89) и (9.90), $\Delta F(T,H) = F_n(T) - F_s(T,H) = -\left(H_c^2(T) - H^2\right)/8\pi$. Вычисляя энтропию, находим

$$\Delta\dot{S} = -\left(\frac{\partial \Delta F}{\partial T}\right)_H = -\frac{H_c(T)}{4\pi}\frac{dH_c}{dT}$$

Как следует отсюда, изменение энтропии не зависит от внешнего магнитного поля. На концах температурного интервала $0 \leqslant T \leqslant T_c$ имеем $\Delta S(0) = 0$ в силу принципа Нернста

(этот принцип сформулирован в условии задачи 9.67*) и $\Delta S\left(T_c\right)=0$ по определению критической температуры: $H_c\left(T_c\right)=0$. При этих температурах переходы $n \longleftrightarrow s$ происходят без изменения температуры и являются фазовыми переходами второго рода. При $0<T<T_c$ с помощью (9.86) находим

$$\Delta S(T)=\frac{H_c^2(0) T}{2 \pi T_c}\left(1-\frac{T^2}{T_c^2}\right)>0$$

В этой области температур при изменении внешнего поля происходят фазовые переходы первого рода.

9.85. Из результатов предыдущей задачи находим $Q=T \Delta S=\frac{H_c^2(0) T^2}{2 \pi T_c}\left(1-\frac{T^2}{T_c^2}\right)>0$, тело при намагничивании нагревается в отличие от парамагнетика (задача 9.69), который при этом охлаждается. Если сверхпроводник будет теплоизолирован, то при намагничивании он охладится, а при размагничивании нагреется, тоже в противоположность парамагнетику (см. задачу 9.68$^{\bullet}$).

9.86. $\Delta C=\frac{T_c}{4 \pi}\left(\frac{\partial H_c(T)}{\partial T}\right)^2\Big|_{T_c}$. Для свинца $\Delta C \approx 2,8 \times 10^4 \mathrm{erg} / \mathrm{cm}^3 \mathrm{~K} \approx$ $\approx 6,8 \times 10^{-4} \mathrm{cal} / \mathrm{cm}^3 \mathrm{~K}$

9.87. $\boldsymbol{j}_n=0, \boldsymbol{j}_s \neq 0$,

$$\begin{gathered}\boldsymbol{E}=0 \\ \operatorname{rot}\left(\lambda^2 \boldsymbol{j}_s\right)=-\frac{c}{4 \pi} \boldsymbol{B} \\ \operatorname{rot} \boldsymbol{B}=\frac{4 \pi}{c} \boldsymbol{j}_s \\ \operatorname{div} \boldsymbol{B}=0\end{gathered}$$

Исключая из этих уравнений $\boldsymbol{j}_s$ или $\boldsymbol{B}$, получим

$$\begin{gathered}\Delta \boldsymbol{j}_s=\frac{1}{\lambda^2} \boldsymbol{j}_s \\ \Delta \boldsymbol{B}=\frac{1}{\lambda^2} \boldsymbol{B}\end{gathered}$$

9.88. $B_x=B_z=0, B_y=H_0 \exp (-x / \lambda), j_x=j_y=0$,

$$j_z=\frac{c}{4 \pi} \frac{\partial B_y}{\partial x}=-\frac{c H_0}{4 \pi \lambda} \exp \left(-\frac{x}{\lambda}\right) .$$

9.89.

$$F_x=-\frac{1}{c} \int\limits_0^{\infty} j_z B_y d x=\frac{H_0^2}{8 \pi}$$

Сила F_x стремится вытолкнуть сверхпроводник из поля. В этом проявляется диамагнетизм сверхпроводника.

9.90.

$$B_x=B_y=0, \quad B_z=H_0 \frac{\operatorname{ch}(x / \lambda)}{\operatorname{ch}(a / \lambda)} \tag{1}$$

При $a \gg \lambda, B_z$ экспоненциально мало всюду в толще пленки, кроме тонких слоев вблизи ее границ: $B_z=H_0 \exp [-(a \mp x) / \lambda]$, где знак минус относится к границе $x=a$, знак плюс - к границе $x=-a$. Имеет место, таким образом, эффект выталкивания магнитного поля из сверхпроводника. При $\lambda \gg a$ ослабление поля мало.

Для среднего магнитного момента получаем неожиданный результат. Производя вычисление в расчете на единицу длины в направлениях осей Oy и Oz, будем иметь

$$\bar{M}_z = \frac{1}{2a}\frac{1}{2c}\int\limits_{-a}^{a} [\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{j}_s]_z\,dx = -\frac{1}{8\pi}\int\limits_{0}^{a} x\frac{\partial B_z}{\partial x}dx = -\frac{H_0}{8\pi}\left(1-\frac{\lambda}{a}\,\mathrm{th}\,\frac{a}{\lambda}\right) \tag{2}$$

$\bar{M}_z$ имеет знак, противоположный полю (диамагнетизм). Но при $\lambda \ll a$ средний магнитный момент $\bar{M}_z \approx -H_0/8\pi$, что вдвое меньше по абсолютной величине, чем в случае сверхпроводящего цилиндра (пример 9.8; см. также задачу 9.93).

Это отличие вызвано некорректным рассмотрением сверхпроводника с бесконечно большим размером вдоль оси Oy. В действительности любой сверхпроводник ограничен. Пусть ширина пленки вдоль оси Oy равна $2b$, причем $b \gg a, \lambda$, тогда как полутолщина a может быть сравнима
с λ (рис. 9.14). В этом случае всюду внутри пленки можно пользоваться решением (1), за исключением областей вблизи границ $y = \pm b$. Ввиду неравенства $b \gg \lambda$ ток вдоль этих границ можно считать поверхностным. Вычисляем среднюю намагниченность на единицу длины вдоль оси Oz:

$$\bar{M}_z = \frac{1}{4ab}\frac{1}{2c}\int\limits_{-b}^{b} dy\int\limits_{-a}^{a} [\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{j}_s]_z\,dx \tag{3}$$

где теперь нужно учесть, что поверхностный ток за-

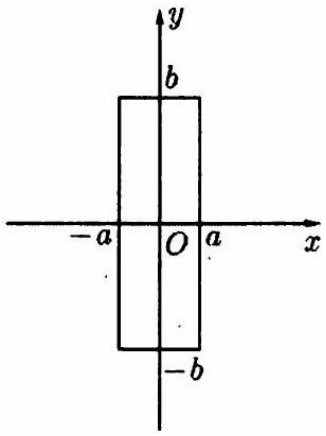


Рис. 9.14 мыкается вдоль границ $y = \pm b$:

$$(4)\ j_s = -\frac{c}{4\pi}\frac{\partial B_z}{\partial x}e_y - \frac{cH_0}{4\pi}[\delta(y+b)-\delta(y-b)]\boldsymbol{e}_x$$

Здесь поверхностные токи для единообразия записаны с помощью дельта-функции, выражение (4) относится только к области внутри пленки и к ее границам. Подставляя это выражение в (3), находим добавочное слагаемое, т. е. исправленное выражение (2):

$$\bar{M}_z = -\frac{H_0}{8\pi}\left(1-\frac{\lambda}{a}\,\mathrm{th}\,\frac{a}{\lambda}\right) - \frac{H_0}{8\pi} \tag{5}$$

Удаленный узкий край пленки дает добавку, превышающую вклад широкой поверхности. При $\lambda \ll a$ пленка ведет себя как идеальный диамагнетик: $\bar{M}_z = -H_0/4\pi, \chi = -1/4\pi, \mu = 1 + 4\pi\chi = 0$.

9.91. В областях $x \geqslant a, x \leqslant -a$ - однородное поле $H_0 = \pm 2\pi i/c$, направленное соответственно вдоль и противоположно оси Oy. Внутри пленки

$$B_y(x) = H_0 \frac{\mathrm{sh}(x/\lambda)}{\mathrm{sh}(a/\lambda)}, \quad j_{sz} = \frac{cH_0}{4\pi\lambda} \frac{\mathrm{ch}(x/\lambda)}{\mathrm{sh}(a/\lambda)}$$

При $\lambda \ll a$ ток течет в тонком поверхностном слое, в толще пленки ток и поле отсутствуют (ср. с результатом задачи 2.76, случай б). При $\lambda \gg a$ ток распределен равномерно по сечению, а поле внутри пленки меняется по линейному закону: $B_y(x) = H_0 x/a$.

9.92. На поверхности сверхпроводника должно выполняться граничное условие обращения в нуль нормальной компоненты результирующего поля: $H'_x(0, y, z) = 0$, а в области $x > 0$ - уравнения Максвелла и уравнения для векторного потенциала с заданным током. Все эти требования будут выполнены, если поле в области вакуума будет создаваться заданными проводниками с током и их зеркальными изображениями в плоскости $x = 0$,
причем в проводниках-изображениях должны течь токи той же силы, но противоположного направления.

9.93.

$$B_z = H_0 \frac{I_0(r/\lambda)}{I_0(a/\lambda)}, \quad \bar{M}_z = -\frac{H_0}{4\pi} \left[1 - 2\frac{\lambda}{a} \frac{I_1(a/\lambda)}{I_0(a/\lambda)}\right]$$

где I_0, I_1 - модифицированные функции Бесселя.

9.94. Вне шара

$$H_r = \left(H_0 + \frac{2m}{r^3}\right) \cos\vartheta, \quad H_\vartheta = \left(-H_0 + \frac{m}{r^3}\right) \sin\vartheta$$

где m - постоянная, имеющая смысл магнитного момента.
Внутри шара

$$j_\alpha = f(r) \sin\vartheta, \quad j_r = j_\vartheta = 0$$

Функция $j_\alpha(r, \vartheta)$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta j_\alpha - \frac{1}{r^2} \sin^2\vartheta \cdot j_\alpha = 0$$

(см. ответ задачи 1.91), откуда

$$j_\alpha(r, \vartheta) = \frac{cA}{4\pi r^2} \left(\mathrm{sh}\,\frac{r}{\lambda} - \frac{r}{\lambda}\,\mathrm{ch}\,\frac{r}{\lambda}\right)$$

Здесь A - постоянная интегрирования. Компоненты B_r и B_ϑ магнитного поля внутри шара выражаются через $j_\alpha(r, \vartheta)$:

$$B_r = \frac{2\lambda^2 A}{r^3} \left(\mathrm{sh}\,\frac{r}{\lambda} - \frac{r}{\lambda}\,\mathrm{ch}\,\frac{r}{\lambda}\right) \cos\vartheta$$
$$B_\vartheta = \frac{2\lambda^2}{r^3} \left[\left(1 + \frac{r^2}{\lambda^2}\right) \mathrm{sh}\,\frac{r}{\lambda} - \frac{r}{\lambda}\,\mathrm{ch}\,\frac{r}{\lambda}\right] \sin\vartheta$$

Постоянные m и A определяются из условий непрерывности векторов поля при $r = a$.

$$m = -\frac{H_0 a^3}{2} \left(1 - 3\frac{\lambda}{a}\,\mathrm{cth}\,\frac{a}{\lambda} + 3\frac{\lambda^2}{a^2}\right), \quad A = -\frac{3H_0 a}{2\,\mathrm{sh}(a/\lambda)}$$

При $\lambda \ll a$ получим $m = -H_0 a^3/2$ (ср. с ответом 9.37 при $\mu = 0$), $A = 0$. При $\lambda \gg a, m = -H_0 a^5/30\lambda^2$.

9.95.

$$j_r = j_\alpha = 0, \quad j_z = \frac{J}{2\pi a\lambda}\frac{I_0(r/\lambda)}{I_1(a/\lambda)}, \quad B_r = B_z = 0$$

$$B_\alpha = \begin{cases} \frac{J}{2\pi ca}\frac{I_0(r/\lambda)}{I_1(a/\lambda)} & \text{при } r < a \\ \frac{J}{2\pi ca} & \text{при } r > a \end{cases}$$

I_0, I_1 - модифицированные функции Бесселя.

9.96. $J' = -cH_0 S\cos\vartheta/L + J$.

9.97. $J = c\Phi_0/L$.

9.98. $J_c = (ca/2)\sqrt{H_c^2 - H_0^2}$, где H_c - критическое поле при рассматриваемой температуре.

9.99. $J_c = (ca/2)\,(H_c - 2H_0)$.

9.102. 1. Полагаем $\boldsymbol{A} = 0$. При этом из системы (9.110)-(9.112) выпадает мнимая единица и можно считать ψ действительной величиной. Предполагаем также, что сверхпроводник по поверхности $z = 0$ граничит с обычным металлом и граничное условие (9.112) не выполняется. В случае слабой неоднородности ψ записываем $\psi = 1 - \zeta(z), |\zeta(z)| \ll 1$ и линеаризуем уравнение (9.112):

$$-\xi^2\frac{d^2\zeta}{dz^2} + 2\zeta = 0$$

Решение, описывающее однородное состояние в глубине ($z \to \infty$) сверхпроводника, имеет вид $\zeta = \zeta_0\exp(-\sqrt{2}z/\xi)$. Таким образом, ξ - это масштаб неоднородности параметра порядка, или масштаб неоднородности в распределении куперовских пар, который называют также «длиной когерентности». Эта величина возрастает вблизи критической температуры по закону $\xi \propto (T_c - T)^{-1/2}$.

2. Величина λ, определенная равенством (9.109), совпадает с λ в теории Лондонов и характеризует глубину проникновения магнитного поля в сверхпроводник. Уравнение (9.111) переходит в уравнение (9.92) теории Лондонов, если $\psi \approx 1$.

Свойства сверхпроводника сильно зависят от отношения $\kappa = \lambda/\xi$. При $\kappa \ll 1$ магнитное поле слабо влияет на параметр порядка и применима
локальная теория Лондонов, в которой электрический ток зависит от магнитного поля в той же точке. При $\kappa \gg 1$ связь между током и полем становится нелокальной (случай Пиппарда).

9.103. Вдали от границы полости, где сверхпроводник однороден, наиболее общее выражение для волновой функции имеет вид $\psi(\boldsymbol{r}) = \exp(i\phi(\boldsymbol{r}))$, где ϕ - действительная фаза. Сверхпроводящий ток (9.108) в этом случае приобретает вид

$$j_s = -\frac{c}{4\pi\lambda^2}\left(\frac{\Phi_0}{2\pi}\nabla\phi(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})\right), \tag{1}$$

где Φ_0 определяется выражением (9.87). Строим замкнутый контур, охватывающий полость, в толще сверхпроводника. Интегрируя ток вдоль контура, находим $\oint_l j_s \cdot dl = 0$, так как в толще сверхпроводника тока нет. В совокупности с (1) это дает

$$\oint_l \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{l} = -\frac{\Phi_0}{2\pi}\oint_l \nabla\phi\cdot dl \tag{2}$$

Но $\oint_l \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{l} = \int\limits_S \operatorname{rot}\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S} = \Phi$ - магнитный поток через площадь, ограниченную контуром; $\oint_l \nabla\phi\cdot dl$ - изменение фазы волновой функции при обходе контура. Ввиду требования однозначности волновой функции это изменение кратно 2π:

$$\oint_l \nabla\phi\cdot dl = 2\pi n, \quad n = 0, \pm1, \pm2, \ldots \tag{3}$$

Отсюда - квантование абсолютной величины магнитного потока (9.87).
9.104. Ток распределен в пленке однородно, магнитный поток сосредоточен внутри цилиндра (с точностью до величин порядка $\delta/a \ll 1$). Интегрируем сверхпроводящий ток (см. формулу (1) предыдущей задачи) вдоль замкнутого контура, лежащего внутри пленки. Получаем

$$\oint_l j_s \cdot d\boldsymbol{l} = 2\pi a j_s = -\frac{c}{4\pi\lambda^2}\left(\Phi + n\Phi_0\right).$$

Плотность тока j_s выражаем через магнитный поток внутри цилиндра с помощью формулы, полученной в задаче 2.83, считая ток поверхностным ввиду условия $\delta \ll a : j_s = cB/4\pi\delta = c\Phi/4\pi^2 a^2\delta$. В итоге получаем квантованную абсолютную величину магнитного потока

$$\Phi = \frac{n\Phi_0}{1 + 2\lambda^2/a\delta}, \quad n = 0, 1, \ldots$$

11.4 10 Quasi-Stationary Electromagnetic Field

11.4.1 10.1. Quasi-Stationary Phenomena in Linear Conductors

В этой главе будут рассмотрены электромагнитные явления, вызванные относительно медленным изменением поля. Если период колебаний электромагнитного поля T значительно превышает время распространения поля через систему:

$$T \gg \frac{l}{c}, \quad \omega \ll \frac{c}{l}, \tag{10.1}$$

где c - скорость света, l - линейный размер системы, то можно пренебречь конечностью скорости распространения электромагнитных возмущений внутри системы. Электромагнитное поле в этих условиях будет определяться мгновенными значениями зарядов и токов в системе. Такое приближение называется квазистационарным [1] Мы начнем с рассмотрения квазистационарных явлений в квазилинейных проводниках.

Пусть в некотором квазилинейном замкнутом и недеформируемом контуре действует сторонняя ЭДС $\mathscr{E}_{ext}$. Если ЭДС постоянна, то она создаст в контуре постоянный ток J в соответствии с законом Ома (9.17): $\mathscr{E}_{\text{ext}} = JR, R$ - сопротивление контура постоянному току. Если ЭДС $\mathscr{E}_{ext}(t)$ изменяется со временем, то переменный ток в контуре в соответствии с законом электромагнитной индукции Фарадея (2.79) создаст дополнительную электродвижущую силу - ЭДС индукции

$$\mathscr{E}_{ind} = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt} \tag{10.2}$$

и закон Ома примет вид

$$\mathscr{E}_{\text{ext}}(t) + \mathscr{E}_{\text{ind}}(t) = RJ(t)$$

В разделе 2.3, рассматривая электромагнитное поле в вакууме, мы понимали под Φ поток напряженности магнитного поля $\boldsymbol{H}$. Но в средах под Φ нужно понимать поток магнитной индукции $\boldsymbol{B}$ через поверхность, опирающуюся на замкнутый контур: $\Phi = \int\limits_S \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{S}$. Тогда (10.2) будет представлять собой интегральную форму макроскопического уравнения (7.8).

[1] Применение квазистационарного приближения к линиям передачи с длиной L, не ограниченной условиями (10.1), см. в задачах $10.20^{\star} - 10.26$.
[2] Эта формула годится также в случае движения и деформации контура - см. ниже пример 10.4 .

В квазистационарном приближении магнитный поток определяется мгновенным током в контуре в соответствии с формулой магнитостатики (9.64′):

$$\Phi(t) = \frac{J(t)}{c} L$$

где L - коэффициент самоиндукции контура. В итоге закон Ома для замкнутого контура с переменной ЭДС примет следующий вид [3] :

$$\mathscr{E}_{\text{ext}}(t) = RJ(t) + \frac{L}{c^2}\frac{dJ(t)}{dt} \tag{10.3}$$

Пример 10.1. Пусть сторонняя ЭДС изменяется следующим образом:

$$\mathscr{E}_{ext}(t) = \begin{cases} \mathscr{E} = \text{ const }, & t \leqslant 0 \\ 0, & t > 0 \end{cases}$$

Найти зависимость силь тока в контуре от времени.
Решение. При $t \leqslant 0$ имеем постоянный ток в соответствии с формулой (9.17): $J = \mathscr{E}/R$. При $t > 0$ уравнение для тока

$$\frac{L}{c^2}\frac{dJ}{dt} + RJ = 0 \tag{1}$$

и начальное условие $J(0) = \mathscr{E}/R$. Решение имеет вид

$$J(t) = \frac{\mathscr{E}}{R} e^{-t/\tau}, \quad \text{где} \quad \tau = \frac{c^2 R}{L} \tag{2}$$

- время затухания тока в контуре.

Пример 10.2. Пусть сторонняя ЭДС зависит от времени по гармоническому закону: $\mathscr{E}_{\text{ext}}(t) = \mathscr{E} e^{-i\omega t}$. Найти связь между ЭДС и силой тока в установившемся режиме.

Решение. Для установившегося состояния ищем частное решение $J(t) = J_0 e^{-i\omega t}$ уравнения (10.3) и находим

$$J_0 = \frac{\mathscr{E}}{Z(\omega)}, \quad \text{где} \quad Z(\omega) = R - i\frac{\omega L}{c^2} \tag{1}$$

- комплексное сопротивление (импеданс) контура. Ее действительная часть называется активным, а мнимая - реактивным сопротивлениями. Комплексный характер импеданса свидетельствует о наличии сдвига фаз между током и ЭДС. Отделяя действительную часть в законе Ома для случая гармонического переменного тока $J(t) = \mathscr{E}_{\text{ext}}(t)/Z(\omega)$, находим

$$J(t) = \frac{\mathscr{E}}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2/c^4}} \cos(\omega t - \varphi), \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{\omega L}{c^2 R} \tag{2}$$

В данном случае ток отстает по фазе от ЭДС.
При наличии в контуре с переменной ЭДС конденсатора с емкостью C на его обкладках будет попеременно возникать заряд $\pm q(t)$, а между обкладками - разность потенциалов $V(t) = q(t)/C$ (см. формулу (8.11)). Эту разность потенциалов следует добавить в правую

[03] Здесь мы считаем, что сопротивление R остается таким же, как и для постоянного тока. При достаточно высоких частотах это предположение может нарушиться из-за скин-эффекта концентрации тока в тонком поверхностном слое проводника. Этот вопрос рассмотрен в разделе 10.2.

часть (10.3), выразив предварительно силу тока как изменение заряда одной из обкладок в единицу времени:

$$J(t) = \frac{dq}{dt}, \quad \frac{L}{c^2}\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = \mathscr{E}_{ext}(t) \tag{10.4}$$

Это уравнение описывает электрические колебания в контуре с емкостью, индуктивностью и активным сопротивлением.

Пример 10.3. Вычислить импеданс рассмотренного выше контура с емкостью, индуктивностью и активным сопротивлением. Найти силу тока в нем. Вычислить частоту собственных колебаний в контуре и их декремент.

Решение. Задаем стороннюю ЭДС в виде гармонической функции, $\mathscr{E}_{ext}(t) = \mathscr{E}e^{-i\omega t}$, и ищем частное решение $q(t) = q_0 e^{-i\omega t}$ уравнения (10.4). Для тока $J = \dot{q}$ получаем решение

$$J(t) = \frac{\mathscr{E}_{\text{ext}}\,(t)}{Z(\omega)}, \quad \text{где} \quad Z(\omega) = R - i\left(\frac{\omega L}{c^2} - \frac{1}{\omega C}\right). \tag{1}$$

Теперь реактивное сопротивление (мнимая часть Z) зависит также и от емкости конденсатора. Измеряемое значение тока (действительная часть комплексного выражения (1)) можно записать в виде

$$J(t) = \frac{\mathscr{E}\cos(\omega t - \varphi)}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{\omega L}{c^2} - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{R}\left(\frac{\omega L}{c^2} - \frac{1}{\omega C}\right) \tag{2}$$

Собственные колебания в контуре происходят при $\mathscr{E} = 0$. Это возможно, если подкоренное выражение в (2) обратится в нуль, что соответствует равенству $Z(\omega) = 0$. Это условие определяет частоты собственных колебаний ω_0. Решая квадратное алгебраическое уравнение, находим

$$\omega_0 = \omega_0' + i\omega_0'' = \pm\sqrt{\frac{c^2}{LC} - \left(\frac{Rc^2}{2L}\right)^2} - i\frac{Rc^2}{2L} \tag{3}$$

При наличии в контуре активного сопротивления R собственная частота комплексна, колебания затухают с декрементом $\gamma = -\omega_0'' = Rc^2/2L$. В пренебрежении затуханием (малое R) получаем собственную частоту незатухающих колебаний:

$$\omega_0 = \frac{c}{\sqrt{LC}} \tag{10.5}$$

(формула Томсона).

Для разветвленной цепи дифференциальные уравнения, определяющие токи в отдельных участках, в которых могут быть и конденсаторы, составляются на основе законов Кирхгофа. Последние были сформулированы в разделе 9.1. Кроме сторонних ЭДС, при наличии индуктивной связи между контурами в уравнения нужно включать индукционные ЭДС, которые выражаются согласно (10.2). Магнитные потоки, учитывающие влияние всех контуров, выражаются через токи в них и коэффициенты индуктивности согласно (9.64′) :

$$\Phi_a = \frac{1}{c}\sum_b L_{ab}J_b \tag{10.6}$$

Пример 10.4. Формулы (2.79), (10.2) выражают закон электромагнитной индукиии Фарадея для неподвижного контура. Вывести этот закон для движущегося и деформируемого замкнутого контура, находящегося в переменном электромагнитном поле:

Решение. В движущемся с нерелятивистской скоростью $u(r)$ и деформируемом контуре l электрическое поле $\boldsymbol{E}' = \boldsymbol{E} + \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{B}/$ согласно (4.70), где надо положить $\gamma \approx 1$. По определению ЭДС индукции

$$\mathscr{E}'_{ind} = \oint_l \boldsymbol{E}' \cdot d\boldsymbol{l} = \oint_l \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} + \frac{1}{c} \oint_l [\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{B}] \cdot d\boldsymbol{l} \tag{1}$$

Первый интеграл в правой части представляет собой ЭДС индукции $\mathscr{E}_{\text{ind}}$ (2.79) в неподвижном контуре l, поскольку скорость в этот интеграл не входит. Во втором интеграле заменяем скорость $\boldsymbol{u}$ элемента dl контура величиной ds/dt, где ds - вектор малого сдвига элемента контура за время dt. В итоге имеем интеграл $\oint_l [d\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{B}] \cdot d\boldsymbol{l} = -\int\limits_{\Delta S} \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{S}$, где $d\boldsymbol{S} = d\boldsymbol{s} \times d\boldsymbol{l}$ - элемент дополнительной поверхности ΔS, описанной контуром l в результате его движения и деформации за время dt. При этом поле $\boldsymbol{B}$ можно считать постоянным. В итоге получаем в правой части (1) два слагаемых, каждое из которых содержит скорость изменения магнитного потока, одно за счет изменения магнитного поля, второе - за счет движения контура:

$$\mathscr{E}'_{\text{ind}} = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt}\bigg|_{u=0} - \frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt}\bigg|_{B=\text{ const}} = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt} \tag{2}$$

Таким образом, ЭДС индукции в движущемся контуре определяется полной скоростью изменения магнитного потока через контур. Формула (10.2) остается в силе при любой причине изменения магнитного потока через контур.

Силы взаимодействия между контурами с квазистационарными токами можно вычислять по формуле (9.65), дифференцируя магнитную энергию по обобщенным координатам.

Работа сторонних сил над заряженными частицами в контуре в единицу времени выражается формулой (9.21): $\mathcal{Q} = \mathscr{E}_{\text{ext}} J$. В случае постоянного тока эта работа превращается в тепло, величина $\mathcal{Q}$ представляет собой тепловыделение в контуре. В случае переменного периодического тока часть этой величины будет описывать колебания энергии от частиц к стороннему источнику и обратно. Чтобы получить среднее за период тепловыделение, нужно усреднить переменную величину по периоду:

$$\mathcal{Q} = \overline{\mathscr{E}_{\text{ext}}\,(t) J(t)} \tag{10.7}$$

Во всех таких квадратичных выражениях следует использовать действительные функции $\mathscr{E}_{\text{ext}}\,(t), J(t)$. В случае гармонической комплексной зависимости $J(t) = J_0 e^{-i\omega t}$ будем иметь (см. аналогичные формулы в разделе 2.3)

$$\mathcal{Q} = \frac{1}{2}\,\text{Re}\,(\mathscr{E}_{ext} J*) = \frac{1}{2}|J|^2\,\text{Re}\,Z(\omega) \tag{10.8}$$

Рекомендуемая литература: [Смайт (1954); Тамм (1976); Френкель (1935); Власов (1955); Ландау и Лифшиц, Электродинамика сплошных сред; Шимони (1964); Нейман и Демирчян (1981а); Нейман и Демирчян (1981б); Бриллюэн и Пароди (1963); Батыгин и Топтыгин (2002)]

Задачи

10.1. Круглая проволочная петля радиуса a, находящаяся в постоянном магнитном поле H_0, вращается с угловой скоростью ω вокруг своего диаметра, перпендикулярного H_0. Найти силу тока в петле $J(t)$, тормозящий момент $N(t)$ и среднюю мощность $\bar{P}$, которая требуется для поддержания вращения.

10.2. Плоский контур с электрическими параметрами R, L, C и площадью S вращается с

угловой скоростью ω в постоянном магнитном поле H_0 вокруг оси, лежащей в плоскости контура и перпендикулярной H_0. Определить средний тормозящий момент $\bar{N}$, приложенный к контуру.

10.3. В одном из двух индуктивно связанных контуров течет ток $J(t) = J_0 e^{-i\omega t}$. Индуктивности и сопротивления контуров заданы. Выразить среднюю обобщенную силу взаимодействия контуров через производную от коэффициента взаимной индукции по обобщенной координате q_i.

10.4. В один из двух одинаковых контуров, имеющих сопротивления R и индуктивности L, включена ЭДС $\mathscr{E}(t) = \mathscr{E}_0 e^{-i\omega t}$. Коэффициент взаимной индукции контуров L_{12}. Определить среднюю по периоду силу $\bar{F}$ взаимодействия контуров. Результат выразить через производную от коэффициента взаимной индукции по соответствующей координате.

10.5. Определить собственные частоты ω_1, ω_2 электрических колебаний в двух контурах (рис. 10.1), связь между которыми осуществляется через емкость C $\left(Z = \frac{i}{\omega C}\right)$.

Указание. Составить систему алгебраических уравнений для определения токов и приравнять нулю определитель системы.

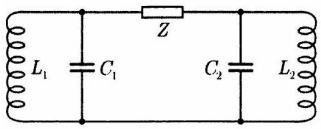


Рис. 10.1

10.6. Решить предыдущую задачу для случая, когда связь между контурами осуществляется через индуктивность (см. рис. 10.1, $Z = -i\omega L/c^2$).

10.7. Найти собственные частоты колебаний $\omega_{1,2}$ в двух индуктивно связанных контурах с емкостями C_1, C_2, индуктивостями L_1, L_2 и коэффициентом взаимной индукции L_{12}.

10.8. Два контура связаны друг с другом через активное сопротивление (см. рис. 10.1, $Z = R$). Найти собственные частоты колебаний, считая связь слабой (R велико).

10.9. В контур с индуктивностью L_1, емкостью C_1 и сопротивлением R_1 включена сторонняя ЭДС $\mathscr{E}(t) = \mathscr{E}_0 e^{-i\omega t}$. С этим контуром индуктивно связан второй контур, параметры которого L_2, C_2, R_2, коэффициент взаимной индукции L_{12}. Определить токи J_1 и J_2 в обоих контурах. Рассмотреть, в частности, случай, когда второй контур содержит только индуктивность ($R_2 = 0, C_2 = \infty$); определить частоту ω, при которой ток J_1 максимален.

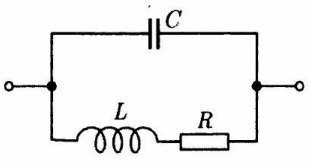


Рис. 10.2

10.10. Найти комплексное сопротивление Z участка цепи (двухполюсника), изображенного на рис. 10.2.

10.11. Конденсатор заполнен веществом с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega(\omega + i\gamma)}$ (ионизованный газ, см. задачу 11.17). Емкость незаполненного конденсатора C_0. Доказать, что комплексное сопротивление участка цепи, содержащего такой конденсатор, равно сопротивлению двухполюсника, изображенного на рис. 10.2, если параметры его подобраны соответствующим образом. Определить R, L, C.

10.12. Определить средний запас энергии $\bar{W}$ и тепловые потери Q за единицу времени в конденсаторе, описанном в предыдущей задаче. Выразить эти величины через

напряжение на обкладках конденсатора $U = U_0 e^{-i\omega t}$.

10.13. Конденсатор заполнен веществом с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 1 + \omega_p^2/(\omega_0^2 - i\gamma\omega - \omega^2)$ (диэлектрик с потерями, см. задачу 11.13). Емкость конденсатора при отсутствии диэлектрика C_0. Какими параметрами C, C_1, L, R должен обладать двухполюсник, изображенный на рис. 10.3,

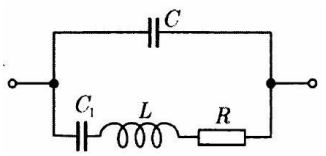


Рис. 10.3

чтобы его сопротивление переменному току было таким же, как сопротивление конденсатора?

10.14. Определить средний запас энергии $\bar{W}$ и средние тепловые потери Q за единицу времени в конденсаторе, рассмотренном в задаче 10.13. Напряжение на обкладках $U_0 e^{-i\omega t}$.

10.15. Колебательный контур состоит из емкости C и индуктивности L. В некоторый момент времени к обкладкам конденсатора присоединяется батарея с постоянной ЭДС $\mathscr{E}$ и внутренним сопротивлением R. Найти зависимость тока, текущего через индуктивность, от времени. Исследовать зависимость этого тока от величин R, L, C.

10.16. К цепочке, состоящей из последовательно соединенных сопротивления R и емкости C, прикладывается прямоугольный импульс напряжения: $U_1(t) = U_0$ при $0 \leqslant t \leqslant T$, и $U_1(t) = 0$ при $t < 0, t > T$. Найти напряжение $U_2(t)$ на сопротивлении R.

10.17. К цепочке, состоящей из последовательно соединенных сопротивления R и индуктивности L, прикладывается прямоугольный импульс напряжения: $U_1(t) = U_0$ при $0 \leqslant t \leqslant T$, и $U_1(t) = 0$ при $t < 0, t > T$. Найти напряжение $U_2(t)$ на индуктивности L.

10.18. Цепь состоит из плоского конденсатора с емкостью C и сопротивления R (рис. 10.4). Между пластинами конденсатора (расстояние h) требуется создать поле, которое линейно возрастает от 0 до E_0 за время T, а затем за такое же время линейно уменьшается до нуля. Определить форму импульса, который нужно при этом подать на вход цепи.

10.19. В цепь, состоящую из последовательно соеди-

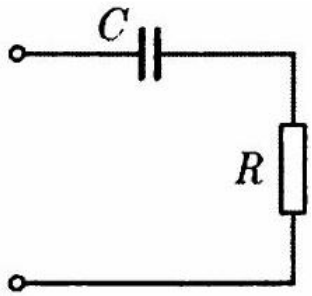


Рис. 10.4

ненных сопротивления R и индуктивности L, включается в момент времени $t = 0$ ЭДС $\mathscr{E}(t) = \mathscr{E}_0 \cos(\omega t + \varphi_0)$. Определить силу тока в цепи $J(t)$. При каком значении фазы φ_0 переходные явления в цепи не возникнут?

10.20*. Электрическая цепь (искусственная длинная линия) состоит из N одинаковых звеньев ($N \gg 1$) и разомкнута на концах (рис. 10.5). Найти частоты собственных колебаний этой системы.

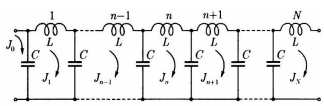


Рис. 10.5

10.21. Считая полное число собственных частот в искусственной длинной линии (см. задачу 10.20⋆) большим, найти число Δr колебаний, приходящихся на интервал частот $\Delta\omega$.

10.22*. Искусственная длинная линия, состоящая из $2N$ чередующихся звеньев с параметрами L_1, C и L_2, C, разомкнута на концах (рис. 10.6). Исследовать спектр собственных колебаний такой системы.

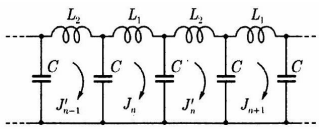


Рис. 10.6

10.23*. Искусственная длинная линия (рис. 10.7) состоит из N одинаковых звеньев, содержащих импедансы

$$Z_1 = -i\left(\frac{\omega}{c^2}L_1 - \frac{1}{\omega C_1}\right), \quad Z_2 = -i\left(\frac{\omega}{c^2}L_2 - \frac{1}{\omega C_2}\right)$$

К линии приложено напряжение U_1, конец линии разомкнут. Найти напряжение U_2 между точками a, b.

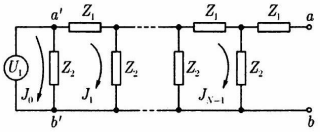


Рис. 10.7

Указание. Искать решение разностного уравнения для тока J_n в n-м звене цепи в форме $J_n = \text{const} \cdot q^n$.

10.24. Основываясь на результатах предыдущей задачи и считая $N \gg 1$, исследовать зависимость коэффициента передачи $K = U_2/U_1$ от частоты. Найти интервал частот, для которых K заметно отличен от нуля.

10.25*. Из рассмотрения искусственной длинной линии с сосредоточенными параметрами (задача 10.20⋆) получить путем предельного перехода дифференциальное уравнение для тока в длинной линии с равномерно распределенными параметрами.

10.26. Идеальная ($R = 0$) длинная линия с распределенными параметрами длиной l разомкнута на концах. Определить спектр собственных колебаний такой системы, сравнить его со спектром цепочки с сосредоточенными параметрами (см. задачу 10.20⋆).

10.27*. ЭДС, включенная в замкнутый контур, вызывает в нем ток $J(t) = J_0 e^{-i\omega t}$. Найти общее выражение для комплексного сопротивления контура, не пренебрегая запаздыванием внутри системы.

10.28. Для контура, имеющего форму окружности радиуса a, найти поправку к индуктивности и сопротивление $R_r(\omega)$ в первом неисчезающем приближении (см. предыдущую задачу). Показать, что $R_r(\omega)$ представляет коэффициент пропорциональности между средней величиной энергии, излучаемой в единицу времени, и среднеквадратичным значением силы тока в контуре.

11.4.2 10.2. Eddy Currents and Skin Effect

В этом разделе будут рассмотрены квазистационарные явления в массивных проводниках, которые находятся во внешнем переменном электро-

магнитном поле, удовлетворяющем условиям квазистационарности (10.1). В этих условиях вне проводника (в вакууме или в диэлектрике) магнитное поле удовлетворяет уравнениям магнитостатики

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0, \quad \nabla \times \boldsymbol{H} = 0 \tag{10.9}$$

и закону электромагнитной индукции (7.8) в дифференциальной форме:

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, . \quad \text{где} \quad \boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H} \tag{10.10}$$

Внутри проводника сохраняет силу уравнение (10.10), а вместо второго уравнения (10.9) имеем уравнение (7.9) без тока смещения:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0, \quad \nabla \times \boldsymbol{H} = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j} \tag{10.11}$$

В хороших проводниках ток создается в основном электронами проводимости, а вклад связанных зарядов весьма мал, поэтому в (10.11) можно использовать закон Ома (7.25) и записать

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \frac{4\pi}{c}\kappa \boldsymbol{E} \tag{10.12}$$

где κ - электропроводность проводника. Этот ток называется вихревым (или током Фуко), поскольку он создается вихревым электрическим полем (10.10). Пренебрежение током смещения ($\partial \boldsymbol{E}/c\partial t$) означает выполнение неравенства

$$4\pi\kappa \gg \omega \tag{10.13}$$

где ω - характерная частота изменения поля. Электрическое поле внутри проводника можно найти с помощью уравнения (10.12).

В однородном проводнике ($\kappa = \text{const}$, $\mu = \text{const}$), исключая из приведенных уравнений поочередно $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$, получим одинаковые уравнения II порядка по координатам и I порядка по времени для векторов поля:

$$\Delta \boldsymbol{H} = \frac{4\pi\mu\kappa}{c^2}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}, \quad \Delta \boldsymbol{E} = \frac{4\pi\mu\kappa}{c^2}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{10.14}$$

Эти уравнения кардинально отличаются от волновых уравнений, которыми в главе 5 описывалось распространение электромагнитных волн в вакууме. В проводящей среде поле распространяется по законам диффузии или теплопроводности

$$\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} = \nu_m \Delta \boldsymbol{H} \tag{10.15}$$

где $\nu_m = c^2/4\pi\mu\kappa$ - коэффициент диффузии магнитного поля.

На границах раздела двух проводников или проводника и диэлектрика векторы поля должны удовлетворять условиям

$$\boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{B}_1 - \boldsymbol{B}_2) = 0, \quad \boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{H}_1 - \boldsymbol{H}_2) = 0, \quad \boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{E}_1 - \boldsymbol{E}_2) = 0$$

Пример 10.5. На плоской границе проводника поддерживается магнитное поле $\boldsymbol{H}(t) = \boldsymbol{H}_0 e^{-i\omega t}, \omega = \text{const}$, касательное к границе. Вычислить магнитное и электрическое поля внутри проводника, оценить их относительную величину и глубину их проникновения в проводник.

Решение. Направив ось Oz в глубь проводника, ищем решение первого уравнения (10.14) в виде $\boldsymbol{H}(z,t) = \boldsymbol{H}(z)e^{-i\omega t}$ и с помощью граничных условий (10.16) находим $\boldsymbol{H}(z) = \boldsymbol{H}_0 e^{-(1-i)z/\delta}$, где глубина проникновения (толщина скин-слоя)

$$\delta = \frac{c}{\sqrt{2\pi\mu\kappa\omega}} \tag{10.17}$$

Электрическое поле внутри проводника вычисляем по формуле (10.12) и находим

$$\boldsymbol{E} = -(1-i)\sqrt{\frac{\mu\omega}{8\pi\kappa}}\boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{H}$$

В силу неравенства (10.13) имеем $|E| \ll |H|$.

Пример 10.6. Магнитное поле задано в начальный момент времени $t = 0$ в ограниченной области внутри проводника как функция координат: $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}, 0) = \boldsymbol{H}_0(\boldsymbol{r})$. Считая проводник однородным и безграничным, построить функию Грина уравнения (10.15) и записать решение задачи для $t > 0$. Исходя из явного вида функиии Грина, интерпретировать глубину проникновения (10.17) как расстояние, на которое успевает распространиться поле за время порядка половины периода его изменения.

Решение. Сначала перепишем уравнение (10.15) в такой форме, чтобы оно включало в себя начальное условие:

$$\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} - \nu_m \Delta \boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_0(\boldsymbol{r})\delta(t), \quad \boldsymbol{H} = 0 \quad \text{при} \quad t < 0 \tag{1}$$

Чтобы убедиться в том, что из уравнения (1) следует начальное условие, проинтегрируем обе части (1) по малому временному интервалу $(-\tau, +\tau)$. При $\tau \to 0$ будем иметь $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}, 0) = \boldsymbol{H}_0(\boldsymbol{r})$, так как $\tau\Delta\boldsymbol{H} \to 0$. Теперь
уравнение (1) стало неоднородным и его решение можно записать обычным образом (см. раздел 5.1)
(2) $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}, t) = \int G(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}', t - t')\, \boldsymbol{H}_0(\boldsymbol{r}')\, \delta(t')\, d^3r' dt' = \int G(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}', t)\, \boldsymbol{H}_0(\boldsymbol{r}')\, d^3r'$ через функцию Грина, удовлетворяющую уравнению

$$\frac{\partial G}{\partial t} - \nu_m \Delta G = \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')\, \delta(t - t'), \quad G = 0 \quad \text{при} \quad t - t' < 0 \tag{3}$$

Уравнение (3) легко решить путем разложения функции Грина в интеграл Фурье по пространственной переменной $\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'$. Ее фурье-образ G_k удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial G_k}{\partial t} + \nu_m k^2 G_k = \delta(t - t') \tag{4}$$

которое имеет решение $G_k(t - t') = \Theta(t - t')\, e^{-\nu_m (t-t')k^2}$. Обратное преобразование Фурье позволяет выразить функцию Грина через координаты и время:

$$\begin{aligned} G(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}', t - t') &= \int G_k(t - t')\, e^{ik\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} = \\ &= \frac{\Theta(t - t')}{[4\pi\nu_m(t - t')]^{3/2}} \exp\left\{-\frac{(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')^2}{4\nu_m(t - t')}\right\} \end{aligned} \tag{5}$$

Здесь $\Theta(t - t')$ - ступенчатая функция (1.212).

Из явного вида показателя экспоненты в функции Грина (5) следует, что в квазистационарном приближении магнитное поле в проводнике распространяется на расстояние L за время $\Delta t \approx l^2/4\nu_m$. По такому же закону распространяется тепло или

диффундируют частицы в неподвижной среде. Полагая в этих формулах $\Delta t \approx \tau/2 = \pi c/\omega$, находим. расстояние $L \approx c/\sqrt{\mu\kappa\omega}$, что по порядку величины совпадает с толщиной скинслоя (10.17).

Вследствие возникновения вихревых токов проводник, помещенный в магнитное поле, приобретает магнитный момент, даже если у него $\mu = 1$. Для характеристики этого магнитного момента удобно ввести тензор магнитной поляризуемости тела β_{ik} по формуле

$$m_i = \beta_{ik} H_{0k} \tag{10.18}$$

где $\boldsymbol{m}$ - магнитный момент тела, $\boldsymbol{H}_0$ - внешнее гармоническое магнитное поле, однородное на расстояниях порядка размеров тела. Тензор β_{ik} симметричен ($\beta_{ik} = \beta_{ki}$), а его компоненты в общем случае комплексны и зависят от частоты.

Среднее (по времени) тепловыделение внутри проводника может быть подсчитано путем интегрирования джоулева тепловыделения по объему тела

$$Q = \int (\overline{\boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{E}}) dV = \int \kappa \overline{E^2} dV \tag{10.19}$$

или путем вычисления потока электромагнитной энергии внутрь тела:

$$Q = -\frac{c}{4\pi} \oint (\overline{\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}}) \cdot d\boldsymbol{S} \tag{10.20}$$

В обоих случаях следует произвести усреднение по времени (обозначено чертой), чтобы исключить ту часть энергии, которая периодически переходит из внешнего пространства внутрь тела и обратно.

Рекомендуемая литература: [Ландау и Лифшиц, Электродинамика сплошных сред; Смайт (1954); Тамм (1976); Френкель (1935); Власов (1955); Нейман и Демирчян (1981а); Нейман и Демирчян (1981б)]

Задачи

10.29. На плоской границе двуслойного проводника поддерживается магнитное поле $\boldsymbol{H}(t) = \boldsymbol{H}_0 e^{-i\omega t}, \omega = \text{const}$, касательное к границе $z = 0$. При $0 \leqslant z < a$ проводник имеет электропроводность κ_1 и магнитную проницаемость μ_1, а при $a < z < \infty$ другие их значения κ_2 и μ_2. Вычислить магнитное поле при $z > 0$, исследовать частные случаи.

10.30. Широкая плита с проводимостью κ и магнитной проницаемостью μ, ограниченная плоскостями $x = \pm h$, обмотана проводом, по которому протекает ток $J_0 e^{-i\omega t}$. Провод тонкий, число витков на единицу длины n, витки намотаны параллельно друг другу. Пренебрегая краевым эффектом, определить вещественную амплитуду магнитного поля внутри плиты. Исследовать предельные случаи слабого ($\delta \gg h$) и сильного ($\delta \ll h$) скин-эффекта.

10.31*. Металлический цилиндр бесконечной длины с проводимостью κ и магнитной проницаемостью μ расположен так, что его ось совпадает с осью бесконечного соленоида кругового сечения, по которому течет
переменный ток $J = J_0 e^{-i\omega t}$. Найти напряженность магнитного и электрического поля во всем пространстве, а также распределение плотности тока j в цилиндре; радиус цилиндра a, радиус соленоида $b > a$, число витков на единицу длины n.

10.32. Проводящий цилиндр находится в однородном переменном магнитном поле $H = H_0 e^{-i\omega t}$, параллельном его оси. Используя результаты предыдущей задачи, исследовать распределение тока j внутри цилиндра в предельных случаях малых и больших частот.

10.33. Подсчитать количество тепла Q, выделяющегося за единицу времени на единице длины цилиндра, рассмотренного в задаче 10.31*. Исследовать предельные случаи малых

и больших частот. Результат записать через поле H_0 внутри соленоида.

10.34. Найти магнитную поляризуемость β (на единицу длины) цилиндра, находящегося в переменном магнитном поле, параллельном его оси. Частота поля ω, радиус цилиндра a, проводимость κ, магнитная проницаемость $\mu = 1$. Рассмотреть предельные случаи больших и малых частот.

10.35*. Металлический цилиндр находится во внешнем однородном магнитном поле $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_0 e^{-i\omega t}$, перпендикулярном его оси. Радиус цилиндра a, проводимость κ, магнитная проницаемость $\mu = 1$. Найти результирующее поле и плотность тока j в цилиндре.

Указание. Выразить $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ через векторный потенциал $\boldsymbol{A}$ и проинтегрировать дифференциальное уравнение для $\boldsymbol{A}$.

10.36. Найти диссипацию энергии на единицу длины бесконечного проводящего кругового цилиндра, помещенного в поперечное относительно оси цилиндра магнитное поле, меняющееся с частотой ω.

10.37*. Бесконечный круговой цилиндр радиуса a с проводимостью κ находится в поперечном относительно его оси магнитном поле, поляризованном по кругу:

$$\boldsymbol{H}_0(t) = (\boldsymbol{H}_{01} + i\boldsymbol{H}_{02})\, e^{-i\omega t}$$

где $\boldsymbol{H}_{01}$ и $\boldsymbol{H}_{02}$ - взаимно перпендикулярные векторы с одинаковыми длинами: $H_{01} = H_{02} = H_0$. (Вектор $\boldsymbol{H}_0(t)$ описывает окружность постоянного радиуса H_0 в плоскости, перпендикулярной оси цилиндра.) Найти средний вращательный момент $\bar{N}$, приложенный к единице длины цилиндра ($\mu = 1$).

10.38. Бесконечный цилиндр, находящийся в постоянном и однородном поперечном магнитном поле $\boldsymbol{H}_0$, вращается вокруг своей оси с угловой
скоростью ω. Найти тормозящий момент $\bar{N}$, приложенный к единице длины цилиндра.

10.39*. Бесконечный металлический цилиндр радиуса a с проводимостью κ и магнитной проницаемостью μ находится в постоянном и однородном, продольном относительно его оси, магнитном поле H_0. В некоторый момент времени внешнее поле выключается и поддерживается затем равным нулю. Найти ход затухания со временем магнитного поля в цилиндре.

10.40. Металлический шар радиуса a с проводимостью κ и магнитной проницаемостью μ, помещен в однородное переменное магнитное поле $H_0(t) = H_0 e^{-i\omega t}$. Считая частоту малой, найти в первом неисчезающем приближении распределение вихревых токов в шаре и среднюю поглощаемую им мощность Q.

10.41. Металлический шар помещен в однородное магнитное поле, меняющееся с частотой ω. Найти результирующее поле $\boldsymbol{H}$ и среднюю поглощаемую шаром мощность Q при больших частотах. Радиус шара a, магнитная проницаемость μ, проводимость κ.

Указание. При определении поля вне шара считать, что внутри шара поле равно нулю (т.е. пренебречь глубиной проникновения δ по сравнению с радиусом шара a). При определении поля внутри шара считать его поверхность плоской.

10.42*. Проводящий эллипсоид находится в однородном переменном магнитном поле. Определить магнитную поляризуемость эллипсоида при сильном скин-эффекте (т.е. считая, что глубина проникновения поля в проводник пренебрежимо мала). Рассмотреть предельные случаи тонкого круглого диска и длинного тонкого стержня:

10.43*. Шар радиуса с проводимостью κ находится в однородном магнитном поле $H(t) = H_0 e^{-i\omega t}$. Найти результирующее магнитное поле и распределение вихревых токов в шаре для общего случая произвольных частот. Убедиться, что в предельных случаях слабого и сильного скин-эффекта получаются результаты, найденные в задачах 10.40 и 10.41 (считать для простоты $\mu = 1$):

10.44. Найти среднюю мощность Q, поглощаемую проводящим шаром в однородном переменном магнитном поле при произвольных частотах.

10.45*. В момент времени $t = 0$ магнитное поле в окрестности проводящего шара, рассмотренного в задаче 10.43*, выключается. Вычислить ход затухания поля внутри и вне шара.
10.46. Найти активное сопротивление R тонкого цилиндрического проводника при скин-эффекте. Длина проводника l, радиус a, проводимость κ, магнитная проницаемость $\mu = 1$. Исследовать предельные случаи малых и больших частот.
10.47. На поверхность цилиндрического проводника, у которого радиус a, удельная проводимость κ_1, нанесен слой другого металла. Толщина слоя h, его проводимость κ_2, причем $h \ll a$. Найти активное сопротивление R такого проводника переменному току, считая толщину скин-слоя малой по сравнению с $a(\mu = 1)$.
10.48. Бесконечный полый цилиндр, у которого внутренний радиус a, толщина стенки $h(h \ll a)$, находится в однородном продольном магнитном поле $H_0(t) = H_0 e^{-i\omega t}$. Найти амплитуду H' магнитного поля в полости. Исследовать ее зависимость от ω.

Указание. В силу условия $h \ll a$ при определении поля в толще оболочки можно считать ее плоской.
10.49. Переменный ток $J(t) = J_0 e^{-i\omega t}$ течет по полому цилиндрическому проводнику, у которого средний радиус a, проводимость κ, магнитная проницаемость μ, толщина $h \ll a$. Найти распределение тока j по сечению и активное сопротивление R на единицу длины. Указать условие, при выполнении которого сопротивление полого проводника будет мало отличаться от сопротивления сплошного проводника такого же радиуса.

Указание. Пренебречь кривизной поверхности проводника.
10.50*. Внутри металлической трубы на расстоянии l от ее осевой линии течет прямолинейный ток J. Радиус трубы a, толщина стенки $h \ll a$, проводимость стенки $\kappa(\mu = 1)$. Как ток J, так и расстояние l зависят от времени по произвольному закону, но так, что во все моменты времени $l \ll a$. Считая выполненными условия квазистационарности, определить силу f на единицу длины, действующую на ток J со стороны вихревых токов, индуцируемых в цилиндрической оболочке, при слабом скин-эффекте $(h \ll \delta)$.
10.51*. Решить предыдущую задачу для случая сильного скин-эффекта $(h \gg \delta)$.

11.4.3 10.3. Magnetic Hydrodynamics

Движение проводника в магнитном поле $\boldsymbol{B}$ с нерелятивистской скоростью $u \ll c$ создает в нем добавочное электрическое поле $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{B}/c$ (см. формулы (4.70), в которых следует положить $\gamma = 1$). Поэтому закон Ома (7.25)
для движущегося проводника принимает форму

$$\boldsymbol{j} = \kappa \left(\boldsymbol{E} + \frac{1}{c} \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{B} \right) \tag{10.21}$$

Это выражение предполагает достаточно слабое магнитное поле, в противном случае электропроводность станет анизотропной (см. задачу 7.30), и отсутствие токов, вызванных неоднородностью проводника (градиентами температуры и концентрации). Плотность тока в первом порядке по u/c одинакова в системе проводника и в неподвижной (лабораторной) системе.

Пример 10.7. Получить уравнения, которое описывают эволюцию магнитного поля в немагнитном ((= 1) движущемся проводнике в квазистачионарном приближении.

Решение. Из уравнений (10.10) и (10.21) получаем

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \nabla \times [\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{B}] - \mathrm{c}\nabla \times \frac{\boldsymbol{j}}{\kappa}$$

Подставляя в это равенство ток из второго уравнения (10.11), в котором полагаем $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{B}(\mu = 1)$, находим систему уравнений

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0, \quad \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \nabla \times [\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{B}] + \nu_m \Delta \boldsymbol{B}, \quad \nu_m = \frac{c^2}{4\pi\kappa} = \text{ const.} \tag{10.22}$$

Из этих уравнений следует, что для определения поля в проводнике нужно знать скорость движения его элементов. Но эта скорость сама зависит от поля, так как на проводник с током действует сила Лоренца. Поэтому уравнение (10.22) должно рассматриваться совместно с уравнениями движения проводника. Если проводник представляет собой проводящую жидкость или ионизованный газ (плазму), то для описания движения среды' в рассматриваем квазистационарном приближении можно использовать уравнения гидродинамики (см. [Ландау и Лифшиц, Гидродинамика]). Уравнение движения жидкой или газообразной среды имеет вид (ниже всюду считаем магнитную проницаемость $\mu = 1$)

$$\tau \left(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u} \right) = -\nabla p + \frac{1}{4\pi}[\nabla \times \boldsymbol{B}] \times \boldsymbol{B} + \boldsymbol{f} + \eta \Delta \boldsymbol{u} + \frac{\eta}{3} \nabla (\nabla \cdot \boldsymbol{u}) \tag{10.23}$$

Здесь $[\nabla \times \boldsymbol{B}] \times \boldsymbol{B}/4\pi = \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{B}/c$ - сила Лоренца, приложенная к единице объема проводящей среды, f - объемная сила, не связанная с электромагнитным полем (например, гравитация: $f = f_g = \tau g$, где g - ускорение
силы тяжести). Последние два слагаемых в правой части описывают силы вязкости; η - коэффициент динамический вязкости (мы не рассматриваем здесь вторую вязкость). Этот кинетический коэффициент, как и электропроводность κ, вычисляется на основе физической кинетики и в гидродинамике должен рассматриваться как заданная величина.

Кроме подлежащей определению скорости среды $\boldsymbol{u}$, в уравнение (10.23) входят две скалярные величины: плотность τ и давление p, которые могут изменяться при движении среды. Поэтому к уравнениям (10.22), (10.23) следует добавить уравнение непрерывности

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} + \nabla(\tau \boldsymbol{u}) = 0 \tag{10.24}$$

и уравнение состояния среды

$$p = p(\tau, s) \tag{10.25}$$

где через s обозначена удельная (на единицу массы) энтропия. При наличии диссипативных процессов (вязкости, теплопроводности и джоулевой диссипации магнитного поля) происходит рост энтропии, который описывается уравнением:

$$\tau T \left(\frac{\partial s}{\partial t} + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)s \right) = \Pi'_{ik} \nabla_k u_i + \chi \Delta T + \frac{\nu_m}{4\pi} [\nabla \times \boldsymbol{B}]^2 \tag{10.26}$$

Здесь

$$\Pi'_{ik} = \eta \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}(\nabla \cdot \boldsymbol{u})\delta_{ik} \right) \tag{10.27}$$

- тензор вязких напряжений, χ - коэффициент теплопроводности (считается постоянным).

Приведенная выше система уравнений магнитной гидродинамики (10.22)-(10.27) в общем случае нелинейна и весьма сложна. Ее аналитические решения как правило

возможны только при некоторых упрощающих предположениях. Одним из таких предположений является пренебрежение диссипативными процессами (его возможность должна проверяться в каждом конкретном случае). Необходимыми условиями пренебрежения диссипацией в уравнениях 10.23 и 10.22 являются неравенства соответственно

$$R = \frac{ul}{\nu} \gg 1, \quad R_m = \frac{ul}{\nu_m} \gg 1 \tag{10.28}$$

где u - характерное значение скорости, l - характерный масштаб ее изменения, $\nu = \eta/\tau$ - кинематическая вязкость (величину ν_m называют по
аналогии магнитной вязкостью; масштаб изменения магнитного поля тоже обозначен через l). Неравенства 10.28 представляют собой условия малости диссипативных слагаемых. Безразмерные параметры R и R_m называются числами Рейнольдса (второе из них - магнитное число Рейнольдса).

В отсутствие диссипации система уравнений принимает вид

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \nabla \times [\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{B}], \quad \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{10.29}$$

$$\frac{\partial \tau}{\partial t} + \nabla(\tau \boldsymbol{u}) = 0 \tag{10.30}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u} = -\frac{1}{\tau}\nabla p + \frac{1}{4\pi\tau}[\nabla \times \boldsymbol{B}] \times \boldsymbol{B} + \frac{1}{\tau}\boldsymbol{f}$$

$$\frac{ds}{dt} \equiv \frac{\partial s}{\partial t} + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)s = 0, \quad p = p(\tau, s)$$

Уравнение (10.32) для энтропии описывает ее постоянство в каждом движущемся макроскопическом элементе вещества, а производная $d/dt = \partial/\partial t + +(\boldsymbol{u} \cdot \nabla)$ называется субстанциальной (материальной) производной. Если в начальный момент система была однородной, то (10.32) можно заменить условием постоянства энтропии в пространстве и во времени:

$$s = \text{ const.} \tag{10.33}$$

Электрическое поле в отсутствие диссипации можно выразить через магнитное поле и скорость среды. Устремляя в (10.21) $\kappa \to 0$ и считая плотность тока j конечной, получаем

$$\boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{B} \tag{10.34}$$

Если гидродинамическая скорость u мала по сравнению со скоростями распространения малых возмущений в среде, то эффекты сжимаемости играют малую роль. Считая среду несжимаемой, $\tau = \text{const}$, вместо уравнений (10.23), (10.24) будем иметь

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u} = -\frac{1}{\tau}\nabla p + \frac{1}{4\pi\tau}[\nabla \times \boldsymbol{B}] \times \boldsymbol{B} + \nu\Delta\boldsymbol{u}, \quad \nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0 \tag{10.35}$$

Здесь неэлектромагнитная сила опущена. Силовой член в правой части можно преобразовать с помощью формулы (1.89): $[\nabla \times \boldsymbol{B}] \times \boldsymbol{B} = -\nabla B^2/2 + +(\boldsymbol{B} \cdot \nabla)\boldsymbol{B}$. В результате часть магнитной силы преобразуется в градиент
«магнитного давления» $p_m = B^2/8\pi$,

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{u} = -\frac{1}{\tau}\nabla\left(\dot{p} + \frac{B^2}{8\pi}\right) + \frac{1}{4\pi\tau}(\boldsymbol{B} \cdot \nabla)\boldsymbol{B} + \nu\Delta\boldsymbol{u} \tag{10.36}$$

другая ее часть образует «магнитные натяжения» $(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}/4\pi$, отличные от нуля лишь в том случае, если магнитные силовые линии искривлены.

Сравнение (10.35), (10.36) с (10.22) поясняет смысл термина «магнитная вязкость»: величина ν_m играет для магнитного поля ту же роль, что кинематическая вязкость ν для гидродинамической скорости. Диссипативные слагаемые в том и другом случае выражаются через вторые производные по координатам.

Пример 10.8. Доказать, что в пренебрежении джоулевой диссипачией магнитное поле обладает свойством «вмороженности» в проводячую среду: силовая линия, проходящая в начальный момент времени через две макроскопические частицы среды, в последуюшие моменты перемешается вместе с этими частицами без проскальзывания.

Решение. Две частицы среды, находившиеся в близких точках $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{r}+ +\delta\boldsymbol{l}$, имеют скорости $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{u}+(\delta\boldsymbol{l}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}$. Поэтому за время dt расстояние между частицами изменится на $(\delta l\cdot\nabla)\boldsymbol{u}dt$, и это изменение происходит по закону

$$\frac{d}{dt}\delta\boldsymbol{l}=(\delta\boldsymbol{l}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} \tag{1}$$

В левую часть входит материальная производная, так как она описывает изменение расстояния между движущимися частицами. С другой стороны, вычислим материальную производную от отношения $\boldsymbol{B}/\tau$. Имеем

$$\frac{d}{dt}\frac{\boldsymbol{B}}{\tau}=\frac{1}{\tau}\frac{d\boldsymbol{B}}{dt}-\frac{\boldsymbol{B}}{\tau^2}\frac{d\tau}{dt} \tag{2}$$

Материальную производную от поля $\boldsymbol{B}$ находим с помощью уравнений (10.29):

$$\frac{d\boldsymbol{B}}{dt}=(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}-\boldsymbol{B}(\nabla\cdot\boldsymbol{u}) \tag{3}$$

Материальную производную от плотности вычисляем из уравнения непрерывности (10.30):

$$\frac{d\tau}{dt}=-\tau(\nabla\cdot\boldsymbol{u}) \tag{4}$$

Объединив равенства (2)-(4), находим

$$\frac{d}{dt}\frac{\boldsymbol{B}}{\tau}=\left(\frac{\boldsymbol{B}}{\tau}\cdot\nabla\right)\boldsymbol{u} \tag{5}$$

Уравнения (1) и (5) для величин δl и $\boldsymbol{B}/\tau$ одинаковы. Следовательно, если в начальный момент частицы лежали на одной силовой линии, т. е. эти векторы были параллельны, то их параллельность сохранится и во все последующие моменты, частицы останутся на той же силовой линии. Величина $\boldsymbol{B}/\tau$ будет меняться пропорционально расстоянию между частицами.

Один из важных объектов применения магнитной гидродинамики квазистационарные электромагнитные явления в движущейся электропроводящей плазме, полностью или частично ионизованной. При этом все компоненты плазмы должны двигаться одинаковым образом, образуя единую среду. Но существует множество явлений, в которых электронная и ионная компоненты ведут себя различным образом. Один из подходов к таким задачам - рассмотрение электронов и ионов как двух разных взаимодействующих друг с другом сред («двухжидкостная магнитная гидродинамика»). Одна из таких моделей рассматривается в следующем примере (и в разделе 13.3 в связи с теорией нелинейных волн в плазме).

Пример 10.9. Рассмотреть двухжидкостную модель холодной замагниченной полностью ионизованной плазмы, в которой плотность энергии магнитного поля намного

превышает плотности тепловых энергий электронов и ионов: $8\pi n_{e,i}T_{e,i}/B^2 \ll m_e/m_i$. Электроны и ионы рассматривать как две сплошные среды, макроскопические скорости которых $\boldsymbol{v}_e, \boldsymbol{v}_i$ различны, но плазму можно считать квазинейтральной из-за медленного изменения всех макроскопических величин в пространстве и во времени. Записать для этого случая систему уравнений для макроскопических величин , массовой скорости $\boldsymbol{u} = (m_i\boldsymbol{v}_i + m_e\boldsymbol{v}_e)\,/\,(m_i + m_e)$ и кончентрачии частич одного сорта $n = n_i = n_e$.

Решение. В холодной плазме пренебрегаем электронным и ионным давлениями и всеми диссипативными эффектами, за исключением трения между электронами и ионами. Запишем уравнения для макроскопических величин (подробности см. у Брагинского, 1963):

$$m_i\left(\partial_t + \boldsymbol{v}_i\cdot\nabla\right)\boldsymbol{v}_i = eE + (e/c)\boldsymbol{v}_i\times\boldsymbol{B} + (m_e/\tau_e)\left(0,51\boldsymbol{v}_\parallel + \boldsymbol{v}_\perp\right) \tag{1}$$

$$m_e\left(\partial_t + \boldsymbol{v}_e\cdot\nabla\right)\boldsymbol{v}_e = -e\boldsymbol{E} - (e/c)\boldsymbol{v}_e\times\boldsymbol{B} - (m_e/\tau_e)\left(0,51\boldsymbol{v}_\parallel + \boldsymbol{v}_\perp\right) \tag{2}$$

$$\partial_t n_{e,i} + \nabla\cdot(n_{e,i}\boldsymbol{v}_{e,i}) = 0 \tag{3}$$

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{B} = (4\pi e/c)\left(n_i\boldsymbol{v}_i - n_e\boldsymbol{v}_e\right) \tag{4}$$

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{E} = -c^{-1}\partial_t\boldsymbol{B}, \quad \operatorname{div}\boldsymbol{B} = 0 \tag{5}$$

Здесь $e > 0$ - заряд иона, $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_i - \boldsymbol{v}_e$ - относительная скорость электронов и ионов,

$$\tau_e = 3m_e^{1/2}T_e^{3/2}/4(2\pi)^{1/2}\lambda e^4 n_i \tag{6}$$

- время потери электронами направленного импульса (см. задачи 4.704.72), λ - кулоновский логарифм.

Преобразуем систему (1)-(5), введя массовую скорость $\boldsymbol{u} \approx \boldsymbol{v}_i + + (m_e/m_i)\,\boldsymbol{v}_e$ (учтена малость $m_e/m_i \ll 1$). Складывая почленно уравнения $(1), (2)$ и пренебрегая членами порядка m_e/m_i, получим

$$\partial_t\boldsymbol{u} + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} = \frac{1}{4\pi n m_i}\operatorname{rot}\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{B} \tag{7}$$

где было использовано также уравнение (4). Далее поделим (1) на m_i, (2) на m_e и сложим указанные уравнения, использовав приближенные равенства $\boldsymbol{v}_i/m_i + \boldsymbol{v}_e/m_e \approx (\boldsymbol{u} - \boldsymbol{j}/en)/m_e, \boldsymbol{v}_e \approx \boldsymbol{u} - \boldsymbol{j}/en$, где $\boldsymbol{j} = en\boldsymbol{v}$ - плотность тока. В результате получим обобщенный закон Ома

$$\begin{gathered}\boldsymbol{E} = -(\boldsymbol{u}/c)\times\boldsymbol{B} + (enc)^{-1}\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{B} + \left(m_e/e^2\tau_e n\right)\left(0,51\boldsymbol{j}_\parallel + \boldsymbol{j}_\perp\right) + \\ + \left(m_e/e^2\left\{\partial_t(\boldsymbol{j}/n) + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)(\boldsymbol{j}/n) + n^{-1}(\boldsymbol{j}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} - (en)^{-1}(\boldsymbol{j}\cdot\nabla)(\boldsymbol{j}/n)\right\}\right.\end{gathered} \tag{8}$$

где $e^2 n\tau_e/m_e = \kappa$ - электропроводность плазмы вдоль магнитного поля. С помощью (4), (5) и (8) получаем уравнение для индукции магнитного поля

$$\begin{gathered}\partial_t\boldsymbol{B} = \operatorname{rot}(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B}) - \operatorname{rot}\nu_m\left(0,51\operatorname{rot}_\parallel\boldsymbol{B} + \operatorname{rot}_\perp\boldsymbol{B}\right) - \\ - \operatorname{rot}(4\pi en)^{-1}(\operatorname{rot}\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{B}) - \left(m_e c/e^2\right)\left\{\partial_t(\boldsymbol{j}/n) + \right. \\ \left. + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)(\boldsymbol{j}/n) + n^{-1}(\boldsymbol{j}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} - (en)^{-1}(\boldsymbol{j}\cdot\nabla)(\boldsymbol{j}/n)\right\}\end{gathered} \tag{9}$$

где $\boldsymbol{j} = (c/4\pi)\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{B}, \nu_m = c^2/4\pi\kappa$ - магнитная вязкость. Равенства (7), (9) и уравнение неразрывности

$$\partial_t n + \nabla \cdot (n\boldsymbol{u}) = 0 \tag{10}$$

образуют полную систему уравнений, описывающих движение плазмы и эволюцию магнитного поля в рассматриваемом приближении.

Далее рассмотрим некоторые наиболее важные случаи макроскопических движений проводящей среды с магнитным полем.

Пример 10.10. Получить решение бездиссипативной системы уравнений (10.29)-(10.32) в виде простых волн Римана. Так называются одномерные возмущения среды, в которых все неизвестные функции $\boldsymbol{u}(\varphi), \boldsymbol{B}(\varphi), \tau(\varphi)\ldots$ зависят от одной координатыи и времени через посредство некоторой единой для всех макроскопических параметров функции $\varphi(x,t)$. Простые волны удовлетворяют системе обыкновенных нелинейных дифференчиальных уравнений с одной независимой переменной. Эту систему можно проинтегрировать в аналитической форме.

Решение. Из уравнений (10.29) и предположения о зависимости решения от одной координаты x следует, что

$$B_x = \text{ const.} \tag{1}$$

Преобразуем уравнения, обозначая штрихом производную по φ. Например, в случае уравнения неразрывности имеем

$$\frac{\partial\tau}{\partial t} + u_x\frac{\partial\tau}{\partial x} + \tau\frac{\partial u_x}{\partial x} = \tau'\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + u_x\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) + u_x'\tau\frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0$$

Поверхности постоянного значения физических величин - это плоскости $x = \text{const}$, на которых

$$\varphi(x,t) = \text{ const} \tag{2}$$

и которые перемещаются в направлении оси Ox. Скорость их перемещения $dx/dt = (\partial x/\partial t)_\varphi = v_{ph}$ естественно назвать фазовой скоростью по аналогии со случаем плоских монохроматических волн. Дифференцируя (2), находим

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = -v_{ph}\frac{\partial\varphi}{\partial x} \tag{3}$$

и приводим уравнение неразрывности к виду

$$\tau' v - u_x'\tau = 0 \tag{4}$$

где $v = v_{ph} - u_x$ - скорость распространения простой волны в сопутствующей системе отсчета.

Остальные уравнения преобразуются аналогичным образом. В проекциях на координатные оси они имеют вид:

$$u'_x v - p'/\tau - \left(B_y B'_y + B_z B'_z\right)/4\pi\tau = 0 \tag{5}$$
$$u'_y v + B_x B'_y/4\pi\tau = 0 \tag{6}$$
$$u'_z v + B_x B'_z/4\pi\tau = 0 \tag{7}$$
$$B'_y v - u'_x B_y + u'_y B_x = 0 \tag{8}$$
$$B'_z v - u'_x B_z + u'_z B_x = 0 \tag{9}$$
$$s' v = 0 \tag{10}$$
$$p = p(s, \tau) \tag{11}$$

Условие (1) и нелинейные уравнения (4)-(11) составляют полную систему для рассматриваемого случая.
а) Энтропийные простые волны получаются из этой системы в случае, когда энтропия среды испытывает возмущения: $s' \neq 0$. Из (10) получаем

$$v \equiv v_e = 0 \tag{12}$$

- энтропийная волна неподвижна в системе покоя среды и переносится вместе с ней. Если $B_x \neq 0$, то из уравнений последовательно вытекает $u'_x = B'_y = B'_z = u'_y = u'_z = p' = 0$, т. е. все перечисленные величины постоянны. Плотность среды испытывает возмущения, связанные с возмущениями энтропии уравнением (11) и условием $p = \text{const}$. Таким образом, в пренебрежении диссипативными процессами профиль энтропийной волны не искажается, а сама волна представляет собой нагретую (или охлажденную) область, переносимую движением среды. Фактически теплопроводность (диффузия нагретых частиц) приводит к медленной диссипации энтропийного возмущения.

При $B_x = 0$ из (4), (5) следует постоянство продольной скорости и полного давления:

$$u_x = \text{const}, \quad p + \frac{B^2}{8\pi} = \text{const} \tag{13}$$

Производные u'_y, u'_z могут иметь произвольные значения.
При $v \neq 0$ из (10) следует $s' = 0$ или $s = \text{const}$, т. е. простые волны с отличной от нуля фазовой скоростью представляют собой движения с постоянной энтропией. Это позволяет записать в уравнении (5) $p' = c_s^2 \tau'$,
где

$$c_s = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \tau}\right)_s} \tag{14}$$

- локальное значение скорости звука в среде без магнитного поля. Будучи функцией плотности, эта величина, вообще говоря, непостоянна.
  б) Альвеновские простые волны - это движения, при которых наряду с энтропией остается постоянной плотность среды:

$$\tau = \text{ const}. \tag{15}$$

Из уравнений (4), (5) следует

$$u_x = \text{const}, \quad B_y^2 + B_z^2 \equiv B_\perp^2 = \text{const} \tag{16}$$

а уравнения (6)-(9) разбиваются на две одинаковые пары:

$$u'_y v + \frac{B_x B'_y}{4\pi\tau} = 0, \quad u'_y B_x + B'_y v = 0 \tag{17}$$

и аналогичную систему для u'_z, B'_z. Из последней системы определяется скорость альвеновской волны относительно среды:

$$v \equiv v_{Ax} = \pm \frac{|B_x|}{\sqrt{4\pi\tau}} \tag{18}$$

Эта скорость постоянна в силу (1) и (15). Альвеновская волна исчезает при $B_x = 0$, так как при этом уравнения совместимы только с однородной средой: $\boldsymbol{u} = \text{const}$, $\boldsymbol{B} = \text{const}$. Система уравнений (17) и аналогичная система для u'_z, B'_z позволяют найти связь между скоростью $\boldsymbol{u}$ среды и магнитным полем в альвеновской простой волне:

$$\boldsymbol{u} = \mp \frac{\boldsymbol{B}}{\sqrt{4\pi\tau}} \tag{19}$$

Постоянная интегрирования выбрана так, чтобы было $\boldsymbol{u} = 0$ при $\boldsymbol{B} = 0$. Знак минус отвечает одинаковым знакам B_x и v_{Ax}; знак плюс - противоположным знакам.

Точным частным решением для альвеновской волны является плоская монохроматическая волна, поляризованная по кругу и бегущая вдоль однородного магнитного поля:

$$B_y = B_\perp \cos k\left[x - (v_{Ax} + u_x)\, t\right], \quad B_z = B_\perp \sin k\left[x - (v_{Ax} + u_x)\, t\right]. \tag{20}$$

Приближенное решение для волны малой амплитуды можно построить при распространении ее под произвольным углом к внешнему однородному полю B_0:

$$\boldsymbol{b}(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{b}_0 \cos\left(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega_A t\right) \tag{21}$$

где $\boldsymbol{k}$ - волновой вектор,

$$\omega_A = \frac{|\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}|}{\sqrt{4\pi\tau}} \tag{22}$$

- частота альвеновской волны, а ее амплитуда $\boldsymbol{b}_0$ перпендикулярна внешнему полю $\boldsymbol{B}_0$. Условие постоянства модуля магнитного поля (16) выполняется при этом с точностью до членов первого порядка по малому отношению b_0/B_0. Амплитуда $\boldsymbol{b}_0$ поперечна также относительно $\boldsymbol{k}$.

  в) Быстрые и медленные простые волны. Это - решения системы (4)-(11), у которых $s = \text{const}$, $\tau' \neq 0, v \neq v_e, v_{Ax}$. При малых амплитудах такие волны называются магнитозвуковыми. Для упрощения геометрии замечаем, что уравнения (7), (9) обращаются в тождества, если выбрать $u_z = B_z = 0$. Оставшаяся система четырех уравнений (4)-(6) и (8) имеет нетривиальное решение при значениях фазовой скорости

$$v^2 \equiv v^2_{f,s} = \frac{1}{2}\left\{c_s^2 + v_A^2 \pm \sqrt{\left(c_s^2 + v_A^2\right)^2 - 4c_s^2 v_{Ax}^2}\right\} \tag{23}$$

где использовано обозначение

$$\boldsymbol{v}_A = \frac{\boldsymbol{B}}{\sqrt{4\pi\tau}} \tag{24}$$

для псевдовектора альвеновской скорости.
Сравнение формул (23), (18) показывает, что при любых значениях магнитного поля и скорости звука выполняются следующие соотношения:

$$v_f^2 \geqslant v_{Ax}^2 \geqslant v_s^2 \geqslant 0, \cdot v_f^2 \geqslant c_s^2, \quad v_s^2 \leqslant c_s^2 \tag{25}$$

Последние два неравенства определяют названия рассматриваемых волн они являются быстрыми (fast) или медленными (slow) по сравнению с обычными звуковыми волнами без магнитного поля.

После подстановки v_f или v_s в систему уравнений она может быть проинтегрирована. Ввиду сложности этой процедуры в общем случае выполним ее для поперечного распространения, т.е. при $B_x = 0, B_y^2 = B^2$. В этом случае $v_f = \pm \left(c_s^2 + v_A^2\right)^{1/2}, v_s = 0$, т. е. может существовать только быстрая волна. Из уравнений (4)-(6) находим, выбрав в качестве независимой переменной плотность,

$$u_y = \text{ const }, \quad \frac{du_x}{d\tau} = \frac{v_f}{\tau}, \quad \frac{dB^2}{d\tau} = 8\pi v_A^2 \tag{26}$$

Интегрирование последнего уравнения с учетом определения альвеновской скорости (24) дает

$$B = B_0 \frac{\tau}{\tau_0} \tag{27}$$

где B_0 - значение поля при $\tau = \tau_0$ (например, в невозмущенной области). Равенство (27) выражает собой условие вмороженности поля в вещество. Используя его, а также уравнение состояния (11), находим зависимость $v_{.f}$ от τ и интегрируем второе равенство (26):

$$u_x(\tau) = \int\limits_{\tau_0}^{\tau} \frac{v_f(\tau)}{\tau} d\tau \tag{28}$$

где положено $u_x(\tau_0) = 0$. Далее записываем $(\partial x/\partial t)_\tau = v_f(\tau) + u_x(\tau)$ и получаем решение

$$x = \left[v_f(\tau) + u_x(\tau)\right] t + f(\tau) \tag{29}$$

которое определяет в неявном виде зависимость $\tau(x,t)$. Вид функции $f(\tau)$ определяется по начальному условию $\tau(x,0) = F(x)$.

Сильные МГД-разрывы. В задаче 10.69* рассмотрена физическая картина укручения переднего фронта поперечной магнитозвуковой волны и образования разрыва. Существование разрывов является естественным следствием уравнений магнитной гидродинамики в отсутствие диссипации. Разрывы могут возникать как результат эволюции первоначально гладкого возмущения либо в случае разрывных начальных и граничных условий
(например, первоначально покоившийся поршень внезапно начинает двигаться с конечной скоростью). Фактически все разрывы имеют конечную толщину, которая определяется диссипативными процессами. Но она часто оказывается весьма малой по сравнению с другими длинами. В таких случаях разрывы рассматриваются как бесконечно тонкие поверхности.

Локальные свойства стационарных разрывов

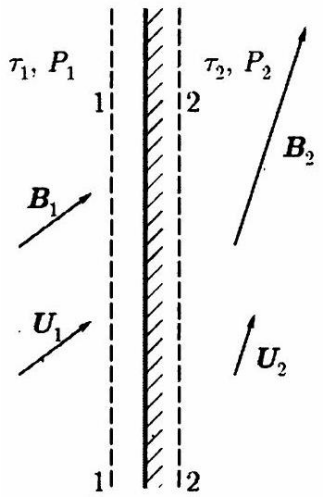


Рис. 10.8 можно исследовать на основе законов сохранения основных физических величин - массы, импульса и энергии, дополненных граничными условиями для векторов электромагнитного поля. Будем считать разрыв локально плоским и свяжем с разрывом систему координат (рис. 10.8), одна из осей которой направлена по нормали к разрыву. Построим две вспомогательные плоскости 11 и 22 по обе стороны разрыва вблизи него таким образом, чтобы на этих плоскостях можно было пренебречь диссипативными процессами (которые могут быть весьма существенными внутри переходного слоя, в области больших градиентов МГД-параметров).

Из законов сохранения на стационарном разрыве будем иметь

$$\delta\left(i_\alpha n_\alpha\right)=0, \quad \delta\left(\Pi_{\alpha\beta} n_\beta\right)=0, \quad \delta\left(q_\alpha n_\alpha\right)=0 \tag{10.37}$$

где символом δ здесь обозначен скачок соответствующей величины при переходе от плоскости 22 к плоскости 11, т. е. $\delta i_n = i_{n2} - i_{n1}$ и т. д.; $\boldsymbol{n}$ - вектор нормали к поверхности разрыва; $\boldsymbol{i}, \Pi_{\alpha\beta}, \boldsymbol{q}$ - соответственно плотности потоков массы, импульса и энергии:

$$\begin{gathered}\boldsymbol{i}=\tau \boldsymbol{u}, \quad \Pi_{\alpha\beta}=p\delta_{\alpha\beta}+\tau u_\alpha u_\beta-\frac{1}{4\pi}B_\alpha B_\beta+\frac{1}{8\pi}B^2\delta_{\alpha\beta} \\ \boldsymbol{q}=\tau \boldsymbol{u}\left(\frac{u^2}{2}+\epsilon+\frac{p}{\rho}\right)+\frac{1}{4\pi}\boldsymbol{B}\times[\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B}]\end{gathered} \tag{10.38}$$

В потоках импульса и энергии учтены как механические, так и электромагнитные слагаемые, но пренебрежено эффектами диссипации. В плотности потока энергии ϵ - внутренняя энергия среды на единицу массы, а последнее слагаемое представляет собой вектор Пойнтинга $\gamma = c\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}/4\pi$, в котором использовано выражение (10.34) для электрического поля в движущейся среде в отсутствие диссипации. В плотности потока импульса магнитные слагаемые представляют собой магнитную часть максвелловского тензора напряжений.

Наряду с законами сохранения (10.37) на разрыве должны быть выполнены граничные условия для векторов поля: непрерывность нормальной компоненты $\boldsymbol{B}$ и тангенциальной компоненты $\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B}/c$, т. е.

$$\delta\left(B_\alpha n_\alpha\right)=0, \quad \delta\left(\boldsymbol{u}B_\alpha n_\alpha-\boldsymbol{B}u_\alpha n_\alpha\right)=0 \tag{10.39}$$

После подстановки выражений (10.38) в законы сохранения (10.37) и использования граничных условий (10.39) приходим к четырем равенствам, связывающим скачки МГД параметров на разрыве:

$$i_n\delta\left(\epsilon+pV+\frac{i_n^2V^2}{2}+\frac{u_\tau^2}{2}+\frac{VB_\tau^2}{4\pi}\right)-\frac{B_n}{4\pi}\delta\left(\boldsymbol{B}_\tau\cdot\boldsymbol{u}_\tau\right)=0 \tag{10.40}$$

$$\delta p+i_n^2\delta V+\frac{\delta B_\tau^2}{8\pi}=0 \tag{10.41}$$

$$i_n\delta\boldsymbol{u}_\tau-\frac{B_n}{4\pi}\delta\boldsymbol{B}_\tau=0 \tag{10.42}$$

$$B_n\delta\boldsymbol{u}_\tau-i_n\delta\left(V\boldsymbol{B}_\tau\right)=0 \tag{10.43}$$

Здесь индексы n и τ обозначают нормальную и тангенциальную к плоскости разрыва компоненты (не путать второй индекс с плотностью); $V=1/\tau$ - удельный объем. Равенства (10.40)-(10.43) образуют полную систему условий на МГД-разрывах. Они обладают большей общностью, чем уравнения МГД, и сохраняют силу в бесстолкновительной плазме, если давление в ней изотропно и определены локальные значения термодинамических и гидродинамических параметров.

Пример 10.11. Проанализировать на основе равенств (10.40)-(10.43) разрывы, обладающие следуюшими свойствами:
а) $i_n=0, B_n\neq 0$ (контактный разрыв);
б) $i_n=B_n=0$ (тангенциальный разрыв);
в) $i_n\neq 0, \delta V=0$ (альвеновский, или вращательный, разрыв).

Для каждого случая найти связи между скачками макроскопических параметров и указать величины, которые непрерывны на разрыве.

Решение. На контактном разрыве $\delta\boldsymbol{u}=0, \delta\boldsymbol{B}=0, \delta p=0$. Могут испытывать скачки плотность вещества, его температура, химический состав и другие термодинамические параметры. Контактный разрыв - это неподвижная граница двух веществ, находящихся во взаимном механическом равновесии.

На тангенциальном разрыве скорость и магнитное поле имеют только тангенциальные составляющие, которые могут испытывать произвольные скачки. Термодинамические параметры среды также могут испытывать разрывы, и единственное ограничение - непрерывность полного давления:

$$\delta\left(p+\frac{B_\tau^2}{8\pi}=0\right) \tag{1}$$

В отсутствие скачка скорости две среды, разделенные тангенциальным разрывом, неподвижны друг относительно друга, и тангенциальный разрыв становится разновидностью контактного, на котором должен выполняться баланс полного давления (1).

В случае альвеновского разрыва из равенств (10.42), (10.43) следует

$$i_n=\pm\frac{|B_n|}{\sqrt{4\pi V}},\quad \delta\boldsymbol{u}_\tau=\mp\sqrt{\frac{V}{4\pi}}\delta\boldsymbol{B}_\tau \tag{2}$$

После перегруппировки членов и сокращения множителя $i_n\neq 0$ уравнению (10.40) можно придать вид

$$\delta\epsilon+V\delta\left(p+\frac{B_\tau^2}{8\pi}\right)+\frac{1}{2}\delta\left(\boldsymbol{u}_\tau\pm\sqrt{\frac{V}{4\pi}}\boldsymbol{B}_\tau\right)^2=0 \tag{3}$$

Третье слагаемое здесь равно нулю в силу (2), а второе - на основе уравнения (10.41) при $\delta V=0$. Поэтому из (3) следует $\delta\epsilon=0$, а поскольку любой термодинамический

параметр однородной жидкости или газа можно представить как функцию двух независимых переменных $-\epsilon$ и V, то из отсутствия скачков этих величин вытекает, что все термодинамические параметры, в том числе давление p, непрерывны. Но тогда из (10.41) следует $\delta B_\tau^2 = 0$, т.е. абсолютная величина магнитного поля не меняется на альвеновском разрыве, как в альвеновской простой волне. Однако, $\delta \boldsymbol{B}_\tau \neq 0$, т. е. возможен поворот вектора $\boldsymbol{B}$ вокруг нормали к поверхности разрыва.

Пример 10.12. Ударным фронтом называется разрыв, на котором $i_n \neq 0, \delta V \neq 0$. Ударный фронт вместе с потоками вещества, втекающим и вытекаюшим из него, называется ударной волной.

а) Показать, что существует такая система отсчета, в которой векторы $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{B}_1, \boldsymbol{B}_2$ и нормаль к разрыву n лежат в одной плоскости («теорема компланарности»).

б) Показать, что скачки термодинамических параметров и магнитного поля связаны уравнением ударной адиабаты

$$\epsilon_1 - \epsilon_2 + \frac{1}{2}(p_1 + p_2)(V_1 - V_2) + \frac{1}{16\pi}(V_1 - V_2)(B_{\tau 1} - B_{\tau 2})^2 = 0 \tag{10.44}$$

где тангенциальные компоненты поля считаются коллинеарными в силу п. а). Индекс 2 относится к величинам за фронтом, индекс 1 - к величинам перед фронтом.

в) Рассмотреть частные виды ударных волн - параллельную ударную волну ($\boldsymbol{B}_n \neq 0, B_{\tau 1} = B_{\tau 2} = 0$) и перпендикулярную ударную волну ($B_n = 0$). Для этих волн выразить электрическое поле в системе фронта через скорость вещества и магнитное поле. Выразить также отношение плотностей τ_2/τ_1 через отношение давлений p_2/p_1 для сильных ударных волн ($p_2 \gg p_1$), считая, что вещество представляет собой проводящий идеальный газ (разреженную плазму). В этом случае $\epsilon = pV/(\gamma - 1)$, $\gamma = 5/3$.

Решение. а) При $B_n \neq 0$ из уравнений (10.42), (10.43) следует, что три вектора, $\delta \boldsymbol{B}_\tau = \boldsymbol{B}_{\tau 1} - \boldsymbol{B}_{\tau 2}, \delta(V\boldsymbol{B}_\tau) = V_1\boldsymbol{B}_{\tau 1} - V_2\boldsymbol{B}_{\tau 2}, \delta \boldsymbol{u}_\tau = \boldsymbol{u}_{\tau 1}$ - - $u_{\tau 2}$ - взаимно параллельны (антипараллельны). Поскольку $V_1 \neq V_2$, отсюда следует, что $\boldsymbol{B}_{\tau 1}, \boldsymbol{B}_{\tau 2}$ параллельны, т. е. $\boldsymbol{B}_1, \boldsymbol{B}_2$ и $\boldsymbol{n}$ лежат в одной плоскости. Учитывая тот факт, что $\delta \boldsymbol{u}_\tau$ лежит в этой же плоскости, выбором системы отсчета (такой, например, чтобы u_1 лежала в нужной плоскости) нетрудно добиться того, чтобы и векторы $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$ по отдельности были ориентированы в этой плоскости.

При $B_n = 0$ имеем из (10.42), (10.43)

$$\boldsymbol{u}_{\tau 1} = \boldsymbol{u}_{\tau 2}, \quad V_1\boldsymbol{B}_{\tau 1} = V_2\boldsymbol{B}_{\tau 2} \tag{1}$$

Это означает, что $\boldsymbol{B}_1, \boldsymbol{B}_2, \boldsymbol{n}$ лежат в одной плоскости, а ввиду непрерывности тангенциальной скорости можно обратить ее в нуль выбором системы отсчета. Следовательно, обе скорости будут направлены в этой системе вдоль нормали.

в) В параллельной ударной волне магнитное поле непрерывно, и тангенциальная скорость тоже непрерывна, как следует из равенств (10.42), (10.43). Поэтому выбором системы отсчета можно обратить ее в нуль. В этой системе, согласно (10.34), электрическое поле также обращается в нуль. Магнитное поле не влияет на двжение плазмы вдоль поля, ударная адиабата превращается в адиабату Гюгонио для ударной волны в среде без магнитного поля:

$$\epsilon_1 - \epsilon_2 + \frac{1}{2}(p_1 + p_2)(V_1 - V_2) = 0 \tag{2}$$

Отношение плотностей по обе стороны ударного фронта определяется из уравнения (2):

$$\frac{\tau_2}{\tau_1} = \frac{\gamma - 1 + (\gamma + 1)(p_2/p_1)}{\gamma + 1 + (\gamma - 1)(p_2/p_1)} \tag{3}$$

В предельном случае сильной волны ($p_2 \gg p_1(\gamma+1)/(\gamma-1)$) имеем

$$\left.\frac{\tau_2}{\tau_1}\right|_{\max} \approx \frac{\gamma+1}{\gamma-1} = 4 \tag{4}$$

для разреженной плазмы.

В случае перпендикулярной ударной волны, как следует из (1), существует система отсчета, в которой движение среды по обе стороны перпендикулярно фронту. В этой системе электрическое поле по обе стороны параллельно фронту и непрерывно:

$$\boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\boldsymbol{u}_1 \times \boldsymbol{B}_1 = -\frac{1}{c}\boldsymbol{u}_2 \times \boldsymbol{B}_2 \tag{5}$$

Магнитное поле в такой волне пропорционально плотности: $B_2/B_1 = \rho_2/\rho_1$. Уравнение ударной адиабаты в этом случае опять сводится к уравнению Гюгонио (2), если переопределить внутреннюю энергию и давление: вместо p следует подставить полное давление

$$p_* = p + \frac{b^2}{8\pi V^2} \tag{6}$$

а вместо ϵ - полную плотность внутренней энергии на единицу массы,

$$\epsilon_* = \epsilon + \frac{b^2}{8\pi V} \tag{7}$$

связанную с p_* соотношением $p_* = -\left(\partial\epsilon_*/\partial V\right)_s$. Здесь $b = V_1B_1 = V_2B_2$ - величина, не изменяющаяся при переходе через фронт.

Для сильной поперечной ударной волны в разреженной плазме ($\epsilon_2 \gg \epsilon_1, p_2 \gg p_1$ ударная адиабата принимает вид

$$\frac{\tau_2}{\tau_1} = \frac{\gamma+1}{\gamma-1} - \frac{B_1^2}{4\pi p_2}\left(\frac{\tau_2}{\tau_1} - 1\right)^3 \tag{8}$$

Предельное сжатие такое же, как и в отсутствие магнитного поля. Но при конечных значениях p_2 сжатие меньше за счет того, что часть энергии расходуется на усиление магнитного поля.

В области ударного фронта МГД и термодинамические параметры среды имеют большие градиенты, что приводит к сильной диссипации энергии механического движения. Это вызывает нагревание вещества, прошедшего через фронт, и в силу второго закона термодинамики рост энтропии:

$$s_2 > s_1 \tag{10.45}$$

где s_1, s_2 - удельные энтропии перед и за фронтом соответственно. Из последнего неравенства при дополнительных условиях

$$\left(\frac{\partial^2 V}{\partial p^2}\right)_s > 0, \quad \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p > 0 \tag{1.4.4}$$

следуют неравенства

$$p_2 > p_1, \quad \tau_2 > \tau_1$$

т. е. ударные волны являются волнами сжатия.

МГД разрывы, удовлетворяющие законам сохранения и граничным условиям (10.40)-(10.43), могут оказаться неустойчивыми. Устойчивость в обычном смысле

требует, чтобы начальное малое возмущение не нарастало со временем и оставалось малым в течение конечного наперед заданного промежутка времени. Исследование устойчивости конкретных МГД систем производится в задачах $10.77^\star - 10.81^\star, 10.84$.

Наряду с устойчивостью важную роль играет понятие эволюционности МГД разрыва. Разрыв называется эволюционным, если малые возмущения либо не нарастают, либо нарастают, но остаются малыми в течение малого промежутка времени. Пример последней ситуации - рост возмущения по закону $e^{\gamma t}, \gamma > 0$; возмущение мало на временах $t \ll 1/\gamma$. Разрыв в этом случае неустойчив, но эволюционен. Разрыв неэволюционен, если он распадается на несколько разрывов или волн таким образом, что возмущение сразу становится большим в области, в которой отдельные разрывы уже разошлись. Неэволюционные разрывы возникают под влиянием внешних причин, например, при столкновении двух облаков газа. В этом случае на границе их раздела возникает разрыв, на котором скачки параметров газов определяются начальными условиями и не связаны уравнениями (10.40)(10.43). Такой разрыв мгновенно распадается на несколько разрывов и волн разрежения.

Исследование условий эволюционности ударных волн приводит к следующему выводу (см. Ландау и Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, 73). МГД ударные волны имеют две области эволюционности:

$$u_{n1} \geqslant v_{f1}, v_{An2} < u_{n2} < v_{f2} \tag{10.48}$$

$$v_{s2} \leqslant u_{n1} < v_{An1}, u_{n2} \leqslant v_{s2} \tag{10.49}$$

Здесь $v_{An} = |B_n| / \sqrt{4\pi\tau}$ - альвеновская скорость; v_f, v_s - скорости быстрой и медленной магнитозвуковых волн; u_n - нормальная компонента скорости среды в системе фронта.

Ударные волны, удовлетворяющие (10.48), называются быстрыми, при уменьшении амплитуды волны они переходят в быструю линейную магнитозвуковую моду. Волны, удовлетворяющие условию (10.49), называются медленными и переходят при уменьшении их амплитуды в медленную магнитозвуковую моду. В медленных МГД ударных волнах магнитное поле ослабляется ($B_{\tau 2} < B_{\tau 1}$), а в быстрых усиливается ($B_{\tau 2} > B_{\tau 1}$) при переходе через фронт.

Рекомендуемая литература: [Ландау и Лифшиц, Электродинамика сплошных сред; Ландау и Лифшиц, Гидродинамика; Половин и Демуцкий (1987); Седов (1972); Ахиезер и др. (1974); Моффат (1980); Куликовский и Любимов (1962); Альвен и Фельтхаммар (1967); Шерклиф (1967); Пикельнер (1966); Паркер (1982); Зельдович (1956); Вайнштейн и др. (1989); Краузе и Рэдлер (1984); Вайнштейн и др. (1980); Быков и Топтыгин (1993); Рузмайкин и др. (1988); Сыроватский (1957); Островский и Потапов (2003)].

Задачи

10.52°. Доказать, что уравнения

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \quad \nabla \times \boldsymbol{B} = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}, \quad \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$$

используемые в магнитной гидродинамике, инвариантны относительно преобразований Галилея $\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{V}t, t' = t$, т. е. принимают вид

$$\nabla' \times \boldsymbol{E}' = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}'}{\partial t'}, \quad \nabla' \times \boldsymbol{B}' = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}', \quad \nabla' \cdot \boldsymbol{B}' = 0$$

если напряженности поля и плотность тока преобразуются следующим образом:

$$\boldsymbol{j}' = \boldsymbol{j}, \quad \boldsymbol{B}' = \boldsymbol{B}, \quad \boldsymbol{E}' = \boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\boldsymbol{V} \times \boldsymbol{B}$$

10.53. С помощью закона электромагнитной индукции (10.36) показать, что если магнитное поле удовлетворяет бездиссипативным уравнениям (10.29), то магнитный поток через любой замкнутый движущийся и деформирующийся контур остается постоянным.
10.54. Показать, что при статическом равновесии проводящей среды в магнитном поле векторы поля $\boldsymbol{B}$ и плотности тока $\boldsymbol{j}$ касательны к поверхностям $p(\boldsymbol{r}) = \text{const}$.
10.55. Вдоль цилиндрического столба горячей плазмы, радиус которого a, течет ток J, распределенный по сечению с плотностью $j(r)$ (z-пинч). Как зависит от r давление плазмы в стационарном состоянии, если оно уравновешивается магнитным давлением, создаваемым текущим вдоль столба током? Записать связь между полным током пинча и давлением в нем, проинтегрированным по поперечному сечению.

Пусть плазма является изотермической и удовлетворяет уравнению состояния идеального газа. Выразить силу тока J через температуру T плазмы и полное число N частиц одного знака, приходящихся на единицу длины столба плазмы. Вычислить силу тока, приняв $N \approx 10^{15}$ частиц/см, $T \approx 10^8 K$ (значения, характерные для термоядерных исследований).
10.56. Как должен быть распределен ток по сечению плазменного столба (см. условие предыдущей задачи), чтобы давление плазмы было постоянным по сечению?
10.57. Найти условие равновесия цилиндрического столба плазмы с радиусом a, в котором ток имеет только азимутальную компоненту $j_\varphi(r)$ (тета-пинч): Вне столба давлением среды можно пренебречь. Можно ли обеспечить равновесие за счет магнитного поля внешних источников?
10.58. Магнитное поле называется бессиловым, если плотность магнитной силы всюду равна нулю: $\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{B}/c = 0$. Для этого необходимо и достаточно, чтобы ток в любой точке был направлен вдоль магнитной силовой линии.
а) Показать, что бессиловое магнитное поле $\boldsymbol{B}$ удовлетворяет системе уравнений

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \alpha \boldsymbol{B}, \quad \boldsymbol{B} \cdot \nabla \alpha = 0$$

где $\alpha(\boldsymbol{r})$ - произвольная дифференцируемая скалярная функция, включая константу.
б) Построить в цилиндрических координатах бессиловое поле при $\alpha = \text{const}$, зависящее только от r.
10.59. Вывести из уравнений (10.22) уравнение для векторного потенциала $\boldsymbol{A}$, связанного с магнитным полем обычной формулой $\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$.
10.60. В проводящей среде поддерживается стационарное поле скоростей $\boldsymbol{u} = (u_x(y,z), 0, 0)$ (сдвиговое течение). В начальный момент $t = 0$
магнитное поле имело компоненты $\boldsymbol{B}_0 = (0, B_{0y}(y,z), B_{0z}(y,z))$. В бездиссипативном приближении ($\nu_m \to 0$) вычислить поле при $t > 0$.
10.61. В проводящей среде поддерживается стационарное дифференциальное вращение с угловой скоростью $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{e}_z \Omega(r, \vartheta)$, где r, ϑ - сферические координаты (т. е. разные слои проводящей жидкости или газа вращаются с разными угловыми скоростями). Начальное магнитное поле лежит в меридиональных плоскостях (полоидально): при $t = 0, \boldsymbol{B} = (B_{0r}(r,\vartheta), B_{0\vartheta}(r,\vartheta), 0)$. Вычислить в пренебрежении диссипацией магнитное поле при $t > 0$.
10.62*. В несжимаемой однородной проводящей среде поддерживается стационарное двумерное движение с полем скоростей $\boldsymbol{u} = (u_x(x,y), u_y(x,y), 0)$. Показать, что такое движение неспособно поддерживать магнитное поле в течение длительного времени, так что начальное поле диссипирует за конечное время (Я.Б.Зельдович, 1956).
10.63*. В сферических координатах поле скоростей проводящей среды задается вектором

$\boldsymbol{u} = \nabla \times \boldsymbol{e}_r \psi(\boldsymbol{r})$, а электропроводность $\kappa(r)$ зависит только от расстояния до центра. Показать, что независимо от начального состояния магнитное поле затухает за конечное время (антидинамо-теорема Эльзассера).

10.64*. Вязкая несжимаемая проводящая жидкость движется между двумя неподвижными параллельными плоскостями в направлении оси Oz под действием постоянного градиента давления $dp/dz = \text{const}$. Электропроводность жидкости κ и коэффициент динамической вязкости η постоянны, расстояние между плоскостями $2a$. Перпендикулярно плоскостям в направлении оси Ox приложено постоянное и однородное внешнее магнитное поле $\boldsymbol{B}_0$. Вычислить зависимость скорости жидкости от x и добавочное магнитное поле, возникающее в движущейся жидкости. Проанализировать результат для больших и малых значений B_0.

10.65. Вязкая несжимаемая жидкость находится между параллельными плоскостями $x = \pm a$. Плоскость $x = -a$ движется со скоростью $-v_0$, а плоскость $x = a$ - со скоростью v_0 в направлении оси Oz. Градиент давления отсутствует, электропроводность жидкости κ и коэффициент вязкости η заданы и постоянны. Перпендикулярно плоскостям приложено однородное магнитное поле B_0. Вычислить скорость жидкости и добавочное магнитное поле в ней.

10.66. Получить решение (21), (22) для альвеновской волны малой амплитуды (см. пример 10.10) путем линеаризации системы уравнений (10.29)-(10.32).

10.67. Вычислить декремент γ плоской альвеновской волны малой амплитуды, если известны кинематическая ν и магнитная ν_m вязкости среды. Декремент мал по сравнению с частотой волны.

10.68. Рассмотреть быстрые и медленные простые волны (см. п. в) примера 10.10) при малых амплитудах возмущений. Для этого использовать систему уравнений (10.29)-(10.32) в линеаризованной форме. Определить взаимную ориентацию векторов $\boldsymbol{k}, \boldsymbol{u}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{B}_0$, где последние два вектора амплитуда магнитозвуковой волны и внешнего однородного магнитного поля.

10.69*. Исследовать изменение профиля быстрой поперечной простой волны, рассмотренной в примере 10.10, вызванное зависимостью фазовой скорости от плотности среды. Для этого задать профиль скорости среды в начальный момент $t = 0$ в виде $u_x(x, 0) \equiv u(x, 0) = u_0/\operatorname{ch}(x/h)$, где $u_0 = c_{s0} = v_{A0}$ совпадает со скоростью звука c_{s0} и с альвеновской скоростью v_{A0} в невозмущенной среде. На основе численного решения с помощью компьютера построить функцию $u(x, t)$ для $t > 0$. Построить также графики магнитного поля $B(x, t)$ при $t = 0$ и $t > 0$. Определить момент времени t_*, до которого применимо решение в виде простой волны (т. е. решение однозначно). Уравнение состояния среды для адиабатического процесса имеет вид $p(\tau) = p_0 (\tau/\tau_0)^\gamma$.

10.70. Плазма испускается изотропно во все стороны с поверхности шара радиуса a, вращающегося вокруг своего диаметра с постоянной угловой скоростью Ω. Скорость плазмы u постоянна по величине и направлена по радиусу. Вблизи поверхности шара существует магнитное поле, которое в системе, вращающейся вместе с шаром, имеет значение $\boldsymbol{B}(a, \vartheta, \alpha) = \boldsymbol{B}_0(\vartheta, \alpha)$, где α отсчитывается в плоскости, перпендикулярной оси вращения. Плотность энергии плазмы велика по сравнению с плотностью энергии магнитного поля, так что влиянием поля на движение плазмы можно пренебречь. Предполагая магнитное поле вмороженнным в плазму, найти его зависимость от координат и времени в области $r > a$ в неподвижной системе отсчета [4].

10.71. Найти вид силовых линий межпланетного магнитного поля в модели Паркера, рассмотренной в предыдущей задаче. Определить величину магнитного поля и угол θ между силовой линией и радиальным направлением на орбите Земли, задавшись следующими значениями параметров: радиус Солнца $a = 0,7 \times 10^6$ км; среднее

магнитное поле на

поверхности Солнца $B_0 \approx 1$ Гс; радиус орбиты Земли $r_0 \approx 1.5 \cdot 10^8$ км; угловая скорость вращения Солнца $\Omega = 2,7 \cdot 10^{-6}$ рад/с; скорость солнечного ветра $u = 300$ км/с.

10.72. Показать, что одно из решений задачи 10.70 о магнитном поле в области стационарного радиального звездного ветра имеет вид

$$

$$B_r(r,\vartheta,\alpha,t) = F\left(\alpha - \frac{(r-a)\Omega}{u} + \Omega t\right)\left(\frac{a}{r}\right)^2 2\cos\vartheta$$
$$B_\vartheta(r,\vartheta,\alpha,t) = p\frac{\partial}{\partial\alpha}F\left(\alpha - \frac{(r-a)\Omega}{u} + \Omega t\right)\frac{a^2\Omega}{ur}\sin\vartheta$$
$$B_\alpha(r,\vartheta,\alpha,t) = qF\left(\alpha - \frac{(r-a)\Omega}{u} + \Omega t\right)\frac{a^2\Omega}{ur}2\sin\vartheta\cos\vartheta$$

$$

Здесь p, q - постоянные, удовлетворяющие условию $p + q = 1$.

10.73*. В однородной проводящей среде (газовой плазме) с однородным магнитным полем B_0 в некоторой малой области («точке») мгновенно выделилась значительная энергия, в результате чего возникла сильная ударная волна. Плотность энергии вещества в возмущенной области намного превышает плотность энергии магнитного поля, поэтому отклонением от сферической симметрии, вносимым магнитным полем, можно пренебречь и считать ударный фронт расширяющейся сферой радиуса $R_s(t)$. Поле скоростей в возмущенной области $r \leqslant R_s(t)$ можно представить в виде $u_r = u = 2r\dot{R}_s(t)/(\gamma+1)R_s(t), u_\vartheta = u_\alpha = 0$, где $\gamma = 5/3$ для разреженного газа. Вычислить магнитное поле во всем пространстве после взрыва. Построить, в частности, график зависимости магнитного поля от времени на заданном расстоянии r от центра взрыва [5].

10.74*. Решить предыдущую задачу для случая, когда магнитное поле звезды можно аппроксимировать полем магнитного диполя с моментом M. Можно ли считать диполь точечным? Учесть конечные размеры диполя с помощью модели, рассмотренной в задаче 2.85. Построить график зависимости магнитного поля от времени на заданном расстоянии r от центра взрыва.

10.75$^\wedge$. Магнитное поле в окрестности звезды до ее взрыва можно представить в виде ряда по шаровым векторам, которые были определены в задаче 5.14:

$$\boldsymbol{B}_{0n} = \sum_{lm} a^{(3)}_{lm}(r)\mathcal{Y}^{(3)}_{lm}(\vartheta,\alpha), \quad \boldsymbol{B}_{0\tau} = \sum_{lm,k=1,2} a^{(k)}_{lm}(r)\mathcal{Y}^{(k)}_{lm}(\vartheta,\alpha)$$

Здесь учтено, что шаровые векторы с $k = 3$ направлены вдоль радиуса, а при $k = 1, 2$ они перпендикулярны радиусу. Считая коэффициенты разложения $a^{(k)}$ известными, записать поле в каверне, образовавшейся после взрыва. Закон движения ударного фронта $R_s(t)$ известен.

10.76. Взрыв звезды происходит в область с неоднородной плотностью $\tau_0 \propto r^{-2}$, занятую звездным ветром с магнитным полем, приведенным в условии задачи 10.72. Вычислить магнитное поле после взрыва для случая, когда зависимость компонент поля от угла α отсутствует, $p = 0, q = 1$, зависимость радиуса ударного фронта от времени $R_s(t)$ считать известной [6].

---

[04] Модель, рассматриваемая в этой задаче, использовалась Паркером для описания межпланетного магнитного поля, создаваемого потоками солнечной плазмы (солнечным ветром).

[05] В этой задаче рассматривается простая модель перестройки магнитного поля в окрестности взорвавшейся звезды. Приведенное выше поле скоростей за ударным фронтом хорошо аппроксимирует автомодельное решение Седова для сильного взрыва (см. Седов (1972), гл. IV 11), которому соответствует зависимость $R_s(t) \propto t^{2/5}$.

10.77*. Плоский контактный разрыв разделяет две проводящие среды с плотностями τ_1 и τ_2. Перпендикулярно разрыву приложены поле тяжести (ускорение g) и однородное магнитное поле $\boldsymbol{B}$. Методом малых возмущений в приближении несжимаемой и недиссипативной среды исследовать устойчивость разрыва. Найти критерий устойчивости.

Указание. Неустойчивые моды искать в классе потенциальных течений.

10.78*. Выполнить то же самое, что в предыдущей задаче, для случая магнитного поля, параллельного невозмущенной поверхности разрыва. Произвести сравнение с предыдущим случаем.

10.79*. Плоский контактный разрыв отделяет проводящую несжимаемую жидкость, имеющую плотность τ и коэффициент поверхностного натяжения α, от вакуума. Перпендикулярно разрыву действует поле тяжести (ускорение g) и электрическое поле E, ориентированные так, что жидкость находится снизу. Найти значения E, при которых контактный разрыв становится неустойчивым относительно малых возмущений (эффект Тонкса). Найти волновые числа неустойчивых мод.

Указание. Применить энергетический принцип - сравнить энергии возмущенной и невозмущенной систем и найти условия, при которых энергия деформированного разрыва окажется меньше.

10.80*. Исследовать устойчивость тангенциального разрыва в несжимаемой проводящей среде с магнитным полем. Плотности среды, ее скорости и магнитные индукции по обе стороны разрыва различны, гравитация отсутствует (неустойчивость Кельвина-Гельмгольца).

10.81*. Исследовать влияние турбулентности на эволюцию магнитного поля в проводящей среде. Для этого, пользуясь теорией возмущений, произвести усреднение уравнений для магнитного поля по ансамблю турбулентных пульсаций. Считать турбулентность однородной и изотропной и описывать ее тензором (Д4.15) для несжимаемой среды. Вычислить магнитную вязкость среды с учетом турбулентности. Столкновительную магнитную вязкость $\nu_m = c^2/4\pi\kappa$ считать заданной.

10.82*. Вывести уравнение, описывающее магнитное поле в среде с гиротропной турбулентностью и нулевым временем корреляции турбулентных скоростей. Для этого записать корреляционный тензор в координатном представлении (ср. с (Д4.23)):

$$U_{\alpha\beta}(\boldsymbol{r},t) = \{Q(r)\delta_{\alpha\beta} + R(r)x_\alpha x_\beta + C(r)e_{\alpha\beta\sigma}x_\sigma\} \cdot 2\tau_c\delta(t)$$

Столкновительную магнитную вязкость $\nu_m = c^2/4\pi\kappa$ считать конечной. Показать, что искомое уравнение имеет вид

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = \alpha\nabla\times\boldsymbol{B} + (\nu_t + \nu_m)\,\Delta\boldsymbol{B}$$

где $\nu_t = Q(0)\tau_c = \langle \boldsymbol{u}^2\rangle\,\tau_c/3$ - турбулентная вязкость, $\alpha = -2C(0)\tau_c = \langle \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})\cdot \operatorname{rot}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})\rangle\tau_c/3$ - параметр гиротропии.

10.83. Найти связь между функциями $Q(r), R(r), C(r)$ предыдущей задачи и функциями $A(k,t), P(k,t)$, которые входят в определение спектрального тензора (Д4.23).

10.84. С помощью уравнения, полученного в задаче 10.82*, найти магнитное поле в неограниченной гиротропной турбулентной среде по заданному начальному полю $\boldsymbol{B}^0(\boldsymbol{r})$ в предположении, что параметры турбулентности не зависят от магнитного поля («кинематическое приближение»). Показать, что в такой среде происходит неограниченное нарастание длинноволновых гармоник. Найти критерий неустойчивости.

10.85$^\wedge$. Согласно результатам задач 10.81*, 10.82*, турбулентность среды увеличивает

[06] Для сильного взрыва в данном случае, согласно Седову (1972), $R_s(t) \propto t^{2/3}$.

магнитную вязкость, добавляя к ней турбулентную составляющую $\nu_t : \nu_{tot} = \nu_m + \nu_t$. Это означает изменение кинетических
коэффициентов среды: если неподвижная среда обладает электропроводностью κ и магнитной проницаемостью $\mu = 1$, то в турбулентной среде эти величины приобретают другие значения $\sigma \neq \kappa, \mu \neq 1$. Найти величины σ, μ. Для этого использовать для усредненных полей в турбулентной среде уравнения (10.10) - (10.12) с эффективными значениями σ, μ и результаты задач $10.81^\star, 10.82^\star$ для негиротропной турбулентности, положив параметр гиротропии $\alpha = 0$. Выразить искомые величины через ν_m, ν_t.

11.4.4 10.4. Answers and Solutions

10.1.

$$J(t) = \frac{\pi a^2 \omega H_0}{c\sqrt{R^2 + (\omega L)^2/c^4}} \sin(\omega t - \varphi), \qquad \text{где} \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{\omega L}{c^2 R}$$

$$N(t) = -\frac{\omega \left(\pi a^2 H_0\right)^2}{c^2\sqrt{R^2 + (\omega L)^2/c^4}} \sin\omega t \sin(\omega t - \varphi)$$

$$\bar{P} = \frac{\omega^2}{2c^2} \cdot \frac{\left(\pi a^2 H_0\right)^2 R}{R^2 + (\omega L)^2/c^4} = \frac{1}{2} J_0^2 R$$

Здесь L - индуктивность кольца (см. задачу 2.113), R - его сопротивление, J_0 - амплитуда тока в кольце. Начало отсчета выбрано так, что при $t = 0$ плоскость петли перпендикулярна H_0.
10.2.

$$\bar{N} = \frac{\omega}{2c^2} \cdot \frac{\left(SH_0\right)^2 R}{R^2 + \left(\frac{\omega L}{c^2} - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

10.3. Средняя обобщенная сила, стремящаяся увеличить обобщенную координату q_i, равна

$$-\frac{J_0^2}{2c^6} \cdot \frac{\omega^2 L L_{12}}{R^2 + \left(\frac{\omega L}{c^2}\right)^2} \cdot \frac{\partial L_{12}}{\partial q_i}$$

где L и R - индуктивность и сопротивление второго контура, L_{12} - коэффициент взаимной индукции контуров.
10.4.

$$\bar{F} = -\frac{\omega^2 L L_{12} \left|\mathscr{E}_0\right|^2}{2c^6 \left\{\left[R^2 + \omega^4 \left(L_{12}^2 - L^2\right)/c^4\right]^2 + 4\omega^2 L^2 R^2/c^4\right\}} \frac{\partial L_{12}}{\partial q_i}$$

10.5.

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{c^2\left[\left(L_1 + L_2\right)C + L_1 C_1 + L_2 C_2\right] \pm c^2\left\{\left[L_1\left(C + C_1\right) - L_2\left(C + C_2\right)\right]^2 + 4L_1 L_2 C^2\right\}^{1/2}}{2L_1 L_2\left(C_1 C_2 + C C_1 + C C_2\right)}$$

При отсутствии связи между контурами, т. е. при $C = 0, \omega_1$ и ω_2 становятся равными $c/\sqrt{L_1 C_1}$ и $c/\sqrt{L_2 C_2}$, что соответствует независимым колебаниям в каждом из одиночных контуров.

При очень сильной связи ($C \gg C_1, C_2$) остается одна частота $\omega = c/\sqrt{L'C'}$, где $L' = L_1L_2/(L_1+L_2), C' = C_1+C_2$. Это соответствует колебаниям в одиночном контуре, в котором параллельно включены емкости C_1, C_2 и индуктивности L_1, L_2.

10.6.

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{c^2}{2}\left(\frac{1}{LC_1}+\frac{1}{LC_2}+\frac{1}{L_1C_1}+\frac{1}{L_2C_2}\right) \pm$$
$$\pm\frac{c^2}{2}\left\{\left[\frac{1}{C_1}\left(\frac{1}{L}+\frac{1}{L_1}\right)-\frac{1}{C_2}\left(\frac{1}{L}+\frac{1}{L_1}\right)\right]^2+\frac{4}{L^2C_1C_2}\right\}^{1/2}$$

10.7.

$$\omega_{1,2}^2 = c^2\frac{L_1C_1+L_2C_2 \pm \left[(L_1C_1-L_2C_2)^2+4C_1C_2L_{12}^2\right]^{1/2}}{2C_1C_2\left(L_1L_2-L_{12}^2\right)}$$

10.8. Составляя систему уравнений относительно токов и приравнивая нулю определитель системы, получим после некоторых вычислений уравнение четвертого порядка:

$$\omega^4 + i\omega^3\left(\frac{1}{\tau_1}+\frac{1}{\tau_2}\right) - \omega^2\left(\omega_1^2+\omega_2^2\right) - i\omega\left(\frac{\omega_1^2}{\tau_2}+\frac{\omega_2^2}{\tau_1}\right)+\omega_1^2\omega_2^2 = 0 \qquad (1)$$

где

$$\omega_1 = \frac{c}{\sqrt{L_1C_1}}, \quad \omega_2 = \frac{c}{\sqrt{L_2C_2}}, \quad \tau_1 = RC_1, \quad \tau_2 = RC_2$$

Коэффициенты этого уравнения комплексны, поэтому частота ω будет также комплексной: $\omega = \omega' + i\omega''$. В нулевом приближении в уравнении (1) можно отбросить члены с τ_1, τ_2. Тогда уравнение (1) примет вид

$$\omega^4 - \omega^2\left(\omega_1^2+\omega_2^2\right)+\omega_1^2\omega_2^2 = 0 \qquad (2)$$

Уравнение (2) имеет следующие решения: $\omega_1^{(0)} = \omega_1$ и $\omega_2^{(0)} = \omega_2$. Таким образом, в этом приближении $\omega'' = 0$, и не происходит диссипации энергии (так как мы считали, что R бесконечно велико); колебания в каждом контуре происходят независимо. В следующем приближении ищем ω в виде $\omega = \omega^{(0)} + \Delta\omega' + i\omega''$, где $\omega'', \Delta\omega'$ порядка $1/\tau$ или выше. В соответствии с этим, пренебрежем всеми членами более высоких порядков. Подставляя ω в (1), учитывая (2) и приравнивая нулю отдельно вещественную и мнимую части, найдем

$$\Delta\omega' = 0, \quad \omega_1'' = -\frac{1}{2\tau_2}, \quad \omega_2'' = -\frac{1}{2\tau_1} \qquad (3)$$

Поправка к ω', содержащая R, появится только в следующем приближении.

10.9.

$$J_1 = \frac{\mathscr{E}}{Z_1\left(1+\omega^2L_{12}^2/c^4Z_1Z_2\right)}, \quad J_2 = \frac{i\omega L_{12}}{c^2Z_2}J_1$$
$$Z_1 = R_1 + i\left(\frac{1}{\omega C_1}-\frac{\omega L_1}{c^2}\right), \quad Z_2 = R_2 + i\left(\frac{1}{\omega C C_2}-\frac{\omega L_2}{c^2}\right)$$
$$J_{1\max} = \frac{\mathscr{E}}{R} \quad \text{при} \quad \omega = \frac{c}{\sqrt{L_1C_1\left(1-L_{12}^2/L_1L_2\right)}}$$

10.10.

$$Z = \frac{R - i\omega L/c^2}{1 - (\omega/\omega_1)^2 - i\omega RC}, \quad \text{где} \quad \omega_1 = \frac{c}{\sqrt{LC}}$$

- собственная частота колебаний в контуре. При $R = 0$ и $\omega = \omega_1, Z$ становится бесконечно большим. Это свойство рассмотренного двухполюсника используется в радиотехнике (запирающие фильтры).
  10.11.

$$C = C_0, \quad L = L_0, \quad R = \frac{\gamma L_0}{c^2}, \quad \text{где} \quad L_0 = \frac{c^2}{\omega_p^2 C_0}$$

10.12.

$$Q = \frac{1}{2}\operatorname{Re}(UJ^*) = \frac{1}{2}|J|^2 \operatorname{Re}\left(\frac{1}{Z}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{\gamma\omega_p^2}{\omega^2+\gamma^2} C_0 |U_0|^2$$

$$\bar{W} = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{\omega_p^2}{\omega^2+\gamma^2}\right) C_0 |U_0|^2$$

10.13.

$$C = C_0, \quad L = \frac{c^2}{\omega_p^2 C_0}, \quad C_1 = \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2} C_0, \quad R = \frac{\gamma L}{c^2} = \frac{\gamma}{\omega_p^2 C_0}$$

10.14.

$Q = \frac{1}{2}\frac{\omega^2\omega_p^2\gamma}{\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2+\omega^2\gamma^2}\cdot C_0|U_0|^2, \bar{W} = \frac{1}{4}\left[1 + \frac{\omega_p^2\left(\omega^2+\omega_0^2\right)}{\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2+\omega^2\gamma^2}\right] C_0|U_0|^2.$

10.15. Обозначим токи, текущие через индуктивность, конденсатор и батарею, через J_1, J_2, J_3. На основе законов Кирхгофа получим уравнения

$$J_1 + J_2 + J_3 = 0, \quad \frac{L}{c^2}J_1 = \frac{\dot{q}(t)}{C} = \mathscr{E}(t) + J_3 R \tag{1}$$

где $q(t)$ - заряд на обкладке конденсатора, связанный с J_2 соотношением $J_2 = \dot{q}$, а

$$\mathscr{E}(t) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad t < 0 \\ \mathscr{E} & \text{при} \quad t > 0 \end{cases}$$

Из (1) получаем уравнение второго порядка для тока J_1. Соответствующее характеристическое уравнение имеет корни

$$x = -\frac{1}{2RC} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \omega_0^2}, \quad \omega_0^2 = \frac{c^2}{LC}$$

В зависимости от соотношения между R, L, C возможны три случая:
а) $\omega_0 > \frac{1}{2RC}$; находя решение для J_1 методом вариации произвольных постоянных Лагранжа, получим

$$J_1(t) = \frac{\mathscr{E}}{R}\left[1 - e^{-t/2RC}\left(\frac{\sin\omega t}{2\omega RC} + \cos\omega t\right)\right]$$

где $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - (2RC)^{-2}}$
б) $\omega_0 < 1/2RC$

$$J_1(t) = \frac{\mathscr{E}}{R}\left[1 - e^{-t/2RC}\left(\frac{\operatorname{sh}\Omega t}{2\Omega RC} + \operatorname{ch}\Omega t\right)\right]$$

где $\Omega = \sqrt{(2RC)^{-2} - \omega_0^2}$;
в) $\omega_0 = 1/2RC$

$$J_1(t) = \frac{\mathscr{E}}{R}\left[1 - \left(1 + \frac{t}{2RC}\right)e^{-t/2RC}\right]$$

В последних двух случаях переходный процесс является полностью апериодическим, колебаний не возникает.
10.16.

$$U_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad t < 0 \\ U_0 e^{-t/RC} & \text{при} \quad 0 < t < T \\ U_0\left(e^{-t/RC} - e^{-(t-T)/RC}\right) & \text{при} \quad t > T \end{cases}$$

10.17.

$$U_2(t) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad t < 0 \\ U_0 e^{-Rc^2 t/L} & \text{при} \quad 0 < t < T \\ U_0\left(e^{-Rc^2 t/L} - e^{-Rc^2(t-T)/L}\right) & \text{при} \quad t > T \end{cases}$$

10.18. На вход четырехполюсника нужно подать импульс

$$U_1(t) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad t < -T \\ hE_0\left(1 + \frac{t}{T} + \frac{RC}{T}\right) & \text{при} \quad -T < t < 0 \\ hE_0\left(1 - \frac{t}{T}\right) & \text{при} \quad 0 < t < T \\ 0 & \text{при} \quad t > T \end{cases},$$

Начало отсчета времени выбрано так, что поле между пластинами конденсатора достигает максимума при $t = 0$.
10.19.

$$J(t) = \frac{\mathscr{E}_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L/c^2)^2}}\left[\cos(\omega t + \varphi_0 - \varphi) - e^{-Rc^2 t/L}\cos(\varphi_0 - \varphi)\right]$$

где $\operatorname{tg}\varphi = \omega L/c^2 R$. Переходный процесс отсутствует, если $\operatorname{tg}\varphi_0 = -Rc^2/\omega L$. Это условие имеет простой смысл: в момент включения стационарное значение тока должно быть равно нулю.
10.20. При гармонической зависимости токов от времени, уравнение Кирхгофа для n-го контура запишется так:

$$-\frac{\omega L}{c^2}J_n + \frac{1}{\omega C}(2J_n - J_{n-1} - J_{n+1}) = 0 \tag{1}$$

Уравнение (1) представляет собою разностное линейное уравнение с целочисленной независимой переменной n. Оно имеет (ср. с задачей 9.4) два линейно независимых решения $\sin\kappa n$ и $\cos\kappa n$, причем частоты собственных колебаний выражаются через параметр κ:

$$\omega^2 = 3\omega_0^2 \sin^2\frac{\kappa}{2}, \quad \omega_0 = \frac{c}{\sqrt{LC}} \tag{2}$$

Используя граничные условия $J_0 = J_N = 0$, находим

$$J_n = A \sin \kappa n, \quad \kappa = \frac{\pi r}{N} \tag{3}$$

Здесь r может принимать любые целочисленные значения ($r = 1, 2, \ldots$). Значение $r = 0$ соответствует нулевому току в цепи. Однако вследствие периодичности $\sin(\kappa/2)$, входящего в (2), число собственных частот системы будет конечно. Чтобы получить весь спектр частот, достаточно менять r в пределах $1 \leqslant r \leqslant N$. При этом κ будет меняться в пределах $0 \leqslant \kappa \leqslant \pi$, каждому κ будет соответствовать одна собственная частота, а всего частот будет N, как и должно быть в системе N связанных контуров. Они будут лежать в интервале $0 < \omega \leqslant 2\omega_0$.

Для интерпретации величины κ введем координату $y_n = an$-й ячейки (a - «длина» одной ячейки цепи). Тогда (3) вместе с временным множителем можно записать в виде

$$J_n(t) = J_0 \sin k y_n e^{-i\omega_k t} \tag{4}$$

где $k = \kappa/a$.

Выражение (4) представляет собою суперпозицию двух волн, бегущих в противоположных направлениях. Величина k играет роль «волнового вектора» колебаний, распространяющихся по цепочке из отдельных дискретных звеньев. Фазовую и групповую скорости этих волн можно вычислить по обычным формулам

$$v_{ph} = \frac{\omega}{k}, \quad v_g = \frac{d\omega}{dk} \tag{5}$$

Поскольку зависимость ω от k нелинейна, v_{ph} и v_g отличаются друг от друга имеет место дисперсия. Из (2) находим: (6)

$$v_{ph} = \frac{2\omega_0}{k} \sin \frac{ka}{2}, \quad v_g = \omega_0 a \cos \frac{ka}{2}$$

Величина $2\pi/k$ имеет смысл «длины волны» колебаний в дискретной цепочке; для длинных волн ($\lambda \gg a$) имеем $ka \ll 1$, откуда следует, что фазовая и групповая скорости одинаковы, $v_{ph} = v_g = \omega_0 a$, и не зависят от k - дисперсия отсутствует. Графики зависимо-

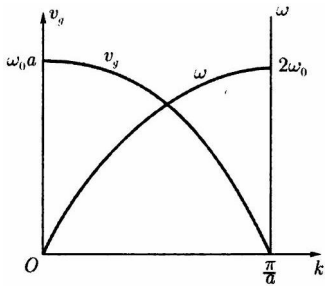


Рис. 10.9 сти ω и v_g от k приведены на рис. 10.9.

Электрические колебания рассмотренной цепочки аналогичны механическим колебаниям линейной одноатомной цепочки, которая может служить одномерной моделью кристалла. Индуктивность L аналогична массе атома, величина $1/C$ - коэффициенту жесткости [7].

10.21.

$$\Delta r = \frac{2N}{\pi} \cdot \frac{\Delta\omega}{\sqrt{4\omega_0^2 - \omega^2}}$$

10.22. Обозначим токи в контурах с самоиндукцией L_1 через J, в контурах с самоиндукцией L_2 - через J'.

Уравнения Кирхгофа будут иметь вид:

$$\begin{cases} -\frac{\omega L_1}{c^2} J_n + \frac{1}{\omega C}\left(2J_n - J'_n - J'_{n-1}\right) = 0 \\ -\frac{\omega L_2}{c^2} J_n + \frac{1}{\omega C}\left(2J'_n - J_n - J_{n-1}\right) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

Введя частоты $\omega_1 = c/\sqrt{L_1 C}, \omega_2 = c/\sqrt{L_2 C}$, получим

$$\begin{cases} \left(2\omega_1^2 - \omega^2\right) J_n = \omega_1^2 \left(J'_n + J'_{n-1}\right) \\ \left(2\omega_2^2 - \omega^2\right) J'_n = \omega_2^2 \left(J_n + J_{n-1}\right) \end{cases} \tag{2}$$

Решение этой системы будем искать в виде

$$J_n = Ae^{i\kappa n}, \quad J'_n = Be^{i\kappa n}$$

где A, B, κ - постоянные. Подставив эти решения в (2), получим

$$A\left(2\omega_1^2 + \omega^2\right) = B\omega_1^2\left(1 + e^{-i\kappa}\right), \quad B\left(2\omega_2^2 - \omega^2\right) = A\omega_2^2\left(1 + e^{i\kappa}\right)$$

Из равенства нулю определителя этой системы найдем связь между частотой ω и κ:

$$\omega^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 \pm \sqrt{\left(\omega_1^2 + \omega_2^2\right)^2 - 4\omega_1^2\omega_2^2 \sin^2\frac{\kappa}{2}} \tag{5}$$

Чтобы получить весь спектр колебаний, нужно менять κ в пределах от 0 до π. Значения κ, как и в задаче (10.20*), могут быть найдены из граничных условий.

Наиболее существенным отличием от случая цепочки с одинаковыми звеньями является то, что каждому значению κ теперь соответствуют две частоты, как следует из формулы (5). Поэтому существуют две ветви колебаний. Обозначим частоты этих колебаний через ω_+и ω_-, где индексы «+» и «-» соответствуют таким же знакам перед корнем в формуле (5). Зависимость частот от κ изображена графически на рис. 10.10. Колебания с частотой ω_-аналогичны колебаниям в цепочке с одинаковыми звеньями. В частности, при малых κ (длинные волны) имеем

$$\omega_- = \frac{\omega_1\omega_2}{\sqrt{2\left(\omega_1^2 + \omega_2^2\right)}}\kappa$$

т. е. дисперсия отсутствует.

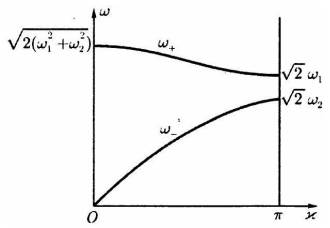


Рис. 10.10

Для ветви ω_+при малых κ получим закон дисперсии вида

$$\omega_+ = a + b\kappa^2$$

[07] Подробнее о колебаниях атомных цепочек см., например, М. А. Леонтович, Статистическая физика, Наука, 1983; М. Борн и Хуан Кунь, Динамическая теория кристаллических решеток, ИЛ, 1958 г. Аналогии между электрическими и механическими колебаниями рассматриваются в книге Л. Бриллюэна и М. Пароди (1959), гл. 3 и 4.

При $\kappa \to 0$ фазовая скорость стремится к бесконечности, а групповая скорость обращается в нуль.

Для исследования характера колебаний в обеих ветвях найдем отношение амплитуд токов в соседних контурах для очень длинных $\kappa \ll 1$ и самых коротких (κ близко к π) волн. Из равенств (4) имеем при $\kappa \ll 1$:
для ветви ω_-

$$\left(\frac{A}{B}\right)_- \approx 1$$

для ветви ω_+

$$\left(\frac{A}{B}\right)_+ \approx -\frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} = -\frac{L_2}{L_1}$$

Для ветви ω_-колебания токов в соседних контурах происходят с одинаковой амплитудой в одной фазе. Для ветви ω_+колебания в соседних контурах противофазны, а амплитуды колебаний обратно пропорциональны индуктивностям. При $\kappa = \pi$

$$\omega_+ = \sqrt{2}\omega_1, \quad \omega_- = \sqrt{2}\omega_2.$$

Переходя в формуле (4) к пределу $\kappa \to \pi$, получим

$$\left(\frac{A}{B}\right)_+ \to 0, \quad \left(\frac{A}{B}\right)_- \to 0$$

Таким образом, в предельном случае $\kappa = \pi$ колебания с частотой $\omega_+ = c\sqrt{\frac{2}{L_1 C}}$ происходят только в контурах с индуктивностями L_1, а колебания с частотой $\omega_- = c\sqrt{\frac{2}{L_2 C}}$ в контурах с индуктивностями L_2.

Рассмотренные в этой задаче колебания с частотами ω_-и ω_+являются аналогом акустических и оптических колебаний в линейной атомной цепочке, состоящей из атомов двух сортов с разными массами (см. литературу, указанную при решении задачи 10.20*).
10.23.

$$J_n = Aq_1^n + Bq_2^n \tag{1}$$

где q_1, q_2 - корни уравнения

$$q^2 - \left(2 + \frac{Z_1}{Z_2}\right) q + 1 = 0 \tag{2}$$

Постоянные A, B определяются из граничных условий $J_N = 0; (J_0 - \ -J_1)\, Z_2 = U_1$. Второе условие означает, что между точками $a'b'$ (см. рис. 10.7) приложено напряжение U_1. Используя равенство $q_1 q_2 = 1$ вытекающее из (2), получим окончательно:

$$U_2 = J_{N-1} Z_2 = U_1 \frac{q_2 - q_1}{(1 - q_1)\, q_2^N - (1 - q_2)\, q_1^N}$$

10.24. Коэффициент передачи K определяется из результатов предыдущей задачи:

$$K = \frac{q_1 - q_2}{(1 - q_2)\, q_1^N - (1 - q_1)\, q_2^N}$$

В знаменателе этого выражения имеются множители q_1^N и q_2^N. Так как $q_1 \cdot q_2 = 1$, то возможны два случая:

$$1.\ |q_1| = |q_2| = 1; \quad 2.\, |q_1| > 1, |q_1| < 1$$

В первом случае q_1^N и q_2^N будут по модулю равны единице, K тоже будет порядка единицы. Во втором случае при $N \gg 1$ $\left|q_1^N\right| \gg 1$, а $\left|q_2^N\right| \ll 1$, поэтому

$$K = \frac{q_1 - q_2}{(1 - q_2)\, q_1^N} \ll 1$$

Интервалы частот, для которых реализуются случаи 1 и 2, определяются из уравнения (2) предыдущей задачи. Из него следует, что

$$q_{1,2} = 1 + \frac{Z_1}{2Z_2} \pm \sqrt{\left(1 + \frac{Z_1}{2Z_2}\right)^2 - 1}$$

Если подкоренное выражение отрицательно, то q_1 и q_2 - два комплексно сопряженных корня, по модулю равных единице, т. е. осуществляется случай 1. При положительном подкоренном выражении, q_1 и q_2 вещественны и различны, т.е. имеет место случай 2. Приравнивая нулю подкоренное выражение, найдем область значений Z_1, Z_2 для случая 1:

$$-4 \leqslant \frac{Z_1}{Z_2} \leqslant 0$$

Это соответствует значениям ω^2, лежащим между

$$\frac{c^2}{L_1 C_1} \quad \text{и} \quad \frac{c^2\,(4C_1 + C_2)}{C_1 C_2\,(4L_2 + L_1)}$$

10.25. Рассмотрим n-й замкнутый контур искусственной длинной линии (рис. 10.11). Этот контур можно рассматривать как эквивалентную схему для отрезка длиной линии с распределенными параметрами, причем ΔL будет индуктивностью, а ΔC - емкостью данного отрезка. В случае произвольной зависимости тока в линии от времени уравнение Кирхгофа для этого контура примет вид:

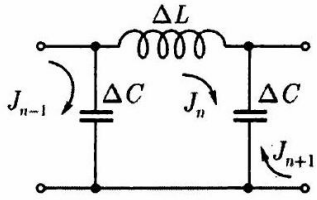


Рис. 10.11

$$-\frac{1}{c^2}\Delta L \frac{\partial J_n}{\partial t} + \frac{q_{n-1,n}}{\Delta C} - \frac{q_{n+1,n}}{\Delta C} = 0 \tag{1}$$

где $q_{n-1,n}$ и $q_{n+1,n}$ - заряды на верхних обкладках левого и правого конденсаторов. Дифференцируя (1) по времени и пользуясь соотношениями $\dot{q}_{n-1,n} = -J_n + J_{n-1}, \dot{q}_{n,n+1} = J_n - J_{n+1}$, получим:

$$\frac{1}{c^2}\Delta L \frac{\partial^2 J_n}{\partial t^2} + \frac{1}{\Delta C}\,(2J_n - J_{n-1} - J_{n+1}) = 0 \tag{2}$$

Теперь нужно перейти от переменной n к переменной z - координате точки линии с распределенными параметрами. Для этого положим

$$J_n(t) = J(z,t), \quad J_{n-1}(t) = J(z-a,t), \quad J_{n+1}(t) = J(z+a,t)$$

и вычислим разности:

$$J_n - J_{n-1} \approx \frac{\partial J}{\partial z}a - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 J}{\partial z^2}a^2$$
$$J_n - J_{n+1} \approx -\frac{\partial J}{\partial z}a - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 J}{\partial z^2}a^2$$

Подставляя эти разности в (2) и замечая, что $L = \Delta L/a$ и $C = \Delta C/a$ - индуктивность и емкость на единицу длины, получим уравнение

$$\frac{L}{c^2}\frac{\partial^2 J}{\partial t^2} = \frac{1}{C}\frac{\partial^2 J}{\partial z^2}$$

Это - уравнение длинной линии без потерь. В реальной длинной линии всегда имеются потери как за счет сопротивления в проводах, так и за счет неидеальной изоляции между проводами.

Эквивалентная схема для случая, когда второй фактор не учитывается (т. е. изоляция проводов считается идеальной), приведена на рис. 10.12 . Уравнение длинной линии (телеграфное уравнение) в этом случае можно получить таким же способом, как было получено (3):

$$\frac{L}{c^2}\frac{\partial^2 J}{\partial t^2} + R\frac{\partial J}{\partial t} = \frac{1}{C}\frac{\partial^2 J}{\partial z^2} \tag{4}$$

где R - активное сопротивление проводов на единицу длины.

10.26. Решая уравнение (3), полученное в предыдущей задаче, найдем

$$\omega = vk,$$

где $v = c/\sqrt{LC}$ - скорость распространения волн в длинной линии, $k = \pi r/l, r = 1, 2, 3 \ldots, L$ и C - индуктивность и емкость на единицу длины. В полученном спектре длинной линии, в отличие от спектра цепочки с сосредоточенными параметрами, число собственных частот бесконечно. Это связано с тем, что длинная линия является континуумом с бесконечным числом степеней свободы, тогда как в цепочке число степеней свободы N конечно. В случае идеальной длинной линии характерно также отсутствие дисперсии.

10.27. Исходим из закона Ома в дифференциальной форме: $\boldsymbol{j} = \sigma(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{E}_{\text{ext}})$, где $\boldsymbol{E}_{\text{ext}}$ - напряженность поля сторонних сил. Выразим $\boldsymbol{E}$ через потенциалы:

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}, \quad \boldsymbol{E}_{\text{ext}} = \frac{\boldsymbol{j}}{\sigma} + \nabla\varphi + \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}$$

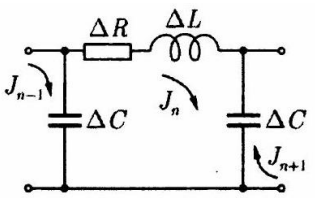


Рис. 10.12

Считая проводник тонким, проинтегрируем обе части последнего равенства по контуру, совпадающему с проводником:

$$\oint \boldsymbol{E}_{ext} \cdot d\boldsymbol{l} = \oint \frac{\boldsymbol{j}}{\sigma} \cdot d\boldsymbol{l} + \oint \nabla\varphi \cdot d\boldsymbol{l} + \frac{1}{c} \oint \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \cdot d\boldsymbol{l} \tag{1}$$

Интеграл, стоящий в левой части равенства (1), представляет собою стороннюю ЭДС $\mathscr{E}_{ext}$, включенную в цепь; интеграл $\oint (j/\sigma) \cdot dl = JR$ определяет потери на джоулево тепло за единицу времени. Интеграл $\oint \nabla\varphi \cdot dl = \oint d\varphi = 0$. Последний интеграл преобразуем следующим образом. С учетом запаздывания

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{c} \oint \frac{J(t - r/c)dl'}{r}$$

$$J(t - r/c) = J_0 e^{-i\omega(t-r/c)}, \quad \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} = -i\omega \boldsymbol{A}$$

Подставляя эти выражения в равенство (1) и отделяя вещественную и мнимую части, получим

$$\mathscr{E}_{ext}(t) = J(t) \left[\left(R + \frac{\omega}{c^2} \oint \oint \frac{\sin(\omega r/c) d\boldsymbol{l} \cdot d\boldsymbol{l'}}{r} \right) - \frac{i\omega}{c^2} \oint \oint \frac{\cos(\omega r/c) d\boldsymbol{l} \cdot d\boldsymbol{l'}}{r} \right]$$

Выражение в квадратных скобках представляет комплексное сопротивление цепи. Активное сопротивление равно $R + R_r(\omega)$, где

$$R_r(\omega) = \frac{\omega}{c^2} \oint \oint \frac{\sin(\omega r/c)}{r} d\boldsymbol{l} \cdot dl'$$

Величина R связана с потерями на нагревание проводника; величина $R_r(\omega)$ характеризует потери энергии на излучение и называется сопротивлением излучения (см. следующую задачу).

Реактивное сопротивление равно $-i\omega L(\omega)/c^2$, где

$$L(\omega) = \oint \oint \frac{\cos(\omega r/c)}{r} d\boldsymbol{l} \cdot d\boldsymbol{l'}$$

представляет собою индуктивность, зависящую от частоты.

Рассмотрим случай, когда можно считать $c/\omega = \lambda/2\pi \gg l$, где l - размер контура. В области интегрирования $\omega r/c \ll 1$ и, с учетом квадратичного члена в разложении косинуса, получим

$$L(\omega) \approx \oint \oint \frac{dl \cdot dl'}{r} - \frac{1}{2} \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \oint \oint r d\boldsymbol{l} \cdot dl'.$$

Первый член в этом выражении не зависит от частоты и представляет собой обычную индуктивность [8]; второй член дает поправку, существенную при высоких частотах.

В разложении синуса нужно учесть кубический член, так как интеграл от первого (линейного) члена обращается в нуль. Сопротивление излучения

$$R_r(\omega) = -\frac{\omega^4}{6c^5} \oint \oint r^2 d\boldsymbol{l} \cdot dl'$$

10.28.

$$L(\omega) = L + \frac{64\pi^4}{3} \cdot \frac{a^4}{\lambda^3}, \quad R_r(\omega) = \frac{2\pi^2}{3c} \left(\frac{2\pi a}{\lambda}\right)^4$$

Кольцо с током является магнитным диполем. Энергия, излучаемая в единицу времени, дается формулой $2\ddot{\boldsymbol{m}}^2/3c^3$, где $\boldsymbol{m}$ - магнитный дипольный момент.

Значение коэффициента пропорциональности между излученной энергией и $\overline{J^2}$ равно $2\pi^2 a^2 \omega^4/3c^5$ и совпадает с $R_r(\omega)$.

10.29. Решая первое уравнение (10.14) с граничными условиями

[8] Практически для вычисления самоиндукции нужно использовать формулу (2.74), так как интеграл $\oint\oint \frac{dl\cdot dl'}{r}$ расходится. Эта расходимость вызвана тем, что проводник считается бесконечно тонким (линейным).

(10.16), находим

$$H(z) = H_0\left\{\operatorname{ch}\left[(1-i)z/\delta_1\right] - A\operatorname{sh}\left[(1-i)z/\delta_1\right]\right\}, \quad 0 \leqslant z < a,$$
$$H(z) = H(a)e^{-(1-i)(z-a)/\delta_2}, \quad a < z < \infty,$$
$$A = \frac{\kappa_2\delta_2 \operatorname{sh}\left[(1-i)a/\delta_1\right] + \kappa_1\delta_1 \operatorname{ch}\left[(1-i)a/\delta_1\right]}{\kappa_1\delta_1 \operatorname{sh}\left[(1-i)a/\delta_1\right] + \kappa_2\delta_2 \operatorname{ch}\left[(1-i)a/\delta_1\right]}.$$

где глубины проникновения δ_1, δ_2 даются равенством (10.17). При $a \ll \delta_1$ и $\kappa_1\delta_1 \sim \kappa_2\delta_2$ имеем

$$H(z) = H_0\left\{1 - (1-i)\frac{\kappa_1 z}{\kappa_2\delta_2}\right\}, \quad z \leqslant a$$

При $a \gg \delta_1$ получаем

$$H(z) = H_0 e^{-(1-i)z/\delta_1}, z < a; \quad H(z) = H_0 e^{-(1-i)a/\delta_1 - (1-i)(z-a)/\delta_2}, z > a.$$

10.30.

$$H(x) = H_0\left(\frac{\operatorname{sh}^2 x/\delta + \cos^2 x/\delta}{\operatorname{sh}^2 h/\delta + \cos^2 h/\delta}\right)^{1/2}, \quad H_0 = \frac{4\pi}{c}J_0 n$$

При $\delta \ll h, H(x) = H_0 e^{-(h-|x|)/\delta}$; при $\delta \gg h, H(x) = H_0$.

10.31. Так как система симметрична относительно оси цилиндра, а первичное магнитное поле H_0 однородно, то ясно, что вихревые токи в цилиндре будут течь по окружностям в плоскостях, перпендикулярных его оси. Эти токи создадут такое же магнитное поле, какое создавалось бы множеством отдельных коаксиальных соленоидов. Но поле соленоида во внешнем пространстве равно нулю, а внутри соленоида направлено вдоль его оси. Таким образом, полное магнитное поле вне цилиндра совпадет с полем H_0, а внутри цилиндра определяется первым уравнением (10.14), которое ввиду осевой симметрии примет вид

$$\frac{d^2H}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dH}{dr} + k^2 H = 0$$

где

$$k = \frac{1+i}{\delta}, \quad H = H_z(r), \quad H_\alpha = H_r = 0$$

и граничным условием $H(a) = H_0 = 4\pi n J_0/c$, где H_0 - поле внутри соленоида (см. задачу 2.83).

Решение, конечное при $r = 0$ и удовлетворяющее этому граничному условию, выразится через функцию Бесселя нулевого порядка:

$$H = H_0\frac{J_0(kr)}{J_0(ka)}$$

Вне цилиндра имеем

$$H = H_0 \quad \text{при} \quad a \leqslant r \leqslant b, \quad H = 0 \quad \text{при} \quad r > b.$$

Плотность тока и электрическое поле внутри цилиндра вычисляются по формуле (10.12):

$$j = j_\alpha = \kappa E_\alpha = \frac{kc}{4\pi} \cdot \frac{J_1(kr)}{J_0(ka)} H_0, \quad E_r = E_z = 0$$

Для определения электрического поля вне цилиндра воспользуемся уравнением Максвелла для $\operatorname{rot} \boldsymbol{E}$, которое запишем в интегральной форме:

$$\oint E_l dl = \frac{i\omega}{c} \int B_n dS$$

Внутри цилиндра имеется только одна компонента электрического поля E_α, из граничного условия на поверхности стержня и из симметрии системы следует, что вне цилиндра поле $\boldsymbol{E}$ также будет иметь лишь составляющую E_α, зависящую только от r. Если выбрать в качестве контура l окружность, то контурный интеграл дает $2\pi r E_\alpha$. При вычислении интеграла по площади используем формулы раздела 1.3. Окончательно получим:

$$E_\alpha = \frac{kcH_0}{4\pi\kappa} \cdot \frac{J_1(ka)}{J_0(ka)} \cdot \frac{a}{r} + \frac{H_0}{2r}\left(r^2 - a^2\right), \quad \text{если} \quad a \leqslant r \leqslant b,$$

$$E_\alpha = \frac{kcH_0}{4\pi\kappa} \cdot \frac{J_1(ka)}{J_0(ka)} \cdot \frac{a}{r} + \frac{H_0}{2r}\left(b^2 - a^2\right), \quad \text{если} \quad r > b$$

При отсутствии цилиндра, т. е. если $a = 0$, поле будет равно

$$E_\alpha = \frac{1}{2} H_0 r \quad (r < b), \quad E_\alpha = \frac{H_0 b^2}{2r} \quad (r > b)$$

Таким образом, добавочное магнитное поле, связанное с наличием цилиндра, равно нулю при $r > a$, хотя добавочное электрическое поле отлично от нуля. Это связано с тем, что точное уравнение

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}$$

справедливое вне проводника, заменяется приближенным уравнением $\nabla \times \boldsymbol{H} = 0$ (в квазистационарном приближении током смещения пренебрегаем). При точном решении задачи добавочное магнитное поле вне проводника также будет отлично от нуля (см. задачу 10.35*, в которой рассматривается дифракция плоской волны на проводящем цилиндре).

10.32. При малых частотах ($|ka| \ll 1$ или $\delta \gg a$)

$$j = i \frac{cH_0}{4\pi} \cdot \frac{r}{\delta^2} = \frac{i\mu\kappa\omega H_0}{2c} r$$

следовательно, плотность тока линейно зависит от r и пропорциональна частоте.

При больших частотах ($|ka| \gg 1$ или $\delta \ll a$) нужно использовать асимптотическую формулу для функции Бесселя, с помощью которой получим

$$j = (i-1) \frac{cH_0}{4\pi\delta} \sqrt{\frac{a}{r}} e^{-(1-i)(a-r)/\delta}$$

При $a - r \gg \delta$ плотность тока становится исчезающе малой. Таким образом, при больших частотах ток сконцентрирован в основном в тонком поверхностном слое.

10.33.

$$Q = -\frac{ac^2H_0^2}{16\pi\kappa}\,\mathrm{Re}\left[\frac{kJ_1(ka)}{J_0(ka)}\right], \quad k^2 = i\frac{4\pi\mu\kappa\omega}{c^2}$$

- При $|ka| \ll 1$ (малые частоты):

$$Q = \frac{c^2H_0^2}{64\pi\kappa}\left(\frac{a}{\delta}\right)^4 = \pi\kappa\left(\frac{a^2H_0\mu\omega}{4c}\right)^2$$

При $|ka| \gg 1$ | (большие частоты):

$$Q = \frac{c^2H_0^2}{16\pi\kappa}\left(\frac{a}{\delta}\right) = \frac{acH_0^2}{8}\sqrt{\frac{\mu\omega}{2\pi\kappa}}$$

Диссипация энергии при малых частотах пропорциональна ω^2, а при больших $\sqrt{\omega}$.

10.34.

$$\beta = \beta' + i\beta'' = -\frac{a^2}{4}\left[1 - \frac{2}{ka}\cdot\frac{J_1(ka)}{J_0(ka)}\right], \quad k^2 = i\frac{4\pi\kappa\omega}{c^2}$$

При $|ka| \gg 1$ (большие частоты):

$$\beta' = -\frac{a^2}{4}\left(1 - \frac{c}{a\sqrt{2\pi\kappa\omega}}\right), \quad \beta'' = \frac{ca}{4\sqrt{2\pi\kappa\omega}}$$

следовательно, при больших частотах $\beta'' \to 0$, т. е. потери уменьшаются, ввиду вытеснения поля из проводника. Действительная часть поляризуемости β', если ее отнести к единице объема, в этом пределе совпадает с магнитной поляризуемостью сверхпроводящего цилиндра (см. пример 9.8): $\chi = \beta'/\pi a^2 = -1/4\pi$.

При $|ka| \ll 1$ (малые частоты):

$$\beta' = -\frac{\pi^2a^6\kappa^2\omega^2}{12c^4}, \quad \beta'' = \frac{\pi a^4\kappa\omega}{8c^2}$$

Таким образом, при $\omega \to 0, \beta \to 0$; это связано с тем, что $\mu = 1$, т. е. статическая магнитная поляризуемость равна нулю.

10.35. Магнитный момент, создаваемый вихревыми токами, вследствие симметрии системы будет направлен вдоль внешнего магнитного поля. Поэтому во внешней области полное магнитное поле $\boldsymbol{H}_2$ можно записать в виде

$$\boldsymbol{H}_2(\boldsymbol{r}) = \frac{4\boldsymbol{r}(\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{r})}{r^4} - \frac{2\boldsymbol{m}}{r^2} + \boldsymbol{H}_0 \tag{1}$$

Здесь $\boldsymbol{m}$ - неизвестный магнитный момент единицы длины цилиндра, совпадающий по направлению с $\boldsymbol{H}_0$; $\boldsymbol{r}$ - радиус-вектор в плоскости, перпендикулярной оси цилиндра. Полю $\boldsymbol{H}_2$ соответствует векторный потенциал

$$\boldsymbol{A}_2 = \frac{2(\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{r})}{r^2} + (\boldsymbol{H}_0\times\boldsymbol{r})$$

который в проекциях запишется так:

$$A_{2z} \equiv A_2 = \left(\frac{2m}{r} + H_0r\right)\sin\alpha, \quad A_{2r} = A_{2\alpha} = 0 \tag{2}$$

(угол α отсчитывается от направления $\boldsymbol{H}_0$).

Таким образом, во внешней области векторный потенциал имеет только продольную

(относительно оси цилиндра) составляющую, пропорциональную $\sin\alpha$. Условиям непрерывности составляющих поля на границе можно удовлетворить, если искать векторный потенциал во внутренней области в аналогичном виде:

$$A_{1z} \equiv A_1 = F(r)\sin\alpha, \quad A_{1r} = A_{1\alpha} = 0. \tag{3}$$

Электрическое поле $\boldsymbol{E}$ выражается в общем случае через оба потенциала, A и φ. Наложим, как обычно, на потенциалы дополнительное условие

$$\operatorname{div}\boldsymbol{A} + \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0$$

Тогда, поскольку $\operatorname{div} A = 0$, что следует из формул (2) и (3), будем иметь $\partial\varphi/\partial t = -i\omega\varphi = 0$, так что

$$\boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t} = \frac{i\omega}{c}\boldsymbol{A}$$

Поэтому $\boldsymbol{A}$ будет удовлетворять такому же уравнению (10.14), как и электрическое поле. Решением этого уравнения, ограниченным при $r = 0$, является функция Бесселя:

$$F(r) = \dot{C}J_1(kr), \quad A_1 = CJ_1(kr)\sin\alpha \tag{4}$$

Постоянные C и m в (4) и (2) определяются из условия равенства внутреннего ($\boldsymbol{H}_1$) и внешнего ($\boldsymbol{H}_2$) полей на границе цилиндра: $\boldsymbol{H}_1 = \boldsymbol{H}_2$ при $r = a$. Использовав свойства функций Бесселя, получим

$$C = \frac{2H_0}{kJ_0(ka)}, \quad m = -\frac{a^2H_0}{2}\left(1 - \frac{2}{ka}\cdot\frac{J_1(ka)}{J_0(ka)}\right) \tag{5}$$

Из выражения для m следует, что поперечная магнитная поляризуемость цилиндра

$$\beta = -\frac{a^2}{2}\left[1 - \frac{2}{ka}\cdot\frac{J_1(ka)}{J_0(ka)}\right] \tag{6}$$

вдвое больше его продольной поляризуемости (см. предыдущую задачу). Компоненты магнитного поля внутри цилиндра определяются из (4) и (5):

$$\left.\begin{aligned} H_{1r} &= \tfrac{1}{r}\tfrac{\partial A_1}{\partial\alpha} = 2H_0\tfrac{J_1(kr)}{krJ_0(ka)}\cos\alpha, \quad H_{1z} = 0 \\ H_{1\alpha} &= -\tfrac{\partial A_1}{\partial r} = -2H_0\tfrac{J_1'(kr)}{J_0(ka)}\sin\alpha \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Определим еще плотность тока в цилиндре. По формуле $j = (c/4\pi)\operatorname{rot}\boldsymbol{H}$ получим

$$J_z = -\frac{cH_0}{2\pi}\cdot\frac{J_1(kr)}{J_0(ka)}\sin\alpha, \quad J_\alpha = j_r = 0 \tag{8}$$

Из формулы (8) видно, что в каждый момент времени в двух половинах цилиндра $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$ и $\pi \leqslant \alpha \leqslant 2\pi$ токи текут в противоположных направлениях; полный ток через сечение цилиндра равен нулю. Радиальная зависимость плотности тока такая же, как в случае цилиндра, находящегося в продольном поле, и была исследована в задаче 10.32. (Однако нужно иметь в виду, что в случае продольного поля токи текут по окружностям в плоскостях, перпендикулярных оси цилиндра, тогда как в случае поперечного поля они текут вдоль оси цилиндра.)

10.36. Среднее тепловыделение на единицу длины цилиндра проще всего вычислить по формуле (10.20), рассмотрев поток энергии, втекающий через боковую поверхность цилиндра. Используя результаты задачи 10.35*, получим

$$Q = -\frac{ac^2H_0^2}{8\pi\kappa}\,\mathrm{Re}\left(\frac{J_1(ka)}{J_0(ka)}\right)$$

Тот же результат получится с помощью формулы (10.19).

10.37. Для определения вращательного момента нужно знать'электрическое и магнитное поля внутри цилиндра. Их можно найти тем же способом, что и в задаче 10.35* для линейно поляризованного внешнего поля:

(1)

$$\left.\begin{array}{ll} H_r &= -\frac{2H_0J_1(kr)}{krJ_0(ka)}e^{i\alpha}, \quad H_\alpha = -\frac{2iH_0J_1'(kr)}{J_0(ka)}e^{i\alpha} \\ j_z &= \frac{ickH_0}{2\pi}\cdot\frac{J_1(kr)}{J_0(ka)}e^{i\alpha} \end{array}\right\}$$

Сила, приложенная к единице объема цилиндра, вычисляется по формуле

$$\boldsymbol{f} = \frac{1}{c}(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{H}) \tag{2}$$

(считаем, что внутри цилиндра $\mu = 1$). Радиальная компонента этой силы вызовет радиально направленное давление, азимутальная компонента создает вращательный момент. Поскольку $\boldsymbol{j}$ и $\boldsymbol{H}$ - комплексные величины, среднее значение азимутальной составляющей силы выразится так:

$$\bar{f}_\alpha = \frac{1}{2c}\,\mathrm{Re}\,(j_zH_r^*)\,. \tag{3}$$

Вращательный момент, действующий на единицу длины цилиндра, получится путем умножения средней силы (3) на r и интегрирования по сечению цилиндра. Интеграл вычисляется с помощью формулы (1.176). В результате получим

$$\bar{N} = -\frac{aH_0^2}{|k|^2}\,\mathrm{Re}\left(k\frac{J_1(ka)}{J_0(ka)}\right) \tag{4}$$

Этот же результат получается другим путем. Момент сил можно выразить через магнитный момент системы по формуле

$$\boldsymbol{N}(t) = \boldsymbol{m}(t)\times\boldsymbol{H}_0(t) \tag{5}$$

Определяя $\bar{N}_z = \bar{N}$ через комплексные амплитуды $\boldsymbol{H}_0$ и $\boldsymbol{m}$, а $\boldsymbol{m}$ - через поперечную магнитную поляризуемость цилиндра (см. задачу 10.35 *), приходим к формуле (4).

При малых частотах из (4) получим

$$\bar{N} = \frac{a^4H_0^2}{4\delta^2} = \frac{\pi\kappa\omega}{4c^2}H_0^2a^4 \tag{6}$$

а при больших частотах

$$\bar{N} = \frac{1}{2}a\delta H_0^2 = \frac{ca}{\sqrt{8\pi\kappa\omega}}H_0^2 \tag{7}$$

Из этих формул видно, что вращательный момент исчезает в обоих предельных случаях очень малых и очень больших частот.

Если поле поляризовано линейно, средний вращательный момент равен нулю (формально это следует из того, что интеграл по α обратится в нуль при вычислении N; см. задачу 10.35$^\wedge$, в которой найдены $\boldsymbol{j}$ и $\boldsymbol{H}$ для этого случая). Таким образом, вращательный момент создается «вращающимся» полем.

Явление, рассмотренное в данной задаче, лежит в основе устройства асинхронного электромотора.

10.38. Наряду с неподвижной системой отсчета, у которой ось Oz совпадает с осью цилиндра, а ось Ox - с направлением внешнего поля $\boldsymbol{H}_0$, рассмотрим систему координат ξ, η, z, вращающуюся вместе с цилиндром. В этой системе координат внешнее магнитное поле запишется в виде

$$\boldsymbol{H}_0(t) = (\boldsymbol{H}_{01} - i\boldsymbol{H}_{02})\, e^{-i\omega t}$$

Здесь $\boldsymbol{H}_{01}$ и $\boldsymbol{H}_{02}$ - постоянные векторы одинаковой длины $H_{01} = H_{02} = H_0$, имеющие направления координатных осей ξ, η. Поле такого вида было рассмотрено в задаче 10.37ˆ. Создаваемый им вращательный момент (который в данном случае будет тормозящим) равен

$$\bar{N} = -\frac{aH_0^2}{|k|^2}\,\mathrm{Re}\left(k\frac{J_1(ka)}{J_0(ka)}\right)$$

10.39. В задаче 10.31* было показано, что вихревые токи, возникающие в цилиндре при изменении внешнего продольного поля, не создают добавочного магнитного поля вне цилиндра; во внутренней области создаваемое ими поле продольно и зависит только от r. Это поле будет удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial^2 H}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial H}{\partial r} - \frac{4\pi\mu\kappa}{c^2}\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \tag{1}$$

Очевидно, что магнитное поле внутри цилиндра будет затухать со временем. Поэтому частные решения уравнения (1) будем искать в виде $F(r)e^{-\gamma t}$, где $\gamma > 0$ - постоянная. Для $F(r)$ получаем уравнение Бесселя:

$$F''(r) + \frac{1}{r}F'(r) + k^2 F(r) = 0 \tag{2}$$

где $k^2 = 4\pi\mu\kappa\gamma/c^2$.

Ограниченное при $r = 0$ решение уравнения (2) имеет вид $F(r) = CJ_0(kr)$. Поскольку внешнее поле H_0 выключается, а добавочное поле, создаваемое вихревыми токами, вне цилиндра равно нулю, на границе должно выполняться условие $H|_{r=a} = 0$, т. е.

$$J_0(ka) = 0 \tag{3}$$

Отсюда находим $k_m a = \beta_m, m = 1, 2, \ldots$, где β_m - нули функции J_0. Возможными значениями γ будут

$$\gamma_m = \frac{c^2\beta_m^2}{4\pi\mu\kappa a^2} \tag{4}$$

Общее решение уравнения (1), соответствующее рассматриваемой краевой задаче, запишется в виде

$$H(r,t) = \sum_m C_m J_0\left(k_m r\right) e^{-\gamma_m t} \tag{5}$$

Коэффициенты C_m определятся из начального условия

$$H(r,0) = \sum_m C_m J_0\left(k_m r\right) \tag{6}$$

Воспользовавшись свойством ортогональности функций Бесселя:

$$\int_0^1 xJ_0\left(k_m x\right) J_0\left(k_n x\right) dx = \frac{1}{2}\left[J_0'\left(k_m\right)\right]^2 \delta_{mn} \tag{7}$$

получим

$$C_m = \frac{2}{a^2\left[J_0'\left(k_m a\right)\right]^2} \int_0^a H(r,0) J_0\left(k_m r\right) r dr \tag{8}$$

В начальный момент времени поле $H(r,0)$ равно внешнему полю H_0, так как постоянное магнитное поле не искажается, если в него поместить бесконечный цилиндр, ось которого параллельна полю. Использовав формулы (1.145)-(1.147), найдем

$$C_m = \frac{2H_0}{\left(k_m a\right) J_1\left(k_m a\right)} \tag{9}$$

Скорость затухания поля будет определяться наименьшим из значений γ_m, т. е. γ_1. Его можно получить, подставив в (4) значение наименьшего корня функции Бесселя $\beta_1 \approx 2,4$. Время затухания поля $\tau = 1/\gamma_1$.

10.40. Магнитное поле внутри шара в нулевом (по частоте) приближении было найдено в задаче 9.35:

$$\boldsymbol{H} = \frac{3}{\mu+2}\boldsymbol{H}_0 \tag{1}$$

Электрическое поле внутри шара в этом же приближении, как следует из уравнения (10.12), оказывается равным нулю, так как постоянное магнитное поле не создает электрического поля. Для определения электрического поля в следующем (линейном по ω) приближении используем уравнение (10.11) в интегральной форме.

Из свойств симметрии системы ясно, что токи в шаре будут течь по окружностям в плоскостях, перпендикулярных $\boldsymbol{H}_0$; так же будет направлено электрическое поле.

Выбрав сферическую систему координат с осью Oz вдоль $\boldsymbol{H}_0$, получим

$$E = \frac{i\omega H}{2c} r\sin\vartheta, \quad j = \kappa E \tag{2}$$

где H определено равенством (1). Выделяющееся в шаре тепло Q найдем, интегрируя $q = \frac{1}{2}\kappa|E|^2$ по объему шара:

$$Q = \frac{3\pi a^5 \kappa\omega^2 H_0}{5c^2(\mu+2)^2} \tag{3}$$

10.41. Вне шара магнитное поле:

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_0 + \frac{3\boldsymbol{r}(\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{r})}{r^5} - \frac{\boldsymbol{m}}{r^3}$$

где $\boldsymbol{m} = -\frac{1}{2}a^3\boldsymbol{H}_0; \beta = -\frac{1}{2}a^3$ - магнитная поляризуемость шара при сильном скин-эффекте.

Внутри шара:

$$H_\vartheta = -\frac{3}{2}H_0 e^{-(1-i)z/\delta}\sin\vartheta, \quad H_r = H_\alpha = 0$$

где z отсчитывается от поверхности по нормали в глубь проводника, полярная ось сферической системы координат направлена вдоль $\boldsymbol{H}_0$;

$$Q = \frac{3a^2 c}{8}\sqrt{\frac{\mu\omega}{2\pi\kappa}}H_0^2$$

10.42. В случае сильного скин-эффекта поле внутри эллипсоида равно нулю, а во внешней области удовлетворяет уравнениям $\operatorname{rot}\boldsymbol{E} = 0, \operatorname{div}\boldsymbol{E} = 0$ и граничным условиям $H_n|_S = 0, \boldsymbol{H}|_{r\to\infty} \to \boldsymbol{H}_0$, где $\boldsymbol{H}_0$ - внешнее поле и через S обозначена поверхность эллипсоида.

Сравним эту задачу с задачей о диэлектрическом эллипсоиде с $\varepsilon = 0$, находящемся в однородном электрическом поле. Электрическое поле вне такого эллипсоида будет удовлетворять уравнениям

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{E} = 0, \quad \operatorname{div}\boldsymbol{E} = 0 \tag{1}$$

и граничным условиям

$$E_n|_S = \varepsilon E_{int}|_S = 0, \quad \boldsymbol{E}|_{r\to\infty} \to \boldsymbol{E}_0 \tag{2}$$

Условия для касательных компонент $\boldsymbol{E}$ можно не рассматривать, так как соотношения (1) и (2) однозначно определяют вектор $\boldsymbol{E}$ во внешней области.

Мы видим, что рассматриваемая задача о проводящем эллипсоиде, при сильном скин-эффекте формально совпадает с задачей о диэлектрическом эллипсоиде, у которого $\varepsilon = 0$. Полагая в формулах, приведенных в ответе задачи $8.45, \varepsilon_1 = 0$, получим магнитные поляризуемости в направлении главных осей эллипсоида:

$$\beta^{(i)} = -\frac{V}{4\pi\left(1 - n^{(i)}\right)} \tag{3}$$

где $n^{(i)}$ - соответствующий коэффициент деполяризации, V - объем эллипсоида.

Для сильно вытянутого эллипсоида вращения с полуосями $a, b \gg a$ (стержень) имеем (см. задачу 8.43):

$$\beta_\perp = -\frac{2}{3}a^2 b, \quad \beta_\parallel = -\frac{1}{3}a^2 b$$

Для сильно сплюснутого эллипсоида ($b \ll a$, диск):

$$\beta_\perp = -\frac{2a^3}{3\pi}, \quad \beta_\parallel = -\frac{1}{3}a^2 b \to 0 \quad \text{при } b \to 0$$

10.43. Вследствие аксиальной симметрии системы шар + внешнее поле, распределение вихревых токов в шаре и электрическое поле также обладают аксиальной симметрией. На этом основании можно утверждать, что электрическое поле будет иметь только одну составляющую E_α, которая не может зависеть от $\alpha : E_\alpha = f(r, \vartheta)$. Множитель $e^{-i\omega t}$ всюду опускаем.

Ищем решение уравнения (10.14) для полного электрического поля $\boldsymbol{E}$ в виде

$$E_\alpha = F(r)\sin\vartheta, \quad E_r = E_\vartheta = 0 \tag{1}$$

Пользуясь выражением для лапласиана вектора в сферических координатах (1.279), найдем уравнение для $F(r)$, которое подстановкой $F(r) = \chi(r)/\sqrt{r}$ сводится к уравнению Бесселя. Его решением, ограниченным при $r = 0$, будет

$$\chi(r) = AJ_{3/2}(kr), \quad k = \frac{1+i}{\delta} \tag{2}$$

Магнитное поле внутри шара определится из уравнения (10.10). Магнитное поле во внешней области будет складываться из внешнего поля $\boldsymbol{H}_0$ и поля магнитного диполя $\boldsymbol{m}$, направление которого совпадает с $\boldsymbol{H}_0$:

$$\boldsymbol{H}_2 = \boldsymbol{H}_0 + \frac{3\boldsymbol{r}(\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{r})}{r^5} - \frac{\boldsymbol{m}}{r^3} \tag{3}$$

Постоянные A и m определяются из граничных условий для $\boldsymbol{H}$ на поверхности шара. Выражая функции Бесселя полуцелого порядка через тригонометрические функции, получим

$$m = -\frac{a^3}{2}\left(1 - \frac{3}{k^2a^2} + \frac{3}{ka}\operatorname{ctg} ka\right)H_0, \quad A = \frac{3ia\omega}{c\sin ka}\sqrt{\frac{\pi}{8k}}H_0 \tag{4}$$

10.44.

$$Q = -\frac{3a\delta^2 H_0^2}{8}\left(1 - \frac{a}{\delta}\cdot\frac{\operatorname{sh} 2a/\delta + \sin 2a/\delta}{\operatorname{ch} 2a/\delta - \cos 2a/\delta}\right)$$

10.45. Используем решение, полученное в задаче 10.43*. Ищем электрическое поле внутри шара в виде

$$\boldsymbol{E}(r,\vartheta,t) = \boldsymbol{e}_\alpha \mathscr{E}(r,\vartheta)e^{-\gamma t} \tag{1}$$

где $\gamma > 0$ - неизвестная постоянная затухания, и накладываем начальное условие

$$\boldsymbol{E}(r,\vartheta,t)|_{t=0} = \boldsymbol{e}_\alpha E_0(r,\vartheta) = \boldsymbol{e}_\alpha \frac{3ia\omega H_0}{2c\sin ka} j_1(kr)\sin\vartheta \tag{2}$$

где $E_0(r,\vartheta)$ - стационарное значение электрического поля, полученное в задаче 10.43*. Оно записано через сферическую функцию Бесселя (1.171) $j_1(z) = \sqrt{\pi/2z}J_{3/2}(z)$. Подстановка (1) во второе уравнение 10.14 приводит к следующему уравнению:

$$\Delta\mathscr{E} - \frac{\mathscr{E}}{r^2\sin^2\vartheta} + s^2\mathscr{E} = 0, \quad s = \sqrt{\frac{4\pi\kappa\gamma}{c^2}} \tag{3}$$

Его решение, ограниченное при $r = 0$, имеет вид

$$\mathscr{E}(r,\vartheta) = Aj_1(sr)\sin\vartheta \tag{4}$$

где A - постоянная.
Магнитное поле внутри шара можно вычислить из закона электромагнитной индукции (10.10):

$$\boldsymbol{H}_{int} = -\int_t^\infty \frac{\partial \boldsymbol{H}_{int}}{\partial t}dt = -\frac{c}{\gamma}\nabla\times\boldsymbol{e}_\alpha\mathscr{E}(r,\vartheta)e^{-\gamma t} \tag{5}$$

Магнитное поле вне шара после выключения внешнего поля $\boldsymbol{H}_0$ создается затухающими вихревыми токами и его можно записать в виде (см. уравнение (3) из решения задачи 10.43*)

$$\boldsymbol{H}_{ext} = \left(\frac{3\boldsymbol{r}(\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{r})}{r^5} - \frac{\boldsymbol{m}}{r^3}\right)e^{-\gamma t} \tag{6}$$

где $\boldsymbol{m}$ - магнитный момент вихревых токов. Собственные числа γ должны определяться из граничных условий. При $\mu = 1$ граничные условия имеют вид

$$H_r^{int} = H_r^{\text{ext}}\,, \quad H_\vartheta^{int} = H_\vartheta^{ext} \quad \text{при} \quad r = a \tag{7}$$

Подставляем решения (5) и (6) в граничные условия (7) и получаем два уравнения

$$\begin{cases} \dfrac{cA}{\gamma a}\left[(sa)j_0(sa) - j_1(sa)\right] = \dfrac{m}{a^3} \\ -\dfrac{cA}{\gamma a} j_1(sa) = \dfrac{m}{a^3} \end{cases} \tag{8}$$

Исключив отсюда постоянные A, m, находим уравнение для определения собственных чисел:

(9) $(sa)j_0(sa) = \sin sa = 0, s_n^2 = \frac{n^2\pi^2}{a^2}, \gamma_n = \frac{\pi n^2 c^2}{4\kappa a^2}$, где $n = 1, 2, \ldots$

Поскольку получено бесконечное множество собственных чисел, то все решения должны быть записаны как суммы по всем возможным положительным n. Значение $n = 0$ приводит к нулевому решению, а отрицательные n дают линейно зависимые решения. Постоянные A_n, m_n приобретают индекс n.

Остается вычислить указанные постоянные. Значения A_n определяются из начального условия (2), а величины m_n выражаются через A_n с помощью уравнений (8). Условие (2) после подстановки найденного решения дает

$$\frac{3ia\omega H_0}{2c\sin ka} j_1(kr) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n j_1\left(s_n r\right) \tag{10}$$

Таким образом, нужно разложить известную левую часть этого равенства по системе собственных функций задачи $j_1\left(s_n r\right)$. Убедимся в том, что эти собственные функции взаимно ортогональны:

(11)

$$\begin{aligned} \int_0^a r^2 j_1\left(s_n r\right) j_1\left(s_m r\right) dr &= \frac{a^2}{s_m} \int_0^1 x^2 j_1\left(s_n a x\right) \frac{d}{dx} j_0\left(s_n a x\right) dx = \\ &= \frac{a^3 s_n}{s_m} \int_0^1 x^2 j_0\left(s_n a x\right) j_0\left(s_m a x\right) dx = \frac{a}{2s_m^2}\delta_{mn} \end{aligned}$$

Здесь использованы формулы для сферических функций Бесселя $j_1(z) = -j_0'(z), z^2 j_1'(z) = z^2 j_0(z) - 2z j_1(z)$. Вычисление интеграла $\int_0^a r^2 j_1(kr) j_1\left(s_n r\right) dr$ производится с помощью соотношения (1.176), которое при $p = 3/2$ можно записать через сферические функции Бесселя:

$$\int_0^1 x^2 j_1(ax) j_1(bx) dx = \frac{a j_1'(a) j_1(b) - b j_1'(b) j_1(a)}{b^2 - a^2} \tag{12}$$

В итоге получим

$$A_m = i\frac{6a^2 s_m^2 \omega H_0}{c\sin ka\left(s_m^2 - k^2\right)}\left[k j_1'(ka) j_1\left(s_m a\right) - s_m j_1'\left(s_m a\right) j_1(ka)\right] \tag{13}$$

Электрическое поле внутри шара записывается в виде ряда

$$\boldsymbol{E}(r, \vartheta, t) = \boldsymbol{e}_\alpha \sin\vartheta \sum_{n=1}^{\infty} A_n j_1\left(s_n r\right) e^{-\gamma_n t} \tag{14}$$

Аналогичным образом, обобщая выражение (6), можно записать магнитное поле вне шара:

$$\boldsymbol{H}_{ext} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3\boldsymbol{r}\,(\boldsymbol{m}_n \cdot \boldsymbol{r})}{r^5} - \frac{\boldsymbol{m}_n}{r^3} \right) e^{-\gamma_n t} \tag{15}$$

Нетрудно проверить, что начальное условие для $\boldsymbol{H}_{\text{ext}}$ выполняется благодаря соотношению $\sum\limits_n m_n = \boldsymbol{m}$.

10.46.

$$R = \frac{l}{ca}\sqrt{\frac{\omega}{\pi\kappa}}\,\mathrm{Re}\left[(1+i)\frac{J_0(ka)}{J_1(ka)}\right], \quad \text{где} \quad R_0 = \frac{(1+i)\sqrt{2\pi\kappa\omega}}{c}$$

При $|ka| \ll 1$ (малые частоты):

$$R = R_0\left[1 + \frac{1}{12}\left(\frac{\pi\kappa\omega a^2}{c^2}\right)^2\right]$$

где $R_0 = l/\pi a^2\kappa$ - сопротивление постоянному току.

При $|ka| \gg 1$ (большие частоты):

$$R = \frac{1}{\kappa}\cdot\frac{l}{2\pi a\delta} = \frac{l}{ca}\sqrt{\frac{\omega}{2\pi\sigma}}$$

Как следует из последней формулы, эффективная площадь сечения проводника при сильном скин-эффекте равна $2\pi a\delta$.

10.47.

$$R = \frac{\omega\delta_2}{2ac^2}\cdot\frac{(\delta_1^2-\delta_2^2)\sin 2h/\delta_2 - (\delta_1^2+\delta_2^2)\,\mathrm{sh}\,2h/\delta_2 + 2\delta_1\delta_2\cos 2h/\delta_2}{(\delta_1\sin h/\delta_2 + \delta_2\cos h/\delta_2)^2 + (\delta_1^2+\delta_2^2)\,\mathrm{sh}^2\,h/\delta_2}$$

где $\delta_1 = c/\sqrt{2\pi\kappa_1\omega}, \delta_2 = c/\sqrt{2\pi\kappa_2\omega}$.

10.48.

$$H' = \frac{2H_0}{ka\,\mathrm{sh}\,kh + 2\,\mathrm{ch}\,kh}, \quad \text{где} \quad k = \frac{1+i}{\delta}$$

При $|kh| \ll 1$ (малые частоты) $H' = H_0$ т. е. наличие цилиндрической оболочки не сказывается на величине поля. При $|kh| \gg 1$ (большие частоты), имеем:

$$\mathrm{sh}\,kh \approx \mathrm{ch}\,kh \approx \frac{1}{2}e^{(1+i)h/\delta}$$

так как $a \gg \delta$, то

$$H' = (1-i)\frac{\delta}{2a}e^{-(1+i)\frac{h}{\delta}}H_0, \quad H_0 \gg |H'|$$

Сильное ослабление поля получается за счет того, что вихревые токи, возникающие в оболочке, создают в полости добавочное поле обратного направления.

10.49.

$$j = \frac{2iJ_0\mu\kappa\omega}{c^2ka}\cdot\frac{\mathrm{sh}\,k(h-x)}{\mathrm{ch}\,kh}$$

где x отсчитывается от поверхности по радиусу в глубь проводника;

$$R = \frac{1}{2\pi a\delta\sigma} \cdot \frac{\operatorname{sh} 2h/\delta - \sin 2h/\delta}{2\left(\operatorname{sh}^2 h/\delta + \cos^2 h/\delta\right)}$$

Полый и сплошной проводники имеют одинаковое сопротивление при $\delta \ll h$.

10.50. Выберем цилиндрическую систему координат, как показано на рис. 10.13. При слабом скин-эффекте касательная к стенке трубы компонента магнитного поля на поверхности S этой стенки должна удовлетворять условию

$$H_{2\tau} - H_{1\tau} = \frac{4\pi}{c} i \tag{1}$$

где $i = \kappa h E = \zeta E$ - поверхностный ток, ζ - поверхностная проводимость.

Электрическое поле, которое будет иметь, очевидно, только z-компоненту, должно быть непрерывно на той же поверхности S:

$$E_1 = E_2 = E \tag{2}$$

Дальнейшее решение весьма сходно с решением задачи 8.98 (задача о слабо неконцентрических сферах). С точностью до членов (l/a) уравнение границы запишется в виде

$$r = a + l\cos\alpha \tag{3}$$

Векторный потенциал, направление которого совпадает с направлением тока, ищем в виде

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= -\tfrac{2J}{c}\ln\tfrac{r}{a} + C_1 r\cos\alpha + C \\ A_2 &= -\tfrac{2J'}{c}\ln\tfrac{r}{a} + \tfrac{B_1}{r}\cos\alpha \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

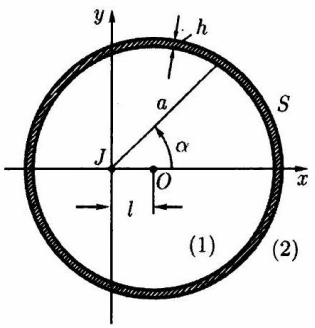


Рис. 10.13

где C_1 и B_1 - функции времени, имеющие первый порядок малости относительно (l/a), J' - имеет нулевой порядок относительно (l/a).

При слабом скин-эффекте $(h \ll \delta)$ векторный потенциал удовлетворяет условию:

$$A_1 = A_2 \quad \text{при } r = a + l\cos\alpha. \tag{5}$$

Отсюда, отбрасывая члены порядка $(l/a)^2$, находим

$$B_1 = a^2 C_1 + \frac{2\left(J' - J\right)l}{c}, \quad C = 0 \tag{6}$$

В граничном условии (1) можно заменить H_τ на H_α. Как легко проверить, это приведет к ошибке порядка $(l+a)^2$. Поскольку

$$H_\alpha = -\frac{\partial A}{\partial r}, \quad i = \zeta E = -\frac{\zeta}{c}\frac{\partial A}{\partial t}$$

имеем на S:

$$\frac{\partial A_1}{\partial r} - \frac{\partial A_2}{\partial r.} = -\frac{4\pi\zeta}{c}\frac{\partial A}{\partial t}$$

или, с точностью до (l/a),

$$\frac{2\,(J'-J)}{ca} + 2C_1\cos\alpha = \frac{4\pi\zeta}{c^2}\left[\frac{2}{ca}\frac{d(Jl)}{dt} + a\frac{dC_1}{dt}\right]\cos\alpha$$

Отсюда сразу следует $J = J'$; этот результат связан с тем, что скинэффект считается слабым. Для C_1 получается дифференциальное уравнение

$$\frac{dC_1}{dt} + \rho C_1 = \frac{2}{a^2 c}\frac{d(Jl)}{dt} \tag{7}$$

Параметр $\rho = c^2/2\pi a\zeta$ совпадает со значением сопротивления единицы длины трубы, выраженным в электромагнитных единицах.

Решение уравнения (7) легко получить методом вариации произвольных постоянных. Оно имеет вид

$$C_1 = \frac{2}{ca^2}\int\limits_{-\infty}^{t} e^{\rho(\tau-t)}\frac{d}{d\tau}[J(\tau)l(\tau)]d\tau$$

(считаем, что при $t \to -\infty$ ток отсутствовал).
Сила f, приложенная к единице длины тока J, может быть вычислена по формуле

$$f_x = -\frac{1}{c}JH'_y$$

где H'_y - магнитное поле вихревых токов, текущих в оболочке, на прямой, вдоль которой течет ток J. Этому полю соответствует векторный потенциал

$$A' = C_1 r\cos\alpha = C_1 y$$

откуда

$$H_y = -\frac{\partial A'}{\partial y} = -C_1$$

Окончательно

$$f_x = \frac{2J(t)}{c^2a^2}\int\limits_{-\infty}^{t} e^{\rho(\tau-t)}\frac{d}{d\tau}[J(\tau)l(\tau)]d\tau$$

Рассмотрим некоторые частные случаи. Если ток постоянный ($J = \text{const}$), то

$$f_x = \frac{2J^2}{c^2a^2}\int\limits_{-\infty}^{t} e^{\rho(\tau-t)}\dot{l}(\tau)d\tau$$

При отклонении тока от оси цилиндра ($i > 0$) возникнет сила, препятствующая этому отклонению. При медленном движении ($\ddot{l} \ll \rho\dot{l}$), интегрируя по частям, найдем

$$f_x = \frac{2J^2}{c^2a^2}\left(\frac{\dot{i}}{\rho} - \frac{\ddot{l}}{\rho^2} + \dots\right)$$

В частности, при равномерном перемещении $l = vt$ тормозящая сила

$$f_x = \frac{2J^2 v}{c^2 a^2 \rho}$$

10.51.

$$f_x = \frac{2J^2(t) l(t)}{c^2 a^2}$$

10.54. При статическом равновесии ($u = 0$) в отсутствие неэлектромагнитных сил имеем из уравнений (10.23), (10.11) условие равновесия $\nabla p = \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{B}/c$. Отсюда следует, что векторы $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{j}$ перпендикулярны градиенту давления, т. е. касательны к поверхностям равного давления.

10.55. Магнитное поле имеет одну проекцию

$$B_\varphi \equiv B(r) = \frac{4\pi}{cr} \int\limits_0^r r j(r) dr$$

Интегрируя уравнение равновесия, следующее из (10.23) при $u = 0$, с граничным условием $p|_{r \geqslant a} = 0$, находим

$$p(r) = \frac{1}{8\pi} \int\limits_r^a \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 B^2 \right) dr \tag{1}$$

где $B = (4\pi/cr) \int\limits_0^r r j(r) dr$ при $r < a, B = 2J/cr$ при $r > a$. Чтобы связать полный ток с давлением, интегрируем (1) по всему поперечному сечению и пользуемся соотношением $aB(a) = 2J/c$. Получим

$$\int\limits_0^a p(r) 2\pi r dr = \frac{J^2}{2c^2} \tag{2}$$

Рассматривая плазму как равновесный идеальный газ с заданной температурой T (в энергетических единицах), полагаем $p = 2n(r)T$ и получаем из (2)

$$J = 2c\sqrt{NT} \tag{3}$$

Подстановка в (3) численных значений дает $J = 7,5 \times 10^4 A$. На практике обычно плазма неизотермична, температура электронов выше температуры ионов. Для поддержания равновесия ток должен расти, так как при его протекании температура плазмы и ее давление возрастают. Кроме того, равновесие неустойчиво относительно изгибов плазменного шнура и его перетяжек.

10.56. Ток должен течь в тонком поверхностном слое. Тогда внутри столба будет постоянное давление

$$p = \frac{J^2}{2\pi c^2 a^2}$$

10.57. Магнитное поле внутри цилиндра имеет одну составляющую $B_z(r) \equiv B(r) = (4\pi/c) \int\limits_r^a j_\varphi(r) dr$. Условие равновесия внутри цилиндра требует постоянства полного давления:

$$p(r) + \frac{B^2(r)}{8\pi} = \text{ const.}$$

Вне цилиндра в отсутствие вещества $p = 0$ и магнитное поле азимутальных токов $B = 0$, поэтому уравновесить внутреннее давление может только внешнее магнитное поле, направленное параллельно оси цилиндра и равное на границе $B_0 = \sqrt{8\pi p(a)}$. Магнитное поле внутри плазменного столба всегда меньше внешнего поля,

$$\frac{B^2}{8\pi} = \frac{B_0^2}{8\pi} - p$$

поэтому плазма является диамагнетиком.

10.58. б) $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = B_0\,(0, J_1(\alpha r), J_0(\alpha r))$, где $J_n(x)$ - функция Бесселя.

10.59. Из уравнений (10.22), подставив в них $\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$, получим

$$\nabla \times \left(\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} - \boldsymbol{u} \times [\nabla \times \boldsymbol{A}] + \nu_m \nabla \times [\nabla \times \boldsymbol{A}] \right) = 0 \tag{1}$$

Это позволяет представить выражение, стоящее в круглых скобках, в виде градиента некоторой скалярной функции $\varphi(\boldsymbol{r}, t)$:

$$\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} - \boldsymbol{u} \times [\nabla \times \boldsymbol{A}] + \nu_m \nabla \times [\nabla \times \boldsymbol{A}] = -c\nabla\varphi \tag{2}$$

Поскольку векторный потенциал определен с точностью до градиента произвольной скалярной функции, то замена $\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A} - c \int \varphi\,(\boldsymbol{r}, t')\,dt'$ устраняет произвольный скаляр из уравнения (2) и позволяет записать его в виде

$$\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} = \boldsymbol{u} \times [\nabla \times \boldsymbol{A}] - \nu_m \nabla \times [\nabla \times \boldsymbol{A}] \tag{3}$$

Если на векторный потенциал накладывается условие калибровки Кулона $\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0$, то уравнение (3) приобретает вид

$$\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} = \boldsymbol{u} \times [\nabla \times \boldsymbol{A}] - \nu_m \Delta \boldsymbol{A} \tag{4}$$

10.60.

$$B_x(y, z, t) = \left(B_{0y} \frac{\partial u_x}{\partial y} + B_{0z} \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) t, B_y = B_{0y}, B_z = B_{0z}$$

10.61.

$B_\alpha(r, \vartheta, t) = \sin\vartheta \left(r B_{0r}(r, \vartheta) \frac{\partial \Omega}{\partial r} + B_{0\vartheta} \frac{\partial \Omega}{\partial \vartheta} \right) t, B_\vartheta = B_{0\vartheta}, B_r = B_{0r}$.

10.62. Пользуемся декартовыми координатами и проецируем уравнение (10.22) на ось Oz:

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla) B_z = \nu_m \Delta B_z \tag{1}$$

Затем умножаем обе части равенства на B_z и интегрируем по всему двумерному пространству. Слагаемое, содержащее скорость u, обращается в нуль, если среда несжимаемая ($\nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0$) и область движения ограничена. Остальные слагаемые приводятся к виду

$$\frac{\partial}{\partial t} \int B_z^2 dx dy = -2\nu_m \int (\nabla B_z)^2\, dx dy \tag{2}$$

Поскольку правая часть равенства при ограниченной области, занятой полем, отрицательна, то происходит монотонное уменьшение энергии поля и $B_z \to 0$ при $t \to \infty$.

Таким образом, B_z-компонента затухает, и остальные компоненты можно исследовать считая $B_z = 0$.

Они удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial B_{x,y}}{\partial t} + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)B_{x,y} = \nu_m \Delta B_{x,y} + (\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}_{x,y} \tag{3}$$

Эти компоненты удобно выразить обычным образом ($\boldsymbol{B} = \operatorname{rot}\boldsymbol{A}$) через векторный потенциал, направленный вдоль оси $Oz, A_z(x,y) \equiv A(x,y)$. Оба уравнения (3) можно получить из уравнения

$$\frac{\partial A}{\partial t} + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)A = \nu_m \Delta A \tag{4}$$

(при проверке этого утверждения следует снова учесть несжимаемость среды). Умножим обе части (4) на A и проинтегрируем по плоскости (x,y) и по t. Получим

$$\int A^2(x,y,0)dxdy - \int A^2(x,y,t)dxdy = 2\nu_m \int\limits_0^t dt \int \left(B_x^2 + B_y^2\right) dxdy \tag{5}$$

Интеграл в правой части равенства представляет собой монотонно возрастающую функцию времени, ограниченную величиной $\int A^2(x,y,0)dxdy$. Следовательно, интеграл по времени при $t\to\infty$ сходится, а из его сходимости следует, что $B^2 = B_x^2 + B_y^2 \to 0$ при $t\to\infty$. Этот результат представляет собой одну из антидинамо-теорем, доказывающих невозможность генерации магнитного поля движениями проводящей среды определенного (достаточно симметричного) типа. Рассмотренная проблема важна для теории происхождения магнитных полей небесных тел.

10.63. Записываем $\boldsymbol{u} = \nabla\psi \times \boldsymbol{e}_r$ и проецируем уравнение индукции (10.22) на направление e_r. При этом диссипативное слагаемое, содержащее $\kappa(r)$, нужно записать с учетом неоднородности среды, т. е. в форме $-\nabla\times\nu_m(\nabla\times\boldsymbol{B})$. После этого будем иметь $\boldsymbol{e}_r\cdot(\nabla\times[\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B}]) = -(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)B_r$;

$$-\boldsymbol{e}_r\cdot(\nabla\times\nu_m[\nabla\times\boldsymbol{B}]) = \Delta B_r + \frac{2}{r}\frac{\partial B_r}{\partial r} + \frac{2}{r^2}B_r$$

В последнем равенстве учтено, что $\nabla\nu_m$ имеет направление $\boldsymbol{e}_r$, а также $\nabla\cdot\boldsymbol{B} = 0$. Таким образом, имеем уравнение, которому удовлетворяет B_r:

$$\frac{\partial B_r}{\partial t} + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)B_r = \nu_m\left(\Delta B_r + \frac{2}{r}\frac{\partial B_r}{\partial r} + \frac{2}{r^2}B_r\right) \tag{1}$$

Умножаем (1) на $B_r/\nu_m r^2$ и интегрируем обе части равенства по всему пространству. В итоге получаем, преобразовав по теореме ОстроградскогоГаусса интеграл, содержащий ΔB_r:

$$\frac{d}{dt}\int \frac{B_r^2}{\nu_m r^2}dV = -2\int \frac{(\nabla B_r)^2}{r^2}dV - \frac{8\pi}{r}\overline{B_r^2}\bigg|_{r\to 0} \leqslant 0 \tag{2}$$

где чертой обозначено усреднение по телесному углу. В случае ограниченной системы поле должно обращаться в нуль на больших расстояниях. Поэтому правая часть отрицательна, если B_r отлична от нуля где-либо в пространстве, что означает диссипацию r-компоненты поля: $B_r\to 0$ при $t\to\infty$.

Анализ поведения поперечных компонент поля удобно производить с помощью векторного потенциала $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{e}_r A(\boldsymbol{r},t)$, удовлетворяющего уравнению (3) из решения задачи 10.59. В данном случае удовлетворить условию $\nabla\cdot\boldsymbol{A} = 0$ невозможно, так как

оно приводит к сильной сингулярности при $r \to 0$. Поэтому уравнение для скалярной функции $A(\boldsymbol{r}, t)$ примет вид

$$\frac{\partial A}{\partial t} + (\boldsymbol{u} \cdot \nabla)A = \nu_m \left(\Delta A - \frac{2}{r^2} A - \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 A \right) \tag{3}$$

Умножение обеих частей равенства на A/ν_m и интегрирование по всему пространству позволяет привести (3) к виду

$$\frac{d}{dt} \int \frac{A^2}{\nu_m} dV = -2 \int \left(\nabla A - \boldsymbol{e}_r \frac{\partial A}{\partial r} \right)^2 dV \leqslant 0 \tag{4}$$

Полученное условие обеспечивает $A = \text{const}$ всюду в пространстве при $t \to \infty$, так как интеграл $\int (A^2/\nu_m)\, dV \geqslant 0$ не может сделаться отрицательным и производные по времени и по координатам должны обратиться в нуль, что означает отсутствие магнитного поля.

Для генерации магнитного поля требуется более сложное трехмерное движение проводящей жидкости или газа, например, вращение проводящих шаров вокруг непараллельных осей (см. Моффат (1970), гл. 6).

10.64. Естественно предположить, что скорость движения жидкости направлена вдоль оси Oz и зависит только от поперечной координаты x. Поскольку движущаяся проводящая жидкость увлекает за собой силовые линии магнитного поля, то при движении должна возникнуть продольная составляющая магнитного поля $B_z(x)$. Таким образом, неизвестные функции $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{B}$ ищем в виде $\boldsymbol{v}(0, 0, v(x)); \boldsymbol{B}\,(B_0, 0, B_z(x))$; при этом уравнения $\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0, \nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0$ удовлетворяются тождественно. Уравнения (10.23), (10.22) принимают следующий вид:

$$\frac{dv}{dx} + \frac{c^2}{4\pi\kappa B_0} \frac{d^2 B_z}{dx^2} = 0 \tag{1}$$

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{B_0}{4\pi\eta} \frac{dB_z}{dx} = \frac{1}{\eta} \frac{d}{dz} \left(p + \frac{B^2}{8\pi} \right) \tag{2}$$

$$\frac{d}{dx} \left(p + \frac{B^2}{8\pi} \right) = 0 \tag{3}$$

Из последнего равенства следует, что $p + B^2/8\pi$ может зависеть только от z. Но

$$\frac{d}{dz} \left(p + \frac{B^2}{8\pi} \right) = \frac{dp}{dz} = \text{ const} \tag{4}$$

так как $B^2/8\pi$ от z не зависит. Поэтому равенства (1) и (2) представляют собой систему обыкновенных линейных уравнений для определения неизвестных функций $v(x), B_z(x)$. Исключая из них dB_z/dx, получим уравнение относительно $u = dv/dx$:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} - \frac{1}{x_0^2} u = 0, \quad x_0 = \frac{c}{H_0} \sqrt{\frac{\eta}{\kappa}}, \tag{5}$$

из которого следует

$$v = x_0 \left(A \exp\left[\frac{x}{x_0} \right] - B \exp\left[-\frac{x}{x_0} \right] \right) + C \tag{6}$$

Граничные условия имеют вид $v(\pm a) = 0$, так как вязкая жидкость у стенки неподвижна. Кроме того, из соображений симметрии следует $v(x) = v(-x)$. Из граничных условий и (6) находим

$$v(x) = v_0 \frac{\operatorname{ch}(a/x_0) - \operatorname{ch}(x/x_0)}{\operatorname{ch}(a/x_0) - 1} \tag{7}$$

где v_0 - новая постоянная, имеющая смысл скорости в средней плоскости $x = 0.v_0$ можно выразить через градиент давления:

$$v_0 = -\frac{ax_0}{\eta} \frac{\operatorname{ch}(a/x_0) - 1}{\operatorname{sh}(a/x_0)} \frac{dp}{dz} \tag{8}$$

Магнитное поле определяется из (2), (7) и граничных условий $B_z(\pm a) = 0$:

$$B_z(x) = -\frac{4\pi\eta}{c} \sqrt{\kappa\eta} v_0 \frac{(x/a)\operatorname{sh}(a/x_0) - \operatorname{sh}(x/x_0)}{\operatorname{ch}(a/x_0) - 1} \tag{9}$$

Отношение $a/x_0 = G$ называется числом Гартмана. При $G \ll 1$ имеем

$$v_0 = \frac{a^2}{\eta} \frac{dp}{dz}, \quad v(x) = v_0 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \tag{10}$$

как в обычной гидродинамике. Магнитное поле $B_z = 0$ в первом порядке по числу Гартмана. Продольное поле B_z появляется только в следующих приближениях.

В противоположно предельном случае $G \gg 1$ получаем

$$v_0 = -\frac{a^2}{\eta G} \frac{dp}{dz}; \quad v(x) = v_0 \left(1 - \exp\left[-\frac{a - |x|}{x_0}\right]\right) \tag{11}$$

Сравнение (10) с (11) показывает, что средняя скорость движения уменьшается с ростом B_0, а профиль скоростей становится более плоским в средней части потока, но резко меняется в слое толщиной x_0 у стенок. Продольное магнитное поле в этом пределе имеет вид

$$B_z(x) = \frac{4\pi a^2 \sqrt{\kappa\eta}}{cG} \frac{dp}{dz} \left(\frac{x}{a} - \exp\left[-\frac{a}{x_0}\right] \operatorname{sh} \frac{\dot{x}}{x_0}\right) \tag{12}$$

Как видно из формулы, оно убывает с ростом числа Гартмана. Наибольшую величину B_z имеет при $G \approx 1$.

Плотность тока в движущейся жидкости вычисляется из уравнения Максвелла $\boldsymbol{j} = c\nabla \times \boldsymbol{B}/4\pi$. Отлична от нуля только y-компонента тока:

$$j_y(x) = \frac{c}{B_0} \frac{dp}{dz} \left(1 - \frac{a}{x} \frac{\operatorname{ch}(x/x_0)}{\operatorname{sh}(a/x_0)}\right) \tag{13}$$

Создаваемое им магнитное поле B_z равно нулю всюду вне области, занятой жидкостью. Там остается только поперечное поле B_0.

10.65.

Плотность тока

$$v(x) = v_0 \frac{\operatorname{sh}(x/x_0)}{\operatorname{sh}(a/x_0)}$$

$$j(x) = \frac{c\eta v_0}{B_0 x_0^2} \frac{\operatorname{sh}(x/x_0)}{\operatorname{sh}(a/x_0)}$$

Этот ток создает магнитное поле

$$B_z(x) = \frac{4\pi\eta v_0}{B_0 x_0} \frac{\operatorname{ch}(a/x_0) - \operatorname{ch}(x/x_0)}{\operatorname{sh}(a/x_0)}$$

которое обращается в нуль при $|x| \geqslant a$.

10.67. Если амплитуда волны убывает по закону $e^{-\gamma t}$, то ее энергия изменяется как $e^{-2\gamma t}$. Из соотношения $d\bar{w}/dt = -2\gamma\bar{w} = -\bar{Q}$ находим $\gamma = \bar{Q}/2\bar{w}$, где $\bar{w}, \bar{Q}$ - плотность энергии волны и плотность ее диссипации в единицу времени, усредненные по периоду $T = 2\pi/\omega \ll 1/\gamma$. Если $\boldsymbol{b}$ - магнитное поле волны, то плотность ее энергии $\bar{w} = |b|^2/8\pi$ (здесь учтено, что в альвеновской волне магнитная и механическая энергии одинаковы). Величина Q представляет собой правую часть уравнения (10.26) (за исключением температурного члена, поскольку теплопроводность в альвеновской волне не играет роли). Усредняя ее по времени и пользуясь соотношениями $\nu = \eta/\tau, |u|^2 = |b|^2/4\pi\tau$, находим $\bar{Q} = k^2(\nu + \nu_m)|b|^2/8\pi$ и

$$\gamma = \frac{1}{2}k^2(\nu + \nu_m) = \frac{\omega_A(\boldsymbol{k})}{2v_{Ax}^2}(\nu + \nu_m)$$

где использованы обозначения примера 10.9 .

10.68. Вектор $\boldsymbol{b}$ лежит в плоскости $(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{B}_0)$ и перпендикулярен вектору $\boldsymbol{k}$. Вектор $\boldsymbol{u}$ лежит в этой же плоскости, но имеет обе составляющие, продольную и поперечную относительно k.

10.69. При распространении простой волны конечной амплитуды происходит укручение переднего фронта (рис. 10.14а, 10.14). В некоторый
момент $t = t_*$ в определенной точке x_* переднего фронта происходит перегиб профиля и возникает бесконечная производная $(\partial u/\partial x)_{t\to t_*} \to \infty$ (рис. 10.14в). При $t > t_*$ решение становится многозначным, и простая волна перестает существовать. Величины t_*, x_*, u_* определяются из условий существования перегиба на графике зависимости $u(x, t_*)$. (см. рис. 10.14г):

$$\frac{\partial x(u, t_*)}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial^2 x(u, t_*)}{\partial u^2} = 0$$

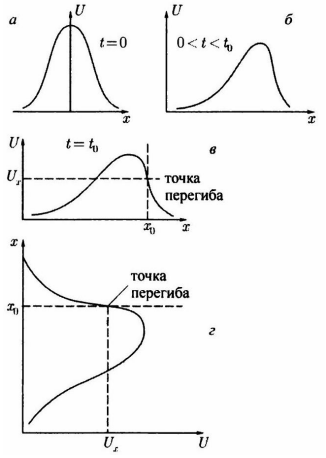


Рис. 10.14

10.70. Взяв проекцию уравнения (10.29) на ось r и подставив $u = ur/r, v = \text{const}$, получим уравнение для определения B_r:

$$\frac{\partial B_r}{\partial t} = -\frac{2u}{r}B_r - u\frac{\partial B_r}{\partial r} \tag{1}$$

Решение этого уравнения выражается через произвольную функцию F от аргументов $r - ut, \vartheta$ и α:

$$B_r(r, \vartheta, \alpha) = \frac{1}{r^2}F(r - ut, \vartheta, \alpha) \tag{2}$$

Граничное условие имеет вид

$$B_r|_{r=a} = B_{0r}(\vartheta, \alpha + \Omega t) = \frac{1}{a^2} F(a - ut, \vartheta, \alpha) \tag{3}$$

(аргумент $\alpha - \Omega t$ у B_{0r} написан в связи с переходом в неподвижную систему координат). Таким образом,

$$F(a - ut, \vartheta, \alpha) = a^2 B_{0r}(\vartheta, \alpha + \Omega t)$$

Следовательно, (2) запишется в виде

$$B_r(r, \vartheta, \alpha, t) = \left(\frac{a}{r}\right)^2 B_{0r}\left(\vartheta, \alpha - \frac{(r-a)\Omega}{u} + \Omega t\right) \tag{4}$$

Таким же путем находим

$$B_\vartheta = \frac{a}{r} B_{0\vartheta}\left(\vartheta, \alpha - \frac{(r-a)\Omega}{u} + \Omega t\right) \tag{5}$$
$$B_\alpha = \frac{a}{r} B_{0\alpha}\left(\vartheta, \alpha - \frac{(r-a)\Omega}{u} + \Omega t\right)$$

Из уравнения $\operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0$ вытекает следующая связь между проекциями вектора $\boldsymbol{B}_0$:

$$-\frac{a\Omega}{u}\frac{\partial B_{0r}}{\partial \alpha}\sin\vartheta + \frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(B_{0\vartheta}\sin\vartheta\right) + \frac{\partial B_{0\alpha}}{\partial \alpha} = 0$$

При $B_{0\vartheta} = 0$ находим $B_\vartheta = 0$,

$$B_{0\alpha} = \frac{a\Omega}{u} B_{0r}\sin\vartheta + f(\vartheta)$$

если положить $f(\vartheta) = 0$, то будем иметь

$$B_\alpha(r, \vartheta, \alpha, t) = \frac{a^2\Omega}{vr} B_{0r}\left(\vartheta, \alpha - \frac{(r-a)\Omega}{u} + \Omega t\right)\sin\vartheta \tag{6}$$

Паркер использовал рассмотренную модель для описания межпланетного магнитного поля, создаваемого потоками солнечной плазмы (солнечным ветром). В модели межпланетного магнитного поля Паркера $B_\vartheta = 0$, а B_r и $B\alpha$ даются формулами (4), (6). Измерения межпланетного магнитного поля, произведенные на спутниках и ракетах, показывают, что усредненное магнитное поле вблизи орбиты Земли удовлетворительно описывается моделью Паркера.

10.71. Силовые линии имеют вид спиралей Архимеда:

$$r = \frac{u}{\Omega}(\alpha - \alpha_0), \quad \alpha_0 = \text{ const}$$
$$\theta = \operatorname{arctg}\frac{r_0\Omega}{u} \approx 56^\circ; \quad B \approx 4.5 \times 10^{-5}\text{Гс}.$$

10.73. МГД возмущения от взрыва существуют только внутри сферы, ограниченной ударным фронтом. Выведем сначала граничные условия для магнитного поля на фронте. Из равенства (10.42), подставляя в него поток вещества через фронт $i_n = \tau_0 u_s$, где τ_0 - невозмущенная плотность среды, $u_s = \dot{R}_s$ - скорость фронта, получаем оценку $u_\tau/u_s \approx v_{An}v_{A\tau}/u_s^2$. Здесь правая часть выражена через компоненты альвеновской скорости v_A. Отношение $M_A = u_s/v_A$ скорости среды перед фронтом к альвеновской скорости называется альвеновским числом Маха. Тангенциальные компоненты скорости

малы по сравнению с радиальными, если велико альвеновское число Маха: $M_A^2 \gg 1$. В этом случае, полагая в уравнении (10.43) левую часть равной нулю, находим граничные условия: при $r = R_s(t)$ должно быть

$$B_n^{(s)} = B_{0n}, \quad B_\tau^{(s)} = B_{0\tau}\frac{\tau_s}{\tau_0} \tag{1}$$

где индексом s обозначены величины на фронте с внутренней (возмущенной) стороны.

Уравнения (10.29) записываем в сферических координатах:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial B_r}{\partial t} &= -\frac{u(r,t)}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2 B_r \\
\frac{\partial B_\vartheta}{\partial t} &= -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}ru(r,t)B_\vartheta \\
\frac{\partial B_\alpha}{\partial t} &= -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}ru(r,t)B_\alpha
\end{aligned} \tag{2}$$

Если зависимость $u(r,t) = p(r)q(t)$ факторизуется, то можно проинтегрировать уравнения (2) в общем виде, введя новые зависимые переменные

$$\begin{aligned}
b_r(r,t,\vartheta,\alpha) &= r^2 B_r(r,t,\vartheta,\alpha) \\
b_\vartheta(r,t,\vartheta,\alpha) &= rp(r)B_\vartheta(r,t,\vartheta,\alpha) \\
b_\alpha(r,t,\vartheta,\alpha) &= rp(r)B_\alpha(r,t,\vartheta,\alpha)
\end{aligned} \tag{3}$$

и новые независимые переменные

$$\eta(t) = \int q(t)dt, \quad s(r) = \int \frac{dr}{p(r)} \tag{4}$$

Все уравнения (2) принимают одинаковый вид

$$\frac{\partial b_i}{\partial \eta} + \frac{\partial b_i}{\partial r} = 0, \quad i = r, \vartheta, \alpha$$

Их решением является произвольная дифференцируемая функция $b_i(\varphi, \vartheta, \alpha)$ автомодельной переменной $\varphi(r,t) = s(r) - \eta(t)$. В рассматриваемом случае

$$p(r) = r, \quad q(t) = \frac{2\dot{R}_s(t)}{(\gamma+1)R_s(t)}, \quad \varphi(r,t) = \ln\left(\frac{r}{R_s^{2/(\gamma+1)}(t)}\right) \tag{5}$$

Очевидно, что без потери общности можно считать b_i функцией отношения, стоящего под знаком логарифма: $b_i\left(r/R_s^{2/(\gamma+1)}(t), \vartheta, \alpha\right)$. Вид зависимости b_i от этого отношения, а также от ϑ и α определяется из граничных условий с использованием, если требуется, уравнения $\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$.

В случае однородного внешнего поля имеем граничные условия

$$B_r\left(R_s(t), t, \vartheta\right) = B_0 \cos\vartheta, \quad B_\vartheta\left(R_s(t), t, \vartheta\right) = -B_0\frac{\tau_s}{\tau_0}\sin\vartheta, \quad B_\alpha = 0 \tag{6}$$

Записываем решение в виде

$$B_r(r,t,\vartheta) = \frac{f\left(r/R_s^{2/(\gamma+1)}\right)}{r^2}B_0\cos\vartheta$$

$$B_\vartheta(r,t,\vartheta) = -\frac{\tau_s f\left(r/R_s^{2/(\gamma+1)}\right)}{\tau_0 r^2} B_0 \sin\vartheta \tag{7}$$

Из граничных условий находим $f\left(R_s^{(\gamma-1)/(\gamma+1)}\right) = R_s^2$. Это означает, что $f(x) = x^{2(\gamma+1)/(\gamma-1)}$, т. е.

$$f\left(r/R_s^{2/(\gamma+1)}\right) = \frac{r^{2(\gamma+1)/(\gamma-1)}}{R_s^{4/(\gamma-1)}} \tag{8}$$

В итоге получаем окончательно

$$\begin{aligned} B_r(r,t,\vartheta) &= B_0\left(\frac{r}{R_s(t)}\right)^{4/(\gamma-1)}\cos\vartheta \\ B_\vartheta(r,t,\vartheta) &= -\frac{\tau_s}{\tau_0}\left(\frac{r}{R_s(t)}\right)^{4/(\gamma-1)} B_0\sin\vartheta, \quad r \leqslant R_s(t) \end{aligned} \tag{9}$$

При $\gamma = 5/3$ имеем $4/(\gamma-1) = 6$. Таким образом, радиальное магнитное поле выметается из области взрыва вместе с плазмой, фактор ослабления равен $(r/R_s(t))^6$. Тангенциальное поле также выметается, но на фронте оно усилено на фактор $\tau_s/\tau_0 \geqslant 4$ по сравнению с невозмущенным значением. Фактор усиления может превысить обычное значение $(\gamma+1)/(\gamma-1) = 4$ (см. формулу (8) примера 6), если имеет место потеря энергии с фронта за счет излучения или ускорения частиц до релятивистских энергий.

10.74. Решая эту задачу по образцу предыдущей, находим магнитное поле в каверне, образованной взрывом:

поле $\boldsymbol{B}_0 = 2\boldsymbol{M}/a^3$; на сфере $r = a$ - токовый слой с поверхностным током $\boldsymbol{i} = 3Mce_\alpha \sin\vartheta/4\pi a^3$, обеспечивающий нужный скачок тангенциальной составляющей поля. После центрального взрыва ударная волна сначала распространяется по области $r < a$, где поле однородно. Поле в образующейся каверне ослабляется в соответствии с результатами задачи 10.73*, т. е. на фактор $(r/R_s(t))^{4/(\gamma-1)}$. Эта стадия продолжается до момента t_a, определяемого условием $R_s(t_a) = a$. Начиная с этого момента граница между первоначально однородным и дипольным полями вовлекается в движение плазмы и ее радиус начинает возрастать по закону

$$R_a(t) = a + \int_{t_a}^{t} u\left(R_a(\tau),\tau\right) d\tau, \quad t > t_a \tag{2}$$

откуда находим

$$R_a(t) = a\left[\frac{R_s(t)}{a}\right]^{2/(\gamma+1)} \geqslant a, \quad t \geqslant t_a \tag{3}$$

Ударный фронт движется быстрее вещества за фронтом, поэтому $R_s(t) > R_a(t)$ при $t > t_a$. В области $R_a \leqslant r \leqslant R_s$ применимо решение (1) для магнитного диполя. Но, в отличие от (1), теперь поле всюду в каверне убывает со временем. Наибольшего значения оно достигает с внешней стороны поверхности $r = R_a(t)$:

$$\begin{aligned} B_r\left(R_a(t),t,\vartheta\right) &= \frac{2M\cos\vartheta}{R_a^3(t)}\left(\frac{R_s(t)}{R_a(t)}\right)^{2/(\gamma-1)} = \frac{2M\cos\vartheta}{a^3}\left(\frac{a}{R_s(t)}\right)^{4/(\gamma+1)}, \\ B_\vartheta\left(R_a(t),t,\vartheta\right) &= \frac{M\sin\vartheta}{R_a^3(t)}\frac{\tau_s}{\tau_0}\left(\frac{R_s(t)}{R_a(t)}\right)^{2/(\gamma-1)} = \frac{M\sin\vartheta}{a^3}\frac{\tau_s}{\tau_0}\left(\frac{a}{R_s(t)}\right)^{4/(\gamma+1)} \end{aligned}$$

В области $r < R_a(t)$ по-прежнему справедливы формулы (8) предыдущей задачи.

При взрывах звезд кроме выделения энергии как правило в окружающее пространство сбрасывается заметная часть массы звезды («оболочка»). В приведенных расчетах выброс массы не учитывался. Это справедливо лишь на поздних этапах эволюции возмущенной области, при условии, что масса вещества в каверне существенно превосходит массу сброшенной оболочки.

10.75.

$$\boldsymbol{B}_r = \left(\frac{r}{R_s}\right)^{2\sigma-2} \sum_{lm} a_{lm}^{(3)} \left(r^\sigma / R_s^{\sigma-1}\right) \mathcal{Y}_{lm}^{(3)}(\vartheta, \alpha)$$

$$\boldsymbol{B}_\tau = \sigma \left(\frac{r}{R_s}\right)^{2\sigma-2} \sum_{lm,k=1,2} a_{lm}^{(k)} \left(r^\sigma / R_s^{\sigma-1}\right) \mathcal{Y}_{lm}^{(k)}(\vartheta, \alpha)$$

где $\sigma = (\gamma+1)/(\gamma-1)$.

10.76.

$$B_r(r, \vartheta, t) = B_{0r}(a, \vartheta) \left(\frac{a}{r}\right)^2$$

$$B_\alpha(r, \vartheta, t) = B_{0r}(a, \vartheta) \sin\vartheta \frac{\tau_s a^2 \Omega}{\tau_0 u_w r} \left(\frac{r}{R_s(t)}\right)^3, \quad B_\vartheta = 0$$

Здесь u_w - постоянная скорость звездного ветра.

10.77. Вводим малые добавки $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{u}, p, \zeta$ к невозмущенным величинам $\boldsymbol{B}, \boldsymbol{u} = 0, P, z = 0$. Величина ζ дает форму возмущенной поверхности $z = \zeta(x, y, t)$ раздела двух сред (рис. 10.15). Записываем линеаризованную систему уравнений в пренебрежении диссипацией:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0 \tag{1}$$

$$\tau \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} = -\nabla p - \frac{1}{4\pi} \boldsymbol{B} \times [\nabla \times \boldsymbol{b}] + \tau \boldsymbol{g}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{b}}{\partial t} = (\boldsymbol{B} \cdot \nabla) \boldsymbol{u}$$

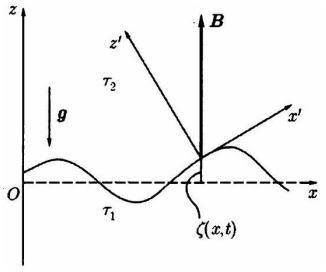


Рис. 10.15

Выражаем через скалярный потенциал ϕ скорость среды и возмущение магнитного поля:

$$\boldsymbol{u} = \nabla\phi(x, t), \quad \boldsymbol{b}(x, t) = \int_{-\infty}^{t} (\boldsymbol{B} \cdot \nabla) \nabla\phi \, dt' \tag{2}$$

Из последней формулы следует, что $\nabla \times \boldsymbol{b} = 0$. Это позволяет записать уравнение движения для u_z-компоненты в виде

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\tau \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + gz\right) \tag{3}$$

и проинтегрировать его:

$$p = -\tau\left(\frac{\partial\phi}{\partial t} + gz\right) + P_0 \tag{4}$$

Здесь через P_0 обозначено давление на невозмущенной границе, общее для верхней и нижней сред. Все остальные величины (кроме $\boldsymbol{g}$ и $\boldsymbol{B}$) различны.

На возмущенной границе раздела $z = \zeta(x, y, t)$ должны выполняться граничные условия (10.37), (10.39) с учетом отсутствия потока вещества через контактный разрыв, $i_{n'} = 0$. Кроме того, на границе можно выразить вертикальные скорости в обеих средах с помощью общего для них уравнения граничной поверхности:

$$u_{1z} = u_{2z} = \frac{d\zeta}{dt} = \frac{\partial\zeta}{\partial t} + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\zeta \approx \frac{\partial\zeta}{\partial t} \tag{5}$$

С точностью до оставленных в (5) величин первого порядка малости это условие можно отнести к невозмущенной поверхности $z = 0$. Компоненты тензора потока импульса вычисляем с помощью соотношений для проекций невозмущенного поля на локальные штрихованные оси, орты которых выражаются через исходные декартовы орты:

$$\boldsymbol{e}_{x'} = \boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_z\frac{\partial\zeta}{\partial x}, \quad \boldsymbol{e}_{y'} = \boldsymbol{e}_y + \boldsymbol{e}_z\frac{\partial\zeta}{\partial y}, \quad \boldsymbol{e}_{z'} = \boldsymbol{e}_z - \boldsymbol{e}_x\frac{\partial\zeta}{\partial x} - \boldsymbol{e}_y\frac{\partial\zeta}{\partial y} \tag{6}$$

Имеем

$$B_{z'} = B_z = B, \quad B_{x'} = B_z\frac{\partial\zeta}{\partial x}, \quad B_{y'} = B_z\frac{\partial\zeta}{\partial y} \tag{7}$$

и записываем компоненты тензора

$$\Pi_{z'z'} = p - \frac{1}{4\pi}Bb_z, \quad \Pi_{x'z'} = -\frac{1}{4\pi}\left(Bb_x + B^2\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right) \tag{8}$$
$$\Pi_{y'z'} = -\frac{1}{4\pi}\left(Bb_y + B^2\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)$$

Условия сшивания компонент тензора плотности потока импульса, $\Pi^{(1)}_{\alpha'z'} = \Pi^{(2)}_{\alpha'z'}, \alpha' = x', y', z'$ при $z = \zeta$, удобно продифференцировать по времени,

$$\frac{\partial}{\partial t}\Pi^{(1)}_{\alpha'z'} = \frac{\partial}{\partial t}\Pi^{(2)}_{\alpha'z'}, \quad \alpha' = x', y', z' \tag{9}$$

чтобы исключить с помощью (5) величину ζ. При $\alpha' = z'$ с помощью (2), (4), (7) будем иметь

$$\tau_2\frac{\partial^2\phi_2}{\partial t^2} - \tau_1\frac{\partial^2\phi_1}{\partial t^2} = (\tau_1 - \tau_2)\,g\frac{\partial\phi_1}{\partial z} - \frac{B^2}{4\pi}\frac{\partial^2}{\partial z^2}(\phi_1 - \phi_2), \quad z = 0 \tag{10}$$

Скалярный потенциал ϕ удовлетворяет уравнению Лапласа $\nabla\cdot\boldsymbol{u} = \Delta\phi = 0$. Будем искать решения в виде плоских монохроматических волн, распространяющихся вдоль невозмущенной границы раздела:

$$\phi_1 = A\exp(kz + ik_xx + ik_yy - i\omega t), z < 0$$
$$\phi_2 = C\exp(-kz + ik_xx + ik_yy - i\omega t), z > 0, \quad k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2} \tag{11}$$

Из соотношения (5) находим $C = -A$, а из уравнения (10) получаем дисперсионное соотношение для возмущений:

$$\omega^2 = \frac{\tau_1 - \tau_2}{\tau_1 + \tau_2} gk + \frac{B^2 k^2}{2\pi (\tau_1 + \tau_2)} \tag{12}$$

Прочие граничные условия также выполняются.
При $\tau_1 > \tau_2$ (плотная среда снизу) контактный разрыв устойчив относительно возмущений с любыми k. Неустойчивость возникает, если разреженная среда находится снизу ($\tau_1 < \tau_2$), при значениях волнового вектора, приводящих к мнимым частотам:

$$k < k_c = \frac{2\pi (\tau_2 - \tau_1)}{B^2} g \tag{13}$$

Неустойчивы длинноволновые возмущения с $\lambda > 2\pi/k_c$. В отсутствие магнитного поля все возмущения неустойчивы, если плотная среда находится сверху (аналогично неустойчивости шарика на острой вершине горы). Стабилизация коротковолновых возмущений при наличии вертикального магнитного поля связана с тем, что вещество при перемешивании должно
совершать горизонтальные перемещения и увеличивать при этом в условиях вмороженности поля магнитную энергию системы.
10.78. Дисперсионное соотношение для малых возмущений имеет вид

$$\omega^2 = \frac{\tau_1 - \tau_2}{\tau_1 + \tau_2} gk + \frac{(\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{k})^2}{2\pi (\tau_1 + \tau_2)}$$

При $\tau_2 > \tau_1$ неустойчивость не стабилизируется магнитным полем, возмущения с волновыми векторами $\boldsymbol{k} \perp \boldsymbol{B}$ будут нарастать, так как магнитные силовые линии при этом не искажаются.
10.79. Задаем форму возмущенной поверхности разрыва в виде

$$z = \zeta(x, y) = l \sin k_1 x \sin k_2 y, \quad l \ll 2\pi/k_1, 2\pi/k_2 \tag{1}$$

Гравитационная энергия малого элемента массы $dm = \tau dxdydz$ равна $gzdm$. Интегрируя эту величину по dz от 0 до ζ и затем по всей поверхности S разрыва, находим изменение ΔU_g гравитационной энергии при деформации разрыва. При интегрировании по поверхности невозмущенного разрыва считаем длины волн возмущений $\lambda_{1,2} = 2\pi/k_{1,2}$ малыми по сравнению с его линейными размерами и заменяем квадраты синусов их средними значениями 1/2. В итоге имеем $\Delta U_g = \tau g l^2 S/8$.

Приращение поверхностной энергии находим по формуле $\Delta U_s = \alpha \Delta S$, где ΔS - приращение поверхности:

$$\Delta S = \int \left\{ \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)^2} - 1 \right\} dxdy \approx \frac{l^2 k^2 S}{8} \tag{2}$$

В итоге имеем $\Delta U_s = \alpha l^2 k^2 S/8$, где $k^2 = k_1^2 + k_2^2$.
Приращение электростатической энергии вычисляем по формуле

$$\Delta U_e = \int dxdy \int_{\zeta}^{\infty} dz \frac{\mathscr{E}^2 - E^2}{8\pi} \tag{3}$$

где $\mathscr{E}$ - электростатическое поле над возмущенной поверхностью. Электростатический потенциал φ удовлетворяет уравнению Лапласа и граничному

условию на проводящей поверхности $\varphi|_{z=\zeta} = 0$, а также условию $\varphi|_{z\to\infty} = -Ez$ на большом расстоянии от поверхности. При $kl \ll 1$
уравнение и граничные условия выполняются для потенциала $\varphi(x,y,z) = -Ez + E\zeta(x,y)\exp(-kz)$, который позволяет найти напряженность поля над искаженной поверхностью $\mathscr{E} = -\nabla\varphi$ и вычислить приращение энергии: $\Delta U_e = -E^2 l^2 S/32\pi k$.

Полное приращение энергии

$$\Delta U = \Delta U_e + \Delta U_s + \Delta U_g = \frac{l^2 S}{8}\left\{\tau g + \alpha k^2 - \frac{E^2}{4\pi}k\right\} \tag{4}$$

Поверхность будет неустойчивой, т.е. амплитуда горбов и впадин будет расти, если их рост будет уменьшать энергию системы, т. е. при $\Delta U < 0$. Граничному случаю отвечает значение поля

$$\frac{E^2}{4\pi} = \frac{\tau g}{k} + \alpha k \tag{5}$$

Минимизируя правую часть по k, находим $k_c = \sqrt{\tau g/\alpha}$ и получаем наименьшее значение электрического поля, $E_c^2 = 8\pi\sqrt{\tau g\alpha}$, при котором выполняется условие $\Delta U = 0$. При $E > E_c$ существует область значений волновых чисел, для которой выполняется условие неустойчивости $\Delta U < 0$: $k_1 < k < k_2$, где $k_{1,2} = E^2/8\pi\alpha \mp \sqrt{(E^2/8\pi\alpha)^2 - k_c^2}$.

10.80. Обозначим невозмущенные величины через $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{B}, P$, а их малые возмущения соответственно через $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{p}$. Возмущенная поверхность разрыва задается уравнением $z = \zeta(x,y,t)$. Введем также альвеновскую скорость $\boldsymbol{u}_A = \boldsymbol{B}/\sqrt{4\pi\tau}$ и скорость альвеновского возмущения $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{b}/\sqrt{4\pi\tau}$. Линеаризованные уравнения имеют вид

$$\begin{gathered}\nabla\cdot\boldsymbol{u} = \nabla\cdot\boldsymbol{w} = 0, \quad \frac{\partial\boldsymbol{w}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{w} = (\boldsymbol{u}_A\cdot\nabla)\,\boldsymbol{u} \\ \frac{\partial\boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} = -\frac{1}{\tau}\nabla p - \nabla\,(\boldsymbol{u}_A\cdot\boldsymbol{w}) + (\boldsymbol{u}_A\cdot\nabla)\,\boldsymbol{w}\end{gathered} \tag{1}$$

Граничные условия на тангенциальном разрыве $z = \zeta$ требуют равенства полных давлений $p + (\boldsymbol{B}+\boldsymbol{b})^2_{\tau'}/8\pi$ и обращения в нуль нормальной компоненты магнитного поля $(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{b})_{n'} = 0$. Линеаризовав эти условия и перейдя от локальных штрихованных ортов к первоначальным декартовым, как в задаче 10.77*, получим

$$\delta\,(p + \rho\boldsymbol{u}_A\cdot\boldsymbol{w}) = 0, \quad w_z - (\boldsymbol{u}_A\cdot\nabla)\,\zeta = 0, \quad \text{при} \quad z = 0 \tag{2}$$

Применив операцию div к последнему уравнению (1), находим уравнение для добавки к полному давлению:

$$\Delta\,(p + \tau\boldsymbol{u_A}\cdot\boldsymbol{w}) = 0 \tag{3}$$

Из этого уравнения следует, что зависимость малых возмущений от координат и времени можно искать в виде

$$\begin{gathered}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}, p \propto \exp\left(\pm kz + ik_x x + ik_y y - i\omega t\right) \\ \zeta \propto \exp\left(ik_x x + ik_y y - i\omega t\right), \quad \text{где} \quad k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}\end{gathered} \tag{4}$$

а знаки $\pm$ в показателе экспоненты относятся соответственно к областям $z < 0$ и $z > 0$.

Исключив йз уравнений (1) скорость $\boldsymbol{u}$ с помощью соотношений (4), получим

(5) $$\left[(\omega-(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v})^2-(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{u}_A)^2\right]\boldsymbol{w}=-\tfrac{1}{\tau}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{u}_A)(\boldsymbol{k}\mp ik\boldsymbol{e}_z)(p+\tau\boldsymbol{u}_A\cdot\boldsymbol{w}).$$

Далее берем проекцию уравнения (5) на ось Oz и используем граничные условия (2). Это позволяет получить дисперсионное соотношение для малых возмущений:

$$\tau_1\left(\omega-(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}_1\right)^2+\tau_2\left(\omega-(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}_2\right)^2=\tau_1\left(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{u}_{A1}\right)^2+\tau_2\left(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{u}_{A2}\right)^2 \tag{6}$$

Оно представляет собой квадратное уравнение относительно частоты вида $a\omega^2+b\omega+c=0$. Условием отсутствия комплексных корней является неравенство $b^2-4ac\geqslant 0$, которое приводится к виду

$$T_{\alpha\beta}k_\alpha k_\beta\geqslant 0 \tag{7}$$

Здесь тензор $T_{\alpha\beta}(\alpha,\beta=1,2)$ имеет вид

$$T_{\alpha\beta}=\tau_1 u^{(1)}_{A\alpha}u^{(1)}_{A\beta}+\tau_2 u^{(2)}_{A\alpha}u^{(2)}_{A\beta}-\frac{\tau_1\tau_2}{\tau_1+\tau_2}v_\alpha v_\beta$$

Для неотрицательности квадратичной формы (7) при произвольных действительных значениях компонент k_α,k_β требуется выполнение неравенств $T_{\alpha\alpha}>0,|T_{\alpha\beta}|\geqslant 0$ (неотрицательны след тензора и его определитель). Эти условия, записанные через магнитную индукцию, имеют вид

$$B_1^2+B_2^2\geqslant 2\pi\tau v^2,\quad [\boldsymbol{B}_1\times\boldsymbol{B}_2]^2\geqslant 2\pi\tau\left([\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}_1]^2+[\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}_1]^2\right), \tag{9}$$

где $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{v}_2,\tau=\tau_1\tau_2/(\tau_1+\tau_2)$, и определяют условия устойчивости тангенциального разрыва с магнитным полем (С. И. Сыроватский, 1953).

Как видно из этих условий, достаточно сильное магнитное поле стабилизирует тангенциальный разрыв. В отсутствие поля разрыв в несжимаемой среде неустойчив.

10.81. Обозначим неусредненный по турбулентным движениям вектор магнитной индукции через $\mathscr{H}$, а усреднение - угловыми скобками: $\langle\mathscr{H}\rangle=\boldsymbol{B}$. Используем неусредненные уравнения (10.22) для случая $\nu_m=\text{const}$:

$$\nabla\times\mathscr{H}=0,\quad \frac{\partial\mathscr{H}}{\partial t}=\nabla\times[\boldsymbol{u}\times\mathscr{H}]+\nu_m\Delta\mathscr{H} \tag{1}$$

Усреднение по ансамблю перестановочно с операциями дифференцирования по координатам и времени, поэтому после усреднения будем иметь

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0,\quad \frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}=\nabla\times\langle\boldsymbol{u}\times\mathscr{H}\rangle+\nu_m\Delta\boldsymbol{B} \tag{2}$$

Для замыкания системы уравнений необходимо выразить через усредненные величины (магнитную индукцию и корреляционный тензор турбулентности) среднее значение $\langle u\times\mathscr{H}\rangle$. Для этой цели выделяем малую турбулентную добавку к магнитной индукции $\boldsymbol{b}(\boldsymbol{r},t)=\mathscr{H}(\boldsymbol{r},t)-\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)$ и с помощью (1) и (2) находим для нее уравнение

$$\frac{\partial\boldsymbol{b}}{\partial t}-\nu_m\Delta\boldsymbol{b}=\nabla\times[\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B}]+\nabla\times[\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{b}]-\nabla\times\langle\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{b}\rangle. \tag{3}$$

Здесь использовано условие $\langle\boldsymbol{u}\rangle=0$. Далее применяем «наивную» теорию возмущений: считая $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{b}$ величинами первого порядка малости, опускаем из уравнения (3) их произведения и из оставшегося уравнения, содержащего только члены первого порядка, находим

$$\boldsymbol{b}(\boldsymbol{r},t)=\int\limits_{-\infty}^{t}G\left(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}',t-\tau\right)(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}\left(\boldsymbol{r}',\tau\right)d^3x'd\tau-$$

$$-\int\limits_{-\infty}^{t}G\left(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}',t-\tau\right)\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial x'_\beta}u_\beta\left(\boldsymbol{r}',\tau\right)d^3x'd\tau \tag{4}$$

где функция Грина G дается формулой (5) из примера 10.6. Размеры областей интегрирования по координатам и по времени - порядка соответствующих корреляционных величин, l и τ_c, турбулентного поля скоростей.

Усредненное по турбулентным пульсациям поле $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)$ мало меняется на таких временах и расстояниях. Поэтому множители, содержащие $\boldsymbol{B}$, можно вынести из-под интегралов:
(5)

$$\boldsymbol{b}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{B}_\beta(\boldsymbol{r},t)\int\limits_{-\infty}^{t}G\left(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}',t-\tau\right)\frac{\partial u_\beta}{\partial x'_\beta}d^3x'd\tau-$$

$$-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial x_\beta}\int\limits_{-\infty}^{t}G\left(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}',t-\tau\right)u_\beta\left(\boldsymbol{r}',\tau\right)d^3x'd\tau$$

С помощью последнего результата производим усреднение:
(6)

$$\langle\boldsymbol{u}_\alpha\boldsymbol{b}_\mu\rangle=B_\beta\int\limits_{-\infty}^{t}G\left(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}',t-\tau\right)\left\langle u_\alpha(\boldsymbol{r},t)\frac{\partial u_\mu\left(\boldsymbol{r}',\tau\right)}{\partial x'_\beta}\right\rangle d^3x'd\tau-$$

$$-\frac{\partial B_\mu}{\partial x_\beta}\int\limits_{-\infty}^{t}G\left(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}',t-\tau\right)\langle u_\alpha(\boldsymbol{r},t)u_\beta\left(\boldsymbol{r}',\tau\right)\rangle\,d^3x'd\tau$$

Первый интеграл здесь представляет собой полярный тензор третьего ранга, не зависящий от координат. Он обращается в нуль для однородной и изотропной (негиротропной) турбулентности, ввиду отсутствия таких тензоров в рассматриваемой задаче (антисимметричный псевдотензор $e_{\alpha\beta\gamma}$ неправильно преобразуется при отражениях, и его нельзя использовать в данном случае). Второй интеграл представляет собой симметричный тензор второго ранга, и его можно записать в виде

$$\int\limits_{-\infty}^{t}G\left(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}',t-\tau\right)\langle u_\alpha(\boldsymbol{r},t)u_\beta\left(\boldsymbol{r}',\tau\right)\rangle\,d^3x'd\tau=\nu_t\delta_{\alpha\beta} \tag{7}$$

где ν_t - некоторый скаляр, для вычисления которого нужно задать корреляционный тензор $\langle u_\alpha(\boldsymbol{r},t)u_\beta\left(\boldsymbol{r}',\tau\right)\rangle$. В итоге находим необходимую величину:

$$\langle\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r},t)\times\boldsymbol{b}(\boldsymbol{r},t)\rangle=-\nu_t\nabla\times\boldsymbol{B} \tag{8}$$

Подстановка (8) во второе уравнение (2) приводит к уравнению для магнитной индукции крупномасштабного усредненного поля:

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = (\nu_t + \nu_m)\,\Delta \boldsymbol{B} \tag{9}$$

где ν_t - турбулентная магнитная вязкость. Полученное уравнение по форме совпадает с уравнением (10.15) для магнитного поля в неподвижной диссипативной среде. Но турбулентное движение увеличивает магнитную вязкость: полная магнитная вязкость $\nu_{tot} = \nu_m + \nu_t$. Турбулентное движение деформирует магнитное поле, дробит его на области порядка турбулентных масштабов и делает его таким образом мелкомасштабным. Мелкомасштабное поле испытывает более эффективную джоулеву диссипацию, превращаясь в тепло.

Оценим турбулентную вязкость в предельных случаях. Используем функцию Грина

$$G\left(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}', t-\tau\right) = \frac{1}{\left[4\pi\nu_m(t-\tau)\right]^{3/2}} \exp\left\{-\frac{\left(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right)^2}{4\nu_m(t-\tau)}\right\} \tag{10}$$

Пусть основной масштаб турбулентности равен l, а время корреляции $\tau_c \approx l/u$, где для сокращения письма обозначено $u \equiv \langle \boldsymbol{u}^2 \rangle$. В интеграле (7) характерное расстояние $|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'| \approx l$, характерное время $t-\tau \approx \tau_c \approx l/u$.

1. Случай $\nu_m\tau_c \gg l^2$, или $R_m = ul/\nu_m \ll 1$, где R_m - магнитное число Рейнольдса (ср. с (Д4.2)). Экспонента в функции Грина близка к единице. Оценивая интеграл (7) как произведение подынтегрального выражения на область интегрирования, получаем

$$\nu_t \approx \frac{u^2}{3}\frac{1}{\left[4\pi\nu_m\tau_c\right]^{3/2}} l^3\tau_c = \frac{1}{3}ul\left(\frac{ul}{4\pi\nu_m}\right)^{3/2} \tag{11}$$

В этом случае $\nu_t/\nu_m < R_m^{5/2} \ll 1$ - турбулентная вязкость составляет малую добавку к столкновительной магнитной вязкости. Необходимое условие применимости теории возмущений выполнено.

2. Противоположный случай $\nu_m\tau_c \ll l^2$, или $R_m \gg 1$. Функция Грина в этом пределе очень узка в координатном пространстве, $G\left(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}', t-\tau\right) \approx \approx \delta\left(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right)$. С помощью этой аппроксимации получаем из (7)

$$\nu_t \approx \frac{1}{3}\left\langle \boldsymbol{u}^2 \right\rangle \tau_c \gg \nu_m \tag{12}$$

- теория возмущений неприменима. Для корректного вычисления турбулентной вязкости в этом пределе нужно использовать другой приближенный метод (см. следующую задачу).

10.82. Используя обозначения предыдущей задачи, запишем неусредненное уравнение (10.22) в виде

$$\frac{\partial \mathscr{H}_\alpha}{\partial t} - \nu_m\Delta\mathscr{H}_\alpha = A^{\alpha\mu}_{\gamma\sigma}\frac{\partial}{\partial x_\mu}u_\gamma\mathscr{H}_\sigma + B_\alpha\delta(\tau-t), \quad \tau \geqslant t \tag{1}$$

где $A^{\alpha\mu}_{\gamma\sigma} = e_{\alpha\mu\nu}e_{\nu\gamma\sigma}$, а δ-образный член играет роль начального условия для неусредненного поля $\mathscr{H}(\boldsymbol{r}, t)$. Интегральная форма уравнения (1) имеет вид

$$\mathscr{H}_\alpha = A^{\alpha\mu}_{\gamma\sigma}\int d\tau' \int d^3x' G\left(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}', \tau-\tau'\right)\frac{\partial}{\partial x'_\mu}u'_\gamma\mathscr{H}'_\sigma + B^{(0)}_\alpha(\boldsymbol{r}, \tau) \tag{2}$$

где

$$B_\alpha^{(0)}(\boldsymbol{r},\tau)=\int d^3x' G\left(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}',\tau-t\right)B_\alpha\left(\boldsymbol{r}',t\right) \tag{3}$$

а G - функция Грина, удовлетворяющая уравнению (3) примера 10.6 (с заменой χ на ν_m) и начальному условию $G(\boldsymbol{r},\tau)\to\delta(\boldsymbol{r})$ при $\tau\to 0$.

Теперь путем решения уравнения (2) методом итераций вычислим $\mathscr{H}_\alpha$ в момент $t+\Delta t$ с точностью до членов, линейных по Δt. Ввиду явной зависимости $\mathscr{H}_\alpha(\boldsymbol{r},t+\Delta t)$ от турбулентных скоростей усреднение по ним можно будет произвести непосредственно. Затем, считая Δt малым, получим дифференциальное уравнение для $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)$.

Итерация нулевого порядка относительно случайной скорости дается выражением (3) и может быть представлена в виде

$$B_\alpha^{(0)}(\boldsymbol{r},t+\Delta t)=B_\alpha(\boldsymbol{r},t)+\Delta t\nu_m\Delta B_\alpha(\boldsymbol{r},t) \tag{4}$$

Это следует из того, что $G(\boldsymbol{r},\tau)\to\delta(\boldsymbol{r})$ при $\tau\to 0$, а поправочный член к функции Грина при малом Δt имеет вид $(\partial G/\partial\tau)\Delta t=\Delta t\nu_m\Delta G\left(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}',t\right)$. Интегрируя соответствующий член в (3) дважды по частям, приведем его к виду (4).

Первая итерация получится, если в интегральный член уравнения (2) подставить нулевую итерацию (3) или (4):

$$\mathscr{H}_\alpha^{(1)}(\boldsymbol{r},\tau)=A_{\gamma\sigma}^{\alpha\mu}\int\limits_t^\tau d\tau'\int d^3x' G\left(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}',\tau-\tau'\right)\frac{\partial}{\partial x'_\mu}u'_\gamma\left(\boldsymbol{r}',\tau'\right)B_\sigma^{(0)}\left(\boldsymbol{r}',\tau'\right)+B_\alpha^{(0)}(\boldsymbol{r}.\tau) \tag{5}$$

Наконец, вторая итерация примет вид
(6)

$$\mathscr{H}_\alpha^{(2)}(\boldsymbol{r},\tau)=A_{\gamma\sigma}^{\alpha\mu}\int\limits_t^\tau d\tau'\int d^3x' G\left(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}',\tau-\tau'\right)\frac{\partial}{\partial x'_\mu}u'_\gamma\left(\boldsymbol{r}',\tau'\right)\mathscr{H}_\sigma^{(1)}\left(\boldsymbol{r}',\tau'\right)+$$

$$+B_\alpha^{(0)}(\boldsymbol{r},\tau)=A_{\gamma\sigma}^{\alpha\mu}A_{\kappa\epsilon}^{\sigma\nu}\int\limits_t^\tau d\tau_1\int d^3x_1 G\left(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1,\tau-\tau_1\right)\frac{\partial}{\partial x_{1\mu}}u_\gamma\left(\boldsymbol{r}_1,\tau_1\right)\times$$

$$\times\int\limits_t^{\tau_1}d\tau_2\int d^3x_2 G\left(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2,\tau_1-\tau_2\right)\frac{\partial}{\partial x_{1\nu}}u_\kappa\left(\boldsymbol{r}_2,\tau_2\right)B_\epsilon^{(0)}\left(\boldsymbol{r}_2,\tau_2\right)+$$

$$+A_{\gamma\sigma}^{\alpha\mu}\int\limits_t^\tau d\tau_1\int d^3x_1 G\left(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1,\tau-\tau_1\right)\frac{\partial}{\partial x_{1\mu}}u_\gamma\left(\boldsymbol{r}_1,\tau_1\right)B_\sigma^{(0)}\left(\boldsymbol{r}_1,\tau_1\right)+B_\alpha^{(0)}(\boldsymbol{r},\tau).$$

При усреднении равенства (6) получим $\left\langle\mathscr{H}_\alpha^{(2)}(\boldsymbol{r},\tau)\right\rangle=B_\alpha(\boldsymbol{r},\tau)$, $\langle u_\gamma\rangle=0$, корреляционный тензор $\langle u_\gamma\left(\boldsymbol{r}_1,\tau_1\right)u_\kappa\left(\boldsymbol{r}_2,\tau_2\right)\rangle$ берем в форме, указанной в условии задачи. Внутренние интегралы по $d\tau_2$ и d^3x_2 вычисляем с использованием дельта-функций:

$$\int\limits_t^\tau d\tau_1\int d^3x_1 G\left(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1,\tau-\tau_1\right)\frac{\partial}{\partial x_{1\mu}}u_\gamma\left(\boldsymbol{r}_1,\tau_1\right)\times$$

$$\times\int\limits_t^{\tau_1}d\tau_2\int d^3x_2 G\left(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2,\tau_1-\tau_2\right)\frac{\partial}{\partial x_{1\nu}}u_\kappa\left(\boldsymbol{r}_2,\tau_2\right)B_\epsilon^{(0)}\left(\boldsymbol{r}_2,\tau_2\right)= \tag{7}$$

$$= \tau_c \int\limits_t^\tau d\tau_1 \int d^3x_1 G\left(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1, \tau-\tau_1\right)\left\{Q(0)\frac{\partial^2 B_\epsilon^{(0)}}{\partial x_{1\mu}\partial x_{1\nu}}\delta_{\gamma\kappa} - C(0)\frac{\partial B_\epsilon^{(0)}}{\partial x_{1\mu}}e_{\gamma\kappa\nu}\right\}.$$

Теперь подставим в (7) $\tau = t + \Delta t$ и вычислим правую часть в линейном по Δt приближении. Для этого достаточно взять функцию Грина в нулевом приближении, т. е. $G \approx \delta\left(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1\right)$. В таком же приближении нужно взять $B_\epsilon^{(0)}$, опустив в (4) слагаемое, пропорциональное Δt. В результате правая часть (7) принимает вид

$$\Delta t\tau_c\left\{Q(0)\frac{\partial^2 B_\epsilon(\boldsymbol{r},t)}{\partial x_\mu \partial x_\nu}\delta_{\gamma\kappa} - C(0)\frac{\partial B_\epsilon(\boldsymbol{r},t)}{\partial x_\mu}e_{\gamma\kappa\nu}\right\} \tag{8}$$

Преобразование произведения $A_{\gamma\sigma}^{\alpha\mu}A_{\kappa\epsilon}^{\sigma\nu}$ и суммирование по греческим индексам выполняем с помощью тождеств, приведенных в задаче 1.28. На заключительном этапе используем соотношение

$$\frac{B_\alpha(t+\dot{\Delta}t) - B_\alpha(t)}{\Delta t} \approx \frac{\partial B_\alpha}{\partial t} \tag{9}$$

и получаем уравнение, приведенное в условии задачи.

10.83.

$$\widetilde{Q}(k) = A(k), \quad \widetilde{C}(k) = -P(k), \quad k\frac{d}{dk}\frac{1}{k}\frac{d\widetilde{R}(k)}{dk} = -A(k)$$

где $\widetilde{Q}(k), \widetilde{R}(k), \widetilde{C}(k)$ - фурье-образы функций $Q(r), R(r), C(r)$. Из спектральных функций $A(k,t), P(k,t)$ нужно выделить дельтаобразный множитель, зависящий от времени.

10.84. Произведя преобразование Фурье по координатам, получим из уравнения задачи 10.82* следующее уравнение для гармоник Фурье магнитного поля:

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}_k}{\partial t} = i\alpha\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{B}_k - \nu k^2\boldsymbol{B}_k \tag{1}$$

где α - параметр гиротропии, который может иметь любой знак, $\nu = \nu_t + \nu_m$ - полная магнитная вязкость. Решение имеет вид

$$\boldsymbol{B}_k(t) = \left\{\boldsymbol{B}_k^0\,\mathrm{ch}(k\alpha t) + i\left[\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{B}_k^0\right]k^{-1}\,\mathrm{sh}(k\alpha t)\right\}e^{-\nu k^2 t} \tag{2}$$

где $\boldsymbol{B}_k^0$ - гармоника Фурье начального поля. Нарастание k-й гармоники имеет место при

$$k < k_c = \frac{|\alpha|}{\nu} \quad \text{или} \quad \lambda > \lambda_c = \frac{2\pi}{k} > \frac{2\pi\nu}{|\alpha|}$$

Неустойчивы достаточно длинноволновые гармоники, система должна иметь размер $L > \lambda_c$, чтобы они могли существовать. Полученное решение годится только для ограниченных времен, с ростом поля оно станет влиять на гиротропию турбулентности, должна произойти нелинейная стабилизация неустойчивости и ограничение роста поля.

10.85. В турбулентной среде усредненное значение магнитной индукции $\boldsymbol{B} = \mu\boldsymbol{H}$ удовлетворяет уравнениям (10.14):

$$\Delta\boldsymbol{B} = \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2}\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{1}$$

Сравнив это уравнение с уравнениями, полученными в задачах 10.81*, 10.82*, находим произведение искомых величин:

$$\mu\sigma = \frac{\kappa}{1+\nu_t/\nu_m}. \tag{2}$$

Чтобы определить их по отдельности, обратимся к граничным условиям сшивания тангенциальных компонент полей на некоторой границе. Используем результат задачи 10.29 . Пусть область $0 \leqslant z \leqslant a$ заполнена неподвижной средой с электропроводностью κ и $\mu = 1$, а в области $z > a$ возбуждена турбулентность, создающая эффективную электропроводность σ и магнитную проницаемость $\mu \neq 1$. При $a \gg \delta_1$ имеем для гармоник Фурье
(3)

$$H_1(z) = H_0 e^{-(1-i)z/\delta_1}, \quad 'z < a, \quad \delta_1 = \frac{c}{\sqrt{2\pi\kappa\omega}}$$
$$H_2(z) = H_1(a) e^{-(1-i)(z-a)/\delta_2}, \quad z > a, \quad \delta_2 = \frac{c}{\sqrt{2\pi\mu\sigma\omega}}$$

Для этих полей условие $H_1 = H_2$ при $z = a$ выполняется, а условие $E_1 = E_2$ приводит к равенству

$$\frac{c}{4\pi\kappa}\frac{dH_1}{dz} = \frac{c}{4\pi\sigma}\frac{dH_2}{dz} \quad \text{при} \quad z = a \tag{4}$$

откуда находим условие $\mu = \sigma/\kappa$. С помощью (2) получаем

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{1+\nu_t/\nu_m}}, \quad \sigma = \frac{\kappa}{\sqrt{1+\nu_t/\nu_m}}. \tag{5}$$

Турбулентность уменьшает эффективные значения обеих величин, причем уменьшение сильное при $\nu_t \gg \nu_m$. Турбулентная область имеет $\mu < 1$ и обладает диамагнитными свойствами, ослабляя внешнее магнитное поле.

11.5 11 Maxwell's Equations for Variables and Inhomogeneous Fields

11.5.1 11.1. Various Forms of Maxwell's Equations in Media. Coupling Equations And Electromagnetic Response Functions

Система уравнений с четырьмя векторами поля. В разделе 7.1 была получена система уравнений (7.8)-(7.11) для макроскопических (усредненных) полей $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t), \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)$:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} \tag{11.1}$$
$$\operatorname{rot} \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\left(\boldsymbol{j}_{\text{int}}(\boldsymbol{r},t) + \boldsymbol{j}_{\text{ext}}(\boldsymbol{r},t)\right) \tag{11.2}$$
$$\operatorname{div} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = 4\pi\left(\rho_{\text{int}}(\boldsymbol{r},t) + \rho_{\text{ext}}(\boldsymbol{r},t)\right) \tag{11.3}$$
$$\operatorname{div} \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) = 0 \tag{11.4}$$

(черточку над усредненными $\rho_{\text{int}}(\boldsymbol{r},t), \boldsymbol{j}_{\text{int}}(\boldsymbol{r},t)$ для простоты письма опускаем). Усреднение производилось по физически малым объемам ΔV и промежуткам времени Δt с помощью формулы (7.5). На основе этой системы уравнений мы рассмотрели в главах 7-10 большое число электростатических и магнитостатических задач, а также квазистационарных явлений, когда электромагнитное поле медленно изменяется со временем. Но очевидно, что способ усреднения (7.5) ограничивает возможность

описания быстропеременных и сильно неоднородных полей, так как пространственный λ и временной T масштабы их изменения должны превосходить соответствующие масштабы усреднения $(\Delta V)^{1/3}$ и Δt.

Способ усреднения, свободный от этого недостатка - усреднение векторов поля и других электромагнитных величин по статистическому ансамблю состояний рассматриваемого макроскопического тела. Таким усреднением мы уже пользовались во многих задачах раздела 7.3 (см. задачи 7.14
и далее). Поскольку внутренняя структура атомов, молекул и конденсированных сред адекватно описывается квантовой механикой, то усреднение, о котором идет речь, должно включать в себя и квантовомеханическое усреднение по соответствующим квантовым состояниям. В итоге операция усреднения будет теперь определена для векторов поля следующим образом:

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=\mathrm{S_I}(\widehat{\rho}\widehat{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)),\quad \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)=\mathrm{Sp}(\widehat{\rho}\widehat{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{r},t)) \tag{11.5}$$

(черта над усредняемой величиной опущена). Здесь $\widehat{\boldsymbol{E}},\widehat{\boldsymbol{H}}$ - гейзенбергов-. ские операторы векторов поля, которые были определены в главе 6 (см. также дополнение 3), $\hat{\rho}$ - статистический оператор среды. Аналогичным образом определяются другие макроскопические величины (плотности заряда, тока, электрического и магнитного моментов) - как средние по ансамблю состояний среды значения своих гейзенберговских операторов.

В силу принципа соответствия квантовомеханические операторы удовлетворяют тем же уравнениям, что и соответствующие им (классические) физические величины. В частности, гейзенберговские операторы электромагнитного поля удовлетворяют уравнениям Максвелла (2.82)-(2.85) (см. задачу 6.11). Поэтому при усреднении по ансамблю остаются в силе формулы (7.6) и усредненные уравнения Максвелла (11.1)-(11.4). Формула связи между плотностью $\rho_{\text{int}}\,(\boldsymbol{r},t)$ наведенного в среде заряда и плотностью $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r},t)$ электрического дипольного момента (7.16) также сохраняет силу для переменных во времени полей, так как при ее обосновании в примере 7.1 нигде не было использовано условие постоянства величин $\rho_{\text{int}}\,,\boldsymbol{P}$ (см. также модельный подход к (7.16) в задаче 7.1). Поэтому уравнение связи (7.16) остается справедливым и для зависящих от времени величин:

$$\rho_{\text{int}}\,(\boldsymbol{r},t)=-\operatorname{div}\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r},t) \tag{11.6}$$

где вектор $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r},t)$ по-прежнему имеет смысл удельного дипольного момента.

Чтобы найти уравнение связи для тока $\boldsymbol{j}_{int}$, воспользуемся уравнением неразрывности

$$\frac{\partial\rho_{int}}{\partial t}+\nabla\cdot\boldsymbol{j}_{int}=0 \tag{11.7}$$

Подставив в (11.7) величину (11.6), находим

$$\nabla\cdot\left(\boldsymbol{j}_{int}-\frac{\partial\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}\right)=0$$

Отсюда следует, что величину в скобках можно записать через ротор некоторого вектора M:

$$\boldsymbol{j}_{\text{int}}\,(\boldsymbol{r},t)=\frac{\partial\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}+\operatorname{crot}\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r},t) \tag{11.8}$$

Здесь введен множитель (скорость света), чтобы для статических полей вектор $\boldsymbol{M}$ имел смысл плотности магнитного момента и уравнение (11.8) переходило в (7.18). Но в

случае переменных полей отождествление M с вектором магнитной поляризации, произведенное в примере 7.2, теряет силу ввиду появления в равенстве (3) дополнительного слагаемого, содержащего произведение $\boldsymbol{r} \times (\partial \boldsymbol{P}/\partial t)$. В быстропеременных полях теряет силу и модельное рассмотрение (задача 7.2). В этом случае молекулярные токи внутри вещества становятся незамкнутыми, и примененный в указанной задаче подсчет тока через выделенную площадку неприменим. Таким образом, вектор M в (11.8) можно отождествить с намагниченностью лишь при условии

$$\frac{1}{c}\left|\frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t}\right| \ll |\operatorname{rot} \boldsymbol{M}| \tag{11.9}$$

т.е. в медленно меняющихся полях. Но представление (11.8) без отождествления M с намагниченностью возможно и в быстропеременных полях, хотя в этом случае может оказаться более удобным непосредственное вычисление полного тока $\boldsymbol{j}_{\text{int}}$ без разделения его на ток поляризации $\partial \boldsymbol{P}/\partial t$ и ток намагничения $c \operatorname{rot} M$. Вводя обозначения (7.22) и (7.23)

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{E} + 4\pi \boldsymbol{P}, \quad \boldsymbol{H} = \boldsymbol{B} - 4\pi \boldsymbol{M} \tag{11.10}$$

для векторов электрической индукции и напряженности магнитного поля, запишем с помощью (11.6) и (11.8) систему уравнений (11.1)-(11.4) в виде

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t} \tag{11.11}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}, t) = \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}_{\text{ext}}(\boldsymbol{r}, t), \tag{11.12}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r}, t) = 4\pi \rho_{\text{ext}}(\boldsymbol{r}, t) \tag{11.13}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t) = 0 \tag{11.14}$$

Это - одна из наиболее употребительных форм записи уравнений Максвелла в средах. Ее целесообразно применять в случае достаточно медленного изменения полей со временем, когда электрические и магнитные параметры среды не сильно отличаются от своих статических значений.

Формальное сходство системы (11.11)-(11.14) с уравнениями Максвелла (2.83)-(2.86) в отсутствие сред позволяет по аналогии с (2.87)-(2.90) записать граничные условия для векторов поля на границах раздела сред:

$$\left.\begin{array}{ll} \boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{E}_2 - \boldsymbol{E}_1) = 0, & \boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{D}_2 - \boldsymbol{D}_1) = 4\pi\sigma_{ext}; \\ \boldsymbol{n} \times (\boldsymbol{H}_2 - \boldsymbol{H}_1) = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{i}_{ext}, & \boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{B}_2 - \boldsymbol{B}_1) = 0. \end{array}\right\} \tag{11.15}$$

Здесь $\boldsymbol{n}$ - единичный вектор нормали к поверхности раздела. В правые части этих условий входят поверхностные плотности сторонних зарядов и токов. Но в отличие от уравнений Максвелла в вакууме система (11.11)(11.14) содержит четыре вектора поля, $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{D}, \boldsymbol{H}$, и число уравнений недостаточно для определения всех неизвестных векторов. Необходимо дополнить эту систему некоторыми уравнениями связи между векторами поля, которые выражали бы, например, вспомогательные векторы $\boldsymbol{D}, \boldsymbol{H}$ через четко определенные равенствами (11.5) макроскопические напряженности поля $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}$.

Задача нахождения корректных уравнений связи является одной из наиболее сложных в макроскопической электродинамике. Такие уравнения как правило существенно зависят от индивидуальных свойств рассматриваемой среды и для их вывода методами квантовой механики и физической кинетики требуется

конкретизировать модель среды. Сравнительно простой анализ возможен только для самых простых моделей. Тем большее значение приобретают те свойства электромагнитных параметров среды, которые можно установить на основе общих принципов физики (причинность, свойства симметрии среды, ее термодинамическая устойчивость). Ниже мы в первую очередь используем эти общие принципы.

Уравнения связи. В статических полях, малых по сравнению с внутриатомными полями, уравнения связи в изотропных средах имели вид (7.26):

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}, \quad \boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H} \tag{11.16}$$

где ε, μ - скалярные множители, зависящие от свойств среды и ее термодинамического состояния. В анизотропных средах диэлектрическая и магнитная проницаемости представляют собой тензоры второго ранга:

$$D_\kappa = \varepsilon_{\kappa\nu} E_\nu, \quad B_\kappa = \mu_{\kappa\nu} H_\nu \tag{11.17}$$

Ясно, что в медленно изменяющихся полях в некоторой области достаточно низких частот будут применимы эти же уравнения связи со статическими значениями диэлектрической и магнитной проницаемостей. Но в быстропеременных и сильно неоднородных полях уравнения связи усложняются.

Предполагая линейность уравнений связи (т. е. достаточно слабые поля), запишем их в наиболее общем виде как результат действия на основные векторы $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}$ некоторых линейных операторов

$$\boldsymbol{D} = \widehat{\sigma}\boldsymbol{E} + \widehat{\kappa}\boldsymbol{B}, \quad \boldsymbol{H} = \widehat{\rho}\boldsymbol{B} + \widehat{\nu}\boldsymbol{E}. \tag{11.18}$$

Здесь величины со шляпками - операторы, которые в общем случае могут быть тензорами второго ранга, содержать производные и интегралы по координатам и по времени. Уравнения (11.18) можно упростить, если заметить, что $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{B}$ связаны линейным уравнением (11.11). Благодаря этому из правых частей (11.18) можно исключить один из векторов. Например, записав (11.11) в виде $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) = -c\int \operatorname{rot} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)dt$ или в фурье-представлении $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{k},\omega) = (c/\omega)\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{k},\omega)$, и использовав это в первом уравнении (11.18), получим $\boldsymbol{D} = \widehat{\sigma}\boldsymbol{E} - c\widehat{\kappa}\int \operatorname{rot} \boldsymbol{E}dt$ или

$$\boldsymbol{D} = \widehat{\varepsilon}\boldsymbol{E}, \tag{11:19}$$

где $\widehat{\varepsilon}$ - некоторый результирующий линейный оператор (оператор диэлектрической проницаемости), который в статическом случае превращается в оператор умножения на постоянный скаляр ε или на постоянный тензор $\varepsilon_{\alpha\beta}$. В аналогичной форме запишем и второе уравнение (11.18):

$$\boldsymbol{B} = \widehat{\mu}\boldsymbol{H}, \tag{11.20}$$

где $\widehat{\mu}$ - оператор магнитной проницаемости. Ниже в этом разделе мы проведем более подробное обсуждение свойств операторов $\widehat{\varepsilon}, \widehat{\mu}$.

Система уравнений с тремя векторами поля. Как уже отмечалось в связи с уравнением (11.8), для быстропеременных полей невозможно произвести разделение полного индуцированного в среде тока на две части - токи поляризации и намагничения. Поэтому в такой ситуации вводят новый, отличный от (11.10), вектор обобщенной электрической индукции $\mathcal{D}(\boldsymbol{r},t)$, связывая его с плотностью всего индуцируемого в среде тока:

$$\mathscr{D}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)+4\pi\int\limits_{-\infty}^{t}\boldsymbol{j}_{\text{int}}\ (\boldsymbol{r},t')\,dt' \tag{11.21}$$

Здесь предполагается, что поле медленно (адиабатически) включается при $t\to-\infty$, так что интеграл (11.21) сходится. По аналогии с (11.10) можно обозначить интеграл в (11.21) через

$$\mathscr{P}=\int\limits_{-\infty}^{t}\boldsymbol{j}_{\text{int}}\ (\boldsymbol{r},t')\,dt' \tag{11.22}$$

хотя введенный таким образом вектор $\mathscr{P}$ нельзя отождествить с электрическим дипольным моментом, приходящимся на единицу объема. Теперь этот вектор включает в себя и ток намагничения:

$$\boldsymbol{j}_{\text{int}}\ (\boldsymbol{r},t)=\frac{\partial}{\partial t}\mathscr{P}(\boldsymbol{r},t) \tag{11.23}$$

Плотность наведенного заряда вычисляется с помощью уравнения непрерывности:

$$\rho_{\text{int}}\ (\boldsymbol{r},t)=-\int\limits_{-\infty}^{t}\operatorname{div}\boldsymbol{j}_{\text{int}}\ (\boldsymbol{r},t')\,dt'=-\operatorname{div}\mathscr{P}(\boldsymbol{r},t) \tag{11.24}$$

Магнитное поле в этой схеме описывается одним вектором $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)$. Таким образом, уравнения Максвелла будут содержать три вектора поля:

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=-\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} \tag{11.25}$$

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{c}\frac{\partial\mathscr{D}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}+\frac{4\pi}{c}j_{\text{ext}}\ (\boldsymbol{r},t) \tag{11.26}$$

$$\operatorname{div}\mathscr{D}(\boldsymbol{r},t)=4\pi\rho_{\text{ext}}\ (\boldsymbol{r},t) \tag{11.27}$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)=0 \tag{11.28}$$

Систему уравнений (11.25)-(11.28) следует дополнить одним уравнением связи, которое можно записать в виде (11.19):

$$\mathscr{D}(\boldsymbol{r},t)=\widehat{\epsilon}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) \tag{11.29}$$

Но оператор $\widehat{\epsilon}$ в (11.29) не совпадает с $\widehat{\varepsilon}$ в (11.19). Поскольку вектор $\boldsymbol{H}$ и уравнение связи (11.20) в рассматриваемой схеме вообще отсутствуют, то уравнение (11.29) должно содержать оба оператора, $\widehat{\varepsilon}$ и $\widehat{\mu}$, из (11.19), (11.20). Ниже мы установим связи между этими тремя операторами.

Чтобы найти граничные условия для векторов поля $\boldsymbol{E},\boldsymbol{B},\boldsymbol{S}$ на границе раздела сред, переписываем уравнение (11.26) в форме (11.2) и сравниваем получившуюся систему с уравнениями Максвелла в отсутствие среды. По аналогии с граничными условиями (11.15) находим

$$\left.\begin{array}{ll}\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{E}_2-\boldsymbol{E}_1)=0, & \boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{D}_2-\mathscr{D}_1)=4\pi\sigma_{ext}\\ \boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{B}_2-\boldsymbol{B}_1)=\frac{4\pi}{c}\left(\boldsymbol{i}_{ext}+\boldsymbol{i}_{int}\right), & \boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{B}_2-\boldsymbol{B}_1)=0.\end{array}\right\} \tag{11.30}$$

Здесь $\boldsymbol{i}_{\text{int}}$ - индуцированный в веществе поверхностный ток.

Другие формы записи макроскопических уравнений Максвелла можно найти в учебнике Памятных и Турова (2000) и в статье Виноградова (2002).

Электромагнитные функции отклика. Начнем обсуждение уравнений связи между векторами электромагнитного поля с записи уравнения (11.29) в наиболее общей интегральной форме

$$\mathscr{D}_\alpha(\boldsymbol{r},t)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}dt'\int d^3r'\epsilon_{\alpha\beta}\left(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}';t,t'\right)E_\beta\left(\boldsymbol{r}',t'\right) \tag{11.31}$$

где интегрирование по координатам охватывает всю среду. Здесь $\epsilon_{\alpha\beta}$ - некоторая действительная тензорная функция, включающая в себя всю информацию о реакции вещества на слабое переменное и неоднородное электрическое поле. Ее называют по этой причине функцией линейного отклика (если бы поле $\boldsymbol{E}$ было сравнимо с внутриатомным, то связь обобщенной электрической индукции с напряженностью поля была бы нелинейной).

Физический смысл интегральной связи (11.31) состоит в том, что реакция среды в точке r в момент t может зависеть от значения поля в другие моменты времени и не только в данной, но и в соседних точках пространства. Зависимость от других моментов времени объясняется тем, что перестройка зарядов и токов среды в связи с изменившимся внешним полем происходит не мгновенно, а в течение конечного времени - времени релаксации среды. Разные подсистемы вещества могут иметь разные времена релаксации. Фактически интервал интегрирования по времени в (11.31) имеет порядок наибольшего времени релаксации τ_r, т. е. функция отклика быстро убывает при $|t-t'|\gg\tau_r$. Если свойства среды в отсутствие внешнего поля не изменяются со временем (среда равновесна), то все моменты времени t равноценны и функция отклика зависит только от разности $t-t'$, т. е.

$$\epsilon_{\alpha\beta}\left(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}';t,t'\right)=\epsilon_{\alpha\beta}\left(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}';t-t'\right) \tag{11.32}$$

Если величина, характеризующая воздействие не среду (в данном случае $E_\beta\left(\boldsymbol{r}',t'\right)$), может задаваться произвольно и независимо от состояния среды, то возникает очень существенное ограничение на свойства функции отклика: она должна строго обращаться в нуль при $t-t'<0$. Это свойство отражает принцип причинности: причина (электрическое поле) должна предшествовать следствию (поляризации среды). Важные следствия принципа причинности будут рассмотрены ниже в этом разделе. Но уже сейчас заметим, что электрическое поле в среде не всегда может задаваться независимо от свойств среды.

Нелокальность, содержащаяся в (11.31), т. е. зависимость поляризации в точке $\boldsymbol{r}$ от поля в точке $\boldsymbol{r}'$, объясняется тем, что в данную точку вследствие теплового движения приходят частицы из соседних областей, в которых поле имеет другую величину. Второй причиной нелокальности могут выступать макроскопические случайные или упорядоченные вкрапления в вещество для придания ему нужных электрических и магнитных свойств. Этот эффект тем больше, чем сильнее поле изменяется в пространстве. В статистически однородной среде зависимость функции отклика от $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{r}'$ тоже приобретает вид разности

$$\epsilon_{\alpha\beta}\left(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}';t-t'\right)=\epsilon_{\alpha\beta}\left(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}';t-t'\right) \tag{11.33}$$

Такая зависимость предполагает отсутствие границ между средами с разными свойствами, в противном случае вблизи границы эта зависимость будет нарушаться.

Интегральная зависимость (11.31) охватывает все возможные случаи линейной зависимости. В частности, при $\epsilon_{\alpha\beta}=\varepsilon_{\alpha\beta}\delta\left(t-t'\right)\delta\left(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right)$ получаем уравнение связи

типа (11.16). Разлагая поле $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}', t')$ в ряд по разностям $\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'$ и $t - t'$ вблизи точки $(\boldsymbol{r}, t)$, можем получить уравнение связи, содержащее производные от поля по координатам и по времени.

Пример 11.1. Пусть среда однородна (безгранична) и равновесна. Записать уравнение (11.31) для компонент Фурье по координатам и времени от векторов поля, считая функцию отклика зависящей от разностных аргументов.

Решение. Умножив обе части (11.31) на $\exp(i\omega t - i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})$ и произведя интегрирование в бесконечных пределах $(-\infty, \infty)$ по каждой переменной, получим вместо интегрального алгебраическое уравнение связи

$$\mathscr{D}_\alpha(\boldsymbol{k}, \omega) = \epsilon_{\alpha\beta}(\boldsymbol{k}, \omega) E_\beta(\boldsymbol{k}, \omega) \tag{11.34}$$

где

$$\epsilon_{\alpha\beta}(\boldsymbol{k}, \omega) = \int d\tau e^{i\omega\tau} \int d^3 r e^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \epsilon_{\alpha\beta}(\boldsymbol{r}, \tau) \tag{11.35}$$

- комплексная диэлектрическая проницаемость. Интегрирование по временному аргументу $\tau - t - t'$ производится только в пределах положительной полуоси (одностороннее преобразование Фурье), если рассматриваемые величины связаны причинной связью. Сравнив (11.34) с фурьеобразом уравнения (11.21), получим связь тензора комплексной электропроводности $\kappa_{\alpha\beta}$ с тензором диэлектрической проницаемости:

$$j_\alpha^{int} = \kappa_{\alpha\beta} E_\beta, \quad \kappa_{\alpha\beta} = -\frac{i\omega}{4\pi}(\epsilon_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta}) \tag{11.36}$$

Из определения тензора комплексной диэлектрической проницаемости (11.35) и действительности функции отклика $\epsilon_{\alpha\beta}(\boldsymbol{R}, \tau)$ следуют свойства симметрии при действительных значениях ω и k:

$$\epsilon_{\alpha\beta}(\boldsymbol{k}, \omega) = \epsilon^*_{\alpha\beta}(-\boldsymbol{k}, -\omega) \tag{11.37}$$

где звездочка, как и раньше, означает комплексное сопряжение.

Пример 11.2. Пусть среда равновесна, однородна и изотропна, а также инвариантна относительно инверсии пространственных осей. Показать, что тензор $\epsilon_{\alpha\beta}(\boldsymbol{k}, \omega)$ комплексной диэлектрической проницаемости определяется двумя скалярными функциями, зависящими в общем случае от $\omega uk = |\boldsymbol{k}|$.

Решение. Тензор второго ранга $\epsilon_{\alpha\beta}$ является истинным (полярным) и в изотропной среде может быть построен только из полярных тензоров $\delta_{\alpha\beta}$ и $k_\alpha k_\beta / k^2$. Составим из них поперечный и продольный относительно k тензоры $\delta^\perp_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} - k_\alpha k_\beta / k^2, \delta^\parallel_{\alpha\beta} = k_\alpha k_\beta / k^2$. Другие тензоры в рассматриваемой задаче отсутствуют. Общий вид тензора комплексной диэлектрической проницаемости:

$$\epsilon_{\alpha\beta}(\boldsymbol{k}, \omega) = \varepsilon_l(k, \omega)\frac{k_\alpha k_\beta}{k^2} + \varepsilon_t(k, \omega)\left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2}\right) \tag{11.38}$$

где $\varepsilon_l, \varepsilon_t$ - скалярные функции, в общем случае комплексные, которые можно назвать продольной и поперечной диэлектрическими проницаемостями. Из соотношения (11.37) получаем полезные свойства симметрии для действительной $\varepsilon' = \operatorname{Re}\varepsilon$ и мнимой $\varepsilon'' = \operatorname{Im}\varepsilon$ частей диэлектрических проницаемостей:

$$\varepsilon'_{l,t}(k, \omega) = \varepsilon'_{l,t}(k, -\omega) \quad \varepsilon''_{l,t}(k, \omega) = -\varepsilon''_{l,t}(k, -\omega). \tag{11.39}$$

Действительные части $\varepsilon_{l,t}$ являются четными, а мнимые части $\varepsilon_{l,t}$ - нечетными функциями частоты.

В анизотропных средах вид тензора $\epsilon_{\alpha\beta}(\boldsymbol{k},\omega)$ усложняется, и он не может быть представлен в форме (11.38).

Пример 11.3. Показать, что двух введенных в предыдущем примере диэлектрических проницаемостей $\varepsilon_l, \varepsilon_t$ достаточно для формулировки макроскопических уравнений Максвелла в однородной и изотропной среде. Для этого выразить в фурье-представлении величины $\boldsymbol{j}_{\text{int}}$, ρ_{int} в системе
(11.1)-(11.4) через $\varepsilon_l, \varepsilon_t$ и макроскопическую напряженность электрического поля $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{k},\omega)$. Записать систему уравнений через указанные величины и выразить амплитуды Фурье векторов поля через плотности сторонних заряда и тока.

Решение. Из уравнений (11.31), (11.34), (11.38) находим

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{j}_{int}^{\parallel}(\boldsymbol{k},\omega) &= -\frac{i\omega}{4\pi}\left(\varepsilon_l - 1\right)\boldsymbol{E}^{\parallel}(\boldsymbol{k},\omega) \\
\boldsymbol{j}_{int}^{\perp}(\boldsymbol{k},\omega) &= -\frac{i\omega}{4\pi}\left(\varepsilon_t - 1\right)\boldsymbol{E}^{\perp}(\boldsymbol{k},\omega) \\
\rho_{int}(\boldsymbol{k},\omega) &= \frac{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j}_{\text{int}}}{\omega} = -i\frac{\varepsilon_l - 1}{4\pi}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{k},\omega)
\end{aligned} \tag{11.40}$$

Последнее равенство получено из уравнения непрерывности, индексы $\perp$ и $\parallel$ обозначают компоненты, перпендикулярную и продольную относительно вектора $\boldsymbol{k}$. Далее выписываем в представлении Фурье систему уравнений Максвелла (11.1)-(11.4)

$$\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}^{\perp}(\boldsymbol{k},\omega) = \frac{\omega}{c}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{k},\omega) \tag{11.41}$$

$$\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{k},\omega) = -\frac{\omega}{c}\varepsilon_t\boldsymbol{E}^{\perp}(\boldsymbol{k},\omega) - i\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}_{ext}^{\perp}(\boldsymbol{k},\omega) \tag{11.42}$$

$$\varepsilon_l\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{k},\omega) = -i4\pi\rho_{ext}(\boldsymbol{k},\omega) \tag{11.43}$$

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}(\boldsymbol{k},\omega) = 0 \tag{11.44}$$

и находим из нее компоненты Фурье векторов поля:

$$\boldsymbol{E}^{\parallel}(\boldsymbol{k},\omega) = -i\frac{4\pi}{k\varepsilon_l(k,\omega)}\rho_{\text{ext}}\left(\boldsymbol{k},\omega\right) \tag{11.45}$$

$$\boldsymbol{E}^{\perp}(\boldsymbol{k},\omega) = -i\frac{4\pi\omega}{\omega^2\varepsilon_t(k,\omega) - c^2k^2}j_{ext}^{\perp}(\boldsymbol{k},\omega) \tag{11.46}$$

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{k},\omega) = \boldsymbol{B}^{\perp}(\boldsymbol{k},\omega) = -i\frac{4\pi c}{\omega^2\varepsilon_t(k,\omega) - c^2k^2}\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}_{ext}(\boldsymbol{k},\omega) \tag{11.47}$$

Перейдем теперь к уравнениям связи, представленным в форме (11.19), (11.20). Как и в случае уравнения (11.31), записываем их в интегральной форме. В однородной равновесной среде ядра интегральных операторов будут зависеть от разностных аргументов. В случае статических однородных
полей они должны превращаться в постоянные тензоры в соответствии с равенствами (11.17). В изотропной среде будем считать ядра операторов $\widehat{\varepsilon}$ и $\widehat{\mu}$ скалярными величинами: $\widehat{\varepsilon}\boldsymbol{E} = \int\limits_{-\infty}^{t}\int d^3r'\varepsilon\left(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}', t-t'\right)\boldsymbol{E}\left(\boldsymbol{r}', t'\right)$ и аналогично для $\widehat{\mu}$. В представлении Фурье уравнения (11.19), (11.20) примут вид (см. пример (11.1))

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{k},\omega)=\varepsilon(k,\omega)\boldsymbol{E}(\boldsymbol{k},\omega),\quad \boldsymbol{B}(\boldsymbol{k},\omega)=\mu(k,\omega)\boldsymbol{H}(\boldsymbol{k},\omega) \tag{11.48}$$

Здесь в аргументах ε и μ указана величина $k=|\boldsymbol{k}|$, так как скалярная функция может зависеть только от скаляров. В анизотропных средах диэлектрическая и магнитная проницаемости представляют собой тензоры второго ранга:

$$D_\kappa(\boldsymbol{k},\omega)=\varepsilon_{\kappa\nu}(\boldsymbol{k},\omega)E_\nu(\boldsymbol{k},\omega),\quad B_\kappa(\boldsymbol{k},\omega)=\mu_{\kappa\nu}(\boldsymbol{k},\omega)H_\nu(\boldsymbol{k},\omega) \tag{11.49}$$

Пример 11.4. Найти связь между проницаемостями $\varepsilon,\mu\varepsilon_l,\varepsilon_t$, введенными ранее. Для этого записать систему (11.11)-(11.14) в представлении Фурье с использованием (11.48) и сравнить ее с системой (11.41)(11.44). Воспользоваться тем, что векторы $\boldsymbol{E},\boldsymbol{B}$ в обеих системах по определению одни и те же.

Решение. Система (11.11)-(11.14) в представлении Фурье принимает вид

$$\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{k},\omega)=\frac{\omega}{c}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{k},\omega) \tag{11.50}$$

$$\frac{1}{\mu}\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{k},\omega)=-\frac{\omega}{c}\varepsilon\boldsymbol{E}(\boldsymbol{k},\omega)-i\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}_{ext}(\boldsymbol{k},\omega) \tag{11.51}$$

$$\varepsilon\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{k},\omega)=-i4\pi\rho_{ext}(\boldsymbol{k},\omega) \tag{11.52}$$

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}(\boldsymbol{k},\omega)=0 \tag{11.53}$$

Из сравнения (11.52) с (11.43) находим

$$\varepsilon(k,\omega)=\varepsilon_l(k,\omega) \tag{11.54}$$

После этого записываем равенства (11.51) и (11.42) в виде

$$\frac{1}{\mu}\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{k},\omega)=-\frac{\omega}{c}\varepsilon_l\boldsymbol{E}^{\perp}(\boldsymbol{k},\omega)-i\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}^{\perp}_{\text{ext}}(\boldsymbol{k},\omega) \tag{1}$$

$$\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{k},\omega)=-\frac{\omega}{c}\varepsilon_t\boldsymbol{E}^{\perp}(\boldsymbol{k},\omega)-i\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}^{\perp}_{\text{ext}}(\boldsymbol{k},\omega) \tag{2}$$

Продольное электрическое поле и продольный ток сократились из (11.51) в силу уравнения (11.52) и уравнения непрерывности $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j}_{\text{ext}}=\omega\rho_{\text{ext}}$. Вычитая почленно равенство (2) из (1), находим

$$\left(\frac{1}{\mu}-1\right)\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{B}=-\frac{\omega}{c}\left(\varepsilon_l-\varepsilon_t\right)\boldsymbol{E}^{\perp}. \tag{3}$$

Для исключения вектора $\boldsymbol{B}$ используем закон электромагнцтной индукции (11.50) и получаем важное соотношение

$$\frac{1}{\mu(k,\omega)}=1+\left(\frac{\omega}{ck}\right)^2\left(\varepsilon_l(k,\omega)-\varepsilon_t(k,\omega)\right) \tag{11.55}$$

Из этого соотношения видно, что различие между ε_l и ε_t обусловлено магнитными свойствами среды. Таким образом, при всех $\omega\neq 0$, пока векторы $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{E}^{\perp}$ связаны законом электромагнитной индукции, для полного описания электрических и магнитных свойств однородной и изотропной среды достаточно знать две скалярные функции ω и k. В статическом случае ($\omega=0$) связь между векторами $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{B}$ отсутствует, вещество описывается двумя проницаемостями $\varepsilon(k,0)=\varepsilon_l(k,0),\mu(k,0)$, которые в случае неоднородного поля могут зависеть от k.

Пример 11.5. Из общих систем уравнений Максвелла в $\boldsymbol{k}, \omega$-представлении (см. равенства (11.41)-(11.53)) получить уравнения дисперсии, определяющие зависимость частоты от волнового вектора для поперечных и продольных собственных колебаний электромагнитного поля в веществе. Записать требуемые уравнения через проницаемости $\varepsilon_l(\boldsymbol{k}, \omega), \varepsilon_t(\boldsymbol{k}, \omega)$ и через $\varepsilon(\boldsymbol{k}, \omega), \mu(\boldsymbol{k}, \omega)$.

Решение. Собственные колебания происходят в отсутствие внешних источников, т. е. при $\boldsymbol{j}_{\text{ext}} = \rho_{ext} = 0$. Как следует из (11.45), в этом случае продольная часть вектора $\boldsymbol{E}$ может иметь ненулевое значение только при обращении знаменателя правой части равенства в нуль. Из этого условия находим уравнение дисперсии продольных колебаний:

$$\varepsilon_l(\boldsymbol{k}, \omega) = 0 \tag{11.56}$$

Продольные колебания являются чисто электрическими, так как магнитное поле поперечно ($\operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0$) и при продольных колебаниях не может возникнуть. Поперечные векторы $\boldsymbol{E}^{\perp}, \boldsymbol{B}$ в отсутствие внешних источников
могут быть отличны от нуля при обращении в нуль одинаковых знаменателей правых частей равенств (11.46), (11.47). Это условие дает уравнение дисперсии поперечных волн:

$$\omega^2 \varepsilon_t(\boldsymbol{k}, \omega) = c^2 k^2 \tag{11.57}$$

Уравнения дисперсии, выраженные через $\varepsilon(\boldsymbol{k}, \omega), \mu(\boldsymbol{k}, \omega)$, можно получить аналогичным путем из системы (11.50)-(11.53) или с помощью (11.54), (11.55):

$$\varepsilon(\boldsymbol{k}, \omega) = 0, \quad \omega^2 \varepsilon(\boldsymbol{k}, \omega)\mu(\boldsymbol{k}, \omega) = c^2 k^2 \tag{11.58}$$

Пример 11.6. Вычислить тензор комплексной диэлектрической проницаемости полностью ионизованной однородной и изотропной бесстолкновительной газовой плазмы, находящейся в равновесном состоянии при температуре T (средние концентрачии частиц $n_e = n_i = n$). Бесстолкновительной называется плазма, в которой частота столкновений частиц мала по сравнению с частотой волны, а свободный пробег частиц велик по сравнению с длиной волны.

Решение. Вычислим ток в плазме, вызванный слабым внешним полем с заданными значениями $\boldsymbol{k}, \omega$. Он может быть найден по формуле

$$\boldsymbol{j} = \sum \int e \boldsymbol{v} \delta f d^3 p \tag{1}$$

где δf - неравновесная часть функции распределения частиц данного сорта, вызванная внешним полем, сумма берется по всем сортам частиц (мы будем рассматривать только электроны и однозарядные ионы). Величину δf вычисляем из уравнения (7.37), записав интеграл столкновений в форме (7.39) $I(f) = -\nu \delta f$, где ν - малая частота столкновений, которую, однако, можно будет устремить к нулю только в конце расчета. Считая поле малым, подставляем в (7.37) $f = f_0 + \delta f, |\delta f| \ll f_0$, где f_0 - максвелловское распределение (7.31), и линеаризуем уравнение:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} + \nu \right) \delta f = -e \left(\boldsymbol{E} + \frac{1}{c} \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} \right) \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \boldsymbol{p}} \tag{2}$$

Поскольку $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B} \propto \exp(i\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} - i\omega t)$, то зависимость $\delta f(\boldsymbol{r}, t, \boldsymbol{p})$ от координат и времени можно искать в такой же форме:

$$\delta f(\boldsymbol{r}, t, \boldsymbol{p}) = \delta f(\boldsymbol{p}) \exp(i\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} - i\omega t) \tag{3}$$

В случае распределения Максвелла (7.31) производная по импульсу

$$\frac{\partial f_0}{\partial \boldsymbol{p}} = -\frac{\boldsymbol{v}}{T} f_0, \quad [\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}] \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \boldsymbol{p}} = 0 \tag{4}$$

Подставив все это в (2), получим решение

$$\delta f(\boldsymbol{p}) = \frac{e(\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{v}) f_0(p)}{T(\nu + i\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{v} - i\omega)} \tag{5}$$

Из полученного выражения становится ясно, почему целесообразно сохранить даже в бесстолкновительном случае малую частоту столкновений $\nu > 0$: знаменатель последнего выражения не обращается при этом в нуль ни при каких действительных (физических) значениях $\boldsymbol{k}, \boldsymbol{v}, \omega$, и формула (5), как и последующие выражения на ее основе, математически корректны.

Подставив найденное выражение в (1), можем придать связи между током и электрическим полем форму закона Ома

$$j_\alpha = \kappa_{\alpha\beta}(\boldsymbol{k}, \omega) E_\beta \tag{6}$$

где тензор комплексной электропроводности имеет вид

$$\kappa_{\alpha\beta}(\boldsymbol{k}, \omega) = \sum \frac{e^2}{T} \int \frac{v_\alpha v_\beta f_0(p)}{\nu + i\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{v} - i\omega} d^3p \tag{7}$$

Согласно (11.21), этот тензор связан с комплексной диэлектрической проницаемостью соотношением

$$\epsilon_{\alpha\beta}(\boldsymbol{k}, \omega) = \delta_{\alpha\beta} + i\frac{4\pi\kappa_{\alpha\beta}(\boldsymbol{k}, \omega)}{\omega} \tag{8}$$

Выделим из тензора $\epsilon_{\alpha\beta}$ инвариантные величины ε_l и ε_t в соответствии с его представлением (11.38):

$$\varepsilon_l = 1 + i \sum \frac{4\pi e^2}{\omega T} \int \frac{v_\parallel^2 f_0(p)}{\nu + ikv_\parallel - i\omega} d^3p \tag{9}$$

$$\varepsilon_t = 1 + i \sum \frac{2\pi e^2}{\omega T} \int \frac{v_\perp^2 f_0(p)}{\nu + ikv_\parallel - i\omega} d^3p \tag{10}$$

Здесь использованы проекции скорости, параллельная и перпендикулярная вектору $\boldsymbol{k}$.

Интегрирование по поперечным компонентам импульса в (9), (10) легко произвести, используя явный вид распределения Максвелла (7.31). В результате формулы примут вид

$$\varepsilon_l(k, \omega) = 1 + i \sum \frac{4\pi n e^2}{m} \frac{1}{\sqrt{2\pi} k v_T \omega} \int \frac{e^{-x^2/2} x^2 dx}{x - s - i\nu'} \tag{11}$$

$$\varepsilon_t(k, \omega) = 1 + i \sum \frac{4\pi n e^2}{m} \frac{1}{\sqrt{2\pi} k v_T \omega} \int \frac{e^{-x^2/2} dx}{x - s - i\nu'} \tag{12}$$

где $v_T = \sqrt{T/m}$ - тепловая скорость, $s = \omega/kv_T > 0$ и $\nu' = \nu/kv_T > 0$ - безразмерные величины. С помощью формул Сохоцкого (1.223) преобразуем дробь:

$$\frac{x^2}{x - s - i\nu'} = x\left[1 + \frac{s}{x - s - i\nu'}\right] = x + s + \frac{s^2}{x - s - i\nu'} \tag{13}$$

Интегрирование $x+s$ сводится к табличному интегралу. Последнее интегрирование выполняем с помощью тождества

$$\frac{1}{\nu' + i(x-s)} = \int\limits_0^\infty e^{-(\nu' - is + ix)t} dt$$

которое имеет силу благодаря тому, что $\nu' > 0$. Имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-x^2/2} dx}{x - s - i\nu'} = i \int\limits_0^\infty dt e^{-(\nu' - is)t} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(x^2 + 2xit\right)/2} dx =$$

$$= i\sqrt{2\pi} e^{-s^2/2} \left\{ \sqrt{\frac{\pi}{2}} + i \int\limits_0^s e^{u^2/2} du \right\}$$

Введем обозначения

$$Z(s) = X(s) - iY(s),$$

$$X(s) = s e^{-s^2/2} \int\limits_0^s e^{u^2/2} du, \quad Y(s) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} s e^{-s^2/2} \tag{14}$$

Действительная часть выражается через интеграл вероятности (см. Абрамовиц и Стиган, 1979).

Использовав обозначения (14), а также определив плазменную частоту

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{4\pi n e^2}{m}} \tag{11.5}$$

записываем окончательное выражение для продольной и поперечной проницаемостей бесстолкновительной газовой плазмы при произвольных значениях ω и k:

$$\varepsilon_l(k,\omega) = 1 - \sum \frac{\omega_0^2}{(kv_T)^2} [Z(s) - 1] \tag{11.60}$$

$$\varepsilon_t(k,\omega) = 1 - \sum \frac{\omega_0^2}{\omega^2} Z(s) \tag{11.61}$$

Сумма здесь берется по электронам и всем сортам ионов, имеющихся в плазме. Следует иметь в виду, что частоты ω_{0e}, ω_{0i} и тепловые скорости v_{Te}, v_{Ti} различны для электронов и ионов из-за различия их масс (и, возможно, температур, если плазма находится в неполном равновесии).

Заметим, что обе диэлектрические проницаемости $\varepsilon_l, \varepsilon_t$ имеют согласно (14) мнимые части, пропорциональные $Y(s)$. Мнимая часть диэлектрической проницаемости определяет диссипацию электромагнитной энергии (см. ниже раздел 11.3). Возможность диссипации энергии в бесстолкновительной плазме была открыта Л. Д. Ландау в 1946 г. и называется затуханием Ландау (см. [Ландау (1946)]). Как можно увидеть из структуры знаменателей в формулах (9), (10), затухание Ландау обязано тем частицам, скорость $v_\parallel$которых в направлении волнового вектора близка к фазовой скорости волны: $v_\parallel \approx v_{ph} = \omega/k$. Такие частицы, двигаясь длительное время в резонансе с волной, могут отбирать от нее энергию. В неравновесной плазме возможен и обратный процесс - раскачка волн частицами. Но эффекты затухания и раскачки механизмом Ландау

отсутствуют у волн, у которых $v_{ph} \geqslant c$, из-за релятивистского условия $v < c$ для любых частиц с конечными массами.

Многочисленные применения полученных формул и их анализ будут произведены в задачах (см. 11.8*, 11.9, 11.47*, 11.48 и др.)

Рекомендуемая литература: [Ландау и Лифшиц, Электродинамика сплошных сред; Ландау и Лифшиц, Статистическая физика; Памятных и Туров (2000); Линдхарт (1954); Батыгин и Топтыгин, Современная электродинамика, ч. 1; Бредов и др., Классическая электродинамика; Силин и

Рухадзе (1961); Батыгин и Топтыгин (2002); Александров и др. (1978); Ахиезер и др. (1974)].

Задачи

11.1. Показать, что уравнения (11.12), (11.13) инвариантны относительно преобразования

$$\boldsymbol{D}' = \boldsymbol{D} + \operatorname{rot} \boldsymbol{Q}, \quad \boldsymbol{H}' = \boldsymbol{H} + \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{Q}}{\partial t}$$

где $\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{r}, t)$ - произвольный псевдовектор. Неоднозначность определения векторов $\boldsymbol{D}, \boldsymbol{H}$ отражает уже обсуждавшуюся в связи с формулой (11.8) неоднозначность разделения полного тока на ток поляризации и ток намагничения.

11.2. Записать тензор $\epsilon_{\alpha\beta}(\boldsymbol{k}, \omega)$, определенный равенством (11.35), через проницаемости $\varepsilon(k, \omega), \mu(k, \omega)$:

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon\delta_{\alpha\beta} + \left(\frac{ck}{\omega}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{\mu}\right)\left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2}\right) \tag{11.62}$$

11.3*. Обобщим материальные уравнения (11.48) для однородной, изотропной, равновесной среды и введем разные диэлектрические проницаемости для продольного и поперечного электрического поля:

$$D^{\parallel}(\boldsymbol{k}, \omega) = \varepsilon_{\parallel}(k, \omega) E^{\parallel}(\boldsymbol{k}, \omega), \quad \boldsymbol{D}^{\perp}(\boldsymbol{k}, \omega) = \varepsilon_{\perp}(k, \omega)\boldsymbol{E}^{\perp}(\boldsymbol{k}, \omega),$$
$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{k}, \omega) = \mu_{\perp}(k, \omega)\boldsymbol{H}(\boldsymbol{k}, \omega)$$

(магнитные векторы оба поперечны и для них введена одна проницаемость). Показать, что проницаемости $\varepsilon_{\perp}, \mu_{\perp}$ можно произвольно менять, оставляя неизменной величину (Киржниц, 1987)

$$\eta(k, \omega) = \frac{c^2k^2/\mu_{\perp} - \omega^2\varepsilon_{\perp}}{c^2k^2 - \omega^2} = \frac{c^2k^2 - \omega^2\varepsilon_t}{c^2k^2 - \omega^2} \tag{11.63}$$

которая и является реальной физической характеристикой среды относительно поперечного электромагнитного поля.

11.4 С помощью системы уравнений (11.1)-(11.4) найти связь между фурье-образами $\rho_{\text{tot}} = \rho_{\text{int}} + \rho_{\text{ext}}$, $\boldsymbol{j}^{\perp}_{\text{tot}} = \boldsymbol{j}^{\perp}_{\text{int}} + \boldsymbol{j}^{\perp}_{\text{ext}}$ полных заряда и тока и $\boldsymbol{j}^{\perp}_{\text{ext}}, \rho_{\text{ext}}$, выразив их через введенные в задаче 11.3° величины $\varepsilon_{\parallel}(k, \omega)$ и $\eta(k, \omega)$.

11.5. Выразить векторы поля $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}$ через электромагнитные потенциалы

$$\boldsymbol{B} = \operatorname{rot} \boldsymbol{A}, \quad \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} \varphi \tag{11.64}$$

Выбрать кулоновскую калибровку: $\operatorname{div} \boldsymbol{A} = 0$. С помощью системы уравнений (11.1)-(11.4) построить в фурье-представлении функции Грина $G^{\parallel}(k, \omega), G^{\perp}(k, \omega)$ для равновесной, однородной и изотропной среды, позволяющие выразить скалярный и

векторный потенциалы через сторонние заряды и токи $\rho_{\text{ext}}(\boldsymbol{k},\omega), \boldsymbol{j}_{\text{ext}}(\boldsymbol{k},\omega)$.

11.6*. Ток, возникающий в металлах под действием низкочастотного электрического поля $\boldsymbol{E}(t) = \boldsymbol{E}_0 e^{-i\omega t}$, хорошо описывается законом Ома $\boldsymbol{j} = \kappa \boldsymbol{E}$, где κ - статическая электропроводность, а связанные заряды вносят исчезающе малый вклад. Показать, что в этом случае

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_l(\omega) = \varepsilon_t(\omega) = 1 + i\frac{4\pi\kappa}{\omega} \quad (k \to 0, \mu = 1). \tag{11.65}$$

11.7*. Вычислить диэлектрическую проницаемость вещества при высоких частотах $\omega \gg \omega_0$, где ω_0 - частота движения электронов в атомах (порядка частот переходов между атомными уровнями). Учесть, что за период волны $T = 2\pi/\omega$ нерелятивистский атомный электрон проходит путь $l_T \approx vT$, который мал по сравнению с размером атома и с длиной волны поля $\lambda = cT$. Поэтому электроны вещества на протяжении нескольких периодов волны могут считаться свободными и движущимися в слабом однородном переменном поле заданной частоты ω.

11.8*. На основе полученного в примере 11.6 результата исследовать распределение электростатического потенциала вокруг неподвижного точечного заряда q, находящегося в равновесной плазме, средняя концентрация и температура которой заданы. Сравнить полученное решение с решением задачи 7.24 .

11.9. Получить асимптотические выражения для диэлектрических проницаемостей, вычисленных в примере 11.6 (формулы (11.60), (11.61)) в предельных случаях $s \gg 1$ и $s \ll 1$.

11.10. Вычислить магнитную проницаемость $\mu(k,\omega)$ бесстолкновительной газовой плазмы. Исследовать предельные случаи $\omega \gg kv_T$ и $\omega \ll kv_T$.

11.11. Вычислить диэлектрические проницаемости $\varepsilon_l(k,\omega), \varepsilon_t(k,\omega)$ бесстолкновительной полностью вырожденной плазмы твердого тела. Ионы, закрепленные в узлах кристаллической решетки, можно считать неподвижными. Исследовать предельные случаи $\omega \gg kv_F$ и $\omega \ll kv_F$, где v_F - скорость электронов на поверхности Ферми.

11.12*. Заряженный осциллятор с собственной частотой колебаний ω_0 и постоянной затухания γ сначала покоится. Затем на него начинает действовать внешнее электрическое поле $\boldsymbol{E}(t)$, зависящее от времени произвольным образом. Длины волн колебаний поля велики по сравнению с амплитудой колебаний осциллятора. Записать дипольный момент частицы $\boldsymbol{p}(t) = e\boldsymbol{r}(t)$ относительно центра колебаний в виде интеграла, содержащего внешнее поле, и вычислить функцию отклика (которая будет характеризовать поляризуемость осциллятора).

11.13. Квазиклассическая модель дисперсии основана на представлении атомных электронов в виде классических осцилляторов, обладающих собственной частотой колебаний ω_0 и постоянной затухания γ. В простейшей модели можно считать все осцилляторы одинаковыми, отличия локального поля от среднего не учитывать. Вычислить в такой модели диэлектрическую проницаемость $\varepsilon(\omega)$ среды, средняя концентрация электронов в которой равна n. Построить графики зависимости $\varepsilon'(\omega) = \operatorname{Re}\varepsilon(\omega)$ и $\varepsilon''(\omega) = \operatorname{Im}\varepsilon(\omega)$ от частоты для прозрачной среды ($\gamma \ll \omega$). Использовать функцию отклика, полученную в предыдущей задаче.

11.14*. Квантовая теория дисперсии вдали от резонансов. Пусть вещество состоит из нейтральных атомов, концентрация которых N в единице объема. Вычислить на основе квантовой теории дипольный момент отдельного атома, индуцированный слабым внешним длинноволновым полем, и затем получить диэлектрическую проницаемость вещества в пренебрежении отличием локального поля от среднего. Сравнить полученный результат с тем, который найден в предыдущей задаче на основе квазиклассической модели.

11.15*. Квантовая теория дисперсии вблизи частот спектральных линий атома. В условиях предыдущей задачи учесть радиационное уширение спектральных линий (см. пример 6.11) и вычислить диэлектрическую проницаемость при частотах, близких или совпадающих с частотами спектральных линий.

11.16. Искусственный.диэлектрик состоит из одинаковых идеально проводящих металлических сфер радиуса a, хаотически распределенных в вакууме. Среднее число сфер в единице объема N. В этой среде распространяется электромагнитная волна. Пренебрегая отличием поля, действующего на каждую сферу, от среднего поля, определить электрическую ε и магнитную μ проницаемости такого искусственного диэлектрика. При каких условиях его можно рассматривать как сплошную среду?

Указание. Электрическая и магнитная поляризуемости идеально проводящей сферы вычислены в задачах 8.13, 10.40.

11.17*. Вычислить диэлектрическую проницаемость проводящей среды, считая ионы неподвижными и диэлектрическую восприимчивость $\alpha_i(\omega)$ ионной среды известной. Диссипацию энергии учесть введением «силы трения» $-\eta r$, действующей на электроны проводимости, концентрация которых N. Связать коэффициент η со статической удельной электропроводностью κ.

11.18*. Газообразный диэлектрик, находящийся в состоянии статистического равновесия при температуре T, состоит из молекул, концентрация 'которых N, главные значения тензора поляризуемости $\beta^{(1)} = \beta$ и $\beta^{(2)} = \beta^{(3)} = \beta'$ (β и β' зависят от частоты ω). На него действует постоянное и однородное электрическое поле $\boldsymbol{E}_0$. Найти тензор диэлектрической проницаемости диэлектрика для гармонически зависящего от времени электрического поля $\boldsymbol{E}(t) = \mathscr{E} e^{-i\omega t}$, считая $\mathscr{E} \ll E_0$.

11.19. Газообразный диэлектрик состоит из полярных молекул, электрический дипольный момент которых при отсутствии внешнего поля p_0. Главные значения тензора поляризуемости молекулы в переменном поле равны $\beta^{(1)} = \beta$ и $\beta^{(2)} = \beta^{(3)} = \beta'$, причем ось x_1 имеет направление p_0. На диэлектрик действует постоянное электрическое поле $\boldsymbol{E}_0$ и переменное поле $\boldsymbol{E}(t) = \mathscr{E} e^{-i\omega t}$. Пренебрегая ориентирующим действием переменного поля и ориентационным эффектом, связанным с анизотропной поляризуемостью молекулы в постоянном поле, найти тензор диэлектрической проницаемости диэлектрика для переменного поля, если температура T, концентрация частиц N.

11.20*. Некоторая система зарядов (например, молекула) находится в электромагнитном поле, меняющемся по гармоническому закону. Показать, что если в системе не происходит диссипации электромагнитной энергии, то тензор ее поляризуемости удовлетворяет условию эрмитовости $\beta_{ik} = \beta^*_{ki}$.

11.21. Показать, что если тензор β_{ik} эрмитов, то при соответствующем выборе координатных осей он может быть записан в виде $\beta_{ik} = \beta^{(i)}\delta_{ik} + ie_{ikl}g_l$, где e_{ikl} - единичный антисимметричный тензор III ранга (его определение см. в разделе 1.1), g - некоторый вещественный вектор (вектор гирации) [1], $\beta^{(i)}$ - вещественные поляризуемости.

11.22. Найти поляризуемость атома β_{ik} в поле плоской монохроматической волны при наличии слабого внешнего постоянного магнитного поля $\boldsymbol{H}_0$. Исходить из модели упруго связанного электрона (см. задачу 11.13°); применить метод последовательных приближений. Действием магнитного поля плоской волны и потерями электромагнитной энергии пренебречь. Определить также вектор гирации g.

11.23*. Используя осцилляторную модель атома, найти тензор диэлектрической проницаемости $\varepsilon_{ik}(\omega)$. диэлектрика, содержащего N атомов в единице объема и находящегося в постоянном магнитном поле $\boldsymbol{H}_0$ произвольной величины. Диссипацией электромагнитной энергии и действием магнитного поля плоской волны пренебречь. При каком условии точное решение перейдет в приближенное решение предыдущей задачи?

Указание. При интегрировании уравнения движения электрона перейти к циклическим компонентам

$$x_{\pm 1} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}}(x \pm iy), \quad x_0 = z$$

11.24. Вычислить тензор диэлектрической проницаемости плазмы, находящейся во внешнем постоянном магнитном поле B, если средняя концентрация электронов N. Положительные ионы считать неподвижными, потери энергии учесть введением «силы трения» - $\dot{\boldsymbol{r}}$.

11.25*. Найти диэлектрическую проницаемость ионизованного газа, находящегося в постоянном магнитном поле, с учетом движения положительных ионов, имея в виду, что масса иона значительно больше массы электрона. Рассмотреть зависимость диэлектрической проницаемости от ω и сравнить ее со случаем, когда ионы считаются неподвижными. Концентрация ионов и электронов N.

Указание. Рассмотреть систему уравнений движения электрона и иона. Принять во внимание, что на электрон действует «сила трения» $[-\eta(\dot{\boldsymbol{r}} - \dot{\boldsymbol{R}})]$ на ион - «сила трения» $[-\eta(\dot{\boldsymbol{R}} - \dot{\boldsymbol{r}})]$, где $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{R}$ - радиусы-векторы электрона и иона.

11.26*. Пусть в безграничной однородной среде имеется только одно выделенное направление (например, направление внешнего поля). Пусть, далее, T_{ik} - какой-нибудь тензорный параметр этой среды, например, электрическая или магнитная проницаемость. Очевидно, что компоненты тензора T_{ik} должны быть инвариантны относительно любого поворота системы координат вокруг выделенного направления. Получить ограничения, которые накладываются этим требованием инвариантности на вид тензора T_{ik}.

11.5.2 11.2. Causality and Dispersion Relations

Принцип причинности. Причинно-следственные связи между явлениями позволяют установить некоторые общие свойства функций электромагнитного отклика, не связанные с конкретными моделями среды. Но при этом очень важно корректно выбрать величины, характеризующие причину и следствие. Следуя Киржницу (1987, 1976), будем считать, что величинапричина может принимать любое наперед заданное значение, не зависящее от состояния среды. Величина-следствие определяется причиной и электромагнитным откликом среды. Принцип причинности состоит в том, что причина всегда предшествует по времени следствию.

В качестве примера рассмотрим конденсатор, заполненный средой с диэлектрической проницаемостью ε. На обкладки конденсатора подается переменное гармоническое напряжение с частотой ω от внешнего источника. Внутри конденсатора векторы электрического поля $\boldsymbol{D}$ и $\boldsymbol{E}$ связаны линейным соотношением через продольную диэлектрическую проницаемость $\varepsilon(\omega) = \varepsilon_l(\omega)$. Напряженность поля $E = U/L$ определяется разностью потенциалов на обкладках конденсатора и расстоянием между обкладками L. Напряженность E может задаваться произвольно, а индукция D подстраивается под заданное значение E и связана с ней, таким образом, причинной связью. Поскольку L - макроскопическая величина, то волновой вектор $k \approx 2\pi/L$ весьма мал, и рассматриваемая ситуация относится к длинноволновому пределу $k \to 0$. Сильно уменьшить расстояние L нет возможности - это приведет к увеличению краевого эффекта, и функция отклика в этих условиях уже не будет характеризовать объемные свойства среды.

[01] Среды, в которых вектор гирации отличен от нуля, называются гиротропными. Распространение электромагнитных волн в гиротропных средах рассматривается в гл. 12.

Пренебрегая пространственной дисперсией ($k \to 0$), запишем интегральную связь между D и E в рассматриваемом случае в причинной форме

$$D(t) = E(t) + 4\pi \int_{-\infty}^{t} \alpha\,(t - t')\,E\,(t')\,dt' \tag{11.66}$$

где $\alpha\,(t - t')$ - функция отклика, характеризующая возникновение электрической поляризации P под действием поля E и обладающая свойством $\alpha\,(t - t') = 0$ при $t' > t$. Переходя к представлению Фурье, получаем из (11.66) $D(\omega) = \varepsilon(\omega)E(\omega)$, где

$$\varepsilon(\omega) = 1 + 4\pi \int_{0}^{\infty} \alpha(\tau)e^{i\omega\tau}d\tau \tag{11.67}$$

• комплексная диэлектрическая проницаемость в длинноволновом пределе.

Аналитические свойства функции отклика при комплексных частотах. Электрическая восприимчивость $\alpha(\tau)$ как функция времени поразному ведет себя в случае диэлектриков и проводников. Для диэлектриков при $\omega = 0$ имеем $\varepsilon(0) = \varepsilon_0 = 1+4\pi\alpha_0$, где $\alpha_0 = \int_0^\infty \alpha(\tau)d\tau$ - конечное статическое значение восприимчивости. Интеграл по времени быстро сходится, так как моменты t', далеко отстоящие от рассматриваемого момента t, дают малый вклад в поляризацию. Добавление множителя $e^{i\omega\tau}$ только ускоряет сходимость интеграла.

У проводников, согласно (11.65), диэлектрическая проницаемость как функция частоты имеет особенность вида $4\pi\kappa/\omega$ при $\omega \to 0$, где κ - статическая электропроводность. Следовательно, интеграл $\int_0^\infty \alpha(\tau)d\tau$ расходится. Но любое конечное действительное значение частоты ω делает интеграл сходящимся:

$$\int_{0}^{\infty} \alpha(\tau)e^{i\omega\tau}d\tau = i\frac{\kappa}{\omega}$$

Рассмотренные свойства сходимости интеграла (11.67) позволяют вывести важное свойство ε как функции комплексной частоты $\omega = \omega' + i\omega''$: диэлектрическая проницаемость не имеет особенностей в верхней полуплоскости комплексной переменной ω, т. е. при $\omega'' > 0$. Это объясняется тем, что в (11.67) под интегралом появляется множитель $e^{-\omega''\tau}, \tau \geqslant 0$, который обеспечивает сходимость интеграла. Наоборот, в нижней полуплоскости, т. е. при $\omega'' < 0$, экспонента неограниченно нарастает при $\tau \to \infty$, что приводит к появлению особенностей (см. диэлектрические проницаемости, вычисленные в задачах $11.13^\circ, 11.15^\star$).

В верхней полуплоскости интеграл в (11.67) обращается в нуль при стремлении $\omega \to \infty$ по любому пути из-за осцилляций множителя $e^{i\omega'\tau}$ и обращения в нуль множителя $e^{-\omega''\tau}$ (при $\omega'' = 0$ это свойство следует из решения задачи $11.7^{\star\bullet}$, из которого находим $\varepsilon(\omega)|_{\omega\to\infty} \to 1$). Таким
образом, в верхней полуплоскости комплексного ω диэлектрическая проницаемость $\varepsilon(\omega)$ представляет собой аналитическую функцию комплексной частоты.

Вывод дисперсионных соотношений. Из аналитичности $\varepsilon(\omega)$ вытекает ряд соотношений между ее действительной $\varepsilon'(\omega)$ и мнимой $\varepsilon''(\omega)$ частями. Так, эти функции связаны дифференциальными соотношениями Коши-Римана (см. раздел 8.2, формулы (8.31)). Но более удобными являются интегральные соотношения, в которых производятся интегрирования по действительным значениям частоты. Для получения требуемых соотношений используем интегральную формулу Коши

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{f(z)dz}{z-\omega} = \begin{cases} f(\omega), & \text{если } \omega \text{ внутри контура,} \\ 0, & \text{если } \omega \text{ вне контура,} \end{cases}$$

где Γ - замкнутый контур, $f(z)$ - любая функция, аналитическая внутри контура и на самом контуре.

Рассмотрим аналитическую в верхней полуплоскости функцию $f(z) = \varepsilon(z) - 1$ и замкнутый контур Γ, изображенный на рис. 11.1. Повсюду на контуре и внутри него $f(z)$ аналитична, поэтому интеграл Коши равен нулю:

$$\oint_\Gamma \frac{[\varepsilon(z)-1]dz}{z-\omega} = 0 \tag{11.69}$$

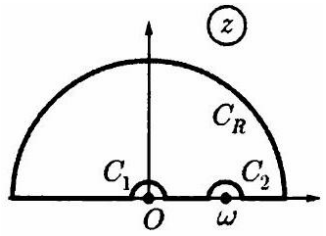


Рис. 11.1

При интегрировании по действительной оси делается обход двух особых точек по дугам малого радиуса $\rho \to 0$. На внешней дуге бесконечного ($R \to \infty$) радиуса подынтегральное выражение убывает быстрее, чем $1/z$, ввиду того, что $\varepsilon(z) - 1 \to 0$ при $z \to \infty$, и этот участок контура, таким образом, дает нулевой вклад. Обходы по дугам малого радиуса дают соответственно

$$-i\pi\left(i\frac{4\pi\kappa}{\omega}\right) \quad \text{и} \quad -i\pi[\varepsilon(\omega)-1]$$

(см. раздел 1.3 о свойствах дельта-функции). Поэтому (11.69) принимает вид

$$\mathscr{P}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varepsilon(z)-1}{z-\omega}dz - i\pi[\varepsilon(\omega)-1] - \frac{4\pi^2\kappa}{\omega} = 0 \tag{11.70}$$

где символ $\mathscr{P}$ перед интегралом означает его вычисление в смысле главного значения. Разделяя действительную и мнимую части в каждом слагаемом, находим

$$\varepsilon'(\omega) = 1 + \frac{1}{\pi}\mathscr{P}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varepsilon''(z)}{z-\omega}dz \tag{11.71}$$

$$\varepsilon''(\omega) = \frac{4\pi\kappa}{\omega} - \frac{1}{\pi}\mathscr{P}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varepsilon'(z)-1}{z-\omega}dz \tag{11.72}$$

- дисперсионные соотношения, или соотношения Крамерса-Кронига. Эти соотношения позволяют, например, находить действительную часть $\varepsilon'(\omega)$ по измеренной в экспериментах мнимой части $\varepsilon''(\omega)$. Для этой цели удобно записать (11.71), (11.72) через интегралы только по положительным частотам, воспользовавшись свойствами симметрии (11.39) диэлектрической проницаемости:

$$\varepsilon'(\omega) = 1 + \frac{2}{\pi}\mathscr{P}\int\limits_0^\infty \frac{z\varepsilon''(z)}{z^2-\omega^2}dz \tag{11.73}$$

$$\varepsilon''(\omega) = \frac{4\pi\kappa}{\omega} + \frac{2\omega}{\pi}\mathscr{P}\int\limits_0^\infty \frac{\varepsilon'(z)-1}{z^2-\omega^2}dz \tag{11.74}$$

Если на обкладках конденсатора контролируются и могут задаваться произвольным образом заряды, то тем самым задается внутри конденсатора электрическая индукция D, связанная с поверхностной плотностью зарядов σ_{ext} соотношением $D = 4\pi\sigma_{\text{ext}}$ независимо от вещества, заполняющего конденсатор. Индукция выступает в роли причины, а следствием является напряженность электрического поля:

$$E(\omega) = \frac{1}{\varepsilon(\omega)}D(\omega) \tag{11.75}$$

При этом электромагнитный отклик осуществляет величина $\varepsilon^{-1}(\omega)$, она аналитична в верхней полуплоскости комплексной частоты и именно она удовлетворяет дисперсионным соотношениям. Величины $\operatorname{Re}\varepsilon^{-1}(\omega)$ и $\operatorname{Im}\varepsilon^{-1}(\omega)$ связаны теми же соотношениями (11.71), (11.72), что и величины $\varepsilon'(\omega) = \operatorname{Re}\varepsilon(\omega), \varepsilon''(\omega) = \operatorname{Im}\varepsilon(\omega)$.

Перейдем теперь к рассмотрению принципа причинности при наличии пространственной дисперсии. Мы будем считать, что независимо от состояния среды могут задаваться и контролироваться внешние по отношению к среде заряды и токи $\rho_{ext}(\boldsymbol{k},\omega), \boldsymbol{j}^{\perp}_{\text{ext}}(\boldsymbol{k},\omega)$. Для того, чтобы создать гармоники с достаточно малыми длинами волн, внутрь среды нужно поместить малые заряженные зонды либо малые контура с током, которые управляются внешними устройствами. Через эти заряды и токи выражаются многие электромагнитные величины (см. формулы (11.45)-(11.47), задачу 11.3):

$$E^{\parallel}(\boldsymbol{k},\omega) = -i\frac{4\pi}{k\varepsilon_l(k,\omega)}\rho_{\text{ext}}(\boldsymbol{k},\omega) \tag{11.76}$$

$$E^{\perp}(\boldsymbol{k},\omega) = -i\frac{4\pi\omega}{\omega^2\varepsilon_t(k,\omega)-c^2k^2}\boldsymbol{j}^{\perp}_{\text{ext}}(\boldsymbol{k},\omega) \tag{11.77}$$

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{k},\omega) = -i\frac{4\pi c}{\omega^2\varepsilon_t(k,\omega)-c^2k^2}\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}^{\perp}_{\text{ext}}(\boldsymbol{k},\omega) \tag{11.78}$$

$$\rho_{tot}(\boldsymbol{k},\omega) = \frac{1}{\varepsilon_l(k,\omega)}\rho_{\text{ext}}(\boldsymbol{k},\omega) \tag{11.79}$$

$$\boldsymbol{j}^{\perp}_{\text{tot}}(\boldsymbol{k},\omega) = \frac{1}{\eta(k,\omega)}\boldsymbol{j}^{\perp}_{\text{ext}}(\boldsymbol{k},\omega) \tag{11.80}$$

Соответственно, коэффициенты, стоящие при $\rho_{\text{ext}}, j^{\perp}_{\text{ext}}$ в правых частях этих равенств, представляют собой причинные функции отклика, аналитические в верхней полуплоскости комплексной частоты. В частности, при $k \neq 0$ дисперсионным соотношениям будет удовлетворять не сама диэлектрическая проницаемость $\varepsilon_l(k,\omega)$, но обратная ей величина $\varepsilon_l^{-1}(k,\omega)$:

$$\mathrm{Re}\,\varepsilon_l^{-1}(k,\omega) = 1 + \frac{1}{\pi}\mathscr{P}\int\limits_0^\infty \frac{\mathrm{Im}\,\varepsilon_l^{-1}(k,z)}{z^2-\omega^2}dz^2 \tag{11.81}$$

$$\mathrm{Im}\,\varepsilon_l^{-1}(k,\omega) = \frac{2\omega}{\pi}\mathscr{P}\int\limits_0^\infty \frac{\mathrm{Re}\,\varepsilon_l^{-1}(k,z)-1}{\omega^2-z^2}dz \tag{11.82}$$

(здесь статическая электропроводность положена равной нулю).

К поперечному полю относятся уравнения (11.77),(11.78),(11.80). Наиболее простой вид имеет отклик в уравнении (11.78), который удовлетворяет дисперсионным соотношениям

$$\mathrm{Re}\left[\omega^2\varepsilon_t(k,\omega)-c^2k^2\right]^{-1} = \frac{1}{\pi}\mathscr{P}\int\limits_0^\infty \frac{dz^2}{z^2-\omega^2}\,\mathrm{Im}\left[z^2\varepsilon_t(k,z)-c^2k^2\right]^{-1} \tag{11.83}$$

$$\mathrm{Im}\left[\omega^2\varepsilon_t(k,\omega)-c^2k^2\right]^{-1} = \frac{2\omega}{\pi}\mathscr{P}\int\limits_0^\infty \frac{dz}{\omega^2-z^2}\,\mathrm{Re}\left[z^2\varepsilon_t(k,z)-c^2k^2\right]^{-1} \tag{11.84}$$

В (11.83), в отличие от (11.81), отсутствует в правой части равенства слагаемое единица, так как $[\omega^2\varepsilon_t(k,\omega)-c^2k^2]^{-1}\to 0$ при $\omega\to\infty$.

Помимо приведенных выше, дисперсионным соотношениям удовлетворяют еще многие электродинамические величины. Их можно найти в цитированных статьях Киржница (1976, 1987).

Рекомендуемая литература: [Ландау и Лифшиц, Электродинамика сплошных сред; Ландау и Лифшиц, Статистическая физика; Нуссенцвейг (1976); Леонтович (1961); Батыгин и Топтыгин, Современная электродинамика, ч. 1; Силин и Рухадзе (1961); Бредов и др., Классическая электродинамика; Киржниц (1976); Киржниц (1987); Долгов и др. (1982); Долгов и Максимов (1981)].

Задачи

11.27. Показать, что функция $\varepsilon(k,\omega)=\varepsilon_l(k,\omega)$ не имеет нулей в верхней полуплоскости комплексной частоты.

11.28. Показать, что при чисто мнимых значениях частоты $\omega = i\omega''$ диэлектрическая проницаемость вещественна: $\varepsilon\left(i\omega''\right)=\varepsilon^*\left(i\omega''\right)$.

11.29. Показать, что при действительных частотах ω имеет место формула

$$\varepsilon(i\omega) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{z\varepsilon''(z)}{z^2+\omega^2}dz$$

11.30. В некоторых случаях функцию $\varepsilon\left(t-t'\right)$, определяющую интегральную связь между векторами D и $\boldsymbol{E}$, можно представить в виде [2]

$\varepsilon\left(t-t'\right) = f_0\Theta\left(t-t'\right)\exp\left[-\left(t-t'\right)/\tau\right]$, где f_0 и τ - постоянные, Θ - ступенчатая функция, нелокальность (пространственная дисперсия) отсутствует. Вычислить $\varepsilon(\omega)$.

11.31. С помощью дисперсионных соотношений Крамерса-Кронига определить

[02] Такая форма соответствует, например, модели вещества, состоящего из твердых диполей. Она не учитывает поляризуемости электронных оболочек.

вещественную часть диэлектрической проницаемости $\varepsilon'(\omega)$, по известной мнимой части $\varepsilon''(\omega)$:

$$\varepsilon''(\omega) = \frac{(\varepsilon_0 - 1)\,\omega\tau}{1 + \omega^2\tau^2}$$

где ε_0 и τ - постоянные.

11.32. Доказать следующие правила сумм для мнимых частей диэлектрической проницаемости:

$$\int_0^\infty \left[\operatorname{Im}\frac{1}{\varepsilon(\omega)}\right]\omega d\omega = -\frac{\pi}{2}\omega_{0e}^2, \quad \int_0^\infty [\operatorname{Im}\varepsilon(\omega)]\omega d\omega = \frac{\pi}{2}\omega_{0e}^2$$

где $\omega_{0e} = (4\pi Ne^2/m)^{1/2}$ - плазменная частота.

Указание. Обратить внимание на то, что $\varepsilon(\omega)$ и $1/\varepsilon(\omega)$ - аналитические функции от $\omega, \operatorname{Re}\varepsilon(\omega)$ является четной, а $\operatorname{Im}\epsilon(\omega)$ - нечетной функциями от ω на вещественной оси, и воспользоваться асимптотическим выражением $\varepsilon(\omega) = 1 - \omega_{0e}^2/\omega^2$, справедливым при $|\omega| \to \infty$ всюду в верхней полуплоскости ω.

11.33. Записать дисперсионные соотношения (11.71)-(11.72) в виде одного интегрального уравнения для комплексной диэлектрической проницаемости $\varepsilon(\omega)$.

11.34. Записать дисперсионные соотношения (11.71)-(11.72) в виде одного интегрального уравнения для комплексной электропроводности $\kappa(\omega) = -(i\omega/4\pi)(\varepsilon(\omega) - 1)$.

Указание. Учесть свойства симметрии функции $\kappa(\omega) = \kappa'(\omega) - i\kappa''(\omega)$: $\kappa'(\omega) = \kappa'(-\omega), \kappa''(\omega) = -\kappa''(-\omega)$.

11.35^. Дисперсионные соотношения М. А. Леонтовича (1961). Пусть $R(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}', t - t')$ - причинный отклик на электромагнитный сигнал в изотропной среде. Обобщить принцип причинности и вытекающие из него дисперсионные соотношения, полученные выше в настоящем разделе, с учетом требований специальной теории относительности (см. главы 3,4). Сигнал .в

точку $\boldsymbol{r}$ в момент t может придти только из точек $(\boldsymbol{r}', t')$, находящихся внутри и на поверхности светового конуса, обращенного в прошлое, т. е. удовлетворяющих условию релятивистской причинности $c\,|t - t'| \geqslant |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'| \geqslant 0$.

11.5.3 11.3. Energy Relations for Alternating Electromagnetic Fields in Media. Longitudinal Electrical Oscillations

Диссипация электромагнитной энергии. Действие переменного поля на вещество нарушает его термодинамическое равновесие и приводит к процессам релаксации, которые сопровождаются ростом энтропии и диссипацией энергии электромагнитного поля. Механизмом такой диссипации могут служить столкновения между частицами, приводящие к потере направленной скорости и переходу энергии в неупорядоченную форму, а также ее передача таким возбуждениям среды, которые слабо взаимодействуют с электромагнитным полем.

Вычислим плотность мощности Q диссипируемой в среде энергии монохроматического электромагнитного поля. Используем исходное выражение

$$Q = \overline{\boldsymbol{j}_{\text{int}} \cdot \boldsymbol{E}} = \frac{1}{4}\left(\boldsymbol{j}_{\text{int}} \cdot \boldsymbol{E}^* + \boldsymbol{j}_{\text{int}}^* \cdot \boldsymbol{E}\right) \tag{11.85}$$

где $\boldsymbol{j}_{\text{int}}$ - ток в среде, чертой обозначено усреднение по периоду поля. Усреднение необходимо для исключения той части мощности, которая попеременно переходит от поля к частицам и обратно. Представим индуцированный в среде ток с помощью формулы (11.36). Из (11.85) получим компактное выражение

$$Q = -\frac{i\omega}{8\pi}\epsilon^{ah}_{\alpha\beta}E^*_\alpha E_\beta = \frac{1}{2}\kappa^h_{\alpha\beta}E^*_\alpha E_\beta \tag{11.86}$$

где

$$\epsilon^{ah}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\epsilon_{\alpha\beta} - \epsilon^*_{\beta\alpha}\right) \tag{11.8}$$

- антиэрмитова часть комплексного тензора диэлектрической проницаемости. Эта величина обладает свойством

$$\epsilon^{ah*}_{\alpha\beta} = -\epsilon^{ah}_{\beta\alpha} \tag{11.88}$$

в отличие от эрмитовой части

$$\epsilon^{h}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\left(\epsilon_{\alpha\beta} + \epsilon^*_{\beta\alpha}\right) = \epsilon^{h*}_{\beta\alpha} \tag{11.89}$$

Свертка антиэрмитова тензора $\epsilon^{ah}_{\alpha\beta}$ с эрмитовым тензором $E^*_\alpha E_\beta$ является чисто мнимой величиной:

$$\epsilon^{ah}_{\alpha\beta}E^*_\alpha E_\beta = -\epsilon^{ah*}_{\beta\alpha}E^*_\alpha E_\beta = -\left(\epsilon^{ah}_{\alpha\beta}E^*_\alpha E_\beta\right)^*$$

поэтому плотность мощности диссипации (11.86) - величина действительная. Если в отсутствие поля среда находится в равновесном состоянии, то энергия поля расходуется на нагрев среды и в силу второго закона термодинамики величина Q положительна. Но неравновесная среда может передать часть своей энергии полю и привести к изменению знака Q.

В случае изотропной среды можно воспользоваться выражением (11.61) для тензора диэлектрической проницаемости. При этом имеем

$$\epsilon^{ah}_{\alpha\beta} = i\varepsilon''(k,\omega)\delta_{\alpha\beta} + \frac{i\mu''(k,\omega)}{|\mu|^2}\left(\frac{ck}{\omega}\right)^2\left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2}\right) \tag{11.90}$$

Далее с помощью уравнения (11.47) находим

$$\left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2}\right)E^*_\alpha E_\beta = \boldsymbol{E}^*_\perp \cdot \boldsymbol{E}_\perp = \left(\frac{ck}{\omega}\right)^2 |\mu|^2 \boldsymbol{H}^* \cdot \boldsymbol{H} \tag{11.91}$$

и получаем из (11.86), (11.90) и (11.91)

$$Q = \frac{\omega}{8\pi}\left\{\varepsilon''|\boldsymbol{E}|^2 + \mu''|\boldsymbol{H}|^2\right\} = \frac{\omega}{4\pi}\left\{\varepsilon''\overline{E^2} + \mu''\overline{H^2}\right\} \tag{11.92}$$

Последнее выражение относится к случаю действительных мнохроматических векторов $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}$, черта обозначает усреднение по периоду.

В равновесной среде $Q \geqslant 0$ и должны выполняться неравенства

$$\omega\varepsilon''(k,\omega) \geqslant 0, \quad \omega\mu''(k,\omega) \geqslant 0 \tag{11.93}$$

При $\omega \to 0$ для диэлектриков неравенства превращаются в равенства, для проводников первое неравенство принимает вид $\kappa > 0$. При всех $\omega > 0$ мнимые части $\varepsilon'' > 0, \mu'' > 0$, хотя в определенных областях частот они могут быть весьма малыми. Если

$$\varepsilon'' \ll |\varepsilon'|, \quad \mu'' \ll |\mu'| \tag{11.94}$$

то диссипация энергии за период изменения поля мала (по сравнению с запасенной в веществе электромагнитной энергией). Области частот, в которых выполняются последние неравенства, называются областями прозрачности вещества.

Пример 11.7. Электромагнитное поле $\boldsymbol{E}(t), \boldsymbol{H}(t)$ действует в среде в течение ограниченного времени, обращаясь в нуль при $t \to \pm\infty$. Вычислить плотность диссипации электромагнитной энергии $\mathcal{Q}$ за все время действия поля. Пространственную дисперсию не учитывать.

Решение. Исходим из выражения

$$\mathcal{Q} = \int \boldsymbol{j}_{\text{int}}\,(t) \cdot \boldsymbol{E}(t) dt \tag{1}$$

где $\boldsymbol{j}_{\text{int}}\,(t), \boldsymbol{E}(t)$ - действительные функции времени, и разлагаем их в интеграл Фурье

$$\boldsymbol{j}_{\text{int}}\,(t) = \int \boldsymbol{j}_{\text{int}}\,(\omega) e^{-i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi}, \quad \boldsymbol{E}(t) = \int \boldsymbol{E}(\omega) e^{-i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} \tag{2}$$

причем

$$\boldsymbol{j}_{\text{int}}\,(\omega) = \boldsymbol{j}^*_{int}(-\omega), \quad \boldsymbol{E}(\omega) = \boldsymbol{E}^*(-\omega) \tag{3}$$

Подставив (2) в (1) и использовав (3), приводим (1) к виду

$$\mathcal{Q} = \int \left(\boldsymbol{j}_{int}(\omega) \cdot \boldsymbol{E}^*(\omega) + \boldsymbol{j}^*_{int}(\omega) \cdot \boldsymbol{E}(\omega)\right) \frac{d\omega}{2\pi} \tag{4}$$

Здесь подынтегральное выражение совпадает по форме с (11.85) и может быть преобразовано аналогичным образом. В результате, пользуясь (11.92), получим

$$\mathcal{Q} = \int_0^\infty \left\{\varepsilon''(\omega)|\boldsymbol{E}(\omega)|^2 + \mu''(\omega)|\boldsymbol{H}(\omega)|^2\right\} \frac{d\omega}{2\pi} \tag{11.95}$$

Энергия поля в прозрачной диспергирующей среде. Преобразуем систему уравнений (11.1)-(11.4) подобно тому, как были преобразованы уравнения Максвелла при выводе баланса энергии в разделе 2.3 (см. формулы (2.97), (2.98)). Вместо (2.97) получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{E^2 + B^2}{8\pi}\right) + \frac{c}{4\pi}\,\mathrm{div}(\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}) + \boldsymbol{j}_{int} \cdot \boldsymbol{E} = -\boldsymbol{j}_{ext} \cdot \boldsymbol{E} \tag{11.96}$$

Рассмотрим сначала случай медленно меняющихся во времени и в пространстве полей, когда дисперсия не сказывается, проницаемости ε, μ
не зависят от частоты и уравнения связи в изотропной среде (7.24) сводятся к пропорциональной зависимости

$$\boldsymbol{P} = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi}\boldsymbol{E}, \quad \boldsymbol{M} = \frac{\mu - 1}{4\pi}\boldsymbol{H}. \tag{11.97}$$

Пользуясь представлением (11.8) для тока в среде и уравнением (11.1), находим

$$\begin{aligned}\boldsymbol{j}_{int} \cdot \boldsymbol{E} =& \frac{\varepsilon - 1}{4\pi}\boldsymbol{E} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \frac{c(\mu - 1)}{4\pi}\boldsymbol{E} \cdot \mathrm{rot}\,\boldsymbol{H} = \\ &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{(\varepsilon - 1)E^2}{8\pi} - \frac{\mu(\mu - 1)H^2}{8\pi}\right) - \frac{c(\mu - 1)}{4\pi}\,\mathrm{div}(\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H})\end{aligned}$$

После подстановки этого выражения в (11.96) получаем

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon E^2}{8\pi}+\frac{\mu H^2}{8\pi}\right)+\frac{c}{4\pi}\operatorname{div}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})=-\boldsymbol{j}_{ext}\cdot\boldsymbol{E} \tag{11.98}$$

Это равенство можно истолковать точно так же, как уравнение баланса энергии (2.97): работа $-\boldsymbol{j}_{ext}\cdot\boldsymbol{E}$ внешних источников над полем расходуется на увеличение плотности w электромагнитной энергии в среде

$$w=\frac{1}{8\pi}\left(\varepsilon E^2+\mu H^2\right) \tag{11.99}$$

и на создание потока энергии, плотность которого дается вектором Пойнтинга

$$\gamma=\frac{c}{4\pi}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H} \tag{11.100}$$

Последний имеет в случае недиспергирующей среды такой же вид, как и в вакууме. Плотность энергии (11.99), включая и ее термодинамический смысл, уже обсуждалась (по отдельности для электрического и магнитного полей) в главах $8, 9, 10$.

Если среда имеет электропроводность κ, то приведенный вывод нужно дополнить, добавив к току $\boldsymbol{j}_{int}$ ток проводимости $\kappa\boldsymbol{E}$. В результате в левую часть (11.92) добавится слагаемое κE^2, которое будет описывать джоулеву диссипацию поля в среде (см. формулу (9.20) из раздела 9.1, в которой следует положить $\boldsymbol{E}_{ext}=0$). Энергия внешнего источника, таким образом, будет распределена по трем каналам.

В общем случае произвольной диспергирующей среды не удается однозначным образом определить величины, которые можно было бы интерпретировать как изменение плотности электромагнитной энергии в среде и плотность потока энергии [3]. Это оказывается возможным сделать только в областях прозрачности среды, в которых выполняются условия (11.94) ($\varepsilon''\ll\varepsilon', \mu''\ll\mu'$) или, в более общей записи,

$$\epsilon^{ah}_{\alpha\beta}\ll\epsilon^{h}_{\alpha\beta} \tag{11.101}$$

т. е. диссипация электромагнитной энергии мала.

Рассмотрим в такой среде волновой пакет с несущими величинами $\boldsymbol{k}, \omega$ и их разбросом $\Delta\omega\ll\omega, |\Delta\boldsymbol{k}|\ll k$. Его можно считать плоской монохроматической волной с медленно меняющейся амплитудой

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)} \tag{11.102}$$

Переменная амплитуда $\mathscr{E}(\boldsymbol{r},t)$ слабо изменяется на расстояниях $\lambda=2\pi/k$ и временах $T=2\pi/\omega$, т. е. удовлетворяет условиям

$$\left|\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial t}\right|\ll\omega\mathscr{E},\quad \left|\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial x_\alpha}\right|\ll k\mathscr{E}. \tag{11.103}$$

Вычислим плотность тока, индуцированного волновым пакетом в однородной среде:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{j}^{int}_{\alpha}(\boldsymbol{r},t)&=\int\kappa_{\alpha\beta}\left(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}',t-t'\right)E_\beta\left(\boldsymbol{r}',t'\right)d^3r'dt'=\\&=e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}\int\kappa_{\alpha\beta}\left(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}',t-t'\right)e^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')-i\omega(t-t')}\mathscr{E}_\beta\left(\boldsymbol{r}',t'\right)d^3r'dt'\end{aligned} \tag{11.104}$$

Медленно меняющуюся амплитуду можно разложить в степенной ряд в окрестности точки $(\boldsymbol{r},t)$:

$$\boldsymbol{E}\left(\boldsymbol{r}',t'\right)=\mathscr{E}(\boldsymbol{r},t)+\left((\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\cdot\nabla\right)\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)+(t'-t)\frac{\partial\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}+\ldots$$

После подстановки этого разложения в (11.104) вычисляем интегралы:

$$\int \kappa_{\alpha\beta}\left(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}',t-t'\right)e^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r})-i\omega(t'-t)}d^3r'dt'=\kappa_{\alpha\beta}(\boldsymbol{k},\omega)$$

$$

$$\int \kappa_{\alpha\beta}\left(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}',t-t'\right)\left(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}\right)e^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r})-i\omega(t'-t)}d^3r'dt'=-i\frac{\partial}{\partial k}\kappa_{\alpha\beta}(\boldsymbol{k},\omega)$$
$$\int \kappa_{\alpha\beta}\left(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}',t-t'\right)\left(t'-t\right)e^{i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r})-i\omega(t'-t)}d^3r'dt'=i\frac{\partial}{\partial \omega}\kappa_{\alpha\beta}(\boldsymbol{k},\omega)$$

$$

Здесь электропроводность $\kappa_{\alpha\beta}(\boldsymbol{k},\omega)$ связана с диэлектрической проницаемостью обычным соотношением (11.36). Пользуясь полученными соотношениями, записываем плотность тока (11.104):

$$\begin{aligned}\boldsymbol{j}_\alpha^{int}(\boldsymbol{r},t)&=\kappa_{\alpha\beta}(\boldsymbol{k},\omega)E_\beta(\boldsymbol{r},t)+e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}\times\\&\times\left\{\frac{\partial}{\partial\omega}\frac{\omega\left(\epsilon_{\alpha\beta}-\delta_{\alpha\beta}\right)}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\omega}{4\pi}\frac{\partial\epsilon_{\alpha\beta}}{\partial k_\gamma}\nabla_\gamma\right\}\mathscr{E}_\beta(\boldsymbol{r},t)\end{aligned}\tag{11.105}$$

Теперь усредним произведение $\boldsymbol{j}_{\text{int}}\cdot\boldsymbol{E}$ по периоду $T=2\pi/\omega$ с помощью формулы (11.85). При этом примем следующие приближения:
а) будем считать амплитуду $\mathscr{E}$ постоянной ввиду ее малого изменения за период T (условие (11.103));
б) пренебрежем антиэрмитовой частью тензора $\epsilon_{\alpha\beta}$ (условие (11.101)) и положим $\epsilon_{\alpha\beta}\approx\epsilon^h_{\alpha\beta}$. Находим

$$\begin{aligned}\overline{\boldsymbol{j}_{\text{int}}\cdot\boldsymbol{E}}&=\frac{1}{2}\kappa^h_{\alpha\beta}E^*_\alpha E_\beta+\\&+\frac{1}{16\pi}\left(\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\omega\epsilon^h_{\alpha\beta}\right)-\delta_{\alpha\beta}\right)\frac{\partial}{\partial t}E^*_\alpha E_\beta-\frac{\omega}{16\pi}\nabla\cdot\left(\frac{\partial\epsilon^h_{\alpha\beta}}{\partial k}E^*_\alpha E_\beta\right)\end{aligned}\tag{11.106}$$

Последний этап расчета - усреднение по времени уравнения (11.96) и подстановка в него результата (11.106). Это приводит к уравнению баланса энергии (ср. с (2.97))

$$\begin{aligned}-\overline{\boldsymbol{j}_{\text{ext}}\cdot\boldsymbol{E}}=\tfrac{1}{2}\kappa^h_{\alpha\beta}E^*_\alpha E_\beta+\tfrac{\partial}{\partial t}\left\{\tfrac{1}{16\pi}\left(\tfrac{\partial}{\partial\omega}\left(\omega\epsilon^h_{\alpha\beta}\right)E^*_\alpha E_\beta+\boldsymbol{B}^*\cdot\boldsymbol{B}\right)\right\}+\\+\operatorname{div}\left\{\tfrac{c}{16\pi}\left(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}^*+\boldsymbol{E}^*\times\boldsymbol{B}-\tfrac{\omega}{c}\tfrac{\partial\epsilon^h_{\alpha\beta}}{\partial\boldsymbol{k}}E^*_\alpha E_\beta\right)\right\}.\end{aligned}\tag{11.107}$$

В левую часть вынесена плотность мощности внешнего источника энергии. Первое слагаемое в правой части представляет собой плотность диссипируемой электромагнитной энергии (11.86). Под знаком производной
по времени входит плотность w электромагнитной энергии квазимонохроматического поля:

$$w=\frac{1}{16\pi}\left(\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\omega\epsilon^h_{\alpha\beta}\right)E^*_\alpha E_\beta+\boldsymbol{B}^*\cdot\boldsymbol{B}\right)\tag{11.108}$$

Наконец, под знаком дивергенции входит плотность γ потока электромагнитной энергии в среде (обобщение вектора Пойнтинга)

[03] Подробное обсуждение этого вопроса проведено в статье [Бараш и Гинзбург (1976)].

$$\gamma = \frac{c}{16\pi}\left(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}^* + \boldsymbol{E}^*\times\boldsymbol{B} - \frac{\omega}{c}\frac{\partial\epsilon^h_{\alpha\beta}}{\partial\boldsymbol{k}}E^*_\alpha E_\beta\right) \tag{11.109}$$

Все перечисленные величины усреднены по периоду.
Рекомендуемая литература: [Ландау и Лифшиц, Электродинамика сплошных сред; Батыгин и Топтыгин, Современная электродинамика, ч. 1; Памятных и Туров (2000); Бредов и др., Классическая электродинамика; Александров и др. (1978)].

Задачи

11.36. Показать, что в случае изотропной среды без пространственной дисперсии выражения (11.108); (11.109) приобретают вид

$$w = \frac{1}{16\pi}\left[\frac{\partial}{\partial\omega}(\omega\varepsilon(\omega))\boldsymbol{E}^*\cdot\boldsymbol{E} + \frac{\partial}{\partial\omega}(\omega\mu(\omega))\boldsymbol{H}^*\cdot\boldsymbol{H}\Big)\right] \tag{11.110}$$
$$\gamma = \frac{c}{16\pi}\left(\boldsymbol{E}^*\times\boldsymbol{H} + \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*\right)$$

где $\varepsilon = \varepsilon', \mu = \mu'$ - действительные части электрической и магнитной проницаемостей. Для недиспергирующей среды эти формулы переходят в (11.99), (11.100), если последние применить к квазимонохроматическому полю и усреднить по периоду.

Указание. Использовать формулу (11.62).

11.37. Вычислить плотность мощности Q диссипируемой энергии электромагнитного поля для случая, когда уравнения связи имеют вид (11.49). Использовать исходную формулу $\mathcal{Q} = -\oint\bar{\gamma}\cdot d\boldsymbol{S}$ для энергии, втекающей из вакуума внутрь тела через его поверхность в единицу времени.

Вектор Пойнтинга γ усреднен по периоду поля. Показать, что искомое выражение можно записать в виде

$$Q = -\frac{i\omega}{8\pi}\left(\varepsilon^{ah}_{\alpha\beta}E^*_\alpha E_\beta + \mu^{ah}_{\alpha\beta}H^*_\alpha H_\beta\right) \tag{11.111}$$

где индексами ah обозначены антиэрмитовы части тензоров (ср. с формулой (11.86)).

11.38 Получить аналог уравнения (11.98) и формул (11.99), (11.100) для медленно изменяющихся полей в анизотропной недиспергирующей среде с тензорными проницаемостями $\varepsilon_{\alpha\beta}, \mu_{\alpha\beta}$. Іоказать, что из требования закона сохранения энергии следует симметрия тензоров: $\varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\beta\alpha}$, $\mu_{\alpha\beta} = \mu_{\beta\alpha}$.

11.39*·. Получить аналог формул (11.110) для плотности и потока энергии в анизотропной прозрачной среде без пространственной дисперсии. Показать, что искомые величины выражаются в виде

$$w = \frac{1}{16\pi}\left[\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\omega\varepsilon_{\alpha\beta}(\omega)\right)E^*_\alpha E_\beta + \frac{\partial}{\partial\omega}\left(\omega\mu_{\alpha\beta}(\omega)\right)H^*_\alpha H_\beta\right] \tag{11.112}$$
$$\gamma = \frac{c}{16\pi}\left(\boldsymbol{E}^*\times\boldsymbol{H} + \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*\right)$$

где тензоры $\varepsilon_{\alpha\beta}, \mu_{\alpha\beta}$ должны быть эрмитовыми, $\varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon^*_{\beta\alpha}, \mu_{\alpha\beta} = \mu^*_{\beta\alpha}$, чтобы можно было ввести плотность w электромагнитной энергии.

11.40 Показать, что статическая проницаемость диэлектрика в длинноволновом пределе удовлетворяет неравенству $\varepsilon(0,\omega)\big|_{\omega\to 0} > 1$.

11.41*. Найти область допустимых значений величины $\varepsilon_l(k,0)$ - продольной

диэлектрической проницаемости в статическом пределе $\omega = 0$.

11.42. Найти ограничение на значение мнимой части $\varepsilon_t''(k, \omega)$ при произвольных k, ω.

11.43. Выразить величину $\mu(k, 0)$ через интеграл по всем частотам от величины $\eta(k, \omega)$, которая определена равенством (11.63).

11.44*. Колебательный контур состоит из конденсатора, заполненного диспергирующей средой с проницаемостью $\varepsilon(\omega)$, так что его емкость зависит от частоты, и катушки с индуктивностью L. Длина волны колебаний велика по сравнению с размерами контура. Вычислить среднюю по времени электромагнитную часть U внутренней энергии контура, выразив ее через среднее по времени значение заряда $q(t)$ на обкладках конденсатора.

11.45. В задачах $11.14^\star, 11.15^\star$ была вычислена квантовомеханическим методом поляризуемость отдельного атома в поле плоской монохроматической волны. На основе этих результатов найти в модели ЛоренцЛоренца (см. пример 7.4) диэлектрическую проницаемость среды с учетом отличия локального поля, действующего на атом, от среднего поля. Рассмотреть частоты вдали от резонансов и случай, когда частота внешнего поля близка к одной из частот перехода в атоме. Каковы пределы применимости модели для переменного поля?

11.46. Найти частоту ω_l продольных колебаний вблизи одной из резонансных частот в среде с диэлектрической проницаемостью, рассмотренной в предыдущей задаче. Вычислить плотность w электромагнитной энергии и плотность потока энергии колебаний.

11.47*. Найти частоту ω_l продольных колебаний бесстолкновительной плазмы, использовав диэлектрическую проницаемость, найденную в задаче 11.9 в приближении $kv_{Te} \ll \omega$, с учетом ее мнимой части. Вычислить плотность w электромагнитной энергии, скорость Q ее диссипации и плотность γ потока энергии колебаний.

11.48. Обмен энергией между электронами и ионами в газовой плазме происходит медленно ввиду резкого различия их масс, поэтому электронная и ионная подсистемы могут длительное время сосуществовать при разных температурах $T_i \neq T_e$: При этом каждая из подсистем описывается распределением Максвелла с соответствующей температурой. Используя результат примера 11.6, найти продольную диэлектрическую проницаемость для промежуточного случая, когда $s_i = \omega/kv_{Ti} \gg 1, s_e = \omega/kv_{Te} \ll 1$. Вычислить частоту продольных колебаний неизотермической плазмы и их затухание. Найти условия, при которых затухание рассматриваемых колебаний мало.

11.49. Исследовать спектры продольных колебаний бесстолкновительной вырожденной плазмы твердого тела. Вычислить частоту и декремент затухания колебаний. Оценить частоты электронных плазменных колебаний типичных металлов. Диэлектрическая проницаемость вырожденной плазмы вычислена в задаче 11.11.

11.50^*. Кристаллы с двумя ионами в элементарной ячейке (NaCl, LiF, KBr и др.) имеют кубическую симметрию, и их длинноволновые колебания ($ka \ll 1, a$ - постоянная решетки) изотропны. В таких кристаллах могут возбуждаться акустические и оптические колебания. В акустических колебаниях участвуют макроскопические элементы решетки как целое, т. е. положительные и отрицательные ионы колеблются совместно, в одной фазе. Оптическими называются колебания подрешетки отрицательных ионов
относительно подрешетки положительных ионов. Такие колебания сходны с плазменными колебаниями электронного газа относительно ионного фона, которые рассмотрены в задачах $11.47^\star, 11.49$. Но в ионных кристаллах главную роль играют упругие силы, удерживающие ионы вблизи узлов кристаллической решетки. Наряду с упругими силами может возникнуть макроскопическое электрическое поле $\boldsymbol{E}$ и макроскопическая поляризация $\boldsymbol{P}$, влияющие на оптические колебания.

Найти частоты продольных и поперечных оптических колебаний с учетом упругих и

электрических сил. Считать колебания квазистатическими, т. е. пренебречь запаздыванием электромагнитных возмущений и описывать их уравнениями электростатики. Искомые частоты выразить через заданную частоту ω_0 чисто упругих (без влияния электрических сил) колебаний, а также через две диэлектрические проницаемости: статическую ε_0 и ту, которая учитывает поляризуемость электронных оболочек ионов, но не учитывает взаимного смещения положительных и отрицательных ионов. Последнюю обозначают обычно через ε_∞ и измеряют на частотах, которые много больше частот колебаний ионов, но много меньше частот переходов в электронных оболочках ионов [Борн и Хуан Кунь (1958), Давыдов (1976)].

11.51. Вычислить в длинноволновом пределе диэлектрическую проницаемость $\varepsilon(\omega)$ ионного кристалла в области частот, соответствующей квазистатическим колебаниям ионов. Использовать результаты предыдущей задачи.

Landau-Inst-summer-2025.**5/8. Диссипация в металлическом шаре**

Металлический шар радиуса R с проводимостью σ помещен в однородное электрическое поле $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 e^{-i\omega t}$. Найти мощность диссипации энергии в пределе высоких частот, определяемом условием $\omega \gg c^2/(2\pi\sigma R^2)$, считая что при этом все еще выполнено условие квазистационарного приближения $R \ll c/\omega$.

Solution

(???)

11.5.4 11.4. Magnetic Vibrations and Magnetic Resonance

Парамагнетики. При наложении магнитного поля на парамагнетик магнитные моменты $\boldsymbol{m}$ отдельных частиц в пренебрежении их взаимодействием испытывают прецессию, которая описывается уравнением движения (см. формулы (4.77)-(4.80))

$$\frac{d\boldsymbol{m}}{dt} = -\eta \boldsymbol{m} \times \boldsymbol{B} \tag{11.113}$$

Здесь вместо $\boldsymbol{H}$ теперь пишем $\boldsymbol{B}$ - усредненное значение напряженности магнитного поля, η - среднее квантовомеханическое значение коэффициента пропорциональности между магнитным и механическим моментами частицы. Значения η для орбитального и спинового моментов отдельных частиц приведены в разделе 4.2, для атома - вычислены в задаче 7.17. Для электронов и электронных оболочек атомов имеем $\eta > 0$ после выделения
знака «минус» в правой части равенства (11.113). Суммируя по всем частицам в единице объема, перейдем к вектору намагниченности $\boldsymbol{M} = \sum \boldsymbol{m}$ и вместо $\boldsymbol{B}$ можем подставить в (11.113) сумму $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{H} + 4\pi\boldsymbol{M}$. В итоге получим уравнение движения для вектора намагниченности:

$$\frac{d\boldsymbol{M}}{dt} = -\eta \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{H} \tag{11.114}$$

В случае парамагнетиков отличие локального магнитного поля от среднего мало, и в последнем равенстве $\boldsymbol{H}$ - среднее (макроскопическое) магнитное поле.

Уравнение (11.114) описывает только вращение вектора намагниченности вокруг $\boldsymbol{H}(t)$, сохраняя неизменной его абсолютную величину: $M^2 = \text{const}$. Это связано с тем, что в уравнение не включены процессы взаимодействия (столкновений) частиц, приводящие к установлению равновесного состояния. Для того, чтобы отразить на

феноменологическом уровне процесс намагничения парамагнетика при включении постоянного магнитного поля $\boldsymbol{H}_0$, можно ввести в уравнение (11.114) релаксационное слагаемое вида $-\left(\boldsymbol{M}-\boldsymbol{M}_0\right)/\tau$ (ср. с (7.39)), где $\boldsymbol{M}_0$ - намагниченность в постоянном поле, τ - время релаксации, константа, определяемая из опыта. В слабых полях $\boldsymbol{M}_0=\chi_0\boldsymbol{H}_0$, статическая магнитная восприимчивость χ_0 была вычислена в задачах 7.16, 7.17. Если полное магнитное поле $\boldsymbol{H}(t)=\boldsymbol{H}_0+\boldsymbol{h}(t)$ не совпадает по направлению с $\boldsymbol{H}_0$, то намагниченность тоже будет иметь продольную и поперечную относительно $\boldsymbol{H}_0$ составляющие. Эти составляющие могут релаксировать с разными временами τ_1,τ_2. Уравнение (11.114) с учетом релаксации примет вид

$$\frac{d\boldsymbol{M}}{dt}=-\eta\boldsymbol{M}\times\boldsymbol{H}-\frac{1}{\tau_1}\left(\boldsymbol{M}_{\parallel}-\boldsymbol{M}_0\right)-\frac{1}{\tau_2}\boldsymbol{M}_{\perp} \tag{11.115}$$

(уравнение Блоха) [4].

При воздействии на парамагнетик переменного магнитного поля и совпадении частот внешнего поля и прецессии намагниченности имеет место явление магнитного резонанса - существенно возрастают вектор намагниченности и поглощаемая парамагнетиком энергия внешнего поля (см. задачу 11.52$^{\bullet}$).

Ферромагнетики. В отличие от парамагнетиков, в которых взаимодействие между магнитными моментами отдельных частиц невелико, в ферромагнетиках обменное взаимодействие между спинами приводит к появлению эффективного магнитного поля, величина которого много больше

среднего (макроскопического) поля (см. раздел 9.3). Благодаря этому уже относительно слабое внешнее поле намагничивает ферромагнетик до насыщения, что мы и будем в дальнейшем предполагать. Движение вектора намагниченности в пренебрежении диссипативными процессами описывается уравнением Ландау-Лифшица [Лифшиц и Питаевский, Статистическая физика, ч. 2]

$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{M}}{\partial t}=-\eta\boldsymbol{M}\times\boldsymbol{H}_{ef} \tag{11.116}$$

$$

где эффективное магнитное поле в изотропной ферромагнитной среде имеет вид

$$\boldsymbol{H}_{ef}=\boldsymbol{H}+\lambda\boldsymbol{M}+q\nabla^2\boldsymbol{M} \tag{11.117}$$

Поле Вейсса $\lambda\boldsymbol{M}$ выпадает из уравнения (11.116). Частная производная в левой части (11.116) написана для того, чтобы подчеркнуть возможность рассмотрения неоднородной намагниченности. Последнее слагаемое в (11.117) как раз и связано с неоднородностью в распределении намагниченности, которая должна быть малой ($ka\ll 1, a$ - межатомное расстояние). В большинстве ферромагнетиков коэффициент $\eta=e_0/mc$, так как главный вклад вносят спиновые магнитные моменты.

Для того чтобы уравнение (11.116) учитывало потери электромагнитной энергии в среде, его нужно дополнить диссипативным членом. Обычно предполагают, что в $\boldsymbol{H}_{ef}$ входит некоторое поле «сил трения» $-p d\boldsymbol{M}/dt$, пропорциональное скорости изменения намагниченности. Тогда уравнение (11.116) примет вид

$$\frac{\partial\boldsymbol{M}}{\partial t}=-\gamma\boldsymbol{M}\times\left(\boldsymbol{H}_{ef}-p\frac{\partial\boldsymbol{M}}{\partial t}\right) \tag{11.118}$$

[4] Блох Феликс - американский физик, Нобелевский лауреат (премия присуждена за открытие ядерного магнитного резонанса в 1946 г.)

где p - некоторый параметр (параметр потерь). Если потери малы, а полное магнитное поле представляет собою сумму постоянного поля $\boldsymbol{H}_0$ и переменного поля $\boldsymbol{h}(t)$: $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_0 + \boldsymbol{h}(t)$, причем $|\boldsymbol{h}| \ll H_0$, то уравнение (11.118) примет более простой вид [Гуревич и Мелков (1994)]:

$$\frac{\partial \boldsymbol{M}}{\partial t} = -\gamma(\boldsymbol{M} \times \boldsymbol{H}) + \omega_r \left(\chi_0 \boldsymbol{H} - \boldsymbol{M}\right) \tag{11.119}$$

Здесь $\chi_0 = {}_, M_0/H_0, \omega_r = p\gamma^2 M_0^2/\chi_0, M_0 = |\boldsymbol{M}|$ - намагниченность насыщения. Уравнение Ландау-Лифшица является исходным при решении задач о ферромагнитном резонансе.

В радиотехнике сверхвысоких частот получили широкое распространение ферромагнетики с очень малой проводимостью (ферродиэлектрики,
ферриты). Распространение электромагнитных волн в ферритах рассматривается в гл. 12 и 13.

Рекомендуемая литература: [Ландау и Лифшиц, Электродинамика сплошных сред; Лифшиц и Питаевский, Статистическая физика, ч. 2; Памятных и Туров (2000); Уайт (1985); Батыгин и Топтыгин (2002); Батыгин и Топтыгин, Современная электродинамика, ч. 1; Гуревич и Мелков (1994); Пейк (1965)].

Задачи

11.52. На парамагнетик действует постоянное магнитное поле $\boldsymbol{H}_0$ и малое переменное поле $\boldsymbol{h}e^{-i\omega t}, h \ll H_0$, перпендикулярное $\boldsymbol{H}_0$. Линеаризуя уравнение движения (11.115), вычислить магнитную восприимчивость парамагнетика $\chi(\omega)$ и поглощаемую в единицу времени энергию магнитного поля $Q(\omega)$.

11.53. Вычислить характерные частоты ядерного магнитного резонанса и электронного парамагнитного резонанса в постоянном магнитном поле напряженностью $\boldsymbol{H}_0 = 10^3$ Э. В первом случае эффект вызван магнитными моментами атомных ядер, во втором - магнитными моментами отдельных электронов или электронных оболочек атомов.

11.54. Найти закон движения вектора намагниченности M при отсутствии потерь в безграничной ферритовой среде, намагниченной до насыщения. Магнитное поле $\boldsymbol{H}$ в среде постоянно и однородно.

11.55. Ферромагнетик намагничен до насыщения постоянным магнитным полем $\boldsymbol{H}_0$. В пренебрежении диссипацией найти спектр собственных (в отсутствие внешнего переменного поля) колебаний намагниченности с учетом всех слагаемых эффективного поля (11.117)

11.56. Решить задачу 11.54 с учетом потерь. Исходить из уравнения Ландау-Лифшица в форме (11.119). Считать, что отклонения M от направления $\boldsymbol{H}$ малы и $\omega_r \ll \omega_0 = \gamma H_0$.

11.57*. Пусть в неограниченной ферромагнитной среде наряду с однородным постоянным полем $\boldsymbol{H}_0$ действует высокочастотное поле $\boldsymbol{h}e^{-i\omega t}$ ($h = \text{const}$). Считая $h \ll H_0$ и пренебрегая потерями, а также неоднородностью намагниченности, найти в линейном по h приближении вынужденные колебания вектора намагниченности M. (Собственные колебания, т. е. ларморова прецессия под действием постоянного поля $\boldsymbol{H}_0$, затухнут из-за потерь, существующих во всех реальных системах.)

11.58. Используя результат предыдущей задачи, найти тензоры магнитной восприимчивости χ_{ik} и проницаемости μ_{ik} для высокочастотного поля. Построить зависимость компонент тензора μ_{ik} от постоянного магнитного поля H_0 при $M_0 = 160$ Гс и $\nu = \omega/2\pi = 9375$ МГц ($\lambda = 3,2$ см). Проследить резонансный характер изменения этих величин. Определить $H_{0\,\text{res}}$.

11.59. Получить решение задачи 11.57* с учетом неоднородности намагниченности (пространственной дисперсии), но в пренебрежении потерями. Вычислить тензор

магнитной проницаемости в этом приближении.

11.60*. В неограниченной намагниченной до насыщения ферритовой среде кроме постоянного магнитного поля $H_0 = H_z$ действует переменное поле, поляризованное по кругу: $H_x = h\cos\omega t, H_y = h\sin\omega t, h = \text{const}$. Найти точное решение уравнения Ландау-Лифшица, соответствующее вынужденной прецессии вектора $\boldsymbol{M}$ с частотой ω внешнего поля. Диссипацию энергии не учитывать.

11.61. Получить решение задачи 11.57* о вынужденных колебаниях вектора намагниченности с учетом потерь. Использовать уравнение ЛандауЛифшица в форме (11.119).

11.62. Используя результат предыдущей задачи, найти тензор магнитной проницаемости μ_{ik} для высокочастотного поля. Получить выражения действительной и мнимой частей компонент этих тензоров. Построить зависимость обеих частей компонент тензора магнитной проницаемости от постоянного магнитного поля для $M_0 = 160\text{Гс}, \nu = \omega/2\pi = 9375$ МГц, $\omega_r = 3\cdot 10^9$ рад/с. Определить резонансное поле $H_{0\,\text{res}}$ (т. е. значение H_0, при котором мнимые части компонент тензора μ имеют максимум).

11.63. Определить полуширину ΔH_0 резонансной кривой мнимых частей компонент тензора магнитной проницаемости, считая $\omega_r \ll \omega$. Полушириной резонансной кривой называется расстояние между двумя ординатами $\mu'' = \mu_{\text{res}}$ и $\mu'' = \mu_{\text{res}}/2$.

11.64*. Найти, без учета потерь, частоту ларморовой прецессии ω_k, в ограниченном ферромагнитном образце, имеющем форму эллипсоида. Образец находится во внешнем однородном поле $\boldsymbol{H}_0$, приложенном вдоль одной из осей эллипсоида. Считать отклонение вектора намагниченности M от равновесного положения малым.

Указание. В уравнение Ландау-Лифшица войдет теперь внутреннее поле $\boldsymbol{H}_1$, которое будет отличаться от внешнего поля $\boldsymbol{H}_0$ вследствие размагничивающего действия формы тела:

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_0 - \boldsymbol{H}', \quad H'_k = 4\pi N_{kl} M_l$$

где N_{kl} - тензор размагничивающего действия формы (см. задачу 9.49).

11.65. Решить предыдущую задачу с учетом потерь. (Учитывать только члены, линейные относительно ω_r.)

11.66*. Рассмотреть вынужденные колебания при наличии потерь в малом образце эллипсоидальной формы. Определить компоненты тензора магнитной восприимчивости χ_{ik} для высокочастотного поля, читая амплитуду его h малой по сравнению с постоянным полем H_0.

11.67. В некоторых ферромагнитных средах (антиферромагнетиках) результирующая намагниченность $\boldsymbol{M}$ складывается из двух частей: $\boldsymbol{M} = = M_1 + M_2$, где $\boldsymbol{M}_1$ и $\boldsymbol{M}_2$ создаются ионами, находящимися в разных узлах кристаллической решетки и образующими две магнитные подрешетки (см. раздел 9.3). В равновесном состоянии векторы намагниченности $\boldsymbol{M}_1$ и $\boldsymbol{M}_2$ ориентированы антипараллельно, так что $M = |M_1 - M_2|$. При прецессии во внешнем магнитном поле антипараллельность векторов $\boldsymbol{M}_1$ и $\boldsymbol{M}_2$ нарушается. В результате этого на каждый из векторов начинает действовать молекулярное поле Вейсса (см. формулу (11.117)). Определить частоты собственной прецессии, предполагая, что $\lambda|M_1 - M_2| \gg H_0$, где H_0 - внешнее поле, λ - постоянная молекулярного поля Вейсса. Считать отклонения векторов M_1 и M_2 от равновесного положения малыми.

11.5.5 11.5. Electrodynamics of Moving Media

Изучение электромагнитных явлений в движущихся средах имеет не только принципиальное, но и практическое значение, так как все чаще встречаются

макроскопические тела, имеющие релятивистские скорости. К их числу относятся многочисленные и активно изучаемые релятивистские объекты в астрофизике (релятивистские струи, релятивистские ударные волны, релятивистские аккреционные диски и др.), а также ускоренные сгустки плазмы и плотные пучки энергичных электронов в технических ускорительных устройствах.

Уравнения Максвелла и уравнения связи Минковского [5]. Мы будем здесь рассматривать только среды, движущиеся с постоянной скоростью

$\boldsymbol{V} = \text{const}$. Такое движение имеет место не всегда. Пример описания в квазистационарном приближении проводящей среды, скорость которой может варьироваться в пространстве и во времени (магнитная гидродинамика), содержится в разделе 10.3 .

Микроскопические уравнения Максвелла (7.1) - (7.4), как и результат их усреднения (11.1)-(11.4), имеют силу не только для неподвижных, но и для движущихся сред. Сохраняет свой смысл и вектор $\boldsymbol{P}$ как электрический дипольный момент, приходящийся на единицу объема, так как уравнения (11.6)-(11.8) справедливы и в движущейся среде. Однако, смысл вектора M как удельной намагниченности ограничен, по сути дела, лишь областью статических явлений (см. неравенство (11.9)). Поэтому вектор M следует рассматривать как вспомогательную величину, удобную для параметризации тока j_{int}, создаваемого частицами среды. Отличие M от нуля свидетельствует о наличии такого тока. Таким образом, будем описывать поле в движущихся средах системой уравнений Максвелла (11.11)-(11.14). Для удобства ссылок приведем ее здесь еще раз:

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} \tag{11.120}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}_{\text{ext}}(\boldsymbol{r},t) \tag{11.121}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t) = 4\pi\rho_{ext}(\boldsymbol{r},t) \tag{11.122}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) = 0 \tag{11.123}$$

Дальнейшие расчеты удобно производить в четырехмерной тензорной форме. Основы алгебры и анализа в четырехмерном псевдоэвклидовом пространстве изложены в главах 3,4 .

Поскольку векторы $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}$ представляют собой усредненные значения микроскопических напряженностей $\mathscr{E}, \mathscr{H}$, то при переходе в другую инерциальную систему они преобразуются таким же образом, т. е. образуют в совокупности 4-тензор электромагнитного поля, аналогичный тензору (4.68):

$$F_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}, \quad F^{ik} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \tag{11.124}$$

Для того, чтобы система уравнений (11.120)-(11.123) была релятивистски ковариантной, необходимо, чтобы и вторая пара векторов объединялась в такой же 4-тензор - тензор электромагнитной индукции:

[5] Минковский Герман (1864-1909) - выдающийся немецкий математик и физик, выдвинул идею о четырехмерном пространстве-времени с псевдоэвклидовой геоиетрией и разработал ее следствия. Сформулировал релятивистски инвариантные уравнения электромагнитного поля в движущейся среде.

$$H_{ik}=\begin{pmatrix}0 & D_x & D_y & D_z\\ -D_x & 0 & -H_z & H_y\\ -D_y & H_z & 0 & -H_x\\ -D_z & -H_y & H_x & 0\end{pmatrix},\quad H^{ik}=\begin{pmatrix}0 & -D_x & -D_y & -D_z\\ D_x & 0 & -H_z & H_y\\ D_y & H_z & 0 & -H_x\\ D_z & -H_y & H_x & 0\end{pmatrix} \tag{11.125}$$

Аналогичный тензор можно ввести и для величин $(\boldsymbol{P},\boldsymbol{M})$. Уравнения Максвелла, записанные через тензоры F_{ik}, H^{ik}, имеют вид (4.114), (4.112):

$$\partial_l F_{ik}+\partial_i F_{kl}+\partial_k F_{li}=0,\quad \partial_k H^{ik}=-\frac{4\pi}{c}j^i_{ext} \tag{11.126}$$

где j^i_{ext} – 4-вектор внешнего тока.
Уравнения связи между векторами $\boldsymbol{E},\boldsymbol{B}$ (имеющими точный смысл и в движущихся средах) и вспомогательными векторами $\boldsymbol{D},\boldsymbol{H}$ получим с помощью преобразования Лоренца. Пусть среда изотропна, а электрическая и магнитная проницаемости не имеют дисперсии. Тогда в системе покоя среды уравнения связи имеют вид (11.16):

$$\boldsymbol{D}'=\varepsilon\boldsymbol{E}',\quad \boldsymbol{B}'=\mu\boldsymbol{H}' \tag{11.127}$$

где ε,μ - проницаемости в неподвижной среде. Преобразуем векторы поля в лабораторную систему по формулам (4.69) и получим уравнения связи Минковского
$\boldsymbol{D}+\frac{1}{c}\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{H}=\varepsilon\left(\boldsymbol{E}+\frac{1}{c}\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{H}\right),\quad \boldsymbol{B}-\frac{1}{c}\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{E}=\mu\left(\boldsymbol{H}-\frac{1}{c}\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{D}\right)$.
В нерелятивистском приближении $V\ll c$, и в поправочных членах можно использовать формулы (11.127). Это дает

$$\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}+\frac{\varepsilon\mu-1}{c}\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{H},\quad \boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}-\frac{\varepsilon\mu-1}{c}\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{E},\quad V\ll c$$

Условия на границе раздела двух сред тоже можно получить путем пересчета в лабораторную систему граничных условий (11.15), полученных для неподвижной среды. Считаем некоторый элемент граничной поверхности локально плоским и вводим сопутствующую систему отсчета S', в которой движение этого элемента по нормали $\boldsymbol{n}$ к его плоскости отсутствует. Относительная скорость двух систем в этом случае имеет значение $\boldsymbol{v}=V_n\boldsymbol{n}$. В системе S' граничные условия имеют вид (11.15). При их пересчете в лабораторную систему по формулам (4.69) условия для нормальных
компонент останутся прежними:

$$\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{D}_2-\boldsymbol{D}_1)=0,\quad \boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{B}_2-\boldsymbol{B}_1)=0 \tag{11.130}$$

(мы считаем отсутствующими поверхностные заряды и токи). Условия для тангенциальных компонент примут вид

$$\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{E}_2-\boldsymbol{E}_1)=\frac{V_n}{c}(\boldsymbol{B}_2-\boldsymbol{B}_1),\quad \boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{H}_2-\boldsymbol{H}_1)=-\frac{V_n}{c}(\boldsymbol{D}_2-\boldsymbol{D}_1) \tag{11.131}$$

В нерелятивистском приближении в поправочных членах можно положить $E_{\tau1}=E_{\tau2}, H_{\tau1}=H_{\tau2}$, и условия (11.132) несколько упростятся:
$\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{E}_2-\boldsymbol{E}_1)=\frac{V_n}{c}(\mu_2-\mu_1)\boldsymbol{H}_\tau,\quad \boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{H}_2-\boldsymbol{H}_1)=-\frac{V_n}{c}(\varepsilon_2-\varepsilon_1)\boldsymbol{E}_\tau$.

Задачи

11.68. Выразить из уравнений связи Минковского (11.128) векторы индукции $\boldsymbol{D}, \boldsymbol{H}$ через усредненные векторы напряженностей поля $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}$. Показать, что искомые связи имеют вид

$$\begin{aligned}\boldsymbol{D} &= \varepsilon\boldsymbol{E} + \frac{\kappa\gamma^2}{\mu}\left[\beta^2\boldsymbol{E} - \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{E}) + \boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{B}\right] \\ \boldsymbol{H} &= \frac{1}{\mu}\boldsymbol{B} + \frac{\kappa\gamma^2}{\mu}\left[-\beta^2\boldsymbol{B} + \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{B}) + \boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{E}\right]\end{aligned} \tag{11.133}$$

где использованы обозначения

$$\kappa = \varepsilon\mu - 1, \quad \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{V}/c, \quad \gamma = \left(1-\beta^2\right)^{-1/2} \tag{11.134}$$

11.69. Показать, что уравнения связи Минковского (11.133) можно записать в ковариантной четырехмерной форме

$$H^{ik} = \epsilon^{ikmn}F_{mn}, \quad \epsilon^{ikmn} = \mu^{-1}\left(g^{im} + \kappa u^i u^m\right)\left(g^{kn} + \kappa u^k u^n\right) \tag{11.135}$$

Здесь ϵ^{ikmn} – 4-тензор электрической и магнитной проницаемостей, метрический тензор определен уравнением (3.18) $\left(g^{ik} = g_{ik}\right)$, u^i - безразмерный вектор 4-скорости среды:

$$u^i = (\gamma, \gamma\boldsymbol{V}/c), \quad u^i u_i = \gamma^2 - \beta^2\gamma^2 = 1 \tag{11.136}$$

11.70. Пусть в сопутствующей системе электрическая и магнитная проницаемости среды $\varepsilon(\omega'), \mu(\omega')$ зависят от частоты, т.е. имеет место временная дисперсия. Записать уравнения Минковского (11.128), (11.133) для фурье-образов векторов поля ($\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{k}\omega}, \boldsymbol{B}_{\boldsymbol{k}\omega}$ и т. д.) в лабораторной системе координат.

Электромагнитные потенциалы в движущихся средах. Этот вопрос будет изложен на основе обзоров Болотовского и Столярова (1974,1983). Четырехмерная формулировка уравнений Максвелла и уравнений связи позволяет существенно упростить выкладки. Выражаем тензоры поля через четырехмерный вектор-потенциал A_m согласно (4.52):

$$F_{mn} = \partial_m A_n - \partial_n A_m, \quad H^{ik} = \epsilon^{ikmn}\partial_m A_n - \partial_n A_m \tag{11.137}$$

где использовано уравнение связи (11.135). При этом первое уравнение (11.126) выполняется тождественно, а из второго получим

$$\begin{aligned}&\left(g^{im} + \kappa u^i u^m\right)\left\{\left[-g^{kn}\partial_k\partial_n - \kappa\left(u^k\partial_k\right)^2\right]A_m + \right. \\ &\left. + \partial_m\left(\partial_k A^k + \kappa u^k u^n \partial_k A_n\right)\right\} = -\frac{4\pi\mu}{c}j^i_{ext}\end{aligned} \tag{11.138}$$

Здесь $-g^{kn}\partial_k\partial_n = \Delta - (\partial/c\partial t)^2$ - оператор Даламбера (4.38).
Вследствие неоднозначности в выборе электромагнитного потенциала на него можно наложить дополнительное условие. Удобно выбрать его таким образом, чтобы упростить уравнение (11.138):

$$\partial_k A^k + \kappa u^k u^n \partial_k A_n \equiv \left(g^{kn} + \kappa u^k u^n\right)\partial_k A_n = 0 \tag{11.139}$$

Последнее уравнение представляет собой обобщение условия Лоренца (2.105) $\partial_k A^k = 0$ на случай движущейся среды. С помощью этого условия запишем уравнение (11.138) для потенциала в виде

$\widehat{L}\left(g^{im}+\kappa u^i u^m\right)A_m=-\frac{4\pi\mu}{c}j^i_{ext}$, где оператор $\widehat{L}=-g^{kn}\partial_k\partial_n-\kappa\left(u^k\partial_k\right)^2$.
Более удобная форма записи достигается, если ввести 4-тензор второго ранга

$$S_{ik}=g_{ik}-\frac{\kappa}{1+\kappa}u_i u_k \tag{11.141}$$

Из уравнения (11.138), умножив его на S_{ni}, получим более компактное уравнение

$$\widehat{L}A_n=-\frac{4\pi\mu}{c}S_{ni}j^i_{ext} \tag{11.142}$$

Это уравнение имеет ковариантную форму, поэтому оно справедливо в любой инерциальной системе отсчета. Оператор $\widehat{L}$, как следует из его определения (11.140), является релятивистским инвариантом, его перевод в другую инерциальную систему сводится к преобразованию Лоренца 4 -векторов x^i и u^k, в частности,

$$\widehat{L}=\Delta'-\frac{\varepsilon\mu}{\mathrm{c}^2}\frac{\partial^2}{\partial t'^2}=\Delta-\frac{1}{\mathrm{c}^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\kappa\gamma^2}{c^2}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\boldsymbol{V}\cdot\nabla\right)^2 \tag{11.143}$$

Первое выражение относится к сопутствующей системе и оператор действует на штрихованные координаты, второе выражение относится к лабораторной системе.

Пример 11.8. Получить из (11.138), (11.142) уравнения в трехмерной форме для векторного $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)$ и скалярного $\varphi(\boldsymbol{r},t)$. потенциалов в движущейся среде и дополнительное условие для них.

Решение. Использовав связи $A^k=(\varphi,\boldsymbol{A}), j^k=(c\rho,\boldsymbol{j})$, получим

$$\widehat{L}\boldsymbol{A}=-\frac{4\pi\mu}{c}\left\{\boldsymbol{j}_{ext}+\boldsymbol{V}\frac{\kappa\gamma^2}{(1+\kappa)c^2}\left(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{j}_{ext}-c^2\rho_{ext}\right)\right\}$$

$$\widehat{L}\varphi=-\frac{4\pi\mu}{c}\left\{c\rho_{ext}+\frac{\kappa\gamma^2}{(1+\kappa)c}\left(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{j}_{ext}-c^2\rho_{ext}\right)\right\} \tag{11.144}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\frac{\kappa\gamma^2}{c^2}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\boldsymbol{V}\cdot\nabla\right)\left(\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{A}-c\varphi\right)=0 \tag{11.145}$$

Здесь оператор $\widehat{L}$ дается вторым выражением (11.143). При $\boldsymbol{V}=0$ предыдущие уравнения принимают вид

$$\left(\Delta-\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\boldsymbol{A}=-\frac{4\pi\mu}{c}\boldsymbol{j}_{\mathrm{ext}}\ ,\quad \left(\Delta-\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\varphi=-\frac{4\pi}{\varepsilon}\rho_{\mathrm{ext}} \tag{11.146}$$

с дополнительным условием

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0 \tag{11.147}$$

Пример 11.9. Ввести по аналогии с формулами (5.40)-(5.46) электрический и магнитный векторы Герча в движущейся среде. Получить для них уравнения и найти их связь с электромагнитным четырехмерным потенциалом A^k. Представить указанную связь также в трехмерной векторной форме.

Решение. Сначала запишем уравнения для векторов Герца в неподвижной среде с проницаемостями ε,μ без дисперсии. Уравнения для потенциалов (11.146) и дополнительное условие (11.147) будут выполняться, если связь потенциалов с векторами Герца будет иметь вид

$$\boldsymbol{A}=\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{Z}^{(e)}}{\partial t}+\nabla\times\boldsymbol{Z}^{(m)},\quad \varphi=-\frac{1}{\varepsilon\mu}\nabla\cdot\boldsymbol{Z}^{(e)} \tag{1}$$

При этом сами векторы Герца нужно подчинить уравнениям

$$\left(\Delta - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\boldsymbol{Z}^{(e)} = -4\pi\mu\boldsymbol{p}, \quad \left(\Delta - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\boldsymbol{Z}^{(m)} = -4\pi\mu m \tag{2}$$

где $\boldsymbol{p}, \boldsymbol{m}$ - векторы электрической и магнитной поляризации, определяющие внешний ток

$$\boldsymbol{j}_{ext} = \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial t} + c\nabla \times \boldsymbol{m}, \quad \rho_{ext} = -\nabla \cdot \boldsymbol{p} \tag{3}$$

Для записи этих соотношений в произвольной инерциальной системе следует придать им релятивистски ковариантную форму. Для этой цели замечаем, что закон преобразования величин $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{m})$ такой же, как векторов поляризации среды $(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{M})$, т. е. их совокупность образует антисимметричный 4-тензор второго ранга:

$$p^{ik} = \begin{pmatrix} 0 & p_x & p_y & p_z \\ -p_x & 0 & -m_z & m_y \\ -p_y & m_z & 0 & -m_x \\ -p_z & -m_y & m_x & 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

Векторы Герца $\boldsymbol{Z}^{(e)}, \boldsymbol{Z}^{(m)}$ тоже объединяются в единый 4-тензор

$$Z^{ik} = \begin{pmatrix} 0 & Z_x^{(e)} & Z_y^{(e)} & Z_z^{(e)} \\ -Z_x^{(e)} & 0 & -Z_z^{(m)} & Z_y^{(m)} \\ -Z_y^{(e)} & Z_z^{(m)} & 0 & -Z_x^{(m)} \\ -Z_z^{(e)} & -Z_y^{(m)} & Z_x^{(m)} & 0 \end{pmatrix} \tag{5}$$

Теперь уравнения (2) можно записать в ковариантной форме, которая применима в любой инерциальной системе:

$$\widehat{L} Z^{ik} = -4\dot{\pi}\mu p^{ik} \tag{6}$$

Оператор $\widehat{L}$ дается уравнениями (11.143) и в случае неподвижной среды приводит к уравнениям (2). В лабораторной системе нужно использовать выражение (11.143) с $\boldsymbol{V} \neq 0$. 4 -потенциал $A^i = (\varphi, \boldsymbol{A})$ тоже выражается через Z^{ik} в ковариантной форме с помощью тензора (11.141):

$$A^i = -S_l^i \partial_k Z^{lk} = \left(\frac{\kappa}{1+\kappa} u^i u_l - \delta_l^i\right)\partial_k Z^{lk} \tag{7}$$

При $u^i = (1, 0)$, т. е. в сопутствующей системе, (7) дает формулы (1). При переходе в лабораторную систему получим

$$\boldsymbol{A} = \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{Z}^{(e)}}{\partial t} + \nabla \times \boldsymbol{Z}^{(m)} + \frac{\kappa\gamma^2}{(1+\kappa)c^2}\boldsymbol{V} \times \tag{8}$$

$$\times \left\{ c\nabla \cdot \boldsymbol{Z}^{(e)} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{Z}^{(e)}\right) + \left(\boldsymbol{V} \cdot \left[\nabla \times \boldsymbol{Z}^{(m)}\right]\right) \right\}$$

(9) $\varphi = -\left(1 - \frac{\kappa\gamma^2}{1+\kappa}\right)\nabla \cdot \boldsymbol{Z}^{(e)} + \frac{\kappa\gamma^2}{(1+\kappa)c}\boldsymbol{V} \cdot \left\{ \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{Z}^{(e)}}{\partial t} + \nabla \times \boldsymbol{Z}^{(m)} \right\}$.

Пример 11.10. Построить запаздывающую функцию Грина для уравнения (11.142) в движущейся среде без дисперсии ($\varepsilon\mu > 1$). Сравнить полученное решение с функцией Грина в вакууме (см. формулу (5.9)).

Решение. Ищем решение уравнения

$$\widehat{L}G(\boldsymbol{r},t) = -4\pi\mu\delta(\boldsymbol{r})\delta(t) \tag{1}$$

удовлетворяющее условию

$$G(\boldsymbol{r},t) = 0 \quad \text{при} \quad t < 0. \tag{2}$$

Оператор $\widehat{L}$ определяется выражением (11.143) и является инвариантным обобщением оператора Даламбера на случай движущейся среды.

Как и в разделе 5.1, используем преобразование Фурье уравнения (1) по координатам и времени:

$$\tilde{G}(\boldsymbol{k},\omega)\left[g_{il}k^ik^l - \kappa\left(u_lk^l\right)^2\right] = 4\pi\mu \tag{3}$$

Формальное решение, аналогичное (5.6), имеет вид

$$\widetilde{G} = \frac{4\pi\mu}{k^2 - (\omega/c)^2 - (\kappa\gamma^2/c^2)\,(\omega - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{V})^2} \tag{4}$$

Обратное преобразование Фурье

$$G(\boldsymbol{r},t) = \int \tilde{G}(\boldsymbol{k},\omega)e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{d\omega}{2\pi} \tag{5}$$

следует выполнять таким образом, чтобы полюса подынтегрального выражения при интегрировании по частоте были обойдены сверху (см. рис. 5.1). Тот же результат будет достигнут, если в знаменатель добавить малое мнимое слагаемое путем замены $\omega \to \omega + i\delta, \delta \to +0$ (см. формулу Сохоцкого (1.223)). При этом полюсы подынтегрального выражения смещаются в нижнюю полуплоскость. В проводимом ниже расчете эта процедура будет выполнена неявно при использовании табличных интегралов от цилиндрических функций.

Направим ось Oz вдоль скорости среды V и введем цилиндрические координаты, в которых $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{V} = k_\parallel\boldsymbol{V}, \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} = k_\parallel z + k_\perp r_\perp\cos\varphi$. Здесь φ - угол между векторами $\boldsymbol{r}_\perp$ и $\boldsymbol{k}_\perp$, перпендикулярными $\boldsymbol{V}$. Проинтегрировав по $d\varphi$ с использованием формулы (1.150), получим из (4)

$$G(\boldsymbol{r},t) = \frac{\mu}{2\pi^2}\int \frac{J_0\left(k_\perp r_\perp\right)\exp\left(ik_\parallel z - i\omega t\right)k_\perp dk_\perp dk_\parallel d\omega}{k_\perp^2 + k_\parallel^2 - (\omega/c)^2 - (\kappa\gamma^2/c^2)\left(\omega - k_\parallel V\right)^2} \tag{6}$$

Здесь J_0 - функция Бесселя. Интегрирование по $dk_\perp$ выполняем с помощью формулы (Градштейн и Рыжик, 1971, 6.565.4)

$$\int_0^\infty \frac{J_0\left(k_\perp r_\perp\right)k_\perp dk_\perp}{k_\perp^2 + a^2} = K_0\left(ar_\perp\right), \quad \text{где} \quad \operatorname{Re} a > 0 \tag{7}$$

K_0 - модифицированная функция Бесселя (функция Макдональда (1.163)). В нашем случае

$$a = \gamma\sqrt{\left(1 - \varepsilon\mu\beta^2\right)k_\parallel^2 + 2\beta(\varepsilon\mu - 1)k_\parallel(\omega/c) - \left(\varepsilon\mu - \beta^2\right)\left(\omega^2/c^2\right)} > 0 \tag{7}$$

Для выполнения оставшихся двух интегрирований выполним замену переменных

$$x = k_\parallel, \quad \alpha = \omega - \frac{\beta c(\varepsilon\mu - 1)}{\varepsilon\mu - \beta^2}k_\parallel, \quad \text{причем} \quad dk_\parallel d\omega = dx d\alpha. \tag{8}$$

Воспользуемся формулами (1.163)

$$K_0(z) = \frac{i\pi}{2} H_0^{(1)}(iz)$$

и 6.616.3 (последняя - из справочника Градштейна и Рыжика, 1971):

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ixz'} H_0^{(1)}\left(g\sqrt{b^2 - x^2}\right) dx = -\frac{2i}{\sqrt{g^2 + z'^2}} e^{ib\sqrt{g^2+z'^2}} \tag{9}$$

где $H_0^{(1)}$ - функция Ханкеля первого рода (1.154),

$$z' = z - \frac{(\varepsilon\mu - 1)Vt}{\varepsilon\mu - \beta^2}, \quad g = \frac{\sqrt{\varepsilon\mu} r_\perp}{\gamma\sqrt{\varepsilon\mu - \beta^2}}, \quad b = \frac{(\varepsilon\mu - \beta^2)\gamma^2}{c\sqrt{\varepsilon\mu}}\alpha \tag{10}$$

Последнее интегрирование производится с помощью (1.219):

$$\begin{aligned} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-i\alpha\left(t - \frac{(\varepsilon\mu - \beta^2)\gamma^2}{c\sqrt{\varepsilon\mu}}\sqrt{g^2 + z'^2}\right)\right\} d\alpha = \\ = 2\pi\delta\left(t - \frac{(\varepsilon\mu - \beta^2)\gamma^2}{c\sqrt{\varepsilon\mu}}\sqrt{g^2 + z'^2}\right) \end{aligned} \tag{11}$$

Собрав предыдущие результаты, запишем конечное выражение для функции Грина:

$$G(\boldsymbol{r}, t) = \frac{\mu}{\sqrt{g^2 + z'^2}} \delta\left(t - \frac{(\varepsilon\mu - \beta^2)\gamma^2}{c\sqrt{\varepsilon\mu}}\sqrt{g^2 + z'^2}\right) \tag{11.148}$$

Полученная функция удовлетворяет условию (2), что следует непосредственно из структуры аргумента дельта-функции. При $V = \beta = 0, \gamma = 1$ имеем $\sqrt{g^2 + z'^2} = r$ и функция Грина приобретает вид

$$G(r, t) = \frac{1}{r}\delta\left(t - \frac{r}{c/\sqrt{\varepsilon\mu}}\right) \tag{12}$$

Это соответствует формуле (5.9) для вакуумной функции Грина, если в последней заменить скорость c на фазовую скорость $v_{ph} = c/\sqrt{\varepsilon\mu}$ электромагнитных волн в диэлектрике. При $\varepsilon = \mu = 1$ и произвольной V увлечения электромагнитного поля движущейся средой не происходит, и из (12) получаем выражение (5.9).

Функцию Грина (12) можно представить в более наглядной форме, если преобразовать аргумент дельта-функции по формуле (1.209). Такое преобразование дает

$$G(\boldsymbol{r}, t) = \frac{\mu}{2R_*}\left\{(1 + \operatorname{sign}\tau_1)\,\delta(t - \tau_1) + (1 + \operatorname{sign}\tau_1)\,\delta(t - \tau_1)\right\} \tag{11.149}$$

где $\operatorname{sign} x = x/|x|$,

$$\begin{aligned} R_* &= \left(z^2 + \left(1 - \varepsilon\mu\beta^2\right)\gamma^2 r_\perp^2\right)^{1/2}, \\ \tau_1 &= \frac{-(\varepsilon\mu - 1)\beta z + (1 - \beta^2)\sqrt{\varepsilon\mu} R_*}{c\,(1 - \varepsilon\mu\beta^2)}, \\ \tau_2 &= \frac{(\varepsilon\mu - 1)\beta z + (1 - \beta^2)\sqrt{\varepsilon\mu} R_*}{c\,(\varepsilon\mu\beta^2 - 1)}. \end{aligned} \tag{11.150}$$

Множители $(1 + \operatorname{sign}\tau)$ обращаются в нуль при $\tau < 0$ и тем самым обеспечивают выполнение условия запаздывания (2). Их нужно считать равными нулю и в тех случаях, когда R_* становится мнимым.

Электромагнитные силы, действующие на вещество в переменном поле. Тензоры энергии-импульса Абрагама [6] и Минковского. Эти вопросы, дискуссия по которым еще не завершена, изложим для случая неподвижной (либо движущейся с нерелятивистской скоростью $V \ll c$) недиспергирующей изотропной среды, опираясь на обзоры [Скобельцын (1973), Гинзбург (1973), Гинзбург и Угаров (1976)], учебные курсы и монографии [Ландау и Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, Тамм (1976), Гинзбург (1987)].

Найдем силу, с которой переменное электромагнитное поле действует на неподвижное вещество. Эту задачу удобно решать, исходя из уравнения баланса импульса. Требуемое уравнение получим, используя уравнения Максвелла и уравнения связи (11.127) для неподвижной среды. Проницаемости ε, μ считаем зависящими только от плотности вещества τ (временная и пространственная дисперсии отсутствуют).

Умножим (11.120) векторно на $\boldsymbol{D}$, уравнение (11.121) - на $\boldsymbol{B}$ и сложим почленно. Это приведет к равенству

$$-\frac{1}{4\pi c}\frac{\partial}{\partial t}[\boldsymbol{D}\times\boldsymbol{B}] + \frac{1}{4\pi}\{[\nabla\times\boldsymbol{E}]\times\boldsymbol{D} + [\nabla\times\boldsymbol{H}]\times\boldsymbol{B}\} = \frac{1}{c}\boldsymbol{j}_{ext}\times\boldsymbol{B}, \tag{11.151}$$

или в проекциях на оси координат

$$-\frac{1}{4\pi c}\frac{\partial}{\partial t}[\boldsymbol{D}\times\boldsymbol{B}]_\alpha + \frac{1}{4\pi}\left\{\frac{\partial E_\alpha}{\partial x_\beta}D_\beta - \frac{\partial E_\beta}{\partial x_\alpha}D_\beta + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial H_\alpha}{\partial x_\beta}B_\beta - \frac{\partial H_\beta}{\partial x_\alpha}B_\beta\right\} = \frac{1}{c}\left[\boldsymbol{j}_{ext}\times\boldsymbol{B}\right]_\alpha \tag{11.152}$$

Полученное равенство необходимо теперь представить в дивергентной форме:

$$-\frac{\partial g_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} = f_\alpha \tag{11.153}$$

(здесь мы имеем дело с тензорами в трехмерном пространстве и не различаем верхние и нижние индексы). Если вектор g представляет собой плотность импульса электромагнитного поля, а тензор $T_{\alpha\beta} = -\sigma_{\alpha\beta}$ - плотность потока импульса, то вектор f в правой части будет представлять собой объемную силу, с которой поле действует на среду. Это объясняется тем, что сила является источником изменения импульса. С частными случаями уравнения (11.153) мы уже встречались ранее. Равенство (4.129) представляет собой интегральную форму уравнения (11.153) в отсутствие вещества. Равенство (8.63) получается из (11.153) для случая статического электрического поля в веществе.

Но заранее очевидно, что имеющиеся равенства (11.152), (11.153) не позволяют выделить три группы членов (плотность импульса, плотность потока импульса и силу) единственным образом. Для того, чтобы это сделать, нужна дополнительная информация. Эта неоднозначность связана с тем, что мы рассматриваем незамкнутую систему - электромагнитное поле, взаимодействующее с веществом. Энергия, импульс и другие величины распределены между полем и веществом. Импульс поля и импульс вещества (как и соответствующие энергии) легко разделить в простейшей модели вещества - модели заряженных частиц, взаимодействующих с полем по классическим

[06] Абрагам Макс (1875-1922) - немецкий физик-теоретик, автор многих работ по классической электродинамике и электронной теории вещества.

законам (см. раздел 4.3, где рассмотрена такая модель). Реальное же вещество устроено более сложным образом. Поэтому даже использование дополнительных соображений общего характера не позволяет
получить однозначные результаты, и остаются некоторые альтернативные варианты (см. ниже).

Будем опираться на принцип соответствия, согласно которому вычисляемые для переменного поля в веществе величины $\boldsymbol{g}, \sigma_{\alpha\beta}, f$ должны переходить в предельных случаях в полученные ранее значения (4.128), (4.131) в отсутствие вещества

$$\boldsymbol{g} = \frac{1}{4\pi c}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}, \quad \sigma_{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi}\left(E_\alpha E_\beta + H_\alpha H_\beta\right) - \frac{1}{8\pi}\left(E^2+H^2\right)\delta_{\alpha\beta}. \tag{11.154}$$

Для постоянных электрического и магнитного полей в веществе уравнение (11.153) принимает вид $f_\alpha = \partial\sigma_{\alpha\beta}/\partial x_\beta$. Ранее для постоянного электрического поля были получены выражения (8.61), (8.64):

$$\begin{aligned} \sigma^e_{\alpha\beta} &= \tfrac{1}{4\pi}E_\alpha D_\beta - \tfrac{E^2}{8\pi}\left(\varepsilon - \tau\tfrac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\right)\delta_{\alpha\beta} \\ f^e_\alpha &= \rho_{ext}E_\alpha - \tfrac{E^2}{8\pi}\nabla_\alpha\varepsilon + \nabla_\alpha\left(\tau\tfrac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\tfrac{E^2}{8\pi}\right) \end{aligned} \tag{11.155}$$

и для постоянного магнитного поля выражения (9.67), (9.68)

$$\begin{aligned} \sigma^m_{\alpha\beta} &= \frac{1}{4\pi}H_\alpha B_\beta - \frac{H^2}{8\pi}\left(\mu - \tau\frac{\partial\mu}{\partial\tau}\right)\delta_{\alpha\beta}, \\ f^m_\alpha &= \frac{1}{c}\left[\boldsymbol{j}_{\text{ext}}\times\boldsymbol{B}\right]_\alpha - \frac{H^2}{8\pi}\nabla_\alpha\mu + \nabla_\alpha\left(\tau\frac{\partial\mu}{\partial\tau}\frac{H^2}{8\pi}\right). \end{aligned} \tag{11.156}$$

При наличии того и другого поля тензор натяжений (напряжений) должен включать в себя как минимум оба тензора, (11.155) и (11.156):

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha\beta} = \sigma^e_{\alpha\beta} + \sigma^m_{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi}\left(E_\alpha D_\beta + H_\alpha B_\beta\right) - \\ - \left[\frac{E^2}{8\pi}\left(\varepsilon - \tau\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\right) + \frac{H^2}{8\pi}\left(\mu - \tau\frac{\partial\mu}{\partial\tau}\right)\right]\delta_{\alpha\beta} \end{aligned} \tag{11.157}$$

Обозначим $f = f^e + f^m$, где f^e и f^m определяются уравнениями (11.155), (11.156) соответственно, и произведем дифференцирование тензора натяжений (11.157) по координате. Получим

$$\frac{\partial\sigma_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} = \rho_{ext}E_\alpha + f_\alpha + \frac{1}{4\pi}\left\{\frac{\partial E_\alpha}{\partial x_\beta}D_\beta - \frac{\partial E_\beta}{\partial x_\alpha}D_\beta + \frac{\partial H_\alpha}{\partial x_\beta}B_\beta - \frac{\partial H_\beta}{\partial x_\alpha}B_\beta\right\} \tag{11.158}$$

Здесь последнее слагаемое, т. е. выражение в фигурных скобках, совпадает со вторым слагаемым в (11.152). Далее введем обозначение

$$\boldsymbol{g}^M = \frac{1}{4\pi c}\boldsymbol{D}\times\boldsymbol{B} \tag{11.159}$$

(плотность импульса электромагнитного поля по Минковскому). В отсутствие вещества эта величина совпадает с $\boldsymbol{g}$ в (11.154). С помощью (11.158) уравнение (11.152) можно записать в требуемой форме

$$-\frac{\partial g^M_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial\sigma_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} = f^L_\alpha + f_\alpha \tag{11.160}$$

где

$$\boldsymbol{f}^L = \rho_{ext}\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}[\boldsymbol{j}_{ext} \times \boldsymbol{B}] \tag{11.161}$$

- сила Лоренца, действующая на сторонние электрические заряды и токи, если они имеются в веществе;

$$f = -\frac{E^2}{8\pi}\nabla\varepsilon - \frac{H^2}{8\pi}\nabla\mu + \nabla\left(\tau\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\frac{E^2}{8\pi}\right) + \nabla\left(\tau\frac{\partial\mu}{\partial\tau}\frac{H^2}{8\pi}\right) \tag{11.162}$$

- сила, вызванная электромагнитным полем и связанная с неоднородностью вещества и с внутренними напряжениями в нем (электрострикция и магнитострикция). Разумеется, на вещество могут действовать также неэлектромагнитные силы (например, гравитация и градиент давления).

Выражение Минковского (11.159) для плотности импульса не является единственно возможным, поскольку векторы $\boldsymbol{D}, \boldsymbol{B}$ характеризуют не только поле, но и вещество. Поэтому величина (11.159) содержит в себе и импульс поля, и импульс вещества. Четырехмерный тензор энергии-импульса, составленный с использованием плотности импульса Минковского (11.159), оказывается несимметричным (ср. с тензором (4.126) для вакуума):

$$T_{ik}^M = \begin{pmatrix} w & -cg^M \\ -\gamma/c & -\sigma_{\alpha\beta} \end{pmatrix} \tag{11.163}$$

Здесь плотность энергии w дается формулой (11.105), а плотность потока энергии γ - величиной (11.106). Несимметрия тензора проявляется в том, что

$$c\boldsymbol{g}^M = \frac{1}{4\pi}\boldsymbol{D} \times \boldsymbol{B} = \frac{\varepsilon\mu}{c}\gamma \neq \frac{1}{c}\gamma \tag{11.164}$$

Как было разъяснено в разделе 4.3, симметрия тензора энергии-импульса замкнутой системы необходима для того, чтобы можно было определить момент импульса по обычным формулам механики как сохраняющуюся величину. Но для отдельной подсистемы такое требование не обязано выполняться.

Приведенные соображения показывают, что разделение полных величин (например, импульса) на части, относящиеся к разным подсистемам (полю и веществу), до некоторой степени условно. Поэтому вместо выражения (11.159) многие авторы принимают в качестве плотности импульса величину

$$\boldsymbol{g}^A = \frac{1}{4\pi c}\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H} = \frac{\boldsymbol{\gamma}}{c^2} \tag{11.165}$$

предложенную Абрагамом. Между векторами Минковского и Абрагама существует соотношение $\boldsymbol{g}^M = \boldsymbol{g}^{\boldsymbol{A}} + (\varepsilon\mu - 1)\boldsymbol{g}^{\boldsymbol{A}}$. При подстановке этого выражения в (11.160) будем иметь

$$-\frac{\partial g_\alpha^A}{\partial t} + \frac{\partial\sigma_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta} = f_\alpha^L + f_\alpha + f_\alpha^A \tag{11.166}$$

где в правой части появилась дополнительная сила - сила Абрагама, действующая на вещество:

$$\boldsymbol{f}^A = \frac{1}{4\pi c}\frac{\partial}{\partial t}[\boldsymbol{D} \times \boldsymbol{B} - \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}] = \frac{\varepsilon\mu - 1}{4\pi c}\frac{\partial}{\partial t}[\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}]. \tag{11.167}$$

Сила Абрагама весьма мала, и первые сообщения о ее измерении на опыте появились только в 1975 г. Но они свидетельствуют о том, что эта сила существует в природе. Тензор энергии-импульса в форме Абрагама, в отличие от представления Минковского, оказывается симметричным:

$$T_{ik}^{A} = \begin{pmatrix} w & -c\boldsymbol{g}^{A} \\ -\gamma/c & -\sigma_{\alpha\beta} \end{pmatrix} \tag{11.168}$$

Хотя обнаружение силы Абрагама на опыте, казалось бы, однозначно решает вопрос о форме тензора энергии-импульса в пользу представления Абрагама (11.168), но и тензор Минковского (11.163) не следует рассматривать лишь как исторический курьёз. Тензор Минковского удобно использовать при описании излучения движущихся источников в средах (см. [Гинзбург (1973), Гинзбург и Угаров (1976), Гинзбург (1987)], см. также задачу 11.77).

Пример 11.11. Вывести уравнения (11.162), (11.167) для сил, действующих на незаряженный ($\rho_{\text{ext}} = \boldsymbol{j}_{\text{ext}} = 0$) диэлектрик в электромагнитном поле, исходя из закона сохранения энергии (а не импульса, как это было сделано выше). Для этого рассмотреть среду, движущуюся с нерелятивистской скоростью, и использовать уравнения электромагнитного поля для движущейся среды. Найти выражения для плотности энергии в форме Минковского и Абрагама.

Решение. В неподвижной среде уравнения связи имеют вид (11.127), где проницаемости ε, μ считаем зависящими только от плотности вещества τ (временная и пространственная дисперсии отсутствуют). В медленно движущейся среде имеем уравнения связи Минковского вида (11.128). Рассмотрим баланс энергии на основе уравнений Максвелла. Умножая скалярно (11.120) на $\boldsymbol{D}$, (11.121) на $\boldsymbol{H}$ и производя почленное вычитание, приходим к равенству

$$\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\cdot\boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot\boldsymbol{H}\right) = -\nabla\cdot\boldsymbol{\gamma}, \quad \boldsymbol{\gamma} = \frac{c}{4\pi}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H} \tag{1}$$

С помощью уравнений связи (11.128), справедливых в первом порядке по V/c, вычислим с той же точностью левую часть (1). В поправочных членах дифференцируем только векторы поля и находим

$$\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\cdot\boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot\boldsymbol{H} = \varepsilon\boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} + \mu\boldsymbol{H}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} - \\ - \frac{\varepsilon\mu - 1}{c}\frac{\partial}{\partial t}[\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}]\cdot\boldsymbol{V} + \frac{\partial\varepsilon}{\partial t}E^2 + \frac{\partial\mu}{\partial t}H^2 \tag{2}$$

Производные от проницаемостей можно выразить через скорость $\boldsymbol{V}$ с помощью уравнения неразрывности (10.24):

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial t} = \frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\frac{\partial\tau}{\partial t} = -\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\nabla\tau\cdot\boldsymbol{V} - \tau\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\nabla\cdot\boldsymbol{V} \tag{3}$$

и аналогично для μ. Вычисления, подобные тем, которые привели к (2), позволяют получить

$$\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\cdot\boldsymbol{D} + \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}\cdot\boldsymbol{B} = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\cdot\boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot\boldsymbol{H} - \frac{\partial\varepsilon}{\partial t}E^2 - \frac{\partial\mu}{\partial t}H^2 \tag{4}$$

Теперь рассмотрим величину

$$w^{(M)} = \frac{1}{8\pi}\left(\varepsilon E^2 + \mu H^2\right) = \frac{1}{8\pi}(\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E} + \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H}) \tag{5}$$

представляющую собой плотность электромагнитной энергии для постоянных полей в неподвижной среде (см. формулы (8.44), (8.46) и (9.57), (9.58)). В рассматриваемом случае это будет плотность энергии поля в форме Минковского. Ее производную по времени с помощью (4) можно записать в форме

$$-\frac{\partial w^{(M)}}{\partial t} = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\cdot\boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot\boldsymbol{H}\right) - \frac{1}{8\pi}\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial t}E^2 + \frac{\partial \mu}{\partial t}H^2\right) \tag{6}$$

Подставим в правую часть этого равенства в качестве первого члена правую часть (1), а второй член преобразуем с помощью (3). Получим равенство

$$\begin{aligned} -\frac{\partial w^{(M)}}{\partial t} = \nabla\cdot\left\{\gamma - \boldsymbol{V}\left[\tau\frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau}\frac{E^2}{8\pi} + \tau\frac{\partial \mu}{\partial \tau}\frac{H^2}{8\pi}\right]\right\} + \\ + \boldsymbol{V}\cdot\left\{-\frac{E^2}{8\pi}\nabla\cdot\varepsilon - \frac{H^2}{8\pi}\nabla\mu + \nabla\left[\tau\frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau}\frac{E^2}{8\pi} + \tau\frac{\partial \mu}{\partial \tau}\frac{H^2}{8\pi}\right]\right\} \end{aligned} \tag{7}$$

которое учитывает, таким образом, уравнения Максвелла. Его можно рассматривать как уравнение баланса энергии:

$$-\frac{\partial w^{(M)}}{\partial t} = \nabla\cdot\boldsymbol{S} + \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{V} \tag{8}$$

Убыль энергии электромагнитного поля (левая часть) расходуется на создание плотности потока энергии

$$\boldsymbol{S} = \gamma - \boldsymbol{V}\left[\tau\frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau}\frac{E^2}{8\pi} + \tau\frac{\partial \mu}{\partial \tau}\frac{H^2}{8\pi}\right] \tag{9}$$

и на работу над движущейся средой. Объемная сила f согласно (7) имеет вид

$$f = -\frac{E^2}{8\pi}\nabla\varepsilon - \frac{H^2}{8\pi}\nabla\mu + \nabla\left[\tau\frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau}\frac{E^2}{8\pi} + \tau\frac{\partial \mu}{\partial \tau}\frac{H^2}{8\pi}\right] \tag{10}$$

и совпадает с полученным раньше выражением (11.162).
Переход к представлению Абрагама происходит путем замены плотности энергии (5) величиной

$$w^A = \frac{1}{8\pi}(\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E} + \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H}) - \frac{1}{4\pi c}\boldsymbol{V}\cdot[\boldsymbol{D}\times\boldsymbol{B} - \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}] \tag{11}$$

которая связана с (5) соотношением

$$\frac{\partial w^A}{\partial t} = \frac{\partial w^M}{\partial t} - \boldsymbol{f}^A\cdot\boldsymbol{V} \tag{12}$$

где $\boldsymbol{f}^A$ - сила Абрагама (11.167). При этом уравнение баланса энергии примет вид

$$-\frac{\partial w^{(A)}}{\partial t} = \nabla\cdot\boldsymbol{S} + \left(\boldsymbol{f} + \boldsymbol{f}^A\right)\cdot\boldsymbol{V} \tag{8}$$

Плотность потока энергии (9) осталась прежней, в левой части уравнения появилась сила Абрагама.

Задачи

11.71 Выразить векторы поляризации $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{M}$ через векторы поля $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}$. На этой основе выяснить связь между электрическими и магнитными явлениями в движущейся среде. Выяснить, в частности, возможность появления электрической поляризации $\boldsymbol{P}$ в среде с $\varepsilon = 1$ и возможность магнитной поляризации M в немагнитной ($\mu = 1$) среде, объяснить физические причины их возникновения.
11.72 Проанализировать свойства функции Грина, описывающей распространение электромагнитного сигнала в движущейся среде (пример 11.10). Рассмотреть случаи досветового ($V < c/\sqrt{\varepsilon\mu} = v_{ph} < c$), светового ($V = v_{ph}$) и сверхсветового ($V > v_{ph}$) движения среды. Исследовать форму короткого сигнала, испущенного в момент $t = 0$ из начала координат.
11.73 Пусть точечный заряд q покоится в лабораторной системе, а среда движется вдоль оси Oz со скоростью V. Вычислить электромагнитные потенциалы и векторы электромагнитного поля. Найти электрическую и магнитную поляризацию движущейся среды.
11.74*. Сделать то же самое для магнитного диполя $\boldsymbol{m}_0$, который покоится в лабораторной системе. Использовать векторы Герца, введенные для движущейся среды в примере 11.9 .
11.75. Сделать то же самое для электрического диполя $\boldsymbol{p}_0$, который покоится в лабораторной системе. Использовать векторы Герца, введенные для движущейся среды в примере 11.9 .
11.76. Магнитный диполь покоится относительно движущейся среды. Найти наиболее простым способом электромагнитное поле в лабораторной
системе. Сравнить его с полем неподвижного в лабораторной системе диполя при наличии движущейся среды (см. задачу 11.73°).
11.77. Пусть некоторый излучатель, находящийся в однородной среде, испускает пакет волн, имеющий полный импульс $\boldsymbol{G}^A = \int \boldsymbol{g}^A dV$ (интегрирование по всему пространству). Найти потерю импульса $\Delta\boldsymbol{G}^A$ излучателем в этом процессе.
11.78. Пользуясь преобразованиями Лоренца, записать величины $w^A, \boldsymbol{g}^A$ и плотность потока энергии $\boldsymbol{S}$ в инерциальной системе, относительно которой среда движется со скоростью V.
11.79*. Квазимонохроматическая волна частоты ω распространяется в диэлектрике с дисперсией (проницаемости $\varepsilon(\omega), \mu = 1$). Показать, что усредненную по периоду силу Абрагама можно записать в виде

$$\boldsymbol{f}^A = \frac{1}{8\pi c}(\varepsilon - 1)\frac{\partial}{\partial t}\,\mathrm{Re}\,[\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}^*] + \frac{1}{8\pi c}\omega\frac{d\varepsilon}{d\omega}\,\mathrm{Re}\left[\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \times \boldsymbol{H}^*\right] \tag{11.169}$$

11.5.6 11.6. Answers and Solutions

11.3. Из (11.8), (11.10) и уравнений Максвелла (11.1)-(11.4) находим

$$\rho_{\text{int}} = -\frac{i\left(\varepsilon_\parallel - 1\right)}{4\pi}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E}, \quad \boldsymbol{j}^\perp_{\text{int}} = \frac{i\left(\omega^2 - c^2k^2\right)}{4\pi\omega}(1-\eta)\boldsymbol{E}^\perp$$

продольный ток выражается через ρ_{int} . В любой среде $\rho_{int}, \boldsymbol{j}^\perp_{\text{int}}, \boldsymbol{E}$ - четко определенные физические величины, и коэффициенты пропорциональности между ними являются электромагнитными характеристиками (функциями отклика) данной среды. Таковыми в рассматриваемом случае выступают $\varepsilon_\parallel = \varepsilon$ и η, но не $\varepsilon_\perp$ и $\mu_\perp$, которые определены только в единой комбинации η.

11.4.

$\rho_{\rm tot} = \frac{1}{\varepsilon_\parallel}\rho_{\rm ext}\,, \rho_{\rm int} = \left(\frac{1}{\varepsilon_\parallel}-1\right)\rho_{\rm ext}\,, \boldsymbol{j}^\perp_{\rm tot} = \frac{1}{\eta}j^\perp_{\rm ext}\,, \boldsymbol{j}^\perp_{\rm int} = \left(\frac{1}{\eta}-1\right)\boldsymbol{j}^\perp_{\rm ext}\,.$

11.5.

$$\varphi(\boldsymbol{k},\omega) = G^\parallel(k,\omega)\rho_{\rm ext}\,(\boldsymbol{k},\omega), \quad \boldsymbol{A}(\boldsymbol{k},\omega) = \frac{1}{c}G^\perp(k,\omega)\boldsymbol{j}^\perp_{\rm ext}\,(\boldsymbol{k},\omega)$$
$$G^\parallel(k,\omega) = \frac{4\pi}{k^2\varepsilon(k,\omega)}, \quad G^\perp(k,\omega) = \frac{4\pi}{(k^2-\omega^2/c^2)\,\eta(k,\omega)}$$

Здесь $\eta(k,\omega)$ - введенная в задаче 11.3$^\bullet$ величина, характеризующая влияние среды на поперечное поле. Функции Грина нормированы так, чтобы в вакууме они давали результаты, полученные в разделе 5.1 (с учетом того, что там использовалась лоренцевская калибровка).

Отметим, что величины $\varepsilon = \varepsilon_l, \varepsilon_t, \mu$ при $\omega \neq 0$ комплексны, поэтому, в отличие от вакуума, в среде знаменатель поперечной функции Грина $G^\perp(k,\omega)$ как правило не обращается в нуль при действительных значениях ω и k.

11.7. Движение свободного электрона в слабом поле на временах порядка нескольких периодов волны описывается упрощенным уравнением Ньютона

$$m\dot{\boldsymbol{v}} = e\boldsymbol{E}_0e^{-i\omega t} + \frac{e}{c}\boldsymbol{v}_0\times\boldsymbol{B}_0e^{-i\omega t} \tag{1}$$

где в малом члене с магнитным полем учтена только начальная (тепловая) скорость v_0. Из этого уравнения находим:

$$\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{v}_0 + \frac{ie\boldsymbol{E}(t)}{m\omega} + \frac{ie\boldsymbol{v}_0\times\boldsymbol{B}(t)}{m\boldsymbol{c}\omega} \tag{2}$$

Макроскопический ток вычисляем по формуле $\boldsymbol{j}(t) = en\overline{\boldsymbol{v}}(t)$, где n - средняя концентрация электронов, $\bar{v}(t)$ - их средняя по ансамблю скорость. Но в отсутствие поля ток в веществе равен нулю, поэтому $\overline{\boldsymbol{v}}_0 = 0$ и $\boldsymbol{j}(t) = ien\boldsymbol{E}(t)/m\omega$. С помощью формулы (11.21) находим

$$\mathscr{D} = \boldsymbol{E} + \int\limits_{-\infty}^{t}\boldsymbol{j}dt' = \left(1-\frac{4\pi ne^2}{m\omega^2}\right)\boldsymbol{E} \tag{3}$$

откуда

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon\delta_{\alpha\beta}, \quad \varepsilon = \varepsilon_l = \varepsilon_t = 1-\frac{4\pi ne^2}{m\omega^2} \tag{4}$$

Пространственная дисперсия в рассматриваемых условиях не сказывается.

11.8. Используем результат задачи 11.5$^\bullet$:

$$\varphi(\boldsymbol{k},\omega) = \frac{4\pi}{k^2\varepsilon(k,\omega)}\rho_{ext}(\boldsymbol{k},\omega) \tag{1}$$

где $\varepsilon(k,\omega) = \varepsilon_l(k,\omega)$ - продольная диэлектрическая проницаемость, $\rho_{\rm ext}\,(\boldsymbol{k};\omega)$ - фурье-образ плотности заряда $\rho_{\rm ext}\,(\boldsymbol{r},t) = q\delta(\boldsymbol{r})$, создаваемого
неподвижным точечным зарядом q:

$$\rho_{ext}(\boldsymbol{k},\omega) = \int d^3r\int\limits_{-\infty}^{\infty}dtq\delta(\boldsymbol{r})\exp\{-i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)\} = 2\pi q\delta(\omega) \tag{2}$$

Таким образом, требуется значение $\varepsilon_l(k,0)$. Обращаясь к формулам примера 11.6, находим $Z(s)|_{s\to 0} \to 0$,

$$\varepsilon_l(k,0) = 1 + \frac{\omega_{0i}^2}{(kv_{Ti})^2} + \frac{\omega_{0e}^2}{(kv_{Te})^2} = 1 + \frac{1}{k^2 r_D^2} \tag{3}$$

где $r_D^2 = T/8\pi ne^2$ - квадрат радиуса Дебая, совпадающий с величиной $1/\kappa$ в задаче 7.24 в случае однозарядных ионов. Потенциал вычисляем по формуле
(4)

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \int \frac{4\pi}{k^2\varepsilon(k,\omega)} 2\pi q\delta(\omega) \exp\{-i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t)\} \frac{d^3k d\omega}{(2\pi)^4} =$$

$$= \frac{q}{i\pi r} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{k}{k^2 + r_D^2} e^{ikr} dk = \frac{q}{r} e^{-r/r_D}$$

Последнее интегрирование выполнено путем замыкания контура в верхней полуплоскости комплексного k дугой большого радиуса.

Характерно, что в этой задаче дебаевское экранирование заряда в плазме получено с использованием понятия пространственной дисперсии. Экранирование несколько иного характера имеет место й в случае движущихся зарядов (см. задачи из раздела 15.1).

В заключение приведем характерные значения дебаевских радиусов (в сантиметрах) для некоторых сред: металлы (плазма вырожденная, т. е. квантовая), 10^{-7}; полупроводники, 10^{-5}; плазма в термоядерных установках, $10^{-3} \div 10^{-4}$; ионосфера Земли, 10^{-1}; межпланетная плазма, 10^3; межзвездная плазма, $10^3 \div 10^5$.
11.9. $s \gg 1; Y(s)$ - экспоненциально мало; $X(s) = 1 + 1\cdot s^{-2} + +1\cdot 3\cdot s^{-4} + 1\cdot 3\cdot 5\cdot s^{-6} + \cdots$

$$\varepsilon_l \approx 1 - \frac{\omega_{0e}^2}{\omega^2}\left(1 + \frac{3k^2 v_{Te}^2}{\omega^2}\right) + i\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega\omega_{0e}^2}{k^3 v_{Te}^3} e^{-\omega^2/2k^2 v_{Te}^2}$$
$$\varepsilon_t \approx 1 - \frac{\omega_{0e}^2}{\omega^2}\left(1 + \frac{k^2 v_{Te}^2}{\omega^2}\right) + i\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega_{0e}^2}{\omega k v_{Te}} e^{-\omega^2/2k^2 v_{Te}^2}$$

так как $\omega_{0i}^2 = (m_e/m_i)\,\omega_{0e}^2 \ll \omega_{0e}^2, s_i \gg s_e$. Хотя мнимая часть экспоненциально мала, она придает диэлектрической проницаемости новое качество, так как приводит к диссипации электромагнитной энергии.

$$s \ll 1; \quad X(s) \approx s^2 - s^4/3 + \cdots$$
$$Y(s) \approx \sqrt{\pi/2}\,(s - s^3/2 + \cdots) \quad r_D = \sqrt{T/8\pi ne^2}$$
$$\varepsilon_l \approx 1 + \frac{1}{(kr_D)^2} + i\sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{1}{(kr_D)^2}\left(\frac{\omega}{kv_{Te}} + \frac{\omega}{kv_{Ti}}\right)$$
$$\varepsilon_t \approx 1 - \frac{1}{(kr_D)^2} + i\sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{1}{(kr_D)^2}\left(\frac{kv_{Te}}{\omega} + \frac{kv_{Ti}}{\omega}\right)$$

11.10.

$$\frac{1}{\mu(k,\omega)} = 1 + \sum \left(\frac{\omega_0}{ck}\right)^2 \left\{\left(1 - s^2\right) Z(s) + s^2\right\}, \quad s = \frac{\omega}{kv_T}$$
$$s \gg 1; \quad \frac{1}{\mu(k,\omega)} \approx 1$$

$s \ll 1$; $\frac{1}{\mu(k,\omega)} \approx 1 + \frac{2}{(kr_D)^2}\left(\frac{\omega}{ck}\right)^2 \approx 1 + \frac{2}{(kr_D)^2}\left(\frac{\omega}{kv_T}\right)^2 \frac{v_T^2}{c^2} \approx 1$.

11.11. В качестве невозмущенной функции распределения берем распределение Ферми

$$f_0(\epsilon) = \frac{2}{(2\pi\hbar)^3}\Theta\left(\epsilon_F - \epsilon\right) \tag{1}$$

где $\epsilon_F = \left(3\pi^2\hbar^3\right)^{2/3}/2m$ - энергия Ферми электронов. Тогда первая формула (4) примера 11.6 примет вид

$$\frac{\partial f_0}{\partial \boldsymbol{p}} = \boldsymbol{v}\frac{\partial f_0}{\partial \epsilon} = -\frac{2\boldsymbol{v}}{(2\pi\hbar)^3}\delta\left(\epsilon_F - \epsilon\right) \tag{2}$$

а вторая останется в прежнем виде. Последующие вычисления упрощаются ввиду наличия в (2) дельта-функции и приводят к следующим результатам:

$$\varepsilon_l(k,\omega) = 1 + \frac{3\omega_{0e}^2}{k^2 v_F^2}\left[1 - \frac{\omega}{2kv_F}\ln\frac{\omega + kv_F}{\omega - kv_F}\right] \tag{3}$$

$$\varepsilon_t(k,\omega) = 1 - \frac{3\omega_{0e}^2}{2k^2 v_F^2}\left\{1 + \frac{kv_F}{2\omega}\left[1 - \left(\frac{\omega}{kv_F}\right)^2\right]\ln\frac{\omega + kv_F}{\omega - kv_F}\right\} \tag{4}$$

При $\omega \gg kv_F$ имеем $\varepsilon_l \approx \varepsilon_t \approx 1 - \omega_{0e}^2/\omega^2$, что соответствует результатам задачи 11.7$^\star\bullet$. При $\omega \ll kv_F$ получаем $\varepsilon_l \approx 1 + 1/\left(kr_D\right)^2, \varepsilon_t \approx 1 - 1/\left(kr_D\right)^2$, где $r_D = v_F/\sqrt{3}\omega_{0e}$ - радиус экранирования в вырожденном электронном газе (см. задачу 7.27). Диэлектрические проницаемости (3), (4) имеют мнимые части в области параметров $0 < \omega/k < v_F$, когда некоторые частицы движутся в резонансе с волной и отбирают от нее энергию. Это возможно только в случае продольных волн.

11.12. Записываем уравнение движения осциллятора:

$$\ddot{\boldsymbol{r}} + \gamma\dot{\boldsymbol{r}} + \omega_0^2\boldsymbol{r} = \frac{e}{m}\boldsymbol{E}(t) \tag{1}$$

Действием магнитного поля волны на осциллятор пренебрегаем ввиду малости фактора $v/c \ll 1$. Неоднородность поля не учитываем из-за условия $r \ll \lambda$. Решение этого уравнения можно записать в интегральной форме

$$\boldsymbol{r}(t) = \frac{e}{m}\int\limits_{-\infty}^{\infty} G\left(t - t'\right)\boldsymbol{E}\left(t'\right)dt' \tag{2}$$

где $G\left(t - t'\right)$ - функция Грина, удовлетворяющая уравнению

$$\ddot{G} + \gamma\dot{G} + \omega_0^2 G = \delta\left(t - t'\right) \tag{3}$$

Ищем частное решение последнего уравнения, отвечающее дельтаобразной правой части, методом вариации постоянных, т. е. в форме

$$G(\tau) = A(\tau)e^{s_1\tau} + B(\tau)e^{s_2\tau}, \quad \tau = t - t' \tag{4}$$

где s_1, s_2 - корни характеристического уравнения $s^2 + \gamma s + \omega_0^2 = 0$:

$$s_{1,2} = \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}} - \frac{\gamma}{2} \tag{5}$$

Функции $A(\tau), B(\tau)$ определяются из системы уравнений

$$\dot{A}e^{s_1\tau} + \dot{B}e^{s_2\tau} = 0, \quad s_1\dot{A}e^{s_1\tau} + s_2\dot{B}e^{s_2\tau} = \delta(\tau) \tag{6}$$

Интегрируем эту систему в предположении, что при $\tau \to -\infty$ осциллятор покоился (адиабатическое включение поля). Получаем

$$B(\tau) = -A(\tau) = \frac{i\Theta(\tau)}{2\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2/4}} \tag{7}$$

где $\Theta(\tau)$ - ступенчатая функция (1.212). В итоге имеем

$$G(\tau) = \left(\omega_0^2 - \gamma^2/4\right)^{-1/2} \Theta(\tau) e^{-\gamma\tau/2} \sin\left(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2/4}\tau\right) \tag{8}$$

Дипольный момент осциллятора $\boldsymbol{p}(t) = e\boldsymbol{r}(t)$ с помощью (2) и (8) записываем в виде

$$\boldsymbol{p}(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f\left(t - t'\right) \boldsymbol{E}\left(t'\right) dt' = \int\limits_{-\infty}^{t} f\left(t - t'\right) \boldsymbol{E}\left(t'\right) dt' \tag{9}$$

где функция отклика

$$f\left(t - t'\right) = \frac{e^2}{m} G\left(t - t'\right) \tag{10}$$

Из-за наличия ступенчатой функции $\Theta(\tau)$ в (8) формула (9) выражает собой причинную связь дипольного момента осциллятора с внешним полем: $\boldsymbol{p}(t)$ определяется значениями поля в предшествующие моменты $t' \leqslant t$.

11.13. Вектор поляризации среды $\boldsymbol{P}(t) = n\boldsymbol{p}(t)$, вектор электрической индукции $\boldsymbol{D}(t) = \boldsymbol{E}(t) + 4\pi n\boldsymbol{p}(t)$, где $\boldsymbol{p}(t)$ дается равенствами (9), (10) из предыдущей задачи. Вычисляя $\varepsilon(\omega)$ по формуле (11.67) с использованием явного вида функции Грина (8), находим

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \frac{\omega_{0e}^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}, \quad \omega_{0e}^2 = \frac{4\pi n e^2}{m} \tag{1}$$

т.е.

$$\varepsilon'(\omega) = 1 + \frac{\omega_{0e}^2\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \gamma^2\omega^2}, \quad \varepsilon''(\omega) = \frac{\gamma\omega_{0e}^2\omega}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \gamma^2\omega^2} \tag{2}$$

Характер зависимости вещественной и мнимой частей ε от частоты показан на рис. 11.2. Мнимая часть ε'', определяющая поглощение электромагнитной энергии, заметно отличается от нуля только вблизи собственной частоты ω_0 колебаний осцилляторов среды. Она всюду положительна (при $\omega > 0$).

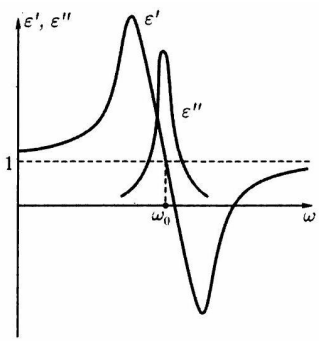


Рис. 11.2

В области частот, лежащих вблизи ω_0, ε' убывает с ростом частоты (аномальная дисперсия). В остальной области частот ε' растет с ростом частоты (нормальная дисперсия).

11.14. Длина волны поля велика по сравнению с размером атома, поэтому оператор взаимодействия атома с полем берем в форме (6.102), считая поле классическим объектом:

$$\widehat{V}(t) = -\widehat{\boldsymbol{d}} \cdot \boldsymbol{E}(t), \quad \widehat{\boldsymbol{d}} = e \sum_{a=1}^{Z} \widehat{\boldsymbol{r}}_a \tag{1}$$

где $\boldsymbol{E}(t)$ - вещественная напряженность электрического поля, $\widehat{\boldsymbol{d}}$ - оператор дипольного момента атома и суммирование производится по всем электронам. По теории возмущений находим поправку первого порядка $\Phi^{(1)}(\boldsymbol{r}_1, \ldots \boldsymbol{r}_Z, t)$ к волновой функции $\Phi^{(0)}(\boldsymbol{r}_1, \ldots \boldsymbol{r}_Z, t)$ невозмущенного атома, удовлетворяющей уравнению Шредингера

$$i\hbar \frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial t} = \widehat{\mathscr{H}_0} \Phi^{(0)} \tag{2}$$

Электроны в этой задаче можно рассматривать как частицы без спина, так как воздействие внешнего поля на спин мало и спиновое состояние атома не изменяется. Подставив $\Phi(r_1, \ldots \boldsymbol{r}_Z, t) = \Phi^{(0)}(\boldsymbol{r}_1, \ldots \boldsymbol{r}_Z, t) + +\Phi^{(1)}(r_1, \ldots \boldsymbol{r}_Z, t)$ в уравнение Шредингера (ДЗ.29) с гамильтонианом
$\widehat{\mathscr{H}} = \widehat{\mathscr{H}_0} + \widehat{V}(t)$, получим приближенное уравнение для определения $\Phi^{(1)}$:

$$i\hbar \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial t} - \widehat{\mathscr{H}_0} \Phi^{(1)} = \widehat{V}(t) \Phi^{(0)} \tag{3}$$

где слагаемое, билинейное по возмущению, опущено.

Используем процедуру адиабатического (медленного) включения поля при $t \to -\infty$:

$$\boldsymbol{E}(t) = \begin{cases} \boldsymbol{E}_0 e^{\alpha t} \cos \omega t, t \leqslant 0, \alpha > 0 \\ \boldsymbol{E}_0 \cos \omega t, \quad t \geqslant 0 \end{cases} \tag{4}$$

где малый параметр α нужно устремить к нулю после всех интегрирований по времени. Целью такого выбора включения поля является устранение переходного процесса установления стационарного состояния. В соответствии с этим выбором записываем начальные условия для уравнения (3):

$$\Phi\big|_{t \to -\infty} \to \varphi_0(\boldsymbol{r}_1, \ldots \boldsymbol{r}_Z)\, e^{-iE_0 t/\hbar}, \quad \Phi^{(1)}\big|_{t \to -\infty} \to 0 \tag{5}$$

Здесь и в дальнейшем через φ_s обозначены волновые функции стационарных состояний невозмущенного атома; $s = 0$ соответствует основному состоянию.

Ищем решение уравнения (3) в виде разложения по собственным функциям невозмущенной задачи:

$$\Phi^{(1)} = \sum_s c_s(t) \varphi_s(\boldsymbol{r}_1, \ldots \boldsymbol{r}_Z)\, e^{-iE_s t/\hbar} \tag{6}$$

Пользуясь ортонормированностью системы функций φ_s, получаем из (3)

$$\frac{dc_s}{dt} = -\frac{1}{i\hbar} (\boldsymbol{d}_{s0} \cdot \boldsymbol{E}(t))\, e^{i\omega_{s0} t} \tag{7}$$

где $\boldsymbol{d}_{s0}$ - матричный элемент дипольного момента атома. Заметим, что $d_{00} = 0$ ввиду того, что волновые функции стационарных состояний атома обладают определенной четностью.

Выполнив интегрирование по времени в (7) с использованием (4) и (5), получим

$$c_s(t) = \frac{\boldsymbol{d}_{s0} \cdot \boldsymbol{E}_0}{2\hbar} \left(\frac{e^{i(\omega_{s0}+\omega)t}}{\omega_{s0}+\omega} + \frac{e^{i(\omega_{s0}-\omega)t}}{\omega_{s0}-\omega} \right), \quad t - \text{ конечно.} \tag{8}$$

Этот результат можно использовать только при нерезонансных частотах, когда знаменатели в последнем выражении не малы. Среднее квантовомеханическое значение индуцированного дипольного момента атома вычисляем по формуле (ДЗ.15):

$$\boldsymbol{d}(t) = \int \Phi^* \widehat{\boldsymbol{d}} \Phi dq = \int \left(\Phi^{(0)*} \widehat{\boldsymbol{d}} \Phi^{(1)} + \Phi^{(1)*} \widehat{\boldsymbol{d}}^{(0)} \right) dq \tag{9}$$

где $dq = d^3r_1 \cdots d^3r_Z$, отброшена квадратичная поправка и использовано соотношение $\boldsymbol{d}_{00} = 0$. С помощью (6), (8), (9) находим

$$\begin{aligned} \boldsymbol{d}(t) = & \frac{1}{2\hbar} \sum_s \left\{ \left(\frac{e^{i\omega t}}{\omega_{s0}+\omega} + \frac{e^{-i\omega t}}{\omega_{s0}-\omega} \right) (\boldsymbol{d}_{s0} \cdot \boldsymbol{E}_0) \, \boldsymbol{d}_{0s} + \right. \\ & \left. + \left(\frac{e^{-i\omega t}}{\omega_{s0}+\omega} + \frac{e^{i\omega t}}{\omega_{s0}-\omega} \right) (\boldsymbol{d}_{s0} \cdot \boldsymbol{E}_0)^* \, \boldsymbol{d}_{s0} \right\} \end{aligned} \tag{10}$$

Из соображений симметрии ясно, что макроскопический вектор поляризации направлен вдоль вектора поля $\boldsymbol{E}_0$, который в нашем случае действителен. Поэтому достаточно вычислить проекцию вектора $\boldsymbol{d}$ на направление поля. Совмещая это направление с осью Ox и пользуясь эрмитовостью матрицы $(d_x)_{0s} = (d_x)^*_{s0}$, находим из общей формулы (10)

$$d_x = \beta(\omega) E_0, \qquad \text{где} \qquad \beta(\omega) = \sum_s \frac{2\omega_{s0} \left| (d_x)_{s0} \right|^2}{\hbar \left(\omega_{s0}^2 - \omega^2 \right)} \tag{11}$$

• поляризуемость атома. Отсюда получаем диэлектрическую проницаемость:

$$\varepsilon(\omega) = 1 + 4\pi N \beta(\omega) = 1 + \frac{4\pi N}{\hbar} \sum_s \frac{2\omega_{s0} \left| (d_x)_{s0} \right|^2}{\hbar \left(\omega_{s0}^2 - \omega^2 \right)} \tag{12}$$

Сравним (12) с квазиклассической теорией (формула (1) задачи 11.13*). Осцилляторная модель требует следующих модификаций:

а) введения бесконечного числа осцилляторов с разными собственными частотами, $\omega_0 \to \omega_{s0}$;

б) суммирования по всем таким осцилляторам;

в) что касается затухания, то вдали от резонансов можно положить $\gamma = 0$, если $\gamma \ll \omega_0$.

Введя отношение $f_s = n_s/n$ - долю электронов, принадлежащим осцилляторам с номером s, придадим квазиклассической формуле (1) из задачи 11.13• вид квантовой формулы (12),

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \frac{4\pi N e^2}{m} \sum_s \frac{f_s}{\omega_{s0}^2 - \omega^2} \tag{13}$$

если величины f_s определить через матричные элементы дипольного момента:

$$f_s = \frac{2m\omega_{s0}}{e^2\hbar}\left|(d_x)_{s0}\right|^2, \quad (d_x)_{s0} = e\sum_{a=1}^{Z} x^a_{s0} \tag{14}$$

Величины f_s называются силами осцилляторов, их определение уже было приведено в задаче 6.61. В указанной задаче было получено, что силы осцилляторов удовлетворяют условию $\sum\limits_s f_s = Z$. Поэтому при $\omega \gg \omega_{s0}$ квантовые формулы (12), (13) принимают универсальный вид, найденный в задаче 11.7$^{\star\bullet}$, причем среднее число электронов в единице объема $n = NZ$.

Диэлектрическая проницаемость, найденная в рассмотренной задаче, неприменима вблизи частот спектральных линий.

11.15. Вблизи резонанса, $\omega \approx \omega_{s0}$, вероятность возбуждения состояния s внешним полем возрастает неограниченно (см. формулу (8) предыдущей задачи). Это связано с поглощением атомом квантов с энергией $\hbar\omega$ от внешнего поля. Но в результате перехода атомов в возбужденное состояние будет происходить и обратный процесс спонтанного испускания квантов возбужденными атомами, в результате чего процессы поглощения и испускания уравновесятся и амплитуда вероятности состояния s примет некоторое стационарное значение. Учтем этот эффект в модели двухуровневого атома, уже рассмотренного в примере 6.11 .

Кроме взаимодействия с внешним полем $\boldsymbol{E}(t)$, включим взаимодействие атома с квантованным электромагнитным полем. Оператор этого взаимодействия (6.102) обозначим здесь через $\widehat{V}'$:

$$\widehat{V}' = -\widehat{\boldsymbol{d}}\cdot\widehat{\boldsymbol{E}} \tag{1}$$

Как и в примере 6.11, будем учитывать только вакуумные и однофотонные состояния квантованного поля. Вектор состояния, описывающий систему атом во внешнем поле + квантованное поле, можно записать по аналогии с формулой (1) примера 6.11 в виде

$$|\Phi(t)\rangle = c_0(t)\varphi_0|0\rangle e^{-iE_0t/\hbar} + \sum_k c_k(t)\varphi_0\,|1_k\rangle\, e^{-i(\omega_k+E_0/\hbar)t} + c_s(t)\varphi_s|0\rangle e^{-iE_st/\hbar} \tag{2}$$

где $\hbar\omega_k$ - энергия испущенного атомом фотона, $k = (\boldsymbol{k}, \sigma)$ - его квантовые числа, $c_s(t)$ - амплитуды однофотонных состояний. Сумма по k фактически сводится к интегрированию по частотам и направлениям вылета фотона и суммированию по поляризациям. Сумма по s в (2) отсутствует, так как рассматривается двухуровневая система.

Подставив разложение (2) в уравнение Шредингера (Д3.29), получим систему уравнений для коэффициентов:

$$\frac{dc_k}{dt} = -\frac{i}{\hbar}\langle 01_k|\,\hat{V}'|s0\rangle e^{i(\omega_k-\omega_{s0})t}c_s, \quad \omega_{s0} = \frac{1}{\hbar}(E_s - E_0) \tag{3}$$

$$\frac{dc_0}{dt} = -\frac{i}{\hbar}\langle 00|\widehat{V}|s0\rangle e^{-i\omega_s t}c_s \tag{3a}$$

$$\frac{dc_s}{dt} = -\frac{i}{\hbar}\langle s0|\widehat{V}|00\rangle e^{i\omega_{s0}t}c_0 - \frac{i}{\hbar}\sum_k\langle s0|\widehat{V}'\,|01_k\rangle\, e^{-i(\omega_k-\omega_{s0})t}c_k \tag{4}$$

При получении этой системы уравнений использованы соотношения $\boldsymbol{d}_{ss} = \boldsymbol{d}_{00} = 0$ и $\cdot\,\langle 0|1_k\rangle = 0$. Поскольку мы учитываем спонтанные переходы с возбужденного уровня, то переходный процесс будет затухать и в данном случае нет необходимости в адиабатическом включении внешнего поля. Считаем, что оно включается при $t = 0$ и начальные условия имеют вид $c_s(0) = c_k(0) = 0, c_0(0) = 1$.

Записываем уравнения (3а), (3) в интегральной форме

$$c_0(t) = 1 - \frac{i}{\hbar}\int\limits_0^t \langle 00|\widehat{V}|s0\rangle e^{-i\omega_{s0}t'} c_s\left(t'\right) dt'$$

$$c_k(t) = -\frac{i}{\hbar}\left\langle 01_k\right| \widehat{V}'|s0\rangle \int\limits_0^t e^{i(\omega_k-\omega_{s0})t'} c_s\left(t'\right) dt'$$

Из первого уравнения следует, что отличие $c_0(t)$ от единицы имеет второй порядок малости по возмущению, которым мы пренебрежем и положим в дальнейшем $c_0(t) = 1$. Второе уравнение путем интегрирования по частям приводим к виду

$$c_k(t) = -\frac{1}{\hbar}\left\langle 01_k\right| \widehat{V}'|s0\rangle e^{i(\omega_k-\omega_{s0})t} \int\limits_0^t \frac{1-e^{i(\omega_k-\omega_{so})(t'-t)}}{\omega_k-\omega_{s0}} \frac{dc_s}{dt'} dt' \tag{5}$$

Подстановка полученного результата в уравнение (4) позволяет получить неоднородное интегродифференциальное уравнение для $c_s(t)$:

$$\frac{dc_s}{dt} = -\frac{i}{\hbar}\langle s0|\widehat{V}|00\rangle e^{i\omega_{s0}t} + \frac{i}{\hbar^2}\sum_k \left|\left\langle s0|\widehat{V}'\right| 01_k\right\rangle|^2 \int\limits_0^t \frac{1-e^{i(\omega_{s0}-\omega_k)(t-t')}}{\omega_k-\omega_{s0}} \frac{dc_s}{dt'} dt' \tag{6}$$

Рассматриваем достаточно большой интервал времени, в течение которого накачка атомов внешним полем и их спонтанное излучение придут в стационарное состояние. При больших t интервал $t-t'$ в показателе экспоненты под интегралом тоже будет большим. Воспользуемся формулами (1.216), (1.224a) и представим подынтегральное выражение в виде

$$\left.\frac{1-e^{i(\omega_{s0}-\omega_k)(t-t')}}{\omega_k-\omega_{s0}}\right|_{t-t'\to\infty} \to \frac{\mathscr{P}}{\omega_k-\omega_{s0}} + i\pi\delta\left(\omega_k-\omega_{s0}\right). \tag{7}$$

После подстановки правой части этого равенства в (6) первое слагаемое (главное значение) будет описывать малый радиационный сдвиг частоты перехода (лэмбовский сдвиг), которым мы в дальнейшем пренебрежем. Слагаемое с дельта-функцией представляет собой половину постоянной затухания, вызванной спонтанным излучением (см. формулу (9) из примера 6.11):

$$\frac{\gamma_s}{2} = \frac{\pi}{\hbar^2}\sum_\sigma \int \left|\left\langle s0|\widehat{V}'\right| 01_k\right\rangle|^2 \delta\left(\omega_k-\omega_{s0}\right) \frac{\mathcal{V}\omega_k^2 d\omega_k d\Omega}{(2\pi c)^3} \tag{8}$$

Здесь суммирование по дискретным модам заменено интегрированием по частотам кванта и направлениям его движения, осталась лишь сумма по поляризациям. Первое слагаемое в правой части равенства (6) тоже упростим, оставив в нем лишь главное (резонансное) слагаемое. В итоге уравнение (6) примет упрощенную форму

$$\frac{dc_s}{dt} + \frac{\gamma_s}{2}c_s = -\frac{i}{2\hbar}\boldsymbol{d}_{s0}\cdot\boldsymbol{E}_0 e^{i(\omega_{s0}-\omega)t} \tag{9}$$

Решение полученного уравнения при $t \gg \gamma_s^{-1}$ имеет вид

$$c_s(t) = \boldsymbol{d}_{s0}\cdot\boldsymbol{E}_0 \frac{e^{i(\omega_{s0}-\omega)t}}{2\hbar\left(\omega_{s0}-\omega-i\gamma_s/2\right)} \tag{10}$$

По сравнению с формулой (8) предыдущей задачи, здесь резонансное значение амплитуды возбуждения атома имеет конечную величину. Пользуясь
формулой (10), находим значение диэлектрической проницаемости при частоте, близкой к одному из резонансов:

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \frac{4\pi N}{\hbar} \frac{|(d_x)_{s0}|^2}{\omega_{s0} - \omega - i\gamma_s/2} \tag{11}$$

Эффект радиационного затухания делает диэлектрическую проницаемость комплексной величиной. При произвольных частотах (и при $\gamma_s \ll \omega_{s0}$) можно пользоваться приближенной интерполяционной формулой вида

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \frac{4\pi N e^2}{m} \sum_s \frac{f_s}{\omega_{s0}^2 - \omega^2 - i\gamma_s \omega} \tag{12}$$

Вдали от резонанса она переходит в квантовую формулу (13) предыдущей задачи, а вблизи одного из резонансов дает результат, близкий к (11).

11.16. $\varepsilon = 1 + 4\pi N a^3, \quad \mu = 1 - 2\pi N a^3 < 1.$

Такой диэлектрик является диамагнитным. Проницаемости ε и μ не зависят от частоты вследствие предположения об идеальной проводимости сфер.

Для того чтобы искусственный диэлектрик можно было рассматривать как сплошную среду, должны выполняться условия $\lambda \gg l, \lambda \gg a$, где λ - длина волны, l - среднее расстояние между сферами. Пренебрегать отличием действующего поля от среднего можно лишь при малой поляризуемости среды (т. е. при $4\pi N a^3 \ll 1$).

11.17. Уравнение движения электрона проводимости запишется в виде

$$m\ddot{\boldsymbol{r}} + \eta\dot{\boldsymbol{r}} = e\boldsymbol{E}_0 e^{-i\omega t} \tag{1}$$

Его частное решение, соответствующее вынужденным колебаниям, имеет вид

$$\boldsymbol{r} = -\frac{e\boldsymbol{E}_0 e^{-i\omega t}}{m\left(\omega^2 + i\gamma\omega\right)} \tag{2}$$

где $\gamma = \eta/m$.

Дипольный момент единицы объема получим умножением $\boldsymbol{r}$ на заряд электрона e и на число частиц в единице объема N, после чего определяются поляризуемость среды $\alpha(\omega)$ и диэлектрическая проницаемость $\varepsilon(\omega)$, создаваемые электронами проводимости:

$$\varepsilon(\omega) = 1 + 4\pi\alpha(\omega) = 1 - \frac{\omega_{0e}^2}{\omega^2 + i\gamma\omega}, \quad \omega_{0e}^2 = \frac{4\pi e^2 N}{m} \tag{3}$$

С помощью уравнения (1) и закона Ома для постоянного тока найдем связь между удельным сопротивлением ρ постоянному току и коэффициентом η:

$$\rho \equiv \frac{1}{\kappa} = \frac{\eta}{Ne^2} \tag{4}$$

Записав (3) в виде

$$\varepsilon(\omega) = 1 + i\frac{4\pi}{\omega} \frac{Ne^2}{m(\gamma - i\omega)} \tag{5}$$

находим зависимость электропроводности от частоты:

$$\kappa(\omega) = \frac{Ne^2}{m(\gamma - i\omega)} \tag{6}$$

Для учета связанных электронов следует в правую часть (3) добавить слагаемое $4\pi\alpha_i(\omega)$ с ионной поляризуемостью:

$$\varepsilon(\omega) = 1 + 4\pi\alpha_i(\omega) + i\frac{4\pi\kappa(\omega)}{\omega} \tag{7}$$

При достаточно низких частотах дисперсией ионной восприимчивости можно пренебречь и записать (7) в виде

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 + i\frac{4\pi\kappa(\omega)}{\omega}, \quad \text{где} \quad \varepsilon_0 = 1 + 4\pi\alpha_i(0) \tag{8}$$

Оценим порядок величины $\gamma = \eta/m$ для меди (проводимость в статическом случае $\kappa = 5 \cdot 10^{17}\text{с}^{-1}$). Из формулы (4) следует:

$$\gamma = \frac{Ne^2}{\kappa m} = \frac{N_0 e^2 d}{\dot{\kappa} m A}$$

где $N_0 \approx 6 \cdot 10^{23}$ моль $^{-1}$ - число Авогадро, $A \approx 63,5$ г/моль - атомный вес и $d \approx 8,9$ г/см ^{3} - плотность меди. Оценка дает $\gamma \approx 10^{+14}\text{с}^{-1}$; для сравнения укажем, что видимой части спектра соответствуют частоты $\approx 10^{15}\text{с}^{-1}$.

Таким образом, в этом случае можно считать, что проводимость сохраняет значение, которое она имеет в стационарном случае, вплоть до частот, лежащих в инфракрасной области спектра. Однако нужно иметь в виду, что при высоких частотах, когда длина свободного пробега электрона становится сравнимой с глубиной проникновения поля в металл, начинают
сказываться эффекты пространственной неоднородности поля (аномальный скин-эффект) и статическая величина κ теряет смысл.

Для полупроводника (германий) имеем $\kappa \approx 2 \times 10^{10}\text{с}^{-1}, \gamma \approx 10^{12} \div 10^{13}\text{с}^{-1}, \varepsilon_0 = 16$

Полученные в этой задаче результаты в ограниченной области частот применимы к металлу, а также к полупроводнику и к ионизованному газу (плазме), если движением положительных ионов можно пренебречь. Вычисление диэлектрической проницаемости плазмы с учетом движения положительных ионов см. ниже в задаче 11.25*.

11.18. Молекулы диэлектрика не обладают сферической симметрией, поэтому внешнее поле $\boldsymbol{E}_0$ частично ориентирует их, и диэлектрик в целом становится анизотропным. При этом ориентирующим действием переменного поля, в силу условия $\mathscr{E} \ll E_0$, можно пренебречь. Поскольку причиной анизотропии является внешнее электрическое поле $\boldsymbol{E}_0$, одна из главных осей тензора диэлектрической проницаемости будет совпадать с его направлением, остальные две главные оси будут перпендикулярны $\boldsymbol{E}_0$.

Обозначим компоненты поляризуемости молекулы в этих осях через β'_{ik} (значения $i, k = 1$ соответствуют оси, параллельной $\boldsymbol{E}_0$). Компоненты β'_{ik} выразятся через главные значения $\beta^{(i)}$ по обычной формуле:

$$\beta'_{ik} = \alpha_{il}\alpha_{km}\beta_{lm} = (\beta - \beta')\,\alpha_{i1}\alpha_{k1} + \beta'\delta_{ik}$$

где α_{il} - косинусы углов между осями симметрии молекулы и главными осями тензора диэлектрической проницаемости (использовано соотношение $\alpha_{il}\alpha_{kl} = \delta_{ik}$, вытекающее из ортогональности матрицы α_{ik}). Чтобы подсчитать тензор диэлектрической восприимчивости для единицы объема диэлектрика, нужно найти с помощью формулы Больцмана статистические средние величин β'_{ik}, т. е. усреднить произведение $\alpha_{i1}\alpha_{k1}$.

Если обозначить полярные углы оси симметрии молекулы в штрихованной системе через ϑ, φ, то величины α_{1i} запишутся так:

$$\alpha_{11} = \cos\vartheta, \quad \alpha_{12} = \sin\vartheta\cos\varphi, \quad \alpha_{13} = \sin\vartheta\sin\varphi$$

Проводя усреднение с помощью формулы Больцмана (7.30), получим с точностью до членов, линейных по $a = (\beta_0 - \beta_0')\, E_0^2/2T$:

$$\overline{\alpha_{11}^2} = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{4}{15}a\right)$$
$$\overline{\alpha_{12}^2} = \overline{\alpha_{13}^2} = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{2}{15}a\right)$$
$$\overline{\alpha_{i1}\alpha_{k1}} = 0 \quad \text{при} \quad \text{п}$$

(β_0 и β_0' - статические значения тензора поляризуемости молекулы). Отсюда

$$\overline{\beta_{11}'} = \frac{1}{3}\,(\beta - \beta')\left(1 + \frac{4}{15}a\right) + \beta'$$
$$\overline{\beta_{22}'} = \overline{\beta_{33}'} = \frac{1}{3}\,(\beta - \beta')\left(1 - \frac{2}{15}a\right) + \beta'$$

Пренебрегая отличием действующего на молекулу поля от среднего, получим главные значения тензора диэлектрической проницаемости:

$$\varepsilon^{(1)} = 1 + 4\pi N\overline{\beta_{11}'}, \quad \varepsilon^{(2)} = \varepsilon^{(3)} = 1 + 4\pi N\overline{\beta_{22}'}$$

Этот результат показывает, что в сильном постоянном электрическом поле диэлектрик становится анизотропным по отношению к высокочастотным (например, световым) колебаниям. Возникновение анизотропии под действием постоянного электрического поля носит название эффекта Керра. Инерционность этого эффекта очень мала: время установления или исчезновения анизотропии - порядка 10^{-10} с. (Оно определяется временем установления статистического равновесия в диэлектрике.) Явление Керра широко используется в технике для быстрой модуляции силы света.

11.19. Считая параметр $pE_0/T = a$ малым, получим с точностью до членов порядка a^2:

$$\overline{\beta_{11}'} = \frac{1}{3}\,(\beta - \beta')\left(1 + \frac{2}{15}a^2\right) + \beta',$$
$$\overline{\beta_{22}'} = \overline{\beta_{33}'} = \frac{1}{3}\,(\beta - \beta')\left(1 - \frac{1}{15}a^2\right) + \beta',$$
$$\varepsilon^{(1)} = 1 + 4\pi N\overline{\beta_{11}'}, \quad \varepsilon^{(2)} = \varepsilon^{(3)} = 1 + 4\pi N\overline{\beta_{22}'}.$$

Обозначения те же, что и в предыдущей задаче.

11.20. Пусть амплитуда поля $\mathscr{E}$ увеличится на $d\mathscr{E} = (d\mathscr{E}_x, d\mathscr{E}_y, d\mathscr{E}_z)$. При этом над молекулой будет совершена работа

$$dA = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\,(\boldsymbol{p}\cdot d\mathscr{E}^*) = \frac{1}{4}\,(\boldsymbol{p}\cdot d\mathscr{E}^* + \boldsymbol{p}^*\cdot d\mathscr{E}) \tag{1}$$

где $p_i = \beta_{ik}E_k$ - компонента дипольного момента системы. Работа усреднена по периоду изменения поля. Поскольку поглощение энергии отсутствует, эта работа целиком идет на увеличение средней потенциальной энергии молекулы во внешнем поле:

$$dA = d\bar{W}$$

Поэтому выражение dA должно быть полным дифференциалом некоторой функции амплитуды поля - энергии системы. Перепишем $d\bar{W}$ в виде

$$d\bar{W} = \frac{1}{4}\sum_{i,k}\left(\beta_{ik}\mathscr{E}_k d\mathscr{E}_i^* + \beta_{ki}^*\mathscr{E}_i^* d\mathscr{E}_k\right) \tag{2}$$

Видно, что эта величина будет представлять собою полный дифференциал только в том случае, если $\beta_{ik} = \beta^*_{ki}$; тогда

$$d\bar{W} = \frac{1}{4}\sum_{i,k}\beta_{ik}\left(\mathscr{E}_k d\mathscr{E}_i^* + \mathscr{E}_i^* d\mathscr{E}_k\right) = \frac{1}{4}\sum_{i,k}\beta_{ik} d\left(\mathscr{E}_i^*\mathscr{E}_k\right) = d\left(\frac{1}{4}\boldsymbol{p}\cdot\mathscr{E}^*\right)$$

или

$$\bar{W} = \frac{1}{4}\boldsymbol{p}\cdot\mathscr{E}^*$$

Точно так же можно доказать эрмитовость тензора магнитной поляризуемости для системы, внутри которой не происходит диссипации энергии.

11.22. Уравнение движения атомного электрона, связанного с ядром упругой силой, запишется в виде

$$\ddot{\boldsymbol{r}} + \omega_0^2\boldsymbol{r} = \frac{e}{m}\left[\boldsymbol{E}_0 e^{-i\omega t} + \left(\frac{\boldsymbol{v}}{c}\times\boldsymbol{H}_0\right)\right] \tag{1}$$

где ω_0 - частота собственных колебаний. Решая его методом последовательных приближений, получим в линейном по H_0 приближении:

$$\boldsymbol{r} = \frac{e\boldsymbol{E}}{m\left(\omega_0^2-\omega^2\right)} - i\frac{e\omega}{m^2c\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2}\left(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}_0\right) \tag{2}$$

Чтобы получить тензор поляризуемости атома, используем запись векторного произведения с помощью антисимметричного тензора e_{ikl}. Это даст

$$\beta_{ik} = \frac{e^2}{m\left(\omega_0^2-\omega^2\right)}\delta_{ik} - i\frac{e^2\omega H_{0l}}{m^2c\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2}e_{ikl} \tag{3}$$

В соответствии с общим положением, доказанным в задаче 11.20*, этот тензор является эрмитовым. Вектор гирации (см. задачу 11.21) в данном случае имеет вид

$$\boldsymbol{g} = -\frac{e^2\omega}{m^2c\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2}\boldsymbol{H}_0 = -\frac{2e\omega}{m\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2}\boldsymbol{\omega}_L \tag{4}$$

где $\boldsymbol{\omega}_L = e\boldsymbol{H}_0/2mc$ - ларморова частота.

11.23.

$$\varepsilon_{ik} = \begin{pmatrix} \left(\varepsilon^+ + \varepsilon^-\right)/2 & \left(\varepsilon^+ - \varepsilon^-\right)/2 & 0 \\ -\left(\varepsilon^+ - \varepsilon^-\right)/2 & \left(\varepsilon^+ + \varepsilon^-\right)/2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon^0 \end{pmatrix}$$

где

$$\varepsilon^\pm = 1 - \frac{\omega_{0e}^2}{\omega\left(\omega\pm 2\omega_L\right)-\omega_0^2}, \quad \varepsilon^0 = 1 - \frac{\omega_{0e}^2}{\omega^2-\omega_0^2}, \quad \omega_{0e}^2 = \frac{4\pi e^2 N}{m}$$

Вектор гирации равен по величине

$$g = \frac{1}{2}\left(\varepsilon^+ - \varepsilon^-\right)$$

и направлен по оси z.

Результат предыдущей задачи получается из найденного точного решения при выполнении условия $2\omega_L\omega \ll |\omega_0^2 - \omega^2|$.

11.24. Тензор ε_{ik} имеет такой же вид, как и в предыдущей задаче. Но его компоненты $\varepsilon^\pm$и ε^0 определяются следующими выражениями:

$$\varepsilon^{\pm} = 1 - \frac{\omega_{0e}^2}{\omega^2 + \omega\left(i\gamma \pm 2\omega_L\right)}$$
$$\varepsilon^{0} = 1 - \frac{\omega_{0e}^2}{\omega^2 + i\omega\gamma}$$
$$\omega_{0e}^2 = \frac{4\pi e^2 N}{m}, \quad \gamma = \frac{\eta}{m}, \quad \omega_L = -\frac{eB}{2mc} > 0$$

Из-за наличия «трения» ($\eta \geqslant 0$) в электронном газе происходит диссипация энергии, и тензор ε_{ik} неэрмитов.

11.25. Обозначим массу, скорость и заряд электрона через $m, \dot{r}, -e$, а те же величины, относящиеся к иону, через $M, \dot{\boldsymbol{R}}, +e$. Тогда получіим следующую систему уравнений движения:

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{\boldsymbol{r}} &= -e\boldsymbol{E}_0 e^{-i\omega t} - \tfrac{e}{c}(\dot{\boldsymbol{r}} \times \boldsymbol{B}) - m\gamma(\dot{\boldsymbol{r}} - \dot{\boldsymbol{R}}) \\ M\ddot{\boldsymbol{R}} &= e\boldsymbol{E}_0 e^{-i\omega t} + \tfrac{e}{c}(\dot{\boldsymbol{R}} \times \boldsymbol{B}) - m\gamma(\dot{\boldsymbol{R}} - \dot{\boldsymbol{r}}) \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Здесь $\boldsymbol{B}$ - постоянное и однородное магнитное поле, $m\gamma$ - коэффициент «трения»; сила трения пропорциональна относительной скорости электронов и ионов, т. е. разностям $(\dot{\boldsymbol{r}} - \dot{\boldsymbol{R}})$ и $(\dot{\boldsymbol{R}} - \dot{\boldsymbol{r}})$ для электронов и ионов
соответственно. Электрическое поле $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 e^{-i\omega t}$ зависит от времени по гармоническому закону.

Ищем решение системы (1) в виде

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_0 e^{-i\omega t}, \quad \boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_0 e^{-i\omega t} \tag{2}$$

Выберем направление $\boldsymbol{B}$ за ось Oz и введем циклические компоненты векторов $\boldsymbol{r}_0$ и $\boldsymbol{R}_0$ по формулам

$$r_{0\pm1} = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\left(r_{0x} \pm i r_{0y}\right), \quad R_{0\pm1} = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\left(R_{0x} \pm i R_{0y}\right)$$

Подставим (2) в (1) и сложим получившиеся уравнения:

$$-i\omega\left(m\boldsymbol{r}_0 + M\boldsymbol{R}_0\right) = \frac{e}{c}\left[\left(\boldsymbol{R}_0 - \boldsymbol{r}_0\right) \times \boldsymbol{B}\right]$$

Левую часть последнего равенства можно записать в виде

$$-i\omega\left[(M+m)\boldsymbol{R}_0 + m\left(\boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{R}_0\right)\right]$$

Пренебрегая m по сравнению с M, получим

$$\omega R_{0\pm1} = \left(\pm\Omega_B + \omega\frac{m}{M}\right) s_{\pm1} \tag{3}$$

где

$$\Omega_B = \frac{eB}{Mc}, \quad \boldsymbol{s} = \boldsymbol{R}_0 - \boldsymbol{r}_0$$

Затем поделим первое из уравнений (1) на m, второе на M и вычтем их друг из друга. Пренебрежем всеми членами, содержащими M в знаменателе. Обозначив $\omega_B = eB/mc$ и используя (2), получим:

$$\left.\begin{aligned} \left(-i\omega + \gamma \mp i\omega_B\right) s_{\pm1} \mp i\omega_B R_{0\pm1} &= \tfrac{e}{m} E_{0\pm1} \\ -\left(\omega^2 + i\omega\gamma\right) s_z &= \tfrac{eE_{0z}}{m}. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Из уравнений (3) и (4) находим s.
Вектор поляризации $\boldsymbol{P}$ вычисляется по формуле $\boldsymbol{P} = Nse^{-i\omega t}$, где N - число ионов (равное числу электронов) в единице объема.

Компоненты тензора диэлектрической проницаемости запишутся в виде

$$\varepsilon^{\pm} = 1 - \frac{\omega_{0e}^2}{\omega\left(\omega + i\gamma \pm \omega_B - \omega_B\Omega_B/\omega\right.}, \quad \varepsilon^{(z)} = 1 - \frac{\omega_{0e}^2}{\omega(\omega + i\gamma)} \tag{5}$$

Компонента $\varepsilon^{(z)}$ имеет такой же вид, как скалярная диэлектрическая проницаемость в отсутствие магнитного поля, полученная в задаче 11.17*; она неограниченно возрастает при $\omega \to 0$. Компоненты $\varepsilon^{\pm}$при учете движения ионов содержат в знаменателе лишний член $\omega_B\Omega_B$; им можно пренебречь при $\Omega_B/\omega \ll 1$, т. е. при больших частотах ω. Однако при малых частотах этот член становится существенным; при $\omega \to 0$ он приводит к тому, что компоненты $\varepsilon^{\pm}$остаются конечными: $\varepsilon^{\pm} = 1 + \omega_0^2/\omega_B\Omega_B$. Благодаря этому в плазме могут существовать волны весьма малой частоты (магнитогидродинамические волны). Эти волны уже рассматривались в гидродинамическом приближении в разделе 10.3. На основе полученного тензора (5) распространение этих же волн рассматривается ниже в задаче 12.51 .

11.26. В системе координат, ось Ox_3 которой совпадает с выделенным направлением, тензор T_{ik} должен иметь вид

$$T_{ik} = \begin{pmatrix} T & T_a & 0 \\ -T_a & T & 0 \\ 0 & 0 & T_{\|} \end{pmatrix}$$

Это согласуется с результатами, полученными в задачах 11.23 *, 11.24 и др.

11.30.

$$\varepsilon(\omega) = 1 + (\varepsilon_0 - 1)/(1 - i\omega\tau)$$

где ε_0 - статическое значение диэлектрической проницаемости. Полученное выражение называется формулой Дебая для полярного диэлектрика. Модель, позволяющая вычислить постоянную релаксации τ, рассмотрена в учебнике Памятных и Турова (2000). Статическая диэлектрическая проницаемость газообразного диэлектрика с жесткими диполями вычислена в примере 7.3 .

11.31.

$$\varepsilon'(\omega) = 1 + (\varepsilon_0 - 1) / \left(1 + \omega^2\tau^2\right)$$

11.33.

$$\varepsilon(\omega) = 1 + i\frac{4\pi\kappa_0}{\omega} - \frac{i}{\pi}\mathscr{P}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\varepsilon(z) - 1}{z - \omega}dz$$

где κ_0 - статическая электропроводность.

11.34.

$$\kappa(\omega) = -\frac{i}{\pi}\mathscr{P}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\kappa(z)}{z - \omega}dz = -\frac{i}{\pi}\mathscr{P}\int\limits_{0}^{\infty}[\kappa(\omega + z) - \kappa(\omega - z)]\frac{dz}{z}$$

11.35. Использовав условие причинности в обычной (нерелятивистской) форме $t - t' \geqslant 0$, запишем фурье-образ причинной функции отклика в форме, аналогичной (11.36):

$$R(\boldsymbol{k},\omega)=\int\limits_0^\infty d\tau e^{i\omega\tau}\int d^3re^{-i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}R(\boldsymbol{k},\tau) \tag{1}$$

где интегрирование производится по всему трехмерному пространству. Принцип релятивистской причинности, $\tau\geqslant r/c$, приводит к условию

$$R(\boldsymbol{r},\tau)[1-\operatorname{sign}(\tau-r/c)]=0 \tag{2}$$

где $\operatorname{sign}x=x/|x|$ - знаковая функция. Равенство (2) означает, что $R(\boldsymbol{r},\tau)=0$ при $\tau<r/c$. Для того, чтобы получить ограничения на функцию $R(\boldsymbol{k},\omega)$, вытекающие из (2), выполним одностороннее (по времени) преобразование Фурье (1) над обеими частями равенства (2). Но для удобства расчета придадим равенству (2) более общую форму:

$$R(\boldsymbol{r},\tau)\left[1-\operatorname{sign}\left(\tau-\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{r}/c^2\right)\right]=0$$

Равенство (2′) совпадает с (2) в частном случае, когда вектор $\boldsymbol{u}$ параллелен $\boldsymbol{r}$ и равен c по модулю. Знаковую функцию представим в интегральной форме

$$\operatorname{sign}x=\frac{1}{i\pi}\mathscr{P}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d\eta}{\eta}e^{i\eta x} \tag{3}$$

С помощью (1) и (3) получим из (2')
(4)

$$R(\boldsymbol{k},\omega)=\frac{1}{i\pi}\int\limits_0^\infty\frac{d\eta}{\eta}\left[R\left(\boldsymbol{k}+\eta\boldsymbol{u}/c^2,\omega+\eta\right)-R\left(\boldsymbol{k}-\eta\boldsymbol{u}/c^2,\omega-\eta\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{i\pi}\mathscr{P}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{R\left(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{u}(z-\omega)/c^2,z\right)}{z-\omega}dz$$

В изотропной среде при $\boldsymbol{u}\|\boldsymbol{k}$ дисперсионные соотношения (4) принимают вид

$$R(\boldsymbol{k},\omega)=\frac{1}{i\pi}\mathscr{P}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{R\left(k+u(z-\omega)/c^2,z\right)}{z-\omega}dz \tag{5}$$

Условию (2) соответствует $u=c$. Но в оригинальной работе Леонтовича (1961) показано, что соотношение (5) справедливо при любом $|u|\leqslant c$, если оно выполняется при $u=c$. Это соотношение более ограничительно, чем нерелятивистские соотношения типа (11.83)-(11.84), так как оно затрагивает зависимость не только от частоты, но и от волнового вектора. При $c\to\infty$ оно переходит в обычное дисперсионное соотношение Крамерса-Кронига.
11.36. Согласно (11.76), $\varepsilon^{-1}(k,\omega)$ представляет собой причинную функцию отклика и аналитична, т. е. не имеет полюсов и других особенностей в верхней полуплоскости комплексной частоты. Ввиду отсутствия полюсов обратная ей функция $\varepsilon(k,\omega)$ не имеет в указанной области нулей.
11.38.

$$\frac{\partial w}{\partial t}+\operatorname{div}\gamma=-\boldsymbol{j}_{ext}\cdot\boldsymbol{E},\ \text{где}\ w=\frac{\varepsilon_{\alpha\beta}E_\alpha E_\beta}{8\pi}+\frac{\mu_{\alpha\beta}H_\alpha H_\beta}{8\pi}=\frac{\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}+\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B}}{8\pi}$$

а вектор γ дается прежней формулой (11.100).

11.40. Для диэлектрика $\varepsilon_l''(0,0) = 0, \varepsilon_l'(0,0) = \varepsilon(0,0)$: Из дисперсионного соотношения (11.73) находим

$$\varepsilon(0) = 1 + \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{\varepsilon''(z)}{z} dz > 1$$

так как здесь $\varepsilon''(z) > 0$ в силу неравенств (11.93).

11.41. Из соотношений симметрии (11.39) имеем $\varepsilon_l''(k,0) = 0$, $\varepsilon'(k,0) = \varepsilon_l(k,0)$. Из (11.81) находим

$$\varepsilon_l^{-1}(k,0) = 1 + \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{dz^2}{z^2}\operatorname{Im}\varepsilon_l^{-1}(k,z) = 1 - \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{\varepsilon_l''(k,z)}{|\varepsilon_l(k,z)|^2}\frac{dz^2}{z^2} < 1 \tag{1}$$

Последнее неравенство следует из условия (11.93) $\varepsilon_l''(k,z) \geqslant 0$. Из (1) находим две области значений $\varepsilon_l(k,0)$:

$$\varepsilon_l(k,0) > 1; \quad \varepsilon_l(k,0) < 0 \tag{2}$$

К первой области относится $\varepsilon_l(k,0)$ бесстолкновительной плазмы, найденная в примере 11.6. При выполнении второго неравенства потенциал экранированного заряда, $\varphi(k) = 4\pi q/k^2\varepsilon_l(k,0)$, изменит знак по сравнению с потенциалом того же заряда в вакууме (см. задачу 11.8*). Это означает, что два одинаковых заряда q в среде с $\varepsilon_l(k,0) < 0$ будут испытывать притяжение: их энергия взаимодействия $U(k) = q\varphi(k) = 4\pi q^2/k^2\varepsilon_l(k,0) < 0$. Этим свойством объясняется эффект образования куперовских пар, приводящий к сверхпроводимости (см. раздел 9.4).

К числу веществ с $\varepsilon_l(k,0) < 0$ относятся также неидеальная (плотная) классическая плазма, сильные электролиты и другие вещества с сильным взаимодействием между частицами.

11.42. $\omega\varepsilon_t''(k,\omega) \geqslant 0$

11.43.

$$\mu(k,0) = \frac{2c^2k^2}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{dz}{z}\operatorname{Im}\left[\left(c^2k^2 - z^2\right)\eta(k,z)\right]^{-1}$$

11.44.

$$U = \frac{1}{\omega C^2(\omega)}\frac{d\left(\omega^2 C(\omega)\right)}{d\omega}\frac{\overline{q^2}}{2}$$

Частота колебаний в контуре определяется формулой Томсона (10.5): $\omega = c/\sqrt{LC(\omega)}$.

11.45. Формула Лоренц-Лоренца (пример 7.4) выводится в предположении однородности электрического поля в окрестности атома, поэтому должно выполняться условие $\lambda \gg a$, где λ - длина волны колебаний, a - размер атома. При этом

$$\varepsilon(\omega) = \frac{1 + 8\pi N\beta(\omega)/3}{1 - 4\pi N\beta(\omega)/3} \tag{1}$$

поляризуемость атома $\beta(\omega)$ определяется формулами (12) из решения задач 11.14*, 11.15* и в общем случае дается приближенным выражением

$$\beta(\omega) = \frac{e^2}{m}\sum_s \frac{f_s}{\omega_{s0}^2 - \omega^2 - i\gamma_s\omega} \tag{2}$$

Вдали от резонанса в (2) можно пренебречь слагаемыми $-i\gamma_s\omega$, поскольку обычно $\gamma_s \ll \omega_{s0}$, но сумма сохраняется. Вблизи резонанса с номером s можно оставить в (2) только одно (резонансное) слагаемое. В этом случае имеем

$$\varepsilon(\omega) \approx \frac{\omega_{s0}^2 + 2\omega_p^2 f_s/3 - \omega^2 - i\gamma_s\omega}{\omega_{s0}^2 - \omega_p^2 f_s/3 - \omega^2 - i\gamma_s\omega} = 1 + \frac{\omega_p^2 f_s}{\omega_s^2 - \omega^2 - i\gamma_s\omega} \tag{3}$$

где $\omega_p^2 = 4\pi N e^2/m, N$ - концентрация атомов (а не электронов). Диэлектрическая проницаемость сохраняет резонансную зависимость от частоты, но резонансная частота уменьшается за счет эффекта плотности (отличия локального поля от среднего):

$$\left(\omega_{s0}^2\right)_{loc} \equiv \omega_s^2 \approx \omega_{s0}^2 - \omega_p^2 f_s/3 \tag{4}$$

11.46.

$$\omega_l \approx \sqrt{\omega_{s0}^2 + 2\omega_p^2 f_s/3} - i\gamma_s/2, \quad w \approx \frac{\omega_{s0}^2 + 2\omega_p^2 f_s/3}{8\pi\omega_p^2 f_s} \left|E_0\right|^2 e^{-\gamma_s t}$$

В рассматриваемом приближении поток энергии отсутствует, происходят однородные затухающие колебания атомных осцилляторов, E_0 - начальная амплитуда продольного поля.

11.47. Если пренебречь мнимой частью диэлектрической проницаемости, полагая $\varepsilon_l''(k,\omega) \approx 0$, то

$\omega_l^2(k) \approx \omega_{0e}^2 + 3\left(kv_{Te}\right)^2, \quad w = \frac{1}{8\pi}|E|^2 = \frac{1}{4\pi}\overline{E^2(t)}, \quad \gamma = \frac{3v_{Te}}{8\pi}\frac{kv_{Te}}{\omega_l}\frac{\boldsymbol{k}}{k}|E|^2.$

В этом приближении электронный газ колеблется как целое относительно неподвижного газа ионов. Плотность энергии колебаний превышает вдвое плотность энергии электрического поля из-за наличия потенциальной энергии кулоновского взаимодействия электронов и ионов. Поток энергии колебаний отличен от нуля благодаря учету пространственной дисперсии, несмотря на отсутствие магнитного поля и равенство нулю вектора Пойнтинга. Перенос энергии осуществляется тепловым движением электронов.

С учетом мнимой части $\varepsilon_l''(k,\omega)$ (затухания Ландау) собственная частота $\omega_l(k)$ приобретает малую мнимую добавку. Записав $\omega_l = \omega_l' + +i\gamma, |\gamma| \ll \omega_l'$, находим ω_l' из уравнения $\varepsilon_l'(k,\omega) = 0$ и получаем для нее

прежнее значение (1). Малую мнимую часть частоты находим из уравнения

$$\varepsilon_l\left(k,\omega_l\right) \approx \varepsilon_l\left(k,\omega_l'\right) + i\varepsilon_l''\left(k,\omega_l'\right) + \left.\frac{\partial\varepsilon_l'(k,\omega)}{\partial\omega}\right|_{\omega=\omega_l'} i\gamma = 0 \tag{2}$$

где мнимую часть диэлектрической проницаемости ε_l'' заимствуем из результатов задачи 11.9. Получаем

$$\gamma(k) = -\frac{\varepsilon_l''\left(k,\omega_l'\right)}{\partial\varepsilon_l'(k,\omega)/\left.\partial\omega\right|_{\omega=\omega_l'}} = -\frac{\sqrt{\pi}}{8}\frac{\omega_{0e}}{\left(kr_D\right)^2}e^{-1/4(kr_D)^2-3/2} \tag{3}$$

где $r_D = \sqrt{T/8\pi ne^2}$. При $\omega_l'/kv_{Te} = 1/\sqrt{\pi}kr_D \gg 1$ затухание продольных плазменных волн экспоненциально мало. Это объясняется малым количеством частиц в распределении Максвелла, скорости которых сравнимы с фазовой скоростью $v_{ph} = \omega/k$ продольной волны. Плотность мощности диссипации энергии продольных волн дается формулой (11.92), которая в рассматриваемом случае примет вид

$$Q = \frac{\omega_l'}{8\pi}\varepsilon_l''\left(k,\omega_l'\right)|E(t)|^2 \tag{4}$$

Здесь $|E(t)|^2 = E_0^2 e^{-2\gamma t}, E_0$ - начальное значение амплитуды поля. Величины w и γ с учетом затухания описываются по-прежнему выражениями (1) с заменой ω_l на ω_l'.

Квадрат поля $|E|^2$ в них также будет затухать со временем.
11.48.

$$\varepsilon_l'(k,\omega) \approx 1 + \frac{\omega_{0e}^2}{k^2 v_{Te}^2} - \frac{\omega_{0i}^2}{\omega^2}\left(1 + \frac{3k^2 v_{Ti}^2}{\omega^2}\right) \tag{1}$$
$$\varepsilon_l''(k,\omega) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\omega\omega_{0e}^2}{k^3 v_{Te}^3} + \frac{\omega\omega_{0i}^2}{k^3 v_{Ti}^3} e^{-\omega^2/2k^2 v_{Ti}^2}\right)$$

Считая мнимую часть ε_l'' малой, определяем действительную и мнимую части частоты способом, использованным в предыдущей задаче:

$$\omega_l'^2(k) \approx \omega_{0i}^2\left[1 + 3k^2 r_{Di}^2\left(1 + \frac{1}{k^2 r_{De}^2}\right)\right]\left(1 + \frac{1}{k^2 r_{De}^2}\right)^{-1} \tag{2}$$

(3) $\gamma(k) \approx -\sqrt{\frac{\pi}{8}} \cdot \frac{m_i}{m_e} \cdot \frac{\omega_l'^4(k)}{k^3 v_{Te}^3}\left\{1 + \sqrt{\frac{m_i}{m_e}}\left(\frac{T_e}{T_i}\right)^{3/2} \exp\left[-\frac{\omega_l'^2(k)}{2k^2 v_{Ti}^2}\right]\right\}$.

Здесь введены обозначения $r_{De,i} = \sqrt{T_{e,i}/4\pi n e^2}$ для электронного и ионного дебаевских радиусов и использовано предположение о сильной неизотермичности плазмы: $T_e \gg T_i$. При выполнении этого условия и неравенств, указанных в условии задачи, имеем из (2), (3) $|\gamma| \ll \omega_l'$.

В длинноволновом пределе, когда $kr_{De} \ll 1$ и $kr_{Di} \ll 1$, формулы упрощаются:

$$\omega_l'(k) \approx v_s k, \quad v_s = \sqrt{\frac{T_e}{m_i}\left(1 + \frac{3T_i}{T_e}\right)}$$
$$\gamma \approx -k v_s \sqrt{\frac{\pi m_e}{8 m_i}}\left\{1 + \sqrt{\frac{m_i}{m_e}}\left(\frac{T_e}{T_i}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{3}{2} - \frac{T_e}{2T_i}\right)\right\} \tag{4}$$

Эти колебания называются ионнозвуковыми, так как их закон дисперсии (зависимость частоты от волнового вектора) такой же, как у звуковых волн в нейтральной среде. Скорость ионного звука v_s определяется в основном температурой электронов, но массой ионов.

В коротковолновом пределе ($kr_{De} \gg 1$, но по-прежнему $kr_{Di} \ll 1$) имеем ионные плазменные слабозатухающие колебания
$\omega_l'(k) \approx \omega_{0i}, \gamma \approx -\sqrt{\frac{\pi m_e}{8 m_i}} \cdot \frac{\omega_{0i}}{k^3 r_{De}^3}\left\{1 + \sqrt{\frac{m_i}{m_e}}\left(\frac{T_e}{T_i}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{3}{2} - \frac{1}{2k^2 r_{Di}^2}\right)\right\}$.
11.49. При $\omega \gg k v_F$

$$\omega_l(k) \approx \omega_{0e}\left(1 + \frac{9}{10}k^2 r_D^2\right), \quad \gamma = 0$$

При $\omega - k v_F \ll \omega, k v_F$, но $\omega > k v_F$ полагаем в формуле (3) задачи 11.11 $\omega/k v_F + 1 \approx 2$ и находим спектр

$$\omega_l(k) \approx k v_F\left[1 + 2e^{-2(k v_F)^2 - 2}\right], \gamma = 0$$

При $\omega > k v_F$ колебания не затухают ввиду отсутствия резонансных частиц. При $\omega < k v_F$ колебания быстро затухают. Энергия плазмонов $\hbar\omega_{0e}$ в типичных металлах ($n \approx 10^{23}$ см $^{-3}$) составляет $10 - 20$ эВ. Плазмоны возбуждаются при прохождении быстрых электронов через тонкие металлические
пленки и регистрируются по дискретным потерям их энергии $\Delta\mathscr{E} = \hbar\omega_{0e}, 2\hbar\omega_{0e}, \ldots$ В

некоторых неметаллических веществах (C, Si, MgO и др.) плазмоны также возбуждаются, в плазменных колебаниях участвуют валентные электроны.

11.50. Относительные колебания ионов происходят с приведенной массой $m = m_+m_-/(m_+ + m_-)$. Вводим параметр $\boldsymbol{w} = \sqrt{m/v}\,(\boldsymbol{r}_+ - \boldsymbol{r}_-)$, характеризующий относительное смещение ионов двух знаков из равновесных положений. Здесь v - объем, приходящийся на одну элементарную ячейку кристалла. Колебания под действием одних упругих сил описывались бы уравнением

$$\ddot{\boldsymbol{w}} = -\omega_0^2 \boldsymbol{w} \tag{1}$$

Этим колебаниям соответствует лагранжиан

$$L(\dot{\boldsymbol{w}}, \boldsymbol{w}) = \dot{\boldsymbol{w}}^2/2 - \omega_0^2 \boldsymbol{w}^2/2 \tag{2}$$

на единицу объема.

С другой стороны, учитывая электрические силы, можно записать линейное соотношение, определяющее вектор поляризации кристалла:

$$\boldsymbol{P} = \gamma \boldsymbol{w} + \alpha \boldsymbol{E} \tag{3}$$

Первое слагаемое вызвано смещением ионов из равновесных положений. Смысл второго слагаемого и постоянной α легко определить. В отсутствие относительного сдвига ионов поляризация вызывается только деформацией их электронных оболочек. Поэтому α - соответствующая электрическая восприимчивость, связанная с ε_∞, заданной в условии задачи, соотношением $\alpha \equiv \alpha_\infty = (\varepsilon_\infty - 1)/4\pi$.

Наличие поляризации приводит к добавочной потенциальной энергии

$$U = -\int_0^{\boldsymbol{E}} \boldsymbol{P}(\boldsymbol{E}) d\boldsymbol{E} = -\gamma \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{E} - \frac{1}{2} E^2 \tag{4}$$

Добавляя ее к лагранжиану (2), получим

$$L(\dot{\boldsymbol{w}}, \boldsymbol{w}) = \dot{\boldsymbol{w}}^2/2 - \omega_0^2 \boldsymbol{w}^2/2 + \gamma \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{E} + \frac{1}{2} E^2 \tag{5}$$

Из лагранжиана (5) получаем уравнение движения с учетом электрических сил:

$$\ddot{\boldsymbol{w}} = -\omega_0^2 \boldsymbol{w} + \gamma \boldsymbol{E} \tag{6}$$

Постоянную γ, входящую в (6), выразим через статическую диэлектрическую проницаемость ε_0. Для этого записываем уравнения (3), (6) в статическом пределе:

$$\boldsymbol{P}_0 = \gamma \boldsymbol{w}_0 + \alpha_\infty \boldsymbol{E}, \quad \boldsymbol{w}_0 = \frac{\gamma}{\omega_0^2} \boldsymbol{E} \tag{7}$$

В то же время имеем, очевидно, $\boldsymbol{P}_0 = \alpha_0 \boldsymbol{E}$, где α_0 - статическая восприимчивость. С помощью (7) находим

$$\gamma = \omega_0 \sqrt{\frac{\varepsilon_0 - \varepsilon_\infty}{4\pi}} \tag{8}$$

После определения всех постоянных переходим к вычислению частот собственных колебаний. До сих пор мы считали систему однородной. Учтем теперь, что колебания в кристалле распространяются в виде слабо неоднородной волны (малый $\boldsymbol{k}$). Векторы $\boldsymbol{w}, \boldsymbol{E}, \boldsymbol{P}$ могут быть ориентированы перпендикулярно или параллельно k. Представим

каждый вектор в виде суммы поперечной и продольной части: $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w}_t + \boldsymbol{w}_l, \ldots$ Соответственно, равенства (3) и (6) будут относиться либо к поперечным, либо к продольным векторам. Для вектора $\boldsymbol{E}_t$ уравнения Максвелла в квазистатическом приближении имеют вид $\operatorname{rot} \boldsymbol{E}_t = 0, \operatorname{div} \boldsymbol{E}_t = 0$, откуда следует $\boldsymbol{E}_t = 0$, т. е. на поперечные колебания электрическое поле не влияет. Уравнение (3) принимает вид $\ddot{\boldsymbol{w}}_t = -\omega_0^2 \boldsymbol{w}_t$, т. е. частота поперечных колебаний $\omega_t = \omega_0$.

Продольное поле удовлетворяет уравнениям $\operatorname{rot} \boldsymbol{E}_l = 0, \operatorname{div} \boldsymbol{D} = \operatorname{div}(\boldsymbol{E}_l + 4\pi \boldsymbol{P}_l) = 0$, откуда имеем

$$\boldsymbol{E}_l = -4\pi \boldsymbol{P}_l \tag{9}$$

так как при $\boldsymbol{P} = 0$ в квазистатическом случае должно быть $\boldsymbol{E} = 0$. Теперь из уравнений (3), (6) и (9) исключаем векторы $\boldsymbol{P}_l, \boldsymbol{E}_l$ и находим уравнение движения $\ddot{\boldsymbol{w}}_l = -\omega_l^2 \boldsymbol{w}_l$, откуда получаем

$$\omega_l^2 = \omega_0^2 + \frac{4\pi\gamma^2}{1 + 4\pi\gamma^2} = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_\infty}\omega_t^2, \quad \omega_l = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_\infty}}\omega_t$$

В таблице приведены экспериментальные значения параметров некоторых ионных кристаллов [Давыдов (1976)].

Кристалл	$\omega_t, 10^{13}$ рад/с	ε_0	ε_∞
NaCl	3.09	5.62	2.25
KCl	2.67	4,68	2.13
TlCl	1.61	31.9	5.10
ZnS	5.71	8.30	5.07

11.51.

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 + \frac{(\varepsilon_0 - \varepsilon_\infty)}{1 - \omega^2/\omega_t^2} = \frac{\varepsilon_\infty(\omega_l^2 - \omega^2)}{\omega_t^2 - \omega^2}$$

11.52. В установившемся режиме $M_\parallel = M_0$, поэтому линеаризованное уравнение (11.115) для намагниченности принимает вид

$$\frac{d\boldsymbol{M}_\perp}{dt} = -\eta \boldsymbol{M}_\perp \times \boldsymbol{H}_0 - \frac{\boldsymbol{M}_\perp}{\tau_2} - \eta \boldsymbol{M}_0 \times \boldsymbol{h} e^{-i\omega t} \tag{1}$$

Решение для вынужденных колебаний имеет вид

(2) $\boldsymbol{M}_\perp = \chi_0 \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \left(\omega + i\tau_2^{-1}\right)^2} \boldsymbol{h} e^{-i\omega t} + i\chi_0 \frac{\omega_0\left(\omega + i\tau_2^{-1}\right)}{\omega_0^2 - \left(\omega + i\tau_2^{-1}\right)^2} \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{h} e^{-i\omega t}$,

где $\omega_0 = \eta H_0, \boldsymbol{n}$ - единичный вектор в направлении $\boldsymbol{H}_0$. Из (2) находим тензор магнитной восприимчивости парамагнетика при наличии постоянного магнитного поля:

(3)

$$\chi_{\alpha\beta}(\omega) = \chi_\perp(\omega)(\delta_{\alpha\beta} - n_\alpha n_\beta) + i e_{\alpha\beta\nu} g_\nu$$

$$\chi_\perp(\omega) = \chi_0 \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \left(\omega + i\tau_2^{-1}\right)^2}, \quad \boldsymbol{g} = -\chi_0 \frac{\omega_0\left(\omega + i\tau_2^{-1}\right)}{\omega_0^2 - \left(\omega + i\tau_2^{-1}\right)^2} \boldsymbol{n}$$

Диссипацию энергии находим по формуле (11.111):

$$Q(\omega) = \chi_0 |h|^2 \omega_0^2 \omega^2 \frac{1}{\tau_2 \left[\left(\omega_0^2 - \omega^2 + \tau_2^{-2}\right)^2 + 4\omega^2 \tau_2^{-2}\right]} \tag{4}$$

Зависимость $Q(\omega)$ имеет резонансный характер. Если резонанс узкий ($\tau_2^{-1} \ll \omega_0$), то вблизи резонанса ($|\omega - \omega_0| \ll \omega_0$) форма линии поглощения упрощается и приобретает лоренцевский вид

$$Q(\omega) = \frac{\chi_0 |h|^2}{4\tau_2} \frac{\omega_0^2}{\left(\widetilde{\omega}_0 - \omega\right)^2 + \tau_2^{-2}}, \quad \text{где} \quad \widetilde{\omega}_0 = \omega_0 + 1/2\omega_0\tau_2^2 \tag{5}$$

- резонансная частота.

  11.53. Резонансная частота имеет порядок величины $\omega_0 \approx \mu H_0/\hbar$, где μ - магнитный момент одной частицы. Если это - момент отдельного электрона или электронной оболочки атома (электронный парамагнитный резонанс, ЭПР, открыт советским физиком Е.К. Завойским в 1944 г.), то мерой магнитного момента выступает магнетон Бора $\mu \approx \mu_B \approx 0,93 \times 10^{-23}/$ Тл $\approx 0,93 \times 10^{-20}$ эрг/Гс. В этом случае при $H_0 = 10^3$ Гс имеем $\omega_0 \approx 10^{10}$ рад/с. Если исследуется взаимодействие переменного поля с магнитными моментами атомных ядер (ядерный магнитный резонанс, ЯМР, открыт американским физиком Ф. Блохом в 1946 г.), то резонансная частота при том же постоянном поле определяется ядерным магнетоном, который в $m_p/m_e \approx 2 \times 10^3$. раз меньше магнетона Бора. В результате имеем резонансную частоту $\omega_0 \approx 10^7$ рад/с. Частоты обоих резонансов, таким образом, сильно взаимно различаются.

  11.54. $M_x = A\sin(\omega_0 t + \alpha)$, $M_y = A\cos(\omega_0 t + \alpha)$, $M_z = C$, где $\omega_0 = \eta H_0, \alpha$ - начальная фаза, A и C - константы, связанные условием $M^2 = M_0^2$, т.е. $A^2 + C^2 = M_0^2$, где M_0 - намагниченность насыщения. Движение вектора намагниченности представляет собою обычную ларморову прецессию.

  11.55. Ищем решение в виде $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}_0 + \boldsymbol{m}e^{-i\omega t}, \boldsymbol{m} \perp \boldsymbol{M}_0, m \ll M_0$. Подставив эффективное поле (11.117) в (11.116) и линеаризовав уравнение, получим

$$i\omega m_x = \eta M_0 q k^2 m_y, \quad i\omega m_y = -\eta M_0 q k^2 m_x \tag{1}$$

откуда находим закон дисперсии волн намагниченности (спиновых волн, магнонов)

$$\omega(k) = \eta M_0 q k^2. \tag{2}$$

В квантовой теории формула (2) определяет спектр энергии $\mathscr{E}(k) = \hbar\omega(k)$ элементарных возбуждений - магнонов. Более точное выражение для спектра магнонов с учетом ряда поправок см. у Лифшица и Питаевского (1978).

11.56. Ищем решение уравнения

$$\frac{d\boldsymbol{M}}{dt} = -\eta \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{H}_0 + \omega_r \left(\chi_0 \boldsymbol{H}_0 - \boldsymbol{M}\right) \tag{1}$$

в виде $M_x = m_x e^{-i\omega t}, M_y = m_y e^{-i\omega t}, M_z = M_0 + m_z e^{-i\omega t}$, где ω - неизвестная частота; ось z направлена вдоль $\boldsymbol{H}_0$.

Проецируя (1) на оси координат и подставляя M, получим систему алгебраических уравнений, условие совместности которой имеет вид

$$\omega_0^2 - (\omega + i\omega_r)^2 = 0 \tag{2}$$

Частота ω оказывается комплексной: $\omega = \omega_0 - i\omega_r$; наличие потерь приводит, как обычно, к затухающему движению. Компоненты m_x и m_y сдвинуты по фазе на $\pi/2$. Вектор $\boldsymbol{M}$ совершает затухающую прецессию вокруг $\boldsymbol{H}_0$.

11.57. Если выбрать ось Oz вдоль $\boldsymbol{H}$, то полное магнитное поле будет иметь составляющие

$h_x e^{-i\omega t}, h_y e^{-i\omega t}, H_0 + h_z e^{-i\omega t}$. Ищем решение уравнения Ландау-Лифшица (11.116) без учета неоднородного слагаемого $\nabla^2 M$ в виде

$$M_x = m_x e^{-i\omega t}, \quad M_y = m_y e^{-i\omega t}, \quad M_z = M_0 + m_z e^{-i\omega t} \tag{1}$$

где M_0 - намагниченность насыщения. Эта форма решения соответствует предположению, что ларморова прецессия прекратилась вследствие затухания и колебания поддерживаются только высокочастотным (вынуждающим) полем. Поэтому нужно считать величины m_x, m_y, m_z малыми, порядка не ниже h. Подставляя (1) в уравнение Ландау-Лифшица и отбрасывая квадратичные по h и m члены, определим компоненты m:

$$m_x = \chi_0 \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2} h_x - \chi_0 \frac{i\omega\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2} h_y$$
$$m_y = \chi_0 \frac{i\omega\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2} h_x - \chi_0 \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2} h_y, \quad m_z = 0$$

Как видно из этих формул, характер зависимости m_x и m_y от ω при фиксированной $\omega_0 = \eta H_0$ или от H_0 при заданной ω - резонансный: в точке $\omega = \omega_0$ компоненты m_x и m_y неограниченно возрастают, наступает ферромагнитный резонанс.

Неограниченное возрастание амплитуды $\boldsymbol{m}$ связано с приближенным методом решения уравнения Ландау-Лифшица. Точное решение (см. задачу 11.60*) должно обеспечивать постоянство длины $|M|$, такк как из уравнения Ландау-Лифшица без учета диссипации следует $M^2 = \text{const}$. При решении задачи методом последовательных приближений с учетом потерь M также остается ограниченным.

11.58 .

$$\chi_{ik} = \begin{pmatrix} \chi_\perp & -i\chi_a & 0 \\ i\chi_a & \chi_\perp & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mu_{ik} = \begin{pmatrix} \mu_\perp & -i\mu_a & 0 \\ i\mu_a & \mu_\perp & 0 \\ 0 & 0 & \mu_\parallel \end{pmatrix} \tag{1}$$

где

$$\chi_\perp = \chi_0 \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2}, \quad \chi_a = \chi_0 \frac{\omega\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \tag{2}$$

$$\mu_\perp = 1 + 4\pi\chi_\perp = 1 + \frac{\omega_M\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2}, \quad \mu_a = 4\pi\chi_a = \frac{\omega\omega_M}{\omega_0^2 - \omega^2}, \quad \mu_\parallel = 1 \tag{3}$$

Здесь введены единообразные обозначения $\omega_M = 4\pi\eta M_0, \omega_0 = \eta H_0$. Как видно из приведенных формул, χ_{ik} и μ_{ik} - эрмитовы тензоры ($\mu_{ik} = \mu^*_{ki}$). Это означает, что среда является гиротропной, а потери отсутствуют.

Графики зависимости компонент μ_{ik} от частоты приведены на рис. 11.3 ($H_{\text{res}} \approx 3400$ Э).

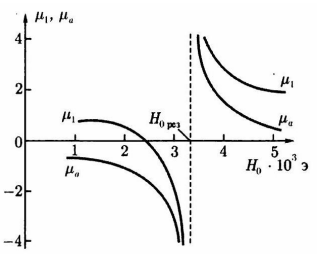


Рис. 11.3

11.59. Выбираем переменное магнитное поле в виде плоской монохроматической волны, $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_0 + \boldsymbol{h}\exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - i\omega t)$, и ищем решение в аналогичном виде: $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}_0 + \boldsymbol{m}\exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - i\omega t)$. После линеаризации уравнения Ландау-Лифшица и вычисления коэффициентов пропорциональности между компонентами векторов $\boldsymbol{m}$ и $\boldsymbol{h}$ находим компоненты тензора магнитной проницаемости:

$$\mu_\perp(\omega,k) = 1 + \frac{\omega_M\left(\omega_0 + \omega_{ex}a^2k^2\right)}{\left(\omega_0 + \omega_{ex}a^2k^2\right)^2 - \omega^2}, \quad \mu_a = \frac{\omega\omega_M}{\left(\omega_0 + \omega_{ex}a^2k^2\right)^2 - \omega^2}, \quad \mu_\parallel = 1$$

Здесь использовано обозначение $\omega_{\text{ex}}\, a^2 = \eta M_0 q$, где a - постоянная порядка атомных размеров, ω_{ex} - некоторая частота, характеризующая обменное взаимодействие спинов в ферромагнетике. Из сравнения с результатом предыдущей задачи следует, что учет пространственной дисперсии приводит к замене $\omega_0 \to \omega_0 + \omega_{ex}a^2k^2$. Хотя в макроскопических задачах $ak \ll 1$, вклад второго члена может быть заметным, если $\omega_{ex} \gg \omega_0$.

11.60.

$$M_x = \frac{\omega_1}{\Delta\omega}C\cos\omega t, \quad M_y = \frac{\omega_1}{\Delta\omega}C\sin\omega t, \quad M_z = C \tag{1}$$

где $\Delta\omega = \omega_0 - \omega, \omega_0 = \eta H_0, \omega_1 = \eta h$. Постоянная C может быть определена из условия $M_x^2 + M_y^2 + M_z^2 = M_0^2$, которое следует из уравнения ЛандауЛифшица:

$$C = \frac{|\Delta\omega|}{\Omega}M_0$$

где $\Omega = \sqrt{\Delta\omega^2 + \omega_1^2}$.

В выражение C входит модуль $|\Delta\omega|$, так как $M_z > 0$. Компоненты M примут вид:

$$\left.\begin{array}{l} M_x = \pm\frac{\omega_1}{\Omega}M_0\cos\omega t = \chi h_x \\ M_y = \pm\frac{\omega_1}{\Omega}M_0\sin\omega t = \chi h_y, \quad M_z = \frac{|\Delta\omega|}{\Omega}M_0 \end{array}\right\} \tag{2}$$

Здесь знак $\pm$ соответствует знаку $\Delta\omega$. Как следует из этих равенств, связь между $\boldsymbol{M}$ и $\boldsymbol{h}$ нелинейна, коэффициент пропорциональности χ зависит от h через ω_1:

$$\chi = \pm\frac{\eta M_0}{\sqrt{\Delta\omega^2 + \omega_1^2}}$$

Угол прецессии ϑ (угол между $\boldsymbol{M}$ и $\boldsymbol{H}_0$) определяется равенством

$$\sin\vartheta = \frac{M_\perp}{M_0} = \frac{\omega_1}{\Omega}$$

где $M_\perp = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}$. При ферромагнитном резонансе $\Delta\omega = 0$, и из (1) получим

$$M_x = \pm M_0\cos\omega t, \quad M_y = \pm M_0\sin\omega t, \quad M_z = 0$$

Вектор $\boldsymbol{M}$ в этом случае вращается с частотой ω в плоскости, перпендикулярной $\boldsymbol{H}_0$, его компоненты не обращаются в бесконечность.

11.61. $M = M_0 + me^{-i\omega t}$, где $\boldsymbol{M}_0$ имеет направление $\boldsymbol{H}_0$, а компоненты $\boldsymbol{m}$ определяются формулами

$$m_x = \chi_0 \frac{\Omega^2 - i\omega\omega_r}{\Omega^2 - \omega^2 - 2i\omega\omega_r} h_x - i\chi_0 \frac{\omega\omega_0}{\Omega^2 - \omega^2 - 2i\omega\omega_r} h_y$$
$$m_y = i\chi_0 \frac{\omega\omega_0}{\Omega^2 - \omega^2 - 2i\omega\omega_r} h_x + \chi_0 \frac{\Omega^2 - i\omega\omega_r}{\Omega^2 - \omega^2 - 2i\omega\omega_r} h_y$$
$$m_z = \chi_0 \frac{\omega_r}{\omega_r - i\omega} h_z$$
$$\Omega = \sqrt{\omega_0^2 + \omega_r^2}, \quad \omega_0 = \eta H_0$$

Как видно из этих формул, наличие потерь ($\omega_r \neq 0$) приводит к тому, что при резонансе амплитуда m остается конечной.

11.62.

$$\mu_{ik} = \begin{pmatrix} \mu_\perp & -i\mu_a & 0 \\ i\mu_a & \mu_\perp & 0 \\ 0 & 0 & \mu_\parallel \end{pmatrix}, \qquad \begin{matrix} \mu_\perp = \mu'_\perp + i\mu''_\perp \\ \mu_a = \mu'_a + i\mu''_a \end{matrix}$$
$$\mu'_\perp = 1 + 4\pi\chi_0 \frac{\Omega^2 (\Omega^2 - \omega^2) + 2\omega^2\omega_r^2}{(\Omega^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\omega_r^2}$$
$$\mu''_\perp = 4\pi\chi_0 \frac{\omega\omega_r (\Omega^2 + \omega^2)}{(\Omega^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\omega_r^2}$$
$$\mu'_a = 4\pi\chi_0 \frac{\omega\omega_0 (\Omega^2 - \omega^2)}{(\Omega^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\omega_r^2}$$
$$\mu''_a = 4\pi\chi_0 \frac{\omega^2\omega_0\omega_r}{(\Omega^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\omega_r^2}$$
$$\mu_\parallel = 1 + 4\pi\chi_0 \frac{\omega_r}{\omega_r - i\omega}$$

где $\Omega = \sqrt{\omega_0^2 + \omega_r^2}$, $\omega_0 = \eta H_0$, $H_{\text{res}} \approx 3400$ Э.

Графики зависимости $\mu'_\perp$ и $\mu''_\perp$ от постоянного поля H_0 приведены на рис. 11.4. Зависимость μ'_a и μ''_a от H_0 имеет аналогичный вид.

Мнимые части $\mu''_\perp$ и μ''_a имеют максимумы при $H_0 = H_{\text{res}} \approx \omega/\eta$, а вещественные части $\mu'_\perp$, μ'_a принимают экстремальные значения при $H_0 \approx (\omega \pm \omega_r)/\eta$

Кривые, изображенные на рис. 11.4, имеют такой же характер, как дисперсионные кривые для $\varepsilon(\omega)$ (см. рис. 11.2).

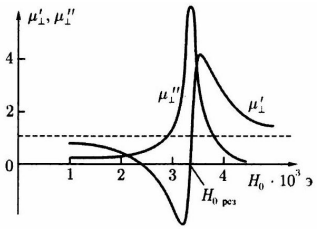


Рис. 11.4

Мнимые части компонент тензора $\mu''_\perp$ и $\mu''_a, \mu''_\parallel$ определяют диссипацию электромагнитной энергии. Они обращаются в нуль при $\omega_r = 0$.

11.63. $\Delta H_0 = \omega_r/\eta$.

11.64. Выберем оси координат вдоль главных осей эллипсоида, ось Oz направим вдоль поля $\boldsymbol{H}_0$. В этих осях тензор N_{ik} имеет диагональный вид. Поэтому уравнение Ландау-Лифшица в проекциях на оси координат запишется так:

$$\begin{aligned}\dot{M}_x &= -\eta\left[H_0 + 4\pi\left(N^{(y)} - N^{(z)}\right)M_z\right]M_y \\ \dot{M}_y &= \eta\left[H_0 + 4\pi\left(N^{(x)} - N^{(z)}\right)M_z\right]M_x \\ \dot{M}_z &= -4\pi\eta\left(N^{(x)} - N^{(y)}\right)M_xM_y\end{aligned} \tag{1}$$

Таким образом, уравнения становятся нелинейными. Предполагая, что отклонения вектора M от равновесного положения (направление оси Oz) малы, ищем решение в виде

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}_0 + me^{-i\omega t} \tag{2}$$

где вектор M_0 направлен вдоль оси Oz. Если пренебречь членами с m^2,
которые войдут в систему (1) после подстановки (2), то система (1) линеаризуется. Приравнивая определитель системы нулю, находим

$$\omega^2 \equiv \omega_k^2 = \eta^2\left[H_0 + 4\pi\left(N^{(x)} - N^{(z)}\right)M_0\right]\left[H_0 + 4\pi\left(N^{(y)} - N^{(z)}\right)M_0\right] \tag{3}$$

11.65. $\omega = \omega_k + i\omega_r\left[1 + \chi_0\left(N^{(x)} + N^{(y)}\right)/2\right], \chi_0 = M_0/\left(H_0 - N^{(z)}M_0\right)$. Значение ω_k приведено в ответе к предыдущей задаче.
11.66.

$$\chi_{ik} = \begin{pmatrix} \chi_1 & -i\chi_a & 0 \\ i\chi_a & \chi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(ось Oz направлена вдоль $\boldsymbol{H}_0$),

$$\begin{aligned}\chi_1 &= \frac{1}{\Delta}\left\{\eta^2 M_0\left[H_0 + \left(N^{(y)} - N^{(z)}\right)M_0\right] - i\chi_0\omega\omega_r\right\} \\ \chi_2 &= \frac{1}{\Delta}\left\{\eta^2 M_0\left[H_0 + \left(N^{(x)} - N^{(z)}\right)M_0\right] - i\chi_0\omega\omega_r\right\} \\ \chi_a &= -\frac{1}{\Delta}\eta\omega M_0\end{aligned}$$

где

$$\Delta = \left(\omega_k^2 - \omega^2\right) - i\omega\omega_r\left[2 + \chi_0\left(N^{(x)} + N^{(y)}\right)\right], \quad \chi_0 = \frac{M_0}{H_0 - N^{(z)}M_0}$$

Поскольку в выражения компонент тензора χ_{ik} входят размагничивающие факторы, положение резонанса и ширина резонансной линии будут зависеть от формы тела.
11.67. Система уравнений движения для векторов намагниченности M_1 и M_2 имеет вид (1) $\frac{d\boldsymbol{M}_1}{dt} = -\eta\boldsymbol{M}_1 \times (\boldsymbol{H}_0 + \lambda\boldsymbol{M}_2), \quad \frac{d\boldsymbol{M}_2}{dt} = -\eta\boldsymbol{M}_2 \times (\boldsymbol{H}_0 + \lambda\boldsymbol{M}_1)$.

Ищем решение в виде $\boldsymbol{M}_1 = \boldsymbol{M}_{10} + \boldsymbol{m}_1e^{-i\omega t}, \boldsymbol{M}_2 = \boldsymbol{M}_{20} + \boldsymbol{m}_2e^{-i\omega t}$ ($\boldsymbol{M}_{10}, \boldsymbol{M}_{20}$ - равновесные значения $\boldsymbol{M}_1, \boldsymbol{M}_2$).

При решении системы (1) удобно перейти к циклическим компонентам

$$m_{j\pm} = m_{jx} \pm im_{jy} \quad (j = 1, 2)$$

Частоты собственной прецессии:

$$\omega_{01} = \eta H_0, \quad \omega_{02} = \eta\lambda\left|M_{10} - M_{20}\right| \tag{2}$$

Формулы (2) справедливы при условии $\lambda\left|M_{10} - M_{20}\right| \gg H_0$. Частота ω_{01} имеет такую же величину, как и в случае ферромагнетика без подрешеток. Частота ω_{02} зависит от молекулярного поля и обычно сильно превышает ω_{01}.

11.70. При пересчете в лабораторную систему уравнений связи (11.127) кроме преобразования полей следует выполнить также преобразование Лоренца частоты ω', определенной в сопутствующей системе отсчета. Величина ω'/c представляет собой временную компоненту волнового 4 -вектора k_i' и преобразуется по закону (см. ответ к задаче 3.12)

$$\omega' = \gamma(\omega - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{V})$$

Уравнения (11.128), (11.133) сохранят свой вид, но всюду электрическая и магнитная проницаемости приобретут аргумент $\varepsilon(\gamma(\omega - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{V}))$, $\mu(\gamma(\omega - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{V}))$. Зависимость от волнового вектора $\boldsymbol{k}$ свидетельствует о том, что в лабораторной системе движущаяся среда приобретает пространственную дисперсию. При наличии пространственной дисперсии в сопутствующей системе волновой вектор $\boldsymbol{k'}$ также следует выразить через ω и $\boldsymbol{k}$.

11.71. Находим векторы поляризации из уравнений (11.9),

$$\boldsymbol{P} = \frac{1}{4\pi}(\boldsymbol{D} - \boldsymbol{E}), \quad \boldsymbol{M} = \frac{1}{4\pi}(\boldsymbol{B} - \boldsymbol{H}) \tag{1}$$

и с помощью (11.133) получаем

$$\boldsymbol{P} = -\frac{\mu - 1}{4\pi\mu}\boldsymbol{E} + \frac{\kappa\gamma^2}{4\pi\mu}[\boldsymbol{E} - \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{E}) + \boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{B}] \tag{2}$$

$$\boldsymbol{M} = \frac{\mu - 1}{4\pi\mu}\boldsymbol{B} + \frac{\kappa\gamma^2}{4\pi\mu}\left[\beta^2\boldsymbol{B} - \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{B}) - \boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{E}\right]$$

При $\varepsilon = 1$ имеем электрическую поляризацию

$$\boldsymbol{P} = \frac{(\mu - 1)\gamma^2}{4\pi}\left[\beta^2\boldsymbol{E} - \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{E}) + \boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{B}\right] \tag{3}$$

При $\mu = 1$ магнитный вектор

$$\boldsymbol{M} = \frac{(\varepsilon - 1)\gamma^2}{4\pi\varepsilon}\left[\beta^2\boldsymbol{H} - \boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{H}) - \boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{D}\right] \tag{4}$$

В обоих случаях поляризация связана с движением среды ($\boldsymbol{\beta} \neq 0$). В неподвижной электрически не поляризующейся среде ($\varepsilon = 1, \mu \neq 1$) при наличии магнитного поля имеются токи намагничения $j_{int} \neq 0$, хотя связанный заряд $\rho_{\text{int}} = 0$. Заряды нейтрилизованы внутри молекул. При движении среды на положительные и отрицательные заряды действуют разные силы Лоренца, которые смещают их в разных направлениях и создают электрическую поляризацию (3).

В случае $\mu = 1, \varepsilon \neq 1$ электрическое поле в неподвижной среде создает связанный заряд. Движение среды создает ток, обеспечивающий магнитную поляризацию.

11.72. Приравняв нулю аргумент дельта-функции в формуле (11.148), найдем форму поверхности волны, испущенной мгновенным точечным источником. В каждый момент времени это - эллипсоид вращения,

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2(t)} + \frac{(z - z_0(t))^2}{b^2(t)} = 1 \tag{1}$$

центр которого находится на оси Oz в точке

$$z_0(t) = \frac{\varepsilon\mu - 1}{\varepsilon\mu - \beta^2}Vt \tag{2}$$

а оси увеличиваются со временем:

$$a(t) = \sqrt{\frac{1-\beta^2}{\varepsilon\mu-\beta^2}}ct, \quad b(t) = \frac{(1-\beta^2)\sqrt{\varepsilon\mu}}{\varepsilon\mu-\beta^2}ct \tag{3}$$

причем их отношение $a/b = \gamma\sqrt{1-\beta^2/\varepsilon\mu} > 1$ постоянно.
Важную роль играет скорость центра эллипсоида

$$v_0 = \dot{z}_0(t) = \frac{\varepsilon\mu-1}{\varepsilon\mu-\beta^2}V = \eta V \tag{4}$$

С этой скоростью происходит увлечение любого электромагнитного возмущения движущейся средой. Коэффициент увлечения η растет до единицы при $\beta \to 1$. Скорости $v_\pm = \dot{z}_0(t) \pm \dot{b}(t)$ распространения возмущения в положительном и отрицательном направлениях оси Oz различны, движущаяся среда обладает анизотропией.

При досветовом ($V < c/\sqrt{\varepsilon\mu}$) движении среды $v_- < 0$, сигнал может дойти до любой точки наблюдения, находящейся при $z < 0$ либо при $z > 0$
(рис. 11.5а). Цифры 1-3 обозначают соответствующие поверхности в три последовательных момента времени, разделенных равными промежутками. P - точка наблюдения. При световом движении $v_- = 0$ и сигнал попадает только в точки, лежащие в правой полуплоскости $z > 0$ (рис. 11.5б). При сверхсветовом движении $z_0 > b$, эллипсоид сносится вниз по течению в положительном направлении оси Oz. Возмущения доходят только до точек,

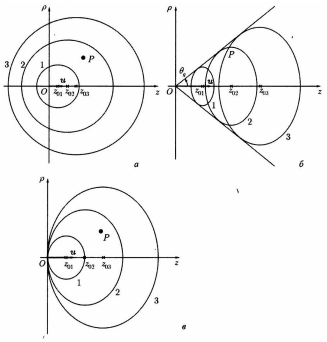


Рис. 11.5
лежащих внутри конической поверхности, уравнение которой

$$z = \sqrt{\frac{\varepsilon\mu\beta^2-1}{1-\beta^2}}\sqrt{x^2+y^2} \tag{5}$$

Вне конуса с углом раствора ϑ_g поле отсутствует во все времена. Внутри конуса в каждую точку сигнал приходит дважды: от переднего и заднего фронта эллипсоида (рис. 11.5в).

11.73.

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \frac{qs}{R_*}\frac{1-\varepsilon\mu\beta^2}{\varepsilon\,(1-\beta^2}, \quad \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = -\frac{\varepsilon\mu-1}{c\,(1-\varepsilon\mu\beta^2)}\varphi(\boldsymbol{r})\boldsymbol{V} \tag{1}$$

где в досветовом случае $(\varepsilon\mu\beta^2 < 1)\, s = 1$, а в сверхсветовом случае $(\varepsilon\mu\beta^2 < 1)\, s = 2$, если точка наблюдения находится внутри конуса, определяемого уравнением (5) предыдущей задачи, и $s = 0$ вне конуса.

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\varphi, \quad \boldsymbol{B} = \frac{\varepsilon\mu - 1}{c\,(1 - \varepsilon\mu\beta^2)}[\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{V}] \tag{2}$$
$$\boldsymbol{D} = \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon\mu\beta^2}\left[\left(1 - \beta^2\right)\boldsymbol{E} - (\varepsilon\mu - 1)\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{E})\right], \quad \boldsymbol{H} = 0$$

Потенциалы и векторы поля не зависят от времени, магнитная индукция отлична от нуля, хотя напряженность магнитного поля равна нулю.
где s и R_* соответствуют обозначениям предыдущей задачи.

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = -\frac{\mu s\gamma^2(\varepsilon\mu - 1)}{\varepsilon\mu}\frac{\boldsymbol{R}\cdot[\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{m}_0]}{R_*^3}$$
$$\boldsymbol{A} = \frac{\boldsymbol{m}_0\times\boldsymbol{R}}{R_*^3} + \frac{\mu s\gamma^2(\varepsilon\mu - 1)}{\varepsilon\mu}\frac{\boldsymbol{\beta}\,(\boldsymbol{R}\cdot[\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{m}_0])}{R_*^3}$$

$\boldsymbol{R} = z\boldsymbol{e}_z + \gamma\,(1 - \varepsilon\mu\beta^2)\,\boldsymbol{r}_\perp, \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{V}/c$
11.75.

$$\boldsymbol{Z}^{(e)} = \frac{\mu s\boldsymbol{p}_0}{R_*}, \quad \boldsymbol{Z}^{(m)} = 0$$
$$\varphi(\boldsymbol{r}) = s\gamma^2\left(1/\varepsilon - \mu\beta^2\right)\frac{\boldsymbol{p}_0\cdot\boldsymbol{R}}{R_*^3}, \quad \boldsymbol{A} = -\frac{(\varepsilon\mu - 1)\boldsymbol{V}}{c\,(1 - \varepsilon\mu\beta^2)}\varphi(\boldsymbol{r})$$

Обозначения те же, что в задачах 11.73$^\bullet$, 11.74*.
11.76. В сопутствующей системе магнитный диполь создает статическое магнитное поле, которое вычислялось в разделах 2.2 и 9.2 . Магнитное и электрическое поля в лабораторной системе можно получить с помощью преобразований Лоренца, имея в виду, что векторы $(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B})$ и $(\boldsymbol{D}, \boldsymbol{H})$ попарно образуют антисимметричные 4-тензоры второго ранга в соответствии с выражениями (11.124), (11.125). В отличие от покоящегося в лабораторной системе диполя, в данном случае потенциалы и векторы полей зависят от времени.
11.77. Кроме импульса, переданного волнам, излучатель передаст некоторый импульс среде через силу Абрагама. Его можно вычислить как импульс силы Абрагама за все время взаимодействия волн со средой: $\Delta\boldsymbol{G}^A = \int \boldsymbol{f}^A dV dt = \boldsymbol{G}^M - \boldsymbol{G}^A$. Поэтому потеря импульса излучателем совпадает с импульсом, отвечающим формуле Минковского: $\Delta\boldsymbol{G} = \boldsymbol{G}^A + +\Delta\boldsymbol{G}^A = \boldsymbol{G}^M$.

11.78.

$$w^{\boldsymbol{A}} = \frac{1}{8\pi}(\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E} + \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H}) - \frac{1}{4\pi c}\gamma^2\boldsymbol{V}\cdot(\boldsymbol{D}\times\boldsymbol{B} - \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})$$
$$\boldsymbol{g}^A = \frac{1}{c^2}\boldsymbol{S} = \frac{1}{4\pi c}\left\{\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H} - \frac{1}{c^2}\gamma^2\boldsymbol{V}(\boldsymbol{V}\cdot[\boldsymbol{D}\times\boldsymbol{B}] - \boldsymbol{V}\cdot[\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}])\right\}$$

Part V
Propagation of Waves Through Media

12 Propagation of Waves Through Media by Landau

12.1 IX The Electromagnetic Wave Equations by Landau

12.1.1 §75. The field equations in a dielectric in the absence of dispersion

IN §58 we gave the equations for a variable electromagnetic field in a metal:

$$\operatorname{curl}\mathbf{H} = 4\pi\sigma\mathbf{E}/c, \quad \operatorname{curl}\mathbf{E} = -(1/c)\partial\mathbf{B}/\partial t, \tag{75.1}$$

which hold when the field changes sufficiently slowly: the frequencies of the field must be such that the dependence of $\mathbf{j}$ on $\mathbf{E}$ (and of $\mathbf{B}$ on $\mathbf{H}$, if needed) is that corresponding to the static case. †

We shall now examine the corresponding problem for a variable electromagnetic field in a dielectric, and shall formulate equations valid for frequencies such that the relations between $\mathbf{D}$ and $\mathbf{E}$, and $\mathbf{B}$ and $\mathbf{H}$, are the same as when the fields are constant. If, as usually happens, these relations are simple proportionalities, this means that we can put

$$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu\mathbf{H}. \tag{75.2}$$

with the static values of ε and μ.

These relations are not valid (or, as we say, ε and μ exhibit dispersion) at frequencies comparable with the eigenfrequencies of the molecular or electronic vibrations which lead to the electric or magnetic polarization of the matter. The order of magnitude of such frequencies depends on the substance concerned, and varies widely. It may also be entirely different for electric and for magnetic phenomena. ‡

The equations

$$\operatorname{div}\mathbf{B} = 0, \tag{75.3}$$

$$\operatorname{curl}\mathbf{E} = -(1/c)\partial\mathbf{B}/\partial t \tag{75.4}$$

are obtained immediately by replacing $\mathbf{e}$ and $\mathbf{h}$ in the exact microscopic Maxwell's equations by their averaged values $\mathbf{E}$ and $\mathbf{B}$, and are therefore always valid. The equation

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = 0 \tag{75.5}$$

is obtained (§6) by averaging the exact microscopic equation $\operatorname{div}\mathbf{e} = 4\pi\rho$, using only the fact that the total charge on the body is zero. This result is evidently independent of the assumption made in §6 that the field is static, and equation (75.5) is therefore valid in variable fields also.

[0†] The condition $l \ll \lambda$ does not relate to the validity of equations (75.1) as they stand. In the problems [11] ussed in Chapter VII this condition was necessary in order to justify the neglect of retardation effects in the cld outside the conductor.

‡ In diamond, for example, the electric polarization is due to the electrons, and the dispersion of ε begins only [15] the ultra-violet. In a polar liquid such as water, the polarization is due to the orientation of molecules with etmanent dipole moments, and the dispersion of ε appears at frequencies $\omega \sim 10^{11}\text{sec}^{-1}$, i.e. in the centimetre [v] avelength range. The dispersion of μ in ferromagnets may begin at even lower frequencies.

A further equation is to be obtained by averaging the exact equation

$$\operatorname{curl} \mathbf{h} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\rho\mathbf{v} \tag{75.6}$$

A direct averaging gives

$$\operatorname{curl} \mathbf{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\overline{\rho\mathbf{v}} \tag{75.7}$$

When the macroscopic field depends on time, the establishment of the relation between the mean value $\overline{\rho\mathbf{v}}$ and the other quantities is fairly difficult. It is simpler to effect the averaging in the following more formal way.

Let us assume for the moment that extraneous charges of volume density ρ_{ex} are placed in the dielectric. The motion of these charges causes an "extraneous current" $\mathbf{j}_{\text{ex}}$, and the conservation of charge is expressed by an equation of continuity:

$$\partial\rho_{\text{ex}}/\partial t + \operatorname{div} \mathbf{j}_{\text{ex}} = 0$$

Instead of equation (75.5) we have $\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho_{\text{ex}}$; see (6.8). Differentiating this equation with respect to time and using the equation of continuity, we obtain $\partial(\operatorname{div} D)/\partial t = 4\pi\partial\rho_{\text{ex}}/\partial t = -4\pi \operatorname{div} \mathbf{j}_{\text{ex}}$, or

$$\operatorname{div}\left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + 4\pi\mathbf{j}_{\text{ex}}\right) = 0$$

Hence it follows that the vector in parentheses can be written as the curl of another vector, which we denote by $c\mathbf{H}$. Thus

$$\operatorname{curl} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_{\text{ex}} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \tag{75.8}$$

Outside the body this must be the same as the exact Maxwell's equation for the field in a vacuum, and therefore $\mathbf{H}$ is the magnetic field. Inside the body, in the static case, the current $\mathbf{j}_{\text{cx}}$ is related to the magnetic field by the equation $\operatorname{curl} \mathbf{H} = 4\pi\mathbf{j}_{\text{ex}}/c$, where $\mathbf{H}$ is the quantity introduced in §29 and related in a definite manner to the mean field B. Hence it follows that, in the limit of zero frequency, the vector $\mathbf{H}$ in equation (75.8) is the static quantity $\mathbf{H}(\mathbf{B})$, and our present assumption that the field varies "slowly" meansuthat the same relation $\mathbf{H}(\mathbf{B})$ holds between these variable fields. Thus $\mathbf{H}$ is a definite quantity, so that we can drop the auxiliary quantity $\mathbf{j}_{\text{ex}}$ and obtain the final equation

$$\operatorname{curl} \mathbf{H} = (1/c)\partial\mathbf{D}/\partial t \tag{75.9}$$

The quantity $\dot{\mathbf{D}}/4\pi$ is called the displacement current.

This equation replaces in dielectrics the first equation (75.1) for the field in metals. It might be supposed that the term in $\partial\mathbf{E}/\partial t$ ought to be included when this equation is used for variable fields in metals also, giving

$$\operatorname{curl} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\sigma\mathbf{E} + \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \tag{1}$$

with ε constant. In good conductors such as the true metals, however, the introduction of this term is pointless. The two terms on the right-hand side of (75.10) are essentially the first two terms in an expansion in powers of the field frequency. Since this frequency is assumed small, the second term must represent at most a small correction. In actual fact, in metals the corrections for the effect of the spatial non-uniformity of the field become important sooner than the frequency correction (see the first footnote to §59).

There are, however, substances, namely poor conductors, for which equation (75.10) may be meaningful. For such reasons as the small number of conduction electrons in semiconductors, or the small mobility of the ions in electrolyte solutions, these substances exhibit anomalously low conductivity, and hence the second term on the right of equation (75.10) may be comparable with, or even exceed, the first term at frequencies for which σ and ε may still be regarded as constants. In a field of a single frequency ω, the ratio of the second term to the first is $\varepsilon\omega/4\pi\sigma$. If this ratio is small, the body behaves as an ordinary conductor with conductivity σ. At frequencies $\omega \gg 4\pi\sigma/\varepsilon$, it behaves as a dielectric with permittivity ε.

In a homogeneous medium with constant ε and μ, equations (75.3)-(75.5) and (75.9) become

$$\begin{array}{ll} \operatorname{div}\mathbf{E}=0, & \operatorname{div}\mathbf{H}=0, \\ \operatorname{curl}\mathbf{E}=-\frac{\mu}{c}\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}, & \operatorname{curl}\mathbf{H}=\frac{\varepsilon\partial\mathbf{E}}{c}\partial t. \end{array} \tag{75.12}$$

Eliminating $\mathbf{E}$ in the usual manner, we obtain

$$\operatorname{curl}\operatorname{curl}\mathbf{H}=\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{curl}\mathbf{E}=-\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{H}}{\partial t^2}$$

and, since $\operatorname{curl}\operatorname{curl}\mathbf{H}=\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{H}-\triangle\mathbf{H}=-\triangle\mathbf{H}$, we reach the wave equation

$$\Delta\mathbf{H}-\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{H}}{\partial t^2}=0.$$

A similar equation for $\mathbf{E}$ can be obtained by eliminating $\mathbf{H}$. We see that the velocity of propagation of electromagnetic waves in a homogeneous dielectric is

$$c/\sqrt{(\varepsilon\mu)}. \tag{75.13}$$

The energy flux density is made up of the electromagnetic field energy flux and the flux of energy carried directly by the movement of matter. In a medium at rest (as is considered here) the latter is zero, and the energy flux density in a dielectric is given by the same formula (30.20) as in a metal:

$$\mathbf{S}=c\mathbf{E}\times\mathbf{H}/4\pi \tag{75.14}$$

This is easily seen by calculating div S. Using equations (75.4) and (75.9), we obtain

$$\begin{aligned} \operatorname{div}S&=\frac{c}{4\pi}(\mathbf{H}\cdot\ \operatorname{curl}\mathbf{E}-\mathbf{E}\cdot\ \operatorname{curl}\mathbf{H}) \\ &=-\frac{1}{4\pi}\left(\mathbf{E}\cdot\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}+\mathbf{H}\cdot\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\right)=-\frac{\partial U}{\partial t}, \end{aligned} \tag{75.15}$$

in accordance with the expression $\mathrm{d}U=(\mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{D}+\mathbf{H}\cdot\mathrm{dB})/4\pi$ for the differential of the internal energy of a dielectric at given density and entropy.

The requirement of symmetry of the four-dimensional energy-momentum tensor for any closed system (in this case, a dielectric in an electromagnetic field) implies that the energy flux density must be the same, apart from a factor c^2, as the spatial density of momentum (see Fields, §§32, 94), which is therefore

$$\mathbf{E}\times\mathbf{H}/4\pi c. \tag{75.16}$$

This expression must, in particular, be used in determining the forces on a dielectric in a variable electromagnetic field. The force $\mathbf{f}$ per unit volume may be calculated from the stress tensor σ_{ik} : $f_i=\partial\sigma_{ik}/\partial x_k$. Here, however, it must be remembered that σ_{ik} is the momentum flux density, which includes the momentum of both the matter and the electromagnetic field.

If $\mathbf{f}$ is taken as the force on the medium, the rate of change of the field momentum per unit volume must be subtracted:

$$f_i = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{(\mathbf{E}\times\mathbf{H})_i}{4\pi c} \tag{75.17}$$

In a constant field the last term is zero, and so this question did not arise previously. Since the field varies slowly, the stress tensor may be taken to have the same value as in a static field. For instance, in a fluid dielectric, σ_{ik} is given by the sum of the electric part (15.9) and the magnetic part (35.2). In differentiating these expressions with respect to the coordinates we must use the fact that the equations $\operatorname{curl}\mathbf{E} \mp 0, \operatorname{curl}\mathbf{H} = 0$ for a static field (in the absence of currents) are replaced by equations (75.12). This introduces new terms $-\varepsilon\mathbf{E}\times\operatorname{curl}\mathbf{E}/4\pi - \mu\mathbf{H}\times\operatorname{curl}\mathbf{H}/4\pi$, which are now not zero but equal to

$$\frac{\varepsilon\mu}{4\pi c}\mathbf{E}\times\dot{\mathbf{H}} - \frac{\varepsilon\mu}{4\pi c}\mathbf{H}\times\dot{\mathbf{E}} = \frac{\varepsilon\mu}{4\pi c}\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E}\times\mathbf{H}).$$

The required force is therefore

$$\begin{aligned}\mathbf{f} = &-\operatorname{grad}P_o(\rho,T) - \frac{E^2}{8\pi}\operatorname{grad}\varepsilon - \frac{H^2}{8\pi}\operatorname{grad}\mu \\ &+\operatorname{grad}\left[\rho\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_T\frac{E^2}{8\pi} + \rho\left(\frac{\partial\mu}{\partial\rho}\right)_T\frac{H^2}{8\pi}\right] + \frac{\varepsilon\mu-1}{4\pi c}\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E}\times\mathbf{H})\end{aligned} \tag{75.18}$$

The last term in this expression is called the Abraham force (M. Abraham, 1909).

12.1.2 §76. The electrodynamics of moving dielectrics

The motion of a medium results in an interaction between the electric and magnetic fields. Such phenomena for conductors have been discussed in §63; we shall now discuss them for dielectrics. Here we are in practice concerned with the phenomena occurring in moving media when external electric or magnetic fields are present. It should be emphasized that they are in no way related to the appearance of fields as a result of the motion itself (§§36, 64).

Our starting point in §63 was the formulae giving the transformation of the field when the frame of reference is changed. There it was sufficient to know the general formulae for the transformation of electric and magnetic fields in a vacuum, the averaging of which gives immediately the formulae for the transformation of $\mathbf{E}$ and $\mathbf{B}$. In dielectrics the problem is considerably more complex, because the electromagnetic field is described by [a] greater number of quantities.

In the motion of macroscopic bodies, the velocities involved are usually small compared with the velocity of light. To obtain the necessary approximate transformation formulae, however, it is simplest to use the exact relativistic formulae which hold for all velocities.

In the electrodynamics of the field in a vacuum, the components of the electric and magnetic field vectors $\mathbf{e}$ and $\mathbf{h}$ are actually components of an antisymmetrical fourdimensional tensor (or four-tensor) of rank two (see Fields, §23). The same is true of $\mathbf{E}$ and $\mathbf{B}$, which are the mean values of $\mathbf{e}$ and $\mathbf{h}$. Thus there is a four-tensor $F_{\mu\nu}$ whose components are given by †

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}, \quad F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}. \tag{76.1}$$

Using this tensor, the first two Maxwell's equations,

$$\operatorname{div}\mathbf{B}=0,\quad \operatorname{curl}\mathbf{E}=-(1/c)\partial\mathbf{B}/\partial t, \tag{76.2}$$

can be written in the four-dimensional form

$$\frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x^{v}}+\frac{\partial F_{\mu v}}{\partial x^{\lambda}}+\frac{\partial F_{v\lambda}}{\partial x^{\mu}}=0. \tag{76.3}$$

This shows the relativistic invariance of the equations. The applicability of equations (76.2) to moving bodies is evident, since they are obtained directly from the exact microscopic Maxwell's equations by replacing **e** and **h** by their averaged values **E** and **B**.

The second pair of Maxwell's equations

$$\operatorname{div}\mathbf{D}=0,\quad \operatorname{curl}\mathbf{H}=(1/c)\partial\mathbf{D}/\partial t \tag{76.4}$$

also retain their form in moving media. This is seen from the arguments given in §75, in which we used only general properties of bodies (e.g. that the total charge is zero), equally valid for moving bodies and bodies at rest. However, the relations between **D** and **E**, and **B** and **H**, need not be the same as in bodies at rest.

Since they are valid for bodies both at rest and in motion, equations (76.4) must be unaltered by the Lorentz transformation. For a field in a vacuum, the vectors **D** and **H** are the same as **E** and **B**, and the relativistic invariance of the second pair of Maxwell's equations appears in the fact that they also can be written in four-dimensional form, using the same tensor $F_{\lambda\mu}$: $\partial F^{\lambda\mu}/\partial x^{\mu}=0$ (see Fields, §30). Hence it is clear that, to ensure the relativistic invariance of equations (76.4), it is necessary that the components of the vectors ^{D} and H should be transformed as the components of a four-tensor exactly similar to $F_{\mu\nu}$, which we denote by $H_{\mu v}$:

$$H_{\mu\nu}=\begin{pmatrix}0 & D_x & D_y & D_z\\ -D_x & 0 & -H_z & H_y\\ -D_y & H_z & 0 & -H_x\\ -D_z & -H_y & H_x & 0\end{pmatrix},\quad H^{\mu\nu}=\begin{pmatrix}0 & -D_x & -D_y & -D_z\\ D_x & 0 & -H_z & H_y\\ D_y & H_z & 0 & -H_x\\ D_z & -H_y & H_x & 0\end{pmatrix}. \tag{76.5}$$

Using this tensor, we can write equations (76.4) in the form

$$\partial H^{\lambda\mu}/\partial x^{\mu}=0 \tag{76.6}$$

Having elucidated that the quantities $\mathbf{E},\mathbf{D},\mathbf{H},\mathbf{B}$ form four-dimensional tensors, we have also ascertained the law of their transformation from one frame of reference to another. However, we are interested rather in the relations between the quantities in a moving medium, which generalize the relations $\mathbf{D}=\varepsilon\mathbf{E}$ and $\mathbf{B}=\mu\mathbf{H}$ valid in a medium at rest.

We denote by u^{μ} the velocity four-vector of the medium; its components are related to the three-dimensional velocity v by

$$u^{\mu}=\left(\frac{1}{\sqrt{(1-v^2/c^2)}},\frac{\mathrm{v}}{c\sqrt{(1-v^2/c^2)}}\right)$$

From this four-vector and the four-tensors $F^{\mu\nu}$ and $H^{\mu\nu}$ we form combinations which become **E** and **D** in a medium at rest. These combinations are the four-vectors $F^{\lambda\mu}u_{\mu}$ and $H^{\lambda\mu}u_{\mu}$; for

[0]† In the present section the four-dimensional tensor suffixes, which take the values $0,1,2,3$, are denoted by Greek letters λ,μ,v.

$\mathbf{v} = 0$ their time components are zero and their space components are $\mathbf{E}$ and $\mathbf{D}$ respectively. The four-dimensional generalization of the equation $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$ is therefore evidently †

$$H^{2\mu}u_\mu = \varepsilon F^{2\mu}u_\mu \tag{76.7}$$

Similarly, we see that the generalization of $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ is the four-dimensional equation

$$F_{\lambda\mu}u_v + F_{\mu v}u_\lambda + F_{v\lambda}u_\mu = \mu\left(H_{\lambda\mu}u_v + H_{\mu v}u_\lambda + H_{v\lambda}u_\mu\right) \tag{76.8}$$

Returning from the four-dimensional to the three-dimensional notation, we derive from these two equations the vector relations ‡

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{D} + \mathbf{v}\times\mathbf{H}/c &= \varepsilon(\mathbf{E} + \mathbf{v}\times\mathbf{B}/c)\\ \mathbf{B} + \mathbf{E}\times\mathbf{v}/c &= \mu(\mathbf{H} + \mathbf{D}\times\mathbf{v}/c)\end{aligned}\right\} \tag{76.9}$$

These formulae, first derived by H. Minkowski (1908), are exact in the sense that no assumption has yet been made concerning the magnitude of the velocity. If the ratio v/c is assumed small the equations can be solved for $\mathbf{D}$ and $\mathbf{B}$ as far as terms of the first order to give

$$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E} + (\varepsilon\mu - 1)\mathbf{v}\times\mathbf{H}/c \tag{76.10}$$

$$\mathbf{B} = \mu\mathbf{H} + (\varepsilon\mu - 1)\mathbf{E}\times\mathbf{v}/c \tag{76.i1}$$

These formulae, together with Maxwell's equations (76.2) and (76.4), form the basis for the electrodynamics of dielectrics in motion.

The boundary conditions on Maxwell's equations are also somewhat modified. From the equations $\operatorname{div}\mathbf{D} = 0, \operatorname{div}\mathbf{B} = 0$ the continuity of the normal components of the inductions follows as before:

$$D_{n1} = D_{n2}, \quad B_{n1} = B_{n2}. \tag{76.12}$$

The conditions on the tangential components of the fields are most simply obtained b)

thanging from the fixed frame of reference K to another, K', which moves with the surface zlement considered, whose velocity along the normal $\mathbf{u}$ we denote by v_n. The usual conditions, namely that $\mathbf{E}'_t$ and $\mathbf{H}'_t$ are continuous, hold in the frame K'. By the relativistic ransformation formulae (see Fields, §24), these are equivalent to the continuity of the angential components of the vectors $\mathbf{E} + \mathbf{v}\times\mathbf{B}/c$ and $\mathbf{H} - \mathbf{v}\times\mathbf{D}/c$. Taking the components perpendicular to n and using equations (76.12), we obtain the required boundary conditions:

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{n}\times(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) &= v_n\left(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1\right)/c,\\ \mathbf{n}\times(\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) &= -v_n\left(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1\right)/c.\end{aligned}\right\} \tag{76.13}$$

If we substitute here the expressions (76.10) and (76.11), and neglect terms of higher order in v/c, we obtain

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{n}\times(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) &= v_n\left(\mu_2 - \mu_1\right)\mathbf{H}_t/c\\ \mathbf{n}\times(\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) &= -v_n\left(\varepsilon_2 - \varepsilon_1\right)\mathbf{E}_t/c.\end{aligned}\right\} \tag{76.14}$$

In this approximation the values of $\mathbf{H}$ and $\mathbf{E}$ on the two sides of the surface need not be distinguished on the right-hand sides of equations (76.14).

If the body moves so that its surface moves tangentially to itself (e.g. a solid of revolution rotating about its axis), then $v_n = 0$. Only in this case do the boundary conditions (76.13) or (76.14) reduce to the usual conditions that $\mathbf{E}_t$ and $\mathbf{H}_t$ be continuous.

[0]† It should be noted that, by writing down relations involving only the local value of the velocity we neglect slight effects due to the possibility of a velocity gradient, such as gyromagnetic effects (§36).

‡ If either of the relations $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$ and $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ does not hold in the medium at rest, the corresponding relation (76.9) is replaced by a different functional relation between the vector sums on the two sides of the equation.

PROBLEMS

Problem 1. A dielectric sphere rotates uniformly in a vacuum in a uniform static magnetic field **5**. Determine the resulting electric field near the sphere.

Solution. In calculating the resulting electric field, the magnetic field may be taken to be the same as for a sphere at rest, since an allowance for the reciprocal effect of the magnetic field variation would give corrections of a higher order of smallness. Within the sphere, the magnetic field has the uniform value $\mathbf{H}^{(i)} = 3\mathfrak{g}/(2+\mu)$; cf. (8.2).
Since the rotation is steady, the resulting electric field is constant and, like any static electric field, has a potential: $\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\phi$. Outside the sphere, the potential satisfies the equation $\Delta\phi^{(e)} = 0$; inside the sphere, it satisfies

$$\triangle\phi^{(i)} = 2(\varepsilon\mu - 1)\Omega \cdot H^{(i)}/c\varepsilon \tag{1}$$

Where Ω is the angular velocity. The latter equation is obtained from $\operatorname{div}\mathbf{D} = \mathbf{0}$ by substituting for $\mathbf{D}$ the expression (76.10) with $\mathbf{v} = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}$. The condition that the normal component of $\mathbf{D}$ be continuous at the surface of the sphere gives

$$-\varepsilon\left[\frac{\partial\phi^{(i)}}{\partial r}\right]_{r=a} + \frac{\varepsilon\mu - 1}{c}a\left[\mathbf{\Omega}\cdot\mathbf{H}^{(i)} - (\mathbf{\Omega}\cdot\mathbf{u})\left(\mathbf{H}^{(i)}\cdot\mathbf{u}\right)\right] = -\left[\frac{\partial\phi^{(e)}}{\partial r}\right]_{r=a} \tag{2}$$

Here a is the radius of the sphere and u a unit radial vector.
From the symmetry of the sphere, the required electric field is determined by only two constant vectors, Ω and 5. From the components of these vectors we can form a bilinear scalar $\mathfrak{S}\cdot\Omega$ and a bilinear tensor $\mathfrak{H}_i\Omega_k + \mathfrak{S}_k\Omega_i - \frac{2}{3}\delta_{ik}5\cdot\Omega$, whose trace is zero. Accordingly, we seek the field potential outside the sphere in the form

$$\phi^{(e)} = \frac{1}{6}D_{ik}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_k}\binom{1}{r} = \frac{1}{2}D_{ik}\frac{n_in_k}{r^3} \tag{3}$$

Where D_{ik} is a constant tensor (with $D_{ii} = 0$). the electric quadrupole moment tensor of the sphere (see Fields, 41). No term of the form constant/ r can appear in $\phi^{(e)}$, since such a term would give a non-zero total electric flux brough a surface surrounding the sphere, whereas the sphere is uncharged. The field potential inside the sphere is ought in the form

$$\phi^{(i)} = \frac{r^2}{2a^5}D_{ik}n_in_k + \frac{\varepsilon\mu - 1}{3c\varepsilon}\Omega\cdot\mathbf{H}^{(i)}\left(r^2 - a^2\right). \tag{4}$$

The first term is the solution of the homogeneous equation $\Delta\phi = 0$, and the coefficient is chosen so as to give continuity of the potential, and therefore of $\mathbf{E}_t$, at the surface of the sphere. Substituting (3) and (4) in (2), we obtain

$$D_{ik} = -\frac{a^5}{c}\frac{3(\varepsilon\mu - 1)}{(3+2\varepsilon)(2+\mu)}\left[\mathfrak{S}_i\Omega_k + \mathfrak{S}_k\Omega_i - \frac{2}{3}\delta_{ik}\mathfrak{S}\cdot\Omega\right] \tag{5}$$

Thus a quadrupole electric field is formed near the rotating sphere, and the quadrupole moment of the sphere is given by formula (5). In particular, if the axis of rotation (the z-axis) is parallel to the external field, D_{ik} has only the diagonal components

$$D_{zz} = -\frac{a^5}{c}\frac{4(\varepsilon\mu - 1)}{(3+2\varepsilon)(2+\mu)}\mathfrak{S}\cdot\Omega, \quad D_{xx} = D_{yy} = -\frac{1}{2}D_{zz^*}$$

Similarly, a quadrupole magnetic field occurs near a sphere rotating in a uniform electric field. The magnetic quadrupole moment is given by (5) if the sign is changed and $\varepsilon, \mu, \mathfrak{G}$ are replaced by μ, ε, respectively.

Problem 2. A magnetized sphere rotates uniformly in a vacuum about its axis, which is parallel to the direction of magnetization. Determine the resulting electric field near the sphere. †

Solution. The magnetic field inside the sphere is uniform, and is expressed in terms of the constant magnetization M by the equations $B^{(i)} + 2H^{(i)} = 0$(cf.(8.1)) and $B^{(i)} - H^{(i)} = 4\pi M$, whence $B^{(i)} = 8\pi M/3$, $\mathbf{H}^{(i)} = -4\pi\mathbf{M}/3$. The second of formulae (76.9) does not hold in this case, because the formula $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$ is not valid for a ferromagnet at rest: from the first of (76.9) we have, inside the sphere,

$$\begin{aligned}\mathbf{D} &= \varepsilon\mathbf{E} + \varepsilon\mathbf{v}\times\mathbf{B}/c - \mathbf{v}\times\mathbf{H}/c \\ &= \varepsilon\mathbf{E} + 4\pi(2\varepsilon+1)\mathbf{v}\times\mathbf{M}/3c\end{aligned}$$

The potential of the resulting electric field outside the sphere satisfies the equation $\triangle\phi^{(e)} = 0$, and that inside the sphere satisfies $\triangle\phi^{(i)} = 8\pi(2\varepsilon+1)M\Omega/3c\varepsilon$.

The boundary condition that D_n be continuous at the surface of the sphere gives

$$-\varepsilon\left[\frac{\partial\phi^{(i)}}{\partial r}\right]_{r=a} + \frac{4\pi(2\varepsilon+1)}{3c}a\Omega M\sin^2\theta = -\left[\frac{\partial\phi^{(e)}}{\partial r}\right]_{r-a}$$

where θ is the angle between the normal n and the direction of Ω and $\mathbf{M}$ (the z-axis). We seek $\phi^{(e)}$ and $\phi^{(i)}$ in the forms

$$\begin{aligned}\phi^{(e)} &= \frac{D_{ik}n_in_k}{2r^3} = \frac{D_{zz}}{4r^3}\left(3\cos^2\theta - 1\right), \\ \phi^{(i)} &= \frac{r^2}{4a^5}D_{zz}\left(3\cos^2\theta - 1\right) + \frac{4\pi(2\varepsilon+1)}{9c\varepsilon}M\Omega\left(r^2 - a^2\right).\end{aligned}$$

From the boundary condition we obtain the following expressions for the electric quadrupole moment of the rotating sphere:

$$D_{zz} = -\frac{4(2\varepsilon+1)}{3c(2\varepsilon+3)}a^2\Omega\mathscr{M}, \quad D_{xx} = D_{yy} = -\frac{1}{2}D_{zz}$$

where $\mathscr{M}$ is the total magnetic moment of the sphere. For a metal sphere we must take $\varepsilon\to\infty$, giving

$$D_{zz} = -4\Omega\mathscr{M}a^2/3c$$

12.1.3 §77. The dispersion of the permittivity

Let us now go on to study the important subject of rapidly varying electromagnetic fields, whose frequencies are not restricted to be small in comparison with the frequencies changed, since the sphere then emits electromagnetic waves.
which characterize the establishment of the electric and magnetic polarization of the substances concerned.

An electromagnetic field variable in time must necessarily be variable in space also. For a frequency ω, the spatial periodicity is characterized by a wavelength $\lambda \sim c/\omega$. As the frequency increases, λ eventually becomes comparable with the atomic dimensions a. The macroscopic description of the field is thereafter invalid.

The question may arise whether there is any frequency range in which, on the one hand. dispersion phenomena are important but, on the other hand, the macroscopic formulation still holds good. It is easy to see that such a range must exist. The most rapid manner of establishment of the electric or magnetic polarization in matter is the electronic mechanism.

Its relaxation time is of the order of the atomic time a/v, where v is the velocity of the electrons in the atom. Since $v \ll c$, even the wavelength $\lambda \sim ac/v$ corresponding to these times is large compared with a.

In what follows we shall assume the condition $\lambda \gg a$ to hold. + It must be borne in mind, however, that this condition may not be sufficient: for metals at low temperatures there is a range of frequencies in which the macroscopic theory is inapplicable, although the inequality $c/\omega \gg a$ is satisfied (see §87).

The formal theory given below is equally applicable to metals and to dielectrics. At frequencies corresponding to the motion of the electrons within the atoms (optical frequencies) and at higher frequencies, there is. indeed, not even a quantitative difference in the properties of metals and dielectrics.

It is clear from the discussion in §75 that Maxwell's equations

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = 0, \quad \operatorname{div}\mathbf{B} = 0, \tag{77.1}$$

$$\operatorname{curl}\mathbf{E} = -(1'c)\,\partial\mathbf{B}/\partial t, \quad \operatorname{curl}\mathbf{H} = (1/c)\partial\mathbf{D}/\partial t \tag{77.2}$$

remain formally the same in arbitrary variable electromagnetic fields. These equations are, however, largely useless until the relations between the quantities $\mathbf{D}, \mathbf{B}, \mathbf{E}$ and $\mathbf{H}$ which appear in them have been established. At the high frequencies at present under consideration. these relations bear no resemblance to those which are valid in the static case and which we have used for variable fields in the absence of dispersion.

First of all, the principal property of these relations, namely the dependence of $\mathbf{D}$ and $\mathbf{B}$ only on the values of $\mathbf{E}$ and $\mathbf{H}$ at the instant considered, no longer holds good. In the general case of an arbitrary variable field. the values of $\mathbf{D}$ and $\mathbf{B}$ at a given instant are not determined only by the values of $\mathbf{E}$ and $\mathbf{H}$ at that instant. On the contrary, they depend in general on the values of $\mathbf{E}(t)$ and $\mathbf{H}(t)$ at every previous instant. This expresses the fact that the establishment of the electric or magnetic polarization of the matter cannot keep up with the change in the electromagnetic field. The frequencies at which dispersion phenomena first appear may be completely different for the electric and the magnetic properties of the substance.

In the present section we shall refer to the dependence of $\mathbf{D}$ on $\mathbf{E}$; the specific features of the dispersion of magnetic properties will be discussed in §79.

The polarization vector $\mathbf{P}$ has been introduced in §6 by means of the definition $\bar{\rho} = -\operatorname{div}\mathbf{P}$, ρ being the true (microscopic) charge density. This equation expresses the

electric neutrality of the body as a whole, and together with the condition $\mathbf{P} = 0$ outside the body it shows that the total electric moment of the body is $\int \mathbf{P}\mathrm{d}V$. This derivation is evidently valid for variable as well as for static fields. Thus in any variable field, even if dispersion is present, the vector $\mathbf{P} = (\mathbf{D} - \mathbf{E})/4\pi$ retains its physical significance: it is the electric moment per unit volume.

In rapidly varying fields, the field strengths involved are usually fairly small. Hence the relation between $\mathbf{D}$ and $\mathbf{E}$ can always be taken to be linear. † The most general linear relation between $\mathbf{D}(t)$ and the values of the function $\mathbf{E}(t)$ at all previous instants can be written in the integral form

$$\mathbf{D}(t) = \mathbf{E}(t) + \int_0^\infty f(\tau)\mathbf{E}(t-\tau)\mathrm{d}\tau \tag{77.3}$$

It is convenient to separate the term $\mathbf{E}(t)$, for reasons which will become evident later. In equation (77.3) $f(\tau)$ is a function of time and of the properties of the medium. By analogy with

[0]† The effects (called the natural optical activity) resulting from terms of the next order in the small ratio $a\lambda$ will be considered in §§104-106.

the electrostatic formula $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$, we write the relation (77.3) in the symbolic form $\mathbf{D} = \hat{\varepsilon}\mathbf{E}$, where $\hat{\varepsilon}$ is a linear integral operator whose effect is shown by (77.3).

Any variable field can be resolved by a Fourier expansion into a series of monochromatic components, in which all quantities depend on time through the factor $e^{-i\omega t}$. For such fields the relation (77.3) between $\mathbf{D}$ and $\mathbf{E}$ becomes

$$\mathbf{D} = \varepsilon(\omega)\mathbf{E} \tag{77.4}$$

where the function $\varepsilon(\omega)$ is defined as

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \int_0^\infty f(\tau)e^{i\omega\tau}\,\mathrm{d}\tau \tag{77.5}$$

Thus, for periodic fields, we can regard the permittivity (the coefficient of proportionality between $\mathbf{D}$ and $\mathbf{E}$) as a function of the field frequency as well as of the properties of the medium. The dependence of ε on the frequency is called its dispersion relation.

The function $\varepsilon(\omega)$ is in general complex. We denote its real and imaginary parts by ε' and ε'' :

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon'(\omega) + i\varepsilon''(\omega) \tag{77.6}$$

From the definition (77.5) we see at once that

$$\varepsilon(-\omega) = \varepsilon^*(\omega) \tag{77.7}$$

Separating the real and imaginary parts, we have

$$\varepsilon'(-\omega) = \varepsilon'(\omega), \quad \varepsilon''(-\omega) = -\varepsilon''(\omega) \tag{77.8}$$

Thus $\varepsilon'(\omega)$ is an even function of the frequency, and $\varepsilon''(\omega)$ is an odd function.
For frequencies which are small compared with those at which the dispersion begins, we can expand $\varepsilon(\omega)$ as a power series in ω. The expansion of the even function $\varepsilon'(\omega)$ contains only even powers, and that of the odd function $\varepsilon''(\omega)$ contains only odd powers. In the limit

as $\omega \to 0$, the function $\varepsilon(\omega)$ in dielectrics tends, of course, to the electrostatic permittivity, which we here denote by ε_0. In dielectrics, therefore, the expansion of $\varepsilon'(\omega)$ begins with the constant term ε_0, while that of $\varepsilon''(\omega)$ begins, in general, with a term in ω.
The function $\varepsilon(\omega)$ at low frequencies can also be discussed for metals, if it is defined in such a way that, in the limit $\omega \to 0$, the question

$$\operatorname{curl}\mathbf{H} = (1/c)\partial\mathbf{D}/\partial t$$

becomes the equation

$$\operatorname{curl}\mathbf{H} = 4\pi\sigma\mathbf{E}/c$$

for a static field in a conductor. Comparing the two equations, we see that for $\omega \to 0$ we must have $\partial\mathbf{D}/\partial t \to 4\pi\sigma\mathbf{E}$. But, in a periodic field, $\partial\mathbf{D}/\partial t = -i\omega\varepsilon\mathbf{E}$, and we thus obtain the following expression for $\varepsilon(\omega)$ in the limit of low frequencies:

$$\varepsilon(\omega) = 4\pi i\sigma/\omega. \tag{77.9}$$

[0]† Here we assume that D depends linearly on E alone, and not on H. In a constant field, a linear dependence of D on H is excluded by the requirement of invariance with respect to time reversal. In a variable field, this condition no longer applies, and a linear relation between $\mathbf{D}$ and $\mathbf{H}$ is possible if the substance possesses symmetry of various kinds. It is, however, a small effect of the order of a/λ, of the kind mentioned in the last footnote.

Thus the expansion of the function $\varepsilon(\omega)$ in conductors begins with an imaginary term in $1/\omega$, which is expressed in terms of the ordinary conductivity σ for steady currents. † The next term in the expansion of $\varepsilon(\omega)$ is a real constant, although for metals this constant does not have the same electrostatic significance as it does for dielectrics. ‡
Moreover, this term of the expansion may again be devoid of significance if the effects of the spatial non-uniformity of the field of the electromagnetic wave appear before those of its periodicity in time.

12.1.4 §78. The permittivity at very high frequencies

In the limit as $\omega \to \infty$, the function $\varepsilon(\omega)$ tends to unity. This is evident from simple physical considerations: when the field changes sufficiently rapidly, the polarization processes responsible for the difference between the field $\mathbf{E}$ and the induction $\mathbf{D}$ cannot occur at all.
It is possible to establish the limiting form of the function $\varepsilon(\omega)$ at high frequencies, which is valid for all bodies, whether metals or dielectrics. The field frequency is assumed large compared with the frequencies of the motion of all, or at least the majority, of the electrons in the atoms forming the body. When this condition holds, we can calculate the polarization of the substance by regarding the electrons as free and neglecting their interaction with one another and with the nuclei of the atoms.
The velocities v of the motion of the electrons in the atoms are small compared with the velocity of light. Hence the distances v/ω which they traverse during one period of the electromagnetic wave are small compared with the wavelength c/ω. For this reason we can assume the wave field uniform in determining the velocity acquired by an electron in that field.
The equation of motion is $m\,\mathrm{d}\mathbf{v}'/\mathrm{d}t = e\mathbf{E} = e\mathbf{E}_0 e^{-i\omega t}$, where e and m are the electron charge and mass, and $\mathbf{v}'$ is the additional velocity acquired by the electron in the wave field.

Hence $\mathbf{v}' = ie\mathbf{E}/m\omega$. The displacement $\mathbf{r}$ of the electron due to the field is given by $\dot{\mathbf{r}} = v$. and therefore $\mathbf{r} = -e\mathbf{E}/m\omega^2$. The polarization $\mathbf{P}$ of the body is the dipole moment per unit volume. Summing over all electrons, we find $\mathbf{P} = \Sigma e\mathbf{r} = -e^2 N\mathbf{E}/m\omega^2$, where N is the number of electrons in all the atoms in unit volume of the substance. By the definition of the electric induction, we have $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$. We thus have the formula

$$\varepsilon(\omega) = 1 - 4\pi N e^2/m\omega^2 \tag{78.1}$$

The range of frequencies over which this formula is applicable begins, in practice, at the far ultra-violet for light elements and at the X-ray region for heavier elements.

If $\varepsilon(\omega)$ is to retain the significance which it has in Maxwell's equations, the frequency must also satisfy the condition $\omega \ll c/a$. We shall see later (§124), however, that the expression (78.1) can be allotted a certain physical significance even at higher frequencies.

12.1.5 §79. The dispersion of the magnetic permeability

Unlike $\varepsilon(\omega)$, the magnetic permeability $\mu(\omega)$ ceases to have any physical meaning at relatively low frequencies. To take account of the deviation of $\mu(\omega)$ from unity would then be an unwarrantable refinement. To show this, let us investigate to what extent the physical meaning of the quantity $\mathbf{M} = (\mathbf{B}-\mathbf{H})/4\pi$, as being the magnetic moment per unit volume, is maintained in a variable field. The magnetic moment of a body is, by definition, the integral

[0]† The imaginary part of the function $\varepsilon(\omega)$ is sometimes represented in the form (77.9) for all frequencies; this amounts to introducing a new function $\sigma(\omega)$, which has no physical significance apart from its relationship to $\varepsilon''(\omega)$.
‡ To avoid misunderstanding, we should point out a slight change in notation in comparison with §75. In equation (75.10) for poor conductors, $\varepsilon(\omega)$ is $(4\pi i\sigma/\omega) + \varepsilon$.

$$\frac{1}{2c}\int \mathbf{r}\times\overline{\rho\mathbf{v}}\mathrm{d}V \tag{79.1}$$

The mean value of the microscopic current density is related to the mean field by equation (75.7):

$$\operatorname{curl}\mathbf{B}=\frac{4\pi}{c}\overline{\rho\mathbf{v}}+\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}. \tag{79.2}$$

Subtracting the equation curl $\mathbf{H}=(1/c)\hat{\lambda}\mathbf{D}/\partial t$, we obtain

$$\overline{\rho\mathbf{v}}=c\ \operatorname{curl}\mathbf{M}+\partial\mathbf{P}/\partial t \tag{79.3}$$

The integral (79.1) can, as shown in §29, be put in the form $\int \mathrm{M}dV$ only if $\overline{\rho\mathbf{v}}=c$ curl M and $\mathbf{M}=0$ outside the body.

Thus the physical meaning of $\mathbf{M}$, and therefore of the magnetic susceptibility, depends on the possibility of neglecting the term $\lambda\mathbf{P}/\partial t$ in (79.3). Let us see to what extent the conditions can be fulfilled which make this neglect permissible.

For a given frequency, the most favourable conditions for measuring the susceptibility are those where the body is as small as possible (to increase the space derivatives in curl M) and the electric field is as weak as possible (to reduce $\mathbf{P}$). The field of an electromagnetic wave does not satisfy the latter condition, because $E\sim H$. Let us therefore consider a variable magnetic field, say in a solenoid, with the body under investigation placed on the axis. The electric field is due only to induction by the variable magnetic field. and the order of magnitude of E inside the body can be obtained by estimating the terms in the equation curl $\mathbf{E}=-(1/c)\partial\mathbf{B}/\partial t$, whence $E/l\sim\omega H/c$ or $E\sim(\omega l/c)H$, where l is the dimension of the body. Putting $\varepsilon-1\sim 1$, we have $\partial P/\partial t\sim\omega E\sim\omega^2 lH/c$. For the space derivatives of
the magnetic moment $\mathbf{M}=\chi\mathbf{H}$ we have c curl $\mathbf{M}\sim c\chi\mathbf{H}/l$. If $|\partial\mathbf{P}/\partial t|$ is small compared with $|\ c$ curl $\mathbf{M}\ |$, we must have

$$l^2\ll\chi c^2/\omega^2 \tag{79.4}$$

It is evident that the concept of magnetic susceptibility can be meaningful only if this mequality allows dimensions of the body which are (at least) just macroscopic, i.e. if it is compatible with the inequality $l\gg a$, where a is the atomic dimension. This condition is certainly not fulfilled for the optical frequency range; for such frequencies, the magnetic susceptibility is always $\sim v^2/c^2$, where v is the electron velocity in the atom; † but the optical frequencies themselves are $\sim v/a$, and therefore the right-hand side of the inequality (79.4) is $\sim a^2$.
Thus there is no meaning in using the magnetic susceptibility from optical frequencies onward, and in discussing such phenomena we must put $\mu=1$. To distinguish between $\mathbf{B}$ and $\mathbf{H}$ in this frequency range would be an over-refinement. Actually, the same is true for many phenomena even at frequencies well below the optical range. ‡
The presence of a considerable dispersion of the permeability makes possible the existence of quasi-steady oscillations of the magnetization in ferromagnetic bodies. In order to exclude the possible influence of the conductivity, we shall consider ferrites. which are non-metallic ferromagnets.
The term "quasi-steady" means, as usual (§58), that the frequency is assumed to satisfy the condition $\omega\ll c/l$, where l is the characteristic dimension of the body (or the "wavelength" of the oscillation). In addition, we shall neglect the exchange energy related to the inhomogeneity of the magnetization resulting from the oscillations; that is, the spatial dispersion (§103) of the permeability is assumed to be unimportant. For this, the dimensions l must be much greater than the characteristic length for the inhomogeneity energy: $l\gg\sqrt{\alpha}$, where α is of the order

of the coefficients in (43.1).
We can put $\mathbf{H}$ and $\mathbf{B}$ in the forms $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}', \mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}'$, where $\mathbf{H}_0$ and $\mathbf{B}_0$ are the field and induction in the statically magnetized body, $\mathbf{H}'$ and $\mathbf{B}'$ the variable parts in the oscillations. When the displacement current is neglected, these variable parts satisfy the equations

$$\operatorname{curl} \mathbf{H}' = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{B}' = 0, \tag{79.5}$$

which differ from the magnetostatic equations only in that the permeability is now (for a monochromatic field $xe^{-i\omega t}$) a function of the frequency, not a constant.§ A ferromagnetic medium is magnetically anisotropic, and its permeability is therefore a tensor $\mu_{ik}(\omega)$, which determines the linear relation between the variable parts of the induction and the field.

The first equation (79.5) shows that the magnetic field has a potential: $\mathbf{H}' = -\operatorname{grad} \psi$. Substituting in the second equation $B'_i = \mu_{ik} H'_k = -\mu_{ik} \partial\psi/\partial x_k$, we then obtain an equation for the potential within the body:

$$\mu_{ik}(\omega) \partial^2 \psi / \partial x_i \partial x_k = 0 \tag{79.6}$$

Outside the body, the potential satisfies Laplace's equation $\triangle\psi = 0$; on the surface, $\mathbf{H}'_t$ and B'_n must as usual be continuous. The first condition is equivalent to the continuity of the potential ψ itself; the second implies the continuity of $\mu_{ik} n_i \partial\psi/\partial x_k$, where $\mathbf{n}$ is a unit vector along the normal to the surface. Far from the body, we must have $\psi \to 0$.

The problem thus formulated has non-trivial solutions only for certain values of the μ_{ik}, regarded as parameters. Equating the functions $\mu_{ik}(\omega)$ to these, we find the natural oscillation frequencies of the magnetization of the body, called the inhomogeneous ferromagnetic resonance frequencies.

The simplest type of magnetostatic oscillation of a uniformly magnetized ellipsoid consists in oscillations which maintain the uniformity, the magnetization oscillating as a whole. To find their frequencies, it is not necessary to obtain a new solution of the field equations; they can be derived directly from the relations (29.14):

$$H_i + n_{ik} (B_k - H_k) = \mathfrak{S}_i \tag{79.7}$$

where n_{ik} is the demagnetizing factor tensor of the ellipsoid; $\mathbf{H}$ and $\mathbf{B}$ relate to the field within it, and $\mathfrak{S}$ is the external magnetic field. The latter is assumed to be uniform; in $\mathbf{H}$ and $\mathbf{B}$, we again separate the oscillatory parts $\mathbf{H}'$ and $\mathbf{B}'$, which are now uniform throughout the body. For these we have

$$H'_i + n_{ik} (B'_k - H'_k) = 0$$

or

$$(\delta_{ik} + 4\pi n_{il} \chi_{lk}) H'_k = 0,$$

with the magnetic susceptibility tensor $\chi_{ik}(\omega)$ defined by $\mu_{ik} = \delta_{ik} + 4\pi\chi_{ik}$. Equating to zero the determinant of this system of linear homogeneous equations, we find

[0†] This estimate relates to the diamagnetic susceptibility; the relaxation times of any paramagnetic or ferromagnetic processes are certainly long compared with the optical periods. It must be emphasized, however, that the estimates are made for an isotropic body, and must be used with caution when applied to ferromagnets. In Particular, the gyrotropic terms in the tensor μ_{ik} which decrease only slowly (as $1/\omega$) with increasing frequency (see Problem 1) may be important even at fairly high frequencies.
‡ This is discussed from a somewhat different standpoint in §103 below; see the second footnote to that section.
§ These oscillations are therefore called magnetostatic oscillations. The theory has been given by C. Kittel (1947) for homogeneous (see below) magnetostatic oscillations and by L. R. Walker (1957) for inhomogeneous ones.

$$\det\left|\delta_{ik}+4\pi n_{il}\chi_{lk}(\omega)\right|=0, \tag{79.8}$$

the roots of which give the natural oscillation frequencies. These are called the homogeneous ferromagnetic resonance frequencies.

PROBLEMS

Problem 1. Using the macroscopic equation of motion of the magnetic moment (the Landau-Lifshitz equation; see $SP2,(69.9)$), derive the magnetic permeability tensor for a uniformly magnetized uniaxial ferromagnet of the easy-axis type, in the absence of dissipation (L. D. Landau and E. M. Lifshitz. 1935).

SOLUTION. The equation of motion of the magnetization in a ferromagnet is

$$\dot{\mathbf{M}}=\gamma\left(\mathbf{H}+\beta M_z v\right)\times\mathbf{M}$$

where $\gamma=g|e|/2mc$ (g being the gyromagnetic ratio), $\beta>0$ the anisotropy coefficient, and v a unit vector along the axis of easy magnetization (the z-axis). We write $\mathbf{H}=\mathbf{H}_0+\mathbf{H}'$, where $\mathbf{H}'$ is a small variable field in any direction, and $\mathbf{H}_0$ a constant field which we take to be along the z-axis. † The transverse magnetization M_x, M_y due

† This field is used here with a view to applying the results in the subsequent Problems.

to $\mathbf{H}'$ is also small; $M_z\cong M=$ constant. Neglecting second-order small quantities, we find the equations

$$\begin{aligned}-i\omega M_x&=-\gamma\left(H_0+\beta M\right)M_y+\gamma M H'_y\\ -i\omega M_y&=\gamma\left(H_0+\beta M\right)M_x-\gamma M H'_{x'}\end{aligned}$$

On determining M_x and M_y from these equations, we find the susceptibility (as the coefficients in the relations $M'_i=\chi_{ik}H'_k$, and hence the permeability

$$\left.\begin{aligned}\mu_{xx}=\mu_{yy}&=1-\tfrac{4\pi}{\beta}\tfrac{\omega_M(\omega_M+\omega_H)}{\omega^2-(\omega_M+\omega_H)^2}\equiv\mu,\mu_{zz}=1\\ \mu_{xy}=-\mu_{yx}&=i\tfrac{4\pi}{\beta}\tfrac{\omega\omega_M}{\omega^2-(\omega_M+\omega_H)^2},\mu_{xz}=\mu_{yz}=0\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

where $\omega_M=\gamma\beta M,\omega_H=\gamma H_0$. A ferromagnetic medium is thus gyrotropic, in the sense defined in §101.

Problem 2. Find the homogeneous ferromagnetic resonance frequencies for an ellipsoid with one principal axis along the axis of easy magnetization. An external field is applied in that direction (C. Kittel, 1947). †

Solution. Within the ellipsoid there is a field $H_0=\mathfrak{y}-4\pi n^{(z)}M$ along the z-axis (the axis of easy magnetization); $n^{(x)},n^{(y)},n^{(z)}$ are the demagnetizing factors along the principal axes of the ellipsoid. A simple calculation of the determinant (79.8) gives

$$\frac{\omega^{(x)}\omega^{(y)}-\omega^2}{\left(\omega_M+\omega_H\right)^2-\omega^2}=0$$

where

$$\begin{aligned}\omega^{(x)}&=\gamma\left[M\beta+\mathfrak{S}+4\pi M\left(n^{(x)}-n^{(z)}\right)\right],\\ \omega^{(y)}&=\gamma\left[M\beta+\mathfrak{S}+4\pi M\left(n^{(y)}-n^{(z)}\right)\right].\end{aligned}$$

The homogeneous resonance frequency is therefore

$$\omega=\surd\left(\omega^{(x)}\omega^{(y)}\right)$$

For example, in the case of a sphere $n^{(x)} = n^{(y)} = n^{(z)} = \frac{1}{3}$, and the resonance frequency is $\omega = \gamma(M\beta + \mathfrak{H})$. For a plane-parallel slab whose surface is perpendicular to the easy-magnetization axis we have $n^{(x)} = n^{(y)} = 0, n^{(z)} = 1$, and the resonance frequency is $\omega = \gamma(M\beta + \mathfrak{S} - 4\pi M)$; the slab is magnetized if $M\beta + \mathfrak{S} > 4\pi M$.

Problem 3. Find the dispersion relation for magnetostatic oscillations in an infinite medium.

Solution. With the tensor μ_{ik} from (1), equation (79.6) becomes

$$\mu\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right) + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = 0 \tag{2}$$

Putting $\psi \propto e^{ik\cdot r}$, we find $\mu(\omega) = -\cot^2\theta$, where θ is the angle between k and the easy-magnetization axis (the z axis). With $\mu(\omega)$ from (1) ($\mathfrak{F} = 0$), the oscillation frequency is

$$\omega = \gamma M\left(\beta + 4\pi\sin^2\theta\right)^{\frac{1}{2}}$$

This depends only on the direction of the wave vector, not on its magnitude. The result agrees, as it should, with the limit (as $k \to 0$) of the dispersion relation for spin waves in a ferromagnet; see $SP2, §70$.

Problem 4. Find the inhomogeneous resonance frequencies in an infinite plane-parallel slab whose surface is perpendicular to the easy-magnetization axis. An external field $\mathfrak{S}$ is applied in that direction.

Solution. It is necessary to solve equation (2) for the potential $\psi^{(i)}$ within the slab, and the equation $s\psi^{(e)} = 0$ for the potential outside the slab, with the boundary conditions

$$\psi^{(i)} = \psi^{(e)}, \quad \partial\psi^{(i)}/\partial z = \partial\psi^{(e)}/\partial z \text{ for } z = \pm L.$$
$$\psi^{(e)} \to 0 \text{ as } |z| \to \infty;$$

the z-axis is perpendicular to the slab surface, the plane $z = 0$ bisects the slab, and $2L$ is the slab thickness. Such a
solution may be an even or odd function of z. In the first case.

$$\psi^{(i)} = A\cos k_z z e^{ik_x x}, \quad \psi^{(e)} = Be^{-k_x|z|}e^{ik_x x},$$

with $\mu {k_x}^2 = -{k_z}^2$ (the wave vector is in the xz-plane); the boundary conditions give the relation.

$$\tan k_z L = k_x/k_z \tag{3}$$

In the second case,

$$\psi^{(i)} = A\sin k_z z e^{ik_x x}, \quad \psi^{(e)} = \pm Be^{-k_x|z|}e^{ik_x x}$$

and the boundary conditions give

$$\tan k_z L = -k_z/k_x \tag{4}$$

The demagnetizing factor of the slab is $n^{(z)} = 1$, and the demagnetizing field is therefore $-4\pi M$. With $\mu(\omega)$ from (1), we find the oscillation frequency

$$\omega^2 = \gamma^2(M\beta + \mathfrak{S} - 4\pi M)\left(M\beta + \mathfrak{S} - 4\pi M\cos^2\theta\right) \tag{5}$$

where θ is the angle between $\mathbf{k}$ and the z-axis. For any value of k_x there is a discrete infinity of k_z values given by the conditions (3) and (4). The corresponding frequencies are given by (5), and depend only on the ratio k_x/k_z. All possible frequency values lie in the range

$$\gamma(M\beta+\mathfrak{S}-4\pi M)\leqslant\omega\leqslant\gamma[(M\beta+\mathfrak{S}-4\pi M)(M\beta+\mathfrak{S})]^{\frac{1}{2}}$$

As $k_z\to 0$, only symmetrical oscillations are possible, and from (3) $k_xL\sim(k_zL)^2$, i.e. is a second-order small quantity. Accordingly, we put $\theta=0$ in (5) and obtain a frequency equal to the homogeneous resonance frequency, as it should be.

12.1.6 §80. The field energy in dispersive media

The formula

$$\mathbf{S}=c\mathbf{E}\times\mathbf{H}/4\pi \tag{80.1}$$

for the energy flux density remains valid in variable electromagnetic fields, even if dispersion is present. This is evident from the arguments given at the end of §30: on account of the continuity of the tangential components of $\mathbf{E}$ and $\mathbf{H}$, formula (80.1) follows from the condition that the normal component of S be continuous at the boundary of the body and the validity of the same formula in the vacuum outside the body.

The rate of change of the energy in unit volume of the body is div $\mathbf{S}$. Using Maxwell's equations, we can write this expression as

$$-\operatorname{div}\mathbf{S}=\frac{1}{4\pi}\left(\mathbf{E}\cdot\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}+\mathbf{H}\cdot\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\right) \tag{80.2}$$

see (75.15). In a dielectric medium without dispersion, when ε and μ are real constants, this quantity can be regarded as the rate of change of the electromagnetic energy

$$U=\left(\varepsilon\mathbf{E}^2+\mu\mathbf{H}^2\right)/8\pi \tag{80.3}$$

which has an exact thermodynamic significance: it is the difference between the internal energy per unit volume with and without the field, the density and entropy remaining unchanged.

In the presence of dispersion, no such simple interpretation is possible. Moreover, in the general case of arbitrary dispersion, the electromagnetic energy cannot be rationally defined as a thermodynamic quantity. This is because the presence of dispersion in general signifies a dissipation of energy, i.e. a dispersive medium is also an absorbing medium.

To determine this dissipation, let us consider a monochromatic electromagnetic field. By averaging with respect to time the expression (80.2), we find the steady inflow of energy per unit time and volume from the external sources which maintain the field. Since the amplitude of the field is assumed constant, all of this energy goes to compensate the dissipation. Under the conditions stated, therefore, the time average of (80.2) is the mean quantity Q of heat evolved per unit time and volume.

Since the expression (80.2) is quadratic in the fields, all quantities must be written in real form. If, as is convenient for a monochromatic field, we take $\mathbf{E}$ and $\mathbf{H}$ to be complex, then in (80.2) we must substitute for $\mathbf{E}$ and $\partial\mathbf{D}/\partial t$ respectively $\frac{1}{2}(\mathbf{E}+\mathbf{E}^*)$ and $\frac{1}{2}(-i\omega\varepsilon\mathbf{E}+i\omega\varepsilon^*\mathbf{E}^*)$, and similarly for $\mathbf{H}$ and $\partial\mathbf{B}/\partial t$. On averaging with respect to time, the products $\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}$ and $\mathbf{E}^*\cdot\mathbf{E}^*$, which contain factors $e^{\mp 2i\omega t}$, give zero, leaving

$$Q=\frac{i\omega}{16\pi}\left[(\varepsilon^*-\varepsilon)\,\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}^*+(\mu^*-\mu)\,\mathbf{H}\cdot\mathbf{H}^*\right]=\frac{\omega}{8\pi}\left(\varepsilon''|\mathbf{E}|^2+\mu''|\mathbf{H}|^2\right) \tag{80.4}$$

This expression can also be written

$$Q=\omega\left(\varepsilon''\overline{\mathbf{E}^2}+\mu''\overline{\mathbf{H}^2}\right)/4\pi \tag{80.5}$$

where $\mathbf{E}$ and $\mathbf{H}$ are the real fields, and the bar denotes an average with respect to time; cf. the last footnote to § 59 .

It is easy to derive also a formula for the energy dissipation in a non-monochromatic field which tends sufficiently rapidly to zero as $t \to \pm\infty$. In this case it is appropriate to consider the dissipation not per unit time but over the whole duration of the existence of the field.

Expanding the field $\mathbf{E}(t)$ as a Fourier integral, we write

$$\mathbf{E}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}_\omega e^{-i\omega t}\, \mathrm{d}\omega/2\pi$$
$$\frac{\partial \mathbf{D}(t)}{\partial t} = -i\int_{-\infty}^{\infty} \omega\varepsilon(\omega)\mathbf{E}_\omega e^{-i\omega t}\, \mathrm{d}\omega/2\pi$$

with $\mathbf{E}_{-\omega} = \mathbf{E}_\omega^*$. Writing the products of these quantities as a double integral and then integrating with respect to time, we have

$$\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}\cdot\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = -\frac{i}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \omega\varepsilon(\omega)\mathbf{E}_\omega \cdot \mathbf{E}_{\omega'} e^{-i(\omega+\omega')t}\frac{\mathrm{d}\omega\ \mathrm{d}\omega'}{(2\pi)^2}\ \mathrm{d}t$$

The integration with respect to t is effected by means of the formula

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\omega+\omega')t}\ \mathrm{d}t = 2\pi\delta\left(\omega+\omega'\right)$$

and the delta function is then eliminated by the integration over ω'. The result is

$$-\frac{i}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \omega\varepsilon(\omega)\left|\mathbf{E}_\omega\right|^2 \frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi}$$

On substituting $\varepsilon = \varepsilon' + i\varepsilon''$, the term in $\varepsilon'(\omega)$ vanishes in the integration, since the integrand is an odd function of ω. With a similar expression for the magnetic field, we have finally

$$\int_{-\infty}^{\infty} Q\ \mathrm{d}t = \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \omega\left[\varepsilon''(\omega)\left|\mathbf{E}_\omega\right|^2 + \mu''(\omega)\left|\mathbf{H}_\omega\right|^2\right]\frac{\mathrm{d}\omega}{2\pi} \tag{80.6}$$

the integral from $-\infty$ to ∞ can be replaced by twice the integral from 0 to ∞.

These formulae show that the absorption (dissipation) of energy is determined by the imaginary parts of ε and μ. The two terms in (80.5) are called the electric and magnetic losses respectively. On account of the law of increase of entropy, the sign of these losses is determinate: the dissipation of energy is accompanied by the evolution of heat, i.e. $Q > 0$. It therefore follows that the imaginary parts of ε and μ are always positive:

$$\varepsilon'' > 0. \quad \mu'' > 0 \tag{80.7}$$

for all substances and at all (positive) frequencies. † The signs of the real parts of ε and μ for $\omega \neq 0$ are subject to no physical restriction.

Any non-steady process in an actual body is to some extent thermodynamically irreversible. The electric and magnetic losses in a variable electromagnetic field therefore always occur to some extent, however slight. That is, the functions $\varepsilon''(\omega)$ and $\mu''(\omega)$ are not exactly zero for any frequency other than zero. We shall see in §81 that this statement is of fundamental importance, although it does not exclude the possibility of only very small losses in certain frequency ranges. Such ranges, in which ε'' and μ'' are very small in comparison with ε' and μ', are called transparency ranges. It is possible to neglect the absorption in these ranges and to introduce the concept of the internal energy of the body in the electromagnetic field, in the same sense as in a static field. To determine this quantity, it is not sufficient to consider a purely monochromatic field, since the strict periodicity results in no steady accumulation of

electromagnetic energy. Let us therefore consider a field whose components have frequencies in a narrow range about some mean value ω_0. The field strengths can be written

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0(t)e^{-i\omega_0 t}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_0(t)e^{-i\omega_0 t} \tag{80.8}$$

where $\mathbf{E}_0(t)$ and $\mathbf{H}_0(t)$ are functions of time which vary only slowly in comparison with the factor $e^{-i\omega_0 t}$. The real parts of these expressions are to be substituted on the right-hand side of (80.2), and we then average with respect to time over the period $2\pi/\omega_0$, which is small compared with the time of variation of the factors $\mathbf{E}_0$ and $\mathbf{H}_0$.

The first term in (80.2), with $\mathbf{E}$ written in complex form. is

$$\frac{1}{2}\left(\mathbf{E}+\mathbf{E}^*\right)\cdot\frac{1}{2}\left(\dot{\mathbf{D}}+\dot{\mathbf{D}}^*\right)/4\pi$$

and similarly for the second term. The products $\mathbf{E}\cdot\dot{\mathbf{D}}$ and $\mathbf{E}^*\cdot\dot{\mathbf{D}}^*$ vanish when averaged over time, and can therefore be ignored, leaving

$$\frac{1}{16\pi}\left(\mathbf{E}\cdot\frac{\partial\mathbf{D}^*}{\partial t}+\mathbf{E}^*\cdot\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}\right) \tag{80.9}$$

We write the derivative $\partial\mathbf{D}/\partial t$ as $\hat{f}\mathbf{E}$, where $\hat{f}$ is the operator $\partial\hat{\varepsilon}/\partial t$, and ascertain the effect of this operator on a function of the form (80.8). If $\mathbf{E}_0$ were a constant, we should have simply $\hat{f}\mathbf{E} = f(\omega)\mathbf{E}$, where $f(\omega) = -i\omega\varepsilon(\omega)$. We expand the function $\mathbf{E}_0(t)$ as a series of Fourier components $\mathbf{E}_{0\alpha}e^{-i\alpha t}$, with constant $\mathbf{E}_{0\alpha}$. Since $\mathbf{E}_0(t)$ varies only slowly, this series will include only components with $\alpha \ll \omega_0$. We can therefore put

$$\begin{aligned}\hat{f}\mathbf{E}_{0\alpha}e^{-i(\omega_0+\alpha)t} &= f\left(\alpha+\omega_0\right)\mathbf{E}_{0\alpha}e^{-i(\omega_0+\alpha)t}\\ &\cong f\left(\omega_0\right)\mathbf{E}_{0\alpha}e^{-i(\omega_0+\alpha)t}+\alpha\frac{\mathrm{d}f\left(\omega_0\right)}{\mathrm{d}\omega_0}\mathbf{E}_{0\alpha}e^{-i(\omega_0+\alpha)t}\end{aligned}$$

Summing the Fourier components, we have

$$\hat{f}\mathbf{E}_0(t)e^{-i\omega_0 t} = f\left(\omega_0\right)\mathbf{E}_0e^{-i\omega_0 t}+i\frac{\mathrm{d}f\left(\omega_0\right)}{\mathrm{d}\omega_0}\frac{\partial\mathbf{E}_0}{\partial t}e^{-i\omega_0 t}$$

Omitting henceforward the suffix 0 to ω, we thus obtain

$$\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} = -i\omega\varepsilon(\omega)\mathbf{E}+\frac{\mathrm{d}(\omega\varepsilon)}{\mathrm{d}\omega}\frac{\partial\mathbf{E}_0}{\partial t}e^{-i\omega t}. \tag{80.10}$$

Substituting this expression in (80.9) and neglecting the imaginary part of $\varepsilon(\omega)$ gives

$$\frac{1}{16\pi}\frac{\mathrm{d}(\omega\varepsilon)}{\mathrm{d}\omega}\left(\mathbf{E}_0*\cdot\frac{\partial\mathbf{E}_0}{\partial t}+\mathbf{E}_0\cdot\frac{\partial\mathbf{E}_0^*}{\partial t}\right) = \frac{1}{16\pi}\frac{\mathrm{d}(\omega\varepsilon)}{\mathrm{d}\omega}\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}^*\right),$$

since $\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}^* = \mathbf{E}_0\cdot\mathbf{E}_0{}^*$. Adding a similar expression involving the magnetic field, we conclude that the steady rate of change of the energy in unit volume is given by $\mathrm{d}\bar{U}/\mathrm{d}t$, where

$$\bar{U} = \frac{1}{16\pi}\left[\frac{\mathrm{d}(\omega\varepsilon)}{\mathrm{d}\omega}\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}^*+\frac{\mathrm{d}(\omega\mu)}{\mathrm{d}\omega}\mathbf{H}\cdot\mathbf{H}^*\right] \tag{80.11}$$

[0]† This statement applies to bodies which, in the absence of the variable field. are in thermodynamic equilibrium; we assume this condition to hold. If the body is not in thermal equilibrium, then Q may in principle be negative. The second law of thermodynamics requires only a net increase in entropy as a result of the effects of the variable electromagnetic field and of the absence of thermodynamic equilibrium, the tatter effect being independent of the presence of the field. An example of such a body is one in which all the atoms have been excited artificially (i.e. not by spontaneous thermal excitation, but by an external "pumping" field).

[ln] terms of the real fields **E** and **H** this expression can be written

$$\bar{U} = \frac{1}{8\pi}\left[\frac{\mathrm{d}(\omega\varepsilon)}{\mathrm{d}\omega}\overline{E^2} + \frac{\mathrm{d}(\omega\mu)}{\mathrm{d}\omega}\overline{H^2}\right] \tag{80.12}$$

IL. Brillouin, 1921).

This is the required result: $\bar{U}$ is the mean value of the electromagnetic part of the internal thergy per unit volume of a transparent medium. If there is no dispersion, ε and μ are onstants, and (80.12) becomes the mean value of (80.3), as it should.

I If the external supply of electromagnetic energy to the body is cut off, the absorption Wich is always present (even though very small) ultimately converts the energy $\bar{U}$ entirely nto heat. Since, by the law of increase of entropy, there must be evolution and not [3] bsorption of heat, we must have $\bar{U} > 0$. It therefore follows, by (80.11), that the nequalities

$$\mathrm{d}(\omega\varepsilon)/\mathrm{d}\omega > 0, \quad \mathrm{d}(\omega\mu)/\mathrm{d}\omega > 0 \tag{80.13}$$

must hold. In reality, these conditions are necessarily fulfilled, by virtue of more stringent inequalities always satisfied by the functions $\varepsilon(\omega)$ and $\mu(\omega)$ in transparency ranges (see the footnote to §84).

It should be emphasized once more that the expression (80.12) has been derived in the first approximation with respect to the frequencies α with which the amplitude $\mathbf{E}_0(t)$ varies. It is therefore valid only for fields whose amplitude varies sufficiently slowly with time. This comment applies also to the calculation of the stress tensor in §81.

12.1.7 §81. The stress tensor in dispersive media

Another topic of considerable interest is the determination of the (time) averaged stress tensor giving the forces on matter in a variable electric field. We shall show that, even when dispersion is present (but absorption is again absent), the expression for this tensor contains no derivatives with respect to the frequency, unlike the energy equation (80.12). In particular, for a transparent isotropic dispersive fluid in a monochromatic electric field, the mean value $\bar{\sigma}_{ik}$ is derived from (15.9) by simply replacing ε by $\varepsilon(\omega)$ and the products E_iE_k and $\mathbf{E}^2$ by their mean values $\overline{E_iE_k}$ and $\overline{\mathbf{E}^2}$ (L. P. Pitaevskii, 1960).

To prove this, we return to the proof given in §15 and reformulate it to some extent. We there considered a dielectric-filled plane capacitor and determined the stress tensor from the equality between the work done by the ponderomotive forces in a movement of the plates and the change in the appropriate thermodynamic potential. We now write this condition for total quantities (not those per unit area), in the form

$$A\sigma_{ik}\xi_i n_k = (\delta\mathscr{U})_{\mathscr{S},e} \tag{81.1}$$

where A is the area of the capacitor plates. The potential $\tilde{\mathscr{F}}$ is here replaced by the ordinary energy $\mathscr{U}$, the change in which is taken for fixed values of the entropy $\mathscr{S}$ of the dielectric and of the total charges $\pm e$ on the capacitor plates (instead of a fixed potential ϕ), and the result $(\delta\mathscr{F})_{T,\phi} = (\delta\mathscr{U})_{\mathscr{S},e}$ given by the theorem of small increments is used.

In the form (81.1), this condition has a particularly simple significance: a thermally insulated capacitor with fixed charges on the plates is an electrically closed system. If mechanical work is done on it (to move the plates) by an external source, all the work goes to increase the energy of the capacitor. The latter is

$$\mathscr{U} = \mathscr{U}_0 + e^2/2C, \tag{81.2}$$

where $\mathscr{U}_0$ is the energy of the dielectric in the absence of the field (for the same value of the entropy $\mathscr{S}$) and C is the capacitance. For a plane capacitor, $C = \varepsilon A/4\pi h$, where h is the distance between the plates. Hence

$$(\delta\mathscr{U})_{\mathscr{S},e} = (\delta\mathscr{U}_0)_{\mathscr{S}} - \frac{e^2}{2C^2}(\delta C)_{\mathscr{S}}. \tag{81.3}$$

On expressing δC in terms of the displacement ξ of the plates (taking into account the dependence of ε on the density of the dielectric, which is changed by the displacement), we immediately find $(15.9)^+$; since the result is obvious, it will not be given here.

When dispersion is present, the expression for $\mathscr{U}$ is different. We shall show that the relation (81.3), however, remains valid for the time-averaged variation $\overline{\delta\mathscr{U}}$, and this will complete the proof of the above statement concerning the averaged stress tensor.

Let the charge on the capacitor plates vary monochromatically with frequency ω. Then the capacitor itself is not an electrically closed system, since charge has to be supplied and withdrawn. The oscillatory circuit with natural frequency ω consisting of the capacitor and an appropriately chosen self-inductance is an electrically closed system, however †; the relation (81.1) is therefore valid for its energy.

In the absence of resistance, the potential difference ϕ between the capacitor plates is equal to the sum of the external e.m.f. and the self-inductance e.m.f.:

$$\phi = \mathscr{E} - \frac{1}{c^2}L\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}t} \tag{81.4}$$

and the current J is related to the capacitor plate charge e by $J = \mathrm{d}e/\mathrm{d}t$. For quantities varying monochromatically, the capacitance $C(\omega)$ is by definition such that $\phi = e/C(\omega)$. Putting $\mathscr{E} = 0, J = -i\omega e$, in (81.4) we find first of all that even when there is dispersion of the capacitance the circuit frequency again satisfies Thomson's relation (62.5):

$$\omega = c/\sqrt{[LC(\omega)]}. \tag{81.5}$$

Next, multiplying (81.4) by $J = \mathrm{d}e/\mathrm{d}t$ and considering almost monochromatic quantities as in the derivation of (80.12), we easily find

$$\overline{\mathscr{E}J} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left\{\frac{1}{2}L\overline{J^2} + \frac{\mathrm{d}(\omega C)}{\mathrm{d}\omega}\cdot\frac{1}{2}\overline{\phi^2}\right\}.$$

The form of this equation shows that the expression in the braces is the energy $\mathscr{U}$ of the oscillatory circuit. The first term in this expression can be transformed by substituting $J = -i\omega e$ and using (81.5):

$$\frac{1}{2c^2}\overline{LJ^2} = \frac{1}{2c^2}L\omega^2\overline{e^2} = \frac{1}{2c^2}LC^2\omega^2\overline{\phi^2} = \frac{1}{2}C\overline{\phi^2}$$

The final expression for the circuit energy is ‡

$$\overline{\mathscr{U}} = \frac{1}{\omega}\frac{\mathrm{d}\,(\omega^2 C)}{\mathrm{d}\omega}\cdot\frac{1}{2}\overline{\phi^2} \tag{81.6}$$

We have to calculate the variation of this energy for a small displacement of the capacitor plates, i.e., for a small change in the capacitance. In a variable field, this displacement is to be regarded as taking place with infinite slowness. In such a change, the adiabatic invariant given (as in any linear oscillatory system) by the ratio of the oscillation energy and the frequency remains constant.§ We thus have $\delta(\overline{\mathscr{U}}/\omega) = 0$, i.e.

[0]† It is expressed in terms of different variables, with the adiabatic instead of the isothermal derivative $\partial\varepsilon/\partial\rho$ and function P_0. The two forms are, of course, equivalent.

$$\delta\overline{\mathscr{U}} = \overline{\mathscr{U}}\delta\omega/\omega. \tag{81.7}$$

From (81.5), for a small change in the capacitance,

$$\delta\omega/\omega = -\frac{1}{2}\delta C/C \tag{81.8}$$

This change consists of two parts:

$$\delta C = (\delta C)_{st} + (\mathrm{d}C/\mathrm{d}\omega)\delta\omega \tag{81.9}$$

The first term is the static part, related to the strain as in the static case; here it is important that, in the presence of dispersion, the capacitance $C(\omega)$ is expressed in terms of $\varepsilon(\omega)$ in the same way as in the static case. The second term depends only on the frequency change. From (81.8) and (81.9) we find as the static part

$$(\delta C)_{st} = -\frac{1}{\omega^2}\frac{\mathrm{d}\,(\omega^2 C)}{\mathrm{d}\omega}\delta\omega \tag{81.10}$$

When (81.6) is substituted in (81.7), and (81.10) is used, $\mathrm{d}C/\mathrm{d}\omega$ disappears, and the energy variation becomes

$$\delta\overline{\mathscr{U}} = -\frac{1}{2}\overline{\phi^2}(\delta C)_{st} = -\frac{1}{2}\left(\overline{e^2}/C^2\right)(\delta C)_{st}, \tag{81.11}$$

which is in fact the same as the averaged second term in (81.3).
The disappearance from $\delta\overline{\mathscr{U}}$ of the terms involving the derivative with respect to ω is quite general and does not depend on a specific manner of change in the state of the body (in this case, the capacitor). In particular, for a dispersive medium formula (14.1) (with E^2 replaced by $\overline{\mathbf{E}^2}$) remains valid for the change in the free energy due to a small change in ε :

$$\delta\mathscr{F} = -\int \delta\varepsilon(\omega)\overline{\mathbf{E}^2}\ \mathrm{d}V/8\pi. \tag{81.12}$$

Knowing the stress tensor, we can use (75.17) to find the force on unit volume of the dielectric. The terms containing spatial derivatives coincide with the corresponding terms in the time-averaged expression (75.18), in which we must put $\mu = 1$. The term in the time derivative (the Abraham force) is not the same. This term arises as the difference

$$\frac{1}{4\pi c}\left\{\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{D}\times\mathbf{H}) - \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E}\times\mathbf{H})\right\}$$

which is now to be averaged over time. To do so, we express $\mathbf{D}, \mathbf{E}$ and $\mathbf{H}$ in complex form (i.e. replace them by $\frac{1}{2}(\mathbf{D}+\mathbf{D}^*)$ and so on), and then use (80.10) for $\lambda\mathbf{D}/\partial t$. This gives the Abraham force in the form

$$\frac{1}{8\pi c}(\varepsilon-1)\mathrm{re}\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E}\times\mathbf{H}^*) + \frac{1}{8\pi c}\omega\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}\omega}\mathrm{re}\left(\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\times\mathbf{H}^*\right) \tag{3}$$

(H. Vashina and V. I. Karpman, 1976).

The stress tensor in a variable field is significant for absorbing as well as transparenl media, unlike the internal energy, for which the problem can be formulated only [b] neglecting the

[0]† To meet the conditions for a quasi-steady state, the circuit must be small in comparison with the wavelength c/ω. This limitation is not a fundamental one, and does not impair the generality of the proof given.
‡ From now on, to simplify the formulae, we omit the "non-electromagnetic" part $\mathscr{U}_0$ of the energy.
§ Cf. Mechanics, §49. The invariance of this quantity is particularly clear from the quantum theory: the ratio $\overline{\mathscr{U}}/\hbar\omega$ is the state quantum number, which remains unchanged when the conditions vary adiabatically.

dissipation. There is, however, reason to suppose that in an absorbing medium the stress tensor cannot be expressed in terms of the permittivity alone. and therefore cannot be derived in a general form by macroscopic methods.

12.1.8 82. The analytical properties of $\varepsilon(\omega)$

The function $f(\tau)$ in (77.3) is finite for all values of τ, including zero. † For dielectrics it tends to zero as $\tau \to \infty$. This simply expresses the fact that the value of $\mathbf{D}(t)$ at any instant cannot be appreciably affected by the values of $\mathbf{E}(t)$ at remote instants. The physical agency underlying the integral relation (77.3) consists in the processes of the establishment of the dectric polarization. Hence the range of values in which the function $f(\tau)$ differs appreciably from zero is of the order of the relaxation time which characterizes these processes.
The above statements are true also of metals, the only difference being that the function $f(\tau) - 4\pi\sigma$, rather than $f(\tau)$ itself, tends to zero as $\tau \to \infty$. This difference arises because the passage of a steady conduction current, though it does not cause any actual change in the physical state of the metal, in our equations leads formally to the presence of an induction D such that $(1/c)\hat{C}\mathbf{D}/\partial t = 4\pi\sigma\mathbf{E}/c$ or

$$\mathbf{D}(t) = \int_{-\infty}^{t} 4\pi\sigma\mathbf{E}(\tau)\mathrm{d}\tau = 4\pi\sigma\int_{0}^{\infty}\mathbf{E}(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$

We have defined the function $\varepsilon(\omega)$ by (77.5):

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \int_{0}^{\infty} e^{i\omega\tau} f(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{82.1}$$

It is possible to derive some very general relations concerning this function by regarding ω as a complex variable ($\omega = \omega' + i\omega''$). These relations could be formulated immediately, since the dielectric susceptibility $[\varepsilon(\omega) - 1]/4\pi$ is one of the generalized susceptibilities already discussed in SP 1, §123. We shall nevertheless repeat here some of the arguments and results, both to assist the reader and to emphasize certain differences between dielectrics and metals. From the definition (82.1) and the above-mentioned properties of the function $f(\tau)$, it follows that $\varepsilon(\omega)$ is a one-valued function which nowhere becomes infinite (i.e. has no singularities) in the upper half-plane. For, when $\omega'' > 0$, the integrand in 182.1) includes the exponentially decreasing factor $e^{-\omega''\tau}$ and, since the function $f(\tau)$ is finite throughout the region of integration, the integral converges. The function $\varepsilon(\omega)$ has [1]0 singularity on the real axis ($\omega'' = 0$), except possibly at the origin (where, for metals, $\varepsilon(\omega)$ has a simple pole).

In the lower half-plane, the definition (82.1) is invalid, since the integral diverges. Hence the function $\varepsilon(\omega)$ can be defined in the lower half-plane only as the analytical continuation of formula (82.1) from the upper half-plane, and in general has singularities.

The function $\varepsilon(\omega)$ has a physical as well as a mathematical significance in the upper half-plane: it gives the relation between $\mathbf{D}$ and $\mathbf{E}$ for fields whose amplitude increases as $e^{\omega''t}$. In the lower half-plane, this physical interpretation is not possible, if only because the Dresence of a field which is damped as $e^{-|\omega*|t}$ implies an infinite field for $t \to -\infty$.
It is useful to notice that the conclusion that $\varepsilon(\omega)$ is regular in the upper half-plane is,

physically, a consequence of the causality principle. The integration in (77.3) is. on account of this principle, taken only over times previous to t, and the region of integration in formula (82.1) therefore extends from 0 to ∞ rather than from $-\infty$ to ∞.

It is evident also from the definition (82.1) that

[0†] It was to ensure this that the term $\mathbf{E}(t)$ was separated in (77.3), since otherwise the function $f(\tau)$ would have a [Al] It a -function singularity at $\tau = 0$.

$$\varepsilon\left(-\omega^*\right) = \varepsilon^*(\omega) \tag{82.2}$$

This generalizes the relation (77.7) for real ω. In particular, for purely imaginary ω we have

$$\varepsilon\left(i\omega''\right) = \varepsilon^*\left(i\omega''\right) \tag{82.3}$$

i.e the function $\varepsilon(\omega)$ is real on the positive imaginary axis. †

It should be emphasized that the property (82.2) merely expresses the fact that the operator relation $\mathbf{D} = \hat{\varepsilon}\mathbf{E}$ must give real values of $\mathbf{D}$ for real $\mathbf{E}$. If the function $\mathbf{E}(t)$ is given by the real expression

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{-i\omega t} + \mathbf{E}_0^* e^{i\omega^* t}, \tag{82.4}$$

then, applying the operator $\hat{\varepsilon}$ to each term, we have

$$\mathbf{D} = \varepsilon(\omega)\mathbf{E}_0 e^{-i\omega t} + \varepsilon\left(-\omega^*\right)\mathbf{E}_0{}^* e^{i\omega^* t},$$

and the condition for this to be real is just (82.2).

According to the results of §80, the imaginary part of $\varepsilon(\omega)$ is positive for positive real $\omega = \omega'$, i.e. on the right-hand half of the real axis. Since, by (82.2), $\operatorname{im}\varepsilon\left(-\omega'\right) = -\operatorname{im}\varepsilon\left(\omega'\right)$, the imaginary part of $\varepsilon(\omega)$ is negative on the left-hand half of this axis. Thus

$$\operatorname{im}\varepsilon \gtrless 0 \text{ for } \omega = \omega' \gtrless 0. \tag{82.5}$$

At $\omega = 0, \operatorname{im}\varepsilon$ changes sign, passing through zero for dielectrics and through infinity for metals. This is the only point on the real axis for which im $\varepsilon(\omega)$ can vanish.

When ω tends to infinity in any manner in the upper half-plane, $\varepsilon(\omega)$ tends to unity. This has been shown in §78 for the case where ω tends to infinity along the real axis. The general result is seen from formula (82.1): if $\omega \to \infty$ in such a way that $\omega'' \to \infty$, the integral in (82.1) vanishes because of the factor $e^{-\omega''\tau}$ in the integrand, while if ω'' remains finite but $|\omega'| \to \infty$ the integral vanishes because of the oscillating factor $e^{i\omega'\tau}$.

The above properties of the function $\varepsilon(\omega)$ are sufficient to prove the following theorem: the function $\varepsilon(\omega)$ does not take real values at any finite point in the upper half-plane except on the imaginary axis, where it decreases monotonically from $\varepsilon_0 > 1$ (for dielectrics) or from $+\propto$ (for metals) at $\omega = i0$ to 1 at $\omega = i\infty$. Hence, in particular, it follows that the function $\varepsilon(\omega)$ has no zeros in the upper half-plane. We shall not repeat here the proof of these results given in $SP1, \$123$; it need only be remembered that the generalized susceptibility is $\varepsilon(\omega) - 1$, not $\varepsilon(\omega)$.

We shall also not repeat the derivation of the relations between the imaginary and real parts of $\varepsilon(\omega)$, but give only the final formulae, with the notation appropriatel modified. We write the function $\varepsilon(\omega)$ of the real variable ω, as in §77, in the form

$\varepsilon(\omega) = \varepsilon'(\omega) + i\varepsilon''(\omega)$. If $\varepsilon(\omega)$ relates to a dielectric. the relations in question are

$$\varepsilon'(\omega) - 1 = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon''(x)}{x - \omega} \mathrm{d}x \tag{82.6}$$

$$\varepsilon''(\omega) = -\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon'(x) - 1}{x - \omega} \mathrm{d}x \tag{82.7}$$

[0]† This is not in general true for the negative imaginary axis. Here the function $\varepsilon(\omega)$ may have branch points. and a cut along the negative axis may be necessary in order to define it as an analytic function in the lower halfplane. Equation (82.2) then signifies only that $\varepsilon(\omega)$ has complex conjugate values on the two sides of the c^{ut}

(H. A. Kramers and R. de L. Kronig, 1927). It should be emphasized that the only important property of the function $\varepsilon(\omega)$ used in the proof is that it is regular in the upper half-plane. Hence we can say that Kramers and Kronig's formulae, like this property of $\varepsilon(\omega)$, are a direct consequence of the causality principle.

Using the fact that $\varepsilon''(x)$ is an odd function, we can rewrite (82.6) as

$$\varepsilon'(\omega) - 1 = \frac{2}{\pi} P \int_0^\infty \frac{x\varepsilon''(x)}{x^2 - \omega^2}\, \mathrm{d}x \tag{82.8}$$

If a metal is concerned, the function $\varepsilon(\omega)$ has a pole at the point $\omega = 0$, near which $\varepsilon = 4\pi i\sigma/\omega$(77.9). This gives an additional term in (82.7) (cf. SP 1, (123.18)):

$$\varepsilon''(\omega) = -\frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^\infty \frac{\varepsilon'(x)}{x - \omega}\mathrm{d}x + \frac{4\pi\sigma}{\omega} \tag{82.9}$$

but (82.6) and (82.8) remain unchanged. A further remark is also necessary as regards metals. We have said at the end of §77 that there may be ranges of frequency for metals in which the function $\varepsilon(\omega)$ becomes physically meaningless on account of the spatial nonuniformity of the field. In the formulae given here, however, the integration must.be taken over all frequencies. In such cases $\varepsilon(\omega)$ must be taken, in the frequency ranges concerned, as the function obtained by solving the formal problem of the behaviour of the body in a fictitious uniform periodic electric field (and not in the necessarily non-uniform field of the electromagnetic wave).

Formula (82.8) is of particular importance: it makes possible a calculation of the function $\varepsilon'(\omega)$ if the function $\varepsilon''(\omega)$ is known even approximately (for example, empirically) for a given body. It is important to note that, for any function $\varepsilon''(\omega)$ satisfying the Physically necessary condition $\varepsilon'' > 0$ for $\omega > 0$, formula (82.8) gives a function $\varepsilon'(\omega)$ consistent with all physical requirements, i.e. one which is in principle possible (the sign and magnitude of ε' are subject to no general physical restrictions) This makes it possible to use formula (82.8) even when the function $\varepsilon''(\omega)$ is approximate. Formula (82.7), on the other hand, does not give a physically possible function $\varepsilon''(\omega)$ for an arbitrary choice of the function $\varepsilon'(\omega)$, since the condition that $\varepsilon''(\omega) > 0$ is not necessarily fulfilled.

In dispersion theory the expression for $\varepsilon'(\omega)$ is customarily written in the form

$$\varepsilon'(\omega) - 1 = -\frac{4\pi e^2}{m} P \int_0^\infty \frac{f(x)}{\omega^2 - x^2}\, \mathrm{d}x \tag{82.10}$$

where e and m are the charge and mass of the electron, and $f(\omega)\mathrm{d}\omega$ is called the oscillator strength in the frequency range $\mathrm{d}\omega$. According to (82.8), this quantity is related to $\varepsilon''(\omega)$ by

$$f(\omega) = \frac{m}{2\pi^2 e^2}\omega\varepsilon''(\omega) \tag{82.11}$$

For metals, $f(\omega)$ tends to a finite limit as $\omega \to 0$.

For sufficiently large ω, x^2 can be neglected in comparison with ω^2 in the integrand in (82.8). Then

$$\varepsilon'(\omega) - 1 = -\frac{2}{\pi\omega^2} \int_0^\infty x\varepsilon''(x)\mathrm{d}x$$

For the permittivity at high frequencies, on the other hand, formula (78.1) holds, and a comparison shows that we have the sum rule

$$\frac{m}{2\pi^2 e^2} \int_0^\infty \omega\varepsilon''(\omega)\mathrm{d}\omega = \int_0^\infty f(\omega)\mathrm{d}\omega = N \tag{82.12}$$

where N is the total number of electrons per unit volume.
If $\varepsilon''(\omega)$ is regular at $\omega = 0$, we can take the limit $\omega \to 0$ in formula (82.8), obtaining

$$\varepsilon'(0) - 1 = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\varepsilon''(x)}{x}\, \mathrm{d}x \tag{82.13}$$

If the point $\omega = 0$ is a singularity of $\varepsilon''(\omega)$ (as in metals), the limit of the integral (82.8) as $\omega \to 0$ is not what is obtained by simply deleting the term in ω. To calculate the limit, we must first replace $\varepsilon''(x)$ in the integrand by $\varepsilon''(x) - 4\pi\sigma/x$; the value of the integral is unchanged, because

$$P \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{x^2 - \omega^2} \equiv 0$$

For a dielectric, formula (82.13) can be rewritten as

$$\varepsilon_0 - 1 = \frac{4\pi e^2 N}{m} \overline{\omega^{-2}}, \tag{4}$$

where the bar denotes averaging with respect to the oscillator strength:

$$\overline{\omega^{-2}} = \frac{1}{N} \int_0^\infty \frac{f(\omega)}{\omega^2}\, \mathrm{d}\omega$$

The expression (82.14) may be useful in estimating ε_0.
The following formula † relates the values of $\varepsilon(\omega)$ on the upper half of the imaginary axis to those of $\varepsilon''(\omega)$ on the real axis:

$$\varepsilon(i\omega) - 1 = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{x\varepsilon''(x)}{x^2 + \omega^2}\, \mathrm{d}x \tag{82.15}$$

Integrating this relation over all ω, we obtain

$$\int_0^\infty [\varepsilon(i\omega) - 1]\mathrm{d}\omega = \int_0^\infty \varepsilon''(\omega)\mathrm{d}\omega \tag{82.16}$$

All the above results are applicable, apart from slight changes, to the magnetic permeability $\mu(\omega)$. The differences are due principally to the fact that the function $\mu(\omega)$ ceases to be physically meaningful at relatively low frequencies. Hence, for example, Kramers and Kronig's formulae must be applied to $\mu(\omega)$ as follows. We consider not an infinite but a finite range of ω (from 0 to ω_1), which extends only to frequencies where μ is still meaningful but no longer variable, so that its imaginary part may be taken as zero; let the real quantity $\mu\,(\omega_1)$ be denoted by μ_1 · † Then formula (82.8) must be written as

$$\mu'(\omega) - \mu_1 = \frac{2}{\pi} P \int_0^{\omega_1} \frac{x\mu''(x)}{x^2 - \omega^2}\, \mathrm{d}x \tag{82.17}$$

Unlike ε_0, the value μ_0 of $\mu(0)$ may be either less than or greater than unity. The variation of $\mu(\omega)$ along the imaginary axis is again a monotonic decrease, from μ_0 to $\mu_1 < \mu_0$.

Lastly, it may be noted that the analytical properties of $\varepsilon(\omega)$ derived in this section are also possessed by $\eta(\omega) \equiv 1/\varepsilon(\omega)$. For example, $\eta(\omega)$ is analytic in the upper half-plane, because $\varepsilon(\omega)$ is analytic and has no zeros in that half-plane. The same Kramers-Kronig relations (82.6) and (82.7) apply to $\eta(\omega)$ as to $\varepsilon(\omega)$.

12.1.9 883. A plane monochromatic wave

Maxwell's equations (77.2) for a monochromatic field are

$$i\omega\mu(\omega)\mathbf{H} = c \text{ curl } \mathbf{E}, \quad i\omega\varepsilon(\omega)\mathbf{E} = -c \text{ curl } \mathbf{H}. \tag{83.1}$$

These equations as they stand are complete, since equations (77.1) follow from (83.1) and so do not require separate consideration. Assuming the medium homogeneous, and eliminating $\mathbf{H}$ from equations (83.1), we obtain the second-order equation

$$\triangle\mathbf{E} + \varepsilon\mu\left(\omega^2/c^2\right)\mathbf{E} = 0; \tag{83.2}$$

elimination of $\mathbf{E}$ gives a similar equation for $\mathbf{H}$.

Let us consider a plane electromagnetic wave propagated in an infinite homogeneous medium. In a plane wave in a vacuum, the spatial dependence of the field is given by a factor $e^{ik\cdot r}$, with a real wave vector k. In considering wave propagation in matter, however, it is in

general necessary to take $\mathbf{k}$ complex: $\mathbf{k} = \mathbf{k}' + i\mathbf{k}''$, where the vectors $\mathbf{k}'$ and $\mathbf{k}''$ are real.

Taking $\mathbf{E}$ and $\mathbf{H}$ as proportional to $e^{j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$, and carrying out the differentiation with respect to the coordinates in equations (83.1), we obtain

$$\omega\mu\mathbf{H} = c\mathbf{k}\times\mathbf{E}, \quad \omega\varepsilon\mathbf{E} = -c\mathbf{k}\times\mathbf{H} \tag{83.3}$$

Eliminating $\mathbf{E}$ and $\mathbf{H}$ from these two equations, we obtain for the square of the wave vector

$$k^2 \equiv k'^2 - k''^2 + 2i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{k}'' = \varepsilon\mu\omega^2/c^2 \tag{83.4}$$

We see that $\mathbf{k}$ can be real only if ε and μ are real and positive. Even then, however, $\mathbf{k}$ may still be complex if $\mathbf{k}'\cdot\mathbf{k}'' = 0$; we shall meet with such a case in discussing total reflection in §86.

It must be borne in mind that, in the general case of complex $\mathbf{k}$, the term "plane wave" is purely conventional. Putting $e^{j\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = e^{j\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}}e^{-\mathbf{k}''\cdot\mathbf{r}}$, we see that the planes perpendicular to the vector $\mathbf{k}'$ are planes of constant phase. The planes of constant amplitude, however, are those perpendicular to $\mathbf{k}''$, the direction in which the wave is damped. The surfaces on which the field itself is constant are in general not planes at all. Such waves are called inhomogeneous plane waves, in contradistinction to ordinary homogeneous plane waves.

The general relation between the electric and magnetic field components is given by formulae (83.3). In particular. taking the scalar product of these formulae with $\mathbf{k}$, we obtain

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{E} = 0, \quad \mathbf{k}\cdot\mathbf{H} = 0, \tag{83.5}$$

and, squaring either and using (83.4),

$$\mathbf{E}^2 = \mu\mathbf{H}^2/\varepsilon \tag{83.6}$$

It must be remembered, however, that because all three vectors $\mathbf{k}, \mathbf{E}$ and $\mathbf{H}$ are complex these formulae do not in general have the same evident significance as when the vectors are real.

We shall not give the cumbersome relations valid in the general case, but consider only the most important particular cases. Especially simple results are obtained for a wave propagated without damping in a non-absorbing (transparent) homogeneous medium. The wave vector is real, and its magnitude is

[0†] In fact, ω_1 must be such that $\omega_1\tau \gg 1$, where τ is the shortest relaxation time for ferromagnetic and Paramagnetic processes in a magnetic material.

$$k = \sqrt{(\varepsilon\mu)}\omega/c = n\omega/c \tag{83.7}$$

where $n = \sqrt{(\varepsilon\mu)}$ is called the refractive index of the medium. The electric and magnetic fields are both in a plane perpendicular to the vector $\mathbf{k}$ (a pure transverse wave); they are mutually perpendicular, and are related by

$$\mathbf{H} = \sqrt{(\varepsilon/\mu)}1 \times \mathbf{E} \tag{83.8}$$

where 1 is a unit vector in the direction of $\mathbf{k}$. Hence it follows that $\varepsilon\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}^* = \mu\mathbf{H}\cdot\mathbf{H}^*$, but this does not mean (as it would in the absence of dispersion) that the electric and magnetic energies in the wave are equal, since these energies are given by different expressions (namely, the two terms in formula (80.11)). The total electromagnetic energy density in this case may be written

$$\bar{U} = \frac{1}{16\pi\mu\omega}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\left(\omega^2\varepsilon\mu\right)\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}^* = \frac{c}{8\pi}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\omega}\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}^* \tag{83.9}$$

The velocity u with which the wave is propagated in the medium is given by the familiar expression for the group velocity: †

$$u = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} = \frac{c}{\mathrm{d}(n\omega)/\mathrm{d}\omega} \tag{83.10}$$

Here $u = \bar{S}/\bar{U}$, in accordance with its significance as the velocity of transfer of energy in the wave packet; $\bar{U}$ is the energy density given by formula (83.9), and

$$\bar{S} = \frac{c}{8\pi}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}^* \tag{83.11}$$

is the mean value of the Poynting vector. In the absence of dispersion, when the refractive index is independent of frequency, the expression (83.10) becomes simply c/n; cf. (75.13).

Next, let us consider a more general case, the propagation of an electromagnetic wave in an absorbing medium, the wave vector having a definite direction (i.e. $\mathbf{k}'$ and $\mathbf{k}''$ being parallel). Then the wave is literally plane, since the surfaces of constant field in it are planes perpendicular to the direction of propagation (a homogeneous plane wave).

In this case we can introduce the complex "length" k of the wave vector, given by $\mathbf{k} = k\mathbf{1}$ (1 being a unit vector in the direction of $\mathbf{k}'$ and $\mathbf{k}''$), and from (83.4) we have $k = \sqrt{(\varepsilon\mu)}\omega/c$. The complex quantity $\sqrt{(\varepsilon\mu)}$ is usually written in the form $n + i\kappa$, with real n and κ, so that

$$k = \sqrt{(\varepsilon\mu)}\omega/c = (n + i\kappa)\omega/c \tag{83.12}$$

The quantity n is called the refractive index of the medium, and κ the absorption coefficient; the latter gives the rate of damping of the wave during its propagation. It should be emphasized, however, that the damping of the wave need not be due to true absorption: dissipation of energy occurs only when ε or μ is complex, but κ may be different from zero if ε and μ are real and negative.

We may express n and κ in terms of the real and imaginary parts of the permittivity (taking $\mu = 1$). From the equation

$$n^2 - \kappa^2 + 2in\kappa = \varepsilon = \varepsilon' + i\varepsilon''$$

we have $n^2 - \kappa^2 = \varepsilon', 2n\kappa = \varepsilon''$. Solving these equations for n and κ, we have ‡

$$\left.\begin{aligned} n &= \sqrt{\left\{\tfrac{1}{2}\left[\varepsilon' + \sqrt{(\varepsilon'^2 + \varepsilon''^2)}\right]\right\}}, \\ \kappa &= \sqrt{\left\{\tfrac{1}{2}\left[-\varepsilon' + \sqrt{(\varepsilon'^2 + \varepsilon''^2)}\right]\right\}}. \end{aligned}\right\} \tag{83.13}$$

In particular, for metals and in the frequency range where formula (77.9) is valid, the imaginary part of ε is large compared with its real part, and is related to the conductivity by $\varepsilon'' = 4\pi\sigma/\omega$; neglecting ε' in comparison with ε'', we find that n and κ are equal, in agreement with (59.4):

$$n = \kappa = \sqrt{(2\pi\sigma/\omega)} \tag{83.14}$$

The relation between the fields **E** and **H** in this homogeneous plane wave is again given by formula (83.8), but ε and μ are now complex. The formula again shows that the two fields and the direction of propagation are mutually perpendicular. If $\mu = 1$, we write $\sqrt{\varepsilon} = \sqrt{(n^2+\kappa^2)}\exp[i\tan^{-1}(\kappa, n)]$, which shows that the magnetic field is $\sqrt{(n^2+\kappa^2)}$ times the electric field in magnitude and $\tan^{-1}(\kappa/n)$ from it in phase; in particular, when (83.14) holds, the phase difference is $\frac{1}{4}\pi$.

PROBLEM

At a given instant $t = 0$ an electromagnetic perturbation occurs in some region of space. The perturbation is not maintained by external agencies, and is therefore damped in time. Find the damping decrement.

Solution. We expand the initial perturbation as a Fourier integral with respect to the coordinates. and consider a component having a (real) wave vector **k**. The time dependence of this component is given, for sufficiently large t, by a factor e^{-iot} with a complex frequency ω, which is to be determined; the damping decrement is $-\mathrm{im}\omega$.

From the equations $-\dot{\mathbf{H}}/c = \mathrm{curl}\,\mathbf{E} = i\mathbf{k}\times\mathbf{E}$, $\quad\dot{\mathbf{D}}/c = \mathrm{curl}\,\mathbf{H} = i\mathbf{k}\times\mathbf{H}$ we have, eliminating **H**,

$$\ddot{\mathbf{D}}/c^2 = \mathbf{k}\times(\mathbf{k}\times\mathbf{E}) \tag{I}$$

We take the direction of **k** as the x-axis. The longitudinal part of the perturbation therefore satisfies $\ddot{D}_x = 0$, whence $D_x = 0$.

The relation between D_x and E_x is given by an integral operator:

$$E_x(t) = \hat{\varepsilon}^{-1}D_x = \int_{-\infty}^{1} F(t-\tau)D_x(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{2}$$

Since we have $D_x(t) = 0$ for $t > 0$ (there are no field sources when $t > 0$), it follows that

$$E_x(t) = \int_{-\infty}^{0} F(t-\tau)D_x(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{3}$$

Hence we see that, for large t, the time dependence of E_x is given essentially by that of the function $F(t)$.

For a monochromatic field, (3) gives

$$\frac{1}{\varepsilon(\omega)} = \int_0^\infty F(\tau)e^{i\omega\tau}\,\mathrm{d}\tau$$

or, conversely,

[0†] When considerable absorpion occurs, the group velocity cannot be used, since in an absorbing medium Wave packets are not propagated but rapidly "ironed out".

‡ Since $\varepsilon'' > 0$, the signs of n and κ must be the same, in accordance with the fact that the wave is damped in the direction of propagation. The choice of positive signs in (83.13) corresponds to a wave propagated in the positive ^{x}-direction.

$$F(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\varepsilon(\omega)} e^{-i\omega t}\, \mathrm{d}\omega$$

To estimate this integral for large t. we displace the path of integration into the lower half-plane of ω, where the integrand decreases rapidly. The singularities of the function $\mathrm{I}/\varepsilon(\omega)$, i.e. the zeros and branch points of $\varepsilon(\omega)$, must be excluded from the contour. The integral is then essentially proportional to $e^{-i\omega_0 t}$, where ω_0 is the singularity nearest the real axis. This gives the solution for the longitudinal part of the perturbation.
For the transverse components, we have from (1) $\ddot{D}_{y,z}/\mathcal{C}^2 + k^2 E_{y,z} = 0$. A similar analysis gives the result that the required "frequency" ω_0 is in this case the zero or branch point of the function $\omega^2\varepsilon(\omega) - c^2k^2$ which ties nearest the real axis.

12.1.10 §84. Transparent media

Let us apply the general formulae derived in §82 to media which absorb only slightly in [a] given range of frequencies, i.e. assuming that for these frequencies the imaginary part of the permittivity may be neglected.

In such a case there is no need to take the principal value in formula (82.8), since the point $x = \omega$ does not in practice lie in the region of integration. The integral can then be differentiated in the usual way with respect to the parameter ω, giving

$$\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}\omega} = \frac{4\omega}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{x\varepsilon''(x)}{\left(\omega^2 - x^2\right)^2}\, \mathrm{d}x$$

Since the integrand is positive throughout the region of integration, we conclude that

$$\mathrm{d}\varepsilon(\omega)/\mathrm{d}\omega > 0 \tag{84.1}$$

i.e. if absorption is absent the permittivity is a monotonically increasing function of the frequency.
Similarly in the same frequency range we obtain another inequality,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\left[\omega^2(\varepsilon - 1)\right] = \frac{4\omega}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{x^3\varepsilon''(x)}{\left(x^2 - \omega^2\right)^2}\, \mathrm{d}x > 0$$

or

$$\mathrm{d}\varepsilon/\mathrm{d}\omega > 2(1-\varepsilon)/\omega \tag{84.2}$$

If $\varepsilon < 1$, this inequality is more stringent than (84.1). †
It may be noted that the inequalities (84.1) and (84.2) (together with the corresponding ones for $\mu(\omega)$) ensure that the inequality $u < c$ is satisfied by the velocity of propagation of vaves. For example, if $\mu = 1$ we have $n = \sqrt{\varepsilon}$ and, replacing ε by n^2 in (84.1) and (84.2),

$$\mathrm{d}(n\omega)/\mathrm{d}\omega > n, \quad \mathrm{d}(n\omega)/\mathrm{d}\omega > 1/n. \tag{84.3}$$

Thus we obtain two inequalities for the velocity u (83.10): $u < c/n$ and $u < cn$. whence $u < c$ whether $n < 1$ or $n > 1$. These inequalities also show that $u > 0$, i.e. the group velocity is in the same direction as the wave vector. This is quite natural, even if not logically necessary.
Let us suppose that the weak absorption extends over a wide range of frequencies, from ω_1 to ω_2 ($\gg \omega_1$), and consider frequencies ω such that $\omega_1 \ll \omega \ll \omega_2$. The region of integration in (82.8) divides into two parts, $x < \omega_1$ and $x > \omega_2$. In the former region we can neglect x in comparison with ω, and in the latter region ω in comparison with x, in the denominator of the integrand:

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \frac{2}{\pi}\int_{\omega_2}^{\infty} \varepsilon''(x)\frac{\mathrm{d}x}{x} - \frac{2}{\pi\omega^2}\int_0^{\omega_1} x\varepsilon''(x)\mathrm{d}x \tag{84.4}$$

1.e. the function $\varepsilon(\omega)$ in this range is of the form $a - b/\omega^2$, where a and b are positive constants. The constant b can be expressed in terms of the oscillator strength $N_1{}^{\mathrm{r}}$ esponsible for the absorption in the range from 0 to ω_1 (cf. (82.12)):

$$\varepsilon(\omega) = a - 4\pi N_1 e^2/m\omega^2 \tag{84.5}$$

From this expression it follows. in particular, that, when the region of weak absorption is sufficiently wide, the permittivity in general passes through zero. In this connection it should be recalled that a literally transparent medium is one in which $\varepsilon(\omega)$ is not only reaj but also positive; if ε is negative, the wave is damped inside the medium, even though n_0 true dissipation of energy occurs.

For the frequency at which $\varepsilon = 0$ the induction $\mathbf{D}$ is zero identically, and Maxwells equations admit a variable electric field satisfying the single equation curl $\mathbf{E} = 0$, with zero magnetic field. In other words, longitudinal electric waves can occur. To determine their velocity of propagation, we must take into account the dispersion of the permittivity not only in frequency, but also with respect to the wave vector; we shall return to this topic in §105.

Lastly, suppose that within the broad transparency region there is a narrow absorption line near some frequency ω_0. Let us consider a neighbourhood of this frequency for which

$$\gamma \ll |\omega - \omega_0| \ll \omega_0, \tag{84.6}$$

where γ is the line width. In this range, x may be replaced by ω_0 in the integrand in (82.6) everywhere apart from the rapidly varying function $\varepsilon''(\omega)$. Then

$$\varepsilon(\omega) \cong \varepsilon'(\omega) \cong \frac{1}{\pi\,(\omega_0 - \omega)}\int \varepsilon''(x)\mathrm{d}x \tag{84.7}$$

the integration being taken over the absorption line.

PROBLEM

A plane electromagnetic wave with a sharply defined forward front is incident normally on the boundary of a half-space ($x > 0$) occupied by a transparent medium with $\mu = 1$. Determine the structure of the front of the transmitted wave (A. Sommerfeld and L. Brillouin, 1914).

Solution. Let the wave be incident on the boundary of the medium at time $t = 0$, so that at $x = 0$ the field (E or H) of the incident wave is $E = 0$ for $t < 0, E \propto e^{-i\omega_0 t}$ for $t > 0$. Expanding this field as a Fourier integral with respect to time, we reduce the problem to that of waves of various frequencies and infinite extent incident on the boundary. The amplitude of the Fourier component with frequency ω is proportional to

$$\int_0^{\infty} e^{i(\omega-\omega_0)\tau}\mathrm{d}\tau$$

When a wave of frequency ω is incident. the transmitted wave is of the form $a(\omega)e^{-i\omega t + i\omega n x/c}$, where the amplitude $a(\omega)$ is a slowly varying function of frequency. Hence the wave field in the medium in the present problem is

$$E \propto \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\omega a(\omega)e^{-i\omega t + i\omega n x/c}\int_0^{\infty} e^{i(\omega-\omega_0)\tau}\mathrm{d}\tau$$

In the region near the wave front, the important values of ω in this integral are those close to ω_0. Using a new variable $\xi = \omega - \omega_0$, we replace $a(\omega)$ by $a(\omega_0)$, and expand the exponent in powers of ξ. Omitting unimportanl constants and phase factors, we have

$$E \propto \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \exp\left\{ i\xi\left(\tau - t + \frac{x}{u}\right) - \frac{1}{2} i\xi^2 x \frac{u'}{u^2} \right\} \mathrm{d}\xi \ \mathrm{d}\tau$$

where $u = u(\omega_0)$ is the velocity of propagation (83.10), and $u' = [\mathrm{d}u/\mathrm{d}\omega]_{\omega=\omega_0}$. Effecting the integration over : we easily bring E to the form

$$E \propto \int_w^\infty e^{\pm i\eta^2} \ \mathrm{d}\eta, \quad w = (x - ut)/\sqrt{(2x\,|u'|)}$$

the sign in the exponent depending on that of u'. The intensity distribution near the wave front is given by

$$I \propto \left| \int_w^\infty e^{i\eta^2} \ \mathrm{d}\eta \right|^2 .$$

This expression is of the same form as that which gives the intensity distribution near the edge of the shadow in Fresnel diffraction (see Fields, §60). For $w > 0$ the intensity decreases monotonically with increasing w, but for $w < 0$ it oscillates with decreasing amplitude about a constant value to which it tends as $w \to -\propto$.
At large distances preceding the front here considered there are found "precursors" propagated with velocity c. These correspond to the high-frequency Fourier components, for which $\varepsilon \to 1$.

12.2 X The Propagation of Electromagnetic Waves by Landau

12.2.1 §85. Geometrical optics

The condition for geometrical optics to be applicable is that the wavelength λ should be small in comparison with the characteristic dimension I of the problem (see Fields, §53). The relation between geometrical and wave optics is that, for $\lambda \ll l$, any quantity ϕ which describes the wave field (i.e. any component of **E** or **H**) is given by a formula of the type $\phi = ae^{i\psi}$, where the amplitude a is a slowly varying function of the coordinates and time, and the phase ψ is a large quantity which is "almost linear" in the coordinates and the time; it is called the eikonal, and is of great importance in geometrical optics. The time derivative of ψ gives the frequency of the wave:

$$\partial\psi/\partial t = -\omega, \tag{85.1}$$

and the space derivatives give the wave vector

$$\mathrm{grad}\,\psi = \mathbf{k}, \tag{85.2}$$

and consequently the direction of the ray through any point in space.
For a steady monochromatic wave, the frequency is a constant and the time dependence of the eikonal is given by a term $-\omega t$. We then introduce a function ψ_1 (also called the eikonal), such that

$$\psi = -\omega t + (\omega/c)\psi_1(x, y, z). \tag{85.3}$$

Then ψ_1 is a function of the coordinates only, and its gradient is

$$\mathrm{grad}\,\psi_1 = \mathbf{n}, \tag{85.4}$$

where $\mathbf{n}$ is a vector such that

$$\mathbf{k} = \omega\mathbf{n}/c. \tag{85.5}$$

The magnitude of $\mathbf{n}$ is equal to the refractive index n of the medium. † Hence the equation for the eikonal in ray propagation in a medium with refractive index $n\,(x, y,$ [21] (a given function of the coordinates) is

$$|\operatorname{grad}\psi_1|^2 \equiv \left(\frac{\partial\psi_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi_1}{\partial z}\right)^2 = n^2. \tag{85.6}$$

The equation of ray propagation in a steady state can also be derived from Fermat's principle, according to which the integral

$$\psi_1 = \int_A^B \mathrm{n}\cdot\ \mathrm{d}\mathbf{l} = \int_A^B n\ \mathrm{d}l$$

along the path of the ray between two given points A and B has a value less than for any other path between A and B. Equating to zero the variation of this integral, we have

$$\delta\psi_1 = \int_A^B (\delta n\ \mathrm{d}l + n\delta\ \mathrm{d}l) = 0$$

Let $\delta\mathbf{r}$ be a displacement of the ray path under the variation. Then $\delta n = \delta\mathbf{r}\cdot\mathbf{grad}n$, $\delta\mathrm{d}l = 1\cdot\ \mathrm{d}\delta\mathbf{r}$, where 1 is a unit vector tangential to the ray. Substituting in $\delta\psi_1$ and integrating by parts in the second term (using the fact that $\delta\mathbf{r} = 0$ at A and B), we have

$$\begin{aligned}\delta\psi_1 &= \int_A^B \delta\mathbf{r}\cdot\operatorname{grad}n\ \mathrm{d}l + \int_A^{\mathrm{B}} n\mathbf{l}\cdot\ \mathrm{d}\delta\mathbf{r}\\ &= \int_A^B \left(\operatorname{grad}n - \frac{\mathrm{d}(n\mathbf{l})}{\mathrm{d}l}\right)\cdot\delta\mathbf{r}\mathrm{d}l = 0\end{aligned}$$

Hence

$$\mathrm{d}(n\mathbf{l})/\mathrm{d}l = \operatorname{grad}n \tag{85.7}$$

Expanding the derivative and putting $\mathrm{d}n/\mathrm{d}l = 1\cdot\operatorname{grad}n$, we obtain

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{l}}{\mathrm{d}l} = \frac{1}{n}[\operatorname{grad}n - 1(1\cdot\operatorname{grad}n)] \tag{85.8}$$

This is the equation giving the form of the rays.
We know from differential geometry that the derivative dl/d/ along the ray is equal to N/R, where N is the unit vector along the principal normal and R the radius of curvature. Taking the scalar product of both sides of (85.8) with $\mathbf{N}$, and using the fact that $\mathbf{N}$ and $\mathbf{1}$ are perpendicular, we have

$$\frac{1}{R} = \mathbf{N}\cdot\frac{\operatorname{grad}n}{n} \tag{85.9}$$

the rays are therefore bent in the direction of increasing refractive index.
The velocity of propagation of rays in geometrical optics is in the direction of $\mathbf{1}$, and is given by the derivative

$$\mathbf{u} = \partial\omega/\partial\mathbf{k} \tag{85.10}$$

This is also called the group velocity, the ratio ω/k being called the phase velocity. However. the latter is not the velocity of physical propagation of any quantity.

It is easy to derive also the equation which gives the rate of change of the radiation intensity along a ray. The intensity I is the magnitude of the (time) averaged Poynting vector. This vector, like the group velocity, is in the direction of $\mathbf{1} : \overline{\mathbf{S}} = I1$. In a steady state, the mean field energy density is constant at any given point in space. The equation of conservation of energy is therefore $\operatorname{div} \overline{\mathbf{S}} = 0$, or

$$\operatorname{div}(I1) = 0. \tag{85.11}$$

This is the required equation.

Finally, let us consider how the direction of polarization of linearly polarized radiation varies along a ray (S. M. Rytov, 1938). As we know from differential geometry, a curve in space (in this case, the ray) is characterized at every point by three mutually perpendicular unit vectors along the tangent (1), the principal normal (N) and the binormal (b), which form the natural trihedral. Since the electromagnetic waves are transverse, the vectors $\mathbf{E}$ and $\mathbf{H}$ are always coplanar with $\mathbf{N}$ and $\mathbf{b}$.

Let the direction of $\mathbf{E}$ at some point on the ray be the same as that of $\mathbf{N}$, i.e. let $\mathbf{E}$ lie in the osculating plane (that of $\mathbf{N}$ and $\mathbf{1}$). The deviation of the curve from the osculating plane over a length $\mathrm{d}l$ is of the third order of smallness with respect to $\mathrm{d}l$. We can therefore say that, over a length $\mathrm{d}l$ of the ray, the vector $\mathbf{E}$ remains in the original osculating plane. The osculating plane at the other end of $\mathrm{d}l$ is inclined to the original one at an angle $\mathrm{d}\phi = \mathrm{d}l/T$, where T is the radius of torsion. This is therefore the angle turned through by the vector $\mathbf{E}$ relative to $\mathbf{N}$ in the normal plane. Thus, over a distance $\mathrm{d}l$ along the ray, the direction of polarization rotates in the normal plane, its angle to the principal normal varying in accordance with the equation

$$\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}l = 1/T. \tag{85.12}$$

In particular, when the torsion is zero, i.e. the ray is a plane curve, the direction of the vector $\mathbf{E}$ in the normal plane is constant, as is in any case evident from symmetry.

PROBLEMS

Problem 1. Find the law of transformation for the velocity of light (the group velocity) in a medium when the frame of reference is changed.

Solution. By the definition of the group velocity $\mathbf{u}, \mathbf{d}\omega = \mathbf{u} \cdot \mathbf{dk}$ and $\mathbf{d}\omega' = \mathbf{u}' \cdot \mathbf{dk}'$, the primed and unprimed quantities referring to the frames K' and K; K' moves with velocity v relative to K. According to the Lorent z transformation formulae for a wave four-vector,

$$k'_x = \gamma\left(k_x - v\omega/c^2\right), \quad k'_y = k_y, \quad k'_z = k_z, \quad \omega = \gamma\left(\omega' + vk'_x\right)$$

where $\gamma = 1/\sqrt{(1 - v^2/c^2)}$; the x and x' axes are parallel to v. The last of these expressions gives

$$\mathrm{d}\omega = \gamma\left(\mathrm{d}\omega' + v\ \mathrm{d}k'_x\right) = \gamma\left(\mathbf{u}' \cdot \mathrm{d}\mathbf{k}' + \tau \mathrm{d}k'_x\right).$$

Substituting $\mathbf{dk}'$ in terms of $\mathbf{dk}$ and $\mathbf{d}\omega$ from the other expressions, and collecting terms in $\mathbf{d}\omega$, gives

$$\gamma\left(1 + vv'_x/c^2\right)\mathrm{d}\omega = \gamma\left(u'_x + v\right)\mathrm{d}k_x + u'_y \mathrm{d}k_y + u'_z \mathrm{d}k_z$$

Comparison with $\mathrm{d}\omega = \mathbf{u} \cdot \mathbf{dk}$ shows that the velocities $\mathbf{u}'$ and $\mathbf{v}$ give $\mathbf{u}$ by the usual relativistic formulae for the addition of velocities, as expected.

Problem 2. Determine the velocity of propagation of light in a medium moving relative to the observer.

Solution. Let ω and $\mathbf{k}$ be the frequency and wave vector of the light wave in a fixed frame of reference K. and $\omega', \mathbf{k}'$ the corresponding quantities in a frame K' moving with the medium at velocity v relative to K. In the frame K' the medium is at rest, and ω' and k' are therefore related by

$$ck' = \omega' n(\omega') \tag{1}$$

order in $v/c, \omega' = \omega - \mathbf{k}\cdot\mathbf{v}, \mathbf{k}' = \mathbf{k} - \omega\mathbf{v}/c^2, k' = k - \omega\mathbf{v}\cdot\mathbf{l}/c^2$, where $\mathbf{l} = \mathbf{k}/k$. Substituting these expressions in (1) and expanding the function $n(\omega')$ in powers of v. we obtain to the same accuracy †

$$k = n\frac{\omega}{c} + \frac{v\cdot \mathrm{l}\omega}{c^2}\left(1 - n\frac{\mathrm{d}(n\omega)}{d\omega}\right) \tag{2}$$

The velocity of propagation (the group velocity) in a medium at rest is found by differentiating the relation $c^k = \omega n(\omega)$:

$$\mathbf{u}_0 = \frac{c}{\mathrm{d}(n\omega)/\mathrm{d}\omega}\mathbf{1}. \tag{3}$$

In a moving medium, it is found by differentiating the relation (2), which we first rewnte as

$$k = \omega n/c + \mathbf{k}\cdot\mathbf{v}\left(\frac{1}{cn} - \frac{1}{u_0}\right)$$

Again as far as the first-order terms,

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{l}(\mathbf{l}\cdot\mathbf{v})\left(\frac{u_0}{cn} - \frac{u_0^2}{c^2} - \frac{n\omega}{c}\frac{\mathrm{d}u_0}{\mathrm{d}\omega}\right) + \mathbf{v}\left(1 - \frac{u_0}{cn}\right). \tag{4}$$

For propagation in the direction of motion ($v \| I$), we therefore have ‡

$$u = u_0 + v\left(1 - u_0^2/c^2\right) - (vn\omega/c)\mathrm{d}u_0/\mathrm{d}\omega. \tag{5}$$

The first two terms can be derived by simply applying the relativistic expression for the addition of velocities. If v and I are mutually perpendicular, then

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{v}\left(1 - u_0/cn\right). \tag{6}$$

The phase velocity of the wave is given by (2):

$$\frac{\omega}{k} = \frac{c}{n} + v\cdot 1\left(1 - \frac{1}{n^2} + \frac{\omega}{n}\frac{dn}{d\omega}\right);$$

when $\mathbf{v} \perp \mathbf{l}$, there is no first-order effect.

12.2.2 §86. Reflection and refraction of electromagnetic waves

Let us consider the reflection and refraction of a plane monochromatic electromagnetic wave at a plane boundary between two homogeneous media. Medium 1, from which the wave is incident, is assumed transparent, but not medium 2 (for the present). Quantities pertaining to the incident and reflected waves will be distinguished by the suffixes 0 and 1 respectively, and those for the refracted wave by the suffix 2 (Fig. 46, p. 294). The direction of the normal from the boundary plane into medium 2 is taken as the z-axis.

Since there is complete homogeneity in the xy-plane, the dependence of the solution of the field equations on x and y must be the same in all space. The components k_x, k_y of the

wave vector must therefore be the same for all three waves. Consequently, the directions of propagation of the three waves lie in one plane, which we take as the xz-plane.

From the equations

$$k_{0x} = k_{1x} = k_{2x} \tag{86.1}$$

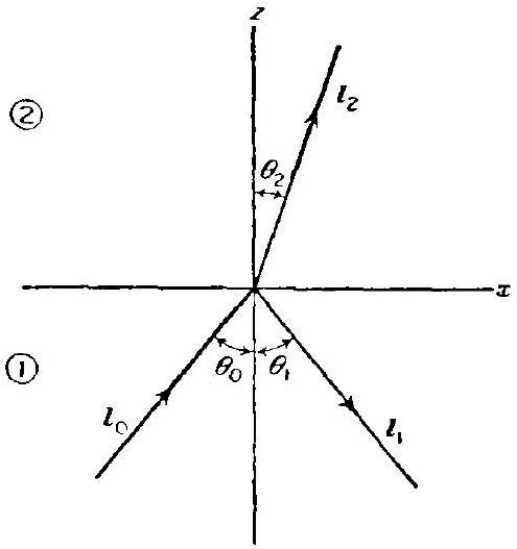


Fig. 46

we find

$$\left.\begin{aligned} k_{1z} &= -k_{0z} = -(\omega/c)\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta_0 \\ k_{2z} &= \sqrt{[(\omega/c)^2\varepsilon_2 - k_{0x}^2]} = (\omega/c)\sqrt{\left(\varepsilon_2 - \varepsilon_1\sin^2\theta_0\right)}\,; \end{aligned}\right\} \tag{86.2}$$

we take $\mu = 1$ in both media. The vector $\mathbf{k}_0$ is, by definition, real, and so is $\mathbf{k}_1$. The quantity k_{2z}, however, is complex in an absorbing medium, and the sign of the root must be taken so that im $k_{2z} > 0$, the refracted wave being damped towards the interior of medium 2 .

If both media are transparent, equations (86.1) give the familiar laws of reflection and refraction:

$$\theta_1 = \theta_0, \quad \frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_0} = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} = \frac{n_1}{n_2}. \tag{86.3}$$

To determine the amplitudes of the reflected and refracted waves, we must use the boundary conditions at the surface of separation ($z = 0$), and we shall consider separately the two cases where the electric field $\mathbf{E_0}$ is in the plane of incidence and perpendicular to that plane; from the results we can obtain the solution for the general case, where $\mathbf{E}_0$ can be resolved into components in these two directions.

Let us first suppose that $\mathbf{E}_0$ is perpendicular to the plane of incidence. It is evident from symmetry that the same will be true of the fields $\mathbf{E}_1$ and $\mathbf{E}_2$ in the reflected and refracted waves. The vector $\mathbf{H}$ is in the xz-plane. The boundary conditions require † the continuity of $E_y = E$ and H_x; by (83.3) $H_x = -ck_zE_y/\omega$.

[0+]The second term in (2), and therefore all first-order effects, vanish identically when $n^2 = \varepsilon = 1$ - constant $/\omega^2$.

‡ This formula represents the Fizeau effect, first predicted by A. Fresnel (1818). The influence of dispersion on this effect was discussed by H. A. Lorentz (1895).

The field in medium 1 is the sum of the fields in the incident and reflected waves, so that we obtain the two equations $E_0 + E_1 = E_2, k_{0z}(E_0 - E_1) = k_{2z}E_2$. The exponential factors in E cancel because k_x (and therefore ω) is the same in all three waves. In what follows, **E** signifies the complex amplitude of a wave. The solution of the above equations gives

Fresnel's formulae:

$$\left.\begin{aligned} E_1 &= \frac{k_{0z}-k_{2z}}{k_{0z}+k_{2z}}E_0 = \frac{\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta_0-\sqrt{\left(\varepsilon_2-\varepsilon_1\sin^2\theta_0\right)}}{\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta_0+\sqrt{\left(\varepsilon_2-\varepsilon_1\sin^2\theta_0\right)}}E_0 \\ E_2 &= \frac{2k_{0z}}{k_{0z}+k_{2z}}E_0 = \frac{2\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta_0}{\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta_0+\sqrt{\left(\varepsilon_2-\varepsilon_1\sin^2\theta_0\right)}}E_0 \end{aligned}\right\} \tag{86.4}$$

If both media are transparent, these formulae become, by (86.3),

$$\left.\begin{aligned} E_1 &= \frac{\sin(\theta_2-\theta_0)}{\sin(\theta_2+\theta_0)}E_0 \\ E_2 &= \frac{2\cos\theta_0\sin\theta_2}{\sin(\theta_2+\theta_0)}E_0 \end{aligned}\right\} \tag{86.5}$$

The case where **E** lies in the plane of incidence can be discussed similarly. Here it is more convenient to carry out the calculations for the magnetic field, which is perpendicular to the plane of incidence. A further two Fresnel's formulae are obtained:

$$\left.\begin{aligned} H_1 &= \frac{\varepsilon_2 k_{0z}-\varepsilon_1 k_{2z}}{\varepsilon_2 k_{0z}+\varepsilon_1 k_{2z}}H_0 = \frac{\varepsilon_2\cos\theta_0-\sqrt{\left(\varepsilon_1\varepsilon_2-\varepsilon_1^2\sin^2\theta_0\right)}}{\varepsilon_2\cos\theta_0+\sqrt{\left(\varepsilon_1\varepsilon_2-\varepsilon_1^2\sin^2\theta_0\right)}}H_0 \\ H_2 &= \frac{2\varepsilon_2 k_{0z}}{\varepsilon_2 k_{0z}+\varepsilon_1 k_{2z}}H_0 = \frac{2\varepsilon_2\cos\theta_0}{\varepsilon_2\cos\theta_0+\sqrt{\left(\varepsilon_1\varepsilon_2-\varepsilon_1^2\sin^2\theta_0\right)}}H_0 \end{aligned}\right\} \tag{86.6}$$

If both media are transparent, these formulae may be written

$$\left.\begin{aligned} H_1 &= \frac{\tan(\theta_0-\theta_2)}{\tan(\theta_0+\theta_2)}H_0 \\ H_2 &= \frac{\sin 2\theta_0}{\sin(\theta_0+\theta_2)\cos(\theta_0-\theta_2)}H_0 \end{aligned}\right\} \tag{86.7}$$

The reflection coefficient R is defined as the ratio of the (time) averaged energy flux reflected from the surface to the incident flux. Each of these fluxes is given by the averaged ^{z}-component of the Poynting vector (83.11) for the wave in question,

$$R = \frac{\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta_1\left|\mathbf{E}_1\right|^2}{\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta_0\left|\mathbf{E}_0\right|^2} = \frac{\left|\mathbf{E}_1\right|^2}{\left|\mathbf{E}_0\right|^2}$$

For normal incidence ($\theta_0 = 0$) the two modes of polarization are equivalent, and the reflection coefficient is given by

$$R = \left|\frac{\sqrt{\varepsilon_1}-\sqrt{\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1}+\sqrt{\varepsilon_2}}\right|^2 \tag{86.8}$$

This formula is valid whether the reflecting medium is transparent or not. If we put $\sqrt{\varepsilon_2} = n_2 + i\kappa_2$, and if medium 1 is a vacuum ($\varepsilon_1 = 1$), then

$$R = \frac{(n_2-1)^2+\kappa_2^2}{(n_2+1)^2+\kappa_2^2} \tag{86.9}$$

The remaining discussion assumes that both media are transparent. The following general remark should be made first of all. The boundary between two different media is in reality not a geometrical surface but a thin transition layer. The validity of the formulae (86.1) does not rest on any assumptions concerning the nature of this layer. The derivation of Fresnel's formulae, on

[0]† The boundary conditions on the normal components of **B** and **D** give nothing new in the present problembecause the equations div $\mathbf{B} = \mathbf{0}$, div $\mathbf{D} = \mathbf{0}$ are consequences of equations (83.1).

the other hand, is based on the use of the boundary conditions, and assumes that the thickness δ of the transition layer is small compared with the wavelength λ. The thickness δ is usually comparable with the distances between the atoms, which are always small compared with λ if the macroscopic description of the field is legitimate, and so the condition $\lambda \gg \delta$ is usually fulfilled. In the opposite limiting case the phenomenon of refraction is entirely different in character. For $\delta \gg \lambda$, geometrical optics is valid (λ being small compared with the dimensions of the inhomogeneities in the medium). In this case, therefore, the propagation of the wave can be regarded as the propagation of rays which undergo refraction in the transition layer but are not reflected from it. The reflection coefficient, therefore, would be zero.

Let us return now to Fresnel's formulae. In reflection from a transparent medium, the coefficients of proportionality between $\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2$ and $\mathbf{E}_0$ in these formulae are real. † This means that the wave phase either remains unchanged or changes by π, depending on the sign of the coefficients. In particular, the phase of the refracted wave is always the same as that of the incident wave. The reflection, on the other hand, may be accompanied by a change in phase ‡ For example, with normal incidence the phase of the wave is unchanged if $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$, but if $\varepsilon_1 < \varepsilon_2$ the vectors $\mathbf{E}_1$ and $\mathbf{E}_0$ are in opposite directions, i.e the wave phase changes by π.

The reflection coefficients for oblique incidence are, by (86.5) and (86.7),

$$R_\perp = \frac{\sin^2(\theta_2 - \theta_0)}{\sin^2(\theta_2 + \theta_0)}, \quad R_\parallel = \frac{\tan^2(\theta_2 - \theta_0)}{\tan^2(\theta_2 + \theta_0)} \tag{86.10}$$

Here, and in what follows, the suffixes $\perp$ and $\parallel$ refer to the cases where the field $\mathbf{E}$ is respectively perpendicular and parallel to the plane of incidence. The expressions (86.10) are unaltered when θ_2 and θ_0 are interchanged (but the phase of the reflected wave changes by π. as is seen from formulae (86.5) and (86.7)). The reflection coefficient for a wave incident from medium 1 at an angle θ_0 is therefore equal to that for a wave incident from medium 2 at an angle θ_2.

An interesting case is the reflection of light incident at an angle θ_0 such that $\theta_0 + \theta_2 = \frac{1}{2}\pi$ (the reflected and refracted rays being thus perpendicular). Let this angle be $\theta_p; \sin\theta_p = \sin\left(\frac{1}{2}\pi - \theta_2\right) = \cos\theta_2$, and the law of refraction (86.3) gives

$$\tan\theta_p = \sqrt{(\varepsilon_2/\varepsilon_1)} \tag{86.11}$$

For $\theta_0 = \theta_p$ we have $\tan(\theta_2 + \theta_0) = \infty$, and $R_{\text{II}} = 0$. Hence, whatever the direction of polarization of light incident at this angle, the reflected light will be polarized so that the electric field is perpendicular to the plane of incidence. The reflected light is polarized in this way even when the incident light is natural: no component with any other polarization is reflected. The angle θ_p is called the angle of total polarization or the Brewster angle. It should be noticed that, whereas natural light can be totally polarized by reflection, this effect cannot be produced by refraction, whatever the angle of incidence.

The reflection and refraction of plane-polarized light always results in plane-polarized light, but the direction of polarization is in general not the same as in the incident light. Let $_{i0}$ be the angle between the direction of $\mathbf{E}_0$ and the plane of incidence, and γ_1, γ_2 the corresponding angles for the reflected and refracted waves. Using formulae (86.5) and (86.7), we easily obtain the relations

$$\left.\begin{aligned} \tan\gamma_1 &= -\tfrac{\cos(\theta_0-\theta_2)}{\cos(\theta_0+\theta_2)}\tan\gamma_0 \\ \tan\gamma_2 &= \cos(\theta_0-\theta_2)\tan\gamma_0 \end{aligned}\right\} \tag{86.12}$$

[0]† We ignore for the moment the possibility of total reflection (see below).

‡ Reflection from an absorbing medium leads in general to the appearance of elliptical polarization. The explicit expressions for the amplitude and phase relations between the three waves are then extremely involved: they are given by J. A. Stratton, Electromagnetic Theory, Chapter IX, McGraw-Hill, New York, 1941.

The angles γ_0, γ_1 and γ_2 are equal for all angles of incidence only in the obvious cases $\gamma_0 = 0$ and $\gamma_0 = \frac{1}{2}\pi$; they are also equal for normal incidence ($\theta_0 = \theta_2 = 0$) and for grazing incidence ($\theta_0 = \frac{1}{2}\pi$, in which case there is no refracted wave). In all other cases the formulae (86.12) give (by virtue of the inequalities $0 < \theta_0, \theta_2 < \frac{1}{2}\pi$ and, as we shall assume, $0 < \gamma_0 < \frac{1}{2}\pi, 0 < \gamma_1, \gamma_2 < \pi$) the inequalities $\gamma_1 > \gamma_0, \gamma_2 < \gamma_0$. Thus the direction of $\mathbf{E}$ is turned away from the plane of incidence on reflection, but towards it on refraction.

A comparison of the two formulae (86.10) shows that, at all angles of incidence except $\theta_0 = 0$ or $\frac{1}{2}\pi, R_{11} < R_1$. Hence, for example, when the incident light is natural the reflected light is partly polarized, and the predominant direction of the electric field is perpendicular to the plane of incidence. The refracted light is partly polarized, with the predominant direction of $\mathbf{E}$ lying in the plane of incidence.

The quantities $R_\parallel$and $R_\perp$ depend quite differently on the angle of incidence. The coefficient $R_\perp$ increases monotonically with the angle θ_0 from the value (86.8) for $\theta_0 = 0$. The coefficient R_{II} takes the same value (86.8) for $\theta_0 = 0$, but as θ_0 increases R_{II} decreases to zero at $\theta_0 = \theta_p$ before monotonically increasing.

Here two distinct cases occur. If the reflection is from the "optically denser" medium, i.e. $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$, then $R_\parallel$and $R_\perp$ increase to the common value of unity at $\theta_0 = \frac{1}{2}\pi$ (grazing incidence). If, on the other hand, the reflecting medium is "optically less dense" ($\varepsilon_2 < \varepsilon_1$), both coefficients become equal to unity for $\theta_0 = \theta_r$, where

$$\sin\theta_r = \sqrt{(\varepsilon_2/\varepsilon_1)} = n_2/n_1; \tag{86.13}$$

θ_r is called the angle of total reflection. When $\theta_0 = \theta_r$ the angle of refraction $\theta_2 = \frac{1}{2}\pi$. i.e. the refracted wave is propagated along the surface separating the media.

Reflection from an optically less dense medium at angles $\theta_0 > \theta_r$ requires special Consideration. In this case k_{2z} is purely imaginary (see (86.2)), i.e. the field is damped in Medium 2. The damping of the wave without true absorption (i.e. dissipation of energy) signifies that the average energy flux from medium 1 into medium 2 is zero (by simple calculation it can easily be seen that the vector $\overline{\mathbf{S}}$ giving the average energy flux in medium 2 is in the x-direction). That is, all the energy incident on the boundary is reflected back into medium 1 , so that the reflection coefficients are $R_\perp = R_\parallel = 1$. This phenomenon is called
total reflection. † The equality of $R_\perp$ and $R_\parallel$to unity can, of course, be obtained directly from Fresnel's formulae (86.4) and (86.6).

For $\theta_0 > \theta_r$ the proportionality coefficients between $\mathbf{E}_1$ and $\mathbf{E}_0$ become complex quantities, of the form $(a-ib)/(a+ib)$. The quantities $R_\perp$ and $R_\parallel$are given by the squared moduli of these coefficients, which are equal to unity. The formulae give, besides the ratio of the magnitudes of the fields in the reflected and incident waves, the difference in their phases. For this purpose we write $E_{11} = e^{-i\delta_1}E_{01}, E_{11} = e^{-i\delta_{11}}E_{01}$. Then ‡

$$\left.\begin{aligned} \tan\tfrac{1}{2}\delta_\perp &= \sqrt{\left(\varepsilon_1\sin^2\theta_0 - \varepsilon_2\right)}\,/\sqrt{\varepsilon_1}\cos\theta_0 \\ \tan\tfrac{1}{2}\delta_\parallel &= \sqrt{\left(\varepsilon_1^2\sin^2\theta_0 - \varepsilon_1\varepsilon_2\right)}\,/\varepsilon_2\cos\theta_0 \end{aligned}\right\} \tag{86.14}$$

Thus total reflection involves a change in the wave phase which is in general different for the field components parallel and perpendicular to the plane of incidence. Hence, on reflection of a wave polarized in a plane inclined to the plane of incidence, the reflected wave will be elliptically polarized. The phase difference $\delta = \delta_\perp - \delta_\parallel$is easily found to be such that

$$\tan\frac{1}{2}\delta = \frac{\cos\theta_0\sqrt{\left(\varepsilon_1\sin^2\theta_0 - \varepsilon_2\right)}}{\sqrt{\varepsilon_1}\sin^2\theta_0} \tag{86.15}$$

The difference is zero only for $\theta_0 = \theta_r$ or $\theta_0 = \frac{1}{2}\pi$.

PROBLEMS

Problem 1. Find the manner in which the reflection coefficient approaches unity near the angle of total reflection.

Solution. We put $\theta_0 = \theta_r - \delta$, where δ is a small quantity, and expand $\sin\theta_0$ and $\cos\theta_0$ in formulae (86.10) in powers of δ. The result is

$$R_1 = 1 - 4\sqrt{(2\delta)}\left(n^2-1\right)^{-\frac{1}{4}}$$
$$R_1 = 1 - 4\sqrt{(2\delta)}n^2\left(n^2-1\right)^{-\frac{1}{4}}$$

where $n^2 = \varepsilon_1/\varepsilon_2 > 1$. The derivatives $\mathrm{d}R/\mathrm{d}\delta$ become infinite as $\delta^{-\frac{1}{2}}$ when $\delta \to 0$.

Problem 2. Find the reflection coefficient for almost grazing incidence of light from a vacuum on the surface of a body for which ε is almost unity.

Solution. Formulae (86.10) give the same reflection coefficient:

$$R_\perp \cong R_1 \cong \left[\phi_0 - \sqrt{\left(\phi_0^2 + \varepsilon - 1\right)}\right]^4 / (\varepsilon-1)^2$$

where $\phi_0 = \frac{1}{2}\pi - \theta_0$.

Problem 3. Determine the reflection coefficient for a wave incident from a vacuum on a medium for which both ε and μ are different from unity.

Solution. Calculations entirely analogous to those given above furnish the result

$$R_\perp = \left|\frac{\mu\cos\theta_0 - \sqrt{\left(\varepsilon\mu - \sin^2\theta_0\right)}}{\mu\cos\theta_0 + \sqrt{\left(\varepsilon\mu - \sin^2\theta_0\right)}}\right|^2$$
$$R_\mathrm{I} = \left|\frac{\varepsilon\cos\theta_0 - \sqrt{\left(\varepsilon\mu - \sin^2\theta_0\right)}}{\varepsilon\cos\theta_0 + \sqrt{\left(\varepsilon\mu - \sin^2\theta_0\right)}}\right|^2$$

† The reflection coefficient is always equal to unity in reflection from a medium with ε real and negative. In such a medium there is again no true absorption, but the wave cannot penetrate into it.

‡ If $(a-ib)/(a+ib) = e^{-i\delta}$, then $\tan\frac{1}{2}\delta = b/a$.

PrOBLEM 4. A plane-parallel layer (region 2) lies between a vacuum (region 1) and an arbitrary medium (region 3). Light polarized parallel or perpendicular to the plane of incidence falls on the layer from the vacuum. Express the reflection coefficient R in terms of those for semi-infinite media of the substances in regions 2 and 3.

SOLUTION. We denote by A_0 and A_1 the amplitudes of the field (**E** or **H**. whichever is parallel to the layer) in the incident and reflected waves. The field in the layer consists of the refracted wave (amplitude A_2) and the wave reflected from region 3 (amplitude A_2'). The boundary condition between regions 1 and 2 gives

$$A_2' = a\left(A_1 - r_{12}A_0\right) \tag{1}$$

where a and r_{12} are constants. In reflection from a semi-infinite medium of the substance in region 2, A_2 ' is zero, and so from (1) we have $r_{12} = A_1/A_0$, i.e. r_{12} is the amplitude of reflection in that case. Another equation is obtained from (1) by interchanging A_1 and A_0 and replacing A_2' by A_2, which corresponds simply to a reversal of the z-component of the wave vector:

$$A_2 = a\left(A_0 - r_{12}A_1\right). \tag{2}$$

In region 3 there is only the transmitted wave, whose amplitude A_3 satisfies the conditions

$$A_2 e^{i\psi} = aA_3, \quad A_2' e^{-i\psi} = -ar_{32}A_3 \tag{3}$$

analogous to (1), (2) with $A_1 = 0$. The exponential factors take account of the change in the wave phase over the thickness h of the layer, with

$$\psi = (\omega h/c)\sqrt{\left(\varepsilon_2 - \sin^2\theta_0\right)} \tag{4}$$

Eliminating A_3 from equations (3), we obtain

$$A_2' e^{-i\psi} = r_{23} A_2 e^{i\psi}, \tag{5}$$

where $r_{23} = -r_{32}$.
From equations (1), (2) and (5) we find the amplitude of reflection from the layer:

$$r = \frac{A_1}{A_0} = \frac{r_{12}e^{-2i\psi} + r_{23}}{e^{-2i\psi} + r_{12}r_{23}}, \tag{6}$$

and the reflection coefficient $R = |r|^2$. The significance of r_{23} is found from the fact that, for. $h = 0, r$ must be the amplitude of reflection r_{13} from a semi-infinite medium of the substance in region 3 . Hence

$$r_{23} = (r_{12} - r_{13}) / (r_{12}r_{13} - 1). \tag{7}$$

Formulae (6) and (7) give the required solution. It should be emphasized that their derivation involves no assumptions concerning the properties of regions 2 and 3 , which may be either transparent or not.
If regions 2 and 3 are transparent, then ψ, r_{12} and r_{13} are all real, and r_{23} is the amplitude of reflection at the boundary between semi-infinite media of the substances in regions 2 and 3. From (6) we have

$$R = \frac{(r_{12} + r_{23})^2 - 4r_{12}r_{23}\sin^2\psi}{(r_{12}r_{23} + 1)^2 - 4r_{12}r_{23}\sin^2\psi}. \tag{8}$$

As ψ varies, R varies between the limits $[(r_{12} + r_{23})(r_{12}r_{23} + 1)]^2$ and $[(r_{12} - r_{23}) / (r_{12}r_{23} - 1)]^2$. For normal and R ince $r_{12} = (n_1 - n_2) / (n_1 + n_2)$, and r_{13} and r_{23} are given by similar relations. If ${n_2}^2 = n_1 n_3$, then $r_{12} = r_{23}$, and R may be zero for some value of the thickness of the layer. If region 3 is a vacuum, then $r_{13} = 0, r_{23} = -r_{12}$, and (6) gives

$$r = \frac{r_{12}\left(e^{-2i\psi} - 1\right)}{e^{-2i\psi} - r_{12}^2} = -\frac{\sinh i\psi}{\sinh\left[i\psi + \log\left(-r_{12}\right)\right]}. \tag{9}$$

If also region 2 is transparent, we have

$$R = \frac{4R_{12}\sin^2\psi}{(1 - R_{12})^2 + 4R_{12}\sin^2\psi}.$$

The transmission coefficient D for the layer (between vacua) is $1 - R$ only if region 2 is transparent Otherwise $D_{\text{must be calculated from equations (1) - (3), putting } r_{32} = r_{12}}$. The amplitude of transmission d is

$$d = \frac{A_3}{A_0} = \frac{1 - r_{12}^2}{e^{-1\psi} - r_{12}^2 e^{2\psi}}, \tag{10}$$

and the transmission coefficient $D = |d|^2$.

Problem 5. Determine the reflection and transmission coefficients for light incident normally on a slab with a very large complex permittivity ε.

Solution. In this case $r_{12} = (1-\sqrt{\varepsilon})/(1+\sqrt{\varepsilon}) \cong -(1-2,\sqrt{\varepsilon})$, and formula (9) of Problem 4 gives $r = -[1-(2/\sqrt{\varepsilon})\coth i\psi]^{-1}, \psi = (\omega h/c)\sqrt{\varepsilon}$. If the slab is so thin that $\omega h/c \ll 1/\sqrt{|\varepsilon|}$, then we can put $r = -[1+2ic/\varepsilon\omega h]^{-1}$, and distinguish two cases:

$$\begin{array}{ll} \text{for } 1/|\varepsilon| \ll \omega h/c \ll 1/\sqrt{|\varepsilon|}, & R = 1 - 4c\varepsilon''/\omega h|\varepsilon|^2 \\ \text{for } \omega h/c \ll 1/|\varepsilon|, & R = \omega^2 h^2|\varepsilon|^2/4c^2 \end{array}$$

The transmission coefficient is, by formula (10),

$$\begin{array}{ll} \text{for } \omega h/c \sim 1/\sqrt{|\varepsilon|}, & d = -2/\sqrt{\varepsilon}\sinh i\psi, \\ \text{for } \omega h/c \ll 1/\sqrt{|\varepsilon|}, & d = (1 - i\varepsilon\omega h/2c)^{-1}. \end{array}$$

Again two cases can be distinguished:

$$\begin{array}{ll} \text{for } 1/|\varepsilon| <\!\!\ll \omega h/c \ll 1/\sqrt{|\varepsilon|}, & D = 4c^2/\omega^2 h^2|\varepsilon|^2 \\ \text{for } \omega h/c \ll 1/|\varepsilon|, & D = 1 - \varepsilon''\omega h/c \end{array}$$

12.2.3 §87. The surface impedance of metals

The permittivity of metals is, in magnitude. large compared with unity at low frequencies (as $\omega \to 0$, it tends to infinity as $1/\omega$). The wavelength $\delta \sim c/\omega\sqrt{|\varepsilon|}$ in metals † is then small compared with the wavelength $\lambda \sim c/\omega$ in vacuum. If δ (but not necessarily λ) is also small compared with the radii of curvature of the metal surface, the problem of the reflection of arbitrary electromagnetic waves from the metal can be considerably simplified.

The smallness of δ implies that the derivatives of the field components inside the metal along the normal to the surface are large compared with the tangential derivatives. The field inside the metal near the surface can therefore be regarded as the field of a plane wave, and hence the fields $\mathbf{E}_t$ and $\mathbf{H}_t$ are related by

$$\mathbf{E}_t = \sqrt{(\mu/\varepsilon)}\mathbf{H}_t \times \mathbf{n}. \tag{87.1}$$

where $\mathbf{n}$ is a unit vector along the inward normal to the surface. Since $\mathbf{E}_t$ and $\mathbf{H}_t$ are continuous, their values outside the metal near the surface must be related in the same way. As M. A. Leontovich (1948) has pointed out, the equation (87.1) may be used as a boundary condition in determining the field outside the metal. Thus the problem of determining the external electromagnetic field can be solved without considering the field inside the metal.

The quantity $\sqrt{(\mu/\varepsilon)}$ is called the surface impedance ‡ of the metal, and we denote it by $\zeta = \zeta' + i\zeta''$:

$$\zeta = \sqrt{(\mu/\varepsilon)}. \tag{87.2}$$

In the frequency range where ε can be expressed in terms of the ordinary conductivity of the metal, we have

$$\zeta = (1-i)\sqrt{(\omega\mu/8\pi\sigma)}; \tag{87.3}$$

this formula, with $\mu = 1$, has already been given in §59.

The (time) averaged energy flux through the surface of the metal is

$$\overline{\mathbf{S}} = (c/8\pi)\,\mathrm{re}\,(\mathbf{E}_t \times \mathbf{H}_t{}^*) = c\zeta'\,|\mathbf{H}_t|^2\,\mathbf{n}/8\pi. \tag{87.4}$$

[0]† Large values of $\sqrt{\varepsilon(\omega)}$ are almost always complex. The electromagnetic field is damped inside the body, so that the wavelength in the body is also the depth of penetration of the field. If $\varepsilon(\omega)$ is expressed in terms of the conductivity by (77.9), the quantity δ is the same as the penetration depth used in §59

‡ This name is also given to the quantity $c\zeta/4\pi$.

This is the energy which enters the metal and is dissipated therein. Hence we see. in particular. that

$$\zeta' > 0 \tag{87.5}$$

This inequality determines the sign of the root in (87.2).

As the frequency increases, the depth of penetration δ becomes of the same order as the mean free path l of the conduction electrons. † In this case the spatial non-uniformity of the field renders impossible a macroscopic description of it in terms of the permittivity ε. However, a boundary condition of the form

$$\mathbf{E}_t = \zeta \mathbf{H}_t \times \mathbf{n} \tag{87.6}$$

still holds at such frequencies. The field inside the metal near the surface can again be regarded as a plane wave, although it is no longer described by the [1] sual macroscopic Maxwell's equations. In such a wave the fields $\mathbf{E}$ and $\mathbf{H}$ must be linearly related, and the only possible linear relation between the axial vector $\mathbf{H}$ and the polar vector $\mathbf{E}$ is (87.6). The coefficient ζ in this formula is the only quantity characterizing the metal which must be known in order to find the external electromagnetic field. The calculation, however, requires the use of kinetic theory (see $PK, 886$).

When the frequency increases further (usually into the infra-red region), the macroscopic description of the field again becomes possible, and ε is again meaningful. The reason is that, on absorbing a large quantum $\hbar\omega$, a conduction electron acquires a large amount of energy, and its mean free path is therefore reduced, the inequality $l \ll \delta$ being consequently again fulfilled. The impedance ζ is again inversely proportional to $\sqrt{\varepsilon}$.‡ In this frequency range the real part of $\varepsilon(\omega)$ is large and negative, and its imaginary part is small. The inequality $l \ll \delta$ is the condition for both ε' and ε'' to b^e macroscopically significant. The macroscopic significance of the large quantity ε' alone, however, can be ensured by the fulfilment of the less stringent condition $v/\omega \ll \delta$, where v is the velocity of the conduction electrons in the metal. If this condition holds, the spatial inhomogeneity of the field may be neglected in considering the motion of the electrons.§

The inequality $\zeta' > 0$ is always satisfied by the real part of the impedance. If formula (87.2) holds, we can also draw certain conclusions concerning the sign of ζ''. For example. if the dispersion of ε is more important than that of μ (i.e. if μ may be taken as real), the condition $\varepsilon'' > 0$ gives $\zeta'\zeta'' < 0$ and, since $\zeta' > 0, \zeta'' < 0$. This is the most usual case. If the dispersion of ζ is determined by that of μ, however, a similar argument shows that $\zeta'' > 0$.

The concept of impedance can also be applied to superconductors. A characteristic property of superconductors is that the penetration depth δ is small even in the static case ($\omega = 0$). At fairly low frequencies the magnetic field distribution can be taken to be the same as the static distribution. To determine the electric field we use the equation $\operatorname{corl} \mathbf{E} = i\omega\mathbf{H}/c$, taking the z-axis along the outward normal to the surface of the

superconductor. Neglecting the tangential derivatives in comparison with the large z_2 derivatives, we have $\partial E_x/\partial z = i\omega H_y/c$, and similarly for E_y. Integrating with respect to $_z$ through

[0†] The mean free path depends considerably on the temperature of the metal. In practice, the temperatures considered are usually very low, in the helium range, and the phenomena under consideration occur in the range of very short radio waves.

‡ It should be borne in mind, however, that equation (87.6) can be used as a boundary condition only while $|\varepsilon|$ is large (i.e. ζ is small), and certainly does not hold at optical frequencies. We assume that $\mu \sim 1$, and so small ζ Correspond to large $|\varepsilon|$. If $\mu \gg 1$, the inequality $\delta \ll \lambda$ must be fulfilled if the boundary condition (87.6) is valid, and therefore we must have $\sqrt{(\mu\varepsilon)} \geqslant 1$, so that $\zeta = \sqrt{(\mu/\varepsilon)}$ may not be small.

§ This situation is more fully discussed in $PK, §87$.

the body gives

$$E_x(0) = \frac{i\omega}{c}\int_{-\infty}^{0} H_y \, \mathrm{d}z$$

$E_x(0)$ being the value of E_x for $z = 0$, i.e. at the surface of the body. We quantitatively define the penetration depth by the relation

$$\int_{-\infty}^{0} H_y \, \mathrm{d}z = H_y(0)\delta \tag{87.7}$$

Then $E_x(0) = i\omega H_y(0)\delta/c$. Comparing this with the boundary condition (87.6), we find that the impedance of a superconductor (in the frequency range considered, which in practice extends to about the centimetre radio wave-band) is given by

$$\zeta = -i\omega\delta/\dot{c} \tag{87.8}$$

This expression is the first term in an expansion of $\zeta(\omega)$ in powers of the frequency, and the expansion for superconductors thus begins with a term in ω. The next term, which is proportional to ω^2 and is real, is the first term in the expansion of $\zeta' \cdot$ †

The impedance $\zeta(\omega)$, regarded as a function of the complex variable ω, has many properties analogous to those of the function $\varepsilon(\omega)$ (V. L. Ginzburg, 1954). The boundary condition, which for a monochromatic wave has the form (87.6), must in general be taken as the operator relation

$$\mathbf{E}_t = \hat{\zeta}\mathbf{H}_t \times \mathbf{n}, \tag{87.9}$$

expressing the value of $\mathbf{E}_t$ at any instant in terms of the values of $\mathbf{H}_t$ at all previous instants (cf. §77). As in §82, it therefore follows that the function $\zeta(\omega)$ is regular in the upper halfplane of ω, including the real axis except for the point $\omega = 0$. The condition that $\mathbf{E}_t$ be real when $\mathbf{H}_t$ is real gives $\zeta(-\omega^*) = \zeta^*(\omega)$. Finally, since the energy dissipation is determined by the real part of $\zeta(\omega)$ (and not by the imaginary part as for $\varepsilon(\omega)$), it follows that $\zeta'(\omega)$ is positive, and does not vanish for any real ω except $\omega = 0$. Arguments similar to those given in §82 then lead to the conclusion that re $\zeta(\omega) > 0$ throughout the upper half-plane. Hence, in particular, $\zeta(\omega)$ has no zeros in the upper half-plane.

The regularity of $\zeta(\omega)$ in the upper half-plane again leads to Kramers and Kronig's formulae. A particularly important formula is

$$\zeta''(\omega) = -\frac{1}{\pi}P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\zeta'(x)-1}{x-\omega}\mathrm{d}x$$

Using the fact that $\zeta'(x)$ is even, we can also write

$$\zeta''(\omega) = -\frac{1}{\pi}P\int_{0}^{\infty}\frac{\zeta'(x)-1}{x-\omega}\mathrm{d}x + \frac{1}{\pi}P\int_{0}^{\infty}\frac{\zeta'(x)-1}{x+\omega}\mathrm{d}x$$

if

$$\zeta''(\omega) = -\frac{2\omega}{\pi}P\int_{0}^{\infty}\frac{\zeta'(x)}{x^2-\omega^2}\,\mathrm{d}x \tag{87.10}$$

The term - 1 in the numerator of the integrand may be omitted, since the principal value of the integral of $1/(x^2-\omega^2)$ is zero.

The above statements concerning the function $\zeta(\omega)$ are equally applicable to the reciprocal function $1/\zeta(\omega)$; the operator $\widehat{\zeta}^{-1}$ converts $\mathbf{E}_t$ into $\mathbf{H}_t \times \mathbf{n}$. In particular, (87.10) becomes

[0]† The microscopic theory shows that the ω^2 term in the impedance also contains a factor varying logarithmically with ω; see PK, §§96, 97

$$\left[\zeta^{-1}(\omega)\right]'' = -\frac{2\omega}{\pi} P \int_0^\infty \frac{\left[\zeta^{-1}(x)\right]'}{x^2 - \omega^2}\, \mathrm{d}x \tag{87.11}$$

For small ζ this formula may be more useful than (87.10). In the form (87.11), however, it is not applicable to superconductors, for which ζ^{-1}, according to (87.8), has a pole at $\omega = 0$. A simple modification in the derivation, analogous to that which changes (82.7) into (82.9), gives

$$\left[\zeta^{-1}(\omega)\right]'' = -\frac{2\omega}{\pi} P \int_0^\infty \frac{\left[\zeta^{-1}(x)\right]'}{x^2 - \omega^2}\, \mathrm{d}x + \frac{c}{\omega\delta}. \tag{87.12}$$

To conclude this section we shall discuss, as an example of the use of the impedance, the reflection of a plane electromagnetic wave incident from a vacuum on the plane surface of a metal with surface impedance ζ. If the vector $\mathbf{E}$ is polarized perpendicular to the plane of incidence, the boundary condition (87.6) gives

$$E_0 + E_1 = \zeta\,(H_0 - H_1)\cos\theta_0 = \zeta\,(E_0 - E_1)\cos\theta_0,$$

the notation being the same as in §86. Hence, since ζ is small. we have $E_1/E_0 = -\,(1 - 2\zeta\cos\theta_0)$, and the reflection coefficient is

$$R_\perp = 1 - 4\zeta'\cos\theta_0. \tag{87.13}$$

If, on the other hand, $\mathbf{E}_0$ lies in the plane of incidence, the boundary condition in the form $\zeta\mathbf{H_t} = \mathbf{n}\times\mathbf{E_t}$ gives

$$\zeta\,(H_0 + H_1) = (E_0 - E_1)\cos\theta_0 = (H_0 - H_1)\cos\theta_0,$$

whence the reflection coefficient is

$$R_{11} = \left|\frac{\cos\theta_0 - \zeta}{\cos\theta_0 + \zeta}\right|^2 \tag{87.14}$$

For angles of incidence not close to $\frac{1}{2}\pi$

$$R_{11} = 1 - 4\zeta'\sec\theta_0. \tag{87.15}$$

If, on the other hand, $\phi_0 = \frac{1}{2}\pi - \theta_0 \leqslant 1$, then

$$R_{\mathrm{II}} = \left|\frac{\phi_0 - \zeta}{\phi_0 + \zeta}\right|^2 \tag{8716}$$

This expression takes a minimum value $(|\zeta| - \zeta')\,/\,(|\zeta| + \zeta')$ for $\phi_0 = |\zeta|$.

Except for the special case (87.16), the reflection coefficient for a surface with small ζ is close to unity. A surface with $\zeta \to 0$ is perfectly conducting and also perfectly reflecting. The boundary condition at such a surface is simply $\mathbf{E}_t = 0$, analogously to that for the electrostatic field at the surface of a conductor. In a variable field, however, the fulfilment of this condition necessarily implies the fulfilment of a certain condition on the magnetic field: the equations $i\omega\mathbf{H}/c = \mathbf{curlE}$ and $\mathbf{E_t} = 0$ on the surface imply that $H_n = 0$ there. Thus the normal component of the magnetic field must be zero on a perfectly conducting surface in a variable electromagnetic field. In this respect such a surface resembles the surface of a superconductor in a static magnetic field.

PROBLEM

Determine the intensity of thermal radiation (of a given frequency) from a plane surface of small impedance.

Solution. According to Kirchhoff's law, the intensity dI of thermal radiation into an element of solid angle do from an arbitrary surface is related to the intensity dI_0 of radiation from the surface of a black body by d$I = (1 - R)$dI_0, where R is the reflection coefficient for natural light incident on the surface concerned. Calculating $R = \frac{1}{2}(R_1 + R_{11})$ from formulae (87.13) and (87.14) and using the isotropy of radiation from a black surface (d$I_0 = I_0$ d$ol2\pi$), we have

$$I = 2I_0\zeta^\zeta \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \left\{1 + \frac{1}{\cos^2\theta + 2\zeta'\cos\theta + \zeta'^2 + \zeta''^2}\right\} \cos\theta \sin\theta \mathrm{d}\theta$$

Effecting the integration and omitting terms of higher order in ζ, we find

$$\frac{I}{I_0} = \zeta' \left[\log \frac{1}{\zeta'^2 + \zeta''^2} + 1 - \frac{2\zeta'}{\zeta''} \tan^{-1} \frac{\zeta''}{\zeta'}\right]$$

In particular, for a metal whose impedance is given by formula (87.3) ($\mu = 1$), we have

$$\frac{I}{I_0} = \sqrt{\frac{\omega}{8\pi\sigma}} \left[\log \frac{4\pi\sigma}{\omega} + 1 - \frac{1}{2}\pi\right]$$

12.2.4 §88. The propagation of waves in an inhomogeneous medium

Let us consider the propagation of electromagnetic waves in a medium which is electrically inhomogeneous but isotropic. In Maxwell's equations curl $\mathbf{E} = i\omega\mathbf{H}/c$. curl $\mathbf{H} = -i\varepsilon\omega\mathbf{E}/c$ (we put everywhere $\mu = 1$), ε is a function of the coordinates. Substituting for $\mathbf{H}$ from the first equation in the second, we obtain for $\mathbf{E}$ the equation

$$\triangle\mathbf{E} + \left(\varepsilon\omega^2/c^2\right)\mathbf{E} - \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{E} = 0. \tag{88.1}$$

Elimination of $\mathbf{E}$ gives for $\mathbf{H}$ the equation

$$\triangle\mathbf{H} + \left(\varepsilon\omega^2/c^2\right)\mathbf{H} + (1/\varepsilon)\operatorname{grad}\varepsilon \times \operatorname{curl}\mathbf{H} = 0 \tag{88.2}$$

These equations are considerably simplified in the one-dimensional case, where ε varies only in one direction in space. We take this direction as the z-axis, and consider a wave whose direction of propagation lies in the xz-plane. In such a wave all quantities are independent of y, and the uniformity of the medium in the x-direction means that the dependence on x can be taken as being through a factor $e^{i\kappa x}$, with κ a constant. For $\kappa = 0$ the field depends only on z, i.e. we have a wave which is said to pass normally through [a] layer of matter in which $\varepsilon = \varepsilon(z)$. If $\kappa \neq 0$, the wave is said to pass obliquely.

For $\kappa \neq 0$ two independent cases of polarization must be distinguished. In one, the vector $\mathbf{E}$ is perpendicular to the plane of propagation of the wave (i.e. it is in the y direction), and the magnetic field $\mathbf{H}$ accordingly lies in that plane. Equation (88.1) becomes

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} + \left(\frac{\varepsilon\omega^2}{c^2} - \kappa^2\right) E = 0 \tag{88.3}$$

In the other case, the field $\mathbf{H}$ is in the y-direction, and $\mathbf{E}$ lies in the plane of propagation. Here it is more convenient to start from equation (88.2), which gives

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial H}{\partial z}\right) + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\kappa^2}{\varepsilon}\right) H = 0 \tag{88.4}$$

We shall call these two types of wave E waves and H waves respectively.
The equations can be solved in a general form in the important case where the conditions of propagation approximate to those of geometrical optics. In what follows we shall assume that the function $\varepsilon(z)$ is real. † In equation (88.3) the quantity $2\pi/\sqrt{f}$, where $f(z) = \varepsilon\omega^2/c^2 - \kappa^2$, plays the part of a wavelength in the z-direction. The approximation of geometrical optics corresponds to the inequality

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{1}{\sqrt{f}} \ll 1. \tag{88.5}$$

and the two independent solutions of equation (88.3) are of the form

$$\frac{\text{constant}}{f^{\frac{1}{4}}} e^{\pm i\int\sqrt{f}\ \mathrm{d}z} \tag{88.6}$$

The condition (88.5) is certainly not fulfilled near any reflection point, where $f = 0$. Let $z = 0$ be such a point, with $f > 0$ for $z < 0$ and $f < 0$ for $z > 0$. At sufficiently great distances on either side of $z = 0$, the solution of equation (88.3) is of the form (88.6), but to establish the relation between the coefficients in the solutions for $z > 0$ and $z < 0$ it is necessary to examine the exact solution of equation (88.3) near $z = 0$. In the neighbourhood of this point, $f(z)$ can be expanded as a power series in z : $f = -\alpha z$. The solution of the equation $\mathrm{d}^2E/\mathrm{d}z^2 - \alpha z E = 0$ which is finite for all z is

$$E = \left(A/\alpha^{1/6}\right)\Phi\left(\alpha^{1/3}z\right) \tag{88.7}$$

where

$$\Phi(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \cos\left(\frac{1}{3}u^3 + u\xi\right)\mathrm{d}u$$

is the Airy function; we everywhere omit the factor $e^{-i\omega t + i\kappa x}$ in E.‡ The asymptotic form of the solution of equation (88.3) for large $|z|$ is

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{E} &= \tfrac{A}{f^{\frac{1}{4}}}\cos\left(\textstyle\int_0^z \sqrt{f}\ \mathrm{d}z + \frac{1}{4}\pi\right) \quad \text{for } z < 0 \\ \boldsymbol{E} &= \tfrac{A}{2|f|^{\frac{1}{4}}}\exp\left(-\textstyle\int_0^z \sqrt{|f|}\mathrm{d}z\right) \quad \text{for } z > 0 \end{aligned}\right\} \tag{88.8}$$

with the same coefficient A as in (88.7). The first of these expressions represents the stationary wave obtained by superposing the wave incident in the positive z-direction and the wave reflected from the plane $z = 0$. The amplitudes of these waves are both equal to $\frac{1}{2}A/f^{\frac{1}{4}}$, i.e. the reflection coefficient is unity. Only an exponentially damped field penetrates into the region $z > 0$.

As the reflection point is approached, the wave amplitude increases, as is shown by the factor $f^{\frac{1}{4}}$ in the denominators in (88.8). To determine the field in the immediate vicinity of that point, the expression (88.7) must be used. This function decreases monotonically into the region $z > 0$ and oscillates in the region $z < 0$, the successive maxima of $|E|$ continually decreasing. The first and highest maximum is reached at $\alpha^{\frac{1}{3}}z = -1\cdot 02$, and its value is $E = 0.949A\alpha^{-1/6}$.

[0]† Equation (88.3) bears a formal resemblance to Schrodinger's equation for one-dimensional motion of a Particle in quantum mechanics, and the approximation of geometrical optics corresponds to the quasi-classical case. Here we shall give the final results; their derivation may be found in QM, Chapter VII.
‡ Here we make use of the Airy function as defined in other volumes of the Course of Theoretical Physics. It is now more usually defined as

So far we have spoken of solutions for E waves. It is easy to see that, in the approximation of geometrical optics, entirely similar formulae are valid for H waves. If we substitute in equation (88.4) $H = u\sqrt{\varepsilon}$, the derivatives of ε appear as products with u, bur not with u'; neglecting therefore the terms containing these derivatives, which are small by (88.5), we obtain for the function $u(z)$ the equation

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}z^2} + \left(\frac{\varepsilon\omega}{c^2} - \kappa^2\right) u = 0$$

which is of the same form as (88.3). Hence the formulae for H differ from (88.6)-(88.8) only by a factor $\sqrt{\varepsilon}$.

A curious difference in the behaviour of the two types of wave occurs when an obliquely incident wave ($\kappa \neq 0$) is reflected from a layer in which $\varepsilon(z)$ passes through zero. The reflection takes place from the plane on which $f(z) = \varepsilon\omega^2/c^2 - \kappa^2 = 0$, i.e. the wave "does not reach" the plane where $\varepsilon = 0$. The E wave penetrates beyond the plane only as an exponentially damped field. When an H wave is reflected, however, there is superposed on [8] similar damped field a strong local field near the plane on which $\varepsilon = 0$ (K. Försterling. 1949). † This may be shown as follows.

Let $\varepsilon = 0$ at the point $z = 0$. Near this point, we write

$$\varepsilon = -az, \quad a > 0$$

and equation (88.4) takes the form

$$\frac{\mathrm{d}^2 H}{\mathrm{d}z^2} - \frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}z} - \left(a\omega^2 z/c^2 + \kappa^2\right) H = 0. \tag{0}$$

According to the general theory of linear differential equations, one of the solutions of this equation, which we call $H_1(z)$, has no singularity at $z = 0$, and its expansion in powers of z begins with z^2 :

$$H_1(z) = z^2 + \dots$$

The other independent solution has a logarithmic singularity, and its expansion is

$$H_2(z) = H_1(z)\log\kappa z + \frac{2}{\kappa^2} + \dots$$

The parameter a occurs only in the subsequent terms of the expansions. To find the field near $z = 0$, it is not necessary to discuss the choice of a linear combination of H_1 and H_2 that satisfies the conditions at infinity. We need only note that as $z \to 0$ this combination tends to a constant (H_0, say) and has a logarithmic singularity

$$H \cong H_0\left(1 + \frac{1}{2}\kappa^2 z^2 \log\kappa z\right);$$

here, the leading singularity term has been written together with the constant. The electric field is determined from $H_y = H$ by Maxwell's equations $E_x = -(ic/\varepsilon\omega)\partial H/\partial z$, $E_z = (ic/\varepsilon\omega)\partial H/\partial x$. The dependence of H on x is given by the factor $e^{i\kappa x}$, and the leading terms in E_x and E_z are therefore

$$E_x \cong H_0\left(i\kappa^2 c/a\omega\right)\log\kappa z, \quad E_z \cong H_0(\kappa c/a\omega)(1/z). \tag{88.11}$$

[0]† This is a singularity of (88.4), and geometrical optics is therefore invalid near it, although $f(z)$ does not van [15 h] and (88.5) may be valid

These become infinite as $z \to 0$.
In reality, of course, the absorption which must be present in the medium, even though slight, means that the field attains large but not infinite values compared with the weak field in the adjoining region. It is noteworthy, however, that even an infinitesimal imaginary part of ε causes a finite dissipation of energy. Let $\varepsilon = -az + i\delta$ with $\delta \to +0$. Then the analytical continuation of the logarithm in (88.11) from the right-hand to the lefthand half of the z axis must be carried out from below in the complex z-plane, and for $z < 0$ we have

$$E_x = H_0 \left(i\kappa^2 c/a\omega\right) (\log|\kappa z| - i\pi).$$

The (time) averaged energy flux along the z-axis:

$$\bar{S}_z = (c/8\pi)\,\mathrm{re}\left(E_x H_y^*\right)$$

(see (59.9a)) is zero for $z > 0$; for $z < 0$, the presence of a real part of E_x gives a non-zero energy flux towards the plane $z = 0$, where this energy is dissipated: †
N. B. Gil'denburg, 1963).

$$\bar{S}_z = \kappa^2 c^2 H_0^2/8\omega a \tag{88.12}$$

† This result can also be derived from the expression (80.4) for the energy dissipated in unit volume:
Integration with respect to z gives (88.12).

$$\begin{aligned} Q &= \frac{\omega\varepsilon''|\mathbf{E}|^2}{8\pi} \\ &\cong \frac{\kappa^2 c^2 H_0^2}{8\pi\omega} \lim_{\delta\to 0} \frac{\delta}{a^2 z^2 + \delta^2} \\ &= \kappa^2 c^2 H_0^2 \delta(z)/8a\omega \end{aligned}$$

PROBLEM

A surface H wave can be propagated along a plane boundary between two media whose permittivities ε_1 and $-|\varepsilon_2|$ are of opposite signs. The wave is damped in both media. Determine the relation between the frequency and the wave number.

Solution We take the boundary surface as the xy-plane, the wave being propagated in the x-direction and the field $\mathbf{H}$ being in the y-direction. Let the half-space $z > 0$ contain the medium with the positive permittivity ε_1, and the half-space $z < 0$ that with the negative permittivity ε_2. We seek the field in the wave damped as $z \to \pm\infty$ in the form

$$\begin{aligned} H_1 &= H_0 e^{ikx-\kappa_1 z}, \quad \kappa_1 = \sqrt{}(k^2 - \omega^2\varepsilon_1/c^2) \qquad \text{for } z > 0, \\ H_2 &= H_0 e^{ikx+\kappa_2 z}, \quad \kappa_2 = \sqrt{}(k^2 + \omega^2|\varepsilon_2|/c^2) \quad \text{for } z < 0, \end{aligned}$$

where k, κ_1 and κ_2 are real. The boundary condition that $H_y = H$ be continuous is already satisfied, and the continuity condition on E_x gives $(1/\varepsilon_1)\,\partial H_1/\partial z = (1/\varepsilon_2)\,\partial H_2/\partial z$ for $z = 0$, or $\kappa_1/\varepsilon_1 = \kappa_2/|\varepsilon_2|$. This equation can be satisfied if $\varepsilon_1 < |\varepsilon_2|$ (and if $\varepsilon_1\varepsilon_2 < 0$, as has been assumed). The relation between k and ω is

$$k^2 = \omega^2\varepsilon_1|\varepsilon_2|/c^2\,(|\varepsilon_2| - \varepsilon_1)$$

It is easily seen that surface E waves cannot be propagated.

12.2.5 §89. The reciprocity principle

The emission of monochromatic electromagnetic waves from a source consisting of a thin wire in an arbitrary medium is described by the equations

$$\operatorname{curl}\mathbf{E} = i\omega\mathbf{B}/c, \quad \operatorname{curl}\mathbf{H} = -i\omega\mathbf{D}/c + 4\pi\mathbf{j}_{\text{ex}}/c, \tag{89.1}$$

where $\mathbf{j}_{\text{ex}}$ is the density of periodic currents flowing in the wire which are extraneous to the medium.

Let two different sources (of the same frequency) be placed in the medium; we denote by the suffixes 1 and 2 the fields due to these sources separately. The medium may be inhomogeneous and anisotropic. The only assumption which we shall make concerning the properties of the medium is that the linear relations $D_i = \varepsilon_{ik}E_k, B_i = \mu_{ik}H_k$ hold, the tensors ε_{ik} and μ_{ik} being symmetrical. Under these conditions it is possible to derive a relation between the fields of the two sources and the extraneous currents in them.

We take the scalar products of the two equations $\operatorname{curl}\mathbf{E}_1 = ik\mathbf{B}_1, \operatorname{curl}\mathbf{H}_1 = -ik\mathbf{D}_1 + 4\pi\mathbf{j}_{\text{ex, }1}/c$ with $\mathbf{H}_2$ and $\mathbf{E}_2$ respectively, and of the corresponding equations for $\mathbf{E}_2$ and $\mathbf{H}_2$ with $-\mathbf{H_1}$ and $-\mathbf{E_1}$. Adding all four together, we obtain

$$\begin{aligned}&(\mathbf{H}_2\cdot\mathbf{curl}\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_1\cdot\mathbf{curl}\mathbf{H}_2) + (\mathbf{E}_2\cdot\mathbf{curl}\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_1\cdot\mathbf{curl}\mathbf{E}_2)\\ &= (i\omega/c)\,(\mathbf{B}_1\cdot\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1\cdot\mathbf{B}_2) + (i\omega/c)\,(\mathbf{E}_1\cdot\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1\cdot\mathbf{E}_2)\\ &\quad + (4\pi/c)\,(\mathbf{j}_{\text{ex},1}\cdot\mathbf{E}_2 - \mathbf{j}_{\text{ex},2}\cdot\mathbf{E}_1)\end{aligned}$$

But $\mathbf{B}_1\cdot\mathbf{H}_2 = \mu_{ik}H_{1k}H_{2i} = \mathbf{H}_1\cdot\mathbf{B}_2$, and $\mathbf{E}_1\cdot\mathbf{D}_2 = \mathbf{D}_1\cdot\mathbf{E}_2$, so that the first two terms on the right-hand side are zero. The left-hand side can be transformed by a formula of vector analysis, and the result is

$$\operatorname{div}\left[\mathbf{E}_1\times\mathbf{H}_2 - \mathbf{E}_2\times\mathbf{H}_1\right] = (4\pi/c)\,(\mathbf{j}_{\text{ex},1}\cdot\mathbf{E}_2 - \mathbf{j}_{\text{ex},2}\cdot\mathbf{E}_1)\,.$$

We integrate this equation over all space; the integral on the left-hand side can be transformed into one over an infinitely remote surface, and is zero. Thus we have

$$\int \mathbf{j}_{ex,1}\cdot\mathbf{E}_2\,\mathrm{d}V_1 = \int \mathbf{j}_{ex,2}\cdot\mathbf{E}_1\,\mathrm{d}V_2. \tag{89.2}$$

The integrals are taken only over the volumes of sources 1 and 2 respectively, since the currents $\mathbf{j}_{\text{ex},1}$ and $\mathbf{j}_{\text{ex},2}$ are zero elsewhere. Since the wires are thin, the effect of each on the field of the other may be neglected, and therefore $\mathbf{E}_1$ and $\mathbf{E}_2$ in formula (89.2) are the fields due to each of the two sources at the position of the other. Formula (89.2) is the required relation; it is called the reciprocity theorem.

If the dimensions of the sources are small compared with the wavelength and with the distance between them, this formula can be simplified. The field of each source varies only slightly over the dimensions of the other, and in (89.2) we can take $\mathbf{E}_1$ and $\mathbf{E}_2$ outside the integrals and replace them by $\mathbf{E}_1(2)$ and $\mathbf{E}_2(1)$.1 and 2 signifying the positions of the two sources:

$$\mathbf{E}_2(1)\cdot\int \mathbf{j}_{ex,1}\,\mathrm{d}V_1 = \mathbf{E}_1(2)\cdot\int \mathbf{j}_{\text{ex},2}\,\mathrm{d}V_2.$$

The integral $\int \mathrm{j}_{\text{ex}}\mathrm{d}V$ is just the time derivative of the total dipole moment $\mathscr{P}$ of the source. Since $\dot{\mathscr{P}} = -i\omega\mathscr{P}$, we have finally

$$\mathbf{E}_2(1)\cdot\mathscr{P}_1 = \mathbf{E}_1(2)\cdot\mathscr{P}_2 \tag{89.3}$$

This form of the reciprocity theorem applies, of course, only to dipole emission. If the dipole moment of the source is zero, or very small, the approximation made in going from the general formula (89.2) to (89.3) is inadequate; see Problem 1.

PROBLEMS

Problem 1 Derive the reciprocity theorem for quadrupole emitters and for magnetic dipole emitters.
Solution. If $\int \mathbf{j}_{\text{ex}}\,\mathrm{d}V = 0$, the next terms in the expansion must be taken in the integrals (89.2):

$$\begin{aligned}\int \mathbf{j}_1 \cdot \mathbf{E}_2\,\mathrm{d}V_1 \cong& \frac{\partial E_{2i}}{\partial x_k}\int x_k j_{1i}\,\mathrm{d}V_1\\ =& \frac{1}{4}\left(\frac{\partial E_{2i}}{\partial x_k}+\frac{\partial E_{2k}}{\partial x_i}\right)\int (x_k j_{1i}+x_i j_{1k})\,\mathrm{d}V_1\\ &+\frac{1}{4}\left(\frac{\partial E_{2i}}{\partial x_k}-\frac{\partial E_{2k}}{\partial x_i}\right)\int (x_k j_{1i}-x_i j_{1k})\,\mathrm{d}V_1\end{aligned}$$

we omit the suffix ex for brevity. The quadrupole moment tensor and the magnetic moment tensor are defined by

$$\dot{D}_{ik} = -i\omega D_{ik} = \int \left[3\left(x_i j_k + x_k j_i\right) - 2\delta_{ik}\mathbf{r}\cdot\mathbf{j}\right]\mathrm{d}V.$$
$$\mathscr{M} = \frac{1}{2c}\int \mathbf{r}\times\mathbf{j}\mathrm{d}I.$$

Using the equation curl $\mathbf{E} = i\omega\mathbf{B}/c$ and assuming that $\varepsilon =$ constant near the sources (and so div $\mathbf{E} = 0$), we obtain

$$\mathbf{f}\mathbf{j}_1\cdot\mathbf{E}_2\,\mathrm{d}V = -\frac{i\omega}{12}\left(\frac{\partial E_{2i}}{\partial x_k}+\frac{\partial E_{2k}}{\partial x_i}\right)D_{1.tk} + i\omega\mathbf{B}_2(1)\cdot\mathscr{M}_1$$

Hence we see that for quadrupole emitters the reciprocity theorem is

$$\left(\frac{\partial E_{2i}(1)}{\partial x_k}+\frac{\partial E_{2k}(1)}{\partial x_i}\right)D_{1,ik} = \left(\frac{\partial E_{1i}(2)}{\partial x_k}+\frac{\partial E_{1k}(2)}{\partial x_1}\right)D_{2,ik}$$

and for magnetic dipole emitters

$$B_2(1)\cdot\mathscr{M}_1 = B_1(2)\cdot\mathscr{M}_2.$$

Problem 2. Determine the intensity of emission from a dipole source immersed in a homogeneous isotropic medium as a function of the permittivity ε and permeability μ of the medium.
Solution. By substituting $\mathbf{E} = \sqrt{(\mu/\varepsilon)}\mathbf{E}', \mathbf{H} = \mathbf{H}'.\omega^* = \omega'/\sqrt{(\varepsilon\mu)}$, equations (89.1) are brought to the form curl $\mathbf{E}' = i\omega'\mathbf{H}'/c$, curl $\mathbf{H}' = -i\omega'\mathbf{E}'/c + 4\pi\mathbf{j}_{\text{ex}}/c$, which do not involve ε or μ. The solution of these equations for dipole emission gives a vector field potential in the wave region (see Fields, §67) $\mathrm{A}' = (1/cR_0)\int \mathrm{j}_{\text{ex}}\,\mathrm{d}V$, where R_0 is
the distance from the source; the phase factors are omitted, since they do not affect the calculation of the inten $_{S_{11}}$ Hence we see that, for given $\mathbf{j}_{\text{ex}}$, we can put $\mathbf{A}' = \mathbf{A}_0$, where the suffix 0 signifies the value for the source fiel $_{\text{dig}}$ vacuum. The values of $\mathbf{H}'$ and $\mathbf{E}'$ are

$$\mathbf{H}' = i\mathbf{k}'\times\mathbf{A}' = i\sqrt{(\varepsilon\mu)}\mathbf{k}\times\mathbf{A}_0 = \sqrt{(\varepsilon\mu)}\mathbf{H}_0, \quad \mathbf{E}' = \mathbf{H}'.$$

Hence $\mathbf{H} = \sqrt{(\varepsilon\mu)}\mathbf{H}_0, \mathbf{E} = \mu\mathbf{E}_0$ and $I = I_0\mu^{3/2}\varepsilon^{1/2}$. This is the required solution.

12.2.6 §90. Electromagnetic oscillations in hollow resonators

Let us consider the electric field in a hollow evacuated resonator with perfectly conducting walls. The equations of the monochromatic field in the vacuum are

$$\operatorname{curl}\mathbf{E} = i\omega\mathbf{H}/c, \quad \operatorname{curl}\mathbf{H} = -i\omega\mathbf{E}/c. \tag{90.1}$$

The boundary conditions on the surface of a perfect conductor (i.e. one whose impedance $\zeta = 0$) are

$$\mathbf{E}_t = 0, \quad H_n = 0. \tag{90.2}$$

To solve the problem, it suffices to consider either $\mathbf{E}$ or $\mathbf{H}$. For instance, eliminating $\mathbf{H}$ from equations (90.1), we find that $\mathbf{E}$ satisfies the wave equation

$$\triangle\mathbf{E} + \left(\omega^2/c^2\right)\mathbf{E} = 0, \tag{90.3}$$

together with the equation

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = 0, \tag{90.4}$$

which does not follow from (90.1). Solving these equations with the boundary condition $\mathbf{E}_1 = 0$, we find the field $\mathbf{E}$, and then $\mathbf{H}$ can be derived from the first of (90.1). The boundary condition $H_n = 0$ is automatically satisfied.

When the shape and size of the cavity are given, equations (90.3) and (90.4) have solutions only for certain values of ω, called the eigenfrequencies of the electromagnetic oscillations of the resonator concerned. For $\zeta = 0$ the electromagnetic field does not penetrate into the metal, and no loss occurs there. All the characteristic oscillations are therefore undamped, and all the eigenfrequencies are real. The latter are infinite in number, and the order of magnitude of the lowest eigenfrequency ω_1 is c/l, where l is the linear dimension of the cavity. This follows immediately from dimensional considerations, sincel is the only dimensional parameter characterizing the problem if the shape of the resonator is given. The high eigenfrequencies ($\omega \gg c/l$) lie very close together, and the number of them per unit range of ω is $V\omega^2/2\pi^2c^3$, which depends on the volume V of the resonator but not on its shape (see Fields, §52).

The (time) averaged values of the electric and magnetic field energies in the resonator are respectively $\frac{1}{2}\int(|\mathbf{E}|^2/8\pi)\,\mathrm{d}V$ and $\frac{1}{2}\int(|\mathbf{H}|^2/8\pi)\,\mathrm{d}V$. We shall show that they are equal. Using the first equation (90.1), we write $\int \mathbf{H}\cdot\mathbf{H}^*\,\mathrm{d}V = (c^2/\omega^2)\int \operatorname{curl}\mathbf{E}\cdot\operatorname{curl}\mathbf{E}^*\,\mathrm{d}I^I$. The second integral can be integrated by parts:

$$\int \operatorname{curl}\mathbf{E}\cdot\operatorname{curl}\mathbf{E}^*\,\mathrm{d}l^i = \oint \operatorname{curl}\mathbf{E}^*\cdot\,\mathrm{d}\mathbf{f}\times\mathbf{E} + \int \mathbf{E}\cdot\operatorname{curl}\operatorname{curl}\mathbf{E}^*\,\mathrm{d}V$$

Since $\mathbf{E_t} = 0$ on the boundary of the volume considered, the surface integral is zero, leaving

$$\begin{aligned}\int |\mathbf{H}|^2\,\mathrm{d}V &= \frac{c^2}{\omega^2}\int \mathbf{E}\cdot\,\operatorname{curl}\operatorname{curl}\mathbf{E}^*\,\mathrm{d}\boldsymbol{l}\\ &= -\left(c^2/\omega^2\right)\int \mathbf{E}\cdot\Delta\mathbf{E}^*\,\mathrm{d}V\end{aligned}$$

or. by (90.3),

$$\int |\mathbf{H}|^2\,\mathrm{d}V' = \int |\mathbf{E}|^2\,\mathrm{d}V' \tag{90.5}$$

This completes the proof. †

Undamped oscillations in a resonator are obtained if the impedance of its walls is assumed to

be zero. Let us now ascertain the effect on the eigenfrequencies if the impedance of the walls is small but not zero.

The (time) averaged energy dissipated in the walls of the resonator in unit time can be calculated as the flux of energy into the walls from the electromagnetic field in the cavity. Using the boundary condition (87.6) on the surface of a body with impedance ζ, we write the normal component of the energy flux density as $\bar{S}_n = (c/8\pi)\mathrm{re}\,(\mathbf{E}_t \times \mathbf{H}_t{}^*) = c\zeta' \,|\mathbf{H}_t|^2/8\pi$, where ζ' is the real part of ζ. In this expression, which already contains the small factor ζ', we can as a first approximation take $\mathbf{H}$ to be the field obtained by solving the problem with $\zeta = 0$. The total energy dissipated is given by the integral

$$\frac{c}{8\pi}\oint \zeta'|\mathbf{H}|^2 \,\mathrm{d}f, \tag{90.6}$$

taken over the internal surface of the resonator. The field amplitude is damped in time with a decrement obtained by dividing (90.6) by twice the total energy of the field, namely $\frac{1}{2}\int (|\mathbf{E}|^2 + |\mathbf{H}|^2)\,\mathrm{d}V/8\pi = \int |\mathbf{H}|^2 \,\mathrm{d}V/8\pi$.

The damping decrement is determined by the imaginary part $|\omega''|$ of the complex frequency $\omega = \omega' + i\omega''$.‡ Writing the formula in the complex form

$$\omega - \omega_0 = -\frac{1}{2}ic\frac{\oint \zeta|\mathbf{H}|^2 \,\mathrm{d}f}{\int |\mathbf{H}|^2 \,\mathrm{d}V}, \tag{90.7}$$

ω and ω_0 being the frequencies with and without allowance for ζ, we can determine not only the damping decrement but also the change in the eigenfrequencies themselves. The latter is seen to be determined by the imaginary part of ζ. We have mentioned in §87 that usually $\zeta'' < 0$, and the eigenfrequencies are then reduced.

In actual calculations, it may be more convenient to transform the volume integral in the denominator of (90.7) into one over the surface. Since the vector $\mathbf{H}$ is tangential to the surface, we have identically

$$\oint (\mathbf{H}\cdot\mathbf{H}^*)\,(\mathbf{r}\cdot\mathbf{df}) = \oint (\mathbf{H}\cdot\mathbf{H}^*)\,(\mathbf{r}\cdot\mathrm{d}\mathbf{f}) - \oint (\mathbf{H}\cdot\mathbf{r})\,(\mathbf{H}^*\cdot\ \mathrm{d}\mathbf{f}) - \oint (\mathbf{H}^*\cdot\mathbf{r})\,(\mathbf{H}\cdot\mathrm{d}\mathbf{f}).$$

The integrals on the right are transformed by putting $\mathrm{d}\mathbf{f} \to \mathrm{d}V$ grad, and using (90.1) we obtain

$$\oint (\mathbf{H}\cdot\mathbf{H}^*)\,(\mathbf{r}\cdot\mathrm{d}\mathbf{f}) = ik\int \mathbf{r}\cdot(\mathbf{H}\times\mathbf{E}^* - \mathbf{H}^*\times\mathbf{E})\,\mathrm{d}V + \int \mathbf{H}\cdot\mathbf{H}^*\,\mathrm{d}V$$

Similarly, using the identity $\mathbf{r}\times(\mathbf{E}\times\mathrm{d}\mathbf{f}) = \mathbf{E}(\mathbf{r}\cdot\mathrm{df}) - (\mathbf{r}\cdot\mathbf{E})\mathrm{df} = 0$ (by the boundary condition $\mathbf{E}_t = 0$), we have

$$\begin{aligned}\oint (\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}^*)\,(\mathbf{r}\cdot\mathbf{df}) &= -\oint (\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}^*)\,(\mathbf{r}\cdot\mathbf{df}) + \oint (\mathbf{E}\cdot\mathbf{r})\,(\mathbf{E}^*\cdot\mathbf{df}) + \oint (\mathbf{E}^*\cdot\mathbf{r})\,(\mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{f})\\ &= ik\int \mathbf{r}\cdot(\mathbf{H}\times\mathbf{E}^* - \mathbf{H}^*\times\mathbf{E})\,\mathrm{d}V - \int \mathbf{E}\cdot\mathbf{E}^*\,\mathrm{d}V\end{aligned}$$

[0†] By $\mathbf{E}$ and $\mathbf{H}$ we always mean the fields corresponding to a particular eigenfrequency. It is not difficult to show that the fields corresponding to two different eigenfrequencies ω_a and ω_b are orthogonal:

$$\int \mathbf{E}_a\cdot\mathbf{E}_b^*\,\mathrm{d}V = \int \mathbf{H}_a\cdot\mathbf{H}_b^*\,\mathrm{d}V = 0.$$

‡ In radio engineering the Q factor or quality of the resonator, defined as the ratio $\omega'/2\,|\omega''|$ is generally used inslead of the damping decrement.

Subtracting and using (90.5). we obtain

$$\int |\mathbf{H}|^2 \, \mathrm{d}V = \frac{1}{2} \oint \left(|\mathbf{H}|^2 - |\mathbf{E}|^2 \right) \mathbf{r} \cdot \mathrm{d}\mathbf{f}. \tag{90.8}$$

The formulae for a resonator filled with a non-absorbing dielectric for which ε and μ differ from unity are obtained from those for an evacuated resonator by replacing

$$\omega, \quad \mathbf{E} \text{ and } \mathbf{H} \text{ by } \omega\sqrt{(\varepsilon\mu)}, \quad \sqrt{\varepsilon}\mathbf{E} \text{ and } \sqrt{\mu}\mathbf{H}. \tag{90.9}$$

This is seen from the fact that the transformation just given converts equations (90.1) into the correct Maxwell's equations for the medium:

$$\operatorname{curl} \mathbf{E} = i\omega\mu\mathbf{H}/c, \quad \operatorname{curl} \mathbf{H} = -i\omega\varepsilon\mathbf{E}/c.$$

In particular, the presence of the medium reduces each eigenfrequency by a factor $\sqrt{(\varepsilon\mu)}$

PROBLEMS

Problem 1. Determine the eigenfrequencies of a cuboidal resonator with perfectly conducting walls.

SOLUTION. We take the axes of x, y, z along three concurrent edges of the cuboid; let the lengths of these edges be a_1, a_2, a_3. The solutions of equations (90.3) and (90.4) which satisfy the boundary condition $\mathbf{E}_1 = 0$ are

$$E_x = A_1 \cos k_x x \sin k_y y \sin k_z z \cdot e^{-i\omega t} \tag{I}$$

and similarly for $\boldsymbol{E_y}, \boldsymbol{E_z}$, where

$$k_x = n_1\pi/a_1, \quad k_y = n_2\pi/a_2, \quad k_z = n_3\pi/a_3 \tag{2}$$

(n_1, n_2, n_3 being positive integers). The constants A_1, A_2, A_3 are related by

$$A_1k_x + A_2k_y + A_3k_z = 0 \tag{3}$$

and the eigenfrequencies are $\omega^2 = c^2\left(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2\right)$.

The magnetic field is calculated from (1):

$$H_x = -(ic/\omega)\left(A_3k_y - A_2k_z\right) \sin_r k_x x \cos k_y y \cos k_z z \cdot e^{-i\omega t},$$

and similarly for H_y, H_z.

If two or all of the numbers n_1, n_2, n_3 are zero, $\mathbf{E} = 0$. Hence the lowest frequency corresponds to an oscillation in which one of these numbers is 0 and the other two are 1.

Since the relation (3) holds, the solution (1) (with given non-zero n_1, n_2, n_3) involves only two independent arbitrary constants, i.e each eigenfrequency is doubly degenerate. The frequencies for which one of $n_1, n_2, n_3{}^{\text{sh}}$ zero are not degenerate.

Problem 2. Determine the frequencies of electric dipole and magnetic dipole oscillations in a spherical resonator with radius a.

Solution. In a stationary spherical electric dipole wave, the fields $\mathbf{E}$ and $\mathbf{H}$ are of the form

$$\mathbf{E} = e^{-i\omega t} \operatorname{curlcurl}\left(\frac{\sin kr}{r}\mathbf{b}\right), \quad \mathbf{H} = -ike^{-i\omega t} \operatorname{curl}\left(\frac{\sin kr}{r}\mathbf{b}\right).$$

where $\mathbf{b}$ is a constant vector and $k = \omega/c$ (see Fields, §72). The boundary condition $\mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0$ at $r = a$ gives $\cot ka = (ka)^{-1} - ka$. The smallest root of this equation is $ka = 2.74$. The frequency $\omega = 2.74c/a$ is the lowest eigenfrequency of a spherical resonator.

In a stationary spherical magnetic dipole wave, we have

$$\mathbf{E} = ike^{-i\omega t}\,\mathrm{curl}\left(\frac{\sin kr}{r}\mathbf{b}\right), \quad \mathbf{H} = e^{-i\omega t}\,\mathrm{curlcurl}\left(\frac{\sin kr}{r}\mathbf{b}\right).$$

The boundary condition on $\mathbf{E}$ gives the equation $\tan ka = ka$, whose smallest root is $ka = 4.49$.

Problem 3. A small sphere with electric and magnetic polarizabilities α_e and α_m is placed in a resonator. Determine the resulting shift in the resonator eigenfrequency.

Solution. Let $\mathbf{E}$ and $\mathbf{H}$ be the fields in the resonator without the sphere. $\mathbf{E}_1$ and $\mathbf{H}_1$ those when the sphere is present. The fields $\mathbf{E}$ and $\mathbf{H}$ satisfy the equations (90.1); $\mathbf{E}_1$ and $\mathbf{H}_1$ satisfy

$$\mathrm{curl}\,\mathbf{E}_1 = i\omega_1\mathbf{H}_1/c, \quad \mathrm{curl}\,\mathbf{H}_1 = 4\pi\mathbf{j}_1/c - i\omega_1\mathbf{E}_1/c, \tag{1}$$

where $\mathbf{j}_1$ is the current density in the sphere. We multiply the first of these equations by $\mathbf{H}^*$, the second by $-\mathbf{E}^*$, take the complex conjugates of equations (90.1), and multiply them by $\mathbf{H}_1$ and $-\mathbf{E}_1$ respectively. Addition of all four equations then gives

$$\mathrm{div}\left[\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}^* + \mathbf{E}^* \times \mathbf{H}_1\right] = i\delta\omega\left(\mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{H}^* + \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}^*\right)/c - 4\pi\mathbf{j}_1 \cdot \mathbf{E}^*/c,$$

where $\delta\omega = \omega_1 - \omega$ is the required frequency shift. This equation is next integrated over the volume of the resonator. The left-hand side is zero, by Gauss's theorem, since at the wall $\mathbf{E}_t = \mathbf{E}_{1t} = 0$. Since the sphere is small, the main contribution to the integral of the first term on the right arises at large distances from the sphere; at such distances, however, the field perturbation due to the sphere is small, and so we can put $\mathbf{E}_1 \cong \mathbf{E}, \mathbf{H}_1 \cong \mathbf{H}$. The integral of the second term is transformed as in §89 (and Problem 1 there), giving

$$\begin{aligned}\int \mathbf{j}_1 \cdot \mathbf{E}^*\,\mathrm{d}V &= -i\omega\left(\mathscr{P} \cdot \mathbf{E}_0^* + \mathscr{M} \cdot \mathbf{H}_0^*\right)\\ &= -i\omega V_0\left(\alpha_e\left|\mathbf{E}_0\right|^2 + \alpha_m\left|\mathbf{H}_0\right|^2\right).\end{aligned}$$

where $\mathbf{E}_0 \equiv \mathbf{E}\left(\mathbf{r}_0\right), \mathbf{H}_0 \equiv \mathbf{H}\left(\mathbf{r}_0\right), \mathbf{r}_0$ is the position of the sphere, and V_0 is its volume; the sphere is supposed to be so small that the fields $\mathbf{E}$ and $\mathbf{H}$ do not vary appreciably across it. Thus, with (90.5), we find the frequency shift

$$\frac{\delta\omega}{\omega} = -\frac{\alpha_e\left|\mathbf{E}_0\right|^2 + \alpha_m\left|\mathbf{H}_0\right|^2}{\int |\mathbf{H}|^2 \mathbf{d}V/2\pi}V_0.$$

If the polarizabilities are complex, this formula gives both the frequency shift and the damping of the characteristic oscillations.

Problem 4. A resonator is filled with a dispersionless transparent dielectric having permittivity ε_0. Determine the change in the eigenfrequency due to a small change $\delta\varepsilon(\boldsymbol{r})$ in the permittivity.

Solution. The unperturbed field $\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0$ in the resonator satisfies the equations curl $\mathbf{E}_0 = i\omega_0\mathbf{H}_0/c$, curl $\mathbf{H}_0 = -i\omega_0\varepsilon_0\mathbf{E}_0/c$, and the perturbed field $\mathbf{E}, \mathbf{H}$ satisfies curl $\mathbf{E} = i\left(\omega_0 + \delta\omega\right)\mathbf{H}/c, \mathrm{curl}\,\mathbf{H} = -i\left(\omega_0\varepsilon_0 + \omega_0\delta\varepsilon + \varepsilon_0\delta\omega\right)\mathrm{E}/c$, the term in $\delta\omega\delta\varepsilon$ being neglected. Using these four equations as in Problem 3, we find

$$\begin{aligned}\mathrm{div}\left[\left(\mathbf{E} \times \mathbf{H}_0{}^*\right) + \left(\mathbf{E}_0{}^* \times \mathbf{H}\right)\right] &= i\left(\omega_0\delta\varepsilon + \varepsilon_0\delta\omega\right)\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}_0{}^*/c + i\delta\omega\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}_0{}^*/c\\ &\cong i\left(\omega_0\delta\varepsilon + \varepsilon_0\delta\omega\right)\mathbf{E}_0 \cdot \mathbf{E}_0{}^*/c + i\delta\omega\mathbf{H}_0 \cdot \mathbf{H}_0{}^*/c\end{aligned}$$

whence

$$\delta\omega/\omega_0 = -\int \left|\mathbf{E}_0\right|^2 \delta\varepsilon\,\mathrm{d}V/2\varepsilon_0 \int \left|\mathbf{E}_0\right|^2\,\mathrm{d}V.$$

In deriving the last expression, we have used the fact that for a dielectric-filled resonator the relation (905) becomes

$$\int |\mathbf{H}_0|^2 \ \mathrm{d}V = \varepsilon_0 \int |\mathbf{E}_0|^2 \ \mathrm{d}V,$$

as is clear from (90.9).

12.2.7 §91. The propagation of electromagnetic waves in waveguides

A waveguide is a hollow pipe † of infinite length, i.e. a cavity infinite in one direction,

whereas the resonators discussed in §90 are of finite volume. The characteristic oscillations in a resonator are stationary waves, but those in a waveguide are "stationary" only in the transverse directions; waves travelling in the direction along the pipe can be propagated.

Let us consider a straight waveguide with any (simply-connected) cross-section uniform along its length. We shall first suppose that the walls of the waveguide are perfectly conducting, and take the z-axis along the waveguide. In a travelling wave propagated in the z-direction, all quantities depend on z through a factor $\exp(ik_z z)$, with k_z a constant.

The electromagnetic waves possible in such a waveguide can be divided into two types: in one, $H_z = 0$, and in the other $E_z = 0$ (Rayleigh, 1897). The former type, in which the magnetic field is purely transverse, are called electric-type waves or E waves. The latter, in which the electric field is purely transverse, are called magnetic-type waves or H waves. ‡

Let us first consider E waves. The x and y components of equations (90.1) give

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - ik_z E_y = i\frac{\omega}{c} H_x, \quad -\frac{\partial E_z}{\partial x} + ik_z E_x = i\frac{\omega}{c} H_y$$
$$ik_z H_y = i\frac{\omega}{c} E_x, \qquad ik_z H_x = -i\frac{\omega}{c} E_y$$

Hence

$$\left.\begin{array}{ll} E_x = \frac{ik_z}{\kappa^2}\frac{\partial E_z}{\partial x}, & E_y = \frac{ik_z}{\kappa^2}\frac{\partial E_z}{\partial y} \\ H_x = -\frac{i\omega}{c\kappa^2}\frac{\partial E_z}{\partial y}, & H_y = \frac{i\omega}{c\kappa^2}\frac{\partial E_z}{\partial x} \end{array}\right\} \tag{91.1}$$

where $\kappa^2 = (\omega^2/c^2) - {k_z}^2$. Thus, in an E wave, all the transverse components of $\mathbf{E}$ and $\mathbf{H}$ can be expressed in terms of the longitudinal component of the electric field. This component must be determined by solving the wave equation, which takes the twodimensional form

$$\triangle_2 E_z + \kappa^2 E_z = 0 \tag{91.2}$$

($\triangle_2$ being the two-dimensional Laplacian). The boundary conditions for this equation are that the tangential components of $\mathbf{E}$ should vanish on the walls of the waveguide, and can be satisfied by putting

$$E_z = 0 \text{ on the circumference of the cross-section.} \tag{91.3}$$

According to formulae (91.1), the two-dimensional vector whose components are E_x, E_y is proportional to the two-dimensional gradient of E_z. When the condition (91.3) holds. therefore, the tangential component of $\mathbf{E}$ in the xy-plane is also zero.

Similarly, in an H wave the transverse components of $\mathbf{E}$ and $\mathbf{H}$ can be expressed in terms of the longitudinal component of the magnetic field:

[0]† The formulae below hold for an evacuated waveguide. Those for a waveguide filled with a non-absorbing dielectric are obtained by means of the transformation (90.9).

$$\left.\begin{array}{ll} H_x = \frac{ik_z}{\kappa^2}\frac{\partial H_z}{\partial x}, & H_y = \frac{ik_z}{\kappa^2}\frac{\partial H_z}{\partial y} \\ E_x = \frac{i\omega}{c\kappa^2}\frac{\partial H_z}{\partial y}, & E_y = -\frac{i\omega}{c\kappa^2}\frac{\partial H_z}{\partial x}. \end{array}\right\} \tag{91.4}$$

The longitudinal field H_z is given by the solution of the equation

$$\triangle_2 H_z + \kappa^2 H_z = 0 \tag{91.5}$$

with the boundary condition

$$\partial H_z/\partial n = 0 \text{ on the circumference of the cross-section.} \tag{91.6}$$

According to formulae (91.4), this condition ensures that the normal component of **H** is zero.

Thus the problem of determining the electromagnetic field in a waveguide reduces to that of finding solutions of the two-dimensional wave equation $\Delta_2 f + \kappa^2 f = 0$, with the boundary condition $f = 0$ or $\partial f/\partial n = 0$ on the circumference of the cross-section. For a given cross-section, such solutions exist only for certain definite eigenvalues of the parameter κ^2.

For each eigenvalue κ^2 we have the relation

$$\omega^2 = c^2\left(k_z^2 + \kappa^2\right) \tag{91.7}$$

between the frequency ω and the wave number k_z of the wave. The velocity of propagation of the wave along the waveguide is given by the derivative

$$u_z = \frac{\partial\omega}{\partial k_z} = \frac{ck_z}{\sqrt{(k_z^2+\kappa^2)}} = \frac{c^2 k_z}{\omega} \tag{91.8}$$

For given κ, this varies from 0 to c when k_z varies from 0 to ∞.

The (time) averaged energy flux density along the waveguide is given by the z-component of the Poynting vector. A simple calculation, using formulae (91.1), gives for an E wave

$$\bar{S}_z = \frac{c}{8\pi}\,\mathrm{re}\,(\mathbf{E}\times\mathbf{H}^*)_z = \frac{\omega k_z}{8\pi\kappa^4}\,|\mathrm{grad}_2\, E_z|^2$$

The total energy flux q is obtained by integrating $\bar{S}_z$ over the cross-section of the waveguide. We have

$$\int |\mathrm{grad}_2\, E_z|^2\ \mathrm{d}f = \oint E_z * \frac{\partial E_z}{\partial n}\ \mathrm{d}l - \int E_z * \triangle_2 E_z\ \mathrm{d}f.$$

The first integral is taken along the circumference of the cross-section, and is zero on account of the boundary condition $E_z = 0$. In the second integral we replace $\triangle_2 E_z$ by $-\kappa^2 E_z$, and the result is

$$q = \frac{\omega k_z}{8\pi\kappa^2}\int |E_z|^2\ \mathrm{d}f \tag{91.9}$$

The expression obtained for an H wave is the same with H_z instead of E_z.

The electromagnetic energy density W (per unit length of the waveguide) may be calculated similarly. It is simpler, however, to derive W directly from q, since we must have $q = W_{u_z}$. From (91.8) and (91.9), therefore,

$$W = \frac{\omega^2}{8\pi\kappa^2 c^2}\int |E_z|^2\ \mathrm{d}f. \tag{91.10}$$

It follows from (91.7) that, for each type of wave (for a given value of κ^2) there is a minimum possible frequency, namely $c\kappa$. At lower frequencies the propagation of waves of

the type concerned is not possible. There is a smallest eigenvalue $\kappa_{\min}$, which is not zero (see below). We therefore conclude that there is a frequency $\omega_{\min} = c\kappa_{\min}$ below which no waves can be propagated along the waveguide. The order of magnitude of $\omega_{\min}$ is c/a, where a is the transverse dimension of the pipe.

This statement is valid, however, only for waveguides in which the cross-section is simply connected (as we have hitherto assumed). When the cross-section is multiply connected, † the situation is quite different. In such waveguides not only the E and H waves described above but also another type of wave, whose frequency is subject to no restriction, can be propagated. Such waves (called principal waves) are characterized by the fact that $k_z = \pm k$ (i.e. $\kappa = 0$); the velocity of propagation is equal to the velocity of light c. We shall derive the chief properties of such waves, and shall see why such waves cannot occur when the crosssection of the waveguide is simply connected.

All the field components in a principal wave satisfy the two-dimensional Laplace's equation, $\triangle_2 f = 0$. With the boundary condition $f = 0$, the only solution of this equation regular throughout the cross-section (whether or not multiply connected) is $f \equiv 0$. Hence we have $E_z = 0$ in a principal wave.

With the boundary condition $\partial f/\partial n = 0$, a regular solution is $f =$ constant. It is easy to see, however, that when f is H_z the constant must be zero (by a "constant", of course, we mean a quantity independent of x and y). For, integrating the equation

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = \frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{i\omega}{c} H_z = 0$$

over the cross-section, we obtain $\oint H_n \, \mathrm{d}l + (i\omega/c) \int H_z \, \mathrm{d}f = 0$; since $H_n = 0$ on the circumference of the cross-section and H_z is constant over its area, it follows that $H_z = 0$.

Thus a principal wave is purely transverse. For $E_z = H_z = 0$, the x and y components of equations (90.1) give

$$H_x = -E_y, \quad H_y = E_x, \tag{91.11}$$

i.e. the fields $\mathbf{E}$ and $\mathbf{H}$ are perpendicular and equal in magnitude. They are determined by the equations

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0, \quad (\operatorname{curl} \mathbf{E})_z = \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0,$$

with the boundary condition $\mathbf{E}_t = 0$.

We see that the dependence of $\mathbf{E}$, and therefore of $\mathbf{H}$, on x and y is given by the solution of a two-dimensional electrostatic problem: $\mathbf{E} = -\operatorname{grad}_2 \phi$, where the potential ϕ satisfies the equation $\triangle_2 \phi = 0$ with the boundary condition $\phi =$ constant. In a simply-connected region, this boundary condition means that $\phi =$ constant (and so $\mathbf{E} = 0$) is the only solution regular throughout the region. This shows that waves of this type cannot be propagated along a waveguide whose cross-section is simply connected. In a multiplyconnected region, on the other hand, the constant in the boundary condition need not be the same on the various separate parts of the boundary, and so Laplace's equation has solutions which are not trivial. The electric-field distribution over the cross-section of the waveguide is the same as the two-dimensional electrostatic field between the plates of a capacitor at a given potential difference.

So far we have assumed the walls of the waveguide to be perfectly conducting † If the walls have a small but finite impedance, losses occur and the wave is therefore damped as it is propagated along the waveguide. The damping coefficient can be calculated in the same way as for the damping in time of electromagnetic oscillations in a resonator (§90).

The amount of energy dissipated in unit time per unit length of the walls of the waveguide is given by the integral $(c/8\pi)\zeta' \oint |\mathbf{H}|^2 \, \mathrm{d}l$, taken along the circumference of the cross-section;

H is the magnetic field calculated on the assumption that $\zeta = 0$. Dividing this expression by twice the energy flux q along the waveguide, we obtain the required damping coefficient α. With this definition, α gives the rate of damping of the wave amplitude, which decreases along the waveguide as $e^{-\alpha z}$.

Expressing all quantities in terms of E_z or H_z by means of formulae (91.1) or (91.4), we obtain the following formulae for the absorption coefficients: for an E wave

$$\alpha = \frac{\omega\zeta'}{2\kappa^2 k_z c} \frac{\oint |\mathrm{grad}_2 E_z|^2 \ \mathrm{d}l}{\int |E_z|^2 \ \mathrm{d}f} \tag{91.12}$$

and for an H wave

$$\alpha = \frac{c\kappa^2\zeta'}{2k_z\omega} \frac{\oint |H_z|^2 + (k_z^2/\kappa^4) |\mathrm{grad}_2 H_z|^2 \} \, \mathrm{d}l}{\int |H_z|^2 \ \mathrm{d}f}. \tag{91.13}$$

In an actual calculation it may be convenient to transform the surface integrals in the denominators into integrals along the circumference. The necessary formulae, whose derivation is similar to that of (90.8), are

$$\left.\begin{array}{l} \int |E_z|^2 \ \mathrm{d}f = \frac{1}{2\kappa^2} \oint (\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}) |\mathrm{grad}_2 E_z|^2 \ \mathrm{d}l \\ \int |H_z|^2 \ \mathrm{d}f = \frac{1}{2\kappa^2} \oint (\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}) \{\kappa^2 |H_z|^2 - |\mathrm{grad}_2 H_z|^2\} \, \mathrm{d}l \end{array}\right\} \tag{91.14}$$

When $k_z \to 0$, i.e. the frequency $\omega \to ck$, the expressions (91.12) and (91.13) become infinite, but they are then no longer applicable, because their derivation presupposes that κ is small compared with k_z.

Formulae (91.12) and (91.13) are not valid for a principal wave (in a waveguide with a multiply-connected cross-section), in which E_z, H_z and κ are all zero. In this case all the field components can be expressed in terms of the scalar potential ϕ. Using the fact that the fields **H** and $\mathbf{E} = -\mathrm{grad}_2\phi$ in a principal wave are perpendicular and equal in magnitude, we obtain the absorption coefficient

$$\alpha = \frac{\zeta' \oint |\mathrm{grad}_2 \phi|^2 \ \mathrm{d}l}{2 \int |\mathrm{grad}_2 \phi|^2 \ \mathrm{d}f}. \tag{91.15}$$

The propagation of a principal wave along a waveguide can be relatively simply discussed when its absorption coefficient is not small (so that formula (91.15) is inapplicable) but the wavelength c/ω is large compared with the transverse dimension of the waveguide.

As has been mentioned, the transverse electric field in a principal wave at any instant corresponds to the electrostatic field in a capacitor formed by the walls of the waveguide carrying equal and opposite charges. Let these charges be $\pm e(z)$ per unit length. They are related to the currents $\pm J(z)$ flowing on the walls by the equation of continuity $\partial e/\partial t = -\partial J/\partial z$, or, for a monochromatic field, $i\omega e = \partial J/\partial z$. Next, let C be the capacitance per unit length of the waveguide. The "potential difference" $\phi_2 - \phi_1$ between its walls is e/C; differentiating this with respect to z, we obtain the e.m.f. which maintains the current on the walls. (When absorption is present, the field is not purely transverse.) Equating the e.m.f. to ZJ, where Z is the impedance per unit length, we have

$$-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{e}{C}\right) = ZJ$$

or

[0†] In particular, this assumption is necessary for a rigorous separation of waves with $E_z = 0$ and those with $H_z = 0$.

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{C}\frac{\partial J}{\partial z}\right)+i\omega ZJ=0. \tag{91.16}$$

Substituting $Z=R-i\omega L/c^2$, where R and L are the resistance and self-inductance per unit length of the waveguide, we can return from the monochromatic current components to currents which are arbitrary functions of time. Assuming the capacitance C to be constant along the waveguide, we arrive at the telegraph equation:

$$\frac{1}{C}\frac{\partial^2 J}{\partial z^2}-R\frac{\partial J}{\partial t}-\frac{L}{c^2}\frac{\partial^2 J}{\partial t^2}=0. \tag{91.17}$$

If there is no resistance ($R=0$), this equation reduces, as it should, to the wave equation with a velocity of wave propagation $\sqrt{(c^2/LC)}=c$. The equation $LC=1$ follows from the mathematical equivalence of the problems of determining $1/C$ and L for a given crosssection. The electric and magnetic fields between perfectly conducting surfaces are perpendicular and equal in magnitude (see (91.11)), and if this magnitude is given on the surfaces the charge density and the current density are respectively determined. Hence the coefficients of proportionality ($1/C$ and L) between the field energy and the squared charge and current respectively are the same.

PROBLEMS

Problem 1. Find the values of κ for waves propagated in a waveguide whose cross-section is a rectangle with sides a and b. Find the damping coefficients.

Solution. In E waves $\dagger E_z=$ constant $\times\sin k_x x\sin k_y y$, where $k_x=n_1\pi/a, k_y=n_2\pi/b$, with n_1 and n_2 positive integers $\geqslant 1$. In H waves $H_z=$ constant $\times\cos k_x x\cos k_y y$, and one of n_1 and n_2 may be zero. In both types of wave $\kappa^2={k_x}^2+{k_y}^2=\pi^2\left({n_1}^2/a^2+{n_2}^2/b^2\right)$. The smallest value of κ corresponds to an H_{10} wave (the suffixes show the values of n_1 and n_2) and is $\kappa_{\min}=\pi/a$ (we assume that $a>b$).

The damping coefficients are calculated from formulae (91.12) and (91.13) and are: for E waves

$$\alpha=2\zeta'\omega\left(k_x^2b+k_y^2a\right)/c\kappa^2k_zab,$$

for H_{n_10} waves

$$\alpha=\frac{\zeta'\omega}{ck_zab}\left(a+\frac{2\kappa^2}{k^2}b\right),$$

and for $H_{n_1n_2}$ waves ($n_1,n_2\neq 0$)

$$\alpha=\frac{2c\kappa^2\zeta'}{\omega k_zab}\left[a+b+\frac{k_z^2}{\kappa^4}\left(k_x^2a+k_y^2b\right)\right].$$

problem 2. The same as Problem 1, but for a waveguide whose cross-section is a circle with radius a.

Solution. Solving the wave equation in polar coordinates r,ϕ, we have for E waves

$$E_z=\text{ constant }\times J_n(\kappa r)^{\sin}_{\cos}n\phi$$

with the condition $J_n(\kappa a)=0$, which gives the values of κ. In H waves the value of H_z is given by the same formula, but κ is determined by the condition ${J_n}'(\kappa a)=0$. The smallest value of κ occurs for the H_1 wave, and is $\kappa_{\min}=1.84/a$.

The damping coefficient is calculated from formulae (91.12)-(91.14). For E waves it is $\alpha=\omega\zeta^{\zeta}/cak_z$, and for H waves

$$\alpha = \frac{c\zeta'\kappa^2}{\omega k_z a}\left[1 + \frac{n^2\omega^2}{c^2\kappa^2\left(a^2\kappa^2 - n^2\right)}\right]$$

12.2.8 §92. The scattering of electromagnetic waves by small particles

Let us consider the scattering of electromagnetic waves by macroscopic particles whose dimensions are small compared with the wavelength $\lambda \sim c/\omega$ of the wave undergoing scattering (Rayleigh, 1871). When this condition holds, the electromagnetic field near the particle may be supposed uniform. Being in a uniform field periodic in time, each particle acquires definite electric and magnetic moments $\mathscr{P}$ and $\mathscr{M}$, whose dependence on time is given by factors of the form $e^{-i\omega t}$. The scattered wave can be described as being the result of radiation by these variable moments. At distances R from the particle which are large compared with λ (the wave region), the fields in the scattered wave are given by

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{H}' &= \tfrac{\omega^2}{c^2 R}\{\mathbf{n}\times\mathscr{P} + \mathbf{n}\times(\mathscr{M}\times\mathbf{n})\}\\ \mathbf{E}' &= \mathbf{H}'\times\mathbf{n}\end{aligned}\right\} \tag{92.1}$$

(see Fields, §71), where the unit vector $\mathbf{n}$ gives the direction of scattering, and the values of $\mathscr{P}$ and $\mathscr{M}$ must be taken at the time $t - R/c$. We denote the fields in the scattered wave by primed letters and those in the incident wave by unprimed letters. The (time) averaged intensity of radiation scattered into a solid angle $\mathrm{d}o$ is $\mathrm{d}I = \frac{1}{2}c\,|\mathbf{H}'|^2\,R^2\,\mathrm{d}o/4\pi$; dividing by the energy flux density in the incident wave $c|\mathbf{H}|^2/8\pi = c|\mathbf{E}|^2/8\pi$, we obtain the scattering cross-section.

The calculation of $\mathscr{P}$ and $\mathscr{M}$ is particularly simple if the dimensions of the particle are Small in comparison not only with λ but also with the "wavelength" δ corresponding to the frequency ω in the material of the particle. In this case we can calculate the polarizability of the particle from the formulae for an external uniform static field, the only difference being, of course, that the values taken for ε and μ are those corresponding to the given frequency ω^{ω}, and not the static values. If, as usually happens. μ is close to unity, the magnetic dipole term in formula (92.1) may be omitted.

For a spherical particle with radius a we have (see (8.10))

$$\mathscr{P} = V\alpha\mathbf{E}, \quad \alpha = 3(\varepsilon - 1), 4\pi(\varepsilon + 2) \tag{92.2}$$

and the scattering cross-section is

$$\mathrm{d}\sigma = (\omega/c)^4|\alpha|^2V^2\sin^2\theta\;\mathrm{d}o \tag{92.3}$$

where θ is the angle between the scattering direction $\mathbf{n}$ and the direction of the electric field $\mathbf{E}$ in the linearly polarized incident wave. The total cross-section is

$$\sigma = 8\pi|\alpha|^2\omega^4V^2/3c^4 \tag{92.4}$$

The frequency dependence of the cross-section is determined by the factor ω^4 and by the polarizability. At frequencies so low that α shows no dispersion, the scattering is proportional to ω^4. It may be noted also that the cross-section is proportional to the square of the volume of the particle.

If the incident wave is unpolarized (natural light) then the differential cross-section must be obtained by averaging (92.3) over all directions of the vector $\mathbf{E}$ in a plane perpendicular to the direction of propagation of the incident wave (i.e. perpendicular to its wave vector $\mathbf{k}$).

Denoting by ϑ and ϕ the polar angle and the azimuth of the direction of $\mathbf{n}$ relative to $\mathbf{k}$ (ϕ being measured from the plane of $\mathbf{k}$ and $\mathbf{E}$), we have $\cos\theta = \sin\vartheta\cos\phi$ (Fig. 47), so that

$$\mathrm{d}\sigma = (\omega/c)^4|\alpha|^2V^2\left(1-\sin^2\vartheta\cos^2\phi\right)\mathrm{d}o. \tag{92.5}$$

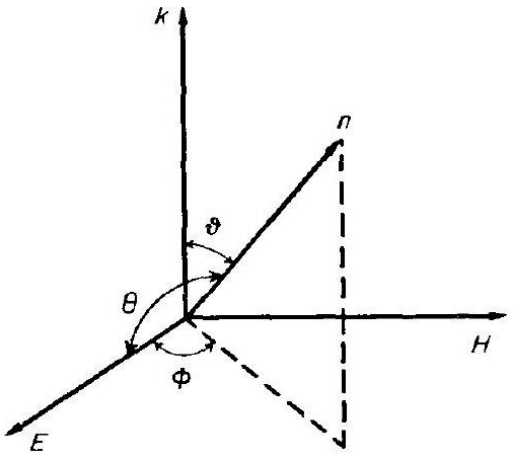


Fig. 47

On averaging over ϕ, we obtain the following formula for the cross-section for scattering of an unpolarized wave:

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{2}(\omega/c)^4|\alpha|^2V^2\left(1+\cos^2\vartheta\right)\mathrm{d}o, \tag{92.6}$$

where ϑ is the angle between the directions of incidence and scattering. The angular distribution (92.6) is symmetrical about the plane $\vartheta = \frac{1}{2}\pi$, i.e. the forward scattering and backward scattering are the same.

From formula (92.5) we can easily find the degree of depolarization of the scattered light. To do so, we notice that, for a given direction of $\mathbf{E}, \mathbf{E}'$ lies in the plane of $\mathbf{E}$ and $\mathbf{n}$. The direction of the electric field $\mathbf{E}'$ in the scattered wave therefore lies in the plane of $\mathbf{k}$ and $\boldsymbol{n}$ (the plane of scattering) or perpendicular to that plane, according as the azimuth ϕ of the vector $\mathbf{E}$, measured from the plane of $\mathbf{k}$ and $\mathbf{n}$, is 0 or $\frac{1}{2}\pi$. Let $\boldsymbol{I}_{\mathbf{n}}$ and $\boldsymbol{I}_{\perp}$ be the intensities of scattered radiation having these two polarizations. The degree of depolarization is defined as the ratio of the smaller to the larger of these quantities. By (92.5) we have

$$I_{\mathrm{n}}/I_{\perp} = \cos^2\vartheta. \tag{92.7}$$

If the scattering particle has a large permittivity,

$$\delta \sim c/\omega\sqrt{|\varepsilon|} \ll \lambda.$$

The dimensions of the particle may then be small compared with λ but not small compared with δ. In the first approximation with respect to $1/\varepsilon$, the electric moment of the particle may be calculated as simply the moment of a conductor ($\varepsilon \to \infty$) in a uniform static external field. In calculating the magnetic moment, however, the induced currents in the particle are of importance, and the problem cannot be taken as static; instead, we must seek a solution of equation (83.2) (with $\mu = 1$):

$$\triangle\mathbf{H} + \varepsilon\omega^2\mathbf{H}/c^2 = 0 \tag{92.8}$$

which becomes the field of the incident wave far from the particle. The magnetic and electric moments are of the same order of magnitude, and both terms in formula (92.1) must be retained. The angular distribution and amount of scattering are quite different from those discussed above (see Problem 2).

PROBLEMS

Problem 1. Linearly polarized light is scattered by randomly oriented small particles whose electric polarizability tensor has three different principal values. Determine the depolarizing factor for the scattered light.

Solution. Neglecting, as above, the magnetic moment. we have from (92.1)

$$\mathbf{E}' = \left(\omega^2/c^2R\right)(\mathbf{n}\times\mathscr{P})\times\mathbf{n}$$

The required depolarizing factor is given by the ratio of the principal values of the two-dimensional tensor $I_{\alpha\beta} = \left\langle E'_\alpha E'^*_\beta \right\rangle$, where the brackets denote an averaging over orientations of the scattering particle for a given direction of scattering $\mathbf{n}$, and the suffixes α and β take two values in the plane perpendicular to $\mathbf{n}$ (see Fields, §50). It is more convenient, however, to average the three-dimensional tensor $\mathscr{P}_i\mathscr{P}_k{}^*$ and then project it on the plane perpendicular to n; these components of the tensor $\langle\mathscr{P}_i\mathscr{P}_k{}^*\rangle$ are proportional to the corresponding components $I_{\alpha\beta}$. Substituting $\mathscr{P}_i = \alpha_{ik}E_k$, we have

$$\langle\mathscr{P}_i\mathscr{P}^*_k\rangle = \langle\alpha_{il}\alpha^*_{km}\rangle\, E_iE^*_m.$$

In effecting the averaging we use the formula

$$\langle\alpha_{il}\alpha^*_{km}\rangle = A\delta_{il}\delta_{km} + B\left(\delta_{ik}\delta_{lm} + \delta_{im}\delta_{kl}\right)$$

This is the most general tensor of rank four which is symmetrical in i,l and k,m and contains only scalar constants. These constants are determined from two equations obtained by contracting the tensor, firstly with respect to i,l and k,m, secondly with respect to i,k and l,m. They are

$$A = \frac{1}{15}\left(2\alpha_{ii}\alpha_{kk}{}^* - \alpha_{ik}\alpha_{ik}{}^*\right)$$
$$B = \frac{1}{30}\left(3\alpha_{ik}\alpha_{ik}{}^* - \alpha_{ii}\alpha_{kk}{}^*\right)$$

In a linearly polarized wave, the field amplitude $\mathbf{E}$ (we omit the time factor $e^{-i\omega t}$) can always be defined so as to be real. Then we have

$$\langle\mathscr{P}_i\mathscr{P}^*_k\rangle = (A+B)E_iE_k + B\delta_{ik}E^2. \tag{1}$$

Let the z-axis be in the direction of $\mathbf{n}$, and the xz-plane contain the directions of $\mathbf{n}$ and $\mathbf{E}$; these axes are the principal axes of the tensor $I_{\alpha\beta}$. Taking the appropriate components of the tensor (1), we find the depolarizing factor $I_y/I_x = B/\left[(A+B)\sin^2\theta + B\right]$, where θ is the angle between $\mathbf{E}$ and $\mathbf{n}$.

Problem 2. Determine the cross-section for scattering by a sphere with radius a, for which ε is large; it is assumed that $\lambda \gg a \sim \delta$.

Solution. The problem of calculating the magnetic moment acquired by a sphere with given ε(and $\mu = 1$) in a variable magnetic field $\mathbf{H}$ is the same as that solved in §59, Problem 1, except that k in the formulae derived there must be replaced by $\omega\sqrt{\varepsilon}/c$. Thus $\mathscr{M} = -a^3\gamma\mathbf{H}$, where

$$\gamma = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{3}{ka}\cot ka - \frac{3}{(ka)^2}\right).$$

When $|ka| \ll 1, \gamma \cong -(ka)^2/30$; when $|ka| \gg 1, \cot ka \to -i$ and $\gamma \cong \frac{1}{2}(1 - 3i/ka)$. The electric moment can be calculated, in the first approximation with respect to $1/\varepsilon$, as simply the moment of a conducting ($\varepsilon \to \infty$) sphere in a uniform static electric field: $\mathscr{P} = a^3\mathbf{E}$.

Taking into account the fact that $\mathbf{E}$ and $\mathbf{H}$ are perpendicular, we have after a simple calculation. using (92.1), the following formula for the scattering cross-section:

$$\mathrm{d}\sigma = \left(a^6\omega^4/c^4\right)\left\{|\gamma|^2\cos^2\phi + \sin^2\phi - (\gamma+\gamma^*)\cos\vartheta + \cos^2\vartheta\left(\cos^2\phi + |\gamma|^2\sin^2\phi\right)\right\}\mathrm{d}o,$$

where ϕ and ϑ are the angles shown in Fig. 47. In scattering of unpolarized light we have

$$\mathrm{d}\sigma = \left(a^6\omega^4/c^4\right)\left\{\frac{1}{2}\left[1 + |\gamma|^2\right]\left[1 + \cos^2\vartheta\right] - (\gamma+\gamma^*)\cos\vartheta\right\}\mathrm{d}o,$$

and the degree of depolarization of the scattered light is $I_1 I_1 = |(\gamma - \cos\vartheta)/(1 - \gamma\cos\vartheta)|^2$. The total scattering cross-section is $\sigma = 8\pi a^6\omega^4\left(1 + |\gamma|^2\right)/3c^4$.

In the limit $ka \to \infty$ (i.e. when $\lambda \gg a \gg \delta$) we have $\gamma = \frac{1}{2}$, corresponding to scattering by a perfectly reflecting sphere into which neither the electric nor the magnetic field penetrates. The differential scattering cross-section is

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{5a^6\omega^4}{8c^4}\left(1 + \cos^2\vartheta - \frac{8}{5}\cos\vartheta\right)\mathrm{d}\omega.$$

Note that the angular distribution is highly asymmetrical about the plane $\vartheta = \frac{1}{2}\pi$: the scattering is mainly backward, the ratio of forward and backward scattered intensities being 1:9.

12.2.9 §93. The absorption of electromagnetic waves by small particles

The scattering of electromagnetic waves by particles is accompanied by absorption. The absorption cross-section is given by the ratio of the mean energy Q dissipated in a particle per unit time to the incident energy flux density. To calculate Q we can use the formula

$$Q = -\overline{\mathscr{P}\cdot\dot{\mathfrak{E}}} - \overline{\mathscr{M}\cdot\dot{\mathfrak{g}}}, \tag{93.1}$$

where $\mathscr{P}$ and $\mathscr{M}$ are the total electric and magnetic moments of the particle, and the external fields $\mathfrak{C}$ and $\mathfrak{J}$ are replaced by the fields $\mathbf{E}$ and $\mathbf{H}$ in the scattered wave; cf. (59.11).

Using the complex representation of quantities, we can write (see the last footnote to §59)

$$Q = -\frac{1}{2}\,\mathrm{re}\left(\mathscr{P}\cdot\dot{\mathbf{E}}^* + \mathscr{M}\cdot\dot{\mathbf{H}}^*\right) = \frac{1}{2}\omega V\left(\alpha_e'' + \alpha_m''\right)|\mathbf{E}|^2,$$

where α_e and α_m are the electric and magnetic polarizabilities of the particle. Dividing by the incident energy flux, we obtain

$$\sigma = 4\pi\omega I\left(\alpha_e'' + \alpha_m''\right)/c. \tag{93.2}$$

Let us apply this formula to absorption by a sphere with radius $a \ll \lambda$, assuming it non-magnetic ($\mu = 1$). The nature of the absorption depends considerably on the magnitude of the permittivity.

If ε is small, then we have both $a \ll \lambda$ and $a \ll \delta$. In this case the magnetic polarizability may be neglected in comparison with the electric polarizability. With the latter given by (92.2), we have

$$\sigma = 12\pi\omega a^3 \varepsilon''/c \left[(\varepsilon' + 2)^2 + (\varepsilon'')^2\right]. \tag{93.3}$$

If, on the other hand, $|\varepsilon| \gg 1$, the electric part of the absorption becomes small, and the magnetic absorption may be important even if we still have $\delta \gg a$. When this last condition holds (i.e. $|ka| \ll 1$), the magnetic polarizability is $\alpha_m = (ka)^2/40\pi = a^2\omega^2\varepsilon/40\pi c^2$ (see §92, Problem 2) and the absorption cross-section is

$$\sigma = \frac{12\pi\omega a^3 \varepsilon''}{c}\left(\frac{1}{|\varepsilon|^2} + \frac{\omega^2 a^2}{90c^2}\right). \tag{93.}$$

When ε increases further, the electric part of the absorption becomes small compared with the magnetic part. In the limit $\delta \ll a$ (i.e. $|ka| \gg 1$) we have $\alpha_m = -3/8\pi + 9i/8\pi ka = -3/8\pi + 9ic\zeta/8\pi\omega a$, where $\zeta = 1/\sqrt{\varepsilon}$ is the surface impedance of the sphere. Hence

$$\sigma = 6\pi a^2 \zeta'. \tag{93.5}$$

It may be noticed that this formula could have been obtained more directly, without using the general expression for the magnetic polarizability $\alpha_m(\omega)$ of the sphere. When ζ is small, the energy dissipation Q can be calculated by integrating the mean Poynting vector (87.4) over the surface of the sphere, the distribution of the magnetic field over the surface being given by the solution (54.3) of the problem of a superconducting ($\zeta = 0$) sphere in a uniform magnetic field.

Knowing the absorption cross-section of the sphere, we can immediately determine the intensity of the thermal radiation emitted from the sphere. According to Kirchhoff's law (see $SP1, \xi 63$), the intensity $\mathrm{d}I$ in a frequency range $\mathrm{d}\omega$ is given in terms of $\sigma(\omega)$ by

$$\mathrm{d}I = 4\pi c\sigma(\omega) e_0(\omega)\mathrm{d}\omega, \tag{93.6}$$

where $e_0(\omega) = \hbar\omega^3/4\pi^3c^3[\exp(\hbar\omega/T) - 1]$ is the spectral density of black-body radiation per unit volume and unit solid angle.

12.2.10 §94. Diffraction by a wedge

The ordinary approximate theory of diffraction (see Fields, §§59-61) is based on the assumption that the deviations from geometrical optics are small. It is thereby assumed, firstly, that all dimensions are large compared with the wavelength; this applies both to dimensions of bodies (screens) or apertures and to distances of bodies from the points of emission and observation of the light. Secondly, only small angles of diffraction are considered, i.e. the distribution of light is examined only in directions close to the edge of the geometrical shadow. Under these conditions, the actual optical properties of the substances involved are of no importance; all that matters is that they are opaque.

If these conditions are not fulfilled, the solution of the diffraction problem requires an exact solution of the wave equation, taking into account the appropriate boundary conditions on the surfaces of the bodies, which depend on their properties. The finding of such solutions offers exceptional mathematical difficulties, and has been effected for only a small number of problems. A simplifying assumption is usually made concerning the Properties of the body at which the diffraction occurs, namely that it is perfectly conducting. and therefore perfectly reflecting.

The following remark may be made here. It might seem reasonable to solve the diffraction

problem on the assumption that the surface of the body is "black", i.e. completely absorbs light incident on it. In reality, however, such an assumption concerning the body in stating the exact problem of diffraction would involve a contradiction. The reason is that, if the substance of the body is strongly absorbing, the coefficient of reflection is not small but, on the contrary, almost unity (see §87)). Hence a reflection coefficient close to zero implies a weakly absorbing substance and a thickness of the body which is large compared with the wavelength. In the exact theory of diffraction, parts of the surface of the body at a distance from its edge of the order of the wavelength are necessarily of importance; but the thickness of the body near its edge is always small, so that the assumption that it is "black" is certainly untenable.

Considerable theoretical interest attaches to the exact solution (A. Sommerfeld, 1894) of the problem of diffraction at the edge of a perfectly conducting wedge bounded by two intersecting semi-infinite planes. A complete exposition of the very complex mathematical theory, which involves the use of special devices, is beyond the scope of this book. Here we shall give, for reference, the final results. †

We take the edge of the wedge as the z-axis in a system of cylindrical polar coordinates r, ϕ, z. The front surface (OA in Fig. 48) corresponds to $\phi = 0$, and the rear surface (OB) to $\phi = \gamma$, where $2\pi - \gamma$ is the angle of the wedge, the region outside it being $0 \leqslant \phi \leqslant \gamma$. Let a plane monochromatic wave with unit amplitude be incident in the $r\phi$-plane on the front surface at an angle ϕ_0 to the surface; by symmetry, it is sufficient to consider angles $\phi_0 < \frac{1}{2}\gamma$. We shall distinguish two independent modes of polarization of the incident wave, and therefore of the diffracted wave also: the edge of the wedge (the z-axis) may be parallel to either **E** or **H**. The letter u will denote E_z and H_z respectively.

The electromagnetic field is then given in all space by the formula (the time factor $e^{-i\omega *}$ being everywhere omitted)

$$u(r, \phi) = v\,(r, \phi - \phi_0) \mp v\,(r, \phi + \phi_0)\,, \tag{94.1}$$

where the upper and lower signs correspond to the polarizations with **E** and **H** respectively

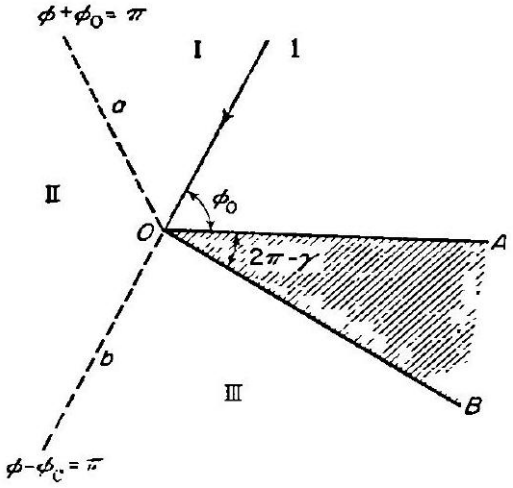


Fig. 48

[0]† A detailed account of the calculations is given by A. Sommerfeld, Optics, Academic Press. New York. 1954: P. Frank and R. von Mises, Differential and Integral Equations in Physics (Differential- und Integralgleichungen der Physik), part 2. Chapter XX, 2nd ed., Vieweg. Brunswick. 1935. Another method of solution, due to M. 1. Kontorovich and N. N. Lebedev, is given by G. A. Grinberg, Selected Problems in the Mathematical Theory of Electric and Magnetic Phenomena (Izbrannye voprosy matematichesko teorii lektricheskikh i magnitnykh

in the z-direction. and the function $v(r, \psi)$ is given by the complex integral

$$v(r, \psi) = \frac{1}{2\gamma} \int_c e^{-ikr\cos\zeta} \frac{\mathrm{d}\zeta}{1 - e^{-i\pi(\zeta+\psi)/\gamma}}, \tag{94.2}$$

where $k = \omega/c$. The path of integration C in the ζ-plane consists of the two loops C_1 and C_2 shown in Fig. 49. The ends of these loops are at infinity in parts of the ζ-plane (shaded in Fig. 49) where $\operatorname{im}\cos\zeta < 0$, and so the factor $e^{-ikr\cos\zeta}$ tends to zero at infinity. The integrand in (94.2) has poles on the real ζ-axis at the points $\zeta = -\psi + 2n\gamma$, where n is any integer. The integration may be taken along a path $D = D_1 + D_2$ (Fig. 49) instead of C, adding to the integral the residues of the integrand at the poles. if any, in the range $-\pi \leqslant \zeta \leqslant \pi$. We write v as

$$v(r, \psi) = v_0(r, \psi) + v_d(r, \psi), \tag{94.3}$$

where v_d is the integral (94.2) taken along the path D, and v_0 is the contribution from the residues at these poles. Each pole gives rise to a term $\exp[-ikr\cos(\psi - 2n\gamma)]$ in v_0, which represents either the incident wave or one of the waves reflected from the surface of the wedge in accordance with the laws of geometrical optics. The function v_d represents the diffractive distortion of the wave. The field at distances from the edge of the wedge large compared with the wavelength is of the greatest interest. When $kr \gg 1$, the asymptotic formula †

$$v_d(r, \psi) = \frac{\pi}{\gamma\sqrt{(2\pi kr)}} e^{i\left(kr + \frac{1}{4}\pi\right)} \frac{\sin(\pi^2/\gamma)}{\cos(\pi^2/\gamma) - \cos(\pi\psi/\gamma)} \tag{94.4}$$

holds, provided that the angle ψ satisfies the condition

$$\left[\cos\left(\pi^2/\gamma\right) - \cos(\pi\psi/\gamma)\right]^2 \gg 1/kr. \tag{94.5}$$

The dependence on r of the function v_d, and therefore of the field $u_d(r, \phi) = v_d(r, \phi - \phi_0) \mp v_d(r, \phi + \phi_0)$. is given by a factor $e^{ikr}/\sqrt{r}$, i.e. this field resembles a cylindrical wave emitted by the edge of the wedge.

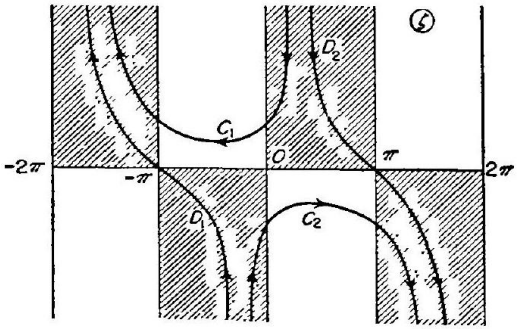


Fig. 49

In the form given above, (94.1)-(94.5) are valid for any angles γ and ϕ_0. The more detailed discussion of these formulae will be effected on the assumption (for definiteness) that the angles ϕ_0 and γ are so related ($\gamma > \pi + \phi_0$) that, in geometrical optics, two boundaries are formed: the boundary Ob of the complete shadow (region III in Fig. 48), and the boundary Oa of the "shadow" of the wave reflected from the surface OA. In Fig. 48, $\phi_0 < \frac{1}{2}\pi$. If $\phi_0 > \frac{1}{2}\pi$, the

yarlent), Chapter XXII, Academy of Sciences, Moscow. 1948.

[0]† The next terms in this asymptotic expansion have been given by W. Pauli. Physical Review 54, 924. 1938.

boundary Oa lies to the right of the direction of the incident wave. If $\gamma < \pi + \phi_0$, there is no region of complete shadow, and reflection (single or multiple) takes place from both sides of the wedge.

In regions I, II, III the function $u_0(r,\phi) = v_0(r,\phi-\phi_0) \mp v_0(r,\phi+\phi_0)$ has the following forms:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Region I: } u_0 = e^{-ikr\cos(\phi-\phi_0)} \mp e^{-ikr\cos(\phi+\phi_0)}, \\ \text{Region II: } u_0 = e^{-ikr\cos(\phi-\phi_0)}, \\ \text{Region III: } u_0 = 0. \end{array}\right\} \tag{94.6}$$

These expressions, which do not vanish as $kr \to \infty$, describe the incident (region II) or incident and reflected (region 1) waves, undistorted by diffraction. The diffractive distortion of the field is given by formula (94.4), but the condition (94.5) ceases to hold when ψ approaches π and the difference $|\psi - \pi|$ is no longer large compared with $1/\sqrt{(kr)}$.

The values $\psi = \pi$ correspond to the geometrical boundaries of the shadow; for $\psi = \phi - \phi_0$ we have the boundary of the complete shadow, and for $\psi = \phi + \phi_0$ that of the shadow of the reflected wave. In the immediate neighbourhood of these values a different asymptotic expression must be used, which is valid if the inequality $|\psi - \pi| \ll 1$ holds. This condition, together with $kr \gg 1$, ensures the validity of the usual approximate theory of Fresnel diffraction. Accordingly we have near the boundary Ob of the complete shadow the asymptotic expression

$$\left.\begin{array}{rl} u(r,\phi) & = e^{-ikr\cos(\phi-\phi_0)} \frac{1-i}{\sqrt{(2\pi)}} \int_{-\infty}^{w} e^{i\eta^2}\, \mathrm{d}\eta \\ w & = -(\phi - \phi_0 - \pi)\sqrt{\left(\frac{1}{2}kr\right)} \end{array}\right\} \tag{94.7}$$

Similarly, near the boundary Oa of the shadow of the reflected wave

$$\left.\begin{array}{rl} u(r,\phi) & = e^{-ikr\cos(\phi-\phi_0)} + e^{-ikr\cos(\phi+\phi_0)} \frac{1-i}{\sqrt{(2\pi)}} \int_{-\infty}^{w} e^{i\eta^2}\, \mathrm{d}\eta \\ w & = -(\phi + \phi_0 - \pi)\sqrt{\left(\frac{1}{2}kr\right)} \end{array}\right\} \tag{94.8}$$

In this approximation the diffraction pattern is independent of the angle of the wedge and of the direction of polarization of the wave.

The ranges of applicability of formulae (94.4) and (94.7), (94.8) partly overlap. For example, near the boundary of the complete shadow the common range of applicability is given by

$$1 \gg |\phi - \phi_\mathrm{o} - \pi| \gg 1/\sqrt{(kr)}$$

and in this range

$$u(r,\phi) = u_0(r,\phi) + \frac{1}{\sqrt{(2\pi kr)}} e^{i\left(kr+\frac{1}{4}\pi\right)} \frac{1}{\phi - \phi_0 - \pi} \tag{94.9}$$

with u_0 given by (94.6). This expression can be obtained from (94.7) by using the asymptotic formulae for the Fresnel integral with large $|w|$:

$$\begin{array}{ll} \int_{-\infty}^{w} e^{i\eta^2}\, \mathrm{d}\eta = (1+i)\sqrt{\left(\frac{1}{2}\pi\right)} + e^{iw^2}/2iw & \text{for } w > 0 \\ \int_{-\infty}^{w} e^{i\eta^2}\, \mathrm{d}\eta = e^{iw^2}/2iw & \text{for } w < 0 \end{array}$$

12.2.11 §95. Diffraction by a plane screen

The exact formula (94.2) for diffraction by a wedge can be brought to a comparatively simple form in the particular case of diffraction by a half-plane ($\gamma = 2\pi$). The complex integral in (94.2) can be reduced to a Fresnel integral:

$$\left.\begin{aligned} v(r,\psi) &= \tfrac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-i\left(kr\cos\psi+\frac{1}{4}\pi\right)} \int_{-\infty}^{w} e^{i\eta^2}\, \mathrm{d}\eta \\ w &= \sqrt{(2kr)}\cos\tfrac{1}{2}\psi \end{aligned}\right\} \tag{95.1}$$

This formula holds for any values of r and ψ. For $kr \gg 1$ and angles $|\psi - \pi| \gg 1/\sqrt{(kr)}$ the asymptotic expression

$$v_d(r,\psi) = -e^{i\left(kr+\frac{1}{4}\pi\right)} \frac{1}{2\sqrt{(2\pi kr)}\cos\frac{1}{2}\psi} \tag{95.2}$$

(formula (94.4) with $\gamma = 2\pi$) holds.
Using formula (95.2), the solution of the problem of diffraction by a plane perfectly conducting screen of any shape can be obtained in closed form. The only assumptions are that the dimensions of the screen and the distance from it are large compared with the wavelength, and that the angles of diffraction are moderately large (this region overlaps the region of small angles in which the ordinary Fresnel-diffraction formulae are valid). The result is in the form of an integral along the edge of the screen, analogous to the expression of the diffraction field as an integral over a surface spanning the aperture in a screen, in the ordinary approximate theory. We shall not pause to give the calculations here.

In the exact theory of diffraction by plane perfectly conducting screens, there is a theorem (due to L. I. Mandel'shtam and M. A. Leontovich) in some ways analogous to Babinet's theorem in the approximate theory.

Let us consider a plane screen with an aperture of any shape, and take the plane of the scree $_n$ as $z = 0$. Let an electromagnetic wave be incident from the side $z < 0$, and let $\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0$ be the total fields in the incident wave and the wave which would be reflected from the scree $_n$ if there were no aperture. We assume the field continued beyond the screen ($z > 0$) Since $H_z = 0, \mathbf{E}_t = 0$ for $z = 0$ (by the boundary conditions at a perfectly conducting surface), the values of $\mathbf{E}_0$ and $\mathbf{H}_0$ for $z > 0$ and $z < 0$ are related by

$$\left.\begin{aligned} E_{0z}(x,y,z) &= E_{0z}(x,y,-z), \quad \mathbf{E}_{0\mathbf{t}}(x,y,z) = -\mathbf{E}_{0\mathbf{t}}(x,y,-z) \\ H_{0z}(x,y,z) &= -H_{0z}(x,y,-z), \mathbf{H}_{0\mathbf{t}}(x,y,z) = \mathbf{H}_{0\mathbf{t}}(x,y,-z) \end{aligned}\right\} \tag{95.3}$$

Next, let $\mathbf{E}'$ and $\mathbf{H}'$ be the fields which would occur if a flat plate corresponding to the aperture in size, shape and position, and having infinite magnetic permeability, were placed in the field $\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0$. Then the solution of the diffraction problem for the aperture in the screen is given by

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{E} &= \tfrac{1}{2}(\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}'), \quad \mathbf{H} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{H}_0 + \mathbf{H}') \quad \text{for } z < 0 \\ \mathbf{E} &= \tfrac{1}{2}(\mathbf{E}_0 - \mathbf{E}'), \quad \mathbf{H} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{H}_0 - \mathbf{H}') \quad \text{for } z > 0 \end{aligned}\right\} \tag{95.4}$$

To show this, we notice that the fields $\mathbf{E}', \mathbf{H}'$ have the same symmetry (expressed by formulae (95.3)) as the fields $\mathbf{E_0}, \mathbf{H_0}$. They therefore satisfy on the plane $z = 0$ the conditions

$$\begin{aligned} \mathbf{E}'_{\mathrm{t}} = 0, \quad H'_z = 0 \quad &\text{outside the aperture,} \\ \mathbf{E}'_{\mathrm{t}1} = -\mathbf{E}'_{\mathrm{t}2}, \quad H'_{z1} = -H'_{z2} \quad &\text{on the aperture,} \end{aligned}$$

the suffixes 1 and 2 corresponding to $z \to \pm 0$. They also satisfy the further conditions

$$E'_z = 0, \quad \mathbf{H}'_t = 0 \text{ on the aperture,}$$

since the boundary conditions on the surface of a body with $\mu = \infty$ are obtained from those for a perfectly conducting body ($\varepsilon = \infty$) by interchanging $\mathbf{E}$ and $\mathbf{H}$. Hence it is clear that the fields (95.4) satisfy the necessary conditions $\mathbf{E}_t = 0, H_z = 0$ on the surface of the screen ($z \to -0$) outside the aperture, and are continuous on the aperture. Finally, since $\mathbf{E}'$, $\mathbf{H}'$ tend

to $\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0$ at infinity, the fields (95.4) tend to $\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0$ as $z \to -\infty$ and to zero as $z \to +\infty$. They therefore satisfy all the conditions of the problem. This proves the theorem.

Thus the problem of diffraction by an aperture in a screen with $\varepsilon = \infty$ is equivalent to a problem of diffraction by a complementary screen with $\mu = \infty$.

PROBLEMS

Problem 1. A plane monochromatic wave is incident normally on a slit cut in a perfectly conducting plane screen, the width $2a$ of the slit being large compared with the wavelength. Determine the distribution of light intensity beyond the slit, at large distances from it and for large angles of diffraction.

Solution. For $a \gg \lambda$, the diffraction field beyond the slit can be regarded as a superposition of fields arising from independent diffraction at each of the two edges of the slit and determined by means of the asymptotic formula (95.2). † When the distances $AP = r_1$ and $BP = r_2$ from the edges of the slit to the point of observation (Fig. 50) are large compared with a, we can put, in the factors e^{ikr_1} and $e^{ikr_2}, r_1 = r - a\sin\chi, r_2 = r + a\sin\chi$. and elsewhere $r_1 \cong r_2 \cong r$; the angles between the z-axis and AP, OP, BP can all be taken as the angle of diffraction χ -

The result is

$$u = \frac{e^{i\left(kr+\frac{1}{4}\pi\right)}}{\sqrt{(2\pi kr)}}\left\{\frac{\sin(ka\sin\chi)}{\sin\frac{1}{2}\chi} \pm i\frac{\cos(ka\sin\chi)}{\cos\frac{1}{2}\chi}\right\}$$

† This assumption becomes invalid, however, for diffraction angles sufficiently close to $\frac{1}{2}\pi$ (when $\frac{1}{2}\pi - \gamma \leqslant 1/\sqrt{(ka)}$).

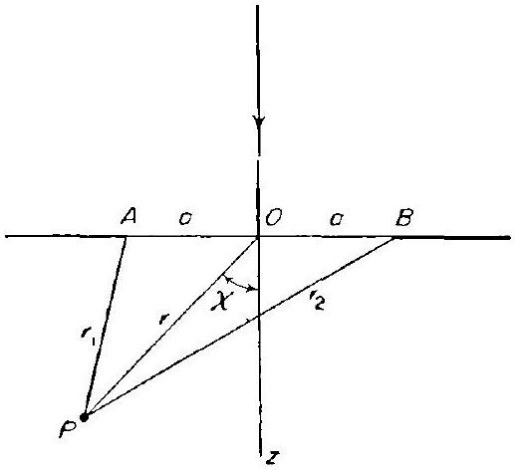


Fig. 50

Hence the intensity of light diffracted into an angle $\mathrm{d}\chi$ is (relative to the total intensity of light incident on the slit)

$$\mathrm{d}I = \frac{1}{4\pi ka}\left\{\left[\frac{\sin(ka\sin\chi)}{\sin\frac{1}{2}\chi}\right]^2 + \left[\frac{\cos(ka\sin\chi)}{\cos\frac{1}{2}\chi}\right]^2\right\}\mathrm{d}\chi$$

$$= \frac{ka}{\pi}\left\{\left[\frac{\sin(ka\sin\chi)}{ka\sin\chi}\right]^2\cos\chi + \frac{1}{\left[2ka\cos\frac{1}{2}\chi\right]^2}\right\}\mathrm{d}\chi.$$

For small χ this expression becomes the formula for Fraunhofer diffraction by the slit:

$$\mathrm{d}I = -\frac{1}{\pi ka}\frac{\sin^2 ka\chi}{\chi^2}\,\mathrm{d}\chi.$$

Problem 2. A plane wave is incident on a perfectly conducting plane with a circular aperture whose radius a is small compared with the wavelength. Determine the intensity of diffracted light passing through the aperture (Rayleigh. 1897).

Solution. As stated above. this problem is equivalent to that of diffraction by a circular disc with $\mu = \propto$, and, since $a \leqslant \lambda$, we have the case of scattering by a small particle. According to §92, in order to solve the latter problem it is necessary to determine the static electric and magnetic polarizabilities of the disc. The field $\mathbf{E}_0$ is perpendicular to the plane of the disc. and the boundary condition $E_z' = 0$ is formally identical with the condition in electrostatics at the boundary of a body with $\varepsilon = 0$. The field H_0 is parallel to the disc, and the boundary condition $\mathbf{H}_\mathbf{t}' = 0$ corresponds to a magnetostatic problem with $\mu = \infty$. Hence the electric and magnetic moments of the discare (see §4. Problem 4. and §54. Problem) $\mathscr{P} = -2a^3\mathrm{E}_0/3\pi, \mathcal{M} = 4a^3\mathrm{H}_0/3\pi$. In going to the problem of diffraction by an aperture we must, in accordance with formulae (95.4), divide these expressions by 2 and then substitute them in the scattering formula (92.1).

Thus the intensity of radiation diffracted into a solid angle do is †

$$\begin{aligned}\mathrm{d}I &= \frac{c}{4\pi}\frac{\omega^4 a^6}{9\pi^2 c^4}\left\{\mathrm{n}\times\mathrm{E}_0 - 2\mathrm{n}\times(\mathrm{H}_0\times\mathrm{n})\right\}^2\,\mathrm{d}o \\ &= \frac{c}{4\pi}\frac{\omega^4 a^6}{9\pi^2 c^4}\left\{(\mathrm{n}\times\mathrm{E}_0)^2 + 4\,(\mathrm{n}\times\mathrm{H}_0)^2 + 4\mathrm{n}\cdot\mathrm{H}_0\times\mathrm{E}_0\right\}\mathrm{d}o\end{aligned}$$

The total diffracted intensity is obtained by integration over a hemisphere, and is

$$I = \frac{\omega^4 a^6}{27\pi^2 c^3}\left(E_0^2 + 4H_0^2\right)$$

The diffraction cross-section may be defined as the ratio of the intensity of diffracted radiation to the energy flux density in the incident wave $cE^2/4\pi$ (letters without suffixes refer to the incident wave). Two modes of Polarization of the incident wave may be distinguished:

(a) the vector $\mathbf{E}$ in the incident wave is perpendicular to the plane of incidence (the xz-plane), i.e. it is parallel to the plane of the screen (the xy-plane). The sum of t the fields in the incident and reflected waves at the surface of the screen is

$$E_0 = 0, \quad H_{ox} = 2H\cos\alpha = 2E\cos\alpha$$

(α being the angle of incidence). Hence

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{16a^6\omega^4}{9\pi^2 c^4}\cos^2\alpha\left(1 - \sin^2\vartheta\cos^2\phi\right)\mathrm{d}o$$

where ϑ is the angle between the direction of diffr action $\mathbf{n}$ and the normal to the screen (the z-axis), and ϕ is the azimuth of the vector n with respect to the plane of incidence. The total cross-section is

$$\sigma = \left(64\omega^4 a^6/27\pi c^4\right)\cos^2\alpha$$

(b) the vector $\mathbf{E}$ lies in the plane of incidence. Then $E_0 = E_{0z} = -2E\sin\alpha, H_0 = H_{0y} = 2H = 2E$. The differential cross-section is

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{16a^6\omega^4}{9\pi^2 c^4}\left\{\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta\left(\cos^2\phi + \frac{1}{4}\sin^2\alpha\right) - \sin\vartheta\sin\alpha\cos\phi\right\}\mathrm{d}o$$

and the total cross-section is $\sigma = \left(64a^6\omega^4/27\pi c^4\right)\left(1 + \frac{1}{4}\sin^2\alpha\right)$.
For natural incident light $\sigma = \left(64a^6\omega^4/27\pi c^4\right)\left(1 - \frac{3}{8}\sin^2\alpha\right)$.

[0]† The factor $e^{-i\omega t}$ is omitted; $\mathbf{E}$ and $\mathbf{H}$ are real.

12.3 XI Electromagnetic Waves in Anisotropic Media by Landau

12.3.1 §96. The permittivity of crystals

THE properties of an anisotropic medium with respect to electromagnetic waves are defined by the tensors $\varepsilon_{ik}(\omega)$ and $\mu_{ik}(\omega)$, which give the relation between the inductions and the fields: †

$$D_i = \varepsilon_{ik}(\omega)E_k, \quad B_i = \mu_{ik}(\omega)H_k \tag{96.1}$$

In what follows we shall, for definiteness, consider the electric field and the tensor ε_{ik}; all the results obtained are valid for the tensor μ_{ik} also.

As $\omega \to 0$, the ε_{ik} tend to their static values, which have been shown in §13 to be symmetrical with respect to i and k. The proof was thermodynamical, and therefore holds only for states of thermodynamic equilibrium. In a variable field, a substance is of course not in equilibrium, and the proof in § 13 is consequently invalid. To ascertain the properties of the tensor ε_{ik} we must use the generalized principle of the symmetry of the kinetic coefficients (see SP 1, §125).

The generalized susceptibilities $\alpha_{ab}(\omega)$ which appear in the formulation of this principle are defined in terms of the response of the system to a perturbation:

$$\hat{V} = -\hat{x}_a f_a(t)$$

(where the x_a are quantities describing the system) and are the coefficients in the linear relation between the Fourier components of the mean values $\overline{x_a}(t)$ and the generalized forces $f_a(t)$:

$$\bar{x}_{a\omega} = \alpha_{ab}(\omega) f_{b\omega}.$$

The change in the energy of the system with time under the perturbation is given by

$$\dot{\mathscr{U}} = -f_a \overline{x_a}.$$

According to the symmetry principle,

$$\alpha_{ab}(\omega) = \alpha_{ba}(\omega),$$

if the system is not in an external magnetic field and has no magnetic structure; otherwise, $\alpha_{ba}(\omega)$ has to be taken for the "time-reversed" system.

It is easy to relate the components of the tensor $\varepsilon_{ik}(\omega)$ to the generalized susceptibilities. To do so, we note that the rate of change of the energy of a dielectric body in a variable electric field is given by the integral

$$\int \frac{1}{4\pi}\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}\, \mathrm{d}l \tag{96.2}$$

A comparison with the above formulae shows that, if the components of the vector $\mathbf{E}$ at each point are taken as the quantities $\overline{x_a}$, the corresponding quantities f_a will be the components of $\mathbf{D}$. (The suffix a takes a continuous series of values, labelling both the components of the vectors and the points in the body.) The coefficients α_{ab} are then the components of the tensor ${\varepsilon^{-1}}_{ik}$. The symmetry properties of ε_{ik} are, of course, identical with those of its inverse. Since $\mathbf{E}$ and $\dot{\mathbf{D}}$ are multiplied in (96.2) only at the same point in the body, the interchange of the suffixes a and b is equivalent to simply interchanging the tensor suffixes. We thus conclude that the tensor ε_{ik} is symmetrical: †

[0†] It should be recalled that these quantities refer to the variable fields in the wave; the possible presence of a constant induction (in a pyroelectric or ferromagnetic crystal) is irrelevant to this discussion

$$\varepsilon_{ik}(\omega) = \varepsilon_{ki}(\omega) \tag{96.3}$$

It should be noted that the components of the polarizability tensor for the whole body, i.e. the coefficients in the equations $\mathscr{P}_i = V\alpha_{ik}\mathfrak{F}_k$, also come under the definition of generalized susceptibilities. For the rate of change of the energy of a body placed in a variable external field $\mathcal{G}$ is

$$-\mathscr{P} \cdot \mathrm{d}\mathscr{C}/\mathrm{d}t \tag{96.4}$$

Hence we see that, if the x_a are the three components of the vector $\mathscr{P}$, then the corresponding f_a are those of the vector $\mathbb{C}^2$, so that the coefficients α_{ab} are in this case $I'\alpha_{ik}$.

Several of the formulae derived previously for an isotropic medium can be airectly generalized to the anisotropic case. Repeating for the anisotropic case the derivation in §80, we find that the energy dissipation in a monochromatic electromagnetic field is

$$Q = \frac{i\omega}{16\pi}\left\{(\varepsilon^*_{ik} - \varepsilon_{ki})\, E_i E^*_k + (\mu^*_{ik} - \mu_{ki})\, H_i H^*_k\right\} \tag{96.5}$$

which is analogous to (80.5). The condition that absorption be absent is ${\varepsilon_{ik}}^* = \varepsilon_{ki} = \varepsilon_{ik}$, i.e. the ε_{ik} must be real, as must the μ_{ik}.

When absorption is absent, the internal electromagnetic energy per unit volume can be defined as shown in §80. The formula for an anisotropic medium corresponding to (80.11) is

$$\bar{U} = \frac{1}{16\pi}\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}(\omega\varepsilon_{ik})\, E_i E^*_k + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}(\omega\mu_{ik})\, H_i H^*_k\right\} \tag{96.6}$$

In §87 we used the surface impedance ζ, in terms of which the boundary conditions at the surface of a metal can be formulated even if the permittivity is no longer meaningful. At the surface of an anisotropic body the boundary condition corresponding to (87.6) is

$$E_\alpha = \zeta_{\alpha\beta}(\mathbf{H} \times \mathbf{n})_\beta, \tag{96.7}$$

where $\zeta_{\alpha\beta}(\omega)$ is a two-dimensional tensor on the surface of the body. It should be borne in mind that the value of this tensor depends, in general, on the crystallographic direction of the surface concerned.

The energy flux into the body is $(c/4\pi)\mathbf{E} \times \mathbf{H} \cdot \mathbf{n} = (c/4\pi)\mathbf{E} \cdot \mathbf{H} \times \mathbf{n} \equiv (c/4\pi)E_\alpha(\mathbf{H} \times \mathbf{n})_\alpha$. (Here $\mathbf{E}$ and $\mathbf{H}$ are real.) Hence we see that if, in applying the principle of the symmetry of the kinetic coefficients, we take the components E_α as the x_a, then the corresponding $\hat{f}_a$ will be $-(\mathbf{H} \times \mathbf{n})_\alpha$, i.e. f_a will be $-(i/\omega)(\mathbf{H} \times \mathbf{n})_\alpha$(returning to the complex form). The coefficients α_{ab} are therefore the same, apart from a factor, as the components $\zeta_{\alpha\beta}$, and we conclude that

$$\zeta_{\alpha\beta} = \zeta_{\beta\alpha} \tag{96.8}$$

in the absence of an external magnetic field.

PROBLEM

Express the components of the tensor $\zeta_{\alpha\beta}$ in terms of those of $\eta_{\alpha\beta} \equiv {\varepsilon^{-1}}_{\alpha\beta}$, assuming that the latter exists and that the body is non-magnetic ($\mu_{ik} = \delta_{ik}$).

SOLUTION. In an anisotropic medium, the equation $\zeta^2 = 1/\varepsilon$(87.2) becomes $\zeta_{\alpha\gamma}\zeta_{\gamma\beta} = \eta_{a\beta}$. In components this gives

[0]† The properties of this tensor in the presence of an external magnetic tield will be discussed in $101.

$$\zeta_{11}{}^2 + \zeta_{12}\zeta_{21} = \eta_{11}, \quad \zeta_{22}{}^2 + \zeta_{12}\zeta_{21} = \eta_{22}$$
$$\zeta_{12}(\zeta_{11} + \zeta_{22}) = \eta_{12}, \quad \zeta_{21}(\zeta_{11} + \zeta_{22}) = \eta_{21}.$$

The solution of these equations is

$$\zeta_{12} = \eta_{12}/\xi, \qquad \zeta_{21} = \eta_{21}/\xi$$
$$\zeta_{11} = \left[\eta_{11} \pm \sqrt{(\eta_{11}\eta_{22} - \eta_{12}\eta_{21})}\right]/\xi, \quad \zeta_{22} = \left[\eta_{22} \pm \sqrt{(\eta_{11}\eta_{22} - \eta_{12}\eta_{21})}\right]/\xi$$
$$\xi^2 = \eta_{11} + \eta_{22} \pm 2\sqrt{(\eta_{11}\eta_{22} - \eta_{12}\eta_{21})}$$

The choice of signs is determined by the condition that the absorption of energy must be positive. We do not assume $\zeta_{12} = \zeta_{21}$, and thereby allow for the presence of an external magnetic field.

12.3.2 §97. A plane wave in an anisotropic medium

In studying the optics of anisotropic bodies (crystals) we shall take only the most important case, where the medium may be supposed non-magnetic and transparent in a given range of frequencies. Accordingly, the relation between the electric and magnetic fields and inductions is

$$D_i = \varepsilon_{ik}E_k, \quad \mathbf{B} = \mathbf{H} \tag{97.1}$$

The components of the dielectric tensor ε_{ik} are all real, and its principal values are positive. Maxwell's equations for the field of a monochromatic wave with frequency ω are

$$i\omega\mathbf{H} = c\,\mathrm{curl}\,\mathbf{E}, \quad i\omega\mathbf{D} = -c\,\mathrm{curl}\,\mathbf{H} \tag{97.2}$$

In a plane wave propagated in a transparent medium all quantities are proportional to $e^{ik\cdot r}$, with a real wave vector k. Effecting the differentiation with respect to the coordinates, we obtain

$$\omega\mathbf{H}/c = \mathbf{k} \times \mathbf{E}, \quad \omega\mathbf{D}/c = -\mathbf{k} \times \mathbf{H} \tag{97.3}$$

Hence we see, first of all, that the three vectors $\mathbf{k}, \mathbf{D}, \mathbf{H}$ are mutually perpendicular. Moreover, $\mathbf{H}$ is perpendicular to $\mathbf{E}$, and so the three vectors $\mathbf{D}, \mathbf{E}, \mathbf{k}$, being all perpendicular to H , must be coplanar. Fig. 51 (p. 334) shows the relative position of all these vectors. With respect to the direction of the wave vector, $\mathbf{D}$ and $\mathbf{H}$ are transverse, but $\mathbf{E}$ is not. The diagram shows also the direction of the energy flux $\mathbf{S}$ in the wave. It is given by the vector Product $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$, i.e. it is perpendicular to both $\mathbf{E}$ and $\mathbf{H}$. The direction of $\mathbf{S}$ is not the same as

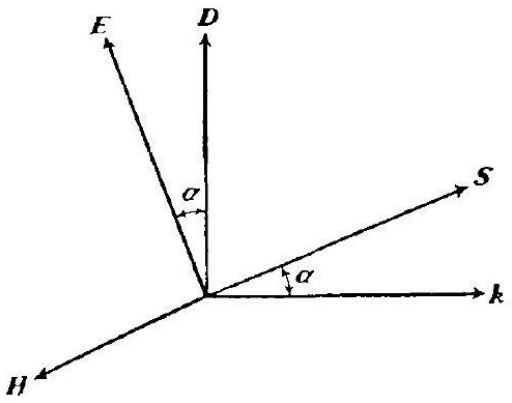


Fig. 51

that of $\mathbf{k}$, unlike what happens for an isotropic medium. Clearly the vector $\mathbf{S}$ is coplanar with $\mathbf{E}, \mathbf{D}$ and $\mathbf{k}$, and the angle between $\mathbf{S}$ and $\mathbf{k}$ is equal to that between $\mathbf{E}$ and $\mathbf{D}$

We can define a vector $\mathbf{n}$ by

$$\mathbf{k} = \omega\mathbf{n}/c. \tag{97.4}$$

The magnitude of this vector in an anisotropic medium depends on its direction, whereas in an isotropic medium $n = \sqrt{\varepsilon}$ depends only on the frequency. † Using (97.4), we can write the fundamental formulae (97.3) as

$$\mathbf{H} = \mathbf{n} \times \mathbf{E}, \quad \mathbf{D} = -\mathbf{n} \times \mathbf{H}. \tag{97.5}$$

The energy flux vector in a plane wave is

$$\mathbf{S} = c\mathbf{E} \times \mathbf{H}/4\pi = (c/4\pi)\left\{E^2\mathbf{n} - (\mathbf{E} \cdot \mathbf{n})\mathbf{E}\right\}; \tag{97.6}$$

in this formula $\mathbf{E}$ and $\mathbf{H}$ are real.

So far we have not used the relation (97.1) which involves the constants ε_{ik} characterizing the material. This relation, together with equations (97.5), determines the function $\omega(\mathbf{k})$.

Substituting the first equation (97.5) in the second, we have

$$\mathbf{D} = \mathbf{n} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{n}) = n^2\mathbf{E} - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{E})\mathbf{n}. \tag{97.7}$$

If we equate the components of this vector to $\varepsilon_{ik}E_k$ in accordance with (97.1), we obtain three linear homogeneous equations for the three components of $\mathbf{E}$: $n^2E_i - n_in_kE_k = \varepsilon_{ik}E_k$ or

$$\left(n^2\delta_{ik} - n_in_k - \varepsilon_{ik}\right)E_k = 0 \tag{97.8}$$

The compatibility condition for these equations is that the determinant of their coefficients should vanish:

$$\det\left|n^2\delta_{ik} - n_in_k - \varepsilon_{ik}\right| = 0 \tag{97.9}$$

In practice, this determinant is conveniently evaluated by taking as the axes of x, y, z the principal axes of the tensor ε_{ik} (called the principal dielectric axes). Let the principal values of the tensor be $\varepsilon^{(x)}, \varepsilon^{(y)}, \varepsilon^{(z)}$. Then a simple calculation gives

$$\begin{aligned} &n^2\left(\varepsilon^{(x)}n_x^2 + \varepsilon^{(y)}n_y^2 + \varepsilon^{(z)}n_z^2\right) - \left[n_x^2\varepsilon^{(x)}\left(\varepsilon^{(y)} + \varepsilon^{(z)}\right)\right. \\ &\left.+n_y^2\varepsilon^{(y)}\left(\varepsilon^{(x)} + \varepsilon^{(z)}\right) + n_z^2\varepsilon^{(z)}\left(\varepsilon^{(x)} + \varepsilon^{(y)}\right)\right] + \varepsilon^{(x)}\varepsilon^{(y)}\varepsilon^{(z)} = 0. \end{aligned} \tag{97.10}$$

law of refraction as in isotropic bodies.

The sixth-order terms cancel when the determinant is expanded; this is, of course, no accident and is due ultimately to the fact that the wave has two, not three, independent directions of polarization.

Equation (97.10), called Fresnel's equation, is one of the fundamental equations of crystal optics. † It determines implicitly the dispersion relation, i.e. the frequency as a function of the wave vector. (The principal values $\varepsilon^{(i)}$ are functions of frequency, and so are, in some cases (see §99), the directions of the principal axes of the tensor ε_{ik}.) For monochromatic waves, however, ω, and therefore all the $\varepsilon^{(i)}$, are usually given constants, and equation (97.10) then gives the magnitude of the wave vector as a function of its direction. When the direction of $\mathbf{n}$ is given,

[0]† The magnitude n is still called the refractive index, although it no longer bears the same simple relation to the

(97.10) is a quadratic equation, for n^2, with real coefficients. Hence two different magnitudes of the wave vector correspond, in general, to each direction of $\mathbf{n}$.

Equation (97.10) (with constant coefficients $\varepsilon^{(i)}$) defines in the coordinates n_x, n_y, n_z the "wave-vector surface" ‡ In general this is a surface of the fourth order, whose properties will be discussed in detail in the following sections. Here we shall mention some general properties of this surface.

We first introduce another quantity characterizing the propagation of light in an anisotropic medium. The direction of the light rays (in geometrical optics) is given by the group velocity vector $\partial\omega/\partial\mathbf{k}$. In an isotropic medium, the direction of this vector is always the same as that of the wave vector, but in an anisotropic medium the two do not in general coincide. The rays may be characterized by a vector $\mathbf{s}$, whose direction is that of the group velocity, while its magnitude is given by

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{s} = 1. \tag{97.11}$$

We shall call $\mathbf{s}$ the ray vector. Its significance is as follows.
Let us consider a beam of rays (of a single frequency) propagated in all directions from some point. The value of the eikonal ψ (which is, apart from a factor ω/c, the wave phase; see §85) at any point is given by the integral $\int \mathbf{n}\cdot\mathrm{d}\mathbf{l}$ taken along the ray. Using the vector $\mathbf{s}$ which determines the direction of the ray, we can put

$$\psi = \int \mathbf{n}\cdot\mathrm{d}\mathbf{l} = \int (\mathbf{n}\cdot\mathbf{s}/s)\mathrm{d}l = \int \mathrm{d}l/s. \tag{97.12}$$

In a homogeneous medium, s is constant along the ray, so that $\psi = L/s$, where L is the length of the ray segment concerned. Hence we see that, if a segment equal (or proportional) to s is taken along each ray from the centre, the resulting surface is such that the phase of the rays is the same at every point. This is called the ray surface.

The wave-vector surface and the ray surface are in a certain dual relationship. Let the equation of the wave-vector surface be written $f(\omega, \mathbf{k}) = 0$. Then the group velocity vector is

$$\frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{k}} = -\frac{\partial f/\partial\mathbf{k}}{\partial f/\partial\omega}, \tag{97.13}$$

i.e. is proportional to $\partial f/\partial\mathbf{k}$, or, what is the same thing (since the derivative is taken for constant ω), to $\partial f/\partial\mathbf{n}$. The ray vector, therefore, is also proportional to $\partial f/\partial\mathbf{n}$. But the vector

$\partial f/\partial\mathbf{n}$ is normal to the surface $f = 0$. Thus we conclude that the direction of the ray vector of a wave with given $\mathbf{n}$ is that of the normal at the corresponding point of the wave-vector surface.

It is easy to see that the reverse is also true: the normal to the ray surface gives the direction of the corresponding wave vectors. For the equation $\mathbf{s}\cdot\delta\mathbf{n} = 0$, where $\delta\mathbf{n}$ is an arbitrary infinitesimal change in $\mathbf{n}$ (for given ω), i.e. the vector of an infinitesimal displacement on the surface, expresses the fact that $\mathbf{s}$ is perpendicular to the wave-vector surface. Differentiating (again for given ω) the equation $\mathbf{n}\cdot\mathbf{s} = 1$, we obtain $\mathbf{n}\cdot\delta\mathbf{s} + \mathbf{s}\cdot\delta\mathbf{n} = 0$, and therefore $\mathbf{n}\cdot\delta\mathbf{s} = 0$, which proves the above statement.

This relation between the surfaces of $\mathbf{n}$ and $\mathbf{s}$ can be made more precise. Let $\mathbf{n}_0$ be the position vector of a point on the wave-vector surface, and s_0 the corresponding ray vector. The equation (in coordinates n_x, n_y, n_z) of the tangent plane at this point is $\mathbf{s_0}\cdot(\mathbf{n} - \mathbf{n_0}) = 0$, which

[0]† The foundations of crystal optics were lard by A. J. Fresnel in the 1820s, on the basis of mechanical analogies, long before the development of the electromagnetic theory.
‡ A concept called the "surface of normals" or "surface of indices" has been used; it is obtained by taking a point at a distance $1/n$ (instead of n) in each direction, but is less convenient.

states that $\mathbf{s_0}$ is perpendicular to any vector $\mathbf{n} - \mathbf{n_0}$ in the plane. Since $\mathbf{s_0}$ and $\mathbf{n_0}$ are related by $\mathbf{s}_0 \cdot \mathbf{n}_0 = 1$, we can write the equation as

$$s_0 \cdot n = 1 \tag{97.14}$$

Hence it follows that $1/s_0$ is the length of the perpendicular from the origin to the tangent plane to the wave-vector surface at the point $\mathbf{n_0}$.

Conversely, the length of the perpendicular from the origin to the tangent plane to the ray surface at a point s_0 is $1/n_0$.

To ascertain the location of the ray vector relative to the field vectors in the wave, we notice that the group velocity is always in the same direction as the (time) averaged energy flux vector. For let us consider a wave packet, occupying a small region of space. When the packet moves, the energy concentrated in it must move with it, and the direction of the energy flux is therefore the same as the direction of the velocity of the packet, i.e the group velocity. It can be demonstrated from (97.5) that the group velocity is in the same direction as the Poynting vector. Differentiating (for given ω), we obtain

$$\delta\mathbf{D} = \delta\mathbf{H} \times \mathbf{n} + \mathbf{H} \times \delta\mathbf{n}, \quad \delta\mathbf{H} = \mathbf{n} \times \delta\mathbf{E} + \delta\mathbf{n} \times \mathbf{E}. \tag{97.15}$$

We take the scalar product of the first equation with $\mathbf{E}$ and of the second with $\mathbf{H}$. obtaining

$$\mathbf{E} \cdot \delta\mathbf{D} = \mathbf{H} \cdot \delta\mathbf{H} + \mathbf{E} \times \mathbf{H} \cdot \delta\mathbf{n}. \quad \mathbf{H} \cdot \delta\mathbf{H} = \mathbf{D} \cdot \delta\mathbf{E} + \mathbf{E} \times \mathbf{H} \cdot \delta\mathbf{n}$$

But $\mathbf{D} \cdot \delta\mathbf{E} = \varepsilon_{ik} E_k \delta E_i = \mathbf{E} \cdot \delta\mathbf{D}$, and so, adding the two equations, we have

$$\mathbf{E} \times \mathbf{H} \cdot \delta\mathbf{n} = 0 \tag{97.16}$$

i.e the vector $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ is normal to the wave-vector surface. This is the required result. †

Since the Poynting vector is perpendicular to $\mathbf{H}$ and $\mathbf{E}$, the same is true of $\mathbf{s}$:

$$\mathbf{s} \cdot \mathbf{H} = 0, \quad \mathbf{s} \cdot \mathbf{E} = 0 \tag{97.17}$$

A direct calculation, using formulae (97.5), (97.11) and (97.17), gives

$$\mathbf{H} = \mathbf{s} \times \mathbf{D}, \quad \mathbf{E} = -\mathbf{s} \times \mathbf{H} \tag{8}$$

For example. $\mathbf{s} \times \mathbf{H} = \mathbf{s} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{E}) = \mathbf{n}(\mathbf{s} \cdot \mathbf{E}) - \mathbf{E}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{s}) = -\mathbf{E}$.

If we compare formulae (97.18) and (97.5), we see that they differ by the interchange of

$$\mathbf{E} \text{ and } \mathbf{D}, \quad \mathbf{n} \text{ and } \mathbf{s}, \quad \varepsilon_{ik} \text{ and } \varepsilon^{-\mathbf{I}}{}_{ik} \tag{97.19}$$

(the relation $\mathbf{n} \cdot \mathbf{s} = 1$ remaining valid, of course). The last of these pairs must be included in order that the relation (97.1) between $\mathbf{D}$ and $\mathbf{E}$ should remain valid. Thus the following useful rule may be formulated: an equation valid for one set of quantities can be converted into one valid for another set by means of the interchanges (97.19).

In particular, the application of this rule to (97.10) gives immediately an analogous equation for $\mathbf{s}$:

$$\begin{aligned} &s^2 \left(\varepsilon^{(y)}\varepsilon^{(z)} s_x^2 + \varepsilon^{(x)}\varepsilon^{(z)} s_y^2 + \varepsilon^{(x)}\varepsilon^{(y)} s_z^2\right) \\ &- \left[s_x^2 \left(\varepsilon^{(y)} + \varepsilon^{(z)}\right) + s_y^2 \left(\varepsilon^{(x)} + \varepsilon^{(z)}\right) + s_z^2 \left(\varepsilon^{(x)} + \varepsilon^{(y)}\right)\right] + 1 = 0. \end{aligned} \tag{97.20}$$

[0]† The result thus obtained relates to the instantaneous, as well as to the average. energy flux. In this proof. however, the symmetry of the tensor ε_{ik} is vital. The result is therefore not valid in the above form for media [in] which ε_{ik} is not symmetrical (gyrotropic media, §101). The statement is still valid, however, for the average value of the Poynting vector ($101, Problem 1).

This equation gives the form of the ray surface. Like the wave-vector surface, it is of the fourth order. When the direction of **s** is given, (97.20) is a quadratic equation for s^2, which in general has two different real roots. Thus two rays with different wave vectors can be propagated in any direction in the crystal.

Let us now consider the polarization of waves propagated in an anisotropic medium. Equations (97.8), from which Fresnel's equation has been derived, are unsuitable for this, because they involve the field **E**, whereas it is the induction **D** which is transverse (to the given **n**) in the wave. In order to take account immediately of the fact that **D** is transverse, we use for the time being a new coordinate system with one axis in the direction of the wave vector, and denote the two transverse axes by Greek suffixes, which take the values 1 and 2 . The transverse components of equation (97.7) give $D_\alpha = n^2 E_\alpha$; substituting $E_\alpha = {\varepsilon^{-1}}_{\alpha\beta} D_\beta$, where ${\varepsilon^{-1}}_{\alpha\beta}$ is a component of the tensor inverse to $\varepsilon_{\alpha\beta}$, we have

$$\left(\frac{1}{n^2} \delta_{\alpha\beta} - \varepsilon^{-1}_{\alpha\beta} \right) D_\beta = 0. \tag{97.21}$$

The condition for the two equations ($\alpha = 1, 2$) in the two unknowns D_1, D_2 to be compatible is that their determinant should be zero:

$$\det \left| n^{-2} \delta_{\alpha\beta} - {\varepsilon^{-1}}_{\alpha\beta} \right| = 0. \tag{97.22}$$

This condition is, of course, the same as Fresnel's equation, which was written in the original coordinates x, y, z. We now see also, however, that the vectors **D** corresponding to the two values of n are along the principal axes of the symmetrical two-dimensional tensor of rank two ${\varepsilon^{-1}}_{\alpha\beta}$. According to general theorems it follows that these two vectors are perpendicular. Thus, in the two waves with the wave vector in the same direction. the electric induction vectors are linearly polarized in two perpendicular planes.

Equations (97.21) have a simple geometrical interpretation. Let us draw the tensor ellipsoid corresponding to the tensor ${\varepsilon^{-1}}_{ik}$, returning to the principal dielectric axes, i.e. the surface

$${\varepsilon^{-1}}_{ik} x_i x_k = \frac{x^2}{\varepsilon^{(x)}} + \frac{y^2}{\varepsilon^{(y)}} + \frac{z^2}{\varepsilon^{(z)}} = 1 \tag{97.23}$$

(Fig. 52, p. 338). Let this ellipsoid be cut by a plane through its centre perpendicular to the given direction of **n**. The section is in general an ellipse; the lengths of its axes determine the values of n, and their directions determine the directions of the oscillations, i.e. the vectors **D**.

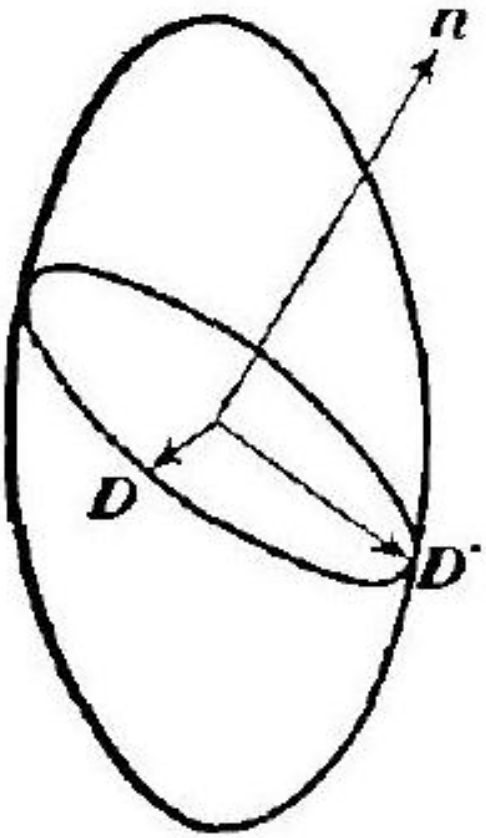


Fig. 52

From this construction (with, in general, $\varepsilon^{(x)}, \varepsilon^{(y)}, \varepsilon^{(z)}$ different) we see at once that, if the wave vector is in (say) the x-direction, the directions of polarization (D) will be the y and z directions. If the vector $\mathbf{n}$ lies in one of the coordinate planes, e.g. the xy-plane, one of the directions of polarization is also in that plane. and the other is in the z-direction.

The polarizations of two waves with the ray vector in the same direction have similar properties. Instead of the directions of the induction $\mathbf{D}$, we must now consider those of the vector $\mathbf{E}$, which is transverse to $\mathbf{s}$, and equations (97.21) are replaced by the analogous equations

$$\left(\frac{1}{s^2}\delta_{\alpha\beta} - \varepsilon_{\alpha\beta}\right) E_\beta = 0. \tag{7}$$

The geometrical construction is here based on the tensor ellipsoid

$$\varepsilon_{ik} x_i x_k = \varepsilon^{(x)} x^2 + \varepsilon^{(y)} y^2 + \varepsilon^{(z)} z^2 = 1, \tag{97.25}$$

corresponding to the tensor ε_{ik} itself (called the Fresnel ellipsoid).

It should be emphasized that plane waves propagated in an anisotropic medium are linearly polarized in certain planes. In this respect the optical properties of anisotropic media are very different from those of isotropic media. A plane wave propagated in an isotropic medium is in general elliptically polarized, and is linearly polarized only in particular cases. This important difference arises because the case of complete isotropy of the medium is in a sense one of degeneracy, in which a single wave vector corresponds to two directions of polarization, whereas in an anisotropic medium there are in general two different wave vectors (in the same direction). The two linearly polarized waves propagated with the same value of $\mathbf{n}$ combine to form one elliptically polarized wave.

PROBLEM

Express the components of the ray vector $\mathbf{s}$ in terms of the components of $\mathbf{n}$ along the principal dielectric axes.

Solution Differentiating the left-hand side of the equation $f(\mathbf{n}) = 0$(97.10) with respect to n_i and determining from the condition $\mathbf{n} \cdot \mathbf{s} = 1$ the proportionality coefficient between s_i and $\partial f/\partial n_i$, we obtain the following relations between the vectors $\mathbf{s}$ and $\mathbf{n}$:

$$\frac{s_x}{n_x} = \frac{\varepsilon^{(x)}\left(\varepsilon^{(y)}+\varepsilon^{(z)}\right) - 2\varepsilon^{(x)}n_x^2 - \left(\varepsilon^{(x)}+\varepsilon^{(y)}\right)n_y^2 - \left(\varepsilon^{(x)}+\varepsilon^{(z)}\right)n_z^2}{2\varepsilon^{(x)}\varepsilon^{(y)}\varepsilon^{(z)} - n_x^2\varepsilon^{(x)}\left(\varepsilon^{(y)}+\varepsilon^{(z)}\right) - n_y^2\varepsilon^{(y)}\left(\varepsilon^{(x)}+\varepsilon^{(z)}\right) - n_z^2\varepsilon^{(z)}\left(\varepsilon^{(x)}+\varepsilon^{(y)}\right)}$$

and similarly for s_y, s_z.

12.3.3 §98. Optical properties of uniaxial crystals

The optical properties of a crystal depend primarily on the symmetry of its dielectric tensor ε_{ik}. In this respect all crystals fall under three types: cubic, uniaxial and biaxial (see §13). In a crystal of the cubic system $\varepsilon_{ik} = \varepsilon\delta_{ik}$, i.e. the three principal values of the tensor are equal, and the directions of the principal axes are arbitrary. As regards their optical properties, therefore, cubic crystals are no different from isotropic bodies.

The uniaxial crystals include those of the rhombohedral, tetragonal and hexagonal systems. Here one of the principal axes of the tensor ε_{ik} coincides with the threefold, fourfold or sixfold axis of symmetry respectively; in optics, this axis is called the optical axis of the crystal, and in what follows we shall take it as the z-axis, denoting the corresponding principal value of ε_{ik} by $\varepsilon_\parallel$. The directions of the other two principal axes, in a plane perpendicular to the optical axis, are arbitrary, and the corresponding principal values, which we denote by ε_1, are equal.

If in Fresnel's equation (97.10) we put $\varepsilon^{(x)} = \varepsilon^{(y)} = \varepsilon_1, \varepsilon^{(z)} = \varepsilon_\parallel$, the left-hand side is a product of two quadratic factors:

$$\left(n^2 - \varepsilon_\perp\right)\left[\varepsilon_\parallel n_z^2 + \varepsilon_\perp\left(n_x^2+n_y^2\right) - \varepsilon_\perp\varepsilon_\parallel\right] = 0.$$

In other words, the quartic equation gives the two quadratic equations

$$n^2 = \varepsilon_1 \tag{98.1}$$

$$\frac{n_z^2}{\varepsilon_\perp} + \frac{n_x^2+n_y^2}{\varepsilon_\parallel} = 1 \tag{98.2}$$

Geometrically, this signifies that the wave-vector surface, which is in general of the fourth order, becomes two separate surfaces, a sphere and an ellipsoid. Fig. 53 shows a crosssection of these surfaces. Two cases are possible: if $\varepsilon_\perp > \varepsilon_\parallel$, the sphere lies outside the ellipsoid, but if $\varepsilon_\perp < \varepsilon_\parallel$it lies inside. In the first case we speak of a negative uniaxial crystal, and in the second case of a positive one. The two surfaces touch at opposite poles on the n_z-axis. The direction of the optical axis therefore corresponds to only one value of the wave vector.

The ray surface is similar in form. By the rule (97.19), its equation is obtained from (98.1) and (98.2):

$$s^2 = 1/\varepsilon_\perp \tag{98.3}$$

$$\varepsilon_\perp s_z^2 + \varepsilon_\parallel\left(s_x^2+s_y^2\right) = 1 \tag{98.4}$$

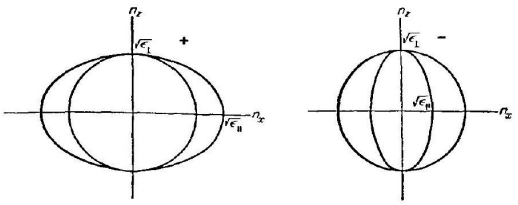


Fig. 53

In a positive crystal the ellipsoid lies within the sphere, and in a negative one outside. Thus we see that two types of wave can be propagated in a uniaxial crystal. With respect to one type, called ordinary waves, the crystal behaves like an isotropic body with refractive index $n = \sqrt{\varepsilon_1}$. The magnitude of the wave vector is $\omega n/c$ whatever its direction, and the direction of the ray vector is that of $\mathbf{n}$.

In waves of the second type, called extraordinary waves, the magnitude of the wave vector depends on the angle θ which it makes with the optical axis. By (98.2)

$$\frac{1}{n^2} = \frac{\sin^2\theta}{\varepsilon_\parallel} + \frac{\cos^2\theta}{\varepsilon_\perp} \tag{98.5}$$

The ray vector in an extraordinary wave is not in the same direction as the wave vector, but is coplanar with that vector and the optical axis, their common plane being called the principal section for the given $\mathbf{n}$. Let this be the zx-plane; the ratio of the derivatives of the left-hand side of (98.2) with respect to n_z and n_x gives the direction of the ray vector: $s_x/s_z = \varepsilon_\perp n_x/\varepsilon_\parallel n_z$. Thus the angle θ' between the ray vector and the optical axis and the angle θ satisfy the simple relation

$$\tan\theta' = \left(\varepsilon_1/\varepsilon_\parallel\right)\tan\theta \tag{98.6}$$

The directions of $\mathbf{n}$ and $\mathbf{s}$ are the same only for waves propagated along or perpendicular to the optical axis.

The problem of the directions of polarization of the ordinary and extraordinary waves is very easily solved. It is sufficient to observe that the four vectors $\mathbf{E}, \mathbf{D}, \mathbf{s}$ and $\mathbf{n}$ are always coplanar. In the extraordinary wave $\mathbf{s}$ and $\mathbf{n}$ are not in the same direction, but lie in the same principal section. This wave is therefore polarized so that the vectors $\mathbf{E}$ and $\mathbf{D}$ lie in the same principal section as $\mathbf{s}$ and $\mathbf{n}$. The vectors $\mathbf{D}$ in the ordinary and extraordinary waves with the same direction of $\mathbf{n}$ (or $\mathbf{E}$, with the same direction of $\mathbf{s}$) are perpendicular. Hence the polarization of the ordinary wave is such that $\mathbf{E}$ and $\mathbf{D}$ lie in a plane perpendicular to the principal section.

An exception is formed by waves propagated in the direction of the optical axis. In this direction there is no difference between the ordinary and the extraordinary wave, and so their polarizations combine to give a wave which is, in general, elliptically polarized.

The refraction of a plane wave incident on the surface of a crystal is different from refraction at a boundary between two isotropic media. The laws of refraction and reflection are again obtained from the continuity of the component $\mathbf{n_t}$ of the wave vector which is tangential to the plane of separation. The wave vectors of the refracted and reflected waves therefore lie in the plane of incidence. In a crystal, however, two different refracted waves are formed, a phenomenon known as double refraction or birefringence. They correspond to the two possible values of the normal component n_n which satisfy Fresnel's equation for a given tangential component $\mathbf{n}_t$. It should also be remembered that the observed direction of propagation of the rays is determined not by the wave vector but by the ray vector $\mathbf{s}$. whose direction is different from that of $\mathbf{n}$ and in general does not lie in the plane of incidence.

In a uniaxial crystal, ordinary and extraordinary refracted waves are formed. The ordinary wave is entirely analogous to the refracted wave in isotropic bodies; in particular its ray vector (which is in the same direction as its wave vector) lies in the plane of incidence. The ray vector of the extraordinary wave in general does not lie in the plane of incidence.

PROBLEMS

Problem 1. Find the direction of the extraordinary ray when light incident from a vacuum is refracted at a surface of a uniaxial crystal which is perpendicular to its optical axis.

Solution. In this case the refracted ray lies in the plane of incidence, which we take as the xz-plane, with the z-axis normal to the surface. The x-component of the wave vector $n_x = \sin\vartheta$ (ϑ being the angle of incidence) is continuous; the component n_z for the refracted wave is found from (98.2):

$$n_z = \sqrt{\left(\varepsilon_\perp - \frac{\varepsilon_\perp}{\varepsilon_\eta}\sin^2\vartheta\right)}.$$

The direction of the refracted ray is given by (98.6):

$$\tan\vartheta' = \frac{\varepsilon_\perp n_x}{\varepsilon_\parallel n_z} = \frac{\sqrt{\varepsilon_1}\sin\vartheta}{\sqrt{\left[\varepsilon_n\left(\varepsilon_n - \sin^2\vartheta\right)\right]}},$$

where ϑ' is the angle of refraction.

Problem 2. Find the direction of the extraordinary ray when light is incident normally on a surface of a uniaxial crystal at any angle to the optical axis.

Solution. The refracted ray lies in the xz-plane, which passes through the normal to the surface (the z-axis) and the optical axis. Let α be the angle between these axes. The ray vector $\mathbf{s}$, whose components are proportional to the derivatives of the left-hand side of equation (98.2) with respect to the corresponding components of n , is proportional to

$$\frac{\mathbf{n}}{\varepsilon_i} + (\mathbf{n}\cdot\mathbf{1})\mathbf{1}\left(\frac{1}{\varepsilon_\perp} - \frac{1}{\varepsilon_i}\right),$$

where 1 is a unit vector in the direction of the optical axis. In the present case the wave vector $\mathbf{n}$ is in the $\boldsymbol{z}$-direction, so that

$$s_x \propto \cos\alpha\sin\alpha\left(\frac{1}{\varepsilon_1} - \frac{1}{\varepsilon_n}\right), \quad s_z \propto \frac{\sin^2\alpha}{\varepsilon_n} + \frac{\cos^2\alpha}{\varepsilon_1}.$$

Hence we find

$$\tan\vartheta' = \frac{s_x}{s_z} = \frac{(\varepsilon_n - \varepsilon_1)\sin 2\alpha}{\varepsilon_n + \varepsilon_1 + (\varepsilon_n - \varepsilon_1)\cos 2\alpha}.$$

12.3.4 §99. Biaxial crystals

In biaxial crystals the three principal values of the tensor ε_{ik} are all different. The crystals of the triclinic, monoclinic and orthorhombic systems are of this type. In those of the triclinic system, the position of the principal dielectric axes is unrelated to any specific Crystallographic direction; in particular, it varies with frequency, as do all the components ε_{ik}. In crystals of the monoclinic system, one of the principal dielectric axes is crystallographically fixed; it coincides with the twofold axis of symmetry, or is perpendicular to the plane of symmetry. The position of the other two principal axes depends On the frequency. Finally, in crystals of the

orthorhombic system, the position of all three principal axes is fixed: they must coincide with the three mutually perpendicular twofold axes of symmetry.

The study of the optical properties of biaxial crystals involves the consideration of Fresnel's equation in its general form. We shall assume for definiteness that

$$\varepsilon^{(x)} < \varepsilon^{(y)} < \varepsilon^{(z)} \tag{99.1}$$

To ascertain the form of the fourth-order surface defined by equation (97.10). let us begin by finding its intersections with the coordinate planes. Putting $n_z = 0$ in equation (97.10), we find that the left-hand side is the product of two factors:

$$\left(n^2 - \varepsilon^{(z)}\right)\left(\varepsilon^{(x)} n_x^2 + \varepsilon^{(y)} n_y^2 - \varepsilon^{(x)}\varepsilon^{(y)}\right) = 0.$$

Hence we see that the section by the xy-plane consists of the circle

$$n^2 = \varepsilon^{(z)} \tag{99.2}$$

and the ellipse

$$\frac{n_x^2}{\varepsilon^{(y)}} + \frac{n_y^2}{\varepsilon^{(x)}} = 1, \tag{99.3}$$

and by the assumption (99.1) the ellipse lies inside the circle. Similarly we find that the sections by the yz and xz planes are also composed of an ellipse and a circle; in the yz-plane the ellipse lies outside the circle, and in the xz-plane they intersect. Thus the wave-vector surface intersects itself, and is as shown in Fig. 54, where one octant is drawn.

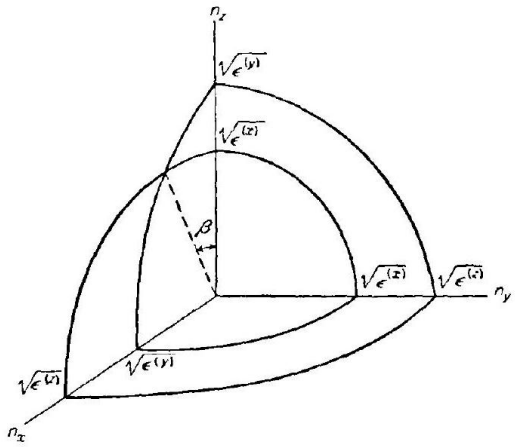


Fig. 54

This surface has four singular points of self-intersection, one in each quadrant of the xz-plane. The singular points of a surface whose equation is $f(n_x, n_y, i_z) = 0$ are given b) the vanishing of all three first derivatives of the function f. Differentiating the left-hand side of (97.10), we obtain the equations

$$\left.\begin{aligned} n_x\left[\varepsilon^{(x)}\left(\varepsilon^{(y)} + \varepsilon^{(z)}\right) - \varepsilon^{(x)} n^2 - \left(\varepsilon^{(x)} n_x^2 + \varepsilon^{(y)} n_y^2 + \varepsilon^{(z)} n_z^2\right)\right] = 0, \\ n_y\left[\varepsilon^{(y)}\left(\varepsilon^{(x)} + \varepsilon^{(z)}\right) - \varepsilon^{(y)} n^2 - \left(\varepsilon^{(x)} n_x^2 + \varepsilon^{(y)} n_y^2 + \varepsilon^{(z)} n_z^2\right)\right] = 0, \\ n_z\left[\varepsilon^{(z)}\left(\varepsilon^{(x)} + \varepsilon^{(y)}\right) - \varepsilon^{(z)} n^2 - \left(\varepsilon^{(x)} n_x^2 + \varepsilon^{(y)} n_y^2 + \varepsilon^{(z)} n_z^2\right)\right] = 0; \end{aligned}\right\} \tag{99.4}$$

the equation (97.10) itself must, of course, be satisfied also. Since we know that the required directions of n lie in the xz-plane, we put $n_v = 0$, and the two remaining equations giv immediately †

$$n_x^2 = \frac{\varepsilon^{(z)}\left(\varepsilon^{(y)} - \varepsilon^{(x)}\right)}{\varepsilon^{(z)} - \varepsilon^{(x)}}, \quad n_z^2 = \frac{\varepsilon^{(x)}\left(\varepsilon^{(z)} - \varepsilon^{(y)}\right)}{\varepsilon^{(z)} - \varepsilon^{(x)}} \tag{99.5}$$

The directions of these vectors $\mathbf{n}$ are inclined to the z-axis at an angle β such that

$$\frac{n_x}{n_z} = \pm\tan\beta = \pm\sqrt{\frac{\varepsilon^{(z)}\left(\varepsilon^{(y)} - \varepsilon^{(x)}\right)}{\varepsilon^{(x)}\left(\varepsilon^{(z)} - \varepsilon^{(y)}\right)}} \tag{99.6}$$

This formula determines lines in two directions in the xz-plane, each of which passes through two opposite singular points and is at an angle β to the z-axis. These lines are called the optical axes or binormals of the crystal; one of them is shown dashed in Fig. 54. The directions of the optical axes are evidently the only ones for which the wave vector has only one magnitude. ‡

The properties of the ray surface are entirely similar. To derive the corresponding formulae, it is sufficient to replace n by s and ε by $1/\varepsilon$. In particular, there are two optical ray axes or biradials, also lying in the xz-plane and at an angle γ to the z-axis, where

$$\tan\gamma = \sqrt{\frac{\varepsilon^{(y)} - \varepsilon^{(x)}}{\varepsilon^{(z)} - \varepsilon^{(y)}}} = \sqrt{\frac{\varepsilon^{(x)}}{\varepsilon^{(z)}}}\tan\beta \tag{99.7}$$

Since $\varepsilon^{(x)} < \varepsilon^{(z)}, \gamma < \beta$.

The directions of corresponding vectors $\mathbf{n}$ and $\mathbf{s}$ are the same only for waves propagated along one of the coordinate axes (i.e. the principal dielectric axes). If $\mathbf{n}$ lies in one of the coordinate planes, $\mathbf{s}$ lies in that plane also. This rule, however, is subject to an important exception for wave vectors in the direction of the optical axes.

When the values of $\mathbf{n}$ given by (99.5) are substituted in the general formulae for $\mathbf{s}$ in terms of $\mathbf{n}$ (§97, Problem), these take the indeterminate form $0/0$. The origin and meaning of this indeterminacy are quite evident from the following geometrical considerations. Near a singular point, the inner and outer parts of the wave-vector surface are cones with a common vertex. At the vertex, which is the singular point itself, the direction of the normal to the surface becomes indeterminate; and the direction of $\mathbf{s}$ as given by these formulae is just the direction of the normal. In fact the wave vector along the binormal corresponds to an infinity of ray vectors, whose directions occupy a certain conical surface, called the cone of internal conical refraction.§

To determine this cone of rays, we could investigate the directions of the normals near the singular point. It is more informative, however, to use a geometrical construction from the ray surface.

Fig. 55 (p. 344) shows one quadrant of the intersection of the ray surface with the xz plane (continuous curves), and also the intersection of the wave-vector surface, on a different scale. The line OS is the biradial, and ON the binormal. Let $\mathbf{n}_N$ be the wave vector corresponding to the point N. It is easy to see that the singular point N on the wave-vector

[0]† It is easy to see that the solution thus found is the only real solution of equations (99.4). If none of n_x, n_y, n_z is

Ero, the three equations (99.4) are inconsistent: they then involve only two unknowns, namely n^2 and $\varepsilon^{(x)}{n_x}^2 + \varepsilon^{(y)}{n_y}^2 + \varepsilon^{(z)}{n_z}^2$. If n_x or n_z is zero the solutions are imaginary.

‡ In the tensor ellipsoid (97.23) the binormals are the directions perpendicular to the circular sections of the ellipsoid. An ellipsoid has two such sections.

§ The phenomenon of conical refraction described below was predicted by W. R. Hamilton (1833).

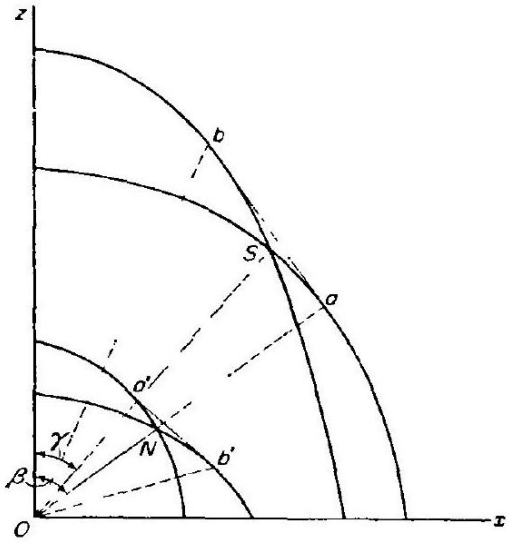


Fig. 55

surface corresponds to a singular tangent plane to the ray surface. This plane is perpendicular to ON, and touches the ray surface not at one point but along a curve, which is found to be a circle. In Fig. 55 the trace of this plane is shown by ab. This follows at once from the geometrical correspondence between the wave-vector surface and the ray surface (§97): if the tangent plane is drawn at any point s of the ray surface, then the perpendicular from the origin to this plane is in the same direction as the wave vector $\mathbf{n}$ corresponding to s, and its length is $1/n$. In our case there must be an infinity of vectors s corresponding to the single value $\mathbf{n} = \mathbf{n}_N$; hence the points on the ray surface which represent these vectors $\mathbf{s}$ must lie in one tangent plane, which is perpendicular to $\mathbf{n}_N$. Thus in Fig. 55 the triangle Oab is the section of the cone of internal conical refraction by the xz-plane.

There is no especial difficulty in carrying out a quantitative calculation corresponding to this geometrical picture, but we shall not do so here, and give only the final formulae. The equations of the circle in which the cone of refraction cuts the ray surface are

$$\left.\begin{aligned} \left(\varepsilon^{(z)}-\varepsilon^{(x)}\right)s_y^2+\left\{s_x\sqrt{\left[\varepsilon^{(x)}\left(\varepsilon^{(z)}-\varepsilon^{(y)}\right)\right]}-s_z\sqrt{\left[\varepsilon^{(z)}\left(\varepsilon^{(y)}-\varepsilon^{(x)}\right)\right]}\right\}\times \\ \times\left(s_x\sqrt{\tfrac{\varepsilon^{(z)}-\varepsilon^{(y)}}{\varepsilon^{(x)}}}-s_z\sqrt{\tfrac{\varepsilon^{(y)}-\varepsilon^{(x)}}{\varepsilon^{(z)}}}\right)=0 \\ s_x\sqrt{\left[\varepsilon^{(z)}\left(\varepsilon^{(y)}-\varepsilon^{(x)}\right)\right]}+s_z\sqrt{\left[\varepsilon^{(x)}\left(\varepsilon^{(z)}-\varepsilon^{(y)}\right)\right]}=\sqrt{\left[\varepsilon^{(z)}-\varepsilon^{(x)}\right]} \end{aligned}\right\} \tag{99.8}$$

The first of these equations is the equation of the cone of refraction if s_x, s_y, s_z are regarded as three independent variables. The second is the equation of the tangent plane to the rat surface. In particular, for $s_y = 0$ equation (99.8) gives the two equations

$$\frac{s_x}{s_z}=\sqrt{\frac{\varepsilon^{(z)}\left(\varepsilon^{(y)}-\varepsilon^{(x)}\right)}{\varepsilon^{(x)}\left(\varepsilon^{(z)}-\varepsilon^{(y)}\right)}},\qquad \frac{s_x}{s_z}=\sqrt{\frac{\varepsilon^{(x)}\left(\varepsilon^{(y)}-\varepsilon^{(x)}\right)}{\varepsilon^{(z)}\left(\varepsilon^{(z)}-\varepsilon^{(y)}\right)}},$$

which determine the directions of the extreme rays (respectively Oa and Ob in Fig. 55) in the section by the xz-plane. The former is along the binormal (cf. (99.6)), which is perpendicular to the tangent ab.

Similar results hold for the wave vectors corresponding to a given ray vector. The vector s along the biradial corresponds to an infinity of wave vectors, whose directions occupy the cone of external conical refraction. In Fig. 55 the triangle $Oa'b'$ is the section of this cone by the

xz-plane. The corresponding formulae are again obtained by substituting $\mathbf{n}$ for $\mathbf{s}$ and $1/\varepsilon$ for ε in the formulae (99.8), and are

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon^{(y)}\left(\varepsilon^{(z)}-\varepsilon^{(x)}\right)n_y^2+\left[n_x\sqrt{\left(\varepsilon^{(z)}-\varepsilon^{(y)}\right)}-n_z\sqrt{\left(\varepsilon^{(y)}-\varepsilon^{(x)}\right)}\right]\times \\ \times\left[n_x\varepsilon^{(x)}\sqrt{\left(\varepsilon^{(z)}-\varepsilon^{(y)}\right)}-n_z\varepsilon^{(z)}\sqrt{\left(\varepsilon^{(y)}-\varepsilon^{(x)}\right)}\right]=0 \\ n_x\sqrt{\left(\varepsilon^{(y)}-\varepsilon^{(x)}\right)}+n_z\sqrt{\left(\varepsilon^{(z)}-\varepsilon^{(y)}\right)}=\sqrt{\left[\varepsilon^{(y)}\left(\varepsilon^{(z)}-\varepsilon^{(x)}\right)\right]}\,. \end{aligned}\right\} \tag{99.9}$$

In observations of the internal conical refraction † we can use a flat plate cut perpendicular to the binormal (Fig. 56). The surface of the plate is covered by a diaphragm of small aperture, which selects a narrow beam from a plane light wave (i.e. one whose wave vector is in a definite direction) incident on the plate. The wave vector in the wave transmitted into the plate is in the direction of the binormal, and so the rays are on the cone of internal refraction. The wave vector in the wave leaving the other side of the plate is the same as in the incident wave, and so the rays are on a circular cylinder.

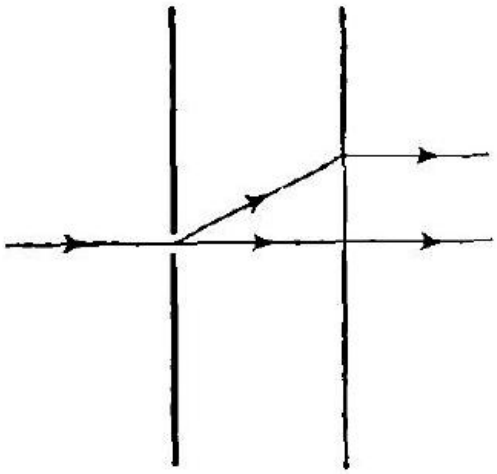


Fig. 56

To observe the external conical refraction, the plate must be cut perpendicular to the biradial, and both its surfaces must be covered by diaphragms having small apertures in exactly opposite positions. When the plate is illuminated by a convergent beam (i.e. one containing rays with all possible values of $\mathbf{n}$), the diaphragms admit to the plate rays with $\mathbf{s}$ along the biradial, and therefore with directions of $\mathbf{n}$ occupying the surface of the cone of external conical refraction. The light leaving the second aperture is therefore on a conical surface, although this does not exactly coincide with the cone of external refraction, on account of the refraction on leaving the plate.

The laws of refraction at the surface of a biaxial crystal for an arbitrary direction of incidence are extremely complex, and we shall not pause to discuss them here, ‡ but only mention that, unlike what happens for a uniaxial crystal, both refracted waves are "extraordinary" and the rays of neither lie in the plane of incidence.

As specified in §97, we are describing the optics of transparent crystals, but we may note here that there is a property of biaxial crystals that may occur when absorption is taken into account.

[0]† We shall describe only the principle of the experiment.

‡ A detailed account of the calculations may be found in the article by G. Szivessy, Handbuch der Physik, vol.XX, Chapter 11, Springer, Berlin, 1928.

Let us consider a homogeneous plane wave propagated in the crystal, in which $\mathbf{n}$ is a complex vector but its real and imaginary parts are in the same direction: $\mathbf{n} = nv$, where v is a real unit vector, $n = n(\omega)$ a complex quantity. For a given v, the dispersion equation (97.21) can be expanded as

$$n^{-4} - n^{-2}(\eta_{11} + \eta_{22}) + \eta_{11}\eta_{22} - \eta_{12}^2 = 0$$

where $\eta_{ik} \equiv \varepsilon^{-1}{}_{ik}$, and 1 and 2 are tensor suffixes in the plane perpendicular to $\boldsymbol{v}$. This equation quadratic in n^{-2} has a multiple root if

$$\eta_{22} - \eta_{11} = \pm 2i\eta_{12}; \tag{99.10}$$

then $n^{-2} = \frac{1}{2}(\eta_{11} + \eta_{22})$. When absorption is present, the tensor $\eta_{ik} = \eta_{ik}' + \eta_{ik}''$ is complex.

In biaxial crystals, the tensor ellipsoids of η_{ik}' and η_{ik}'' have three unequal axes; the ratios of the axes are different for the two tensors (and so are their directions, in triclinic and monoclinic crystals). Under these conditions, the two-dimensional tensors $\eta_{\alpha\beta}'$ and $\eta_{\alpha\beta}''$ cannot in general be simultaneously brought to diagonal form. The angle ϑ between the principal axes of the two tensors is a function of two independent variables, the angles which specify the direction of v. For a given frequency ω, therefore, there can exist a oneparameter set of directions of v for which $\vartheta = \frac{1}{4}\pi$. With this value of ϑ, the imaginary part of the complex equation (99.10) is satisfied identically; the real part is

$$\eta_2' - \eta_1' = \mp(\eta_2'' - \eta_1''), \tag{99.11}$$

where the suffixes 1 and 2 denote the principal values of the tensors concerned. † For any choice of the x_1 and x_2 axes, equations (97.21) now give

$$D_2/D_1 = (\eta_{22} - \eta_{11})/2\eta_{12} = \pm i$$

the two signs on the right corresponding to those in (99.10). Thus the conditions $\vartheta = \frac{1}{4}\pi$ and (99.11) together determine, for each value of ω, a particular direction of v in which only a wave with circular polarization of one sign, left or right according to the sign for which (99.10) is satisfied, can be propagated (W. Voigt, 1902). This direction in the crystal is called the singular optical axis or the circular optical axis.

In accordance with the general theory of linear differential equations, the second independent solution of the field equations then contains, not only the exponential factor $e^{\mathrm{inv}\cdot\mathbf{r}}$ (which includes the damping), but also the factor $a + bv\cdot\mathbf{r}$ linear in the coordinates ‡ The polarization of this wave varies along the ray. but ultimately, as $v\cdot\mathbf{r}$ increases, a circular polarization is established similar to that in the first wave, as is obvious if we note that in the limit concerned the substitution of the solution in the field equations involves differentiating only the exponential factor, and the difference between the two solutions then disappears.

We should again emphasize the difference between the singular axis and the case where the dispersion equation necessarily has a double root because of the symmetry of the crystal. For light propagated along the optical axis of a uniaxial crystal, the tensor $\eta_{\alpha\beta}$ has

the form $\eta\delta_{\alpha\beta}$, and the condition (99.10) is satisfied identically. Equations (97.21) then allow two independent solutions with different polarizations.

[0]† This is easily proved by taking the x_1 and x_2 axes along the principal axes of the tensor $\eta_{\alpha\beta}$ ' and expressing the components of $\eta_{\alpha\beta}''$ in terms of its principal values.

‡ This solution has to be taken into account. for example, in problems of the reflection and refraction of light propagated along the singular axis.

12.3.5 §100. Double refraction in an electric field

An isotropic body becomes optically anisotropic when placed in a static electric field. This anisotropy may be regarded as the result of a change in the permittivity due to the static field. Although this change is relatively very slight, it is important here because it leads to a qualitative change in the optical properties of bodies.

In this section we denote by $\mathbf{E}$ the static electric field in the body, † and expand the dielectric tensor ε_{ik} in powers of $\mathbf{E}$. In an isotropic body in the zero-order approximation, we have $\varepsilon_{ik} = \varepsilon^{(0)}\delta_{ik}$. There can be no terms in ε_{ik} which are of the first order in the field, since in an isotropic body there is no constant vector with which a tensor of rank two linear in $\mathbf{E}$ could be constructed. The next terms in the expansion of ε_{ik} must therefore be quadratic in the field. From the components of the vector $\mathbf{E}$ we can form two symmetrical tensors of rank two, $E^2\delta_{ik}$ and E_iE_k. The former does not alter the symmetry of the tensor $\varepsilon^{(0)}\delta_{ik}$, and the addition of it amounts to a small correction in the scalar constant $\varepsilon^{(0)}$, which evidently does not result in optical anisotropy and is therefore of no interest. Thus we arrive at the following form of the dielectric tensor as a function of the field:

$$\varepsilon_{ik} = \varepsilon^{(0)}\delta_{ik} + \alpha E_iE_k, \tag{100.1}$$

where α is a scalar constant.

One of the principal axes of this tensor coincides with the direction of the electric field, and the corresponding principal value is

$$\varepsilon_{\parallel} = \varepsilon^{(0)} + \alpha E^2. \tag{100.2}$$

The other two principal values are both equal to

$$\varepsilon_{\perp} = \varepsilon^{(0)}. \tag{100.3}$$

and the position of the corresponding principal axes in a plane perpendicular to the field is arbitrary. Thus an isotropic body in an electric field behaves optically as a uniaxial crystal (the Kerr effect).

The change in optical symmetry in an electric field may occur in a crystal also (for example, an optically uniaxial crystal may become biaxial, and a cubic crystal may cease to be optically isotropic), and here the effect may be of the first order in the field. This linear effect corresponds to a dielectric tensor of the form

$$\varepsilon_{ik} = \varepsilon_{ik}{}^{(0)} + \alpha_{ikl}E_l, \tag{100.4}$$

Where the coefficients α_{ikl} form a tensor of rank three symmetrical in the suffixes i and k. The symmetry of this tensor is the same as that of the piezoelectric tensor. The effect in question therefore occurs in the twenty crystal classes which admit piezoelectricity.

12.3.6 §101. Magnetic-optical effects

In the presence of a static magnetic field $\mathbf{H}$. ‡ the tensor $\varepsilon_{ik}(\omega;\mathbf{H})$ is no longer

symmetrical The generalized principle of symmetry of the kinetic coefficients relates the components ε_{ik} and ε_{ki} in different fields:

$$\varepsilon_{ik}(\mathbf{H}) = \varepsilon_{kl}(-\mathbf{H}). \tag{101.1}$$

[0]† Not to be confused with the weak variable electric field of the wave.

‡ Not to be confused with the weak variable field of the electromagnetic wave.

The condition that absorption be absent requires that the tensor should be Hermitian:

$$\varepsilon_{ik} = \varepsilon_{ki}^*, \tag{101.2}$$

as is seen from (96.5), but not that it should be real. Equation (101.2) implies only that the real and imaginary parts of ε_{ik} must be respectively symmetrical and antisymmetrical:

$$\varepsilon_{ik}{}' = \varepsilon_{ki}{}', \quad \varepsilon_{ik}{}'' = -\varepsilon_{ki}{}'' \tag{101.3}$$

Using (101.1), we have

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon'_{ik}(\mathbf{H}) = \varepsilon'_{ki}(\mathbf{H}) = \varepsilon'_{ik}(-\mathbf{H}) \\ \varepsilon''_{ik}(\mathbf{H}) = -\varepsilon''_{ki}(\mathbf{H}) = -\varepsilon''_{ik}(-\mathbf{H}) \end{aligned}\right\} \tag{101.4}$$

i.e. in a non-absorbing medium $\varepsilon_{ik}{}'$ is an even function of $\mathbf{H}$, and $\varepsilon_{ik}{}''$ an odd function. The inverse tensor ${\varepsilon^{-1}}_{ik}$ evidently has the same symmetry properties, and is more convenient for use in the following calculations. To simplify the notation we shall write †

$${\varepsilon^{-1}}_{ik} = \eta_{ik} = \eta_{ik}{}' + i\eta_{ik}{}'', \tag{101.5}$$

as already used above.

Any antisymmetrical tensor of rank two is equivalent (dual) to some axial vector; let the vector corresponding to the tensor $\eta_{ik}{}''$ be $\mathbf{G}$. Using the antisymmetrical unit tensor e_{ik}, we can write the relation between the components $\eta_{ik}{}''$ and G_i as

$$\eta_{ik}{}'' = e_{ikl}G_l, \tag{101.6}$$

or, in components, $\eta_{xy}{}'' = G_z, \eta_{zx}{}'' = G_y, \eta_{yz}{}'' = G_x$. The relation $E_i = \eta_{ik}D_k$ between the electric field and induction becomes

$$E_i = (\eta'_{ik} + ie_{ikl}G_l)\, D_k = \eta'_{ik}D_k + i(\mathbf{D} \times \mathbf{G})_i \tag{101.7}$$

There is a similar linear relation

$$D_i = \varepsilon_{ik}{}'E_k + i(\mathbf{E} \times \mathbf{g})_i. \tag{101.8}$$

The connection between the coefficients in (101.7) and (101.8) is given by

$$\eta'_{ik} = \frac{1}{|\varepsilon|}\left\{{\varepsilon'^{-1}}_{ik}\,|\varepsilon'| - g_i g_k\right\}, \quad G_i = -\frac{1}{|\varepsilon|}\varepsilon'_{ik}g_k \tag{101.9}$$

where $|\varepsilon|$ and $|\varepsilon'|$ are the determinants of the tensors ε_{ik} and $\varepsilon_{ik}{}'$; cf. §22, Problem. A medium in which the relation between $\mathbf{E}$ and $\mathbf{D}$ is of this form is said to be gyrotropic. The vector $\mathbf{g}$ is called the gyration vector, and $\mathbf{G}$ the optical activity vector.

We shall give a general discussion of the nature of waves propagated in an arbitrary gyrotropic medium, assumed anisotropic, with no restriction on the magnitude of the magnetic field. †

We take the direction of the wave vector as the z-axis. Then equations (97.21) become

$$\left(\eta_{\alpha\beta} - \frac{1}{n^2}\delta_{\alpha\beta}\right) D_\beta = \left(\eta_{\alpha\beta} + i\eta_{\alpha\beta}{}'' - \frac{1}{n^2}\delta_{\alpha\beta}\right) D_\beta = 0 \tag{101.10}$$

where the suffixes α, β take the values x, y. The directions of the x and y axes are taken along the principal axes of the two-dimensional tensor $\eta_{\alpha\beta}$; and we denote the corresponding principal values of this tensor by $1/{n_{01}}^2$ and $1/{n_{02}}^2$. Then the equations become

[0] † Of course, $\eta_{ik}{}'$ and $\eta_{ik}{}''$ are not the tensors inverse to $\varepsilon_{ik}{}'$ and $\varepsilon_{ik}{}''$.

$$\left.\begin{aligned}\left(\tfrac{1}{n_{01}^2}-\tfrac{1}{n^2}\right)D_x+iG_zD_y=0\\ -iG_zD_x+\left(\tfrac{1}{n_{02}^2}-\tfrac{1}{n^2}\right)D_y=0\end{aligned}\right\} \tag{101.11}$$

The condition that the determinant of these equations vanishes gives an equation quadratic in n^2 :

$$\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n_{01}^2}\right)\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n_{02}^2}\right)=G_z^2 \tag{101.12}$$

whose roots give the two values of n for a given direction of $\mathbf{n}$‡

$$\frac{1}{n^2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n_{01}^2}+\frac{1}{n_{02}^2}\right)\pm\sqrt{\left[\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n_{01}^2}-\frac{1}{n_{02}^2}\right)^2+G_z^2\right]}. \tag{101.13}$$

Substituting these values in equations (101.11), we find the corresponding ratios D_y/D_x :

$$\frac{D_y}{D_x}=\frac{i}{G_z}\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n_{01}^2}-\frac{1}{n_{02}^2}\right)\mp\sqrt{\left[\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n_{01}^2}-\frac{1}{n_{02}^2}\right)^2+G_z^2\right]}\right\}. \tag{101.14}$$

The purely imaginary value of the ratio D_y/D_x signifies that the waves are elliptically polarized, and the principal axes of the ellipses are the x and y axes. The product of the two values of the ratio is easily seen to be unity. Thus, if in one wave $D_y = i\rho D_x$, where the real quantity ρ is the ratio of the axes of the polarization ellipse, then in the other wave $D_y = -iD_x/\rho$. This means that the polarization ellipses of the two waves have the same axis ratio, but are rotated 90° relative to each other. and the directions of rotation in them are opposite (Fig. 57, p. 350).

If the vectors $\mathbf{D}$ in the two waves are denoted by $\mathbf{D}_1$ and $\mathbf{D}_2$, these relations may be written $\mathbf{D}_1\cdot\mathbf{D}_2{}^* = D_{1x}D_{2x}{}^* + D_{1y}D_{2y}{}^* = 0$. This is a general property of the eigenvectors on reduction to diagonal form of an Hermitian tensor (in this case, the tensor $\eta_{\alpha\beta}$).

---

[0]† The medium is again assumed non-magnetic with respect to the variable field of the electromagnetic wave, i.e. $\mu_{ik}(\omega)=\delta_{ik}$. This, however, does not exclude a static field magnetizing the medium (i.e. the static permeability may differ from unity).

The properties derived for $\varepsilon_{ik}(\omega)$ are equally applicable to the tensor $\mu_{ik}(\omega)$ in a frequency range where the dispersion of the magnetic permeability is of importance,

‡ When there is no field, $\mathbf{G}=0$ and $n=n_{01}$ or n_{02}. It should be remembered, however, that when the field is present n_{01} and n_{02} in equation (101.12) are not in general the values of n for $\mathbf{H}=\mathbf{0}$, since not only $\mathbf{G}$ but also the components $\eta_{ik}{}'$ depend on the field.

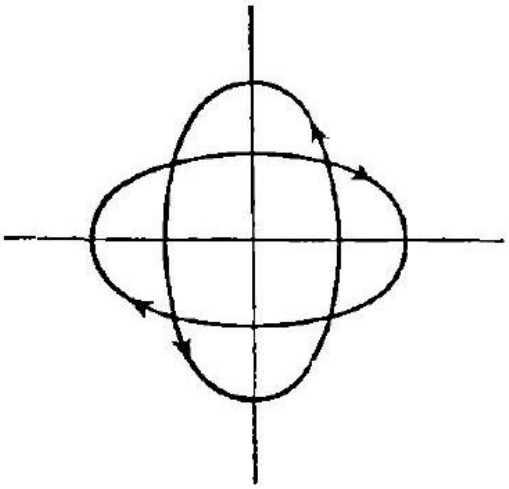


Fig. 57

The components G_i and ${\eta_{ik}}'$ are functions of the magnetic field. If, as usually happens, the magnetic field is fairly weak, we can expand in powers of the field. The vector $\mathbf{G}$ is zero in the absence of the field, and so for a weak field we can put

$$G_i = f_{ik}H_k, \tag{101.15}$$

where f_{ik} is a tensor of rank two, in general not symmetrical. This dependence is in accordance with the general rule whereby, in a transparent medium, the components of the antisymmetrical tensor ${\eta_{ik}}''$ (and ${\varepsilon_{ik}}''$) must be odd functions of $\mathbf{H}$. The symmetrical tensor components ${\eta_{ik}}'$ are even functions of the magnetic field. The first correction terms (which do not appear in the absence of the field) in ${\eta_{ik}}'$ are therefore quadratic in the neld. When second-order quantities are neglected, formulae (101.9) reduce to the simpler form

$${\eta_{ik}}' = {\varepsilon'^{-1}}_{ik}.$$

In the general case of an arbitrarily directed wave vector, the magnetic field has little effect on the propagation of light in the crystal, causing only a slight ellipticity of the oscillations, with an axis ratio of the polarization ellipse which is small (of the first order with respect to the field).

The directions of the optical axes (and neighbouring directions) form an exception. The two values of n are equal in the absence of the field. The roots of equation (101.12) then differ from these values by first-order quantities, † and the resulting effects are analogous to those in isotropic bodies, which we shall now consider.

The magnetic-optical effect in isotropic bodies (and in crystals of the cubic system) is of particular interest on account of its nature and its comparatively large magnitude.

Neglecting second-order quantities, we have ${\eta_{ik}}' = \varepsilon^{-1}\delta_{ik}$, where ε is the permittivity of the isotropic medium in the absence of the magnetic field. The relation between $\mathbf{D}$ and $\mathbf{E}$ is

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon}\mathbf{D} + i\mathbf{D}\times\mathbf{G}, \quad \mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E} + i\mathbf{E}\times\mathbf{g}; \tag{101.16}$$

in the same approximation, the vectors $\mathbf{g}$ and $\mathbf{G}$ are related by

$$\mathbf{G} = -\mathbf{g}/\varepsilon^2 \tag{101.17}$$

The dependence of $\mathbf{g}$ (or $\mathbf{G}$) on the external field reduces in an isotropic medium to simple proportionality:

$$\mathbf{g} = f\mathbf{H}, \tag{101.18}$$

in which the scalar constant f may be either positive or negative.
In equation (101.12) we now have $n_{01} = n_{02} \equiv n_0 = \sqrt{\varepsilon}$, the refractive index in the absence of the field. Hence $1/n^2 = \mp G_z + 1/{n_0}^2$ or, to the same accuracy,

$$n_{\mp}^2 = n_0^2 \pm n_0^4 G_z = n_0^2 \mp g_z. \tag{101.19}$$

Since the z-axis is in the direction of $\mathbf{n}$, we can write this formula, to the same accuracy, in the vector form

$$\left(\mathbf{n} \pm \frac{1}{2n_0}\mathbf{g}\right)^2 = n_0^2. \tag{101.20}$$

Hence we see that the wave-vector surface in this case consists of two spheres with radius n_0, whose centres are at distances $\pm g/2n_0$ from the origin in the direction of $\mathbf{G}$.

A different polarization of the wave corresponds to each of the two values of n : we have

$$D_x = \mp i D_y, \tag{101.21}$$

where the signs correspond to those in (101.19). The equality of the magnitudes of D_x and D_y, and their phase difference of $\mp\frac{1}{2}\pi$, signify a circular polarization of the wave, with the direction of rotation of the vector $\mathbf{D}$ respectively anticlockwise and clockwise looking along the wave vector (or, to use the customary expressions, with right-hand and left-hand polarization respectively).

The difference between the refractive indices in the left-hand and right-hand polarized waves has the result that two circularly polarized refracted waves are formed at the surface of a gyrotropic body. This phenomenon is called double circular refraction.

Let a linearly polarized plane wave be incident normally on a slab of thickness l. We take the direction of incidence as the z-axis, and that of the vector $\mathbf{E}(=\mathbf{D})$ in the incident wave as the x-axis. The linear oscillation can be represented as the sum of two circular oscillations with opposite directions of rotation, which are then propagated through the slab with different wave numbers $k_+ = \omega n_+/c$. Arbitrarily taking the wave amplitude as unity. we have $D_x = \frac{1}{2}\left[\exp\left(ik_+ z\right) + \exp\left(ik_- z\right)\right], D_y = \frac{1}{2}i\left[-\exp\left(ik_+ z\right) + \exp\left(ik_- z\right)\right]$, or, putting $k = \frac{1}{2}\left(k_+ + k_-\right)$and $\kappa = \frac{1}{2}\left(k_+ - k_-\right)$,

$$D_x = \frac{1}{2}e^{ikz}\left(e^{i\kappa z} + e^{-i\kappa z}\right) = e^{ikz}\cos\kappa z,$$
$$D_y = \frac{1}{2}ie^{ikz}\left(-e^{i\kappa z} + e^{-i\kappa z}\right) = e^{ikz}\sin\kappa z.$$

When the wave leaves the slab we have

$$D_y/D_x = \tan\kappa l = \tan\left(l\omega g/2cn_0\right). \tag{101.22}$$

Since this ratio is real, the wave remains linearly polarized, but the direction of polarization is changed (the Faraday effect). The angle through which the plane of polarization is rotated is proportional to the path traversed by the wave; the angle per unit length in the direction of the wave vector is

$$(\omega g/2cn_0)\cos\theta, \tag{101.23}$$

where θ is the angle between $\mathbf{n}$ and $\mathbf{g}$.

It should be noticed that, when the direction of the magnetic field is given, the direction of rotation of the plane of polarization (with respect to the direction of **n**) is reversed (lefthand becoming right-hand, and vice versa) when the sign of **n** is changed. If the ray traverses the same path twice in opposite directions, the total rotation of the plane of polarization is therefore double the value resulting from a single traversal.

For $\theta = \frac{1}{2}\pi$ (the wave vector perpendicular to the magnetic field), the effect linear in the field given by formulae (101.19) disappears, in accordance with the general rule stated above that only the component of **g** in the direction of **n** affects the propagation of light. For angles θ close to $\frac{1}{2}\pi$ we must therefore take account of the terms proportional to the square of the field, and in particular these terms must be included in the tensor η_{ik}'. By virtue of the axial symmetry about the direction of the field, two principal values of the symmetrical tensor η_{ik}' are equal, as for a uniaxial crystal. We shall take the x-axis in the direction of the field, and denote by $\eta_{\|}$and $\eta_{\perp}$ the principal values of η_{ik}' in the directions parallel and perpendicular to the magnetic field. The difference $\eta_{11} - \eta_1$ is proportional to H^2.

Let us consider the purely quadratic effect (called the Cotton-Mouton effect) which occurs when **n** and **g** are perpendicular. In equations (101.11) and (101.12) we have $G_z = 0$, and ${1/n_{01}}^2, {1/n_{02}}^2$ are respectively $\eta_{\|}, \eta_{\perp}$. Thus in one wave we have $1/n^2 = \eta_{\|}, D_y = 0$; this wave is linearly polarized, and the vector **D** is parallel to the x-axis. In the other wave $1/n^2 = \eta_{\perp}, D_x = 0$, i.e. **D** is parallel to the y-axis. Let linearly polarized light be incident normally on a slab in a magnetic field parallel to its surface. The two components in the slab (with vectors **D** in the xz and yz planes) are propagated with different values of n. Consequently the light leaving the slab is elliptically polarized.

Lastly, let us consider one other peculiar effect that occurs in a medium whose optical activity vector (101.15) is linear in the (static) magnetic field, namely the magnetization of a non-magnetic transparent medium by a variable electric field (L. P. Pitaevski, 1960).

We start from the general formula (31.6)

$$-\mathbf{B}/4\pi = \partial\tilde{U}/\partial\mathbf{H}$$

and take account of the contribution to $\widetilde{U}$ from the variable electric field, which is given by (80.11). According to the theorem of small increments to thermodynamic quantities, the change $\delta\tilde{U}$ in this contribution when the permittivity changes by a small amount is (expressed in terms of the appropriate variables) the same as the change $\delta\tilde{F}$ in the free energy. For the latter we can use formula (14.1), with an obvious generalization to anisotropic media; the fact that this formula remains valid for a variable field (not a static field as in §14) in a dispersive transparent medium has been mentioned in §81.t We thus have

$$\begin{aligned}\delta\widetilde{U} &= -\delta\varepsilon_{ik}E_iE_k^*/16\pi \\ &= \delta\eta_{ik}D_iD_k^*/16\pi\end{aligned} \tag{101.24}$$

the extra factor $\frac{1}{2}$ takes account of the complex representation of **E**. The second equation (101.24) follows because the definition $\varepsilon_{il}\eta_{lk} = \delta_{ik}$ gives $\varepsilon_{il}\delta\eta_{lk} = -\eta_{lk}\delta\varepsilon_{il}$ · ‡

Now regarding the permittivity variation as the result of changing the static magnetic field, we write

[0]† The tilde above the symbol U refers here to the magnetic variables, not the electric ones. To simplify the notation, we omit the sign of time averaging from $\tilde{U}$.

‡ To derive (101.24) directly. it would be necessary to consider a dielectric-filled resonator instead of the oscillatory circuit discussed in §81. By calculating the change in frequency due to a small change in the permittivity (cf. §90, Problem 4) and using the adiabatic invariant theorem, we find the change in the resonator energy.

$$-\frac{\mathbf{B}}{4\pi} = \frac{\partial \tilde{U}_0}{\partial \mathbf{H}} + \frac{\partial \eta_{ik}}{\partial \mathbf{H}} \frac{D_i D_k{}^*}{16\pi},$$

where $\tilde{U}_0$ refers to the medium in the absence of the electric field. If the medium itself is non-magnetic ($\mu = 1$), then $\partial \hat{U}_\mathbf{0}/\partial \mathbf{H} = -\mathbf{H}/4\pi$. The magnetization $\mathbf{M} = (\mathbf{B} - \mathbf{H})/4\pi$ is then

$$\mathbf{M} = -\frac{\partial \eta_{ik}}{\partial \mathbf{H}} \frac{D_i D_k^*}{16\pi}.$$

In the absence of the external magnetic field, the derivative $\partial \eta_{ik}/\partial \mathbf{H}$ is to be taken at $\mathbf{H} = 0$. With η_{ik} from (101.6), and (101.15), we obtain finally the following expression for the magnetization due to the variable electric field:

$$M_l = -(i/16\pi) e_{ikm} f_{ml} D_i D_k^*; \tag{101.25}$$

this is quadratic in the electric field. If the medium is isotropic in the absence of the magnetic field, then $f_{ml} = f\delta_{ml}$ and

$$\mathbf{M} = -if\mathbf{D} \times \mathbf{D}^*/16\pi \tag{101.26}$$

For a linearly polarized field, the vector $\mathbf{D}$ can differ from a real quantity only by a phase factor; then $\mathbf{D}$ and $\mathbf{D}^*$ are collinear, and (101.25) or (101.26) is zero. There is thus a magnetization only in the presence of a rotating electric field. This effect is in a sense the opposite of the rotation of the polarization plane in a magnetic field, and is expressed in terms of the same tensor f_{ik}; it is therefore called the inverse Faraday effect.

PROBLEMS

Problem 1. Show by direct calculation that the direction of the (time) averaged Poynting vector in a wave propagated in a transparent gyrotropic medium is the same as that of the group velocity.

Solution. According to (59.9a),

$$\overline{\mathbf{S}} = c \operatorname{re} \mathbf{E}^* \times \mathbf{H}/8\pi,$$

$\mathbf{E}$ and $\mathbf{H}$ being expressed in complex form. Proceeding as in the derivation of (97.16). we multiply equations (97.15) by $\mathbf{E}^*$ and $\mathbf{H}^*$ respectively.

$$\mathbf{E}^* \cdot \delta\mathbf{D} = \mathbf{H}^* \cdot \delta\mathbf{H} + (\mathbf{E}^* \times \mathbf{H}) \cdot \delta\mathbf{n}$$
$$\mathbf{H}^* \cdot \delta\mathbf{H} = \mathbf{D}^* \cdot \delta\mathbf{E} + (\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) \cdot \delta\mathbf{n}$$

Adding these and noting that $\mathbf{E}^* \cdot \delta\mathbf{D} = \mathbf{D}^* \cdot \delta\mathbf{E}$, since the tensor ε_{ik} is Hermitian. we find the required result:

$$\delta\mathbf{n} \cdot \mathbf{re}\,(\mathbf{E}^* \times \mathbf{H}) = 0.$$

Problem 2. Determine the directions of the rays when a ray incident from a vacuum is refracted at the surface of an isotropic body in a magnetic field.

Solution. The direction of the ray vector s is given by the normal to the wave-vector surface. Differentiating the left-hand side of equation (101.20) with respect to the components of the vector n, we find that s is proportional to $n \pm g/2n_0$. The square of the latter expression is ${n_0}^2$, and so the unit vector in the direction of the ray is given by

$$\frac{\mathbf{s}}{s} = \frac{1}{n_0}\left(\mathbf{n} \pm \frac{1}{2n_0}\mathbf{g}\right). \tag{1}$$

Let the angle of incidence be θ. The refracted rays do not in general lie in the plane of incidence, and ther directions are given by the angle θ' to the normal to the surface and the azimuth ϕ' measured from the plane of
incidence. We take the latter as the xz-plane, with the z-axis perpendicular to the surface. The components n_x and n_y of the wave vector are unaltered by refraction. In the incident ray they are $n_x = \sin\theta, n_y = 0$. Substituting these values in (1), we find the x and y components of the unit vector s/s, which give immediately the directions of the refracted rays:

$$\sin\theta'\cos\phi' = \frac{1}{n_0}\sin\theta \pm \frac{1}{2n_0^2}g_{x'}$$
$$\sin\theta'\sin\phi' = \pm\frac{1}{2n_0^2}g_{y'}$$

When the angle of incidence is not small, the azimuth ϕ' is small, and we can write

$$\phi' = \pm g_y/2n_0\sin\theta$$
$$\sin\theta' = \frac{\sin\theta}{n_0} \pm \frac{g_x}{2n_0^2}$$

For normal incidence ($\theta = 0$) we take the xz-plane through the vector g; then $\phi' = 0$, and $\theta' \cong \sin\theta' = \pm g_x/2n_0^2$. Although this formula does not involve g_z, it is not valid if $g_z = 0$, since the approximation linear in the field is inadequate when $\mathbf{n}$ and $\mathbf{g}$ are perpendicular.

Problem 3. Determine the polarization of the reflected light when a linearly polarized wave is incident normally from a vacuum on the surface of a body rendered anisotropic by a magnetic field.

Solution. For normal incidence the direction of the wave vector is unaltered by the passage of the wave into the medium. In all three waves (incident, refracted and reflected) the vectors $\mathbf{H}$ are therefore parallel to the surface (the xy-plane). The electric vector $\mathbf{E}$ in the incident and reflected waves is also parallel to the xy-plane; in the refracted wave $E_z \neq 0$, but the relation between the x and y components of $\mathbf{E}$ and $\mathbf{H}$ is the same as in an isotropic body ($H_x = -nE_y, H_y = nE_x$). If the polarization of the incident wave is the same as that of one of the two types of wave which can be propagated in the anisotropic (refracting) medium concerned, with the given direction of n, then there is only one refracted wave, which has this polarization. The problem is then formally identical with that of reflection from an isotropic body, and the fields $\mathbf{E}_1$ and $\mathbf{E}_0$ in the reflected and incident waves are related by

$$\mathbf{E}_1 = (1-n)\mathbf{E}_0/(1+n), \tag{1}$$

where n is the refractive index corresponding to this polarization.
The linear polarization can be regarded as resulting from the superposition of two circular polarizations with opposite directions of rotation. If $\mathbf{E}_0$ in the incident wave is in the x-direction, we put $\mathbf{E}_0 = \mathbf{E}_0{}^+ + \mathbf{E}_0{}^-$, where $E_0{}^+{}_x = iE_0{}^+{}_y = \frac{1}{2}E_0, E_0{}^-{}_x = -iE_0{}^-{}_y = \frac{1}{2}E_0$. Using formula (1) for each wave, with $n_\pm$given by (101.19), we obtain

$$E_{1x} = \frac{1}{2}E_0\left[\frac{1-n_+}{1+n_+} + \frac{1-n_-}{1+n_-}\right] \cong E_0\frac{1-n_0}{1+n_0}$$
$$E_{1y} = \frac{1}{2}iE_0\left[\frac{1-n_-}{1+n_-} - \frac{1-n_+}{1+n_+}\right] \cong iE_0\frac{g\cos\theta}{n_0\left(1+n_0\right)^2}$$

where θ is the angle between the direction of incidence and the vector g . Hence we see that the reflected wave is elliptically polarized, the major axis of the ellipse being in the x-direction, and the ratio of the minor and major axes being $(g\cos\theta)/n_0\left(n_0{}^2-1\right)$.

Problem 4. Determine the limiting form of the frequency dependence of the gyration vector at high frequencies.

Solution. The calculations are similar to those in §78, except that the electron equation of motion must include the Lorentz force due to the static external magnetic field **H** :

$$m\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}'}{\mathrm{d}t} = e\mathbf{E}_0 e^{-i\omega t} + e\mathbf{v}' \times \mathbf{H}/c$$

where $e = -|e|$ is the electron charge. If $\omega \gg |e|H, mc$, this equation can be solved by successive approximations. As far as terms of the first order in H we have

$$\mathbf{v}' = \bar{m}^{ie}_{m\omega}\mathbf{E} - \frac{e^2}{m^2\omega^2 c}\mathbf{E} \times \mathbf{H},$$

and the induction is then

$$\mathbf{D} = \varepsilon(\omega)\mathbf{E} + \mathbf{i}f(\omega)\mathbf{E} \times \mathbf{H},$$

where $\varepsilon(\omega)$ is given by (781) and $f(\omega) = -4\pi N e^3/\mathrm{cm}^2\omega^3 = (|e|/2mc)\mathrm{d}\varepsilon/\mathrm{d}\omega$ (H. Becquerel, 1897).

12.3.7 §102. Mechanical-optical effects

Besides the electric-optical and magnetic-optical effects, there are other ways in which the optical symmetry of a medium can be changed by external agencies. These include, first of all, the effect of elastic deformations on the optical properties of solids. In particular, such deformations may render an isotropic solid body optically anisotropic. Such phenomena are described by the inclusion in $\varepsilon_{ik}(\omega)$ of additional terms proportional to the components of the strain tensor. The corresponding formulae are exactly the same as (16.1) and (16.6) for the static permittivity, except that the coefficients are now functions of frequency. In the deformation of an isotropic body, for example, we have

$$\varepsilon_{ik} = \varepsilon^{(0)}\delta_{ik} + a_1 u_{ik} + a_2 u_{ll}\delta_{ik}. \tag{102.1}$$

The coefficients $a_1(\omega)$ and $a_2(\omega)$ are called elastic-optical constants.
Another case is the occurrence of optical anisotropy in a non-uniformly moving fluid. The corresponding general expression for the dielectric tensor is

$$\varepsilon_{ik} = \varepsilon^{(0)}{}_{ik} + \lambda_1\left(\frac{\partial v_k}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_k}\right) + \frac{1}{2}i\lambda_2\left(\frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{\partial v_i}{\partial x_k}\right), \tag{102.2}$$

and represents the first terms in an expansion of ε_{ik} in powers of the derivatives of the velocity. The condition that absorption be absent (ε_{ik} is Hermitian) means that $\lambda_1(\omega)$ and $\lambda_2(\omega)$ must be real; $\varepsilon^{(0)}(\omega)$ is the permittivity of the fluid at rest. In an incompressible fluid $\partial v_l/\partial x_l \equiv \mathrm{div}\,\mathbf{v} = 0$, and the last two terms in (102.2) give zero on contraction.

To investigate the electromagnetic properties of the moving fluid, we have to combine the formulae (76.9)-(76.11) for the electrodynamics of moving dielectrics (with a velocity **v** that depends on the coordinates) with (102.2). Here, however, the terms which contain both the velocity and its derivatives are to be neglected, as being outside the accuracy of the formulae.

The second and third terms in (102.2) are respectively symmetrical and antisymmetrical in the suffixes i, k. For uniform rotation of the fluid we have $\mathbf{v} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$, where $\boldsymbol{\Omega}$ is the angular velocity of rotation, and the symmetrical term is zero. The antisymmetrical term is $i\lambda_2 e_{ikl}\Omega_1$, so that the medium becomes gyrotropic. with gyration vector

$$\mathbf{g} = \lambda_2\boldsymbol{\Omega}. \tag{102.3}$$

The quantity λ_2 contains contributions from two effects: the dispersion of the permittivity, and the influence of Coriolis forces on it.

In a frame of reference moving with a given element of the fluid, the amplitude $\mathbf{E_0}$ of a monochromatic wave (in the laboratory frame) rotates with angular velocity $-\mathbf{\Omega}$, i.e. becomes a function of time satisfying the equation

$$\partial \mathbf{E}_0/\partial t = -\mathbf{\Omega} \times \mathbf{E}_0.$$

In this sense the wave becomes quasi-monochromatic, and the relation between $\mathbf{D}$ and $\mathbf{E}$ is given by

$$\mathbf{D} = \varepsilon(\omega)\mathbf{E} + i\frac{\mathrm{d}\varepsilon(\omega)}{\mathrm{d}\omega}\frac{\hat{C}\mathbf{E}_0}{\partial t}e^{-i\omega t} \tag{102,4}$$

the derivation is the same as that of (80.10), except that here $f(\omega) = \varepsilon(\omega)$. Substituting the value of $\partial \mathbf{E_0}/\partial t$ and comparing the result with the definition of the gyration vector $\mathbf{g}$ in (101.16), we find that the dispersion makes a contribution $\mathrm{d}\varepsilon^{(0)}/\mathrm{d}\omega$ to λ_2 (M. A. Player, 1976).

If we now put

$$\lambda_2 = \lambda_2^{(C)} + \mathrm{d}\varepsilon^{(O)}/\mathrm{d}\omega, \tag{102,5}$$

then $\lambda_2{}^{(C)}$ is due only to the Coriolis forces, which are linear in $\mathbf{\Omega}$.

In a rotating frame of reference, the Hamiltonian of the system is

$$\hat{\mathscr{H}}' = \hat{\mathscr{H}} - \hat{\mathscr{M}}_{\mathrm{mech}} \cdot \mathbf{\Omega},$$

where $\hat{\mathscr{H}}$ and $\hat{\mathscr{M}}_{\mathrm{mech}}$ are the ordinary operators of the energy and angular momentum of the system (see SP 1, §34); the permittivity of a rotating medium must in principle be calculated from this Hamiltonian. The expression is, however, analogous to the Hamiltonian of a system in a magnetic field, written as far as the terms linear in $\mathbf{H}$:

$$\hat{\mathscr{H}} = \hat{\mathscr{H}}_0 - \mathscr{M} \cdot \mathbf{H},$$

where $\mathscr{M}$ is the magnetic moment operator (see $QM, 8113$). The analogy becomes exact if the contribution to the permittivity in the frequency range considered arises only from the orbital motion of the electrons in the atoms. Then $\mathscr{M} = (e/2mc)\hat{\mathscr{M}}_{\mathrm{mech}}$, where $e = -|e|$ is the electron charge, and the two Hamiltonians differ only in the replacement of Ω by $e\mathrm{H}/2mc$. In this case, therefore, it is clear that

$$\lambda_2^{(c)}(\omega) = 2mcf(\omega)/e, \tag{102.6}$$

where $f(\omega)$ is given by (101.18) (N. B. Baranova and B. Ya. Zel'dovich, 1978) †

The effects due to the coefficient λ_1 are significant in such systems as suspensions and colloidal solutions of anisotropically shaped particles. In this case the effect is due to the orienting of particles suspended in the fluid by the action of the velocity gradients. Since a uniform rotation cannot orient the particles, it follows that in this case $\lambda_2 \ll \lambda_1$ and the last term in (102.2) may be omitted. The effect given by the λ_1 term is called the Maxwell effect.

Lastly, it may be noted that the λ_1 term in (102.2) does not satisfy the generalized principle of symmetry of the kinetic coefficients, which would imply that we have $\varepsilon_{ik}(\omega; \mathbf{v}) = \varepsilon_{ki}(\omega; -\mathbf{v})$, since $\mathbf{v}$ changes sign under time reversal. This is not necessary, however. The reason is that the derivation of the principle presupposes that the processes described by the coefficients in question are the only cause of energy dissipation in the system. In the present case, however, besides the dissipation in the variable electromagnetic field in the wave, there is another cause

of dissipation, which is unrelated to the field. namely the internal friction in the non-uniform fluid stream. As regards the theory of generalized

susceptibilities, the λ_1 term describes the response of the system to a non-linear interaction, the contribution to the induction from the field $\mathbf{E}$ and the velocity gradients jointly. †$\mathbf{A}$ uniform rotation of the whole fluid does not involve any additional dissipation; the λ_2 term in (102.2), which is found even with this kind of rotation, therefore satisfies the symmetry principle: $\varepsilon_{ik}(\omega;\mathbf{\Omega}) = \varepsilon_{ki}(\omega;-\mathbf{\Omega})$.

PROBLEM

Determine the rotation of the plane of polarization for a wave propagated parallel to the axis of a rotating dielectric body.

Solution. The problem amounts to determining the gyration vector, which is the sum of two parts: the contribution (102.3) from the change in the permittivity and its dispersion. and the "kinematic" part due to the presence of the velocity in the relations (76.10), (76.11); the latter part is to be calculated.
In Maxwell's equations

$$\operatorname{curl}\mathbf{E} = i\omega\mathbf{B}/c, \quad \operatorname{curl}\mathbf{H} = -i\omega\mathbf{D}/c, \quad \operatorname{div}\mathbf{B} = 0, \quad \operatorname{div}\mathbf{D} = 0, \tag{1}$$

we express $\mathbf{E}$ and $\mathbf{B}$ in terms of $\mathbf{D}$ and $\mathbf{H}$ according to (76.10) and (76.11) with $\mu = 1$, take the curl of the first equation, and use the remaining equations. The result is

$$\Delta\mathbf{D} + \frac{\varepsilon\omega^2}{c^2}\mathbf{D} + \frac{\varepsilon-1}{c}\operatorname{curl}\operatorname{curl}(\mathbf{v}\times\mathbf{H}) + \frac{i\omega(\varepsilon-1)}{c^2}\operatorname{curl}(\mathbf{D}\times\mathbf{v}) = 0; \tag{2}$$

here we write ε in place of $\varepsilon^{(0)}$ as used in the text of §102. Since all formulae are valid only as far as the first order in v, the higher-order terms are omitted.

The last two terms in (2) give the required effect. We expand them and substitute $v = \Omega\times\mathbf{r}$, obtaining

$$\operatorname{curl}(v\times H) = -H\times\Omega, \quad \operatorname{curl}(D\times v) = D\times\Omega.$$

When these differentiations have been carried out, the coordinate dependence of all remaining quantities reduces to factors $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathrm{r}}$, with $\mathbf{k}\|\Omega$ according to the condition stated. Lastly, since in the zero-order approximation with respect to v we have $\mathbf{H} = c\boldsymbol{k}\times\mathbf{E}/\omega, \boldsymbol{k}^2 = \varepsilon\omega^2/c^2$, equation (2) becomes

$$\triangle\mathbf{D} + \frac{\varepsilon\omega^2}{c^2}\mathbf{D} + 2\mathrm{i}\omega\frac{\varepsilon-1}{c^2}\mathbf{D}\times\mathbf{\Omega} = 0$$

or

$$\left(\frac{1}{n_0^2} - \frac{1}{n^2}\right)\mathrm{D} - \frac{2i(\varepsilon-1)}{\omega\varepsilon^2}\mathrm{D}\times\Omega = 0, \tag{3}$$

where ${n_0}^2 = \varepsilon$ and n is the refractive index in the rotating body. Comparison of (3) with (101.11) and (101.17) shows that the "kinematic" contribution to the gyration vector is $2(\varepsilon-1)\Omega/\omega$(E.Fermi, 1923). The rotation of the plane of polarization of the wave is given by the total vector

[0]† Here it should be emphasized that a non-zero ${\lambda_2}^{(C)}$ may exist even in classical (not quantum) theory. The familiar proposition that, in the classical theory, the thermodynamic properties of bodies are independent of the Coriolis forces in uniform rotation (see SP 1, §34) applies only to the properties in statistical equilibrium. The permittivity when $\omega \neq 0$ relates to non-equilibrium kinetic properties.

$$\mathbf{g} = \left\{ \frac{2(\varepsilon - 1)}{\omega} + \frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}\omega} + \lambda_2{}^{(C)} \right\} \Omega.$$

In the high-frequency limit, when the atomic electrons in the substance may be regarded as free, ε is given by (78.1), the first two terms in the brackets cancelling.

12.4 XII Spatial Dispersion by Landau

12.4.1 §103. Spatial dispersion

So far, in discussing the dielectric properties of matter, we have assumed that the induction $\mathbf{D}(t, \mathbf{r})$ is determined by the electric field $\mathbf{E}(t', \mathbf{r})$ at the same point $\mathbf{r}$ in space, though (in the presence of dispersion) not only at the same time t but at all previous times $t' \leqslant t$. This assumption is not always valid. In general, the value of $\mathbf{D}(t, \mathbf{r})$ depends on those of $\mathbf{E}(t', \mathbf{r}')$ in some region of space about the point $\mathbf{r}$. The linear relation between $\mathbf{D}$ and $\mathbf{E}$ is then written in a form which generalizes (77.3):

$$D_i(t, \mathbf{r}) = E_i(t, \mathbf{r}) + \int_0^\infty \int f_{ik}(\tau; \mathbf{r}, \mathbf{r}') E_k(t - \tau, \mathbf{r}') \, \mathrm{d}V' \mathrm{d}\tau \tag{103.1}$$

here it has been written in the form applicable to an anisotropic medium. This non-local relation is a result of what is called spatial dispersion, in which connection the ordinary dispersion discussed in §77 is called time dispersion or frequency dispersion. For monochromatic field components, whose dependence on t is given by the factor $e^{-i\omega t}$, the relation becomes

$$D_i(\mathbf{r}) = E_i(\mathbf{r}) + \int f_{ik}(\omega; \mathbf{r}, \mathbf{r}') E_k(\mathbf{r}') \, \mathrm{d}V' \tag{103.2}$$

It may be noted immediately that in the majority of cases spatial dispersion is much less important than time dispersion. The reason is that for ordinary dielectrics the kernel f_{ik} of the integral operator decreases considerably even at distances $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ that are large in comparison with the atomic dimensions a. In this chapter we shall consider, as hitherto, macroscopic fields averaged over physically infinitesimal volume elements. These fields must by definition vary only slightly over distances $\sim a$. As a first approximation we can then take $\mathbf{E}(\mathbf{r}') \cong \mathbf{E}(\mathbf{r})$ outside the integration over $\mathrm{d}V'$ in (103.1), and thus return to (77.3). In such cases the spatial dispersion manifests itself only in the form of small corrections. These, however, may lead (as we shall see) to qualitatively new physical phenomena and may therefore be significant.

A different situation may arise in conducting media (metals, electrolyte solutions, or plasmas): the motion of free current-carriers causes non-locality over distances which may be much greater than atomic dimensions. There may then be important spatial dispersion even in the macroscopic theory. †

Another manifestation of spatial dispersion is the Doppler broadening of absorption lines in a gas. If an atom at rest has at the frequency ω_0 an absorption line with negligible width,

[0]† There exist, in principle, other such effects. For instance, in a conducting medium with no centre of symmetry, there can exist in ε_{ik} pseudotensor terms of the form $\delta_{ik}\mathbf{E} \cdot \mathbf{H}$ or $\boldsymbol{H}_i \boldsymbol{E}_k + \boldsymbol{H}_k \boldsymbol{E}_i$, where $\mathbf{E}$ and $\mathbf{H}$ are the static external fields (N. B. Baranova, Yu. V. Bogdanov and B. Ya. Zel'dovich, 1977). It is important to note that these terms, which formally violate the symmetry principle, can occur only in a conducting medium, where the Static electric field causes additional dissipation.

[0]† For an isotropic conducting medium, the conditions for spatial dispersion to be negligible may be different for the transverse and longitudinal permittivities. For the former, the characteristic distance r_0 over which the kernel of the integral in (103.2) is non-zero is the smaller of v/ω and l, where v is the mean velocity of the carriers and l their mean free path. For the longitudinal permittivity, r_0 is the smaller of v/ω and $(lv/\omega)^{\frac{1}{2}}$, the latter being the distance travelled by the carriers by diffusion along the field in a time $\sim 1/\omega$; the diffusion coefficient $D \sim b$. The spatial dispersion is unimportant if $kr_0 \ll 1$.

then for a moving atom this frequency is shifted by the Doppler effect through a distance $\mathbf{k}\cdot\mathbf{v}$, where $\mathbf{v}$ is the velocity of the atom ($\boldsymbol{v} \ll c$). This causes the absorption spectrum of the gas as a whole to contain a line with width $\Delta\omega \sim kv_T$, where v_T is the mean thermal velocity of the atoms. In turn, this broadening means that the permittivity of the gas has an important spatial dispersion when $k \gtrsim |\omega - \omega_0| / v_T$.

The following comment is needed regarding the form in which (103.1) is written. No arguments based on symmetry (in space or time) can exclude the possible electric polarization of a dielectric in a non-uniform variable magnetic field. It may therefore be asked whether a magnetic-field term should be added to the right-hand side of (103.1) or (103.2). This is not necessary, however. The reason is that the fields $\mathbf{E}$ and $\mathbf{B}$ cannot be regarded as completely independent. They are related (in the monochromatic case) by the equation $\operatorname{curl}\mathbf{E} = i\omega\mathbf{B}/c$. By virtue of this equation, we can regard the dependence of $\mathbf{D}$ on $\mathbf{B}$ as a dependence on the spatial derivatives of $\mathbf{E}$, i.e. as one manifestation of nonlocality.

When spatial dispersion is taken into account, it is often appropriate, and does not affect the generality of the theory, to write Maxwell's equations in the form

$$\begin{aligned} \operatorname{curl}\mathbf{E} &= -\tfrac{1}{c}\tfrac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{div}\mathbf{B} = 0, \\ \operatorname{curl}\mathbf{B} &= \tfrac{1}{c}\tfrac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}, \quad \operatorname{div}\mathbf{D} = 0, \end{aligned} \tag{103.4}$$

without using $\mathbf{H}$ in addition to the mean magnetic field $\overline{\mathbf{h}} = \mathbf{B}$. Instead, all terms which result from averaging the microscopic currents are included in the definition of $\mathbf{D}$. The previous separation of the mean current into two parts as in (79.3) is in general not unique. In the absence of spatial dispersion, it is determined by the condition that $\mathbf{P}$ should be the electric polarization locally related to $\mathbf{E}$. When there is no such relation, it is more convenient to put $\mathbf{M} = 0, \mathbf{B} = \mathbf{H}$, and

$$\tilde{\rho}\overline{\mathbf{v}} = \lambda\mathbf{P}/\partial t \tag{103.5}$$

corresponding to the form (103.3), (103.4) of Maxwell's equations. †
The components of the tensor $f_{ik}(\omega;\mathbf{r},\mathbf{r}')$ (the kernel of the integral operator in (103.2)) satisfy the symmetry relations

$$f_{ik}(\omega;\mathbf{r},\mathbf{r}') = f_{ki}(\omega;\mathbf{r}',\mathbf{r}). \tag{103.6}$$

This follows from the same arguments as were given in §96 for the tensor $\varepsilon_{ik}(\omega)$. The only difference is that the interchange of the suffixes a and b in the generalized susceptibilities α_{ab}, which implies that of the tensor suffixes i and k and also that of the points $\mathbf{r}$ and $\mathbf{r}'$, now causes the interchange of the respective arguments in the functions $f_{ik}(\omega;\mathbf{r},\mathbf{r}')$.‡

We shall consider an infinite macroscopically homogeneous medium. Then the kernel of the integral operator in (103.1) or (103.2) depends only on the difference $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$. The functions $\mathbf{D}$ and $\mathbf{E}$ can then be usefully expanded as Fourier integrals with respect to coordinates as well as time, which reduces them to a set of plane waves whose dependence on $\mathbf{r}$ and t is given by a factor $\exp[i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)]$. For such waves, the relation between $\mathbf{D}$ and $\mathbf{E}$ is

$$D_i = \varepsilon_{ik}(\omega,\mathbf{k})E_k \tag{103.7}$$

[0]† We are, of course, referring to non-ferromagnetic bodies. Moreover, the following discussion relates only to infinite homogeneous media, and the form of the boundary conditions on the equations is not discussed.

The above treatment gives a somewhat different view of the assertion in §79 that the permeability μ has no meaning at optical frequencies. In that range, the effects due to the difference of μ from unity are in general indistinguishable from those of the spatial dispersion of the permittivity.

‡ As always in applications of the generalized principle of symmetry of the kinetic coefficients, if the body is in an external magnetic field or has a magnetic structure, the right-hand side of (103.6) is to be taken with the field reversed or the structure time-reversed.

where

$$\varepsilon_{ik}(\omega,\mathbf{k}) = \delta_{ik} + \int_0^\infty \int f_{ik}(\tau,\boldsymbol{\rho}) e^{i(\omega\tau - \mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\rho})} \mathrm{d}^3\rho \, \mathrm{d}\tau \tag{103.8}$$

In this description, the spatial dispersion reduces to a dependence of the permittivity tensor on the wave vector.

The "wavelength" $1/k$ determines the distances over which the field varies considerably. We can therefore say that spatial dispersion expresses the dependence of the macroscopic properties of matter on the spatial inhomogeneity of the electromagnetic field, just as the frequency dispersion expresses their dependence on the time variation of the field. When $k \to 0$, the field becomes uniform, and accordingly $\varepsilon_{i\mathbf{k}}(\omega,\mathbf{k})$ tends to the ordinary permittivity $\varepsilon_{ik}(\omega)$.†

From the definition (103.8),

$$\varepsilon_{ik}(-\omega,-\mathbf{k}) = \varepsilon^*_{ki}(\omega,\mathbf{k}) \tag{103.9}$$

a generalization of (77.7). The symmetry (103.6), expressed in terms of the functions $\varepsilon_{ik}(\omega,\mathbf{k})$, now gives

$$\varepsilon_{ik}(\omega,\mathbf{k};\mathfrak{S}) = \varepsilon_{ki}(\omega,-\mathbf{k};-\mathfrak{I}), \tag{103.10}$$

where the parameter $\mathfrak{S}$, denoting the external magnetic field (if any), is written explicitly. If the medium has a centre of symmetry, the components ε_{ik} are even functions of $\mathbf{k}$; an axial vector is unchanged by inversion, and (103.10) thus becomes

$$\varepsilon_{ik}(\omega,\mathbf{k};\mathfrak{S}) = \varepsilon_{ki}(\omega,\mathbf{k};-\mathfrak{I}) \tag{103.11}$$

The spatial dispersion does not affect the derivation of equation (96.5) for the energy dissipation. The condition that absorption be absent is therefore again that the tensor $\varepsilon_{ik}(\omega,\mathbf{k})$ be Hermitian.

When spatial dispersion is present, the permittivity is a tensor, not a scalar, even in an isotropic medium: a distinctive direction is generated by the wave vector. If the medium not only is isotropic but also has a centre of symmetry, the tensor ε_{ik} must be censtructed from the components of the vector k and the unit tensor δ_{ik} (in the absence of a centre of symmetry, there may also be a term containing the antisymmetric unit tensor e_{ikl}, see §104). The general form of such a tensor may be written as

$$\varepsilon_{ik}(\omega,\mathbf{k}) = \varepsilon_t(\omega,k)\left(\delta_{ik} - k_i k_k/k^2\right) + \varepsilon_l(\omega,k) k_i k_k/k^2 \tag{103.12}$$

where ε_t and ε_l depend only on the magnitude of the wave vector (and on ω). If $\mathbf{E}$ is parallel
to the wave vector, then $\mathbf{D} = \varepsilon_l \mathbf{E}$; if $\mathbf{E} \perp \mathbf{k}$, then $\mathbf{D} = \varepsilon_t \mathbf{E}$. The quantities ε_l and ε_t are accordingly called the longitudinal and transverse permittivities. When $\mathbf{k} \to 0$, the expression (103.12) should tend to $\varepsilon(\omega)\delta_{ik}$, which does not depend on the direction of $\mathbf{k}$; it is therefore clear that

$$\varepsilon_l(\omega,0) = \varepsilon_t(\omega,0) = \varepsilon(\omega) \tag{103.13}$$

The description of the electromagnetic properties of an isotropic medium by means of the permittivities ε_l and ε_t corresponds to Maxwell's equations written in the form (103.3) and (103.4). On the other hand, as $\mathbf{k} \to 0$ and the spatial dispersion disappears, we can revert to the description by means of ε and μ. There is consequently a certain relation between these quantities (see Problem 1).

The analogy between (103.8) and (77.5) enables us to apply to each component $\varepsilon_{ik}(\omega, \mathbf{k})$ as a function of the complex variable ω the results of the study of analytic properties in §§77 and 82 . These are analytic functions with no singularity in the upper half-plane of ω, and they satisfy (for any fixed value of $\mathbf{k}$) the Kramers-Kronig dispersion relations. The same is true of the functions $\varepsilon_I(\omega, k)$ and $\varepsilon_t(\omega, k)$ in (103.12). Here it must be borne in mind that the function ε_l with $k \neq 0$ does not tend to infinity as $\omega \to 0$ even in a conducting medium, and therefore no subtraction is necessary here as it was in deriving (82.9); the fact that $\varepsilon(\omega)$ becomes infinite in a conductor as $\omega \to 0$ is due to the uniformity ($\mathbf{k} = 0$) of the static field.

The time average (as defined in §80) of the electromagnetic field energy density in a transparent medium with spatial dispersion is given by the previous formula (96.6). Since now $\mu \equiv 1$, we have

$$\bar{U} = \frac{1}{16\pi}\left[\frac{\partial(\omega\varepsilon_{ik})}{\partial\omega}E_i E_k^* + |\mathbf{B}|^2\right], \tag{103.14}$$

$\mathbf{E}$ and $\mathbf{B}$ being assumed written in complex form. In the energy flux density in such a medium, an additional term appears:

$$\overline{\mathbf{S}} = \frac{c}{8\pi}\,\mathrm{re}\,(\mathbf{E}^* \times \mathbf{B}) - \frac{\omega}{16\pi}\frac{\partial\varepsilon_{ik}}{\partial\mathbf{k}}E_i{}^* E_k \tag{103.15}$$

This formula is obtained by generalizing the derivation of (80.11): here, we have to consider a wave spread over a small range, both in frequency and in wave-vector direction (see Problem 2).

PROBLEMS

Problem 1. Find the relation between the functions $\varepsilon(\omega), \mu(\omega)$ and the limiting values of $\varepsilon_i(\omega, k)$ and $\varepsilon_i(\omega, k)$ as $k \to 0$.

Solution. We compare the expressions for the averaged microscopic current $\bar{\rho}\bar{v}$ in the forms (103.5) and (79.3). For a monochromatic field, we have in the first case

$$\overline{\rho v_i} = -\mathbf{i}\omega\left[\varepsilon_{ik}(\omega, \mathbf{k}) - \delta_{ik}\right] E_k/4\pi$$

and in the second case

$$\overline{\rho v} = -i\omega[\varepsilon(\omega) - 1]\mathbf{E}/4\pi + ic[\mu(\omega) - 1]\mathbf{k} \times \mathbf{H}/4\pi$$

Substituting in the first $\varepsilon_{ik}(\omega, \mathbf{k})$ from (103.12), and in the second $\mathbf{H} = c\mathbf{k} \times \mathbf{E}/\omega\mu$ in accordance with Maxwell's equation, and equating the two expressions (for $k \to$ O), we find

$$1 - \frac{1}{\mu(\omega)} = \frac{\omega^2}{c^2}\lim_{k\to 0}\frac{\varepsilon_{\mathrm{r}}(\omega, k) - \varepsilon_{\mathrm{l}}(\omega, k)}{k^2}$$

by comparing the terms in $\mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \mathbf{E})$. Together with (101.13), this gives the required relation

Problem 2. Derive the formula (103.15) for the (time) averaged energy flux density in a medium with spatial dispersion.

Solution. We start, as in §80, from formula (80.2). putting there $\mathbf{H} = \mathbf{B}$ in accordance with the description of the field by equations (103.3) and (103.4), expressing all quantities in complex form and averaging over time:

$$-\,\mathrm{div}\,\frac{c}{8\pi}\,\mathrm{re}\,(\mathbf{E} \times \mathbf{H}^*) = \frac{1}{8\pi}\,\mathrm{re}\left(\mathbf{E}^* \cdot \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{B}^* \cdot \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\right). \tag{1}$$

Let us consider an almost monochromatic plane wave with

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0(t, \mathbf{r}) e^{i(\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r} - \omega_0 t)}$$

where $\mathbf{E_0}(t.\mathbf{r})$ is a function varying slowly in space and time. The derivative $\partial D_i/\partial t$ is written as $\hat{f}_{ik} E_k$, with the operator

$$\hat{f}_{ik} = \frac{\partial}{\partial t} \hat{\varepsilon}_{ik} \tag{2}$$

for a strictly monochromatic wave,

$$\widehat{f}_{ik} E_k = f_{ik} E_k = -\mathrm{i}\omega \varepsilon_{ik}(\omega, \mathbf{k}) E_k$$

Expanding $\mathbf{E}_0(t, \mathbf{r})$ as a Fourier integral with respect to time and coordinates, we can express it as a superposition of components $\mathbf{E}_{0a}\mathbf{q}^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r} - \alpha f \mathbf{f}}$, with $\alpha \ll \omega_0$ and $\mathbf{q} \ll \mathbf{k}_0$. We then proceed as in the derivation of (80.10). Applying the operator (2) to the function

$$\mathbf{E}_{\omega_0+\alpha, \mathbf{k}_0+\mathbf{q}} = \mathbf{E}_{0\alpha\mathbf{q}} \exp\left[i\left(\mathbf{k}_0 + \mathbf{q}\right) \cdot \mathbf{r} - i\left(\omega_0 + \alpha\right) t\right]$$

gives

$$\begin{aligned} \hat{f}_{ik} \mathbf{E}_{\omega_0+\alpha, \mathbf{k}_0+\mathbf{q}} &= f_{ik}\left(\omega_0 + \alpha, \mathbf{k}_0 + \mathbf{q}\right) \mathbf{E}_{\omega_0+\alpha, \mathbf{k}_0+\mathbf{q}} \\ &\cong \left[f_{ik}\left(\omega_0, \mathbf{k}_0\right) + \alpha \frac{\partial f_{ik}\left(\omega_0, \mathbf{k}_0\right)}{\partial \omega_0} + \mathbf{q} \cdot \frac{\partial f_{ik}\left(\omega_0, \mathbf{k}_0\right)}{\partial \mathbf{k}_0}\right] \mathbf{E}_{\omega_0+\alpha, \mathbf{k}_0+\mathbf{q}} \end{aligned}$$

Now carrying out the inverse summation of the Fourier components, substituting $f_{ik}(\omega, \mathbf{k}) = -i\omega\varepsilon_{ik}(\omega, \mathbf{k})$ and omiting the suffix 0 from ω_0 and $\mathbf{k}_0$, we find

$$\frac{\partial D_i}{\partial t} = -i\omega\varepsilon_{ik} E_k + \left[\frac{\partial\left(\omega\varepsilon_{ik}\right)}{\partial \omega} \frac{\partial E_{\mathrm{Ok}}}{\partial t} - \omega \frac{\partial \varepsilon_{ik}}{\partial \mathbf{k}} \cdot \operatorname{grad} E_{\mathrm{Ok}}\right] e^{\prime t(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)} \tag{3}$$

The second term in the square brackets is the difference between this expression and (80.10). Substitution of (3) in (1) brings the latter to the energy conservation equation:

$$\partial \bar{U}/\partial t = -\operatorname{div} \overline{\mathrm{S}},$$

with $\bar{U}$ and $\overline{\mathrm{S}}$ given by (103.14), (103.15).

12.4.2 §104. Natural optical activity

If the spatial dispersion is weak, the tensor $\varepsilon_{ik}(\omega, \mathbf{k})$ can be expanded in powers of $\mathbf{k}$. For ordinary solid or liquid dielectric media, the expansion is one in powers of a/λ, where a is the atomic dimension and λ the field wavelength.

As far as the first-order small terms, the expansion is

$$\varepsilon_{ik}(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon^{(0)}{}_{ik}(\omega) + i\gamma_{ikl} k_l, \tag{104.1}$$

where $\varepsilon^{(0)}{}_{ik} = \varepsilon_{ik}(\omega, 0)$, and γ_{ikl} is a tensor of rank three which depends on the frequency; as $\omega \to 0$, its components (which do not pertain to any expansion in powers of ω) tend to constants. The relation between $\mathbf{D}$ and $\mathbf{E}$ in a monochromatic field ($\propto e^{-i\omega t}$), corresponding to (104.1), in the coordinate representation, is

$$D_i = \varepsilon_{ik}^{(0)} E_k + \gamma_{ikl} \partial E_k / \partial x_l \tag{104.2}$$

Applying to (104.1) the symmetry condition (103.10), we have, in the absence of an external field,

$$\gamma_{ikl}(\omega) = -\gamma_{kil}(\omega). \tag{104.3}$$

In the absence of dissipation, the Hermitian condition gives ${\gamma_{ikl}}^* = -\gamma_{kil}$; hence we find ${\gamma_{ikl}}^* = \gamma_{ikl}$ instead of (104.3). Thus the condition for absorption to be absent is that the tensor γ_{ikl} be real.

If we use the notation of §97 and express a plane wave vector as $\mathbf{k} = \omega\mathbf{n}/c$, the expression (104.1) becomes

$$\varepsilon_{ik} = {\varepsilon^{(0)}}_{ik} + i\omega\gamma_{ikl}n_l/c \tag{104.4}$$

Instead of the antisymmetrical tensor of rank two $\gamma_{ikl}n_l$, we shall use the axial gyration vector $\mathbf{g}$, which is dual to it. This vector is given by

$$\omega\gamma_{ikl}n_l/c = e_{ikl}g_l, \tag{104.5}$$

i.e.

$$\varepsilon_{ik} = {\varepsilon^{(0)}}_{ik} + ie_{ikl}g_l, \tag{104.6}$$

which is formally the same as the expression used in §101. The only difference is that in §101 the vector $\mathbf{g}$ depended only on the properties of the medium (and on the applied magnetic field), whereas here the gyration vector depends also on the wave vector of the field. According to (104.5) the components of this vector are linear functions of the components of $\mathbf{n}$, i.e.

$$g_i = g_{ik}n_k \tag{104.7}$$

Substituting (104.7) in (104.5), we find $\omega\gamma_{ikl}n_l/c = e_{ikm}g_{ml}n_l$, or, since n is arbitrary,

$$\omega\gamma_{ikl}/c = e_{ikm}g_{ml} \tag{104.8}$$

which gives the relation between the components of the tensor γ_{ikl} of rank three and the pseudotensor g_{ik} of rank two. †

The particular crystallographic symmetry of the body places certain restrictions on the components of the tensor γ_{ikl} (or g_{ik}) and, in particular, may have the result that all the components are zero. For example, the tensor γ_{ikl} cannot exist in bodies having a centre of symmetry: when the sign of each coordinate is changed (inversion), all the components of a tensor of rank three (and of a pseudotensor of rank two) change sign, whereas by the symmetry of the body they must remain unchanged by this transformation.

Bodies in which the tensor g_{ik} is not zero are said to have natural optical activity or natural gyrotropy. Thus the existence of optical activity certainly implies that the body has no centre of symmetry.

Let us first consider the natural optical activity of isotropic bodies. If a liquid or gas consists of a substance having no stereoisomer, it is symmetrical not only with respect to any rotation but also with respect to reflection (inversion) about any point, and can have no optical activity. Such activity can occur only in fluids having two stereoisomeric forms, and the two forms must be present in different quantities. The fluid then has no centre of symmetry.

In an isotropic body, and in crystals of the cubic system, the pseudotensor g_{ik} reduces to

† In components $g_{\mathrm{xx}} = \omega\gamma_{yzx}/c, g_{xy} = \omega\gamma_{yzy}/c, g_{yx} = \omega\gamma_{zxx}/c$, etc.

a pseudoscalar:

$$g_{ik} = f\delta_{ik}, \gamma_{ikl} = cfe_{ikl}/\omega \tag{104.9}$$

A pseudoscalar is a quantity which changes sign on inversion of the coordinates. The two stereoisomers are formally converted into one another by the operation of inversion, and so their values of f are the same with opposite signs.

Thus, in an optically active isotropic body, the gyration vector $\mathbf{g} = f\mathbf{n}$, and the relation between the electric induction and field in the wave is given by

$$\mathbf{D} = \varepsilon^{(0)}\mathbf{E} + \text{ if } \mathbf{E} \times \mathbf{n} \tag{104.10}$$

Since $\mathbf{D} \cdot \mathbf{n} = 0$, it follows that $\mathbf{E} \cdot \mathbf{n} = 0$. That is, in such a wave not only the induction $\mathbf{D}$ (as in any medium) but also the field $\mathbf{E}$ is transverse to the direction of $\mathbf{n}$.

The change in the refractive index n when allowance is made for the natural optical activity is a small quantity. In determining this change we can therefore put $n = n_0 = \sqrt{\varepsilon^{(0)}}$ in the small term $\mathbf{E} \times \mathbf{g}$ in (104.10). Then the problem of calculating the difference $n - n_0$ is formally identical with that considered in §101 of the change in n due to the magnetic field, except that $\mathbf{g}$ has a different meaning and is always parallel to $\mathbf{n}$ (the z-axis in §101). By analogy with (101.19) we can therefore derive immediately the equation

$$n_{\pm}^2 = n_0^2 \pm g = n_0^2 \pm f n_0. \tag{104.11}$$

These two values correspond (cf. (101.21)) to the following ratios of the two components of $\mathbf{E}$ (or $\mathbf{D}$):

$$E_x = \pm i E_y \tag{104.12}$$

i.e. to waves which are left-hand and right-hand circularly polarized. It may also be noted that the magnitude of $\mathbf{n}$ is independent of its direction, and therefore the direction of $\mathbf{n}$ is the same as that of the ray vectors.

Thus we see that the optical properties of a naturally active isotropic body resemble those of an inactive body in a magnetic field: it exhibits double circular refraction, and when a linearly polarized wave is propagated in it the plane of polarization is rotated. The angle of rotation per unit path length of the ray is $\omega f/2c$.

The sign of the constant f, and therefore the direction of rotation, are opposite for the two stereoisomers, and we therefore speak of dextrorotatory and laevorotatory stereoisomers.

Unlike the rotation of the plane of polarization in a magnetic field, the magnitude and sign of the rotation in naturally active substances do not depend on the direction of propagation of the ray. Hence, if a linearly polarized ray traverses the same path in ^{a} naturally active medium twice in opposite directions, the plane of polarization is unchanged.

Let us now consider naturally active crystals. We shall not give here a systematic analysis of all possible cases of symmetry (see the Problem), but simply note that natural activity is impossible if a centre of symmetry is present, but possible if there is a plane of symmetry of a rotary-reflection axis. It should be emphasized that the conditions for the existence of natural activity in crystals are not the same as those which allow the existence of crystals in two mirror-image (enantiomorphic) forms; the latter conditions are more stringent, and require the absence of both a centre and a plane of symmetry. Thus a crystal can be optically active and yet be identical with its mirror image.

In a naturally active crystal (uniaxial or biaxial), when light is propagated with an arbitrary direction of the wave vector, we have essentially ordinary double refraction of linearly polarized waves; the allowance for the activity would amount essentially to replacing the strictly linear polarization by an elliptical polarization with an axis ratio of the first order of smallness.

The only exception is formed by the directions of the optical axes, along which, if the activity is neglected, the two roots of Fresnel's equation coincide. In these directions the phenomenon of natural activity of crystals is analogous to that of isotropic bodies: double circular refraction

of the first order occurs, with a corresponding rotation of the plane of polarization of linearly polarized waves. These phenomena rapidly disappear as the wave vector deviates from the direction of the optical axis.

For a quantitative calculation of natural activity in crystals it is more convenient to use, not the expression giving **D** in terms of **E**, but the inverse, as in §101. As far as first-order quantities this is

$$E_i = \varepsilon^{(0)-1}{}_{ik} D_k + (\mathrm{D} \times \mathrm{G})_i, \tag{104.13}$$

where the vector **G** is related to the **g** previously used by $G_i = -\varepsilon^{(0)}{}_{ik} g_k / \left|\varepsilon^{(0)}\right|$; see (101.9). Owing to the formal correspondence between this expression and (101.7), the equations (101.11) and (101.12) are again valid. In these equations G_z is the component of **G** in the direction of **n**. If we write **G** in the form

$$G_i = G_{ik} n_k, \tag{104.14}$$

in analogy with (104.7), the component is proportional to

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{G} = G_{ik} n_i n_k \tag{104.15}$$

This quadratic form determines the optical properties of a naturally active crystal. The tensor G_{ik} itself need not be symmetrical, but if it is separated into symmetrical and antisymmetrical parts the latter does not appear in the form (104.15). Thus we conclude that the tensor G_{ik} may be assumed symmetrical in discussing the optical properties of naturally active crystals.

PROBLEM

Find the restrictions imposed by crystal symmetry on the components of the tensor G_{ik}.

Solution. Under any rotation, the pseudotensor G_{ik} behaves as a true tensor; in particular, the presence of an n-fold axis of symmetry with $n > 2$ results, as for a true symmetrical tensor of rank two, in complete isotropy in a plane perpendicular to the axis. The behaviour of the pseudotensor G_{ik} under reflection is determined by the fact that it is dual to a true tensor of rank three: under any reflection which changes the sign of a given component of a true tensor of rank two, the corresponding component of G_{ik} remains unchanged, and vice versa. For example, on reflection in the yz-plane the components $G_{xx}.G_{yy}, G_{zz}, G_{yz}$ change sign, but G_{xy}, G_{xz} do not.

We give below the non-vanishing components of the tensor G_{ik} for all crystal classes which allow natural activity. The z-axis is taken along the threefold, fourfold, or sixfold axis of symmetry or (in the classes $\boldsymbol{C}_2, \boldsymbol{C}_{2v}$) along the only twofold axis of symmetry or (in the class C_s) perpendicular to the plane of symmetry. When three mutually perpendicular axes of symmetry are present, they are the coordinate axes.

Class C_1 : all.

Class $C_2 : G_{xx}, G_{yy}, G_{zz}, G_{xy}$, the last of which may be made to vanish by a suitable choice of the x and y axes.

Class $C_s : G_{xz}, G_{yz}$, one of which may be made to vanish by a suitable choice of the x and y axes.

Class $C_{2r} : G_{xv}$ (the xz and yz planes being planes of symmetry).

Class $D_2 : G_{xx}, G_{yy}, G_{zz}$.

Classes $\boldsymbol{C}_3, \boldsymbol{C}_4, \boldsymbol{C}_6, \boldsymbol{D}_3, \boldsymbol{D}_4, \boldsymbol{D}_6 : G_{xx} = G_{yy}, G_{zz}$.

Class $S_4 : G_{xx} = -G_{yy}, G_{xy}$, one of which may be made to vanish by a suitable choice of the x and y axes.

Class D_{2d} : G_{xy} (the x and y axes being in vertical planes of symmetry).
Classes T, O: $G_{xx} = G_{yy} = G_{zz}$.

It may be noted that, in uniaxial crystals of the classes S_4 and D_{2d}, the scalar (104.15) is zero if the vector $\boldsymbol{n}$ is in the z-direction, since $G_{zz} = 0$. This means that in these crystals there is no natural-activity effect in the direction of the optical axis.

In a biaxial crystal of the class C_{2r} the optical axes are in one of the planes of symmetry. For vectors n lying in the xz or yz plane the scalar (104.15) is again identically zero, so that here also there is no effect in the direction of the optical axes. The only crystal class which allows rotation of the plane of polarization along the optical axis but not enantiomorphism is the monoclinic class C_s.

12.4.3 §105. Spatial dispersion in optically inactive media

In crystals whose symmetry does not allow natural optical activity, the first terms (after the zero-order one) in the expansion of the permittivity $\varepsilon_{ik}(\omega, k)$ in powers of $\mathbf{k}$ are quadratic terms.

As usual in crystal optics, it is convenient in the subsequent analysis to write down this expansion for the inverse tensor $\eta_{ik} = \varepsilon^{-1}{}_{ik}$. We put

$$\eta_{ik} = \eta^{(0)}{}_{ik}(\omega) + \beta_{iklm}(\omega) k_l k_m. \tag{105.1}$$

The tensor β_{iklm} may be regarded as symmetrical in the second pair of suffixes, since it is multiplied by the symmetrical product $k_l k_m$. From (103.10) (with $\mathfrak{S} = 0$) it is also symmetrical in the first pair of suffixes:

$$\beta_{iklm} = \beta_{kilm} = \beta_{ikml}. \tag{105.2}$$

It need not, however, be symmetrical with respect to the interchange of both pairs. In the absence of absorption, since the tensor η_{ik} is Hermitian and symmetrical, the tensor β_{iklm} is real, and we shall assume this to be so.

In an isotropic medium, β_{iklm} must be expressed in terms of the unit tensor only, i.e. must have the form

$$\beta_{iklm} = \beta_1 \delta_{ik}\delta_{lm} + \frac{1}{2}\beta_2 \left(\delta_{il}\delta_{km} + \delta_{kl}\delta_{im}\right);$$

it contains only two independent components. In an isotropic body we also have $\eta^{(0)}{}_{ik} = \eta^{(0)}\delta_{ik}$, and so the tensor (105.1) becomes

$$\eta_{ik} = \left(\eta^{(0)} + \beta_1 k^2\right)\delta_{ik} + \beta_2 k_i k_k, \tag{105.3}$$

in accordance with the general expression (103.12) for the dielectric tensor in an isotropic medium with spatial dispersion. The wave propagation in the medium is governed by the equations (97.21). On substitution of (105.3) in these equations, however, the anisotropic term in β_2 disappears, since the vectors $\mathbf{D}$ and $\mathbf{k}$ are orthogonal in a plane wave, i.e. the medium remains optically isotropic, as it should.

Even in cubic crystals, however, the tensor β_{iklm} does not reduce to the unit tensor; depending on the crystal class, it has either three or four independent components. When spatial dispersion is neglected, cubic crystals are cptically isotropic; the inclusion of the dispersion quadratic in $\mathbf{k}$ brings about a new property in them, namely optical anisotropy (H. A. Lorentz, 1878).

In a cubic crystal $\eta^{(0)}{}_{ik} = \delta_{ik}/\varepsilon^{(0)}$, and the expansion (105.1) becomes

$$\eta_{ik} = \frac{1}{\varepsilon^{(0)}}\delta_{ik} + \beta_{iklm}k_l k_m \tag{105.4}$$

Substitution of this in equations (97.21) gives

$$\left[\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n_0^2}\right)\delta_{\alpha\beta} - \frac{\omega^2 n^2}{c^2}\beta_{\alpha\beta 33}\right] D_\beta = 0 \tag{105.5}$$

where ${n_0}^2 = \varepsilon^{(0)}$ and the x_3-axis in Cartesian coordinates x_1, x_2, x_3 is parallell to the wave vector. From the sense of the expansion (105.4), the second term in the square brackets in these equations is to be regarded as a small correction (see §106 concerning the special case in which $1/{n_0}^2 = 0$). We can then replace n^2 in that term by ${n_0}^2$:

$$\left[\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n_0^2}\right)\delta_{\alpha\beta} - \frac{\omega^2 n_0^2}{c^2}\beta_{a\beta 33}\right] D_\beta = 0 \tag{105.6}$$

These equations have the same form as for waves in a non-cubic crystal when spatial dispersion is neglected. Their determinant is an expression quadratic in n^{-2}, whose vanishing determines the refractive indices of the two waves with the same direction of $\mathbf{k}$ but different polarizations. Thus the spatial dispersion in a cubic crystal removes the "polarization degeneracy": the velocities of the two waves become different, and directiondependent.

The possibility of longitudinal electromagnetic waves in a transparent isotropic medium has been mentioned at the end of §84. The consistent formulation of the condition determining the relation between the frequency and the wave number (the dispersion relation) for these waves requires spatial dispersion to be taken into account; the condition is

$$\varepsilon_l(\omega, k) = 0 \tag{105.7}$$

For small k, the solution of this equation is

$$\omega(k) = \omega_{IO} + \frac{1}{2}\alpha k^2 \tag{105.8}$$

where α is a constant and ω_{10} the frequency for which the permittivity $\varepsilon(\omega) = \varepsilon_l(\omega, 0)$. The wave propagation velocity.

$$\mathbf{u} = \partial\omega/\partial\mathbf{k} = \alpha\mathbf{k} \tag{105.9}$$

is proportional to the wave vector.

PROBLEM

Find the relations between the components of the tensor β_{ikim} in non-gyrotropic crystals of the cubic system.

Solution. Natural gyrotropy does not occur in the crystal classes $\boldsymbol{T}_d, \boldsymbol{T}_h, \boldsymbol{O}_h$.

In the classes $\boldsymbol{T}_d$ and $\boldsymbol{T}_h$, we take the x, y and z axes along the three twofold axes of symmetry. The non-zero components of the tensor are

$$\beta_1 \equiv \beta_{xxxx} = \beta_{yyyy} = \beta_{zzzz}, \quad \beta_2 \equiv \beta_{xxzz} = \beta_{yyxx} = \beta_{zzyy},$$
$$\beta_3 \equiv \beta_{xyxy} = \beta_{yzyz} = \beta_{zxxx}, \quad \beta_4 \equiv \beta_{zzxxx} = \beta_{xxyy} = \beta_{yyzz}.$$

In the class O_h, the three C_2 axes become C_4 axes, and so we also have $\beta_2 = \beta_4$.

12.4.4 §106. Spatial dispersion near an absorption line

In §§104 and 105. spatial dispersion effects have been regarded as small corrections, which they usually are. The situation is different, however, near a narrow absorption line in a crystal, where, by (84.7), $\varepsilon^{(0)}(\omega)$ is sharply increased. In this region, the inclusion of spatial dispersion causes a qualitative alteration in the picture.

The reason is that the addition to the permittivity of terms containing powers of k raises the order of the algebraic dispersion relation which determines the function $k(\omega)$. The formal solution therefore gives rise to additional roots. Far from the absorption line, these lie in the range of large k, i.e. outside the region where the theory is valid, and they must therefore be discarded. Near the absorption line, however, the permittivity varies considerably even for small k, and additional roots may arise which have a real physical significance, i.e. new transverse waves may occur.

For simplicity, we shall consider only isotropic media, and begin with the case where the medium is not gyrotropic, i.e. has no natural optical activity (S. I. Pekar, 1957; V. L. Ginzburg, 1958).

As already shown in §105, an isotropic medium remains optically isotropic even when spatial dispersion is taken into account. This means that the dispersion relation for transverse electromagnetic waves in such a medium is given by the usual equation $n^2 = \varepsilon$, in which ε is taken to be the transverse permittivity ε_t :

$$n^2 = \varepsilon_t(\omega, k). \tag{106.1}$$

It has been shown in §103 that $\varepsilon_t(\omega, k)$ and $\varepsilon_l(\omega, k)$ as functions of frequency satisfy the same Kramers-Kronig relations as $\varepsilon(\omega)$ does in the absence of spatial dispersion. We can therefore state that near the absorption line the function $\varepsilon_t(\omega, k)$ has the same form as in (84.7) but with constants that become functions of k; we write it as

$$\varepsilon_t(\omega, k) = \frac{A(k)}{\omega_t(k) - \omega}, \quad A(k) > 0$$

If A is relatively small, † it may be meaningful to include not only the pole term but also the constant term (independent of ω) in ε_t; we denote this by $a(k)$, and assume that $a > 0$, i.e. that the medium is optically transparent far from the absorption line. The theoretical admissibility of including simultaneously the constant and pole terms in ε_t requires that they become comparable in the frequency range $|\omega - \omega_t| \ll \omega_t$, the only one where the pole expression is valid; we must thus have $A \ll a\omega_t$.

Since k is again assumed small, the functions can be expanded in powers of k. Here it is sufficient to replace $a(k)$ and $A(k)$ by the constants $a \equiv a(0) > 0, A \equiv A(0) > 0$, retaining the correction term only in the expansion of $\omega_t(k)$ in the small difference $\omega_t - \omega$:

$$\omega_t(k) \cong \omega_0 + vk^2$$

Then the permittivity is

$$\varepsilon_t(\omega, k) = a + \frac{A}{\omega_0 + vk^2 - \omega} \tag{106.2}$$

As a function of frequency, this is zero at a point in the range $\omega > \omega_t$. For $k = 0$, the zero is at $\omega = \omega_{l0} = \omega_0 + A/a$. Since the permittivities are the same when $k = 0, \omega_{l0}$ is the limiting frequency (as $k \to 0$) of the longitudinal wave; cf. (105.8). The zero of $\varepsilon_t(\omega, k)$ when $k \neq 0$ has no direct physical significance.

The dispersion relation (106.1) now becomes

$$\left(n^2 - a\right)\left(\beta n^2 - \omega + \omega_0\right) = A, \tag{106.3}$$

with $\beta = v\omega^2/c^2 \cong v{\omega_0}^2/c^2$, which may be either positive or negative. The solutions of (106.3) may be regarded as resulting from the intersection of two branches of the spectrum: the ordinary light wave with $n^2 = a$, and the wave with $n^2 = (\omega - \omega_0)/\beta$ which arises from the pole of the permittivity. These branches are shown by the dot-and-dash lines in Fig. 58. Their "interaction", whose strength depends on A, moves the lines apart. †

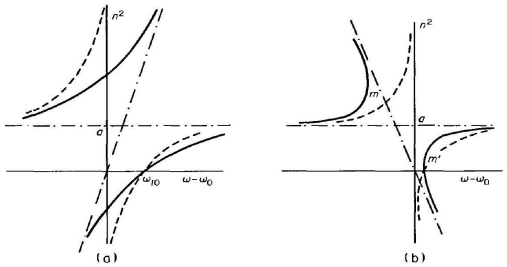


Fig. 58

The continuous curves in Fig. 58 show schematically the functions $n^2(\omega)$ given by the roots of equation (106.3); the dashed curves are the functions $n^2(\omega)$ when spatial dispersion is neglected ($\beta = 0$). Of course, only positive ‡ roots n^2 correspond to waves propagated in the medium. When $\beta > 0$ (Fig. 58a), the upper continuous curve enters the region $\omega > \omega_0$, and this gives rise to an additional wave which would not exist without spatial dispersion; when $\omega > \omega_{10}$, two different electromagnetic waves can be propagated in the medium. Figure 58b shows the function $n^2(\omega)$ when $\beta < 0$. To the left of the point m, whose coordinates are

$$n_m^2 = a + \sqrt{(A/|\beta|)}, \quad \omega_m - \omega_0 = -|\beta|[a + 2\sqrt{(A/|\beta|)}],$$

and at which $\mathrm{d}n^2/\mathrm{d}\omega = \infty$ and the two roots coincide, there are two positive roots, and two different waves can be propagated in the medium. The same is true of the region

between the point m', whose coordinates are

$$n_m.^2 = a - \sqrt{(A/|\beta|)}, \quad \omega_m - \omega_0 = -|\beta|[a - 2\sqrt{(A/|\beta|)}],$$

and the point $\omega = \omega_{\mathrm{oI}}$.

If A is not sufficiently small it is, strictly speaking, not consistent to retain the constant term in (106.2). On omitting this term (i.e. putting $a = 0$ in the above formulae) we get a picture that differs from Fig. 58 in that the horizontal asymptote of all the curves is the abscissa axis itself and not $n^2 = a$. The range $\omega \geqslant \omega_{l0}$ is not considered here.

Let us now examine the situation near an absorption line in a gyrotropic medium (V. L. Ginzburg, 1958). The permittivity $\varepsilon^{(0)}$, when spatial dispersion is neglected, may be expressed by the pole term

$$\varepsilon^0(\omega) = A/\left(\omega_0 - \omega\right). \tag{106.4}$$

[0]† In the microscopic theory, the pole of the permittivity represents the existence of excitons, which are elementary Bose excitations in the dielectric; the sign of the constant β is the same as that of the effective exciton mass (see $SP2, \xi 66$). The corresponding branch of the wave spectrum is called the exciton branch. The part of the spectrum near the virtual intersection of the two branches is called the polariton range.

‡ For clarity, the diagram shows negative roots also. The purely imaginary values of n correspond to waves for Which the medium is opaque (though there is no absorption in it); the wave may be said to be totally reflected from the medium.

We shall not now assume that A is particularly small, and the constant term is therefore omitted. For the relation between $\mathbf{E}$ and $\mathbf{D}$ a formula of the type (104.13) is to be used, expressed in terms of the inverse tensor $\eta_{ik} = \varepsilon^{-1}{}_{ik}$. In an isotropic medium

$$\mathrm{E} = \frac{1}{\varepsilon^{(0)}}\mathrm{D} + iF\mathrm{D} \times \mathrm{n}, \tag{106.5}$$

where the optical activity vector is written as $\mathbf{G} = F_{\mathbf{n}}$. Near the absorption line, the components of the tensor η_{ik} simply pass through zero, and there is nothing to prevent its expansion in terms of the wave vector from converging.

The dispersion relation is

$$\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n_0^2}\right)^2 = F^2 n^2, \tag{106.6}$$

where ${n_0}^2 = \varepsilon^{(0)}$; cf. (101.12). Substitution of $\varepsilon^{(0)}$ from (106.4) gives

$$\left(\frac{1}{n^2} + \frac{\omega - \omega_0}{A}\right)^2 = F^2 n^2. \tag{106.7}$$

In Fig. 59 the continuous curves show schematically the dependence of the roots n^2 of this equation on $\omega - \omega_0$. One exists both for $\omega < \omega_0$ and for $\omega > \omega_0$, where there are no real values of n in the absence of spatial dispersion; this is ${n_0}^2(\omega)$, shown, by the dashed curve in Fig. 59. The other two exist only when $\omega < \omega_m$. i.e. to the left of the point m at

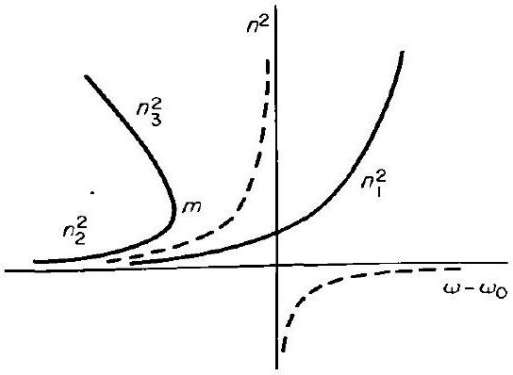


Fig. 59

which $\omega_0 - \omega_m = 3A\left(\frac{1}{2}F\right)^{\frac{2}{3}}, n_m^2 = (2/F)^{\frac{2}{3}}$. The curves $n_2^2(\omega)$ and $n_3^2(\omega)$ lie above $n_0^2(\omega)$; $n_1^2(\omega)$ lies below it. Hence (as is clear from equations (101.11), which determine the induction $\mathbf{D}$ in the wave) waves 2 and 3 have circular polarization of one sign, and wave 1 has circular polarization of the other sign.

Lastly, it should be emphasized that formulae (106.2) and (106.4) for the permittivity, and therefore the results based on them, apply only to frequencies sufficiently far from the centre of the line: $|\omega - \omega_0| \gg \gamma$, where γ is the line width. When $|\omega - \omega_0| \leqslant \gamma$, absorption (the imaginary part of the permittivity) has to be taken into account, and this may modify the picture substantially.

12.5 XIII Non-Linear Optics by Landau

12.5.1 §107. Frequency transformation in non-linear media

The theory of electromagnetic wave propagation in dielectric media described in the preceding chapters is based on the assumption of a linear relation between the electric field induction

D and intensity **E**. This approximation is sufficiently accurate if (as is true in practice) **E** is much less than typical intra-atomic fields. Even then, however, the small nonlinear corrections to **D**(**E**) cause qualitatively new effects and may therefore be important.

The most important feature of a non-linear medium is the generation in it of vibrations with new frequencies. For example, if a monochromatic wave with frequency ω_1 is incident on such a medium, then, as it is propagated in the medium, waves with frequencies $m\omega_1$(m being an integer) are generated; if there is initially a set of monochromatic signals with frequencies ω_1 and ω_2, the combination frequencies $m\omega_1 + n\omega_2$ will arise in the course of time, and so on.

If the medium is non-dissipative, the frequency transformation process is subject to certain very general relationships, in addition to the obvious condition that the total energy of the vibrations at all frequencies must be conserved. Here it is assumed that the nonlinearity is weak; the significance of this property will be made more precise later.

The origin and significance of the required relations are most clearly seen from the quantum standpoint, and this will be our initial basis. To simplify the discussion, we shall suppose that all frequencies in the system can be represented as linear combinations of two incommensurate fundamental frequencies ω_1 and ω_2 :

$$\omega_{mn} = m\omega_1 + n\omega_2, \tag{107.1}$$

where m and n are positive or negative integers.

The total energy of the radiation in the medium can be expressed as the sum of the energies of all the quanta:

$$\mathscr{U} = \sum_{m,n} N_{mn}\hbar\omega_{mn},$$

where N_{mn} is the number of quanta with frequency ω_{mn}. The summation is taken over all m and n for which $\omega_{mn} > 0$ (since, of course, only positive frequencies are physically meaningful).

Frequency transformation processes cause a variation in the numbers N_{mn} with time, the total energy being conserved. Hence

$$\frac{\mathrm{d}\mathscr{U}}{\mathrm{d}t} = \hbar\omega_1 \sum_{m,n} m\frac{\mathrm{d}N_{mn}}{\mathrm{d}t} + \hbar\omega_2 \sum_{m,n} n\frac{\mathrm{d}N_{mn}}{\mathrm{d}t} = 0.$$

Since ω_1 and ω_2 are assumed incommensurate, and the numbers of quanta (and the changes in them) are integral, the two sums must separately be zero: †

$$\sum_{m,n} m\frac{\mathrm{d}N_{mn}}{\mathrm{d}t} = 0, \quad \sum_{m,n} n\frac{\mathrm{d}N_{mn}}{\mathrm{d}t} = 0. \tag{107.2}$$

Instead of the numbers of quanta, we will use the corresponding intensities, i.e. the total energies $\overline{\mathscr{U}}_{mn}$ in the radiation of the corresponding frequencies:

$$\overline{\mathscr{U}}_{mn} = \hbar\omega_{mn}N_{mn}. \tag{107.3}$$

The relations (107.2) then become

$$\sum_{m,n} \frac{m}{\omega_{mn}}\frac{\mathrm{d}\overline{\mathscr{U}}_{mn}}{\mathrm{d}t} = 0, \quad \sum_{m,n} \frac{n}{\omega_{mn}}\frac{\mathrm{d}\overline{\mathscr{U}}_{mn}}{\mathrm{d}t} = 0. \tag{107.4}$$

Here we must note a point that is especially clear in the classical picture of the oscillations. In referring to the time variation of $\overline{\mathscr{U}}_{mn}$, we mean only the systematic variation; that is, we are considering the energy averaged over time intervals much longer than the periods $1/\omega_1$, $1/\omega_2$, as indicated by the bar over $\overline{\mathscr{U}}_{mn}$ in (107.4). This is where the non-linear effects need to be weak:

the characteristic time τ of the steady build-up which they cause in the oscillations excited must be much longer than the periods mentioned. Only then can it be meaningful to consider the time variation of quantities averaged over intervals Δt such that $1/\omega_1, 1/\omega_2 \ll \Delta t \ll \tau$.

Equations (107.4) give the required relations, and constitute the Manley-Rowe theorem (J. M. Manley and H. E. Rowe, 1956). ‡ It remains to give them a more definite form, avoiding the restriction $\omega_{mn} > 0$ in the summations. This is easily done by noting that, to each pair of numbers m, n for which $\omega_{mn} > 0$, there corresponds a pair $-m, -n$ for which the frequency is negative and $|\omega_{mn}|$ is the same. Defining

$$\overline{\mathscr{U}}_{-m,-n} = \overline{\mathscr{U}}_{mn} \tag{107.5}$$

and extending the summation to all integers from $-\infty$ to ∞, we double the sums, which are zero as before. Another simplification is then possible. In the first equation (107.4), we divide the sum over m into two, from 0 to ∞ and from $-\infty$ to 0 , and in the second sum make the change $m, n \to -m, -n$; a similar change is made in the sum over n in the second equation. The result is

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{m}{m\omega_1+n\omega_2}\frac{\mathrm{d}\overline{\mathscr{U}}_{mn}}{\mathrm{d}t}=0, \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{n}{m\omega_1+n\omega_2}\frac{\mathrm{d}\overline{\mathscr{U}}_{mn}}{\mathrm{d}t}=0. \tag{107.6}$$

There is an obvious generalization to the case of a greater initial number of incommensurate frequencies.

The specific properties of the vibrating system may prohibit particular frequency transformation processes. The summations (107.6) are taken, in practice, only over allowed processes. For instance, in the simple case of a system that permits only the generation of the combination frequency $\omega_1 + \omega_2$, the numbers m and n take the values 0 and 1 , and we find

$$-\frac{1}{\omega_1}\frac{\mathrm{d}\overline{\mathscr{U}}_{10}}{\mathrm{d}t}=-\frac{1}{\omega_2}\frac{\mathrm{d}\overline{\mathscr{U}}_{01}}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{\omega_1+\omega_2}\frac{\mathrm{d}\overline{\mathscr{U}}_{11}}{\mathrm{d}t}. \tag{107.7}$$

The meaning of these equations is obvious: the decrease in the numbers of quanta $\hbar\omega_1$ and $\hbar\omega_2$ is equal to the increase in the number of quanta $\hbar(\omega_1 + \omega_2)$ generated.

12.5.2 §108. The non-linear permittivity

When the non-linearity is weak, the first correction to the linear dependence of $\mathbf{D}$ on $\mathbf{E}$ is quadratic in the field. In the presence of time dispersiont it can be represented in any anisotropic medium by

$$D_i^{(2)}(t)=\iint_0^{\infty} f_{i,kl}(\tau_1,\tau_2)\,E_k(t-\tau_1)\,E_l(t-\tau_2)\,\mathrm{d}\tau_1\,\mathrm{d}\tau_2 \tag{108.1}$$

an expression analogous to (77.3). Of course, the existence of such a term places certain limitations on the permissible symmetry of the medium; in particular, it does not occur if the latter is invariant under inversion.

Although we shall be considering as typical a term of the form (108.1) quadratic in $\mathbf{E}$, it must be noted that in the quadratic approximation the induction $\mathbf{D}$ may also contain terms bilinear in the components of $\mathbf{E}$ and $\mathbf{H}$, or quadratic in $\mathbf{H}$; these are usually less important, and they will not be discussed here. We shall also ignore the non-linear dependence of the magnetic induction $\mathbf{B}$ on $\mathbf{H}$, because it is analogous to the dependence $\mathbf{D}(\mathbf{E})$.

We define the quantity

[0]† It is, of course, conventional to write the rates of change of integers as derivatives.

‡ The quantum interpretation is due to M. T. Weiss (1957).

$$\varepsilon_{i,kl}(\omega_1,\omega_2)=\int_0^{\alpha}\int^{i(\omega_1\tau_1+\omega_2\tau_2)} f_{i,kl}(\tau_1,\tau_2)\,\mathrm{d}\tau_1\,\mathrm{d}\tau_2 \tag{108.2}$$

which may naturally be called the second-order non-linear permittivity by analogy with the linear permittivity defined by an expression of the form (77.5). It differs only by a factor from $\chi_{i,kI}=\varepsilon_{i,kl}/4\pi$, called the non-linear susceptibility. Because of the symmetry of E_k and E_l in (108.1), the tensor $f_{i,kl}$ is symmetrical in the suffixes k and l if the arguments are simultaneously transposed: $f_{i,kl}(\tau_1,\tau_2)=f_{i,lk}(\tau_2,\tau_1)$. The tensor $\varepsilon_{i,kl}$ therefore has the same type of symmetry:

$$\varepsilon_{i,kl}(\omega_1,\omega_2)=\varepsilon_{i.lk}(\omega_2,\omega_1) \tag{108.3}$$

In particular, when $\omega_1=\omega_2$ the tensor is symmetrical in the last two suffixes:

$$\varepsilon_{i,kl}(\omega,\omega)=\varepsilon_{i,lk}(\omega,\omega) \tag{108.4}$$

Moreover, since the functions $f_{i.kl}$ are real, as follows from the definition (108.1) with real $\mathbf{E}$ and $\mathbf{D}$, we have

$$\varepsilon_{i,kl}(-\omega_t,-\omega_2)=\varepsilon_{i,kl}*(\omega_1,\omega_2) \tag{108.5}$$

The permittivity (108.2) arises naturally in the consideration of monochromatic fields or superpositions of these. In non-linear expressions such fields must of course be put in a real form. For example, if $\mathbf{E}$ is a monochromatic field with frequency ω. we must write $\mathbf{E}(t)=\mathrm{re}\{\mathbf{E}_0e^{-i\omega t}\}$, and substitution in (108.1) gives

$$D_i^{(2)}(t)=\frac{1}{2}\,\mathrm{re}\left\{\varepsilon_{i,kl}(\omega,\omega)e^{-2i\omega t}E_{0i}E_{0k}+\varepsilon_{i,kl}(\omega,-\omega)E_{0i}E_{0k}^*\right\} \tag{108.6}$$

This includes vibrations with twice the frequency (as well as a constant term corresponding to the frequency $\omega-\omega=0$). In the general case, $\varepsilon_{i,kl}(\omega_1,\omega_2)$ describes the contribution to the induction that is proportional to $\exp(-i\omega_3t)$ with $\omega_3=\omega_1+\omega_2$.

We shall discuss below only non-dissipative media, and refer to them as transparent, although they are not literally such (for waves of a given frequency), because of the possible transfer of energy to other frequencies. We shall also suppose that the medium has no magnetic structure.

First of all, we shall show that under these conditions the non-linear permittivity is real. This could be seen directly by expressing the components of the non-linear susceptibility tensor in terms of the matrix elements of the electric dipole interaction between the medium and the field, which acts as a small perturbation; the second-order susceptibility appears in third-order perturbation theory. † However, the reason why the result of such a calculation is real can be understood without actually doing it. The complete set of wave functions with respect to which the matrix elements are calculated may be chosen as real (for a medium having no magnetic structure, and therefore invariant under time reversal). The operator of the field interaction with the electric dipole moment of the medium is also real. Thus imaginary terms could occur only as a result of passing round poles due to the energy denominators in perturbation theory. However, the absence of dissipation in the medium signifies that none of the field frequencies coincides with a difference of energy levels in the system (or that the residues at the poles are zero because of certain selection rules); it is therefore unnecessary to pass round poles.

The transparency of the medium also gives rise to particular symmetry relations for the tensor $\varepsilon_{i,kl}$. These also could be deduced from specific expressions obtained in perturbation theory. Here again, however, the required result can be derived in a simpler manner. To do so,

[0]† Spatial dispersion is neglected throughout this chapter.

we assume that the field in the medium is the sum of three almost monochromatic fields with incommensurate frequencies $\omega_1, \omega_2, \omega_3$:

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{E} &= \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \mathbf{E}_3 \\ &= \mathrm{re}\left\{\mathbf{E}_{01}e^{-i\omega_1 t} + \mathbf{E}_{02}e^{-i\omega_2 t} + \mathbf{E}_{03}e^{-i\omega_3 t}\right\},\end{aligned}\right\} \tag{108.7}$$

and $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$. We shall suppose that the fields with frequencies $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ are created by external sources which are afterwards switched off; the slight non-linearity of the medium causes their amplitudes $\mathbf{E}_{01}$ etc. to be slowly varying functions of time.

This slowness allows Maxwell's equations to be written down for the field of each fundamental frequency separately. In turn, these equations give in the usual way the energy conservation equation

$$\frac{1}{4\pi}\left(\overline{\mathbf{E}_1 \cdot \dot{\mathbf{D}}_1} + \overline{\mathbf{H}_1 \cdot \dot{\mathbf{H}}_1}\right) + \mathrm{div}\,\frac{c}{4\pi}\left(\overline{\mathbf{E}_1 \times \mathbf{H}_1}\right) = 0$$

and similarly for suffixes 2 and 3; $\mathbf{D}_1$ denotes the part of the induction $\mathbf{D}$ which contains the factors $e^{\pm i\omega_1 t}$, and the bar denotes averaging over time (which will be needed later). On integration over the whole volume of the field, the divergence term vanishes, leaving

$$\frac{1}{4\pi}\int\left(\overline{\mathbf{E}_1 \cdot \dot{\mathbf{D}}_1} + \overline{\mathbf{H}_1 \cdot \dot{\mathbf{H}}_1}\right)\mathrm{d}V = 0$$

If we now separate explicitly in $\mathbf{D}_1$ the terms linear and non-linear in $\mathbf{E}$:

$$D_1 = {D_1}^{(1)} + {D_1}^{(2)}$$

then the former together with $\mathbf{H}_1 \cdot \dot{\mathbf{H}}_1$ give $\mathrm{d}\overline{\mathscr{U}}_1/\mathrm{d}t$, the time variation of the field energy at frequency ω_1. This variation is consequently determined by

$$\frac{\mathrm{d}\overline{\mathscr{U}}_1}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{4\pi}\int \mathrm{re}\left\{\mathbf{E}_{o1}\,\overline{e^{-i\omega_1 t}\}\cdot\dot{\mathbf{D}}_1^{(2)}}\mathrm{d}V\right. \tag{108.8}$$

Here the derivative $\partial{\mathbf{D_1}}^{(2)}/\partial t$ is to be expressed in terms of the field by (108.1) and (108.2). The time averaging reduces to zero all terms except those in which the exponential factors cancel. Repetition of the calculations for the other frequencies gives finally

$$\left.\begin{aligned}\tfrac{\mathrm{d}\overline{\mathscr{U}}_1}{\mathrm{d}t} &= -\tfrac{i\omega_1}{16\pi}\textstyle\int \varepsilon_{k,il}\left(-\omega_3, \omega_2\right) {E_{03i}}^* E_{01k} E_{02l}\ \mathrm{d}V + \mathrm{c.c.} \\ \tfrac{\mathrm{d}\overline{\mathscr{U}}_2}{\mathrm{d}t} &= -\tfrac{i\omega_2}{16\pi}\textstyle\int \varepsilon_{l,ki}\left(\omega_1, -\omega_2\right) {E_{03i}}^* E_{01k} E_{02l}\ \mathrm{d}V + \mathrm{c.c.} \\ \tfrac{\mathrm{d}\overline{\mathscr{U}}_3}{\mathrm{d}t} &= \tfrac{i\omega_3}{16\pi}\textstyle\int \varepsilon_{i,kl}\left(\omega_1, \omega_2\right) E_{03i} * E_{01k} E_{02l}\ \mathrm{d}V + \mathrm{c.c.}\end{aligned}\right\} \tag{108.9}$$

where c.c. denotes the complex conjugate. The property (108.3) has been used in these calculations.

The total rate of change of the energy at all three frequencies is

$$\frac{\mathrm{d}\overline{\mathscr{U}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\overline{\mathscr{U}}_1}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\overline{\mathscr{U}}_2}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\overline{\mathscr{U}}_3}{\mathrm{d}t}. \tag{108.10}$$

In a non-linear medium this sum need not in general vanish exactly, because of the possible transfer of energy to other combination frequencies such as $\omega_1 - \omega_2$ or $\omega_3 + \omega_2$: However, the fields at the frequencies $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ arising from the external sources do not depend on the degree of non-linearity, and need not be small, unlike the fields at other frequencies, which occur only because the medium is non-linear. The contribution of the latter to the energy balance may therefore be neglected, and the condition that the sum (108.10) be zero imposed. Moreover, since such a medium is a non-linear system with only three frequencies, we can apply to it the Manley-Rowe theorem in the simple form (107.7). In the notation used here, the relations are

$$\frac{1}{\omega_1}\frac{\mathrm{d}\overline{\mathscr{U}}_1}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{\omega_3}\frac{\mathrm{d}\overline{\mathscr{U}}_3}{\mathrm{d}t}=0,\quad \frac{1}{\omega_2}\frac{\mathrm{d}\overline{\mathscr{U}}_2}{\mathrm{d}t}+\frac{1}{\omega_3}\frac{\mathrm{d}\overline{\mathscr{U}}_3}{\mathrm{d}t}=0.$$

Substitution of (108.9) shows that the non-linear permittivity satisfies the following important symmetry relations † :

$$\varepsilon_{i,kl}\left(\omega_1,\omega_2\right)=\varepsilon_{k,il}\left(-\omega_3,\omega_2\right)=\varepsilon_{l,ki}\left(\omega_1,-\omega_3\right) \tag{108.11}$$

(J. A. Armstrong, N. Bloembergen, J. Ducuing, and P. S. Pershan, 1962). The symmetry expressed by these equations becomes more obvious if the tensor components are given a third argument so that the sum of all three is zero:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{i,kl}\left(-\omega_3;\omega_1,\omega_2\right)&=\varepsilon_{k,il}\left(\omega_1;-\omega_3,\omega_2\right)\\&=\varepsilon_{l,ki}\left(\omega_2;\omega_1,-\omega_3\right)\\&=\varepsilon_{i,lk}\left(-\omega_3;\omega_2,\omega_1\right);\end{aligned}$$

the last equation is (108.3). If we agree to relate the three successive argument frequencies to the three successive tensor indices, we can permute the latter in any manner, provided that the arguments are similarly permuted.

The requirement that dissipation be absent would by itself lead only to a weaker condition, that the sum (108.10) be zero:

$$\omega_3\varepsilon_{i,kl}\left(\omega_1,\omega_2\right)-\omega_1\varepsilon_{k,il}\left(-\omega_3,\omega_2\right)-\omega_2\varepsilon_{l,ki}\left(\omega_1,-\omega_3\right)=0. \tag{108.12}$$

The above derivation cannot be applied directly when $\omega_1=\omega_2\equiv\omega$, since the Manley-Rowe relations then reduce to just the conservation of the total energy. The equation

$$\varepsilon_{i,kl}(\omega,\omega)=\varepsilon_{k,il}(-2\omega,\omega)=\varepsilon_{l,ki}(\omega,-2\omega) \tag{108.13}$$

can, however, be derived simply on grounds of continuity by taking the limit of (108.11). If both frequencies ω_1 and ω_2 tend to zero, the tensor $\varepsilon_{i,kl}$ becomes completely symmetrical. This symmetry expresses just the fact that in the static case the induction $\mathbf{D}$ can be found by differentiating the free energy with respect to $\mathbf{E}$: $D_i=-4\pi\partial\tilde{F}/\partial E_i$, and so $\partial D_i/\partial E_k=\partial D_k/\partial E_i$. This shows that $\varepsilon_{i,kl}$ is symmetrical in the suffixes i and k, and therefore in all three suffixes.

If only one of the frequencies is zero, the relations (108.11) give

$$\varepsilon_{i,kl}(\omega,0)=\varepsilon_{l,ki}(\omega,-\omega), \tag{108.14}$$

and

$$\varepsilon_{i,kl}(\omega,0)=\varepsilon_{k,il}(-\omega,0)=\varepsilon_{k,il}(\omega,0); \tag{108.15}$$

by (108.5), the real functions $\varepsilon_{k,il}(\omega,0)$ are even functions of ω. The tensor $\varepsilon_{i,kl}(\omega,0)$ describes a linear electric-optical effect, the change in the permittivity of the crystal in a static electric field, and it is therefore the same as the tensor α_{ikl} defined in (100.4):

$$\varepsilon_{i,kl}(\omega,0)=\alpha_{ikl}(\omega);$$

from (108.15), it is symmetrical in the suffixes i,k, as it should be. The tensor $\varepsilon_{l,ki}(\omega,-\omega)$ describes another effect, the presence in the medium of a static dielectric polarization proportional to the square of the applied weak periodic field; compare the second term in (108.6). The equation (108.14) thus states the relation between these two effects.

By similar arguments using the non-linear susceptibility, which is a "cross" between electric and magnetic quantities, we could recover the relation between the magneticoptical Faraday effect and the magnetization of a medium by a rotating electric field, as given by (101.15) and (101.25).

As already mentioned, for media invariant under spatial inversion, there is no secondorder non-linearity. In such cases, the non-linear effects begin with the cubic terms in the expansion of $\mathbf{D}(\mathbf{E})$. The corresponding third-order non-linear permittivity is a tensor of rank four, a function of three independent frequencies, $\varepsilon_{i.klm}(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$. Its symmetry
properties are exactly analogous to those of the second-order permittivity tensor: if we define a fourth frequency $\omega_4 = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3$ and write it as $\varepsilon_{i,klm}(-\omega_4; \omega_1, \omega_2, \omega_3)$, then the suffixes can be permuted in any manner if the four arguments are permuted similarly.

The third-order non-linearity may be important even when there is quadratic nonlinearity, owing to the specificity of the effects it causes.

12.5.3 §109. Self-focusing

In this section we shall discuss optical effects arising from the non-linear variation of the field at the primary wave frequency. That is, we consider the non-linear contribution to $\mathbf{D}$ at the frequency ω of the monochromatic field $\mathbf{E}$. In the quadratic terms there is no such contribution, as they contain only the frequencies 2ω and zero. The first non-zero effect comes from the cubic non-linearity and occurs in terms having the form EEE^* (frequency $\omega + \omega - \omega = \omega$).

In the rest of this section, the medium (liquid or gas) will be assumed isotropic. The relevant third-order terms in the induction then have the general form

$$\mathbf{D}^{(3)} = \alpha(\omega)|\mathbf{E}|^2\mathbf{E} + \beta(\omega)\mathbf{E}^2\mathbf{E}^*; \tag{109.1}$$

they involve two independent coefficients, which in a transparent medium are real even functions of the frequency. This number of independent coefficients is in agreement with the symmetry properties of the tensor $\varepsilon_{i,klm}(-\omega; -\omega, \omega, \omega)$. With these values of the arguments, the tensor is symmetrical in the pairs of suffixes i, k and l, m; in an isotropic medium, such a tensor has two independent components. In the low-frequency limit, as noted in §108, the tensor must be symmetrical in all suffixes, and in an isotropic medium therefore proportional to the combination $\delta_{ik}\delta_{lm} + \delta_{il}\delta_{km} + \delta_{im}\delta_{kl}$. This means that

$$\alpha(0) = 2\beta(0) \tag{109.2}$$

The expression (109.1) can be simplified in the case of a linearly polarized field $\mathbf{E}$. With this polarization, the complex vector $\mathbf{E}$ reduces to a real vector multiplied by a common phase factor; the expressions $|\mathbf{E}|^2\mathbf{E}$ and $\mathbf{E}^2\mathbf{E}^*$ then become

$$\mathbf{D}^{(3)} = (\alpha + \beta)|\mathbf{E}|^2\mathbf{E} \tag{109.3}$$

A similar simplification occurs when the field $\mathbf{E}$ is circularly polarized; then $\mathbf{E}^2 = 0$, and (109.1) reduces to

$$\mathbf{D}^{(3)} = \alpha|\mathbf{E}|^2\mathbf{E}. \tag{109.4}$$

In either case, the induction is polarized in the same way as $\mathbf{E}$. In the general case of elliptical polarization, however, the directions and ratios of the principal axes of the ellipses are not the same for $\mathbf{E}$ and $\mathbf{D}^{(3)}$.

The relation $\mathbf{D} = \mathbf{D}^{(1)} + \mathbf{D}^{(3)} = \varepsilon\mathbf{E} + \mathbf{D}^{(3)}$, where $\varepsilon(\omega)$ is the ordinary linear permittivity. must be substituted in Maxwell's equations, which are to be written (eliminating the magnetic field $\mathbf{H}$) as

$$\operatorname{curl}\operatorname{curl}\mathbf{E}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{D}}{\partial t^2}=0 \tag{109.5}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{D}=0 \tag{109.6}$$

It is important that these non-linear equations allow an exact solution as a monochromatic plane wave,

$$\mathbf{E}=\mathbf{E}_0e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} \tag{109.7}$$

with linear or circular polarization: for such waves $|\mathbf{E}|^2=|\mathbf{E}_0|^2$, so that formulae (109.3) and (109.4) are of the same type as in the linear case with the permittivity depending on the field amplitude; we can therefore take the real part after solving the equations. The relation between $\mathbf{D}$ and $\mathbf{E}$ in these cases will be written as

$$\mathbf{D}=\left(\varepsilon+\frac{2c^2}{\omega^2}\eta\,|\mathbf{E}_0|^2\right)\mathbf{E} \tag{109.8}$$

with the notation (which will later be convenient) $\eta=\omega^2(\alpha+\beta)/2c^2$ for a linearly polarized wave or $\eta=\omega^2\alpha/2c^2$ for a circularly polarized one.

Substitution of (109.8) in (109.6) gives $\operatorname{div}\mathbf{E}=0$, the field remaining transverse as in the linear theory. When this is taken into account, the substitution of (109.7) in (109.5) yields the dispersion relation

$$k^2=\omega^2\varepsilon/c^2+2\eta\,|\mathbf{E}_0|^2\,. \tag{109.9}$$

The phase velocity ω/k now depends on the wave amplitude as well as on the frequency. If $\eta>0$, the phase velocity decreases with increasing amplitude, and we have a focusing medium (the significance of this term will be explained later). If $\eta<0$, the phase velocity increases with the amplitude, and this is a defocusing medium.

The use of the non-linear relation (109.1) presupposes, of course, that there is only slight non-linearity: the higher-order terms must be small in comparison with the terms in $\mathbf{D}^{(3)}$. Qualitatively new effects may arise by the "build-up" of non-linearity effects over long intervals of time and over large distances. A natural formulation of the problem here is to consider an almost monochromatic wave,

$$\mathbf{E}=\mathbf{E}_0(t,\mathbf{r})e^{i(k_0x-\omega t)}, \tag{109.10}$$

where $\mathbf{E}_0(t,\mathbf{r})$ is a slowly varying function of time and coordinates, which has only a slight relative change over times $\sim 1/\omega$ and distances $\sim 1/k_0$. The wave vectors that occur in the Fourier expansion of this field are distributed over a small range of values about the vector $\mathbf{k}_0$, which is in the x direction and whose magnitude we regard as related to ω by

$$k_0^2=\omega^2\varepsilon(\omega)/c^2, \tag{109.11}$$

as in the linear theory. We now derive an equation for $\mathbf{E}_0(t,\mathbf{r})$.

First of all, we note that in (109.5) grad div $\mathbf{E}$ is negligible in the term curl curl $\mathbf{E}=$ grad div $\mathbf{E}-\triangle\mathbf{E}$: by (109.6), the divergence of the field is

$$\operatorname{div}\mathbf{E}\cong-\eta\left(2c^2/\varepsilon\omega^2\right)\mathbf{E}_0\cdot\operatorname{grad}|\mathbf{E}_0|^2\,;$$

it is therefore non-zero only through the derivatives of the slowly varying function $\mathbf{E}_0$, and it is additionally small because the non-linear terms are small; such quantities are negligible. We thus have

$$\text{curl curl } \mathbf{E} \cong - \wedge \mathbf{E} \cong \left[{k_0}^2 \mathbf{E}_0 - 2ik_0 \frac{\partial \mathbf{E}_0}{\partial x} - \triangle_\perp \mathbf{E}_0 \right] e^{i(\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r} - \omega t)}$$

where $\triangle_\perp = \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$; the term in the second derivative $\partial^2 \mathbf{E}_0/\partial x^2$ is omitted, since it does not contain the large factor k_0. The transverse derivatives, however, may be large in comparison with the longitudinal ones.

The calculation of $\partial^2 D^{(1)}/\partial t^2$ is similart to the derivation of (80.10) and gives

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{D}^{(1)}}{\partial t^2} &\cong -\frac{1}{c^2}\left[\omega^2 \varepsilon(\omega)\mathbf{E}_0 + i\frac{\partial\left(\omega^2\varepsilon\right)}{\partial\omega}\frac{\partial \mathbf{E}_0}{\partial t} \right] e^{i(\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \\ &= -\left(k_0^2 \mathbf{E}_0 + 2i\frac{k_0}{u}\frac{\partial \mathbf{E}_0}{\partial t} \right) e^{i(\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \end{aligned}$$

with the group velocity u defined by

$$\frac{1}{u} = \frac{\mathrm{d}k_0}{\mathrm{d}\omega} = \frac{1}{c}\frac{\partial(\omega\sqrt{\varepsilon})}{\partial\omega} \tag{109.12}$$

In the derivative of $\mathbf{D}^{(3)}$, it is sufficient to retain the term

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{D}^{(3)}}{\partial t^2} = -2\eta(\omega)\left|\mathbf{E}_0\right|^2 \mathbf{E}$$

neglecting the term in the small derivative $\partial \mathbf{E}_0/\partial t$.
Substituting these expressions in (109.5), we have finally

$$ik_0\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{u}\frac{\partial}{\partial t}\right)\mathbf{E}_0 = -\frac{1}{2}\triangle_1 \mathbf{E}_0 - \eta(\omega)\left|\mathbf{E}_0\right|^2 \mathbf{E}_0 \tag{109.13}$$

The combination of derivatives on the left expresses the fact that the amplitude perturbations are transmitted in the direction of propagation of the wave, at the group velocity.

With this equation, we can examine the stability of an infinite plane wave described by the exact solution (109.7), (109.8) (V. I. Bespalov and V. I. Talanov, 1966). We shall see that the wave is unstable in a focusing medium. ‡

According to (109.9), in the exact solution (109.7) $k \cong k_0 + \eta E_0^2/k_0$, with k_0 from (109.11); in a linearly polarized wave, the amplitude $\mathbf{E}_0$ may be defined as a real vector. Hence, if we write the wave (109.7) in the form (109.10), we must put in the latter $\mathbf{E}_0(x) = \mathbf{E}_0 \exp\left(ix\eta {E_0}^2/k_0\right)$. This acts as the amplitude of the unperturbed wave. We shall consider the steady-state problem of the spatial evolution of perturbations along the direction of propagation of the wave. Accordingly, the amplitude of a wave subject to a small perturbation is written

$$\mathbf{E}_0(\mathbf{r}) = \left\{\mathbf{E}_0 + \delta\mathbf{E}(\mathbf{r})\right\} \exp\left(ix\eta E_0^2/k_0\right). \tag{109.14}$$

We shall assume that $\delta\mathbf{E}$ is parallel to $\mathbf{E}_0$.
Substitution of (109.14) in (109.13) gives

$$ik_0 \partial\delta E/\partial x = -\frac{1}{2}\triangle_\perp \delta E - \eta E_0^2\left(\delta E + \delta E^*\right) \tag{109.15}$$

We put

$$\delta E = Ae^{i(\mathbf{q}\cdot\mathbf{r} + \gamma x)} + B^* e^{-i(\mathbf{q}\cdot\mathbf{r} + \gamma x)} \tag{109.16}$$

where q is a vector in the yz-plane. Substituting this expression in (109.15) and collecting

[0]† The only difference is that here $\hat{f} = \partial^2\hat{\varepsilon}/\partial t^2, f(\omega) = -\omega^2\varepsilon(\omega)$.
‡ This was earlier noted by R. V. Khokhlov (1965).

the groups of terms in $\exp\{\pm i(\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}+\gamma x)\}$, we obtain the two equations

$$\left(\frac{1}{2}q^2-\eta E_0^2+k_0\gamma\right)A-\eta E_0^2 B=0,$$
$$-\eta E_0^2 A+\left(\frac{1}{2}q^2-\eta E_0^2-k_0\gamma\right)B=0.$$

The condition that their determinant be zero gives

$$\gamma=\pm\,(q/2k_0)\sqrt{\left(q^2-4\eta E_0^2\right)}$$

When $\eta>0$ and

$$q^2<4\eta E_0^2 \tag{109.17}$$

γ is imaginary, so that δE in (109.16) contains an exponentially increasing term, and the wave is therefore unstable. The maximum instability growth rate is of the order of the nonlinear correction to the wave vector.

One manifestation of this instability is the self-focusing of a light beam of finite width propagated in a focusing medium. The phenomenon occurs because, if the field amplitude decreases from the axis to the periphery of the beam, the permittivity of the medium (which depends on the amplitude) also decreases in that direction (if $\eta>0$), and the medium behaves as a focusing lens (G. A. Askar'yan, 1962). The behaviour of the beam is determined by the interplay of two opposing tendencies, namely this focusing and the broadening due to diffraction.

We shall show, first of all, that these tendencies may cancel out, in the sense that (if $\eta>0$) equation (109.13) has a solution in the form of a steady beam that undergoes no broadening. This self-channelling is a specifically non-linear effect. In the linear theory, any beam with a finite cross-section is broadened by diffraction. We shall take only the onedimensional case where the field $\mathbf{E}$ depends only on one transverse coordinate y and is polarized in the z-direction and propagated in the x-direction † An analytical solution can then be obtained (V.I. Talanov, 1965). We here ignore the fact that a beam of infinite width (in the z-direction) is certainly unstable, because perturbations with small q_z can occur in it, which are unstable by (109.17).

We write

$$E_{0z}=F(y)e^{i\kappa x} \tag{109.18}$$

with a small quantity κ which acts as a correction to the wave number k_0. The function $F(y)$ is real. Substitution in (109.13) gives for it the equation

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{d}^2F/\mathrm{d}y^2=k_0\kappa F-\eta F^3 \tag{109.19}$$

The first integral is

$$\frac{1}{2}(\,\mathrm{d}F/\mathrm{d}y)^2-k_0\kappa F^2+\frac{1}{2}\eta F^4=\text{ constant}.$$

We are interested in the solution for which F and $\mathrm{d}F/\mathrm{d}y$ tend to zero as $|y|\to\infty$. Accordingly, we take the constant to be zero, and a straightforward integration then gives

$$F=(2k_0\kappa/\eta)^{1/2}\operatorname{sech}\left[(2k_0\kappa)^{1/2}\,y\right] \tag{109.20}$$

y being measured from the centre of the beam. The width of the beam in the y-direction is

$$\delta\sim(k_0\kappa)^{-1/2}\sim 1/\sqrt{\eta F(0)}.$$

Since the energy flux along the beam is $W \sim E^2(0)\delta, \delta$ is proportional to $1/W$ and the beam becomes narrower as the power carried by it increases.

A self-channelled beam of this kind is a special case where the focusing properties of the medium are exactly balanced by diffraction. Other beams may either diverge or converge. First, let us derive a qualitative criterion for self-focusing of an actual beam with a finite cross-section (R. Y. Chiao, E. M. Garmire, and C. H. Townes, 1964). This can be done immediately by using the instability condition (109.17). In a beam with characteristic radius R, perturbations can occur whose wavelengths transverse to the beam axis are less than R, i.e. for which $q \gtrsim 1/R$. The condition (109.17) gives the upper limit of q values which lead to instability. The beam will therefore be unstable with respect to focusing if

$$E_0{}^2 R^2 \eta \gtrsim 1. \tag{109.21}$$

The power carried by the beam is the product $E_0{}^2 R^2$. The critical value of this power beyond which self-focusing begins is independent of the cross-sectional area of the beam.

It is also possible to establish an exact (not just order-of-magnitude) sufficient condition for self-focusing of a beam (S. N. Vlasov, V. A. Petrishchev, and V. I. Talanov, 1971).

For a steady linearly polarized light beam, but with no initial assumptions about the dependence on x, the equation for the function $E_0(x, \rho)$ is

$$ik_0 \partial E_0/\partial x = -\frac{1}{2}\triangle_\perp E_0 - \eta \left|E_0{}^2\right| E_0 \tag{109.22}$$

ρ being the two-dimensional position vector in the yz-plane, in which the differential operators $\triangle_\perp$ and $\mathbf{grad}_\perp$ act. It is easy to verify that this equation gives

$$\partial \left|E_0\right|^2 / \partial x + \operatorname{div}_\perp \mathbf{j} = 0, \tag{109.23}$$

where

$$\mathbf{j} = (i/2k_0)\left(E_0 \operatorname{grad}_\perp E_0 * - E_0 * \operatorname{grad}_\perp E_0\right).$$

Hence, in turn, it follows that the integral

$$N = \int_{-\infty}^{\infty} \left|E_0\right|^2 \, \mathrm{d}^2\rho \tag{109.24}$$

is "conserved" (i.e. independent of x), as is

$$\mathscr{E} = \frac{1}{2k^2}\int_{-\infty}^{\infty} \left\{\left|\operatorname{grad}_\perp E_0\right|^2 - \eta \left|E_0\right|^4\right\} \mathrm{d}^2\rho \tag{109.25}$$

a result which is derived immediately by differentiating with respect to x and using (109.22). We assume, of course, that E_0 decreases sufficiently rapidly as $\rho \to \infty$, so that both integrals, as well as (109.26) below, converge. †

We will show that the behaviour of the beam is determined by the sign of the integral $\mathcal{E}$. When $\mathscr{E} > 0$ the beam is divergent on average; when $\mathscr{E} < 0$ it is focused. The proof is based on a simple equation that can be derived for the mean beam radius R defined by

$$R^2(x) = \frac{1}{N}\int_{-\infty}^{\infty} \rho^2 \left|E_0\right|^2 \, \mathrm{d}^2\rho \tag{109.26}$$

To derive this, we write, using (109.23),

[0]† As regards the derivatives present, equation (109.22) is similar to the two-dimensional Schrodinger's equation, with x in place of the time. In this analogy, N and $\mathscr{E}$ act as the particle number and the energy. The nonlinearity of this equation does not affect the derivation of these conservation laws.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int |E_0|^2\,\rho^2\;\mathrm{d}^2\rho = -\int \mathrm{div}_\perp\,\mathbf{j}\cdot\rho^2\;\mathrm{d}^2\rho = 2\int \mathbf{j}\cdot\rho\;\mathrm{d}^2\rho.$$

Differentiating again with respect to x, we substitute $\partial E_0/\partial x$ from (109.22) and integrate twice by parts, obtaining $N\;\mathrm{d}^2R^2/\mathrm{d}x^2 = 4\mathscr{E}$. Hence

$$R^2(x) = 2\mathscr{E}\,(x-x_0)^2/N + R_0^2, \tag{109.27}$$

where x_0 and R_0 are constants. We see that, when $\mathscr{E} < 0$, complete focusing of the beam is attained at a finite distance in the direction of propagation, its radius R becoming zero. †

This result, derived with the approximate equation (109.13), cannot have a literal physical significance near the focus itself, where the assumptions made in obtaining that equation are invalid. We need only mention that, when the field energy density increases without limit in exact focusing, there is no justification for retaining only the lowest (the third) power of the non-linearity. However, the possibility of self-focusing of the beam, to such an extent that the non-linearity is no longer small, is important. It should be emphasized that the condition derived is sufficient but not necessary. A beam with $\mathscr{E} < 0$ certainly undergoes complete focusing, but the divergence on average of a beam with $\mathscr{E} \geqslant 0$ is not inconsistent with the focusing of some internal part of it.

12.5.4 §110. Second-harmonic generation

In §107, only some general relations have been considered which relate to frequency transformation processes characteristic of non-linear optics. We shall now describe the quantitative theory of a typical process of this type, namely second-harmonic generation, i.e the excitation of an electromagnetic field with frequency 2ω by one with frequency ω (R. V. Khokhlov, 1960; J. A. Armstrong, N. Bloembergen, J. Ducuing and P. S. Pershan, 1962).

Second-harmonic generation is a non-linear second-order effect. It resides in the nonlinear susceptibility tensor

$$\varepsilon_{i,kt}(-2\omega;\omega,\omega) \tag{110.1}$$

and therefore does not occur in media which allow spatial inversion. The tensor (110.1) is symmetrical in the suffixes k and l; its symmetry properties in various crystals are the same as for the piezoelectric tensor (§17). We shall assume that there is no absorption in the medium, so that the $\varepsilon_{i,kl}$ are real quantities.

The problem of second-harmonic generation may be stated as follows. Let a monochromatic plane wave of frequency ω be incident on the plane surface of a crystal. As

well as the reflected and two (in a doubly refracting crystal) refracted waves with the same frequency, a reflected wave and refracted waves with frequency 2ω are also formed. The waves with this frequency in the crystal constitute the solution of equations (109.5) and (109.6), in which the non-linear term $\mathbf{D}^{(2)}$ in the induction is to be expressed in terms of the fundamental wave field. The amplitudes of all these waves are expressed in terms of the incident wave amplitude by means of the boundary conditions, which will not be discussed here. The amplitudes of the waves with frequency 2ω are, of course, small in proportion to the non-linear susceptibility. †

The refracted waves are propagated into the crystal as if it were infinite. The nonlinearity effects build up during this process, and the harmonic intensities may become large, with energy

[0]† If the distribution of $|E_0|^2$ over the beam cross-section is unchanged along the beam, then R^2 = constant and $\mathscr{E} = 0$. The converse is not necessarily true, however: there may exist solutions with $\mathscr{E} = 0$, so that R = constant, but with the distribution depending on x.

transferred to them from the fundamental frequency. This is the process to be considered here. The conditions at the crystal surface then act only as "initial" conditions which specify a small but non-zero amplitude of the second-harmonic field. The same conditions specify, for a given direction of the incident wave, the wave vectors $\mathbf{k}_1$ and $\mathbf{k}_2$ of the first and second harmonics in the crystal.

It will be seen later that an effective energy transfer occurs only if the synchronism condition holds for the fundamental and the harmonic: ‡

$$k_2 \cong 2k_1. \tag{110.2}$$

It should be emphasized that the presence of dispersion is of fundamental importance in formulating the problem of the generation of just one second harmonic. When dispersion is absent, the condition (110.2) is necessarily satisfied in refraction, as well as similar conditions for the higher harmonics also ($\mathbf{k}_3 \cong 3\mathbf{k}_1$, and so on). When dispersion is present, this is not so, and it can be assumed that if the synchronism condition is satisfied for the second harmonic it is not satisfied for the others. It should be emphasized that the condition (110.2) itself can in practice be satisfied only if the fundamental wave and the harmonic have different types of polarization and therefore different dispersion relations.

The field in the medium may be written as a superposition of two waves:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = \mathrm{re}\left[\mathbf{e}_1 E_{10} e^{i(\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{r}-\omega t)} + \mathbf{e}_2 E_{20} e^{i(\mathbf{k}_2\cdot\mathbf{r}-2\omega t)}\right], \tag{110.3}$$

where, according to the condition (110.2),

$$k_2 = 2k_1 + q \tag{110.4}$$

with $q \ll k_1$. The wave amplitudes are written as products $\mathbf{E}_0 = \mathbf{e}E_0$, with $\mathbf{e}$ a unit polarization vector ($\mathbf{e}\cdot\mathbf{e}^* = 1$). In the linear approximation these amplitudes would be constant; when the non-linearity is taken into account, they are functions of the coordinates which vary only slowly (i.e. only slightly over distances $\sim 1/k_1$).

The equations for the amplitudes of the two waves are found by substituting (110.3) in Maxwell's equations (109.5), (109.6), and collecting terms with the same time dependenceWe shall not go through these straightforward but laborious calculations in detail, but give only some comments on fundamental points.

We shall seek solutions describing the steady generation of the second harmonic in the crystal by a travelling fundamental wave. Such solutions are independent of time. With exact synchronism ($\mathbf{q} = 0$) the equations for the amplitudes would not explicitly contain the coordinates at all; with inexact synchronism, the coordinates appear only as $\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}$ in the factor $e^{-iq\cdot r}$. Taking the direction of q as the z-axis, we can therefore look for solutions that depend only on z. With the above formulation (a wave ω incident on the surface of the crystal), the problem is homogeneous in planes parallel to the surface. The z axis is therefore perpendicular to the surface; the vector q necessarily is so also, according to the boundary conditions.

In the linear approximation, waves in an anisotropic (non-gyrotropic) medium are linearly polarized (see §97); for these e can be defined as a real vector, and such will be understood here by $\mathbf{e}_1$ and $\mathbf{e}_2$ for the two waves. If the amplitude $\mathbf{E}_0$ of each wave is resolved along the directions of $\mathbf{e}, \mathbf{k}$ and $\mathbf{e}\times\mathbf{k}$, then the components in the two latter directions are small because the derivatives $\mathrm{d}E_0/\mathrm{d}z$ (which appear as a result of the non-linearity) are small. The

[0]† The calculation of the reflection and refraction conditions at the boundary of a non-linear medium is discussed for several particular cases by N. Bloembergen and P. S. Pershan, Physical Review 128, 606, 1962.

‡ The nature of this condition is particularly clear from the quantum standpoint, the second-harmonic generation being regarded as a "fusion" of two photons into one. The equation $\hbar\mathbf{k}_2 = 2\hbar\mathbf{k}_1$ expresses the fact that momentum is conserved in this process.

components along $\mathbf{e}$ are approximately equal to the magnitudes E_0. Equations for them are obtained by multiplying equation (109.5) by $\mathbf{e}_1$ and by $\mathbf{e}_2$. Since waves with $E_0 =$ constant are exact solutions of Maxwell's equations in the linear approximation, the linear terms in these equations that do not involve derivatives with respect to z cancel out. The terms involving the components of $\mathbf{E}_0$ in the directions of $\mathbf{k}$ and $\mathbf{e} \times \mathbf{k}$, which might be of the same order as those containing the derivatives $\mathrm{d}E_0/\mathrm{d}z$, are found to disappear when the multiplication is carried out; this occurs because the induction $\mathbf{D}$ is orthogonal to both $\mathbf{k}$ and $\mathbf{e} \times \mathbf{k}$ (see (97.3)).

Since the amplitudes are assumed to vary only slowly with the coordinates, we can neglect the second derivatives of $\mathbf{E}_0$ with respect to z. Hence, for example, the expression

$$e_{2i}\left\{(\text{ curl curl })_{ik} - \frac{4\omega^2}{c^2}\varepsilon_{ik}(2\omega)\right\} e_{2k}E_{20}e^{i\mathbf{k}_2\cdot\mathbf{r}},$$

in the equation for $\mathbf{E}_2$ multiplied by $\mathbf{e}_2$, becomes approximately

$$2i\mathbf{e}_2 \cdot [\mathbf{k}_2 \times (\mathbf{I} \times \mathbf{e}_2)]\,\mathrm{d}E_{20}/\mathrm{d}z,$$

where I is a unit vector in the z-direction, and similarly for $\mathbf{E_1}$.
The final equations obtained by these procedures are

$$\left.\begin{aligned} \alpha_2\ \mathrm{d}E_{20}/\mathrm{d}z &= -i\eta e^{-iqz}E_{10}^2 \\ \alpha_1\ \mathrm{d}E_{10}*/\mathrm{d}z &= i\eta e^{-iqz}E_{10}E_{20}{}^* \end{aligned}\right\} \tag{110.5}$$

with the notation †

$$\left.\begin{aligned} \eta &= (\omega^2/2c^2)\,\varepsilon_{i,kl}(\omega,\omega)e_{2i}e_{1k}e_{1l} \\ \alpha_1 &= \mathbf{l}\cdot[\mathbf{e}_1 \times (\mathbf{k}_1 \times \mathbf{e}_1)] \\ \alpha_2 &= \tfrac{1}{2}\mathbf{l}\cdot[\mathbf{e}_2 \times (\mathbf{k}_2 \times \mathbf{e}_2)] \cong \mathbf{l}\cdot[\mathbf{e}_2 \times (\mathbf{k}_1 \times \mathbf{e}_2)] \end{aligned}\right\} \tag{110.7}$$

Multiplying the first equation (110.5) by $E_{20}{}^*$ and the second by E_{10} and adding, we obtain a first integral:

$$\alpha_1 |E_{10}|^2 + \alpha_2 |E_{20}|^2 = \text{ constant } \equiv P. \tag{110.8}$$

This expresses the fact that the total energy flux in the two waves in the z-direction is constant. †

It is now convenient to change from complex quantities to real ones, namely the absolute values and phases of E_{10} and E_{20}. To make the equations as simple as possible, we define new unknowns $\rho_1, \rho_2, \phi_1, \phi_2$ as dimensionless quantities by

$$E_{10} = \sqrt{(P/\alpha_1)}\,\rho_1 e^{i\phi_1}, \quad E_{20} = \sqrt{(P/\alpha_2)}\,\rho_2 e^{i\phi_2} \tag{110.9}$$

The equations (110.5) are invariant under the transformation $\phi_1 \to \phi_1 + c, \phi_2 \to \phi_2 + 2c$. It is therefore possible to separate the equations for the functions ρ_1, ρ_2 and the invariant combination $2\phi_1 - \phi_2$, to obtain a closed set of equations

$$\mathrm{d}\rho_1/\mathrm{d}\zeta = -\rho_1\rho_2 \sin\theta, \quad \mathrm{d}\rho_2/\mathrm{d}\zeta = \rho_1^2 \sin\theta \tag{110.10}$$

$$\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}\zeta = -s - \left(2\rho_2 - \rho_1^2/\rho_2\right)\cos\theta \tag{110.11}$$

where

$$\theta = 2\phi_1 - \phi_2 - s\zeta, \tag{110.12}$$

the dimensionless variable

$$\zeta = z\eta_{\surd}\left(P/\alpha_1^2\alpha_2\right), \tag{110.13}$$

and the dimensionless parameter

$$s = (q/n)_{\surd}\left(\alpha_1^2\alpha_2/P\right) \tag{110.14}$$

The first integral (110.8) then becomes

$$\rho_1^2 + \rho_2^2 = 1 \tag{110.15}$$

Let us consider the case of exact synchronism, where $q = 0$ and therefore $s = 0$. Then equations (110.10) and (110.11) have another first integral

$$\rho_1^2\rho_2\cos\theta = \text{constant} \equiv \delta, \tag{110.16}$$

where $\delta^2 \leqslant 4/27$, as is easily seen from equations (110.15) and (110.16) and the condition $|\cos\theta| \leqslant 1$. With these two integrals, the solution of equations (110.10) is reduced to quadratures, in the form of the elliptic integral

$$\zeta = \pm\frac{1}{2}\int_{\rho_2^1(\rho)}^{\rho_2^2(\zeta)} \frac{\mathrm{d}u}{\left[u(1-u)^2 - \delta^2\right]^{1/2}} \tag{110.17}$$

the choice of sign depends on the sign of the initial value of $\sin\theta$ for $\zeta = 0$. The cubic equation

$$u(1-u)^2 - \delta^2 = 0 \tag{110.18}$$

† The time-averaged energy flux density in the $\mathbf{E}_1$ wave is

$$\begin{aligned}\bar{S}_{1z} &= c\,\mathrm{re}\mathrm{I}\cdot\left[\mathbf{E}_{10}*\times\mathbf{H}_{10}\right]/8\pi \\ &= c^2\mathrm{I}\cdot\left[\mathbf{E}_{10}*\times(\mathbf{k}_1\times\mathbf{E}_{10})\right]/8\pi\omega \\ &= c^2\alpha_1\left|E_{10}\right|^2/8\pi\omega\end{aligned}$$

and similarly for the $\mathbf{E}_2$ wave.
has (when $\delta^2 \leqslant 4/27$) three real positive roots, two of them less than unity, which we denote by ${\rho_a}^2$ and ${\rho_b}^2$ with ${\rho_a}^2 \leqslant {\rho_b}^2+$ The function ${\rho_2}^2(\zeta)$ defined by (110.17) varies periodically between these values, the period being

$$\int_{\rho_a^2}^{\rho_b^2} \frac{\mathrm{d}u}{\left[u(1-u)^2 - \delta^2\right]^{1/2}} \tag{110.19}$$

The function ${\rho_1}^2(\zeta) = 1 - {\rho_2}^2(\zeta)$ varies similarly, one being a minimum when the other is a maximum.

The value ${\rho_a}^2$ is to be identified with the second harmonic ${\rho_2}^2(0)$ given by the boundary conditions at the crystal surface ($z = 0$). We see that, in the z-direction into the crystal, there is a periodic transfer of energy from the fundamental to the second harmonic and back. When $\rho_2(0)$ decreases, the period of this process becomes longer, tending logarithmically to infinity as $\rho_2(0) \to 0$. The limiting value $\rho_2(0) = \rho_a = 0$ corresponds to the solution

$$\rho_1 = \operatorname{sech}\zeta, \quad \rho_2 = \tanh\zeta, \tag{110.20}$$

which is obtained from (110.17) for $\delta = 0$ by elementary integration; in this solution, the second-harmonic amplitude increases monotonically, and as $\zeta \to \infty$ all the energy is asymptotically transferred from the fundamental to the harmonic.

Let us now consider the opposite case where the amplitude ρ_2 remains everywhere small in comparison with ρ_1. We shall see that this corresponds to a considerable loss of synchronism of the waves.

When $\rho_2 \ll \rho_1$, we can as a first approximation regard ρ_1 as a constant $\rho_1(0)$, and write the equations for ρ_2 and θ as

$$\mathrm{d}\rho_2/\mathrm{d}\zeta = \rho_1^2(0)\sin\theta, \quad \mathrm{d}\theta/\mathrm{d}\zeta = -\mathrm{s} + \left[\rho_1^2(0)/\rho_2\right]\cos\theta$$

The solution of these equations that is zero at the initial point $\zeta = 0$ is

$$\rho_2(\zeta) = (2/s)\rho_1^2(0)\sin\frac{1}{2}s\zeta, \quad \theta = \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}s\zeta. \tag{110.21}$$

These give the variation of the field over one interval $0 \leqslant \zeta \leqslant 2\pi/s$ (i.e. $0 \leqslant x \leqslant 2\pi/q$), after which the process is repeated periodically. ‡ The condition $\rho_2 \ll \rho_1$ signifies that we must have ${\rho_1}^2(0)/s \ll \rho_1(0)$, i.e. $s \gg \rho_1(0)$, or

$$qz_0 \gg 1, \quad z_0 \sim 1/\eta\rho_1(0)\sqrt{P}.$$

This is the condition for a comparatively large loss of synchronism. The value of q determines in all cases which effect limits the generation of the harmonic (i.e. the increase in the amplitude ρ_2) -whether it is the linear effect of loss of synchronism when $qz_0 \gg 1$, or the non-linear effects when $qz_0 \ll 1$.§

Hitherto in this section, we have everywhere referred to second-harmonic generation from the fundamental frequency. The equations also describe the converse effect, however,

namely the parametric amplification of a weak signal with frequency ω in the field of strong radiation with frequency 2ω. Here we shall consider only this one process, but it is the simplest case of a more general phenomenon, the amplification of signals with different frequencies ω_2 and $\omega_1 - \omega_2$ in the field of a strong wave with frequency ω_1 (S. A. Akhmanov and R. V. Khokhlov, 1962; R. H. Kingston, 1962).

We should first of all emphasize the following difference between this process and second-harmonic generation. The latter can begin from zero intensity of the harmonic. The amplification of the fundamental, however, depends on a non-zero initial intensity of it, however small: if $\rho_1(0) = 0$ at the starting-point, then it will remain so, for equations (110.10) show that the derivatives of ρ_1 and ρ_2 of all orders vanish with ρ_1.

Let us again consider the case of exact synchronism, and in addition let the initial value of the phase variable be $\theta(0) = -\frac{1}{2}\pi$; with exact synchronism, this value will be maintained. Then $\delta = 0$ since $\cos\theta = 0$, even though the initial values of ρ_1 and ρ_2 are not zero. The solution of equations (110.10) in this case is

$$\rho_1 = \operatorname{sech}(\zeta - \zeta_0), \quad \rho_2 = -\tanh(\zeta - \zeta_0), \tag{110.22}$$

where $\zeta_0 > 0$ is a constant. When ζ_0 is large, the initial value $\rho_1(0) = \operatorname{sech}\zeta_0$ is small. We see that the fundamental frequency waves are amplified in the z-direction into the crystal, at the expense of the harmonic intensity. The latter decreases to zero at $\zeta = \zeta_0$ and then increases again until asymptotically the whole intensity is concentrated in the harmonic. †

---

[0]† Between these roots, the polynomial on the left of (110.18) has a maximumat $u = \frac{1}{3}$, equal to $4/27 - \delta^2$; when $\delta^2 = 4/27$, this is zero, two real roots coincide, and they disappear for larger values of δ.

‡ In each successive period, π is to be added to the constant term in the phase variable θ. At the point where $\rho_2 = 0$, the phase ϕ_2 has no meaning and the phase difference θ may have a discontinuity.

§ The whole of this discussion is based on the assumption that $q \ll k_1$. This condition has been fully utilized in deriving equations (110.5), which do not involve the small parameter q/k_1. In dealing with the case $qz_0 \gg 1$, of course, we assume that it is compatible with the condition $q \ll k_1$.

12.5.5 §111. Strong electromagnetic waves

The formulation of the problem in §110 in terms of the generation of just one particular harmonic was dependent on the presence of dispersion. Let us now consider the opposite case, where dispersion may be regarded as absent throughout the relevant range of frequencies, so that the induction $\mathbf{D}(t)$ at every point is determined by the value of $\mathbf{E}(t)$ at the same instant. ‡ We shall regard the medium as isotropic; $\mathbf{D}$ and $\mathbf{E}$ are then parallel. In the present section, the non-linearity is not assumed small, and the function $D(E)$ is therefore arbitrary.

Neglecting absorption and dispersion is of fundamental significance, in the sense that the field equations then involve no parameters having the dimension of frequency or (equivalently) of length. This makes it possible to construct an exact solution which generalizes the usual one-dimensional plane wave of the linear approximation (A. V. Gaponov and G. I. Fredman, 1959).§

Let the wave be propagated in the x-direction, the electruc field be in the y-direction, and the magnetic field be in the z-direction; E_y and H_z will be denoted simply by E and H. Maxwell's equations

$$\operatorname{curl}\mathbf{H}=\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t},\quad \operatorname{curl}\mathbf{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}$$

become

$$-\frac{\partial H}{\partial x}=\frac{1}{c}\frac{\partial D}{\partial t}=\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial E}{\partial t},\quad -\frac{\partial E}{\partial x}=\frac{1}{c}\frac{\partial H}{\partial t}, \tag{111.1}$$

where by definition

$$\varepsilon(E)=\mathrm{d}D/\mathrm{d}E; \tag{111.2}$$

As $E\to 0,\varepsilon(E)$ tends to the ordinary permittivity ε_0.
We shall seek a solution in which the functions $E(t,x)$ and $H(t,x)$ may be expressed as functions of each other: $H=H(E)$. Equations (111.1) may then be written as

$$\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial E}{\partial t}+\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}E}\frac{\partial E}{\partial x}=0,\quad \frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}E}\frac{\partial E}{\partial t}+\frac{\partial E}{\partial x}=0. \tag{111.3}$$

In order for these two equations to be satisfied by non-zero values of the unknowns $\partial E/\partial t$ and $\partial E/\partial x$, their determinant must be zero. From this condition, $(\mathrm{d}H/\mathrm{d}E)^2=\varepsilon(E)$, and so

$$H=\pm\int_0^E\sqrt{\varepsilon(E)}\mathrm{d}E \tag{111.4}$$

Now substituting $\mathrm{d}H/\mathrm{d}E$ from (111.4) in one of the equations (111.3), we have

$$-\frac{(\partial E/\partial t)_x}{(\partial E/\partial x)_t}=\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)_E=\pm c/\sqrt{\varepsilon}.$$

Hence $x\mp ct/\sqrt{\varepsilon}$ may be any function of E. Denoting the inverse function by f, we have

$$E=f(x\mp ct/\sqrt{\varepsilon(E)}); \tag{111.5}$$

[0]† When $\zeta>\zeta_0$, the phase variable is to be given the value $\theta=\frac{1}{2}\pi$, and the sign of the hyperbolic tangent in $\rho_2(\zeta)$ changed.
‡ For uniformity of exposition in this chapter, we shall continue to refer to a non-linear relation between D and $\mathbf{E}$, assuming the medium non-magnetic. Actually, the phenomena in question usually relate to media with a non-linear dependence of $\mathbf{B}$ on $\mathbf{H}$.
§ This solution is analogous to the simple waves in one-dimensional flow of a compressible fluid (see FM, §94).

the two signs here correspond to the two directions of propagation of the wave. When the function f has been chosen, (111.5) determines implicitly the function $E(t,x)$. In weak fields, when we can take $\varepsilon = \varepsilon_0$, (111.5) becomes an ordinary plane wave with phase velocity $c/\sqrt{\varepsilon_0}$. The solution found exists only for $\varepsilon > 0$, in accordance with the stability condition (18.8). †

As the wave is propagated, the profile which it has at the initial instant becomes distorted, since different parts of it move at different velocities. Usually, $\varepsilon(E)$ decreases with increasing E, and tends to saturation. Then the points on the profile where E is greater will travel at higher speeds, so that the slope of the forward front becomes steeper; Fig. 60 shows the profile at successive times. At some instant, the profile turns over and would then have to become no longer one-valued. In reality, at this instant an electromagnetic shock



Fig. 60

wave (a discontinuity of E and H) is formed. The boundary conditions at the discontinuity have the same form (76.13) as on any moving surface. For a transverse plane wave they are

$$\left.\begin{aligned} H_2 - H_1 &= v\,(D_2 - D_1)/c \\ E_2 - E_1 &= v\,(H_2 - H_1)/c \end{aligned}\right\} \tag{111.6}$$

where the suffixes 1 and 2 denote the values of quantities before and behind the front respectively. Multiplication of these two equations gives for the shock wave velocity

$$v^2 = c^2\,(E_2 - E_1)\,/\,(D_2 - D_1) \tag{111.7}$$

In a shock wave there is dissipation of energy. Let Q be the rate of dissipation per unit area of the discontinuity surface. To calculate Q, we write the law of energy conservation for a cylindrical volume element in the medium with one end on each side of the discontinuity:

$$c\,(E_2 H_2 - E_1 H_1)/4\pi = v\,(U_2 - U_1) + Q. \tag{111.8}$$

The left-hand side is the difference of the energy fluxes through the two ends; the righthand side is the sum of the rate of change of the internal energy through the movement of the boundary of regions 1 and 2, and the energy dissipated at the boundary. The difference of the internal energies is (for constant density and temperature)

$$U_2 - U_1 = \frac{1}{4\pi}\int_{D_1}^{D_2} E\ \mathrm{d}D + \frac{1}{8\pi}\left(H_2^2 - H_1^2\right)$$

Using also equations (111.6) and (111.7), we can bring (111.8) to the form

$$Q = \frac{v}{4\pi}\left\{\frac{1}{2}\,(D_2 - D_1)\,(E_2 + E_1) - \int_{D_1}^{D_2} E\ \mathrm{d}D\right\}$$

If the shock wave is weak, i.e. the discontinuities in it are small, in calculating Q we can express the relation between D and E as an expansion

$$D(E) = D_1 + \varepsilon\,(E_1)\,(E - E_1) + \frac{1}{2}\varepsilon'\,(E_1)\,(E - E_1)^2\,,$$

where $\varepsilon'(E) = \mathrm{d}^2 D/\mathrm{d}E^2$. A straightforward calculation gives

$$Q = -v\varepsilon'\,(E_1)\,(E_2 - E_1)^3\,/48\pi. \tag{111.9}$$

The energy dissipation in a weak electromagnetic shock wave is therefore of the third order in the field discontinuity in the shock. Since $Q > 0$, when $\varepsilon' < 0$ we must have $E_2 > E_1$, as shown in Fig. 60.

The presence of the shock wave makes the solution derived above no longer valid: the expressions (111.4), (111.5) for the field contradict the boundary conditions (111.6). It is important to note, however, that the wave remains approximately (up to and including second-order quantities) a simple wave so long as the shock wave may be regarded as weak. † To this accuracy, the expression for the velocity of the discontinuity can be written as

$$v = c\left[\frac{1}{2}\varepsilon\left(E_1 + E_2\right)\right]^{-1/2}. \tag{111.10}$$

In the same approximation, the position of the discontinuity on the wave profile is determined by the equality of the two areas between the vertical line and the dashed curve in Fig. 60.

PROBLEM

A plane wave $E = f_i(t - x/c)$ is incident normally from a vacuum on to the surface of a medium. Determine the reflected wave (L. J. F. Broer, 1963).

SOLUTION. The field in the vacuum (the half-space $x < 0$) consists of the incident wave and the reflected wave (suffix r):

$$E = f_i(t - x/c) + f_r(t + x/c),$$
$$H = f_i(t - x/c) - f_r(t + x/c);$$

in the vacuum, the field equations are linear and the two solutions may be added. In the medium ($x > 0$) there is only the transmitted wave, in which

$$E = f_t[t - (x/c)\sqrt{\varepsilon(E)}], H = \int_0^E \sqrt{\varepsilon}\ \mathrm{d}E.$$

The continuity condition on the electric field at $x = 0$ gives $f_t(t) = f_i(t) + f_r(t)$. The continuity of H at $x = 0$ then gives

$$f_i(t) - f_r(t) = \int_0^{f_i(t)+f_r(t)} \sqrt{\varepsilon(E)}\mathrm{d}E$$

and this implicitly determines the function f_r.

12.5.6 §112. Stimulated Raman scattering

The third-order non-linear effects include the influence of radiation with some frequency ω_1 (the pump wave) on the propagation of a wave with a different frequency ω_2 in the same medium. Such effects are contained in the non-linear permittivity

$$\varepsilon_{i,klm}\left(\omega_2, \omega_1, -\omega_1\right) \tag{112.1}$$

which contributes to the induction with frequency ω_2.†

In an isotropic medium, the induction $\mathbf{D}_2$ at the frequency ω_2, including the contribution mentioned, is given by

[0]† The situation here is exactly analogous to the formation of ordinary hydrodynamic shock waves in a strong sound wave (see $FM, 895$), and the arguments will not be repeated in full.

$$\mathbf{D}_2 = \varepsilon_2 \mathbf{E}_2 + \alpha_2 \left(\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_1^*\right) \mathbf{E}_2 + \beta_2 \mathbf{E}_1 \left(\mathbf{E}_1^* \cdot \mathbf{E}_2\right) + \gamma_2 \mathbf{E}_1^* \left(\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2\right), \tag{112.2}$$

where

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_{10} e^{i(\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} - \omega_1 t)}, \quad \mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_{20} e^{i(\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r} - \omega_2 t)}. \tag{112.3}$$

In the first term in (112.2), $\varepsilon_2 = \varepsilon_2(\omega_2)$ is the ordinary linear permittivity; in the other terms, α_2, β_2 and γ_2 are three independent components of the tensor (112.1), their number being obvious from the way in which (112.2) is constructed from the three vectors $\mathbf{E}, \mathbf{E}_1{}^*$ and $\mathbf{E}_2$. We see that the non-linear action of the field $\mathbf{E}_1$ on the field with frequency ω_2 can be described by means of an anisotropic permittivity

$$\varepsilon_{2ik} = \left(\varepsilon_2 + \alpha_2 \mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_1^*\right) \delta_{ik} + \beta_2 \mathbf{E}_{1i} \mathbf{E}_{1k}^* + \gamma_2 \mathbf{E}_{1i}^* \mathbf{E}_{1k}. \tag{112.4}$$

In a non-dissipative medium, the coefficients α_2, β_2 and γ_2 are, like ε_2, real, and the tensor (112.4) is Hermitian. When $\omega_1 \to 0$ and accordingly $\mathbf{E}_1$ is real, it includes as a particular case double refraction in a static electric field, described by (100.1). When $\omega_1 \neq 0$, (112.4) also describes the gyrotropy of the medium induced by the field $\mathbf{E}_1$. Comparison of (112.2) with (101.8) gives the gyration vector

$$\mathbf{g} = \frac{1}{2} i \left(\beta_2 - \gamma_2\right) \mathbf{E}_1 * \times \mathbf{E}_1 \tag{112.5}$$

This is zero if the field $\mathbf{E}_1$ is linearly polarized.

A greater variety of phenomena can occur if the non-linear interactions of the field with the medium are accompanied by dissipation. In that case, the coefficients α_2, β_2 and γ_2 are complex; the linear permittivity will again be supposed real. It is found that such dissipation can cause either attenuation or amplification of the field $\mathbf{E}_2$. In the latter case we have stimulated Raman scattering. †

Since the linear permittivities $\varepsilon(\omega_1)$ and $\varepsilon(\omega_2)$ are real, there is no dissipation in the medium at the frequencies ω_1 and ω_2 : the quanta $\hbar\omega_1$ and $\hbar\omega_2$ themselves are not absorbed. Let the difference $\omega_1 - \omega_2$, but not the sum $\omega_1 + \omega_2$, lie in the frequency range where the medium is capable of absorption. The dissipation takes place only by the conversion of quanta of higher energy into quanta of lower energy, the excess released being transferred to the medium. When $\omega_1 > \omega_2$, therefore, the pump wave amplifies the wave with the lower frequency ω_2. The time-averaged energy gained by the field $\mathbf{E}_2$ per unit time and volume through the weak non-linear effects is just minus the expression (96.5):

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\bar{U}_2}{\mathrm{d}t} &= -\frac{i\omega_2}{8\pi} \left(\varepsilon_{2ik}{}^* - \varepsilon_{2ki}\right) E_{2i} E_{2k}{}^* \\ &= -\frac{\omega_2}{4\pi} \left\{ \alpha_2{}'' \left|\mathbf{E}_1\right|^2 \left|\mathbf{E}_2\right|^2 + \beta_2{}'' \left|\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2\right|^2 + \gamma_2{}'' \left|\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{E}_2{}^*\right|^2 \right\} \end{aligned} \tag{112.6}$$

cf. the derivation of equations (108.9). A similar expression gives the change in energy of the field $\mathbf{E}_1$:

[0]† The condition that the third-order permittivity $\varepsilon_{i,klm}(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ be real requires that not only the frequencies $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ and their sum ω_4 but also their sums in pairs should not coincide with differences of energy levels in the system; for the susceptibility (112.1), these sums are $\omega_1 + \omega_2$ and $|\omega_1 - \omega_2|$. This may be seen by tracing the origin of the energy denominators in the expression mentioned in §108 for the non-linear susceptibility in terms of the matrix elements of the interaction between the medium and the field; this expression has been given by J. A. Armstrong, N. Bloembergen, J. Ducuing and P. S. Pershan, Physical Review 127, 1918, 1962.

$$\frac{\mathrm{d}\bar{U}_1}{\mathrm{d}t} = -\frac{\omega_1}{4\pi}\left\{\alpha_1''\left|\mathbf{E}_1\right|^2\left|\mathbf{E}_2\right|^2 + \beta_1''\left|\mathbf{E}_1\cdot\mathbf{E}_2\right|^2 + \gamma_1''\left|\mathbf{E}_1\cdot\mathbf{E}_2^*\right|^2\right\} \tag{112.7}$$

where α_1, β_1 and γ_1 are independent components of the permittivity tensor $\varepsilon_{i,klm}(\omega_1, \omega_2, -\omega_2)$, which describes the effect of a field with frequency ω_2 on one with frequency ω_1.

Arguments similar to those used in §107 to derive the Manley-Rowe theorem show that

$$\frac{1}{\omega_1}\frac{\mathrm{d}\bar{U}_1}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{\omega_2}\frac{\mathrm{d}\bar{U}_2}{\mathrm{d}t}: \tag{112.8}$$

for each quantum $\hbar\omega_2$ created, one quantum $\hbar\omega_1$ disappears. Hence it follows that

$$x_1'' = -\alpha_2'', \quad \beta_1'' = -\beta_2'', \quad \gamma_1'' = -\gamma_2''. \tag{112.9}$$

The energy dissipated is given by the decrease in the total energy of the two fields:

$$Q = -\frac{\mathrm{d}\bar{U}_1}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}\bar{U}_2}{\mathrm{d}t} = \frac{\omega_1 - \omega_2}{\omega_2}\frac{\mathrm{d}\bar{U}_2}{\mathrm{d}t}. \tag{112.10}$$

When $\omega_1 > \omega_2$, the condition $Q > 0$ shows that $\mathrm{d}\bar{U}_2/\mathrm{d}t > 0$; that is, the wave with the lower frequency is amplified, as stated above. The condition that the expression (112.6) be positive is given by the inequalities †

$$\alpha_2'' < 0, \alpha_2'' + \beta_2'' < 0, \alpha_2'' + \gamma_2'' = 0, \alpha_2'' + \beta_2'' + \gamma_2'' < 0. \tag{112.11}$$

This effect is independent of the phase relations between the fields, because the pump wave field appears in the equations as expressions bilinear in $\mathbf{E}_1$ and $\mathbf{E}_1{}^*$, from which the phase factors vanish. The ultimate result is that field synchronism is not necessary for amplification of the field ω_2, in contrast to the harmonic generation and parametric signal amplification effects discussed in §110.

It is possible to relate the characteristics of the stimulated Raman scattering to those of the ordinary (spontaneous) scattering to be discussed in Chapter XV. The relevant calculations are given in §118, Problem.

The above relations are valid, as already mentioned, if energy is absorbed by the medium only at the difference frequency $\omega_1 - \omega_2$. There is a different situation if the sum frequency $\omega_1 + \omega_2$, not the difference, lies in the absorption range. In this case, for each quantum $\hbar\omega_2$ absorbed, a quantum $\hbar\omega_1$ is also absorbed, and an energy $\hbar(\omega_1 + \omega_2)$ is transferred to the medium (two-photon absorption). In this case, of course, the waves of both frequencies are attenuated.

[0]† From the quantum microscopic standpoint, this refers to the emission of a photon $\hbar\omega_2$ when a photon $\hbar\omega_1$ is incident on atoms in a field of photons $\hbar\omega_2$. The energy $\hbar(\omega_1 - \omega_2)$ is transferred to the medium, with the formation of an elementary excitation of the medium such as a phonon or an exciton. The literature of the subject uses specific names for various types of scattering process. In our purely phenomenological description, we use the term mentioned, as a conventional general name.

[0]† This may be seen by considering the values of (112.6) for various polarizations of the fields $\mathbf{E}_1 = \mathbf{e}_1 E_1$ and $\mathbf{E}_2 = \mathbf{e}_2 E_2$: linear polarizations in parallel or perpendicular directions, circular polarizations with the same or opposite signs. In the first two cases e_1 and e_2 are real, with $e_1 \cdot e_2 = 1$ or 0 ; in the second two they are complex, with either $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = 0, \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2{}^* = 1$ or $\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = 1, \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2{}^* = 0$.

12.6 XIV The Passage of Fast Particles Through Matter by Landau

12.6.1 §113. Ionization losses by fast particles in matter: the non-relativistic case

A fast charged particle, in passing through matter, ionizes the atoms and thereby loses energy. † In gases, the ionization losses can be regarded as being due to collisions between the fast particle and individual atoms. In a solid or liquid medium, however, several atoms may interact simultaneously with the particle. The effect of this on the energy loss by the particle can be macroscopically regarded as resulting from the dielectric polarization of the medium by the charge. Let us first consider this effect for non-relativistic velocities of the particle. We shall see that the polarization of the medium then has only a slight effect on the losses. The derivation of this result is of interest because the method can be extended to other cases.

Let us first of all ascertain the conditions under which the phenomenon can be macroscopically considered. The spectral resolution of the field produced at a distance r from the path of a particle moving with velocity v consists chiefly of terms whose frequency is of the order v/r (the reciprocal of the "collision time"). The ionization of an atom can be effected by field components of frequency $\omega \gtrsim \omega_0$, where ω_0 is some mean frequency corresponding to the motion of the majority of the electrons in the atom. The particle therefore interacts simultaneously with many atoms if v/ω_0 is large compared with the interatomic distances. In solids and liquids these distances are of the same order of [1] magnitude as the dimension a of the atoms themselves. Thus we obtain the condition $v \gg a\omega_0$, i.e. the velocity of the ionizing particle must be large compared with the velocities of the atomic electrons (or at least of the majority of them). ‡

Let us now determine the field produced by a charged particle moving through matter. In the non-relativistic case it is sufficient to consider only the electric field, defined by the scalar potential ϕ. This potential satisfies Poisson's equation

$$\hat{\varepsilon}\triangle\phi = -4\pi e\delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t), \tag{113.1}$$

in which the permittivity is written as an operator, and the expression $e\delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t)$ on the right-hand side is the density due to a point charge e moving with constant velocity $\mathbf{v}$.§

We expand ϕ as a Fourier space integral:

$$\phi = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_k \exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})\frac{\mathbf{d}^3k}{(2\pi)^3} \tag{113.2}$$

Taking the Laplacian of this equation, we find that the Fourier component of $\triangle\phi$ is $(\Delta\phi)_{\mathbf{k}} = -k^2\phi_{\mathbf{k}}$.

Taking the Fourier component of equation (113.1) gives

$$\begin{aligned}\hat{\varepsilon}(\triangle\phi)_{\mathbf{k}} &= -\int 4\pi e\delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t)\exp(-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})\mathrm{d}V \\ &= -4\pi e\exp(-it\mathbf{v}\cdot\mathbf{k})\end{aligned}$$

[0]† We speak, as is customary, of "ionization losses", but these are, of course, understood to include losses due to the excitation of atoms to discrete energy levels.

‡ The corresponding condition for the energy E of the particle is $E \gg MI, m$, where M is the mass of the particle, m that of the electron, and I some mean ionization energy for the majority of the electrons in the atom.

§ We assume that the particle moves in a straight line. and thereby neglect scattering, as is always permissible in problems of this type.

If the charge on the particle is ze, then all the formulae pertaining to energy loss in this and the following sections should be multiplied by z^2.

Thus $\hat{\varepsilon}\phi_{\mathbf{k}} = (4\pi e/k^2)\exp(-it\mathbf{v}\cdot\mathbf{k})$, and $\phi_{\mathbf{k}}$ therefore depends on time through a factor $\exp(-it\mathbf{v}\cdot\mathbf{k})$. The operator $\hat{\varepsilon}$ acting on a function $\exp(-i\omega t)$ multiplies it by $\varepsilon(\omega)$. Hence

$$\phi_{\mathbf{k}} = \frac{4\pi e}{k^2\varepsilon(\mathbf{k}\cdot\mathbf{v})}\exp(-it\mathbf{v}\cdot\mathbf{k})$$

The Fourier components of the field and of the potential are related by $\mathbf{E}_{\mathbf{k}}\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}) = -\operatorname{grad}[\phi_{\mathbf{k}}\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})] = -i\mathbf{k}\phi_{\mathbf{k}}\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})$. Thus

$$\mathbf{E}_{\mathbf{k}} = -i\mathbf{k}\phi_{\mathbf{k}} = -\frac{4\pi ie\mathbf{k}}{k^2\varepsilon(\mathbf{k}\cdot\mathbf{v})}\exp(-it\mathbf{v}\cdot\mathbf{k}) \tag{113.3}$$

The total field strength is obtained by inverting the Fourier transform:

$$\mathbf{E} = \int_{-\infty}^{\infty}\mathbf{E}_{\mathbf{k}}\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})\frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3} \tag{113.4}$$

The energy loss by the moving particle is just the work done by the force $e\mathbf{E}$ exerted on the particle by the field which it produces. Taking the value of the field at the point occupied by the particle, namely $\mathbf{r} = vt$, we obtain in the integrand in (113.4) a factor $\exp(it\mathbf{v}\cdot\mathbf{k})$ which cancels with the factor $\exp(-it\mathbf{v}\cdot\mathbf{k})$ in the expression (113.3) for $\mathbf{E}_{\mathbf{k}}$. Hence the force $\mathbf{F}$ is

$$\mathbf{F} = -4\pi ie^2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathbf{k}}{k^2\varepsilon(\mathbf{k}\cdot\mathbf{v})}\frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3}$$

It is evident that the direction of the force $\mathbf{F}$ is opposite to that of the velocity $\mathbf{v}$; let the latter be the x-direction. Putting $k_xv = \omega, q = \sqrt{(k_y{}^2 + k_z{}^2)}$ and replacing $\mathrm{d}k_y\,\mathrm{d}k_z$ by $2\pi q\,\mathrm{d}q$, we can write the magnitude of $\mathbf{F}$ as

$$F = \frac{ie^2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{q_0}\frac{q\omega\,\mathrm{d}q\,\mathrm{d}\omega}{\varepsilon(\omega)\,(q^2v^2+\omega^2)} \tag{113.5}$$

The choice of q_0 is discussed below.

The following remark should be made concerning the integration with respect to ω in formula (113.5). As $\omega\to\infty$ the function $\varepsilon(\omega)\to 1$, and the integral is logarithmically divergent. This happens because we ought to have subtracted from the field $\mathbf{E}$ the field which would be present if the particle were moving in a vacuum (i.e. if $\varepsilon = 1$); this field evidently does not affect the energy lost by the particle in matter.

If this subtraction were effected, $1/\varepsilon$ in the integrand of (113.5) would become $1/\varepsilon - 1$, and the integral would converge. The same result can be obtained by taking the integration from $-\Omega$ to $+\Omega$ and then letting Ω tend to infinity. Since the function $\varepsilon'(\omega)$ is even, the real part of the integrand is an odd function of the frequency, and gives zero. The integral of the imaginary part of the integrand converges.

In what follows we shall sometimes find it convenient to use the notation

$$1/\varepsilon(\omega) = \eta(\omega) = \eta' + i\eta'' \tag{113.6}$$

with $\eta'(\omega)$ and $\eta''(\omega)$ respectively even and odd functions, and $\eta'' = -\varepsilon''/|\varepsilon|^2 < 0$. Formula (113.5) can be rewritten in the explicitly real form

$$F = \frac{2e^2}{\pi}\int_0^{\infty}\int_0^{q_0}\frac{q\omega\,|\eta''(\omega)|}{(q^2v^2+\omega^2)}\mathrm{d}q\,\mathrm{d}\omega \tag{113.7}$$

The energy loss per unit path length is the work done by the force over that distance, which is just F; it is called the stopping power of the substance with respect to the particle.

According to the general rules of quantum mechanics, the Fourier component of the field whose wave vector is $\mathbf{k}$ transmits to the δ-electron released in ionization a momentum $\hbar\mathbf{k}$. For sufficiently large $q\,(\gg\omega_0/v)$ we have $k^2=q^2+\omega^2/v^2\approx q^2$, so that the momentum transferred is approximately hq. A given value of $\mathbf{q}$ corresponds to collisions with impact parameter $\sim 1/q$. Hence the condition for the macroscopic treatment to be valid is $1/q\gg a$. Accordingly, we take as the upper limit of integration a value q_0 such that $\omega_0/v\ll q_0\ll 1/a$. The quantity $F(q_0)$ is the energy loss of a fast particle with transfer of momentum not exceeding $\hbar q_0$ to the atomic electron.

Integrating with respect to q in (113.7), we obtain

$$F(q_0)=\frac{2e^2}{\pi v^2}\int_0^\infty \omega\,|\eta''(\omega)|\log\frac{q_0 v}{\omega}\,\mathrm{d}\omega \tag{113.8}$$

This formula cannot be further transformed in a general manner, but it can be written in a more convenient form as follows. We first calculate the integral

$$\int_0^\infty \omega\eta''(\omega)\mathrm{d}\omega=-\frac{1}{2}i\int_{-\infty}^{\infty}(\omega/\varepsilon)\mathrm{d}\omega$$

To do so, we notice that, if the integration is taken in the complex ω-plane along a contour consisting of the real axis and a very large semicircle σ in the upper half-plane, the integral is zero, since the integrand has no poles in the upper half-plane. For large values of ω, the function $\varepsilon(\omega)$ is given by formula (78.1):

$$\varepsilon(\omega)=1-\frac{4\pi e^2 N}{m\omega^2} \tag{113.9}$$

The integration along the large semicircle σ can be carried out by using this formula, and the result is †

$$-\int_0^\infty \omega\eta''(\omega)\mathrm{d}\omega=-\frac{2\pi i N e^2}{m}\int_\sigma\frac{\mathrm{d}\omega}{\omega}=2\pi^2 N e^2/m \tag{113.10}$$

We define a mean frequency of the motion of the atomic electrons by

$$\begin{aligned}\log\bar{\omega}&=\frac{\int_0^\infty \omega\eta''(\omega)\log\omega\mathrm{d}\omega}{\int_0^\infty \omega\eta''(\omega)\mathrm{d}\omega}\\&=\frac{m}{2\pi^2 N e^2}\int_0^\infty \omega\,|\eta''(\omega)|\log\omega\mathrm{d}\omega\end{aligned} \tag{113.11}$$

Then formula (113.8) can be written

$$F(q_0)=\left(4\pi N e^4/mv^2\right)\log\left(q_0 v/\bar{\omega}\right) \tag{113.12}$$

The following remark should be made here. It might seem from the form of (113.7) or (113.11) that the main contribution to the ionization losses (113.12) comes from frequencies at which there is considerable absorption. This is not so; these formulae may contain a considerable contribution from ranges in which ε'' is small. The reason is that in such ranges the function $\varepsilon(\omega)\approx\varepsilon'(\omega)$ may pass through zero. It is seen from formula (113.5) that the zeros of $\varepsilon(\omega)$ are poles of the integrand. In reality, of course, $\varepsilon''(\omega)$ is not exactly zero, and so the zeros of $\varepsilon(\omega)$ are not on the real axis but just below it. Hence, when the expression used for $\varepsilon(\omega)$ is real and passes through zero, the contour must be indented upwards at the pole of the integrand, and so a contribution to the integral occurs. For example, if the function $\varepsilon(\omega)$ is given by (84.5),

the contribution to the energy loss (113.12) from the poles $\pm\omega_1$ (where $\varepsilon(\omega_1) = 0$) is easily seen, by direct calculation from (113.7), to be $(4\pi Ne^4 mv^2 a^2)\log(q_0 v/\omega_1)$.

In order to find the energy loss $F(q_1)$ with transfer of momentum not exceeding some value $\hbar q_1 > \hbar q_0$, we must "join" formula (113.12) to that given by the quantum theory of collisions, corresponding to energy loss by collisions with single atoms. This can be done by using the fact that the ranges of applicability of the two formulae overlap. As we know from the theory of collisions, the energy loss with transfer of momentum in a range of $\hbar dq$ is

$$dF = \left(4\pi Ne^4/mv^2\right) dq/q \tag{113.13}$$

and this formula is applicable (in the non-relativistic case) for any value of $q \gg \omega_0/v$ which is compatible with the laws of conservation of momentum and energy, provided that the energy transferred is small compared with the initial energy of the fast particle. ‡ The

energy loss with all values of q between q_0 and q_1 is accordingly $(4\pi Ne^4/mv^2)\log(q_1/q_0)$. When this quantity is added to formula (113.12), q_0 is replaced by q_1, so that

$$F(q_1) = \left(4\pi Ne^4/mv^2\right)\log(q_1 v/\bar{\omega}) \tag{113.14}$$

If a momentum $\hbar q_1$ large compared with the atomic momenta is given to an atomic electron, its energy is $E_1 = \hbar^2 {q_1}^2/2m$. Thus we can write

$$F(E_1) = \left(2\pi Ne^4/mv^2\right)\log\left(2mv^2 E_1/\hbar^2\bar{\omega}^2\right) \tag{113.15}$$

Formulae (113.14) and (113.15) give the energy loss of a fast particle by ionization with a transfer of energy not exceeding a value E_1 that is small compared with the original energy of the particle. It must be emphasized that with this condition the formulae are equally valid for fast electrons and fast heavy particles. Formula (113.15) differs from the formula derived from a microscopic discussion, neglecting interactions between atoms (QM, (149.14)) only by the definition of the "ionization energy" I, which is here represented by $\hbar\bar{\omega}$. The mean (with respect to the electrons) ionization energy of an atom is usually almost independent of its interaction with other atoms, being determined mainly by the electrons of the inner shells, which are almost unaffected by that interaction. Moreover, this quantity appears here only in a logarithm, and so the exact definition of it has even less effect on the magnitude of the energy loss.

In a collision between a heavy particle and an electron, even the maximum transferable momentum $\hbar q_{\max}$ is small compared with the momentum Mv of the particle. The change in the energy of the heavy particle is therefore $\mathbf{v}\cdot\hbar\mathbf{q}$; equating this to the energy of the electron gives $\hbar^2 q^2/2m = \hbar\mathbf{q}\cdot\mathbf{v} \leqslant \hbar qv$, whence $\hbar q_{\max} = 2mv$, and $E_{1,\max} = 2mv^2$. Substituting for E_1 in (113.15), we obtain as the total ionization energy loss by the fast particle

$$F = \frac{4\pi Ne^4}{mv^2}\log\frac{2mv^2}{\hbar\bar{\omega}} \tag{113.16}$$

This differs from the usual expression (QM, (150.10)) only in the definition of the ionization energy $\hbar\bar{\omega}$.

We can see how $\hbar\bar{\omega}$ defined by (113.11) becomes, in a rarefied medium, the mean ionization energy of a single atom given by QM, (149.11). To do so, we note that in a rarefied gas, which

[0]† This is the same as (82.12), as it should be, since, as $|\omega| \to \infty, |\varepsilon| \to 1$ and $\eta'' \to -\varepsilon''$.

‡ See QM, §149. The "effective retardation" used there differs from F by a factor $N_a = N/Z$, the number density of atoms.

Formula (113.13) applies to collisions with free electrons. Its range of applicability as hitherto determined ($q \gg \omega_0/v$), however, extends to values of q for which the atomic electrons cannot be regarded as free. The condition for this is $q \gg \omega_0/v_0$, where v_0 is the order of magnitude of the velocity of the majority of the atomic electrons; the energy $\hbar^2 q^2/2m$ of the δ-electron is then large compared with atomic energies.

for simplicity we suppose to consist of uniform atoms, the permittivity is $\varepsilon = 1 + 4\pi N_a \alpha(\omega)$, where N_a is the number of atoms per unit volume, $\alpha(\omega)$ the polarizability of one atom; here $|\varepsilon - 1| \ll 1$. The imaginary part of $\eta = 1/\varepsilon$ is $|\eta''| \cong 4\pi N_a \alpha''(\omega)$. The polarizability of the atom is given by QED, (85.13); separating the imaginary part by means of QED (75.19), we have when $\omega > 0$

$$|\eta''| = \frac{4}{3}\pi N_a \sum_n |\mathbf{d}_{on}|^2 \, \delta\left(E_n - E_0 - \hbar\omega\right)$$

where E_0 and E_n are the energies of the ground state and excited states of the atom. Substitution of this expression in (113.11) and carrying out the integration, with $N = N_a Z$, gives the definition in QM, (149.11).

12.6.2 §114. Ionization losses by fast particles in matter: the relativistic case

At velocities comparable with that of light, the effect of the polarization of the medium on its stopping power with respect to a fast particle may become very important even in gases. †

To derive the appropriate formulae, we use a method analogous to that used in §113, but it is now necessary to begin from the complete Maxwell's equations. When extraneous charges are present with volume density ρ_{ex}, and extraneous currents wih density $\mathbf{j}_{\text{ex}}$, these equations are ‡

$$\begin{array}{ll} \operatorname{div} \mathbf{H} = 0, & \operatorname{curl} \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \hat{\varepsilon}\mathbf{E} = 4\pi\rho_{\text{ex}}, & \operatorname{curl} \mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \hat{\varepsilon}\mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_{\text{ex}}. \end{array} \tag{114.2}$$

In the present case the extraneous charge and current distribution are given by

$$\rho_{\text{ex}} = e\delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t), \quad \mathbf{j}_{\text{ex}} = e\mathbf{v}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t). \tag{114.3}$$

We introduce scalar and vector potentials, with the usual definitions:

$$\mathbf{H} = \operatorname{curl} \mathbf{A}, \quad \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \operatorname{grad} \phi, \tag{114.4}$$

so that equations (114.1) are satisfied identically. The additional condition

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial \hat{\varepsilon}\phi}{\partial t} = 0 \tag{114.5}$$

is imposed on the potentials $\mathbf{A}$ and ϕ; this is a generalization of the usual Lorentz condition in the theory of radiation. Then, substituting (114.4) in (114.2), we obtain the following equations for the potentials:

$$\left.\begin{array}{c} \triangle\mathbf{A} - \frac{\hat{\varepsilon}}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}e\mathbf{v}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t) \\ \hat{\varepsilon}\left(\triangle\phi - \frac{\hat{\varepsilon}}{c^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}\right) = -4\pi e\delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t) \end{array}\right\} \tag{114.6}$$

We expand $\mathbf{A}$ and ϕ as Fourier space integrals. Taking the Fourier components of equations (114.6), we have

$$\begin{aligned} k^2\mathbf{A}_{\mathbf{k}} + \frac{\hat{\varepsilon}}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}_{\mathbf{k}}}{\partial t^2} &= \frac{4\pi e\mathbf{v}}{c}\exp(-it\mathbf{v}\cdot\mathbf{k}), \\ \hat{\varepsilon}\left(k^2\phi_{\mathbf{k}} + \frac{\hat{\varepsilon}}{c^2}\frac{\partial^2 \phi_{\mathbf{k}}}{\partial t^2}\right) &= 4\pi e\exp(-it\mathbf{v}\cdot\mathbf{k}). \end{aligned}$$

Hence we see that $\mathbf{A_k}$ and $\phi_\mathbf{k}$ depend on time through a factor $\exp(-it\mathbf{v}\cdot\mathbf{k})$. We again put $\omega = \mathbf{k}\cdot\mathbf{v} = k_x v$, and obtain

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{A_k} &= \tfrac{4\pi e}{c}\tfrac{\mathbf{v}}{k^2-\omega^2\varepsilon(\omega)/c^2}e^{-i\omega t}\\ \phi_\mathbf{k} &= \tfrac{4\pi e}{\varepsilon(\omega)}\tfrac{1}{k^2-\omega^2\varepsilon(\omega)/c^2}e^{-i\omega t}\end{aligned}\right\} \tag{114.7}$$

The Fourier component of the electric field is

$$\mathbf{E_k} = i\omega\mathbf{A_k}/c - i\mathbf{k}\phi_\mathbf{k}. \tag{114.8}$$

From these formulae the force $\mathbf{F} = e\mathbf{E}$ acting on the particle is found in the same way as in §113. Using the same notation, we now have

$$F = \frac{ie^2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{q_0}\frac{\left(\frac{1}{v^2}-\frac{\varepsilon}{c^2}\right)\omega q\ \mathrm{d}q\ \mathrm{d}\omega}{\varepsilon\left[q^2+\omega^2\left(\frac{1}{v^2}-\frac{\varepsilon}{c^2}\right)\right]} \tag{114.9}$$

As $c\to\infty$ this formula tends, of course, to (113.5).

Let us first carry out the integration with respect to frequency. In order to effect an integration in the complex ω-plane, we first ascertain the poles of the integrand in the upper half-plane. The function $\varepsilon(\omega)$ has no singularity and no zero in this half-plane, and so the required poles can only be the zeros of the expression

$$\omega^2\left(\frac{\varepsilon}{c^2}-\frac{1}{v^2}\right)-q^2$$

We shall show that, for any value of the positive real quantity q^2, this expression vanishes for only one value of ω.

To prove this, ‡ we use a theorem in the theory of functions of a complex variable: the integral

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{\mathrm{d}f(\omega)}{\mathrm{d}\omega}\frac{\mathrm{d}\omega}{f(\omega)-a} \tag{\$14.10}$$

taken along a closed contour C, is equal to the difference between the numbers of zeros and poles of $f(\omega)-a$ in the region bounded by C. Let

$$f(\omega) = \omega^2\left(\frac{\varepsilon(\omega)}{c^2}-\frac{1}{v^2}\right)$$

$a = q^2$ be a positive real number, and C be a contour consisting of the real axis and a very large semicircle (Fig. 61). The function $f(\omega)$ has no pole in the upper half-plane

[0]† This effect was pointed out by E. Ferm (1940), who performed the calculation for the particular case of a gas whose atoms are regarded as harmonic oscillators. The general derivation given here is due to L . Landau.

‡ We put $\mu(\omega)\equiv 1$, since matter does not exhibit magnetic properties at the frequencies important as regards ionization losses.

[0]† The magnetic force $ev\times\mathbf{H}/c$ is seen by symmetry to be zero, and in any case is perpendicular to the velocity of the particle and so does no work on it.

‡ The following argument is analogous to the proof ($SP1, 123$) that $\varepsilon(\omega)$ has no zero in the upper half-plane.

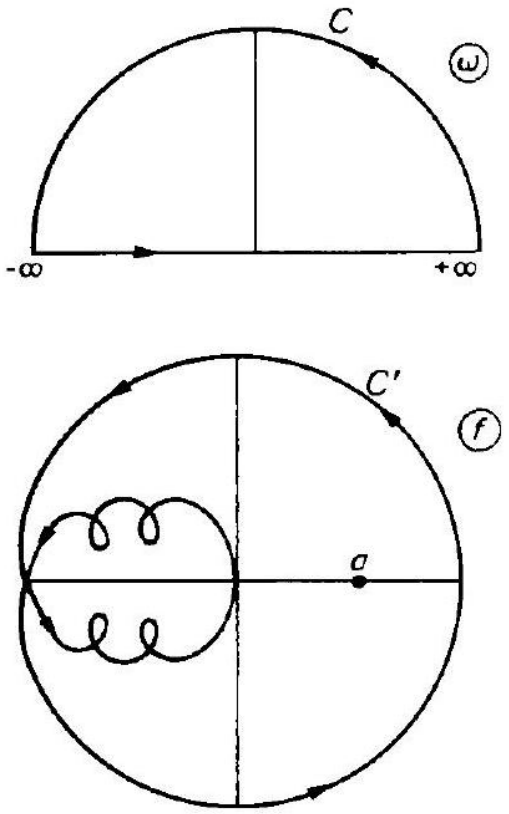


Fig. 61

or on the real axist; the integral (114.10) therefore gives the number of zeros of the function $f(\omega) - a$ in the upper half-plane. To calculate its value, we write it as

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C'}\frac{\mathrm{d}f}{f-a}, \tag{114.11}$$

the integration being taken along a contour C' in the plane of the complex variable f which maps the contour C from the ω-plane. For $\omega = 0, f = 0$. For positive real ω we have $\operatorname{im} f > 0$, and for negative real $\omega, \operatorname{im} f < 0$. At infinity $f \to -\omega^2\,[(1/v^2) - (1/c^2)]$, and therefore f goes round a large circle when ω goes round the large semicircle. Hence we see that the path of integration C' in the f-plane is of the kind shown schematically in Fig. 61. When a is real and positive, as in Fig. 61, in going round C' the argument of the complex number changes by 2π, and the integral (114.11) is equal to unity. This completes the proof. ‡

Furthermore, it is easy to see that this single root of the equation $f(\omega) - q^2 = 0$ lies on the imaginary ω-axis: for purely imaginary ω the function $f(\omega)$, like $\varepsilon(\omega)$, is real and takes all values from 0 to ∞, including q^2.

Let us now return to the integral with respect to ω in (114.9):

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\left(\frac{1}{\varepsilon v^2}-\frac{1}{c^2}\right)\omega\mathrm{d}\omega}{q^2-\omega^2\left(\frac{\varepsilon}{c^2}-\frac{1}{v^2}\right)}$$

This can be written as the difference between the integral along the contour C and that along the large semicircle. The latter is $\int \mathrm{d}\omega/\omega = i\pi$, and the former is $2\pi i$ times the residue of the integrand at its only pole. Let $\omega(q)$ be the function defined by the equation

[0]† For metals $\varepsilon(\omega)$ has a pole at $\omega = 0$, but $\omega^2\varepsilon$ always tends to zero with ω.

‡ If a is negative the argument of $f - a$ changes by 4π on going round C', so that the integral (114.11) is equal to 2, i.e. the function $f(\omega) + |a|$ has two zeros in the upper half-plane.

$$\omega^2\left(\frac{\varepsilon}{c^2}-\frac{1}{v^2}\right)=q^2 \tag{11412}$$

Then, since the residue of an expression $f(z)/\phi(z)$ at a pole $z=z_0$ is $f(z_0)/\phi'(z_0)$, the integral along C is

$$2\pi i\frac{\omega\left(\frac{1}{\varepsilon v^2}-\frac{1}{c^2}\right)}{-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\left[\omega^2\left(\frac{\varepsilon}{c^2}-\frac{1}{v^2}\right)\right]}=2\pi i\frac{\omega\left(\frac{1}{\varepsilon v^2}-\frac{1}{c^2}\right)}{-\mathrm{d}q^2/\mathrm{d}\omega}.$$

Collecting these expressions and substituting in (114.9), we have

$$F=e^2\int_0^{q_0}\left[\frac{\omega\left(\frac{1}{\varepsilon v^2}-\frac{1}{c^2}\right)}{q\ \mathrm{d}q/\mathrm{d}\omega}+1\right]q\ \mathrm{d}q$$

or, replacing the integration with respect to q in the first term by one with respect to ω,

$$\begin{aligned}F=&e^2\int_{\omega(0)}^{\omega(q_0)}\left[\frac{1}{v^2\varepsilon(\omega)}-\frac{1}{c^2}\right]\omega\mathrm{d}\omega+\frac{1}{2}e^2q_0^2\\=&\frac{e^2}{v^2}\int_{\omega(0)}^{\omega(q_0)}\left[\frac{1}{\varepsilon(\omega)}-1\right]\omega\mathrm{d}\omega+\frac{1}{2}e^2q_0^2\\&+\frac{1}{2}e^2\left(\frac{1}{v^2}-\frac{1}{c^2}\right)\left[\omega^2(q_0)-\omega^2(0)\right]\end{aligned} \tag{114.13}$$

Large values of q correspond to large absolute values ω of the root of equation (114.12). Using therefore the expression (113.9) for $\varepsilon(\omega)$, we find

$$\omega^2(q_0)=-v^2\gamma^2\left(q_0^2+\frac{4\pi Ne^2}{mc^2}\right)$$

where we have put $\gamma=1/\sqrt{[1-v^2/c^2]}$. Substitution in (114.13) gives

$$F=\frac{e^2}{v^2}\int_{\omega(0)}^{ivq_0\gamma}\left[\frac{1}{\varepsilon(\omega)}-1\right]\omega\mathrm{d}\omega-\frac{2\pi Ne^4}{mc^2}-\frac{e^2}{2v^2\gamma^2}\omega^2(0) \tag{114.14}$$

in the integral, only the leading term $ivq_0\gamma$ need be retained in $\omega(q_0)$.
The integration in (114.14) is over purely imaginary values of ω. We use the real variable $\omega''\equiv\omega/i$, with the lower limit $\xi\equiv\omega(0)/i$, and again put $1/\varepsilon=\eta$ (113.6). The required integral is

$$-\int_\xi^{vq_0\gamma}\left[\eta(i\omega'')-1\right]\omega''\mathrm{d}\omega''$$

The values of the function $\eta(\omega)$ on the imaginary axis can be expressed in terms of its imaginary part on the real axis:

$$\eta(i\omega'')-1=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{x\eta''(x)}{x^2+\omega''^2}\ \mathrm{d}x$$

(cf. (82.15)). Hence the integral is (if we neglect x in comparison with $vq_0\gamma$)

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\int_\xi^{vq_0\gamma}\frac{x\left|\eta''(x)\right|\omega''\mathrm{d}\omega''\mathrm{d}x}{x^2+\omega''^2}=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty x\left|\eta''(x)\right|\log\frac{v^2q_0^2\gamma^2}{x^2+\xi^2}\ \mathrm{d}x$$

W'e substitute this result in (114.14), and for simplicity put

$$\log \Omega \equiv \overline{\frac{1}{2}\log\left(\omega^2+\xi^2\right)} \tag{114.15}$$

where the bar denotes an averaging with weight $\omega\,|\eta''(\omega)|$, as in (113.11). Then

$$F\left(q_0\right)=\frac{4\pi N e^4}{mv^2}\log\frac{vq_0\gamma}{\Omega}-\frac{2\pi N e^4}{mc^2}+\frac{e^2}{2v^2\gamma^2}\xi^2 \tag{114.16}$$

Two cases must be considered in the further examination of this formula. Let us first suppose that the medium is a dielectric, and that the velocity of the particle satisfies the condition

$$v^2<c^2/\varepsilon_0 \tag{114.17}$$

where $\varepsilon_0=\varepsilon(0)$ is the electrostatic value of the permittivity. On the imaginary axis the function $\varepsilon(\omega)$ decreases monotonically from $\varepsilon_0>1$ for $\omega=0$ to 1 for $\omega=i\infty$. The expression on the left-hand side of equation (114.12) therefore increases monotonically from 0 to ∞, and for $q=0$ (114.12) gives $\omega=0$. Thus we must put $\xi=0$ in (114.16); then Ω becomes the mean atomic frequency $\bar{\omega}$ (113.11), and

$$F\left(q_0\right)=\frac{4\pi N e^4}{mv^2}\left[\log\frac{vq_0\gamma}{\bar{\omega}}-\frac{v^2}{2c^2}\right]. \tag{114.18}$$

For $v\ll c$ this formula becomes (113.12), as it should.
The value of q_0 is such that $q_0\ll 1/a$, where a is the order of magnitude of the interatomic distances (in solids and liquids equal to the dimension of the atoms). In order to extend the formula to higher values of the transferred momentum and energy, it must be "joined" to the formulae of the ordinary theory of collisions, as in §113, but the joining must now be carried out in two stages, First, using formula (113.13), we enter the range of q corresponding to energy transfers large compared with atomic energies but not yet relativistic. Formula (114.18) is unchanged in form, but may now involve the δ-electron energy $\hbar^2{q_1}^2/2m$. Calling this E_1, we have

$$F\left(E_1\right)=\frac{2\pi N e^4}{mv^2}\left[\log\frac{2mv^2E_1\gamma^2}{\hbar^2\bar{\omega}^2}-\frac{v^2}{c^2}\right]. \tag{114.19}$$

We can now go on to the relativistic values of E_1 by using a formula of relativistic collision theory, according to which the stopping power with energy transfer between E' and $E'+\mathrm{d}E'$ is

$$\left(2\pi N e^4/mv^2\right)\mathrm{d}E'/E' \tag{114.20}$$

if E' is small compared with the maximum transfer $E_{1,\max}$ compatible with the laws of conservation of momentum and energy for a collision between the fast particle concerned and a free electron. † Since the integration of (114.20) gives a term in $\log E'$, it is clear that formula (114.19) is unchanged in form, and it is therefore valid for all $E_1\ll E_{1,\,\max}$.

In the retardation of a fast heavy particle (with mass $M\gg m$ and energy E which, though relativistic, is such that $E\ll M^2c^2/m$), the maximum energy transfer to an electron is $E_{1,\max}\cong 2mv^2\gamma^2$ and is still small in comparison with E (see QED. (82.23)). For such particles the differential expression for the energy lost to free electrons is

$$\frac{2\pi N e^4}{mv^2}\left(\frac{1}{E'}-\frac{1}{2mc^2\gamma^2}\right)\mathrm{d}E'$$

for all E'; see QED, (82.24). The energy loss additional to (114.19), with energy transfer from E_1 to $E_{1,\max}$ (with $E_1\ll E_{1,\max}$) is then

$$\frac{2\pi Ne^4}{mv^2}\left(\log\frac{E_{1,\max}}{E_1}-\frac{E_{1,\max}}{2mc^2\gamma^2}\right)=\frac{2\pi Ne^4}{mv^2}\left(\log\frac{2mv^2\gamma^2}{E_1}-\frac{v^2}{c^2}\right) \tag{114.21}$$

Adding this to (114.19), we find the total stopping power with respect to the heavy particle:

$$F=\frac{4\pi Ne^4}{mv^2}\left(\log\frac{2mv^2\gamma^2}{\hbar\bar{\omega}}-\frac{v^2}{c^2}\right). \tag{114.22}$$

Formula (114.22) differs from that of the usual theory only in that the "ionization energy" is $\hbar\bar{\omega}$; cf. QED, (82.26).

Let us now turn to the second case, namely that where

$$v^2>c^2/\varepsilon_0 \tag{114.23}$$

which, in particular, always holds for metals, where $\varepsilon(0)=\infty$. The expression $\omega^2(\varepsilon/c^2-1/v^2)$ on the left-hand side of equation (114.12) then has two zeros on the imaginary ω-axis, one at $\omega=0$ and the other at $\omega=i\xi$, where ξ is defined by

$$\varepsilon(i\xi)=c^2/v^2 \tag{114.24}$$

In the range from 0 to $i\xi$ the expression $\omega^2(\varepsilon/c^2-1/v^2)$ is negative, and for $|\omega|>\xi$ it takes all positive values from 0 to ∞. As $q\to 0$, therefore, the root of equation (114.12) in this case tends to ξ, which is the value to be substituted in (114.15) and (114.16).

Two limiting cases may be considered. If ξ is small compared with the atomic frequencies ω_0, then the last term in (114.16) may be neglected, and $\Omega\cong\bar{\omega}$. Thus we return to formula (114.18). The opposite limiting case, where $\xi\gg\omega_0$, is of particular interest. Since, for large ξ, the function $\varepsilon(i\xi)$ tends to 1 , it is evident from (114.24) that this case corresponds to ultrarelativistic velocities of the particle. Using formula (113.9) for $\varepsilon(\omega)$, we can write from equation (114.24)

$$\xi^2=4\pi Ne^2v^2\gamma^2/mc^2\cong 4\pi Ne^2\gamma^2/m$$

cross-section by the energy loss $m\Delta$ and by N.

As the velocity of the particle increases, the condition $\xi\gg\omega_0$ is ultimately fulfilled in any medium, i.e. whatever the electron density N (even in a gas). The velocity required is, however, the greater, the smaller N, i.e. the more rarefied the medium.

From (114.15) we then have simply $\Omega\cong\xi$. Putting also $v\cong c$, we find that the last two terms in (114.16) cancel. leaving

$$F(q_0)=\left(2\pi Ne^4/mc^2\right)\log\left(mc^2q_0^2/4\pi Ne^2\right)$$

Extending this formula, in the same manner as above, to large values of the momentum and energy transfer, we find the following expression for the energy loss of an ultra-relativistic particle with an energy transfer not exceeding E_1 ($\ll E_{1,\max}$) :

$$F(E_1)=\left(2\pi Ne^4/mc^2\right)\log\left(m^2c^2E_1/2\pi Ne^2\hbar^2\right) \tag{114.25}$$

This result is considerably different from that obtained in the ordinary theory, which neglects the polarization of the medium. According to that theory (see QED, 882), in the ultra-relativistic range the stopping power $F(E_1)$ continues to increase (though only logarithmically) with the energy of the particle: †

[0]† See QED, (81.15) and (82.24). The stopping power F is obtained on multiplying these expressions for the

$$F(E_1) = \frac{2\pi Ne^4}{mc^2} \log\left(\frac{2mc^2\gamma^2 E_1}{I^2} - 2\right)$$

The polarization of the medium results in a screening of the charge, and the increase in the losses is thereby finally stopped; it tends to the constant value (independent of γ) given by formula (114.25).

For heavy particles a formula can also be derived for the total stopping power with any energy transfer up to $E_{1,\max}$ (if the latter is small compared with the energy of the particle itself). Again using the expression (114.21), in which we can now put $v = c$, we find

$$F = \frac{2\pi Ne^4}{mc^2}\left[\log\frac{m^3c^4\gamma^2}{\pi Ne^2\hbar^2} - 1\right] \tag{114.26}$$

We see that the total stopping power continues to increase with the velocity of the particle, owing to close collisions with a large energy transfer, for which the polarization of the medium has no screening effect. This increase, however, is rather slower than that given by the theory when the polarization is neglected. According to that theory,

$$F = \frac{4\pi Ne^4}{mc^2}\left[\log\frac{2mc^2\gamma^2}{I} - 1\right]$$

see *QED*, (82.28). The coefficient of the $\log\gamma$ term here is twice that in (114.26).
It may also be noted that the presence of the electron density N in the argument of the logarithm in formulae (114.25) and (114.26) results in the following property of energy losses of ultra-relativistic particles: when such a particle passes through layers of different substances containing the same number of electrons per unit surface area, the losses are smaller in media with larger N.

12.6.3 §115. Cherenkov radiation

A charged particle moving in a transparent medium emits, in certain circumstances, an unusual type of radiation, first observed by P. A. Cherenkov and S. I. Vavilov, and theoretically interpreted by I. E. Tamm and I. M. Frank (1937). It must be emphasized that this radiation is entirely unrelated to the bremsstrahlung which is almost always emitted by a rapidly moving electron. The latter radiation is emitted by the moving electron itself when it collides with atoms. The Cherenkov effect, however, involves radiation emitted by the medium under the action of the field of the particle moving in it. The distinction between the two types of radiation appears with particular clarity when the particle has a very large mass: the bremsstrahlung disappears, but the Cherenkov radiation is unaffected.

The wave number and frequency of an electromagnetic wave propagated in a transparent medium are related by $k = n\omega/c$, where $n = \sqrt{\varepsilon}$ is the refractive index, which is real. We again suppose the medium isotropic and non-magnetic. We have seen that the frequency of the Fourier component of the field of a particle moving uniformly in the x-direction in a medium is related to the x-component of the wave vector by $\omega = k_x v$. If this component is a freely propagated wave, these two relations must be consistent. Since $k > k_x$, it follows that we must have

$$v > c/n(\omega). \tag{115.1}$$

[0]† This formula is obtained by adding *QED*(82.20) and (82.25), with E_1 for $m\Delta_{\max}$ in the latter. For a small energy transfer E_1, the formulae apply to both fast electrons and fast heavy particles.

Thus radiation of frequency ω occurs if the velocity of the particle exceeds the phase velocity of waves of that frequency in the medium concerned. †

Let θ be the angle between the direction of motion of the particle and the direction of emission. We have $k_x = k\cos\theta = (n\omega/c)\cos\theta$ and, since $k_x = \omega/v$, we find that

$$\cos\theta = c/nv \tag{115.2}$$

Thus a definite value of the angle θ corresponds to radiation of a given frequency. That is, the radiation of each frequency is emitted forwards, and is distributed over the surface of a cone with vertical angle 2θ, where θ is given by (115.2). The distributions of the radiation in angle and in frequency are thus related in a definite manner.

The emission of electromagnetic waves, if it occurs, involves a loss of energy by the moving particle. This loss forms part, though a small part, of the total losses calculated in §114. (The bremsstrahlung is not included therein.) In this sense the term "ionization losses" is not quite accurate. We shall now find the corresponding part of the total losses, and thus determine the intensity of the Cherenkov radiation.

According to (114.9), the energy loss in the frequency interval $\mathrm{d}\omega$ is

$$\mathrm{d}F = -\mathrm{d}\omega\frac{ie^2}{\pi}\sum\omega\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{\varepsilon v^2}\right)\int\frac{q\ \mathrm{d}q}{q^2-\omega^2\left(\frac{\varepsilon}{c^2}-\frac{1}{v^2}\right)}$$

where the summation is over terms with $\omega = \pm|\omega|$. We introduce as a new variable

$$\xi = q^2 - \omega^2\left(\frac{\varepsilon}{c^2}-\frac{1}{v^2}\right)$$

Then

$$\mathrm{d}F = -\mathrm{d}\omega\frac{ie^2}{2\pi}\sum\omega\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{\varepsilon v^2}\right)\int\frac{\mathrm{d}\xi}{\xi}$$

In integrating along the real ξ-axis we must pass round the singular point $\xi = 0$ (for which $q^2 + {k_x}^2 = k^2$) in some manner, which is determined by the fact that, although we suppose $\varepsilon(\omega)$ real (the medium being transparent), it actually has a small imaginary part, which is positive for $\omega > 0$ and negative for $\omega < 0$. Accordingly, ξ has a small negative or positive imaginary part, and the path of integration ought to pass below or above the real axis respectively. This means that, when the path of integration is displaced to the real axis, we must pass below or above the singular point respectively. This gives a contribution to $\mathrm{d}F$, and the real parts cancel in the sum. Indenting the path of integration with infinitesimal semicircles, we find

$$\sum\omega\int\mathrm{d}\xi/\xi = \omega\left\{\int_{\bigcup}\mathrm{d}\xi/\xi - \int_{\cap}\mathrm{d}\xi/\xi\right\} = 2i\pi\omega$$

Thus the final formula is

$$\mathrm{d}F = \frac{e^2}{c^2}\left(1-\frac{c^2}{v^2n^2}\right)\omega\mathrm{d}\omega \tag{115.3}$$

which gives the intensity of the radiation in a frequency interval $\mathrm{d}\omega$. According to (115.2), this radiation is emitted in an angle interval.

$$\mathrm{d}\theta = \frac{c}{vn^2\sin\theta}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\omega}\ \mathrm{d}\omega \tag{115.4}$$

[0]† The problem of radiation from an electron moving uniformly in a vacuum at a velocity $v > c$ was discussed by A. Sommerfeld (1904) before the theory of relativity became known

The total intensity of the radiation is obtained by integrating (115.3) over all frequencies for which the medium is transparent.

It is easy to determine the polarization of the Cherenkov radiation. As we see from (114.7) the vector potential of the radiation field is parallel to the velocity $\mathbf{v}$. The magnetic field $\mathbf{H_k} = i\mathbf{k} \times \mathbf{A_k}$ is therefore perpendicular to the plane containing $\mathbf{v}$ and the ray direction k. The electric field (in the "wave region") is perpendicular to the magnetic field, and therefore lies in that plane.

PROBLEM

Find the cone of Cherenkov radiation wave vectors for a particle moving uniformly in a uniaxial non-magnetic crystal: (a) along the optical axis, (b) at right angles to the optical axis (V. L. Ginzburg, 1940).

Solution. (a) When a charge moves in a uniaxial crystal, the Cherenkov radiation is in general on two cones corresponding to the ordinary and extraordinary waves. In motion along the optical axis, however, the ordinary Wave is not emitted, even though a condition such as (115.1) may be satisfied: this wave always has linear polarization with the vector $\mathbf{E}$ perpendicular to the principal cross-section (that is, the plane through the optical axis-which we take as the z-axis-and the direction of any given $\mathbf{k}$), and the emission of such a wave in the case concerned is evidently impossible, since the work $e\mathbf{E} \cdot \mathbf{v} = 0$ and the particle does not lose energy. The extraordinary radiation cone is found by substituting in (98.5) the value of n from (115.2), which is valid even if the medium is not isotropic; in the present case, the angle θ between k and v is the same as the angle between k and the optical axis. The result is

$$\tan^2\theta = (\varepsilon_1/\varepsilon_1)\left(v^2\varepsilon_1/c^2 - 1\right)$$

and we must have $v > c/\sqrt{\varepsilon_1}$. This is a circular cone on which the intensity distribution is uniform over the generators (as is in any case obvious from symmetry). The vertical angle 2ϑ of the ray vector cone is related to θ by $\tan\vartheta = (\varepsilon_1/\varepsilon_n)\tan\theta$.

(b) In this case, there are two Cherenkov cones. We take the direction of v as the x-axis, and the optical axis as the z-axis; θ is the angle between $\mathbf{k}$ and the x-axis, and ϕ the azimuth of $\mathbf{k}$ measured from the xy-plane (Fig. 62). The cone angle for the ordinary waves is given by

$$\cos\theta = c/v\sqrt{\varepsilon_\perp},$$

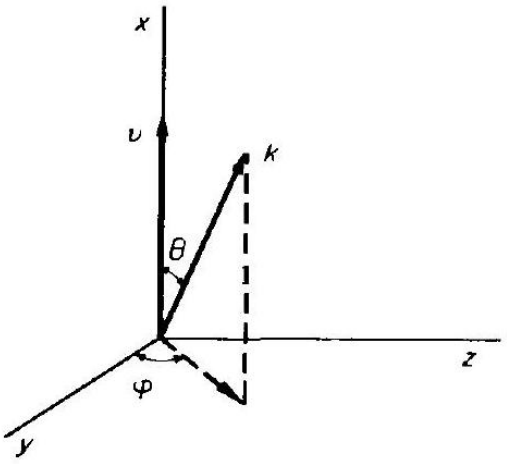


Fig. 62

and we must have $v > c/\sqrt{\varepsilon_\perp}$. This is a circular cone, but the radiation intensity depends on the azimuth † in particular, there is no radiation in the xz-plane ($\phi = \frac{1}{2}\pi$), since $\mathbf{v}\cdot\mathbf{E} = 0$. The extraordinary wave cone is not circular; its vertical angle depends on ϕ :

$$\cos^2\theta = \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_1)\sin^2\phi + \varepsilon_1}{(\varepsilon_1 - \varepsilon_1)\sin^2\phi + \varepsilon_1\varepsilon_1 v^2/c^2}$$

and we must have $v > c/\sqrt{\varepsilon}$. The extraordinary radiation is polarized with the vector $\mathbf{D}$ in the principal crosssection, perpendicular to $\mathbf{k}$. If $\mathbf{k}$ lies in the xy-plane ($\phi = 0$), then $\mathbf{D}$ and also $\mathbf{E}$ are in the z-direction; here $\mathbf{v}\cdot\mathbf{E} = 0$, so that the intensity of the extraordinary radiation is zero in the xy-plane.

О черенковском излучении

Свободная частица, двигаясь в среде с постоянной скоростью уже излучает электромагнитные волны, в отличие от ситуации с вакуумом.

В самом деле, представим себе квазиупругий диполь и влияние на него заряженной частицы, которая движется с постоянной скоростью. Очевидно, что под влиянием поля частицы диполь приобретет поляризацию, которая будет увеличиваться при приближении заряда, т.е. при увеличении электрического поля в точке расположения диполя, и уменьшаться при удалении заряда. Таким образом, даже движущийся с постоянной скоростью заряд порождает переменную во времени поляризацию диполя, т.е. дипольный момент начинает зависеть от времени, и поэтому он может излучать электромагнитные волны. Если диполи образуют среду, то движущийся в ней заряд может привести к тому, что эта среда начнет излучать при определенных условиях даже при постоянной скорости движения заряда.

Мы рассмотрим однородную среду без поглощения, которая характеризуется показателем преломления $n(\omega)$, и покажем, что если скорость заряженной частицы больше скорости распространения свободных электромагнитных волн в этой среде, то возникает излучение, открытое Черенковым и Вавиловым, теория которого была построена Таммом и Франком. Именно, мы проведем расчет спектральной плотности интенсивности черенковского излучения.

Суть (?)

Частица, летящая с постоянной скоростью в среде излучает.
(как - хз, пару раз всего смотрел.)

Вывод черенковского излучения

Выпишем уравнения Максвелла в однородной среде с диэлектрической проницаемостью $\epsilon(\omega) = n^2(\omega)$, которые после действия преобразования Фурье по времени и координатам, например для электрического поля:

$$\mathcal{E} \equiv \mathcal{E}(\omega, \boldsymbol{k}) = \int e^{\mathrm{i}\omega t - \mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\mathcal{E}(t, \boldsymbol{r})\mathrm{d}^3 r \ \mathrm{d}t$$

приобретают вид

$$\begin{aligned}
\mathrm{i}\boldsymbol{k}\times\mathcal{E} &= \mathrm{i}\frac{\omega}{c}\mathcal{H} \\
\mathrm{i}\boldsymbol{k}\times\mathcal{H} &= \frac{4\pi}{c}j - \mathrm{i}\frac{\omega}{c}n^2(\omega)\mathcal{E} \\
\mathrm{i}\ \boldsymbol{k}\cdot\mathcal{H} &= 0 \\
n^2(\omega)\ \mathrm{i}\ \boldsymbol{k}\cdot\mathcal{E} &= 4\pi\rho
\end{aligned}$$

В этих уравнениях внешние источники - заряд и ток частицы, движущейся с постоянной скоростью $\boldsymbol{v}$, так что преобразование Фурье

$$\rho = \int e^{\mathrm{i}\omega t - \mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\rho(t,\boldsymbol{r})\mathrm{d}^3 r\ \mathrm{d}t$$

с плотностью заряда

$$\rho(t,\boldsymbol{r}) = e\delta^{(3)}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{v}t)$$

дает

$$\rho = e\int e^{\mathrm{i}\omega t - \mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}t}\ \mathrm{d}t = e2\pi\delta(\omega - \boldsymbol{k}\boldsymbol{v})$$

и аналогично для тока:

$$\boldsymbol{j} = \boldsymbol{v}e2\pi\delta(\omega - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v})$$

Выражая с помощью (24.) магнитное поле через электрическое

$$\mathcal{H} = \frac{c}{\omega}k\times\mathcal{E}$$

замечаем, что магнитное поле ортогонально волновому вектору $\boldsymbol{k}$, а уравнение (24.) тождественно удовлетворяется, в то время как подстановка магнитного поля в уравнение (24.) дает

$$\mathrm{i}\frac{c}{\omega}\boldsymbol{k}\times(\boldsymbol{k}\times\mathcal{E}) = \frac{4\pi}{c}j - \mathrm{i}\frac{\omega}{c}n^2(\omega)\mathcal{E}$$

Раскрывая двойное векторное произведение

$$k\times(k\times\mathcal{E}) = k(k\cdot\mathcal{E}) - k^2\mathcal{E}$$

и используя для скалярного произведения электрического поля на волновой вектор уравнение (24.), находим:

$$-\boldsymbol{k}\mathrm{i}\frac{4\pi}{n^2(\omega)}\rho - \boldsymbol{k}^2\mathcal{E} = -\mathrm{i}\frac{4\pi\omega}{c^2}\rho\boldsymbol{v} - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 n^2(\omega)\mathcal{E} \quad \Leftrightarrow$$

$$\mathcal{E}\left[\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 n^2(\omega) - \boldsymbol{k}^2\right] = -\mathrm{i}4\pi\rho\left[\frac{\omega}{c}\frac{\boldsymbol{v}}{c} - \frac{\boldsymbol{k}}{n^2(\omega)}\right]$$

Для того чтобы найти решение для вынужденных колебаний поля, необходимо задать правила обхода полюсов:

$$\mathcal{E} = -\mathrm{i}\frac{4\pi\rho}{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 n^2(\omega) - k^2 + \mathrm{i}\omega 0}\left[\frac{\omega}{c}\frac{\boldsymbol{v}}{c} - \frac{\boldsymbol{k}}{n^2(\omega)}\right]$$

где мы добавили бесконечно малое затухание в среде, т.е. заменили $n^2(\omega) \to n^2(\omega) + \mathrm{i}\ \omega 0$, а мнимая добавка имеет знак частоты, которая приводит к тому, что оба полюса в плоскости комплексной переменной $k_0 = \omega/c$ находятся в нижней полуплоскости, т.е. имеют отрицательные мнимые добавки, а значит, вынужденные колебания в среде, естественно, нарушают инвариантность относительно обращения стрелы времени, поскольку влияние источника на среду возникает только с опозданием и функция влияния равна нулю на временах до появления источника.

И это есть ключевой момент при расчете черенковского излучения заряженной частицы! (?? почему??)

В итоге, с учетом заданной плотности заряда, движущегося с постоянной скоростью, получим выражение для электрического поля

$$\mathcal{E} = -\mathrm{i}e\frac{2(2\pi)^2\delta(\omega - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v})}{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 n^2(\omega) - \boldsymbol{k}^2 + \mathrm{i}\omega 0}\left[\frac{\omega}{c}\frac{\boldsymbol{v}}{c} - \frac{\boldsymbol{k}}{n^2(\omega)}\right]$$

для которого можно выполнить обратное преобразование Фурье:

$$\mathcal{E}(t,\boldsymbol{r}) = \int \frac{\mathrm{d}\omega \mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^4} e^{-\mathrm{i}\omega t + \mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \mathcal{E}$$

Траектория заряда задается соотношением

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v}t$$

так что при подстановке в обратное преобразование Фурье фаза равна

$$\omega t - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} = (\omega - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v})t$$

В итоге, поле, действующее на частицу, равно

$$\mathcal{E}(t,\boldsymbol{r})|_{\boldsymbol{r}=\boldsymbol{v}t} = -\mathrm{i}e2(2\pi)^2 \int \frac{\mathrm{d}\omega \mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^4} e^{-\mathrm{i}(\omega - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v})t} \delta(\omega - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}) \frac{\left[\frac{\omega}{c}\frac{\boldsymbol{v}}{c} - \frac{\boldsymbol{k}}{n^2(\omega)}\right]}{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 n^2(\omega) - \boldsymbol{k}^2 + \mathrm{i}\omega 0},$$

так что с учетом дельта-функции комплексная фаза экспоненты зануляется.

Потери энергии и интенсивность

Работа, которую совершает это электрическое поле, определяется мощностью:

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = e\boldsymbol{v}\cdot\mathcal{E}(t,\boldsymbol{r})|_{\boldsymbol{r}=\boldsymbol{v}t}$$

а так как в среде затухание по условию задачи пренебрежимо мало, то теряемая частицей энергия полностью уходит в излучение электромагнитных волн с интесивностью

$$\mathcal{I} = -e\boldsymbol{v}\cdot\mathcal{E}(t,\boldsymbol{r})|_{\boldsymbol{r}=\boldsymbol{v}t}$$

Умножая электрическое поле на скорость и заряд, находим:

$$\mathcal{I} = \mathrm{i}e^2 2 \int \frac{\mathrm{d}\omega \mathrm{d}^3 k}{(2\pi)^2} \frac{\delta(\omega - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v})}{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 n^2(\omega) - \boldsymbol{k}^2 + \mathrm{i}\omega 0} \left[\frac{\omega}{c}\frac{v^2}{c} - \frac{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}}{n^2(\omega)}\right]$$

В силу дельта-функции подставим $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v} \to \omega$ и распишем

$$\mathrm{d}^3 k = \mathrm{d}k_z k_\perp \mathrm{d}k_\perp \mathrm{d}\phi$$

где в качестве оси z мы выбрали вектор скорости частицы. Так как подынтегральное выражение не зависит от угла ϕ, интегрирование по нему тривиально и дает фактор 2π. По построению

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v} = k_z v$$

и дельта-функция снимает интеграл по k_z:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \delta\left(\omega - k_z v\right) \mathrm{d}k_z = \frac{1}{v}$$

Тогда

$$\begin{aligned}\mathcal{I} =& \mathrm{i}\frac{e^2}{\pi v} \int \mathrm{d}\omega k_\perp \mathrm{d}k_\perp \frac{1}{\frac{\omega^2}{c^2}n^2(\omega) - \frac{\omega^2}{v^2} - k_\perp^2 + \mathrm{i}\omega 0} \left[\frac{\omega}{c}\frac{v^2}{c} - \frac{\omega}{n^2(\omega)}\right] \\ =& \mathrm{i}\frac{e^2 v}{c^2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \omega \mathrm{d}\omega \int\limits_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}k_\perp^2}{2} \frac{\omega^2}{c^2} n^2(\omega) - \frac{\omega^2}{v^2} - k_\perp^2 + \mathrm{i}\omega 0 \left[1 - \frac{c^2}{n^2(\omega)v^2}\right]\end{aligned}$$

Можно перейти к интегрированию по ω только по положительной полуоси (обратите внимание на знак мнимой добавки в знаменателе!):

$$\mathcal{I} = \mathrm{i}\frac{e^2 v}{c^2 2\pi}\int\limits_0^\infty \omega \mathrm{d}\omega \left[1 - \frac{c^2}{n^2(\omega)v^2}\right]\left\{\int\limits_0^\infty \frac{\mathrm{d}k_\perp^2}{\frac{\omega^2}{c^2}n^2(\omega) - \frac{\omega^2}{v^2} - k_\perp^2 + \mathrm{i}0}\mathrm{d}k_\perp^2 - \int\limits_0^\infty \frac{\omega^2}{c^2}n^2(\omega) - \frac{\omega^2}{v^2} - k_\perp^2 - \mathrm{i}0\right\}$$

так что спектральная плотность интенсивности излучения определяется интегралом

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{I}}{\mathrm{d}\omega} = \mathrm{i}\frac{e^2 v}{c^2 2\pi}\omega \left[1 - \frac{c^2}{n^2(\omega)v^2}\right]\left\{\int\limits_0^\infty \frac{\mathrm{d}k_\perp^2}{\frac{\omega^2}{c^2}n^2(\omega) - \frac{\omega^2}{v^2} - k_\perp^2 + \mathrm{i}0}\mathrm{d}k_\perp^2 - \int\limits_0^\infty \frac{\omega^2}{c^2}n^2(\omega) - \frac{\omega^2}{v^2} - k_\perp^2 - \mathrm{i}0\right\}$$

который можно взять по формуле Сохоцкого

$$\frac{1}{x \pm \mathrm{i}0} = PV\frac{1}{x} \mp \mathrm{i}\pi\delta(x)$$

При этом интегралы в смысле главного значения сокращаются, и остаются только вклады за счет полюсов:

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{I}}{\mathrm{d}\omega} = \mathrm{i}\frac{e^2 v}{c^2 2\pi}\omega \left[1 - \frac{c^2}{n^2(\omega)v^2}\right]\int\limits_0^\infty \mathrm{d}k_\perp^2(-2\pi\mathrm{i})\delta\left(\frac{\omega^2}{c^2}n^2(\omega) - \frac{\omega^2}{v^2} - k_\perp^2\right)$$

Дельта-функция обращается в нуль в точке

$$k_\perp^2 = \frac{\omega^2}{c^2}n^2(\omega)\left[1 - \frac{c^2}{n^2(\omega)v^2}\right]$$

так что она находится в физической области $k_\perp^2 > 0$, если только выполнено условие

$$v^2 > \frac{c^2}{n^2(\omega)} \equiv c_n^2$$

где c_n - фазовая скорость электромагнитных волн в среде, и поэтому излучение возникает, если скорость частицы больше скорости света в среде:

$$v > c_n$$

В этом случае спектральная плотность интенсивности -

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{L}}{\mathrm{d}\omega} = \frac{e^2 v}{c^2}\omega\left(1 - \frac{c_n^2}{v^2}\right)$$

Интеграл по частотам, т.е. полная интенсивность, несмотря на линейно растущий фактор ω, зависит от поведения показателя преломления как функции частоты. В любом случае, интервал частот, в котором скорость частицы больше скорости света в среде, оказывается конечным, и интегральная интенсивность черенковского излучения в реальных средах - это конечная физическая величина.

Волновой вектор k связан, как мы видели при выводе интенсивности, со скоростью частицы двумя соотношениями: исходной дельта-функцией за счет источника излучения и полюсом в пропагаторе поля,

$$\omega = k_z v, \quad \omega = k c_n,$$

так что вводя угол θ между скоростью частицы и волновым вектором $k_z = k\cos\theta$, найдем

$$\cos\theta = \frac{c_n}{v}$$

Таким образом, нормаль к фронту волны черенковского излучения, т.е. единичный вектор в направлении волнового вектора, образует угол θ с осью движения заряженной частицы.

О применениях черенковского излучения

вроде даже датчики есть на этом явлении, я хз

12.6.4 §116. Transition radiation

Cherenkov radiation has the property that it occurs with uniform motion of a charged particle (whereas a charge moving uniformly in a vacuum does not radiate). A different class of phenomena that are similar in this respect is represented by transition radiation, which occurs with uniform motion of a charged particle in a spatially inhomogeneous medium, for example when passing from one medium to another (V. L. Ginzburg and I. M. Frank, 1945). It differs in principle from the Cherenkov radiation, in that it occurs for any velocity of the particle, not necessarily exceeding the phase velocity of light in the medium. Like the Cherenkov radiation, it is unrelated to the bremsstrahlung which also occurs when charged particles are incident on a surface separating two media, and the distinction is particularly clear in the limit of a particle with infinite mass, for which the bremsstrahlung is zero but the transition radiation is not.

Let us consider the transition radiation when a charged particle passes (with constant velocity $\mathbf{v}$) across the boundary between a vacuum and a dielectric (non-magnetic) medium with complex permittivity ε. The motion takes place along the x-axis, at right angles to the interface plane ($x = 0$; Fig. 63).

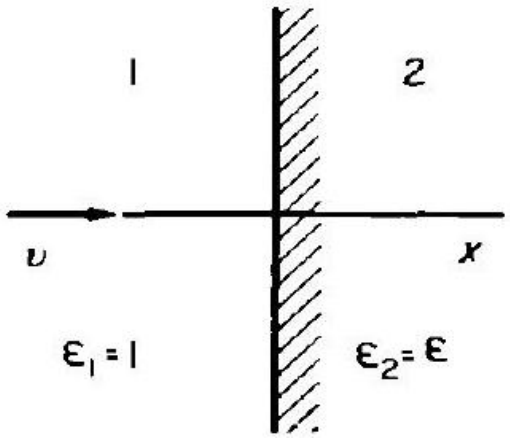


Fig. 63

The electromagnetic field is determined by the equations (114.1)-(114.3) or by the equivalent ones (114.6). All quantities in these equations can be expanded as Fourier integrals with respect to the time and the coordinates y and z, for which the medium is homogeneous:

$$\mathbf{E} = \int \mathbf{E}_{\omega\mathbf{q}}(x) e^{i(\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} \mathrm{d}\omega \ \mathrm{d}^2 q/(2\pi)^3, \tag{116.1}$$

etc. where $\mathbf{q}$ is the wave vector in the yz-plane. In each of the two half-spaces, we seek the field as the sum of a particular solution of the inhomogeneous equations (114.6) (the field of the charge, denoted by the index (e)), and the general solution of the homogeneous equations (114.6) with zero on the right (the free radiation field, denoted by the index (r)). The former is given by formulae analogous to (114.7):

[0]† The determination of the intensity distribution would need a calculation of the stopping power, similar to that given in §114 for an isotropic medium. These calculations and certain other topics relating to Cherenkov radiation are described in the review articles by B.M. Bolotovskii, *U* spekhi fizicheskikh nauk 62,201,1957; Soviet Physics Uspekhi 4, 781, 1962.

$$\left.\begin{aligned}\phi^{(e)}_{\omega\mathbf{q}} &= \tfrac{4\pi e}{\varepsilon v}\left[q^2+\tfrac{\omega^2}{v^2}-\tfrac{\varepsilon\omega^2}{c^2}\right]^{-1} e^{i\omega x/v}\\ \mathbf{A}^{(e)}_{\omega\mathbf{q}} &= \varepsilon v\phi^{(e)}_{\omega\mathbf{q}}/c\end{aligned}\right\} \tag{116.2}$$

The electric field is therefore

$$\mathbf{E}^{(e)}_{\omega\mathbf{q}} = i\left[\omega\mathbf{v}\left(\frac{\varepsilon}{c^2}-\frac{1}{v^2}\right)-\mathbf{q}\right]\phi^{(e)}_{\omega\mathbf{q}}; \tag{116.3}$$

the expression for $\mathbf{H}^{(e)}_{\omega\mathbf{q}}$ will not be needed, and will not be written out.
The second part of the solution, corresponding to the free radiation field, may be put in the form of the electric field immediately. The longitudinal component of $\mathbf{E}^{(r)}_{\omega\mathbf{q}}$ is $\left(\mathbf{E}^{(\mathbf{r})}_{\omega\mathbf{q}}\right)_x = iae^{\pm ik_x x}$ with a coefficient a as yet unknown; then

$$k_x^2+q^2 = \varepsilon\omega^2/c^2. \tag{116.4}$$

The transverse component, which must obviously be along $\mathbf{q}$, the only distinctive direction in this plane, is then determined by the equation div $\mathbf{D}=0$, i.e. $\varepsilon(\mathbf{q}\pm k_x\mathbf{n})\cdot\mathbf{E}_{\omega\mathbf{q}}=0$ (where $\mathbf{n}$ is a unit vector along the x-axis):

$$\mathbf{E}^{(r)}_{\omega\mathbf{q}} = ia\left[\mathbf{n}\mp\frac{\mathbf{q}}{q^2}\sqrt{\left(\frac{\varepsilon\omega^2}{c^2}-q^2\right)}\right]\exp\left[\pm ix\sqrt{\left(\frac{\varepsilon\omega^2}{c^2}-q^2\right)}\right]. \tag{116.5}$$

The plus and minus signs in the exponent refer to the half-spaces $x>0$ and $x<0$ respectively: the waves are propagated away from the interface. †

The constants a_1 and a_2 in the two half-spaces are determined from the conditions of continuity at the interface for the normal component $\varepsilon\mathbf{n}\cdot\mathbf{E}_{\omega\mathbf{q}}$ of the electric induction and the tangential component $\mathbf{q}\cdot\mathbf{E}_{\omega\mathbf{q}}$ of the electric field; the continuity of the magnetic field provides no further information, of course. The result for the coefficient in the vacuum $x<0$ is

$$a_1 = \frac{4\pi e\beta\kappa^2(\varepsilon-1)\left[1-\beta^2+\beta\sqrt{(\varepsilon-\kappa^2)}\right]}{\omega\left(1-\beta^2+\beta^2\kappa^2\right)\left[1+\beta\sqrt{(\varepsilon-\kappa^2)}\right]\left[\sqrt{(\varepsilon-\kappa^2)}+\varepsilon\sqrt{(1-\kappa^2)}\right]} \tag{116.6}$$

where $\beta=v/c, \kappa=qc/\omega$.
Let us now calculate the total energy $\mathscr{U}_1$ radiated by the particle into the vacuum, i.e. backwards relative to its motion. A simple way of doing this is to consider the emitted wave-train for long times t, when it is already at a great distance to the left; the radiation field is then separated from the intrinsic field of the charge. The energy $\mathscr{U}_1$ is found by integrating the radiation field energy density over all space. If the origin is moved along the axis into the region of the wave-train, the integration with respect to x can be taken from $-\infty$ to ∞, because the field is attenuated in both directions.

In the wave region, the electric and magnetic energy densities are equal. Hence

$$\mathscr{U}_1 = \frac{1}{4\pi}\int \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\cdot\mathbf{E}_1^2$$

Substituting $\mathbf{E}_1$ as the expansion (116.1), we write the square of the integral as a double integral:

[0]† In equations (116.2)-(116.5), ε is to be taken as $\varepsilon_1=1$ in $x<0$ and as $\varepsilon=\varepsilon_2$ in $x>0$. In the formula below, ε everywhere means ε_2.

$$\mathbf{E}^2(t,\mathbf{r}) = \int \mathbf{E}_{\omega\mathbf{q}}(x)\cdot\mathbf{E}_{\omega'\mathbf{q}'}{}^*(x)\exp\left\{i\left[\mathbf{r}\cdot(\mathbf{q}-\mathbf{q}')-t\,(\omega-\omega')\right]\right\}\frac{\mathrm{d}\omega\ \mathrm{d}\omega'\mathrm{d}^2q\ \mathrm{d}^2q'}{(2\pi)^6}$$

Integration over $\mathrm{d}y\ \mathrm{d}z$ gives the delta function $(2\pi)^2\delta\,(\mathbf{q}-\mathbf{q}')$, which is then eliminated by the integration over d^2q'. Thus

$$\mathscr{U}_1 = \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\int \mathbf{E}_{\omega\mathbf{q}}(x)\cdot\mathbf{E}_{\omega'\mathbf{q}}{}^*(x)e^{-i\mathbf{t}(\omega-\omega')}\frac{\mathrm{d}\omega\ \mathrm{d}\omega'\mathrm{d}^2q}{(2\pi)^4} \tag{116.7}$$

Substituting (116.5) (with $\varepsilon = 1, a = a_1$) for $\mathbf{E}_{\omega q}$, and carrying out the integration with respect to x, we find

$$\mathscr{U}_1 = \frac{1}{2}\int |a_1|^2\,\frac{\omega^2}{q^2c^2}\delta\left[\sqrt{\left(\frac{\omega^2}{c^2}-q^2\right)}-\sqrt{\left(\frac{\omega'^2}{c^2}-q^2\right)}\right]\frac{\mathrm{d}^2q\ \mathrm{d}\omega\ \mathrm{d}\omega'}{(2\pi)^4}$$

here we have also used the fact that, because of the delta function, $\omega = \omega'$; for the same reason, the phase factors which arise in a_1 when the origin is moved in (116.5) disappear in the product $a_1(\omega,\mathbf{q})a_1{}^*(\omega',\mathbf{q})$. The integration with respect to ω and ω' is taken from $-\infty$ to ∞; eliminating the delta function by the second of these leaves

$$\mathscr{U}_1 = \int_0^{\infty}\int |a_1(\omega,\mathbf{q})|^2\,\frac{\omega^2}{cq^2}\sqrt{\left(1-\frac{c^2q^2}{\omega^2}\right)}\frac{\mathrm{d}^2q\ \mathrm{d}\omega}{(2\pi)^4} \tag{116.8}$$

since the integrand is an even function of ω, the integral with respect to ω has been written as twice the integral from 0 to ∞.

The integration over d^2q is to be taken over the range $q^2 < \omega^2/c^2$ in which k_x is real, so that the field (116.5) actually represents the wave propagated. † We use the angle θ between the radiation wave vector $\mathbf{k} = (k_{\boldsymbol{x}}, \mathbf{q})$ and the direction of the vector $-\mathbf{v}$, so that $\theta = 0$ corresponds to radiation in the direction exactly opposite to the motion of the particle. Then $q = (\omega/c)\sin\theta$, and a change from integration over d^2q to one over $2\pi q\ \mathrm{d}q = (2\pi\omega^2/c^2)\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta$ gives

$$\begin{aligned}\mathscr{U}_1 &= \frac{1}{c(2\pi)^3}\int_0^{\infty}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}|a_1|^2\,\omega^2\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}\ \mathrm{d}\theta\ \mathrm{d}\omega\\ &\equiv \int_0^{\infty}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\mathscr{U}_1(\omega,\theta)\cdot 2\pi\sin\theta\ \mathrm{d}\theta\ \mathrm{d}\omega.\end{aligned}$$

The function $\mathscr{U}_1(\omega,\theta)$ gives the distribution of the radiation in frequency and angle. With a_1 from (116.6), we have finally

$$\mathscr{U}_1(\omega,\theta) = \frac{e^2\beta^2\sin^2\theta\cos^2\theta}{\pi^2c\left(1-\beta^2\cos^2\theta\right)^2}\left|\frac{(\varepsilon-1)\left[1-\beta^2+\beta\sqrt{\left(\varepsilon-\sin^2\theta\right)}\right]}{\left[1+\beta\sqrt{\left(\varepsilon-\sin^2\theta\right)}\right]\left[\varepsilon\cos\theta+\sqrt{\left(\varepsilon-\sin^2\theta\right)}\right]}\right|^2 \tag{116.9}$$

(V. L. Ginzburg and I. M. Frank, 1945). The transition radiation is linearly polarized, and the electric vector is seen from (116.5) to be coplanar with $\mathbf{k}$ and $\mathbf{v}$. For non-relativistic velocities, the radiation intensity is proportional to v^2, i.e. to the energy of the particle.

At an interface with an ideal conductor ($\varepsilon = \infty$), formula (116.9) becomes

$$\mathscr{U}_1(\omega,\theta) = \frac{e^2v^2}{\pi^2c^3}\frac{\sin^2\theta}{\left(1-\beta^2\cos^2\theta\right)^2}.$$

In the ultra-relativistic case ($\beta \approx 1$), the radiation has a maximum at small angles $\theta \sim \sqrt{(1-\beta^2)}$: formula (116.9) then becomes

$$\mathscr{U}_1(\omega,\theta) = \frac{e^2}{\pi^2 c}\left|\frac{\sqrt{\varepsilon}-1}{\sqrt{\varepsilon}+1}\right|^2 \frac{\theta^2}{\left[\theta^2+(1-\beta^2)\right]^2}.$$

This gives as the frequency distribution of the total radiation, with logarithmic accuracy,

$$\begin{aligned}\mathscr{U}_1(\omega) &\cong \int_0^1 \mathscr{U}_1(\omega,\theta)\cdot 2\pi\theta\ \mathrm{d}\theta \\ &\cong \frac{e^2}{\pi c}\left|\frac{\sqrt{\varepsilon}-1}{\sqrt{\varepsilon}+1}\right|^2 \log\frac{1}{1-\beta^2}\end{aligned} \tag{116.10}$$

Using, for sufficiently high frequencies, the limiting expression (78.1) for the permittivity:

$$\varepsilon = 1-\omega_0^2/\omega^2, \quad \omega_0^2 = 4\pi N e^2/m \tag{116.11}$$

we find that for $\omega \gg \omega_0$ the intensity decreases as $1/\omega^4$. Thus the frequencies $\omega \leqslant \omega_0$ do in fact give the main contribution to the transition radiation (in the backward direction).

Lastly, let us consider the transition radiation when a particle goes from a medium into a vacuum. This problem differs from the previous one only by a change in the sign of the velocity $\mathbf{v}$. The differential intensity of radiation into the vacuum when a charged particle leaves the medium is therefore given by an expression derived from (116.9) by putting $-v$ for v; θ is now the angle between the directions of $\mathbf{k}$ and $\mathbf{v}$ (and so $\theta = 0$ corresponds to radiation in exactly the direction of motion of the particle): †

$$\mathscr{U}_1(\omega,\theta) = \frac{e^2\beta^2\sin^2\theta\cos^2\theta}{\pi^2 c\,(1-\beta^2\cos^2\theta)^2}\left|\frac{(\varepsilon-1)\left[1-\beta^2-\beta\sqrt{\left(\varepsilon-\sin^2\theta\right)}\right]}{\left[1-\beta\sqrt{\left(\varepsilon-\sin^2\theta\right)}\right]\left[\varepsilon\cos\theta+\sqrt{\left(\varepsilon-\sin^2\theta\right)}\right]}\right|^2 \tag{116.12}$$

In the ultra-relativistic case, the radiation has a maximum intensity at small angles $\theta \sim \sqrt{(1-\beta^2)}$. Formula (116.12) then becomes

$$\mathscr{U}_1(\omega,\theta) = \frac{e^2\theta^2}{\pi^2 c}\frac{|\sqrt{\varepsilon}-1|^2}{(1-\beta^2+\theta^2)^2\left|1-\beta\sqrt{(\varepsilon-\theta^2)}\right|^2} \tag{116.13}$$

If ε is not too close to unity, the last factor in the denominator can be replaced by $|1-\sqrt{\varepsilon}|^2$, and the frequency distribution is, with logarithmic accuracy,

$$\mathscr{U}_1(\omega) = \frac{e^2}{\pi c}\log\frac{1}{1-\beta^2}.$$

For high frequencies, we again use (116.11) and put, in (116.13),

$$1-\beta\sqrt{\left(\varepsilon-\theta^2\right)} \cong \frac{1}{2}\left(1-\beta^2+\frac{\omega_0^2}{\omega^2}+\theta^2\right), \quad \sqrt{\varepsilon}-1 \cong -\omega_0^2/2\omega^2$$

The integration over angles gives

[0]† When $q^2 > \omega^2/c^2$, the exponential factors in (116.5) must be written as $\exp\left[\pm x\sqrt{\left(q^2-\omega^2/c^2\right)}\right]$, corresponding to surface waves attenuated away from the interface. Such waves are necessarily present with transition radiation; they will not be discussed here.

$$\mathscr{U}_1(\omega) = \frac{e^2}{\pi c} \log \frac{\omega_0^2}{\omega^2 (1-\beta^2)} \text{ for } \omega_0 \lessless \omega \ll \omega_0/\sqrt{(1-\beta^2)},$$
$$\mathscr{U}_1(\omega) = \frac{e^2}{6\pi c} \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^4 \frac{1}{(1-\beta^2)^2} \text{ for } \omega \gg \omega_0/\sqrt{(1-\beta^2)}.$$

These expressions show that the main contribution to the forward radiation comes from high frequencies, $\omega \sim \omega_0/\sqrt{(1-\beta^2)}$ (G. M. Garibyan, 1959). The radiation energy integrated over all frequencies is then proportional to the particle energy: ‡

$$\mathscr{U}_1 = e^2\omega_0/3c\sqrt{(1-\beta^2)} \tag{116.14}$$

12.7 XV Scattering of Electromagnetic Waves by Landau

12.7.1 §117. The general theory of scattering in isotropic media

In the theory of propagation of electromagnetic waves in transparent media discussed in previous chapters, a phenomenon has been neglected which, though not prominent, is of fundamental importance: scattering. Scattering results in the appearance of scattered waves of small intensity, whose frequencies and directions are not those of the main wave.

Scattering is ultimately due to the change in the motion of the charges in the medium under the influence of the field of the incident wave, resulting in the emission of the scattered waves. The microscopic mechanism of scattering must be investigated by quantum methods, but this investigation is not needed in developing the macroscopic theory described below. We shall therefore give only some brief remarks on the nature of the processes which cause the change in the wave frequency on scattering.

The basic scattering process consists in the absorption of the original quantum $\hbar\omega$ by the scattering system and the simultaneous emission by that system of another quantum $\hbar\omega'$. The frequency ω' of the scattered quantum may be either less or greater than ω; these two cases are called respectively Stokes scattering and anti-Stokes scattering. In the former case the system absorbs an amount of energy $\hbar(\omega - \omega')$; in the latter case it emits $\hbar(\omega' - \omega)$ and makes a transition to a state of lower energy. In the simple case of a gas, for example, scattering takes place at individual molecules, and the change in frequency may be due either to a transition of the molecule to another energy level or to a change in the kinetic energy of its motion.

Another kind of process occurs when the primary quantum $\hbar\omega$ remains unchanged but causes the scattering system to emit two quanta: one of energy $\hbar\omega$, with the same frequency and direction, and a "scattered" quantum $\hbar\omega'$. The energy $\hbar(\omega + \omega')$ is obtained from the scattering system. Processes of this type, however, are, under ordinary conditions, very rare in comparison with those of the first type †

Proceeding now to consider the macroscopic theory of scattering, we must first make precise the meaning of the averaging processes performed in that theory. The averaging of quantities in macroscopic electrodynamics can be regarded as comprising two operations. If, for clarity, we take the classical view, then we can distinguish the averaging over a physically infinitesimal

[0]† For a transparent medium (ε may be taken as real), we consider only velocities $v < c/\sqrt{\varepsilon}$. Otherwise, there would be the question of separating the contribution of the Cherenkov radiation emitted forwards by the particle in the medium and passing through the interface into the vacuum. This process corresponds to the pole of the intensity (116.12) where $\beta\sqrt{(\varepsilon - \sin^2\theta)} = 1$. The angle θ given by this equation is just the angle of emergence of the Cherenkov cone ray in the medium after refraction at the interface.

‡ A more detailed account of topics related to transition radiation is to be found in the review articles by F. G. Bass and V. M. Yakovenko. Soviet Physics Uspekhi 8, 420, 1965; V. L. Ginzburg and V. N. Tsytovich. Physics Reports 49, 1, 1979.

volume with a given position of all the particles in it, and the averaging of the result with respect to the motion of the particles. In the theory of scattering, however, this procedure is impossible, because the averaging with respect to the motion of the particles annuls the very phenomenon which is to be discussed. Thus, for example, the field and induction of the scattered wave which appear in the theory of

scattering must be taken to be those resulting from the first averaging only. It should be noted that in the quantum treatment one can of course refer to averaging over a volume only for an operator of a physical quantity, not for the quantity itself. The second stage of the averaging consists in determining the expectation value of the operator by means of the quantum probabilities. Hence the electromagnetic quantities mentioned below should, strictly speaking, be understood as quantum operators. This, however, does not affect the final results of the theory given in the present section, and to simplify the formulae all quantities will be treated as classical.

The monochromatic components of the fields in the scattered wave, taken in this sense, will be denoted in this section by $\mathbf{E}', \mathbf{H}', \mathbf{D}'$ and $\mathbf{B}'$. The fields in the incident wave will be denoted by the unprimed letters $\mathbf{E}, \mathbf{H}$. In the present chapter we always suppose the incident wave to be monochromatic with frequency ω.

In the propagation of the scattered wave we have the relation $\mathbf{D}' = \varepsilon(\omega')\,\mathbf{E}'$ between the electric induction and field (the scattering medium being assumed isotropic), but this relation does not reveal the phenomenon of scattering, i.e. the formation of the scattered wave from the incident wave. To describe this, additional small terms must be included in the expression for $\mathbf{D}'$. In the first approximation, these terms must be linear in the field of the incident wave. The most general form of the relation is then

$$D'_i = \varepsilon' E'_i + \alpha_{ik} E_k + \beta_{ik} E^*_k \tag{117.1}$$

Here ε' denotes $\varepsilon(\omega')$; α_{ik} and β_{ik} are tensors which characterize the scattering properties of the medium. In general they are not symmetrical, and their components are functions both of the frequency ω' of the scattered wave and of the primary frequency ω. The fact that α and β are tensors does not, of course, contradict the assumed isotropy of the medium. Only the fully averaged properties of the medium are isotropic; the local deviations from the average properties, which include the additional terms in (117.1), need not be isotropic.

The last term in (117.1) pertains to the part of the scattering which results from processes of stimulated emission. All the terms on the right-hand side of equation (117.1) must correspond to the same frequency ω' as $\mathbf{D}'$ on the left-hand side. Since $\mathbf{E}^*$ has the frequency $-\omega$, the frequency of the quantities β_{ik} must be $\omega + \omega'$ to make the frequency of the products $\beta_{ik}E_k{}^*$ equal to ω'. But $\omega + \omega'$ is the frequency which characterizes processes of stimulated emission. Because this effect is small, as mentioned above, we can neglect the corresponding term in (117.1), and in what follows we shall write

$$D'_i = \varepsilon' E'_i + \alpha_{ik} E_k \tag{117.2}$$

Similar formulae give the relation between $\mathbf{B}'$ and $\mathbf{H}'$. We shall, however, neglect the magnetic properties of the medium, which are usually of no importance as regards the scattering of light, and therefore put $\mathbf{B}' = \mathbf{H}'$.

Maxwell's equations for the field in the scattered wave are $\operatorname{curl}\mathbf{E}' = i\omega'\mathbf{H}'/c, \operatorname{curl}\mathbf{H}' = -i\omega'\mathbf{D}'/c$. Eliminating $\mathbf{H}'$ from these equations, we find $\operatorname{curl}\operatorname{curl}\mathbf{E}' = \omega'^2\mathbf{D}'/c^2$. Substituting from (117.2) $\mathbf{E}' = \mathbf{D}'/\varepsilon' - \alpha\cdot\mathbf{E}/\varepsilon'$, where $\alpha\cdot\mathbf{E}$ denotes the vector whose components are $\alpha_{ik}E_k$, and using the equation $\operatorname{div}\mathbf{D}' = 0$, we obtain for $\mathbf{D}'$ the equation

[0]† We shall see in §118 that this stimulated emission is unimportant at all temperatures $T \ll \hbar(\omega + \omega')$. It may become significant for radio waves.

$$\triangle \mathbf{D}' + k'^2 \mathbf{D}' = -\operatorname{curl}\operatorname{curl}(\alpha \cdot \mathbf{E}) \tag{117.3}$$

where $k' = \omega\sqrt{\varepsilon'}/c$ is the wave number of the scattered wave.
For an exact formulation of the conditions under which equation (117.3) is to be solved, we divide the scattering medium into small regions (whose dimensions are still large compared with molecular distances). On account of the molecular nature of the scattering processes, their correlation at different points in the medium (assumed non-crystalline) extends in general only to molecular distances. † Hence the scattered light from the various regions is non-coherent. We can therefore treat scattering from one region as if the light were not scattered at all in the remainder of the medium. In this way we calculate the field of the scattered wave at a large distance from the scattering region. Using a well-known approximation for the retarded potentials at a large distance from the source (see Fields, §66), we can immediately derive the required solution of equation (117.3):

$$\mathbf{D}' = \frac{1}{4\pi} \operatorname{curl}\operatorname{curl} \frac{\exp(ik'R_0)}{R_0} \int \alpha \cdot \mathbf{E} \exp(-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r})\, \mathrm{d}V' \tag{117.4}$$

Here $\mathbf{R}_0$ is the radius vector from some point within the scattering volume (the integration being over that volume) to the point where the field is to be calculated; the vector $\mathbf{k}'$ is in the direction of $\mathbf{R}_0$. The integral in (117.4) is independent of the coordinates of the point considered; retaining in the differentiation, as usual, only terms in $1/R_0$, we obtain

$$\mathbf{D}' = -\frac{\exp(ik'R_0)}{4\pi R_0} \mathbf{k}' \times \left[\mathbf{k}' \times \int \alpha \cdot \mathbf{E} \exp(-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r})\, \mathrm{d}V \right].$$

Since, at the point considered, the medium is regarded as not scattering, the relation between $\mathbf{D}'$ and $\mathbf{E}'$ there is given by $\mathbf{D}' = \varepsilon' \mathbf{E}'$ simply. In the field of the incident wave $\mathbf{E}$ we separate a factor periodic in space, putting

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = E_0 \mathbf{e} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}; \tag{117.5}$$

in the second equation, the complex amplitude $\mathbf{E}_0$ is written as $E_0\mathbf{e}$, where E_0 is a real quantity (${E_0}^2 = |\mathbf{E}_0|^2$), and $\mathbf{e}$ is a complex unit vector ($\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}^* = 1$) which defines the polarization of the wave. With the notation

$$\mathbf{G} = \int (\alpha \cdot \mathbf{e}) e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}\, \mathrm{d}V, \quad \mathbf{q} = \mathbf{k} - \mathbf{k}', \tag{117.6}$$

we then have

$$\begin{aligned} \mathbf{E}' &= -e^{ik'R_0} \frac{E_0}{4\pi R_0 \varepsilon'} \mathbf{k}' \times (\mathbf{k}' \times \mathbf{G}) \\ &= e^{ik'R_0} \frac{E_0 k'^2}{4\pi R_0 \varepsilon'} \mathbf{G}_\perp \end{aligned} \tag{117.7}$$

The vector $\mathbf{E}'$ is perpendicular to the direction $\mathbf{k}'$ of the scattered wave, and is given by the component $\mathbf{G}_1$ perpendicular to $\mathbf{k}'$.

Having thus determined the non-averaged field in the scattered wave, we can now investigate the intensity and polarization of the scattered light. To do so, we form the tensor

$$I_{ik} = \langle E'_i E'^*_k \rangle\,, \tag{117.8}$$

where the brackets denote the final averaging over the motion of the particles, which so far has not been carried out. The averaging of a quadratic expression gives, of course, a result

which is not zero. Since $\mathbf{E}'$ is perpendicular to $\mathbf{k}'$, the tensor I_{ik} has non-zero components only in the plane perpendicular to $\mathbf{k}'$. These components form a two-dimensional tensor $I_{\alpha\beta}$ in that plane (Greek suffixes take two values). The tensor $I_{\alpha\beta}$ is, by definition, Hermitian: $I_{\alpha\beta} = I_{\beta\alpha}{}^*$. It can be diagonalized, and the ratio of its two principal values gives the degree of depolarization, while their sum is proportional to the total intensity. †

The products $E'_i E'^*_k$ involve products of integrals G_i, which must also be averaged. Writing the product as a double integral, we have

$$\langle G_i G_k{}^* \rangle = e_1 e_m{}^* \iint \left\langle \alpha_{il}{}^{(1)} \alpha_{km}{}^{(2)*} \right\rangle \exp\left[-i\mathbf{q}\cdot(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)\right] \mathrm{d}V_1 \, \mathrm{d}V_2. \tag{117.9}$$

The indices (1) and (2) mean that the values of α are taken at two different points in space. In averaging the integrand it must be remembered that the correlation between the values of α at different points in the body extends in general only over molecular distances. After averaging, therefore, the integrand will be appreciably different from zero only for $|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1| \sim a$, where a is of the order of molecular distances. The exponent is $\sim a/\lambda$, where λ is the wavelength of the scattered wave; but $a/\lambda \ll 1$ if the macroscopic theory is applicable, and so we can replace the exponential factor by unity. ‡

Next, the integration with respect to the coordinates $\mathbf{r}_1$ and $\mathbf{r}_2$ can be replaced by one with respect to $\frac{1}{2}(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)$ and $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$. Since the integrand depends, after averaging, on $\mathbf{r}$ only, we have

$$\langle G_i G_k^* \rangle = V e_t e_m^* \int \left\langle \alpha_{il}{}^{(1)} \alpha_{km}{}^{(2)*} \right\rangle \mathrm{d}V, \tag{117.10}$$

where V is the volume of the scattering region. It is evident *a priori* that the scattering must be proportional to V. It should be noted that the direction of the wave vector $\mathbf{k}$ in the incident wave appears neither in (117.10) nor, consequently, in the following formulae.

The integrals in (117.10) form a tensor of rank four, which depends only on the properties of the scattering medium. Since the medium is isotropic, this tensor must be expressible in terms of the unit tensor δ_{ik} (and scalar constants). Before giving the appropriate expression, we should note that the tensor α_{ik}, like any tensor of rank two, can in the general case be represented as the sum of three independent parts:

$$\alpha_{ik} = \alpha\delta_{ik} + s_{ik} + a_{ik}, \tag{117.11}$$

where α is a scalar, s_{ik} is an irreducible (i.e. with zero trace) symmetrical tensor, and a_{ik} is an antisymmetrical tensor:

$$\alpha = \frac{1}{3}\alpha_{ii}, \, s_{ik} = \frac{1}{2}\left(\alpha_{ik} + \alpha_{ki} - \frac{2}{3}\alpha_{ll}\delta_{ik}\right), \, a_{ik} = \frac{1}{2}\left(\alpha_{ik} - \alpha_{ki}\right). \tag{117.12}$$

On averaging the product $\alpha_{it}{}^{(1)}\alpha_{km}{}^{(2)*}$, a non-zero result can occur only for products of components of each of the three parts of α_{ik} separately; clearly, the unit tensor cannot be used to form an expression whose symmetry properties correspond to those of crossproducts. It follows that the tensor of rank four can be written as

[0]† Exceptions may occur for particular cases of scattering, which will be discussed in §120. In such cases the dimensions of the scattering regions must be supposed large in comparison with the wavelength of the light.

$$\int \left\langle \alpha_{il}{}^{(1)} \alpha_{km}{}^{(2)*} \right\rangle \mathrm{d}V = G_0 \delta_{il}\delta_{km} + \frac{1}{10} G_s \left(\delta_{ik}\delta_{lm} + \delta_{im}\delta_{kl} - \frac{2}{3}\delta_{il}\delta_{km} \right) + \frac{1}{6} G_a \left(\delta_{ik}\delta_{lm} - \delta_{im}\delta_{kl} \right) \tag{117.13}$$

where the symmetry of the three terms corresponds to the products of the scalar, symmetrical and antisymmetrical parts of the tensors $\alpha_{it}{}^{(1)}$ and $\alpha_{km}{}^{(2)}$. Contracting this expression with respect to various pairs of suffixes, we obtain three equations, from which the significance of the coefficients in (117.13) becomes evident:

$$\left.\begin{array}{ll} G_0 & = \int \left\langle \alpha^{(1)} \alpha^{(2)*} \right\rangle \mathrm{d}V \\ G_s & = \int \left\langle s_{ik}{}^{(1)} s_{ik}{}^{(2)*} \right\rangle \mathrm{d}V \\ G_a & = \int \left\langle a_{ik}{}^{(1)} a_{ik}{}^{(2)*} \right\rangle \mathrm{d}V \end{array}\right\} \tag{117.14}$$

These quantities are real and positive. †
The tensor I_{ik} thus becomes

$$I_{ik} = \text{ constant } \times \left[G_0 e_i e_k^* + \frac{1}{10} G_s \left(\delta_{ik} + e_i^* e_k - \frac{2}{3} e_i e_k^* \right) + \frac{1}{6} G_a \left(\delta_{ik} - e_i^* e_k \right) \right], \tag{117.15}$$

the constant being independent of the direction of scattering and of the incident wave polarization. This tensor is, of course, not yet transverse to $\mathbf{k}'$. The required tensor $I_{\alpha\beta}$ is obtained by projecting the tensor (117.15) on a plane perpendicular to $\mathbf{k}'$; to do this, it is sufficient to take a coordinate system with one axis in the direction of $\mathbf{k}'$ and find the components of the tensor along the other two axes.

In the general case, scattering can be regarded as a superposition of three independent processes of scalar, symmetric and antisymmetric scattering, corresponding to the three terms in (117.15). ‡

If this separation is not important, it may be convenient to put (117.15) in another form, combining similar terms:

$$I_{ik} = \text{ constant } \times \left\{ \frac{1}{2}(a+c) e_i e_k^* + \frac{1}{2}(a-c) e_i^* e_k + b\delta_{ik} \right\} \tag{117.16}$$

where

$$a = G_0 + \frac{1}{30} G_s - \frac{1}{6} G_a, \quad b = \frac{1}{10} G_s + \frac{1}{6} G_a, \quad c = G_0 - \frac{1}{6} G_s + \frac{1}{6} G_a \tag{117.17}$$

Formula (117.15) or (117.16) determines the angular distribution and polarization properties of the scattered light. In particular, on projecting this tensor on some polarization vector $\mathbf{e}'$ (which defines the direction of $\mathbf{E}'$), we obtain the intensity of the scattered light component polarized in a particular way, which could be distinguished by means of a suitable analyser:

$$I_{ik} e_i'^* e_k' = \text{constant} \times \left\{ G_0 \left| \mathbf{e} \cdot \mathbf{e}'^* \right|^2 + \frac{1}{10} G_s \left(1 + \left| \mathbf{e} \cdot \mathbf{e}' \right|^2 - \frac{2}{3} \left| \mathbf{e} \cdot \mathbf{e}'^* \right|^2 \right) + \frac{1}{6} G_a \left(1 - \left| \mathbf{e} \cdot \mathbf{e}' \right|^2 \right) \right\} \tag{117.18}$$

[0]† See Fields, §50. The diagonalization of an Hermitian tensor means putting it in the form $I_{ik} = \lambda_1 n_{1i} n_{1k}{}^* + \lambda_2 n_{2i} n_{2k}{}^*$, where $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$ are, in general, perpendicular complex unit vectors: $\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_1{}^* = 1, \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{n}_2{}^* = 1, \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2{}^* = 0$. The principal values λ_1, λ_2 of an Hermitian tensor are real.
‡ This procedure requires further discussion in the case of Rayleigh scattering (§120).

or

$$I_{ik}e_i'^*e_k' = \text{ constant } \times \left\{\frac{1}{2}(a+c)\left|\mathbf{e}\cdot\mathbf{e}'^*\right|^2 + \frac{1}{2}(a-c)\left|\mathbf{e}\cdot\mathbf{e}'\right|^2 + b\right\}. \tag{117.19}$$

Let us consider the scattering of a linearly polarized wave. This corresponds to a real vector $\mathbf{e}$; see Fields, §§48, 50. The components of the scattered light tensor $I_{\alpha\beta}$ are therefore all real also. This means that the scattered light is partially polarized, and can be divided into two independent (non-coherent) waves, each of which is linearly polarized. Since there is only one distinctive direction in the plane perpendicular to $\mathbf{k}'$, given by the projection of the vector e on that plane, it is evident that one of these waves is polarized with the vector $\mathbf{e}'$ in the plane of $\mathbf{e}$ and $\mathbf{k}'$, with intensity I_1, say, and the other is polarized perpendicular to that plane, with intensity I_2, say. †

When $\mathbf{e}$ is real, the expression (117.16) reduces to

$$I_{ik} = \text{ constant } \times (ae_ie_k + b\delta_{ik}) \tag{117.20}$$

This contains only two independent constants, not three. Accordingly,

$$I_{ik}e_i'e'_k = \text{ constant } \times \left[a\left(\mathbf{e}\cdot\mathbf{e}'\right)^2 + b\right]$$

and, taking $\mathbf{e}'$ in the two directions mentioned above, we find the angular distributions of the two non-coherent components of the scattered light:

$$I_1 = \text{ constant } \times \left(a\sin^2\theta + b\right), \quad I_2 = \text{ constant } \times b, \tag{117.21}$$

where θ is the angle between $\mathbf{e}$ and the direction of scattering $\mathbf{k}'$. The second distribution is isotropic.

When natural light traverses the medium, the scattered light is partially polarized. The corresponding tensor I_{ik} is obtained from (117.16) by averaging over all directions of $\mathbf{e}$ in the plane perpendicular to $\mathbf{k}$. This averaging is effected by means of the formula

$$\overline{e_ie_k^*} = \frac{1}{2}\left(\delta_{ik} - n_in_k\right) \tag{117.22}$$

(where $\mathbf{n} = \mathbf{k}/k$), which represents a tensor of rank two depending only on the direction of $\mathbf{n}$, giving unity on contraction, and satisfying the condition

$$\overline{n_ie_ie_k^*} = \overline{(\mathbf{n}\cdot\mathbf{e})e_k^*} = 0$$

In the scattering of natural light, therefore,

$$I_{ik} = \text{ constant } \times \left\{\frac{1}{2}a\left(\delta_{ik} - n_in_k\right) + b\delta_{ik}\right\}. \tag{117.23}$$

[0]† The fact that the tensor (117.13) is real, and therefore so are the coefficients in it, is evident from the automatic symmetry of this tensor with respect to interchange of the pairs of suffixes il and km, this interchange being equivalent to taking the complex conjugate (since the points 1 and 2 are equivalent). The coefficients are positive because they can be expressed as the square of a modulus (or as the sum of such squares) by a transformation opposite to that used in going from (117.9) to (117.10). For example,

$$G_0 = \frac{1}{V}\langle\left|\int \alpha^{(1)}\mathrm{d}V\right|^2\rangle$$

‡ Formula (117.15) and the subsequent deductions made from it differ only in the definition of G_0, G_s and G_a from those in the Placzek quantum theory of scattering by separate freely oriented molecules (*QED*, §60).

It is evident from symmetry that the two non-coherent components of the scattered light are linearly polarized, with the vector $\mathbf{e}'$ in the plane of $\mathbf{k}$ and $\mathbf{k}'$ (the scattering plane) and perpendicular to it; let the intensities of these components be $I_{\parallel}$and $I_{\perp}$ respectively. The formula

$$I_{ik}e'_i e'_k = \text{ constant } \times \left\{ \frac{1}{2}a\left[1-(\mathbf{n}\cdot\mathbf{e}')^2\right]+b \right\}$$

gives

$$I_{\text{II}} = \text{ constant } \times \left(\frac{1}{2}a\cos^2\vartheta + b\right), \quad I_{\perp} = \text{ constant } \times \left(\frac{1}{2}a+b\right), \tag{117.24}$$

where ϑ is the scattering angle (between $\mathbf{k}$ and $\mathbf{k}'$).

We shall also give expressions for the angular distribution and polarization properties of each of the three types of scattering separately. These are found from (117.21) and (117.24) by simply substituting for a and b the corresponding terms in (117.17).

In scalar scattering of linearly polarized light, the scattered light too is completely polarized, and its angular intensity distribution is given by

$$I = \frac{3}{2}\sin^2\theta; \tag{117.25}$$

here and henceforward, the expressions for I are normalized so as to give unity on averaging over directions. In scattering of natural light, however, the angular distribution of the intensity and the degree of depolarization (the ratio of the smaller and larger of $\boldsymbol{I}_{\parallel}$ and $I_{\perp}$) of the scattered light are given by †

$$I = I_{\perp}+I_{\parallel} = \frac{3}{4}\left(1+\cos^2\vartheta\right), I_{\parallel}/I_{\perp} = \cos^2\vartheta. \tag{117.26}$$

For symmetric scattering of polarized light, we have

$$I = I_1+I_2 = \frac{3}{20}\left(6+\sin^2\theta\right), \quad I_2/I_1 = 3/\left(3+\sin^2\theta\right), \tag{117.27}$$

and for scattering of natural light

$$I = \frac{3}{40}\left(13+\cos^2\vartheta\right), \quad I_{\text{ll}}/I_{\perp} = \frac{1}{7}\left(6+\cos^2\vartheta\right). \tag{117.28}$$

Lastly, for antisymmetric scattering of polarized light,

$$I = \frac{3}{4}\left(1+\cos^2\theta\right), \quad I_1/I_2 = \cos^2\theta, \tag{117.29}$$

and for scattering of natural light

$$I = \frac{3}{8}\left(2+\sin^2\vartheta\right), \quad I_1/I_{\parallel} = 1/\left(1+\sin^2\vartheta\right).$$

[0]† We must again emphasize the necessity of distinguishing the polarization state of the scattered light as such from the polarization e' that is registered by a detector.

12.7.2 §118. The principle of detailed balancing applied to scattering

The general principle of detailed balancing in quantum mechanics (see QM, §144) can be used to obtain a relation between the intensities in various scattering processes.

Let $\mathrm{d}w_{21}$ be the probability that a quantum $\hbar\omega_1$ is scattered (on a path of unit length) and gives rise to a quantum $\hbar\omega_2$ in the solid angle element $\mathrm{d}o_2$; ‡ let $\mathrm{d}w_{12}$ be the probability of the converse process, in which a quantum $\hbar\omega_2$ yields a quantum $\hbar\omega_1$ in the solid angle element $\mathrm{d}o_1$. According to the principle of detailed balancing we have $\mathrm{d}w_{21}/{k_2}^2\ \mathrm{d}o_2 = \mathrm{d}w_{12}/{k_1}^2\ \mathrm{d}o_1$, where k_1 and k_2 are the wave numbers of the two quanta. Substituting ${k_1}^2 = \varepsilon_1\omega_1^2/c^2, k_2^2 = \varepsilon_2\omega_2^2/c^2$ (where $\varepsilon_1 = \varepsilon(\omega_1), \varepsilon_2 = \varepsilon(\omega_2)$), we obtain

$$\varepsilon_1\omega_1^2\ \mathrm{d}w_{21}/\mathrm{d}o_2 = \varepsilon_2\omega_2^2\ \mathrm{d}w_{12}/\mathrm{d}o_1. \tag{118.1}$$

Here it is assumed that the initial and final states of the scattering system correspond to discrete energy levels E_1 and E_2, related by $E_1 + \hbar\omega_1 = E_2 + \hbar\omega_2$. This statement of the

† The passage from the formulae for $I(\theta)$ to those for $I(9)$ corresponds to averaging in accordance with

$$\overline{\sin^2\theta} = \frac{1}{2}\left(1 + \cos^2\vartheta\right);$$

compare the derivation of (92.6) from (92.3).

‡ The two quanta also have definite polarizations, but for brevity these are not shown. The order of suffixes in $\mathrm{d}w_{21}$ corresponds to that which is usual in quantum mechanics, with the initial state on the right and the final state on the left.

problem is not quite true to reality, since the energy levels of a macroscopic body are extremely closely spaced and can be regarded as quasi-continuous

Instead of the scattering probability $\mathrm{d}w_{21}$ with an exactly determined frequency change, we must therefore use the probability of scattering into a frequency range $\mathrm{d}\omega_2$, i.e. of the body's entering a state whose energy lies in a range $\mathrm{d}E_2 = \hbar\mathrm{d}\omega_2$. Denoting this probability (again per unit path length) by $\mathrm{d}h_{21}$, we have $\mathrm{d}h_{21} = \mathrm{d}w_{21}\ \mathrm{d}\Gamma_2 = \mathrm{d}w_{21}\left(\mathrm{d}\Gamma_2/\mathrm{d}E_2\right)\hbar\mathrm{d}\omega_2$, where $\mathrm{d}\Gamma_2$ is the number of quantum states of the body in the energy range $\mathrm{d}E_2$. Instead of (118.1), we therefore have

$$\frac{\mathrm{d}\Gamma_1}{\mathrm{d}E_1}\varepsilon_1\omega_1^2\frac{\mathrm{d}h_{21}}{\mathrm{d}o_2\ \mathrm{d}\omega_2} = \frac{\mathrm{d}\Gamma_2}{\mathrm{d}E_2}\varepsilon_2\omega_2^2\frac{\mathrm{d}h_{12}}{\mathrm{d}o_1\ \mathrm{d}\omega_1}$$

According to a well-known relation between the statistical weight of a macroscopic state of a body and its entropy $\mathscr{S}$, the derivative $\mathrm{d}\Gamma/\mathrm{d}E$ is essentially $\exp\mathscr{S}$, so that $(\mathrm{d}\Gamma_1/\mathrm{d}E_1) : (\mathrm{d}\Gamma_2/\mathrm{d}E_2) = \exp(\mathscr{S}_1 - \mathscr{S}_2)$. Since the relative change in the energy of the body resulting from the scattering of one quantum is negligible, the change in entropy is also small, and can be taken as $\mathscr{S}_1 - \mathscr{H}_2 = (\mathrm{d}\mathscr{S}/\mathrm{d}E)(E_1 - E_2) = \hbar(\omega_2 - \omega_1)/T$. Using this result, we can write the final expression of the principle of detailed balancing for scattering in the form

$$e^{-\hbar\omega_1/T}\varepsilon_1\omega_1^2\frac{\mathrm{d}h_{21}}{\mathrm{d}o_2\ \mathrm{d}\omega_2} = e^{-\hbar\omega_2/T}\varepsilon_2\omega_2^2\frac{\mathrm{d}h_{12}}{\mathrm{d}o_1\ \mathrm{d}\omega_1} \tag{118.2}$$

The quantity $\mathrm{d}h_{21}$, whose dimensions are cm^{-1}, is called the differentia! extinction coefficient for scattering of light. It can also be defined as follows: $\mathrm{d}h_{21}$ is the ratio of the number of quanta scattered in the direction $\mathrm{d}o_2$ and the frequency range $\mathrm{d}\omega_2$ per unit time and volume to the incident photon flux density. By integrating $\mathrm{d}h_{21}$ over all directions and frequencies of the scattered light, we btain the total extinction coefficient, which represents the damping decrement of the photon flux density as the light passes through the scattering medium.

Let $\omega_2 < \omega_1$. The relation (118.2) connects the intensities (extinction coefficients) of Stokes $(1 \to 2)$ and anti-Stokes $(2 \to 1)$ scattering. We see that the latter is in general less than the former by approximately the factor $e^{-\hbar(\omega_1-\omega_2)/T}$. This is a very general result, and corresponds to the fact that the transfer of energy from the body to the electromagnetic field reduces the probability of the process by a factor $e^{-\Delta E/T}$, where ΔE is the energy transferred. In particular, the stimulated emission, in which the body gives up an energy $\hbar(\omega_1+\omega_2)$ in each scattering process, is therefore usually very weak. The probability of such a process, when $\hbar(\omega_1+\omega_2) \geqslant T$, contains the small factor $e^{-\hbar(\omega_1+\omega_2)/T}$.

The general relation (118.2) is much simplified in the important case of scattering with a relatively small change in frequency. We shall denote ω_1 by ω simply, and the small difference $\omega_2 - \omega_1$ by $\Omega(|\Omega| \ll \omega)$, and put for brevity

$$\mathrm{d}h_{21}/\mathrm{d}o_2 \; \mathrm{d}\omega_2 = I(\omega, \Omega) \tag{118.3}$$

In the non-exponential factors $\varepsilon\omega^2$ in (118.2) we can neglect the difference Ω; these factors then cancel, leaving

$$I(\omega,\Omega)e^{-\hbar\omega/T} = I(\omega+\Omega,-\Omega)e^{-\hbar(\omega+\Omega)/T}$$

In the first argument of the function $I(\omega+\Omega,-\Omega)$, which gives the initial frequency of the light, we can neglect Ω, i.e. refer the scattered intensity to the slightly different frequency of the incident light. Then

$$I(\omega,\Omega) = I(\omega,-\Omega)e^{-\hbar\Omega/T} \tag{118.4}$$

In this approximation I on each side of the equation refers to the same frequency of the incident light. In other words, the relation (118.4) gives a simple relation between Stokes and anti-Stokes scattering of the same light with the same magnitude of the frequency change Ω.

PROBLEM

Determine the relation between the intensities of stimulated Raman scattering (§112) and ordinary (spontaneous) scattering.

Solution. The probability of stimulated scattering is found from that of spontaneous scattering by multiplying by $N_{\mathbf{k}_2}$, the number of photons in the quantum state with wave vector $\mathbf{k}_2$. In order to relate this number to the field $\mathbf{E}_2$ of the scattered wave, we must regard the latter as almost monochromatic, and equate the expressions for the field energy (per unit volume) in terms of the number of quanta and in terms of the field:

$$\int \hbar\omega_2 N_{\mathbf{k}_2} \frac{\mathbf{d}^3k_2}{(2\pi)^3} = \frac{c\sqrt{\varepsilon_2}}{8\pi}\frac{\mathrm{d}k_2}{\mathrm{d}\omega_2}\,|\mathbf{E}_2|^2 \tag{1}$$

the right-hand side being written in accordance with (83.9). On the left-hand side, the factors which vary only slightly over a narrow frequency range can be taken outside the integral after substituting

$$\mathrm{d}^3k_2 = k_2^2\,(\,\mathrm{d}k_2/\mathrm{d}\omega_2)\,\mathrm{d}o_2\;\mathrm{d}\omega_2 = \left(\varepsilon^2\omega_2^2/c^2\right)(\mathrm{d}k_2/\mathrm{d}\omega_2)\,\mathrm{d}o_2\;\mathrm{d}\omega_2.$$

Then

$$\int h\omega_2 N_{k_2}\frac{\mathrm{d}^3k_2}{(2\pi)^3} = \frac{\hbar\omega_2^3\sqrt{\varepsilon_2}}{8\pi^3c^2}\frac{\mathrm{d}k_2}{\mathrm{d}\omega_2}\int N_{k_2}\;\mathrm{d}\omega_2\;\mathrm{d}o_2$$

and (1) gives

$$\int N_{\mathbf{k}_2}\ \mathrm{d}\omega_2\ \mathrm{d}o_2 = |\mathbf{E}_2|^2\,\frac{\pi^2 c^3}{\hbar\omega_2^3\sqrt{\varepsilon_2}}$$

The incident photon flux density is, from (83.11).

$$\frac{1}{h\omega_1}\bar{S}_1 = \frac{c\sqrt{\varepsilon_1}}{8\pi\hbar\omega_1}\,|\mathbf{E}_1|^2$$

Thus the energy transferred to the field $\mathbf{E_2}$ by stimulated scattering of photons $\hbar\omega_1$ is, with the notation (118.3),

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\bar{U}_2}{\mathrm{d}t} &= \hbar\omega_2\frac{\bar{S}_1}{\hbar\omega_1}I\,(\omega_1,\Omega)\int N_{\mathrm{k}_2}\ \mathrm{d}\omega_2\ \mathrm{d}o_2\\ &= \frac{\pi c^4}{8h\omega_1{\omega_2}^2}\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}\,|\mathbf{E}_1|^2\,|\mathbf{E}_2|^2\,I\,(\omega_1,\Omega)\end{aligned}\tag{2}$$

with $\Omega = \omega_2 - \omega_1$. The field $\mathbf{E}_2$ also loses energy by the stimulated scattering of photons $\hbar\omega_2$ with their conversion into photons $h\omega_1$. The energy thus gained by the field $\mathbf{E}_1$ is expressed by formula (2) with the suffixes 1 and 2 interchanged. The energy lost by the field $\mathbf{E}_2$ is then found by multiplying by $-\omega_2/\omega_1$; see (112.8). It is

$$-\frac{\pi c^4\sqrt{\varepsilon_2}}{8h\omega_1^3\sqrt{\varepsilon_1}}\,|\mathbf{E}_1|^2\,|\mathbf{E}_2|^2\,I\,(\omega_2,-\Omega)\tag{3}$$

Adding the two expressions, and expressing $I\,(\omega_2,-\Omega)$ in terms of $I\,(\omega_1,\Omega)$ by means of (118.2), we find the total energy change of the field with frequency ω_2 :

$$\frac{\mathrm{d}\bar{U}_2}{\mathrm{d}t} = \frac{\pi c^4}{8h\omega_1\omega_2^2}\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}\left(1-e^{-\hbar\Omega/T}\right)I\,(\omega_1,\Omega)\,|\mathbf{E}_1|^2\,|\mathbf{E}_2|^2\tag{4}$$

The growth rate (when $\omega_2 < \omega_1$) of the scattered radiation intensity at frequency ω_2, per unit path, is
$q_2 = \left(1/\bar{S}_2\right)\mathrm{d}\bar{U}_2/\mathrm{d}t$, with dimensions 1/cm. The final form of the relation is then

$$q_2 = \frac{(2\pi)^3}{k_2^2\hbar\omega_1}\left(1-e^{-\hbar\Omega/T}\right)\bar{S}_1\frac{\mathrm{d}h_{21}}{\mathrm{d}o_2\ \mathrm{d}\omega_2}\tag{5}$$

where $k_2 = \omega_2\sqrt{\varepsilon_2}/c$, and $\bar{S}_1$ is the energy flux density of the incident light at frequency ω_1.

12.7.3 §119. Scattering with small change of frequency

The theory given in §117 is entirely general, and is applicable to all cases of scattering in an isotropic medium, whatever the mechanism of scattering. Such a general discussion, of course, cannot proceed very far, and a further investigation of the phenomenon of scattering requires some restrictive assumptions.

Usually, the scattering of light involves only a relatively small change in frequency, $\Omega = \omega' - \omega$. The calculations given below pertain to this case. Besides the condition $|\Omega| \ll \omega$, we shall suppose that the relative change in the refractive index of the medium over the frequency range Ω is small. This condition means that the frequency ω must not lie close to a range or line in which the scattering medium is also absorbing.

If ω is in the optical range, the microscopic mechanism of scattering with small Ω may involve various kinds of motion of atoms and molecules (i.e. of nuclei, as opposed to the purely

electronic motions which give rise to optical transitions), including intramolecular vibrations of atoms, rotations or vibrations of molecules, etc. †

Let $q = q(t)$ denote the set of coordinates describing the motion which causes the scattering. (For simplicity, we shall first give a classical discussion.) Since this motion is relatively slow, the macroscopic description of scattering can be regarded from a different standpoint by introducing the permittivity tensor $\varepsilon_{ik}(q)$, whose components at any instant depend only on the values of the coordinates q at that instant as parameters. This property follows from the assumed slowness of the relative change in ε. The permittivity thus defined pertains to the field averaged with respect to the electron motion for a given position of the nuclei. When the averaging of the field (including that with respect to the motion of the nuclei) is carried out, the permittivity reduces to the scalar $\varepsilon(\omega)$. Let the deviation of ε_{ik} from this value be $\delta\varepsilon_{ik}$:

$$\varepsilon_{ik}(q) = \varepsilon\delta_{ik} + \delta\varepsilon_{ik}(q) \tag{119.1}$$

The tensor ε_{ik} gives the relation between the field and the induction as functions of time. It should be emphasized that the incident wave is still assumed to be monochromatic with frequency ω, but the field $\mathbf{E}'$ in the scattered wave is now regarded as a function of time, not resolved into monochromatic components. The total field consists of the field $\mathbf{E}$ in the incident wave and the field $\mathbf{E}'$ in the scattered wave. Thus $D_i + D'_i = \varepsilon_{ik}\,(E_k + E'_k)$. Cancelling $D_i = \varepsilon E_i$ and omitting the second-order term $\delta\varepsilon_{ik}E'_k$, we obtain

$$D'_i = \varepsilon E'_i + \delta\varepsilon_{ik}(q)E_k \tag{119.2}$$

The relation (119.2) is of the same form as (117.2). There is a difference, however, in that with this approach it is clear that the tensor $\alpha_{ik} = \delta\varepsilon_{ik}$ is symmetrical. This follows at once from the general theorem concerning the symmetry of the permittivity tensor: Furthermore, since this tensor is real for a transparent medium, the tensor $\delta\varepsilon_{ik}$ is also real.

Since the tensor α_{ik} has no antisymmetrical part, there is no antisymmetric scattering (§117) with small change in frequency.

Let us calculate the total scattered intensity with all frequency changes $\Omega \equiv \omega' - \omega \ll \omega$. This can easily be done as follows. In equation (117.3) for the field in the scattered wave we can replace k' by $k = \omega\sqrt{\varepsilon}/c$ (and take the value $\alpha_{ik} \equiv \delta\varepsilon_{ik}$ for $\omega' = \omega$); this equation does not then involve ω', i.e. it is the same for every component of the spectral resolution of the field. The equation is therefore valid for the unresolved field in the scattered wave, which we shall denote by the same letter $\mathbf{E}'$. Using the solution (117.7), we obtain

$$\langle|\mathbf{E}'|^2\rangle = \frac{E_0^2k^4}{16\pi^2\varepsilon^2R_0^2}\langle|\mathbf{G}\Big|^2\Big\rangle\sin^2\theta = \frac{E_0^2\omega^4}{16\pi^2R_0^2c^4}\langle|\mathbf{G}\Big|^2\Big\rangle\sin^2\theta,$$

where θ is the angle between $\mathbf{k}$ and $\mathbf{G}$, and the brackets denote, as in §117, the final average with respect to the motion of the particles.

We define the extinction coefficient h as the ratio of the total intensity of light scattered in all directions per unit volume of the scattering medium to the incident flux density: †

$$h = \frac{1}{V|\mathbf{E}|^2}\int\langle|\mathbf{E}'\Big|^2\Big\rangle R_0^2\,\mathrm{d}o' \tag{119.3}$$

in which we have put $\varepsilon\,(\omega') \cong \varepsilon(\omega)$.

For the reason given in §117, in calculating the mean value $\langle|\mathbf{G}|^2\rangle$ the exponential factor in the integrand of $\mathbf{G}$ is replaced by unity, so that

[0]† Here it is assumed that the relevant values of Ω are much smaller than the electronic transition frequencies. This condition may be violated in a gas consisting of molecules which have a degenerate electronic ground state.

$$\langle|\mathbf{G}|^2\rangle = Ve_l e_m^* \int \langle \delta\varepsilon_{il}{}^{(1)}\delta\varepsilon_{im}{}^{(2)}\rangle \,\mathrm{d}V;$$

cf. (117.9), (117.10). The expression in the angle brackets is a tensor of rank two, and, since the medium is isotropic, it gives on averaging

$$\langle \delta\varepsilon_{il}{}^{(1)}\delta\varepsilon_{im}{}^{(2)}\rangle = \frac{1}{3}\delta_{lm}\langle \delta\varepsilon_{ik}{}^{(1)}\delta\varepsilon_{ik}{}^{(2)}\rangle$$

The mean square

$$\langle|\mathbf{G}|^2\rangle = \frac{1}{3}V\int \langle \delta\varepsilon_{ik}{}^{(1)}\delta\varepsilon_{ik}{}^{(2)}\rangle \,\mathrm{d}V$$

is then independent of the direction of scattering, and the result of the integration in (119.3) is

$$h = \frac{\omega^4}{18\pi c^4}\int \left\langle \delta\varepsilon_{ik}^{(1)}\delta\varepsilon_{ik}^{(2)}\right\rangle \mathrm{d}V \tag{119.4}$$

The integrand here is the correlation function of the permittivity fluctuations at different points $\mathbf{r}_1$ and $\mathbf{r}_2$ in the medium at the same time; the integration is taken with respect to the difference of coordinates $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$. If we return to integration over $\mathrm{d}V_1$ and $\mathrm{d}V_2$, formula (119.4) becomes

$$h = \frac{\omega^4}{18\pi c^4}V\left\langle \delta\varepsilon_{ik}^2\right\rangle_V \tag{119.5}$$

where $\langle\ldots\rangle_V$ denotes the mean square fluctuation in the volume V. It may be noted that the total extinction coefficient is independent of the polarization of the incident light.

in §118. In the present case this factor may be taken as unity, and the two definitions are equivalent.

The formulae derived above enable us to consider scattering macroscopically as occurring at fluctuational inhomogeneities in the medium. In this treatment, the angular distribution and spectral composition of the scattered light are determined by the space-time characteristics of the fluctuations, i.e. by the correlation function †

$$\langle \delta\varepsilon_{ii}(t_1,\mathbf{r}_1)\,\delta\varepsilon_{km}(t_2,\mathbf{r}_2)\rangle$$

between the fluctuations at different points at different instants.

In order to see this, we expand the time-dependent quantities $\delta\varepsilon_{ik}$ as a Fourier integral:

$$\delta\varepsilon_{ik}(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\delta\varepsilon_{ik\Omega}e^{-i\Omega t}\frac{\mathrm{d}\Omega}{2\pi}, \quad \delta\varepsilon_{ik\Omega} = \int_{-\infty}^{\infty}\delta\varepsilon_{ik}(t)e^{i\Omega t}\,\mathrm{d}t$$

Each component $\delta\varepsilon_{ik\Omega}e^{-i\Omega t}$ then acts as α_{ik} in the relation (117.2) between the monochromatic components of $\mathbf{E}$ and $\mathbf{D}'$, with $\omega' = \omega + \Omega$. Next, representing the expressions quadratic in the field as double integrals, similarly to (117.9), we easily find the differential extinction coefficient with respect to frequency and direction:

$$\mathrm{d}h = \frac{\omega^4}{16\pi^2c^4}\left\{e_i'^* e_k' e_l e_m^*\left(\delta\varepsilon_{il}\delta_{km}\right)_{\Omega q}\right\}\cdot \mathrm{d}o'\frac{\mathrm{d}\Omega}{2\pi} \tag{119.6}$$

where we have used, in accordance with the notation of $SP2$, Chapters VIII and IX, the space-time Fourier expansion component of the correlation function:

[0]† This definition differs by a factor ω'/ω from the definition (in terms of the number of scattered quanta) given

$$(\delta\varepsilon_{il}\delta\varepsilon_{km})_{\Omega q} = \iint_{-\infty}^{\infty} \langle \delta\varepsilon_{il}\,(t_1, \mathbf{r}_1)\,\delta\varepsilon_{km}\,(t_2, \mathbf{r}_2)\rangle\, e^{i(\Omega t - q\cdot\mathbf{r})}\mathrm{d}t\ \mathrm{d}V \tag{119.7}$$

$(t = t_1 - t_2, \mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$. Formula (119.6) relates to the scattered light component with polarization $\mathbf{e}'$ recorded by an analyser. The term "spectral distribution" refers to the strong dependence on Ω within the scattering line; the slowly varying factor ω'^4 is replaced by ω^4. The factor $e^{-iq\cdot r}$ is retained in the integrand (119.6). Its replacement by unity in the expression for the spectral distribution may be inadmissible even if it can be done for the scattering integrated over frequencies (see §120).

Hitherto, the discussion has been presented in terms of classical mechanics. In the quantum description, the coordinates q, and therefore the $\delta\varepsilon_{ik}$, are replaced by the corresponding quantum-mechanical operators in the Heisenberg representation. It can be shown (see the end of this section) that formula (119.6) then remains valid if $(\delta\varepsilon_{il}\delta\varepsilon_{km})_{\Omega q}$ is taken as

$$(\delta\varepsilon_{il}\delta\varepsilon_{km})_{\Omega q} = \iint_{-\infty}^{\infty} \langle \delta\hat{\varepsilon}_{km}\,(t_2, \mathbf{r}_2)\,\delta\hat{\varepsilon}_{il}\,(t_1, \mathbf{r}_1)\rangle\, e^{i(\Omega t - q\cdot\mathbf{r})}\mathrm{d}t\ \mathrm{d}I \tag{119.8}$$

The angle brackets now denote complete (both quantum and statistical) averaging over the state of the medium. Since the operators $\delta\hat{\varepsilon}_{ik}$ at different times and positions do not

commute, the order of the operators in (119.8) is significant. This non-commutativity is the reason for the dependence of the scattering intensity on the sign of Ω in (118.4); in the classical limit, there is no such dependence. The quantum formula necessarily satisfies the relation stated.

The extinction coefficient integrated over frequencies is obtained by integration with respect to Ω; in view of the rapid convergence outside the absorption line, the integration may be extended from $-\infty$ to ∞ (Ω is the difference $\omega' - \omega$, and its positive and negative values are therefore physically distinct). The integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\Omega t}\ \mathrm{d}\Omega/2\pi = \delta(t)$$

and the delta function is then eliminated by integrating with respect to t, so that the timedifference correlation function becomes a single-time function. The differential extinction coefficient with respect to directions is

$$\mathrm{d}h = \frac{\omega^4}{16\pi^2 c^4}\left\{e_i'^* e_k' e_l e_m^*\,(\delta\varepsilon_{il}\delta\varepsilon_{km})_{\mathbf{q}}\right\}\mathrm{d}o' \tag{119.9}$$

where

$$(\delta\varepsilon_{il}\delta\varepsilon_{km})_{\mathbf{q}} = \int \left\langle \delta\varepsilon_{il}{}^{(1)}\delta\varepsilon_{km}{}^{(2)}\right\rangle e^{-iq\cdot\mathrm{r}}\ \mathrm{d}V \tag{119.10}$$

is the Fourier component of the single-time correlation function. When $\mathbf{q} = 0$, the angular distribution depends only on the polarization factors, and we return to the formulae derived previously.

The retention of the factor $e^{-iq\cdot r}$ (not equal to unity) in the integral (119.10) considerably complicates the angular distribution and the polarization properties of the scattered light. † In particular, it is not correct to divide the scattering into two parts (scalar and symmetric) given by the first two terms in (117.18). An essential point here is that the tensor $(\delta\varepsilon_{il}\delta\varepsilon_{km})_{\mathbf{q}}$ need not be a true tensor as it must when $\mathbf{q} = 0$; it may contain pseudotensor components

[0]± This function depends, of course, only on the difference $t = t_1 - t_2$. The second stage ot averaging (denoted by the angle brackets), as applied to the product of fluctuations shown, may be regarded as an averaging over the "initial" instant t_2 for a given t.

(see Problem 2). These terms are allowable if the isotropic medium consists of molecules with right-left asymmetry and is therefore not invariant under inversion.

Finally, let us discuss briefly the quantum derivation of (119.6) and (119.8).
The perturbation operator in the Hamiltonian of the system comprising the medium and the field is the integral

$$\hat{V} = -\int \delta\hat{\varepsilon}_{ik}\frac{\hat{E}_i\hat{E}_k}{8\pi}\,\mathrm{d}V \tag{119.11}$$

where $\widehat{\mathbf{E}}$ is the quantized electromagnetic field operator. After averaging over the stationary states of the system and statistical averaging over the Gibbs distribution, this operator gives the change $\delta\mathscr{F}$ in the free energy when there is a slow change in the permittivity; see (101.24).

The operator $\widehat{\mathbf{E}}$ is expressed in terms of the annihilation and creation operators for photons in the state $\omega, \mathbf{k}, \mathbf{e}$:

$$\hat{\mathbf{E}} = i\sum_{\mathbf{k}\cdot\mathbf{e}}\left(\frac{2\pi h\omega u}{c\sqrt{\varepsilon}}\right)^{1/2}\left\{\hat{c}_{\mathbf{ke}}\mathbf{e}e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)} + \hat{c}_{\mathbf{ke}}{}^{+}\mathbf{e}^{*}e^{-i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}\right\}, \tag{119.12}$$

where $u = \mathrm{d}\omega/\mathrm{d}k$ (the normalization volume is taken as unity). This expression differs from the one for the field in a vacuum (see $QED, 82$) by the factor $(u/\sqrt{\varepsilon})^{1/2}$ in the normalization coefficients, which originates from the factor $\sqrt{\varepsilon}/u$ in the energy density (83.9) for a plane electromagnetic wave in the medium. †

The probability of a transition in which a photon $\mathbf{k}$ is absorbed, a photon $\mathbf{k}'$ is emitted, and the medium goes from a specified initial state (suffix n) to any final state (f) is (see QM, (40.5))

$$\mathrm{d}w = \sum_f \left|\frac{1}{\hbar}\int_{-\infty}^{\infty}\langle\mathbf{k}'f|\,V\,\Big|\,\mathbf{k}n\Big\rangle\,\mathrm{d}t\right|^2\frac{\mathrm{d}^3k'}{(2\pi)^3}, \tag{119.13}$$

with the matrix element

$$\langle\mathbf{k}'f|\,V\,|\mathbf{k}n\rangle = \frac{2\pi\hbar\omega u}{c\sqrt{\varepsilon}}\int(\delta\varepsilon_{ik})_{fn}\,\frac{e_i'^{*}e_k}{4\pi}e^{i(\Omega t-\mathbf{q}\cdot\mathbf{r})}\mathrm{d}V$$
$$\Omega = \omega' - \omega, \quad \mathbf{q} = \mathbf{k}' - \mathbf{k}$$

The integral in (119.13) is written as a double integral over $\mathrm{d}V_1\ \mathrm{d}V_2\ \mathrm{d}t_1\ \mathrm{d}t_2$, and we use the fact that

$$\sum_f \left(\delta\varepsilon_{il}{}^{(1)}\right)_{fn}\left(\delta\varepsilon_{km}{}^{(2)}\right)_{fn}{}^{*} = \left(\delta\varepsilon_{km}{}^{(2)}\delta\varepsilon_{il}{}^{(1)}\right)_{nn}$$

The integrand depends only on the differences $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ and $t_1 - t_2$. The probability $\mathrm{d}w$ therefore contains as a factor the total observation time t. The extinction coefficient sought is defined as $\mathrm{d}h = \mathrm{d}w/tu$. The final statistical averaging over states of the medium gives therequired result.

PROBLEMS

Problem 1. Find the general form of the polarization dependence for scattering in an isotropic medium, taking into account the momentum q transferred to the medium (B. Ya. Zel'dovich, 1972).

Solution. The problem amounts to that of finding all the independent rank-four tensor combinations having the symmetry of the tensor $(\delta\varepsilon_{il}\delta_{km})_{\Omega q}$ which can be formed from the unit

tensor δ_{ik}, the antisymmetric unit tensor e_{ikl} and the components of the vector $v = q/q$; they must be symmetrical in each pair of suffixes il and km, and invariant under interchange of these two pairs (which is equivalent to interchanging the points $\mathbf{r}_1$ and $\mathbf{r}_2$, and therefore to changing the sign of r) with a simultaneous change in the sign of v. These conditions are satisfied by the combinations
(1) $\delta_{il}\delta_{km}$,
(2) $\delta_{ik}\delta_{lm} + \delta_{lk}\delta_{im}$,
(3) $\delta_{il}v_k v_m + \delta_{km}v_i v_l$,
(4) $\delta_{ik}v_i v_m + \ldots$,
(5) $v_i v_k v_l v_m$,
(6) $v_p e_{pik}\delta_{lm} + \ldots$.
(7) $v_p e_{pik} v_l v_m + \ldots$;

three terms obtained by symmetrization have been omitted from (4), (6) and (7). These combinations together correspond to an angular distribution

$$f_1 |\mathbf{e}\cdot\mathbf{e}'^*|^2 + f_2\left\{1 + |\mathbf{e}\cdot\mathbf{e}'|^2\right\} + f_3\left\{(\mathbf{e}\cdot\mathbf{e}'^*)(\boldsymbol{v}\cdot\mathbf{e}^*)(\boldsymbol{v}\cdot\mathbf{e}') + \text{c.c.}\right\} + f_4\left\{|\boldsymbol{v}\cdot\mathbf{e}|^2 + |\boldsymbol{v}\cdot\mathbf{e}'|^2 +\right.$$
$$\left.[(\mathbf{e}\cdot\mathbf{e}')(\boldsymbol{v}\cdot\mathbf{e}^*)(\boldsymbol{v}\cdot\mathbf{e}'^*) + \text{ c.c. }]\right\} + f_5\left|(\boldsymbol{v}\cdot\mathbf{e})(\boldsymbol{v}\cdot\mathbf{e}')\right|^2 + if_6\boldsymbol{v}\cdot\{\mathbf{e}\times\mathbf{e}^* + \mathbf{e}^*\times\mathbf{e}' +$$
$$[\mathbf{e}\times\mathbf{e}'(\mathbf{e}^*\cdot\mathbf{e}^*) - \text{ c.c. }]\} + if_7 v\cdot\{\mathbf{e}'^*\times\mathbf{e}'(\boldsymbol{v}\cdot\mathbf{e})(\boldsymbol{v}\cdot\mathbf{e}^*) + \mathbf{e}\times\mathbf{e}^*(\boldsymbol{v}\cdot\mathbf{e}')(\boldsymbol{v}\cdot\mathbf{e}'^*) + [\mathbf{e}\times\mathbf{e}'(\boldsymbol{v}\cdot\mathbf{e}^*)(\boldsymbol{v}\cdot\mathbf{e}^*) -$$

in which $f_1, \ldots, f_7$ are real functions of Ω and q. In a medium which allows inversion, only the first five terms appear, and the first two are equivalent to the first two in (117.18). In a medium having no centre of symmetry, the last two terms also occur, but they are zero if the polarizations $\mathbf{e}$ and $\mathbf{e}'$ are both linear. If the difference between the frequencies ω and ω' is neglected in $\mathbf{q}$, then $v = (\mathbf{n}' - \mathbf{n})/|\mathbf{n}' - \mathbf{n}|$, where $\mathbf{n} = \mathbf{k}/k, \mathbf{n}' = \mathbf{k}'/k$. In this approximation, the term in f_7 is identically zero, as may be shown by a somewhat lengthy calculation in which each of the vectors $\mathbf{e}$ and $\mathbf{e}'$ is resolved into two components in the scattering plane and perpendicular to it.

Problem 2. Determine the radiation from the motion of a fast particle with a speed below that of light in a light-scattering medium (S. P. Kapitza, 1960).

Solution. The radiation in this case may be regarded as due to the scattering of the particle field by fluctuations in the permittivity of the medium. The energy emitted per unit time from unit volume when the field scattered is monochromatic may be written as $W = h\bar{S} = hc\sqrt{\varepsilon}\cdot|\mathbf{E}|^2/8\pi$, where $\bar{S}$ is given by (83.11) and h is the light extinction coefficient. In this form, the expression is valid for a field $\mathbf{E}$ of any origin.

The field of the moving particle has a continuous spectrum of frequencies. Hence, in order to obtain the radiation in the frequency range $\mathrm{d}\omega$ (from unit volume over the whole time of passage), we must replace $|\mathbf{E}|^2$ by $2\,|\mathbf{E}_\omega(\mathbf{r})|^2\ \mathrm{d}\omega/2\pi$ (see Fields, §66), where $\mathbf{E}_\omega$ is a time Fourier component of the field. Integration over the volume gives the frequency distribution of the total radiation:

$$\mathrm{d}W_\omega = \mathrm{d}\omega\frac{hc\sqrt{\varepsilon}}{8\pi^2}\int|\mathbf{E}_\omega(\mathbf{r})|^2\ \mathrm{d}V$$

For this expression to be valid, it is necessary that the field should change only slightly over atomic distances, or more precisely over the correlation distance of the permittivity fluctuations

[0]† The normalization coefficient in (119.12) is obtained from the condition that the eigenvalues of the field energy density operator should be $\Sigma\left(N_{\mathbf{ke}} + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega$, where $N_{\mathbf{ke}}$ are the photon quantum state occupation numbers. The photon energy in the medium is $h\omega$, and the momentum is $h\mathbf{k}(k = \omega\sqrt{\varepsilon}/c)$; these are in the exponents in (119.12). To avoid misunderstanding, it should be emphasized that the momentum $\hbar\mathbf{k}$ includes not only the contribution from the field as such but also the momentum acquired by the medium in the photon emission process.

in the medium. Moreover, in order to neglect the frequency shift in scattering, the velocities of the molecules in the medium must be much less than the particle velocity v.

The field of the moving particle is given by (114.7) and (114.8). We have

$$\mathbf{E} = \int \mathbf{E}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \, \mathrm{d}^3k/(2\pi)^3$$

The field frequency in the particle motion is $\omega = vk_x$. Hence $\mathrm{d}^3k = \mathrm{d}k_x \, \mathrm{d}^2q = v^{-1} \, \mathrm{d}\omega \, \mathrm{d}^2q$, so that

$$\mathbf{E}_\omega(\mathbf{r})e^{-i\omega t} = \frac{1}{v}\int \mathbf{E}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \mathbf{d}^2q/(2\pi)^2,$$

with $\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} = \omega x/v + \mathbf{q}\cdot\mathbf{r}$. From this,

$$\int |\mathbf{E}_\omega|^2 \, \mathrm{d}V = \frac{1}{v^2}\int \mathbf{E}_{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{E}_{\mathbf{k}'} e^{i(\mathbf{q}-\mathbf{q}')\cdot\mathbf{r}} \frac{\mathrm{d}^2q \, \mathrm{d}^2q'}{(2\pi)^4} \, \mathrm{d}V$$

The integral over $\mathrm{d}x$ gives just the particle path length l, and that over $\mathrm{d}y \, \mathrm{d}z$ gives the delta function $(2\pi)^2\delta(\mathbf{q}-\mathbf{q}')$. Thus

$$\int |\mathbf{E}_\omega|^2 \, \mathbf{d}V = \frac{l}{v^2}\int |\mathbf{E}_{\mathbf{k}}|^2 \frac{\mathbf{d}^2q}{(2\pi)^2}.$$

In this integral, the important values of q are fairly large, such that

$$\omega\left(\frac{1}{v^2} - \frac{\varepsilon}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} \ll q \ll 1/a.$$

where a denotes the atomic dimensions: in this range, the expression for $\mathbf{E}_{\mathbf{k}}$ reduces to

$$\mathrm{E}_{\mathrm{k}} \cong -i\mathbf{k}\phi_{\mathbf{k}} \cong -iq\left(4\pi e/\varepsilon q^2\right)e^{-i\omega t},$$

and the integral is logarithmically divergent. With logarithmic accuracy, the integral is to be cut off at limits corresponding to those of the range mentioned. This gives the following final expression for the frequency
distribution of the radiation intensity per unit path:

$$\mathrm{d}F = \mathrm{d}W/l = \frac{he^2c}{\pi v^2\varepsilon^{3/2}} \log\frac{vc}{a\omega\left(c^2-\varepsilon v^2\right)^{1/2}} \tag{1}$$

with the extinction coefficient given by (119.5).

This radiation is analogous to transition radiation in being independent of the mass of the particle. For comparable velocities (though these are on opposite sides of the limit $c/\sqrt{\varepsilon}$), the intensity is much less than that of the Cherenkov radiation. For example, in gases, with $v \sim c$, a comparison of (1) and (115.3) shows that as a rough estimate

$$\mathrm{d}F/\mathrm{d}F_{\mathrm{Ch}} \sim \alpha^2/\lambda^3 d^3 \sim a^6/\lambda^3 d^3$$

where d is the distance between molecules and $\lambda \sim \omega/c$; for h, we have used (120.4) with $n-1 \sim N\alpha$, and $\alpha \sim a^3$ is the polarizability of the molecule. An estimate for a liquid is obtained by putting $d \sim a$, which gives $\mathrm{d}F/\mathrm{d}F_{\mathrm{Ch}} \sim (a/\lambda)^3$.

12.7.4 §120. Rayleigh scattering in gases and liquids

Two types of scattering can be distinguished, depending on the change in frequency of the light: (1) Raman scattering, which is the Raman-Landsberg-Mandel'shtam effect and results in the appearance in the scattered light of lines whose frequency differs from that of the incident light, (2) Rayleigh scattering, in which the frequency is essentially unchanged.

Raman scattering in gases results from a change, due to the incident light, in the vibrational, rotational or electronic state of the molecule. Rayleigh scattering, on the other hand, does not involve a change in the internal state of the molecule. In the limiting case of a rarefied gas, when the mean free path l of the molecules is large compared with the wavelength λ of the light, scattering takes place independently at each molecule, and can be discussed microscopically, using quantum mechanics.

Here we shall discuss the opposite limiting case, where $l \ll \lambda$,† and the Rayleigh scattering in gases can be divided into two parts. One part is due to irregularities in the orientation of the molecules (called fluctuations of anisotropy). The other part is scattering by fluctuations in the gas density. The orientation of the molecules is entirely changed by a few collisions, i.e. after a time of the order of the mean free time τ. Hence the scattering by fluctuations of anisotropy results in the appearance of a relatively broad line with its peak at $\omega' = \omega$ and width $\sim \hbar/\tau$. The scattering by fluctuations of density gives a much sharper line superposed on the other. As we shall see below, fluctuations of density in volumes $\sim \lambda^3$ are of importance in the scattering of light with wavelength λ. Since these volumes are large, the fluctuations in them occur comparatively slowly, and so the scattered line is narrow. In what follows we shall regard this sharp line as being undisplaced.

The scattering by density fluctuations is scalar scattering; since the density ρ is a scalar, so is the change δ_ε in the permittivity resulting from a change in ρ. The change in the permittivity in fluctuations of anisotropy, on the other hand, is described by a symmetrical tensor $\delta\varepsilon_{ik}$ with zero trace. The latter property follows from the fact that the effect must vanish on averaging over all directions. Thus the scattering by anisotropy fluctuations is symmetric scattering.

In liquids the situation is less simple. Raman scattering can arise only from a change in the vibrational or electronic state of the molecule; rotational Raman lines do not occur for

scattering in liquids. The reason is that, because of the strong interaction between molecules in a liquid, they cannot rotate freely so as to acquire discrete rotational energy levels. The rotation of the molecules, therefore, like any motion in which their relative position changes, contributes in a liquid only to the relatively broad scattering line at $\omega' = \omega$, which in this case may be regarded as entirely the effect of Rayleigh scattering. The relaxation time of such motions depends on the viscosity of the liquid.

The possibility of separating from the total Rayleigh scattering in a liquid a part due to thermodynamic fluctuations (of density or temperature) depends on the magnitudes of the various relaxation times. It is necessary that the relaxation times of all processes of establishment of equilibrium in the liquid should be small in comparison with the times characterizing the fluctuations concerned. In such cases a narrow undisplaced line is observed against a less sharp background called the wing of the Rayleigh line. The undisplaced line is due to scalar scattering. The wing, however, does not in general correspond in liquids, as it does in gases, to purely symmetric scattering with no scalar part.

The angular distribution in the undisplaced line is given by the general expressions (117.25) and (117.26) for scalar scattering. It is therefore sufficient to calculate the total extinction coefficient. Substitution of $\delta\varepsilon_{ik} = \delta\varepsilon\delta_{ik}$ in (119.5) gives

[0]† More precisely, the necessary condition is $l \leqslant \lambda \sin \frac{1}{2}\vartheta$, where 9 is the scattering angle. This is because the expression (119.7) involves the frequency only in the expression q (120.5).

$$h = \frac{\omega^4}{6\pi c^4} V \left\langle \delta\varepsilon^2 \right\rangle_V \tag{120.1}$$

If $\delta\rho$ and δT are the changes in density and temperature, then

$$\delta\varepsilon = (\partial\varepsilon/\partial\rho)_r \delta\rho + (\partial\varepsilon/\partial T)_\rho \delta T$$

According to the known results (see $SP1, 8112$), the fluctuations of density and temperature are statistically independent ($\langle \delta\rho\delta T \rangle = 0$), and their mean squares are

$$\left\langle (\delta T)^2 \right\rangle_V = T^2/\rho c_v V, \quad \left\langle (\delta\rho)^2 \right\rangle_V = (\rho T/V)(\partial\rho/\partial P)_T,$$

where c_v is the specific heat per unit mass. Thus we have

$$h = \frac{\omega^4}{6\pi c^4} \left[\rho T \left(\frac{\partial\rho}{\partial P} \right)_r \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho} \right)_T^2 + \frac{T^2}{\rho c_v} \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial T} \right)_\rho^2 \right] \tag{120.2}$$

a formula first derived by A. Einstein (1910).
This can be expressed in terms of other thermodynamic derivatives. Taking as the independent variables another pair of statistically independent quantities, the pressure P and the entropy s per unit mass, we write

$$\delta\varepsilon = (\partial\varepsilon/\partial P)_s \delta P + (\partial\varepsilon/\partial s)_P \delta s$$

and use the familiar expressions for the fluctuations:

$$\left\langle (\delta s)^2 \right\rangle_v = c_p/\rho V, \quad \left\langle (\delta P)^2 \right\rangle_v = \rho T u^2/V$$

where u is the adiabatic velocity of sound in the medium: $u^2 = (\partial P/\partial\rho)_s$. With the further substitutions

$$\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial s} \right)_P = \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial T} \right)_P \left(\frac{\partial T}{\partial s} \right)_P = \frac{T}{c_p} \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial T} \right)_P, \quad \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial P} \right)_s = \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho} \right)_s \frac{1}{u^2},$$

we obtain Einstein's formula in the form

$$h = \frac{\omega^4}{6\pi c^4} \left[\frac{T^2}{\rho c_p} \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial T} \right)_P^2 + \frac{\rho T}{u^2} \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho} \right)_s^2 \right]. \tag{120.3}$$

For gases formula (120.3) becomes much simpler. The permittivity of a gas (at optical frequencies) is almost independent of temperature, and hence the first term in the brackets can be neglected. The density dependence is that $\varepsilon - 1$ is proportional to ρ, and hence

$$\rho(\partial\varepsilon/\partial\rho)_r \cong \varepsilon - 1 \cong 2(n-1),$$

where $n = \sqrt{\varepsilon}$ is the refractive index. Since, from the equation of state of a perfect gas, $(1/\rho)(\partial\rho/\partial P)_T = 1/NT$, where N is the number of particles in unit volume. we find that

$$h = 2\omega^4 (n-1)^2 / 3\pi c^4 N \tag{120.4}$$

This formula was first derived by Rayleigh (1881).
Let us now examine the fine structure of the undisplaced line. This requires a consideration of the time variation of the fluctuations. In this respect, thermodynamic fluctuations fall into two classes. Adiabatic fluctuations of pressure in a fluid are propagated as undamped waves with the velocity of sound u; we here neglect the absorption of sound, since it causes only

a broadening of the line (see below). Fluctuations of entropy at constant pressure, however, are not propagated relative to the fluid, and are damped only gradually as a result of thermal conduction.

Because acoustic perturbations are propagated as waves, the time variation of the pressure fluctuations is correlated even over distances much greater than those between molecules. This fact was not important in calculating the total intensity (integrated over frequencies) of the scattering line, which is determined by the correlation between the fluctuations at different points at the same time, a correlation which extends only over short distances. The frequency distribution of the scattering intensity, however, is determined by the fluctuation correlation function for different times, and the presence of long-range correlation makes it necessary to retain the factor $e^{-iq\cdot\mathbf{r}}$ in (119.7).

In an undamped sound wave, the frequency Ω and the wave vector $\mathbf{q}$ are related by $\Omega^2 = u^2\mathbf{q}^2$. Accordingly, the frequency resolution of the correlation function for pressure fluctuations (and therefore for the corresponding permittivity fluctuations) consists of two sharp lines at frequencies $\Omega = \pm qu$. The magnitude of the vector $\mathbf{q} = \mathbf{k}' - \mathbf{k}$ corresponding to light scattering is related to the scattering angle ϑ (between $\mathbf{k}$ and $\mathbf{k}'$) by

$$q = |\mathbf{k}' - \mathbf{k}| \cong (2n\omega/c)\sin\frac{1}{2}\vartheta; \tag{120.5}$$

since $\Omega = \omega' - \omega$ is small, we have put here $\omega' \cong \omega$. Denoting the corresponding value of Ω by Ω_0, we therefore have

$$\Omega_0 = \pm(2n\omega u/c)\sin\frac{1}{2}\vartheta. \tag{120.6}$$

Thus the scattering by pressure fluctuations results in the appearance of a doublet (called the Mandel'shtam-Brillouin doublet) in which the distance $2\,|\Omega_0|$ between the components depends on the angle of scattering (L. I. Mandel'shtam, 1918; L. Brillouin, 1922). †

The fluctuations of entropy have zero frequency, as stated above, and so scattering by them gives a further central line with $\Omega = 0$ (L. Landau and G. Placzek, 1933). †

Let us determine the intensity distribution of the undisplaced scattering between the doublet and the central line. By the intensity of the doublet we mean the sum of those of its components, i.e. twice that of either one separately. ‡ The total extinction coefficient given by (120.2) or (120.3) is $h = h_d + h_{cl}$.

Since the doublet lines are due to scattering by adiabatic pressure fluctuations, their intensity is given by the second term in (120.3), which arises from these fluctuations. The adiabatic derivative $(\partial\varepsilon/\partial\rho)_s$ can be related to the isothermal derivative by changing to the variables ρ and T :

$$\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_s = \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_T + \frac{T}{c_v\rho^2}\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_\rho\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial T}\right)_\rho.$$

If the temperature dependence of ε at constant density is neglected, then $(\partial\varepsilon/\partial\rho)_s = (\partial\varepsilon/\partial\rho)_T$. To the same accuracy, in the total derivative written in the form (120.2) we may neglect the second term; see Problem 1 for a calculation in which these approximations are not made. Lastly, using a known thermodynamic formula for the ratio of the adiabatic and isothermal compressibilities (see SP 1, (16.14))

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial P}\right)_s = \frac{c_v}{c_p}\left(\frac{\partial\rho}{\partial P}\right)_T, \tag{120.7}$$

[0]† As an illustration, for the typical values $u = 1.5\times10^5$ cm/sec, $n = 1.5$, scattered light wavelength $\lambda \cong 5\times10^{-5}$ cm, scattering angle $9 = 90$, the width of the doublet is $\Omega_0/2\pi c = 0.05$ cm^{-1}. The Rayleigh line wing width, however, may reach $200 - 150$ cm^{-1}.

we obtain the Landau-Placzek formula for the doublet part of the total undisplaced line intensity:

$$h_d/h = c_v/c_p. \tag{120.8}$$

To determine the shape of the lines, it is necessary to consider the different-times correlation function and take account of the dissipative processes which cause the damping of the fluctuations. For the pressure fluctuations, these are viscosity and thermal conduction. The Fourier components of the correlation function for adiabatic pressure fluctuations are

$$\left(\delta P^2\right)_{\Omega q} = \frac{\rho T u^3 \gamma}{(\Omega \mp qu)^2 + u^2\gamma^2}, \tag{((120.9;)}$$

where

$$\gamma = \frac{q^2}{2\rho u}\left[\frac{4}{3}\eta + \zeta + \kappa\left(\frac{1}{c_v} - \frac{1}{c_p}\right)\right]; \tag{120.10}$$

see $SP2, \xi 89$. The quantity γ is the sound absorption coefficient per unit length; η and ζ are the viscosity coefficients and κ the thermal conductivity of the medium (see $FM, \S 77$). The intensity distribution in the line (in each doublet component), for a given direction of scattering, is proportional to (120.9). Normalization to unity gives

$$\mathrm{d}I = \frac{\Gamma}{2\pi\left[\left(\Omega - \Omega_0\right)^2 + \frac{1}{4}\Gamma^2\right]}\mathrm{d}\Omega, \tag{120.11}$$

where $\Gamma = 2u\gamma$. This is called the dispersion form of the line, and Γ is the line width. Taking q from (120.5), we find

$$\Gamma = \frac{2\omega^2 n^2}{\rho c^2}(1 - \cos\vartheta)\left[\frac{4}{3}\eta + \zeta + \kappa\left(\frac{1}{c_v} - \frac{1}{c_p}\right)\right] \tag{120.12}$$

Isobaric entropy fluctuations decay only by thermal conduction. Their correlation function is

$$\left(\delta s^2\right)_{\Omega q} = \frac{2c_p}{\rho}\frac{\chi q^2}{\Omega^2 + \chi^2 q^4} \tag{120.13}$$

where $\chi = \kappa/\rho c_p$ is the thermometric conductivity. The shape of the central line is given by a similar dispersion formula (120.11) but with $\Omega_0 = 0$, and the line width is

$$\Gamma = 2\chi q^2 = \left(4\chi n^2\omega^2/c^2\right)(1 - \cos\vartheta) \tag{120.14}$$

As already mentioned at the beginning of this section, the above theory is applicable to scattering in a liquid if all the relaxation times in it are small compared with the times characterizing the fluctuations. It should be borne in mind that, in any liquid, there are relaxation times of various orders of magnitude. The most rapid relaxation process, apparently, is the decay of elastic stresses in the liquid. The corresponding Maxwellian relaxation time is $\tau_M \sim \eta/G$, where G is the modulus of rigidity. The reorientation of the molecules, i.e. the decay of the anisotropy fluctuations, takes place less rapidly. The corresponding Debye relaxation time is

[0]† In superfluid liquid helium (the isotope ^{4}He), entropy perturbations are propagated as weakly damped vibrations called second sound waves, whose velocity u_2 is, however, much less than that of ordinary sound. The central scattering line in superfluid helium is therefore split into a narrow doublet, whose width is given by the same formula (120.6) with u_2 in place of u (V. L. Ginzburg, 1943).

‡ The difference between the intensities of the two components is usually, according to (118.4), quite unimportant, since $\hbar\Omega_0 \ll T$.

$\tau_D \sim \eta a^3/T$, where a is the dimension of the molecule; the difference between τ_M and τ_D is particularly large in liquids with large molecules. Finally, various other slow relaxation processes leading to the dispersion of sound are also possible (e.g. chemical reactions, slow transfer of energy to vibrational degrees of freedom of the molecule). The important processes as regards scattering are those for which $1/\tau$ is comparable with the frequency of the sound disturbances which cause the scattering. We shall merely mention that, when the viscosity of the liquid is sufficiently high, and so $\tau_M \gg 1/qu$, the liquid behaves as an amorphous solid with respect to the scattering of light.

PROBLEMS

Problem 1. Find an exact formula for the ratio of intensities of the central line and the doublet in the undisplaced scattering line (I. L. Fabelinskii, 1956).

SOLUTION. As noted in the text, the second term in (120.3) gives the doublet intensity. The first term arises from isobaric entropy fluctuations, and therefore gives the intensity of the central line. Thus

$$\frac{h_{cl}}{h_d} = \frac{T}{c_p\rho^2}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial T}\right)_P^2 \Big/ \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_s^2 \left(\frac{\partial\rho}{\partial P}\right)_s$$

From the thermodynamic relations (120.7) and

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial P}\right)_s = \left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_T - \frac{T}{c_p\rho^2}\left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_P^2$$

(see SP 1, (16.15)), we find

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial P}\right)_s = \frac{c_v}{c_p - c_v}\frac{T}{\dot{c}_p\rho^2}\left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_P^2$$

The final result is

$$\frac{h_{cl}}{h_d} = \left(\frac{c_p}{c_v} - 1\right)\left[\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial T}\right)_P \Big/ \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_s \left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_P\right]^2.$$

In the Landau-Placzek approximation, the expression in the square brackets is unity.

Problem 2. Light is scattered in a gas whose molecules are linear, with polarizabilities α_1 and $\alpha_\perp$ along and across the axis respectively. Determine the intensity resulting from the various types of scattering.

Solution. The total intensity of scattered light (for given vibrational and electronic states of the molecules) includes the Rayleigh scattering and the rotational part of the Raman scattering. Since the scattering takes place independently at the individual molecules of the gas, the total extinction coefficient is most simply obtained from formula (92.4), by multiplying by the number of particles per unit volume N and replacing $|\alpha V|^2$ by $\frac{1}{3}{\alpha_{ik}}^2 = \frac{1}{3}\left({\alpha_1}^2 + 2{\alpha_1}^2\right)$:

$$h = \frac{8\pi\omega^4 N}{9c^4}\left(\alpha_1^2 + 2\alpha_1^2\right) \tag{1}$$

the polarizabilities as defined here and in §92 differ by a factor V.

The undisplaced Rayleigh line is due to the scalar part of the polarizability, i.e. it is the same as if the polarizability tensor of the molecule were $\frac{1}{3}\alpha_{ll}\delta_{ik}$. The same formula, (92.4), therefore gives

$$h_{\text{undisp}} = \frac{8\pi\omega^4 N}{27c^4}\left(\alpha_1 + 2\alpha_1\right)^2. \tag{2}$$

The difference $h_{\text{total}} - h_{\text{undisp}}$ includes the background (scattering by anisotropy fluctuations) and the rotational Raman scattering. In order to separate the former, we must first average the polarizability tensor of the molecule with respect to rotation about some particular axis (perpendicular to the axis of the molecule). The polarizability along the axis of rotation averaged in this way is evidently $\alpha_\perp$, and that along any direction in a plane perpendicular to the axis of rotation is $\frac{1}{2}\left(\alpha_\perp + \alpha_\parallel\right)$. In other words, a molecule rotating about a given axis is to be regarded as a particle for which the principal values of the polarizability tensor are $\alpha_1, \frac{1}{2}\left(\alpha_1 + \alpha_1\right), \frac{1}{2}\left(\alpha_1 + \alpha_1\right)$. Using these, we calculate the Symmetrical tensor $\alpha_{ik} - \frac{1}{3}\alpha_{il}\delta_{ik}$, whose trace is zero, and then a procedure similar to the derivation of formulae (1) and (2) gives

$$h_{\text{backg}} = \frac{8\pi\omega^4 N}{9c^4}\frac{\left(\alpha_\perp - \alpha_n\right)^2}{6}. \tag{3}$$

Finally, the intensity of the rotational Raman scattering is obtained by subtracting (2) and (3) from (1):

$$h_R = \frac{8\pi\omega^4 N}{9c^4}\frac{\left(\alpha_1 - \alpha_1\right)^2}{2}.$$

12.7.5 §121. Critical opalescence

The isothermal compressibility $(\partial\rho/\partial P)_T$ increases without limit as the critical point is approached. The expression (120.2) for the total intensity due to Rayleigh scattering therefore increases also. This indicates a marked increase in scattering near the critical point, called critical opalescence. † The formula (120.2) itself is, however, inapplicable, because near the critical point the single-time correlation between the density fluctuations (and therefore the permittivity fluctuations) at different points in space extends to a distance of the order of the correlation radius r_c, which increases without limit as the critical point is approached (see $SP1$, §§152, 153). Here, therefore, we cannot in general replace the factor $e^{-iq\cdot\mathbf{r}}$ in (119.9) by unity, even when calculating the total scattered intensity (and not just when calculating its spectral fine structure).

This replacement is valid for all scattering angles only if

$$kr_c \ll 1, \tag{121.1}$$

where $k = n\omega/c$ is the wave number of the scattered light. In that case, we can again use (120.2) for the total extinction coefficient, and it is sufficient to retain just the increasing first term (only the density fluctuations increase, not the temperature fluctuations). As the critical point is approached from any direction in the ρT-plane except along the critical isotherm $T = T_c$, the compressibility increases according to †

$$(\partial\rho/\partial P)_T \propto |T - T_c|^{-\gamma}, \quad \gamma \cong 1.26.$$

Since there is no reason for $(\partial\varepsilon/\partial\rho)_r$ to become zero or infinite, the scattering intensity behaves similarly:

$$h \propto |T - T_c|^{-\nu}. \tag{121.2}$$

This increase involves an increased intensity of only the central component of the Rayleigh line, not of all the fine-structure components. From (120.8), $h_d \equiv hc_v/c_p$. The factor c_p in the

[0]† The idea that this phenomenon is due to an increase in the density fluctuations was put forward by M. Smoluchowski (1908). In relation to the van der Waals theory of the critical point (see SP 1, §152) it was discussed by L. S. Ornstein and F. Zernike (1914).

denominator compensates the factor $(\partial\rho/\partial P)_T$ in h, since they increase in the same manner. The doublet intensity therefore increases only as c_v, i.e. much more slowly ‡ :

$$h_d \propto |T - T_c|^{-\alpha}, \quad x \cong 0.1. \tag{121.3}$$

Sufficiently close to the critical point, the inequality (121.1) for a given k is certainly violated, and it is no longer permissible to replace the factor $e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}}$ by unity; this occurs later for small scattering angles.§ Let $\mathrm{d}h$ be the differential extinction coefficient for scattering into a solid-angle element do', i.e. for a given value of $\mathbf{q} = \mathbf{k}' - \mathbf{k}$. Considering, for definiteness, the scattering of unpolarized light, and using the result that the angular dependence related to the polarization state of the light in the case of scattering by scalar fluctuations is given by the factor I (117.26), we have

$$\mathrm{d}h = \frac{\omega^4}{6\pi c^4}\left(\delta\varepsilon^2\right)_q \cdot \frac{3}{4}\left(1 + \cos^2\vartheta\right)\frac{\mathrm{d}o'}{4\pi}, \tag{121.4}$$

with

$$\left(\partial\varepsilon^2\right)_{\mathbf{q}} = (\partial\varepsilon/\partial\rho)_r^2\left(\delta\rho^2\right)_{\mathbf{q}}.$$

In the immediate neighbourhood of the critical point, where

$$kr_c \gg 1, \tag{121.5}$$

for not too small scattering angles $qr_c \gg 1$ will also hold. In this angle range, the important distances in the integral $\left(\delta\rho^2\right)_q$ are $r \sim 1/q \gg r_c$, where the density fluctuation correlation function follows a power law ‖ :

$$\left\langle \delta\rho^{(1)}\delta\rho^{(2)}\right\rangle \propto r^{-(1+\zeta)}, \quad \zeta \cong 0.04$$

The Fourier component of the correlation function is then

$$\left(\delta\rho^2\right)_{\mathbf{q}} \propto q^{-2+\zeta} \tag{121.6}$$

with a coefficient that is independent of the temperature. Thus we arrive at the following angle and frequency dependence of the extinction coefficient in the range under consideration:

$$\mathrm{d}h x\omega^{2-\zeta}\frac{1 + \cos^2\vartheta}{(1 - \cos\vartheta)^{1-\zeta/2}}\ \mathrm{d}o'. \tag{121.7}$$

For a fixed scattering angle in the range $qr_c \gg 1$, the intensity ceases to increase as the critical point is approached. At the critical point itself, (121.7) is valid for all angles.

[0]† All the results used in this section concerning the variation of thermodynamic quantities near the critical point are given in $SP1$, §153. The notation for the critical indices is the same as there.

‡ All these arguments presuppose, of course, that the inequality (121.1) is compatible with the assumption that the substance is already in the "fluctuation region" of the neighbourhood of the critical point.

§ It is, however. meaningful to consider scattering itself only down to angles of the order of the diffraction angle $\sim \lambda/L$, where L is the linear size of the body.

‖ See SP 1, (148.7). Because of the formal equivalence between critical-point problems and problems of second-order phase transitions (with a one-dimensional order parameter), this formula applies near a critical point also.

12.7.6 §122. Scattering in liquid crystals

In liquid crystals there is strong scattering of light, similar in several respects to critical opalescence. Here we shall discuss the phenomenon only in nematic-type liquid crystals (P. G. de Gennes, 1968).

Such crystals have already been mentioned at the end of §17, where an expression was given for their permittivity tensor:

$$\varepsilon_{ik} = \varepsilon_0(\omega)\delta_{ik} + \varepsilon_a(\omega)d_i d_k; \tag{122.1}$$

ε_0 and ε_a are functions of the frequency.

The permittivity fluctuations are due firstly to fluctuations in the direction of the director $\mathbf{d}$, and are therefore anisotropy fluctuations. A simultaneous equal rotation of this direction at all points leaves the energy of the body unchanged; the long-wavelength fluctuations thus involve only small energy losses, and are therefore large. Large fluctuations of the permittivity lead in turn to strong scattering of light.

The fluctuating quantity $\mathbf{d}$ may be expressed as

$$\mathbf{d} = \mathbf{d}_0 + v, \tag{122.2}$$

where $\mathbf{d}_0$ is its constant mean value and v a small change in the fluctuation; since $\mathbf{d}^2 = {\mathbf{d}_0}^2 = 1$, and v is small, we have

$$\boldsymbol{v} \cdot \mathbf{d_o} = 0. \tag{122.3}$$

The change in the permittivity in the fluctuation is given in terms of v by

$$\delta\varepsilon_{ik} = \varepsilon_a \left(d_{\mathrm{O}i}v_k + d_{\mathrm{O}k}v_i\right). \tag{122.4}$$

The influence of the density and temperature fluctuations on $\delta\varepsilon_{ik}$ is negligible.

Using (122.4), we express the single-time correlation function of the permittivity fluctuations in terms of that of the director fluctuations:

$$\begin{aligned}\left(\delta\varepsilon_{il}\delta\varepsilon_{km}\right)_{\mathbf{q}} =& \varepsilon_a^2 \Big\{ d_{0i}d_{0k}\left(v_t v_m\right)_{\mathbf{q}} + d_{0i}d_{0m}\left(v_k v_l\right)_{\mathbf{q}} \\ &+ d_{0k}d_{0l}\left(v_i v_m\right)_{\mathbf{q}} + d_{0l}d_{0m}\left(v_i v_k\right)_{\mathbf{q}} \Big\}.\end{aligned} \tag{122.5}$$

The function $\left(v_i v_k\right)_{\mathbf{q}}$ has been derived in $SP1$, §141. From (122.3), this tensor has non-zero components only in the plane perpendicular to $\mathbf{d}_{\mathrm{o}}$. Denoting the tensor suffixes in this plane by α and β, we have

$$\left.\begin{aligned}\left(v_\alpha v_\beta\right)_{\mathbf{q}} &= a\left(\delta_{\alpha\beta} - q_\alpha q_\beta/q_\perp^2\right) + b q_\alpha q_\beta/q_\perp^2 \\ a = T/\left(a_2 q_\perp^2 + a_3 q_\parallel^2\right), &\quad b = T/\left(a_1 q_\perp^2 + a_3 q_\parallel^2\right),\end{aligned}\right\} \tag{122.6}$$

where a_1, a_2, a_3 are positive moduli giving the dependence of the free energy of a nematic crystal on the derivatives of the director, $q_\parallel$and $q_\perp$ the components of q along $\mathbf{d}_0$ and in the plane perpendicular to it.

If we assume that the anisotropy of the permittivity is relatively small, i.e. $|\varepsilon_a| \ll \varepsilon_0$, we can use for the differential extinction coefficient (with respect to directions) formula (119.9), derived for isotropic media (but without putting $\mathbf{q} = 0$, of course). We shall not give here the resulting lengthy expression for the angular distribution and the polarization dependences.

A characteristic feature of this scattering is that its intensity increases at low scattering angles according to

$$\mathrm{d}h \propto \mathrm{d}o'/q^2 \tag{122.7}$$

This large increase, like that given by (121.7) at the critical point, is due to the slow (powerlaw) decrease of the fluctuation correlation function with increasing distance. The angle integral diverges logarithmically at the lower limit. It has to be cut off at values of $q \sim 1/L$, corresponding to diffraction by the body as a whole (cf. the fourth footnote to §121), and the total scattering intensity thus varies logarithmically with the size L of the body.

It may be noted, finally, that an external magnetic field restricts the increase of the correlation function $(v_i v_k)_{\mathbf{q}}$ for small $\mathbf{q}$ (see $SP1$, §141), and thus suppresses scattering, making the liquid crystal transparent.

12.7.7 §123. Scattering in amorphous solids

Rayleigh scattering in amorphous solids † differs considerably from that in fluids. In an isotropic solid there are two velocities of propagation of sound, u_l (longitudinal) and u_t (transverse). The fine structure of the Rayleigh line therefore includes not one but two Mandel'shtam-Brillouin doublets. They are due to scattering by transverse and longitudinal "sound waves", and their distances from the centre of the line are respectively $\Omega_l = \pm u_q q$ and $\Omega_t = \pm u_t q$. Since $u_t > u_t$, it follows that $|\Omega_l| > |\Omega_t|$. The central component of the line is again due to scattering by fluctuations which are not propagated relative to the medium. In this case the main fluctuations of the latter type are those of structure. In an amorphous body, where the atoms are not arranged in an ordered manner, these fluctuations are comparatively large and vary only slowly with time (on account of the extreme slowness of the diffusion processes in a solid). Scattering by these fluctuations leads to a strong line whose width is almost zero. As regards polarization and angular distribution, this line results from a superposition of scalar and symmetric scattering.

Next, let us consider the doublet components of the Rayleigh line in amorphous solids. In a solid, the influence of any deformation (in this case, fluctuations) extends to considerable distances. Hence even the single-time fluctuations at different points in the body are correlated over distances large compared with $1/q$. We thus have again a situation

where, even in calculating the total intensity (and the polarization) of the scattered light, we cannot put $q = 0$ in the fluctuation correlation function.

The field in the scattered wave is

$$\mathbf{E}' = -\frac{\omega^2 \exp(ikR_0)}{4\pi R_0 c^2} E_0 \mathbf{n}' \times (\mathbf{n}' \times \mathbf{G}), \tag{123.1}$$

where

$$G_i = \int \delta\varepsilon_{ik} \exp(-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r})\mathrm{d}V \cdot e_k \tag{123.2}$$

and $\mathbf{n}'$ is a unit vector in the direction of scattering. The change in the permittivity resulting from the deformation of an isotropic body is

$$\delta\varepsilon_{ik} = a_1 u_{ik} + a_2 u_{ll}\delta_{ik} \tag{123.3}$$

where u_{ik} is the strain tensor (see (102.1)). Since the integral (123.2) isolates from $\delta\varepsilon_{ik}$ the Fourier space component with wave vector $\mathbf{q}$, u_{ik} in (123.3) must be taken as the deformation in a sound wave with this wave vector. We therefore write the displacement vector as

[0]† The considerably more complex theory of scattering in solid crystals will not be discussed in this book.

$$\mathbf{u} = \mathrm{re}\left\{\mathbf{u}_0 \exp(i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r})\right\} = \frac{1}{2}\left[\mathbf{u}_0 \exp(i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}) + \mathbf{u}_0{}^* \exp(-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r})\right] \tag{123.4}$$

whence the strain tensor is

$$\begin{aligned} u_{ik} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right) \\ &= \mathrm{re}\left\{\frac{1}{2} i \left(u_{\mathrm{o}i} q_k + u_{\mathrm{o}k} q_i\right) \exp(i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r})\right\}, \end{aligned}$$

and the volume integral is

$$\int u_{ik} \exp(-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r})\mathrm{d}V = \frac{1}{4} iV \left(u_{oi} q_k + u_{\mathrm{o}k} q_i\right) \tag{123.5}$$

Let us first consider scattering by transverse sound waves. Since in a transverse wave $\mathbf{u}$ is perpendicular to $\mathbf{q}$, and $u_{ll} = 0, \delta\varepsilon_{ik} = a_1 u_{ik}$. Using (123.5), we therefore have

$$\mathbf{G} = \frac{1}{4} iV a_1 \left\{\mathbf{u}_0(\mathbf{q}\cdot\mathbf{e}) + \mathbf{q}\,(\mathbf{u}_0\cdot\mathbf{e})\right\}. \tag{123.6}$$

A transverse sound wave can have two independent directions of polarization; the vector $\mathbf{u}$ may be in the plane of $\mathbf{k}$ and $\mathbf{k}'$, or perpendicular to that plane. Since $\mathbf{E}$ is perpendicular to $\mathbf{k}$, it is easy to see that in the first case the component of $\mathbf{G}$ in the plane perpendicular to $\mathbf{k}'$ is zero. Thus transverse sound waves polarized in the plane of $\mathbf{k}$ and $\mathbf{k}'$ do not scatter light.

If the vector $\mathbf{u}$ is perpendicular to the plane of $\mathbf{k}$ and $\mathbf{k}'$, a simple calculation, using (123.1) and (123.6), gives for the field in the scattered wave

$$\left.\begin{aligned} E'_{\parallel} &= \tfrac{\omega^2 E_0 \exp(ikR_0)}{4\pi R_0 c^2} \cdot \tfrac{1}{4} a_1 iVqu_0 \cos\tfrac{1}{2}\vartheta \cdot e_{\perp} \\ E'_{\perp} &= \tfrac{\omega^2 E_0 \exp(ikR_0)}{4\pi R_0 c^2} \cdot \tfrac{1}{4} a_1 iVqu_0 \cos\tfrac{1}{2}\vartheta \cdot e_{\parallel} \end{aligned}\right\} \tag{123.7}$$

Here ϑ is, as usual, the angle between $\mathbf{k}$ and $\mathbf{k}'$, and the suffixes $\parallel$ and $\perp$ denote components in the plane of scattering and perpendicular to that plane. The coefficient of proportionality in these two formulae involves the same fluctuation u_{o}. This means that no depolarization occurs on scattering: linearly polarized light remains so (though it is polarized in a different plane).

Since the coefficients in formulae (123.7) are exactly the same, the extinction coefficient $\mathrm{d}h$ does not depend on the state of polarization of the incident light, and is

$$\mathrm{d}h = \left(\frac{q\omega^2 a_1}{16\pi c^2}\right)^2 V \left|u_0\right|^2 \cos^2\frac{1}{2}\vartheta \;\mathrm{d}o \tag{123.8}$$

It remains to determine the mean square amplitude of the fluctuation u_0.
From the point of view of the general theory of thermodynamic fluctuations, the sound wave (123.4) may be regarded as a combination of two classical oscillators (waves propagated to the right and to the left), each having a mean kinetic energy $\frac{1}{2}T$. Since the frequency of the oscillations is here $\Omega = qu_t$, the mean kinetic energy is $\frac{1}{2}V\left\langle\rho\dot{\mathbf{u}}^2\right\rangle = \frac{1}{4}V\rho\left(u_t q\right)^2\left\langle\left|u_0\right|^2\right\rangle$. Equating this to $2\cdot\frac{1}{2}T$, we have

$$\left\langle\left|u_0\right|^2\right\rangle = 4T/V\rho u_t^2 q^2 \tag{123.9}$$

Finally, substituting (123.9) in (123.8), we obtain

$$\mathrm{d}h = \frac{a_1^2\omega^4 T}{64\pi^2 c^4 u_t^2 \rho}\cos^2\frac{1}{2}\vartheta \;\mathrm{d}o \tag{123.10}$$

The angular dependence of the scattering is totally different from that which occurs in fluids.

Let us now consider scattering by longitudinal sound waves. In these waves $\mathbf{u}$ is parallel to $\mathbf{q}$, and from (123.3) and (123.4) we find

$$\mathbf{G} = \frac{1}{2} iV u_0 q \left\{ a_1 \frac{\mathbf{q}(\mathbf{q}\cdot\mathbf{e})}{q^2} + a_2 \mathbf{e} \right\} E_0.$$

A simple calculation gives for the field in the scattered wave

$$\left.\begin{aligned} E_\perp &= \tfrac{\omega^2 \exp(ikR_0)}{4\pi R_0 c^2} \cdot \tfrac{1}{2} iV u_0 q a_2 E_0 e_\perp \\ E_\parallel &= \tfrac{\omega^2 \exp(ikR_0)}{4\pi R_0 c^2} \cdot \tfrac{1}{2} iV u_0 q \left[\tfrac{1}{2} a_1 + \left(\tfrac{1}{2} a_1 + a_2 \right) \cos\vartheta \right] E_0 e_\parallel \end{aligned}\right\} \tag{123.11}$$

In this case also there is no depolarization on scattering. The angular distribution and the extinction coefficient, however, depend on the state and direction of the polarization of the incident light. We shall not pause to write out the relevant formulae, which are somewhat cumbersome. The calculations are wholly similar to those given above, and the expression for $\langle |u_0|^2 \rangle$ differs only in that u_t is replaced by u_t in (123.9).

12.8 XVI Diffraction of X-Rays in Crystals by Landau

12.8.1 Overview of X-ray diffraction and Applications

(?????)

12.8.2 §124. The general theory of X-ray diffraction

The phenomenon of X-ray diffraction in crystals occupies a special place in the electrodynamics of matter, since the wavelengths concerned are comparable with the interatomic distances. For this reason the usual macroscopic approach to matter as a continuous medium is entirely invalid, and we must begin by considering scattering by individual charged particles, and essentially by electrons; the scattering by nuclei is unimportant, because of their greater mass.

The frequencies of the motion of electrons in the atom are of order $\omega_0 \sim v/a$, where v is their velocity and a the dimension of the atom. If $\lambda \sim a$, then, since $v \ll c$, these frequencies are small compared with the X-ray frequency $\omega \sim c/\lambda$. This makes it possible to write the equation of motion of an electron in the field of the electromagnetic wave as

$$m\dot{\mathbf{v}}' = e\mathbf{E}, \tag{124.1}$$

i.e. the electrons may be regarded as free (see §78).
From (124.1) we find the additional velocity acquired by the electron under the action of the wave field: $\mathbf{v}' = \boldsymbol{ie}\mathbf{E}/\boldsymbol{m\omega}$.

Let $n(\mathbf{r})$ be the number density of electrons in a crystal, averaged over the quantummechanical states of the electrons and over the statistical distribution of the thermal motion of the nuclei in the lattice. It should be emphasized that the usual macroscopic averaging over physically infinitesimal volume elements is not included, i.e. $n(\mathbf{r})$ is the actual quantum density of the electrons in the crystal lattice. The corresponding current density due to the wave field is:

$$\mathbf{j}' = en\mathbf{v}' = ie^2 n\mathbf{E}/m\omega. \tag{124.2}$$

We substitute this current in the microscopic Maxwell's equations:

$$\operatorname{curl}\mathbf{E} = i\omega\mathbf{H}/c \tag{124.3}$$

$$\operatorname{curl}\mathbf{H} = -i\omega\mathbf{E}/c + 4\pi\mathbf{j}'/c = -\frac{i\omega}{c}\left(1 - \frac{4\pi e^2 n}{m\omega^2}\right)\mathbf{E}. \tag{124.4}$$

We thereby take account of its reciprocal effect on the field, i.e. scattering. It is, of course, assumed that this effect is small, i.e. that the inequality

$$4\pi e^2 n/m\omega^2 \ll 1 \tag{124.5}$$

holds Putting $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$, where

$$\varepsilon = 1 - \frac{4\pi e^2 n}{m\omega^2}, \tag{124.6}$$

in accordance with the usual definition of the induction, we reduce equation (124.4) to the usual form $\operatorname{curl}\mathbf{H} = -i\omega\mathbf{D}/c$. Thus, in this sense, the expression (124.6) for the permittivity (cf. (78.1)) can be used even for wavelengths $\lambda \sim a$, though it must of course be remembered that the symbols $\mathbf{E}$ and $\mathbf{D}$ no longer retain their previous meanings: they now pertain to the field which has not been averaged over physically infinitesimal volumes, and ε is accordingly a function of the coordinates.

In the scattering of X-rays by heavy atoms it may happen that the condition $\omega \gg \omega_0$ is fulfilled for the outer electron shells but not for the inner ones, where $\omega \lesssim \omega_0$ and so the inequality $\lambda \gg a$ holds. In this case the permittivity can still be regarded as the coefficient of proportionality between $\mathbf{D}$ and $\mathbf{E}$, but the formula corresponding to (124.6) gives only the contribution of the outer electrons. That of the inner electrons must in principle be calculated by averaging over the volume of their shells. Thus, if we put $\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$ with ε a function of the coordinates, all possible cases are allowed for. In what follows we shall, for definiteness, use the expression (124.6).

In effecting the averaging of the electron density in (124.2) to obtain $n(\mathbf{r})$ independent of time, we exclude a possible change of frequency on scattering. That is, we consider only strictly coherent scattering, with no change in frequency.

Eliminating $\mathbf{H}$ from the two equations (124.3) and (124.4), we obtain $\operatorname{curl}\operatorname{curl}\mathbf{E} = \omega^2\mathbf{D}/c^2$. Here we substitute $\mathbf{E} = \mathbf{D} + 4\pi e^2 n\mathbf{E}/m\omega^2$ and expand the expression $\operatorname{curl}\operatorname{curl}\mathbf{E}$, using the fact that $\operatorname{div}\mathbf{D} = 0$, as follows from (124.4). Then

$$\triangle\mathbf{D} + \omega^2\mathbf{D}/c^2 = \operatorname{curl}\operatorname{curl}\left(4\pi e^2 n\mathbf{E}/m\omega^2\right) \tag{124.7}$$

On the right-hand side of this equation, which already contains the small quantity $4\pi e^2 n/m\omega^2$, $\mathbf{E}$ must be taken as the given field of the incident wave. Let us find the solution of equation (124.7) in the region outside the scattering crystal and at large distances from it. Since this equation is of the same form as equation (117.3), the required solution is obtained immediately by analogy with (117.4): †

$$\mathbf{E} = \frac{e^2}{m\omega^2}\frac{\exp(ikR_0)}{R_0}\mathbf{k}' \times (\mathbf{k}' \times \mathbf{E}_0)\int n\exp(-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r})\mathrm{d}V. \tag{124.8}$$

Here R_0 is the distance from the origin, which is within the crystal, to the point considered; $\mathbf{q} = \mathbf{k}' - \mathbf{k}; k = k' = \omega/c; \mathbf{E}_0$ is the amplitude of the incident wave. We put $\mathbf{E}$ instead of $\mathbf{D}$ on the left-hand side because the two are equal in the vacuum outside the crystal.

To characterize the intensity of X-ray diffraction we use an effective cross-section σ, defined as the ratio of the intensity diffracted into a solid angle do' to the energy flux density in the incident wave. By (124.8) we have

$$\mathrm{d}\sigma = \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \sin^2\theta \left|\int n\exp(-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r})\mathrm{d}V\right|^2 \mathrm{d}o' \tag{124.9}$$

where θ is the angle between $\mathbf{E}_0$ and $\mathbf{k}'$. If the incident radiation is "natural" (not polarized), the factor $\sin^2\theta$ in this formula becomes $\frac{1}{2}(1+\cos^2\vartheta)$, where ϑ is the angle between $\mathbf{k}$ and $\mathbf{k}'$ (see the last footnote to §117):

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \left(1+\cos^2\vartheta\right) \left|\int n\exp(-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r})\mathrm{d}V\right|^2 \mathrm{d}o'. \tag{124.10}$$

In what follows we shall, for definiteness, consider this particular case.
We see that the intensity of radiation diffracted in a given direction is essentially proportional to the squared modulus of the integral

$$\int n\exp(-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r})\mathrm{d}V, \tag{124.11}$$

i.e the Fourier space component of the electron density. As $\mathbf{q}\to 0$ this integral becomes simply the electron density $\bar{n}$ averaged over a lattice cell. If n is replaced by $\bar{n}$ in equations (124.3) and (124.4), we obtain the usual macroscopic Maxwell's equations, with permittivity $\varepsilon(\omega) = 1 - 4\pi e^2\bar{n}/m\omega^2$. According to these equations, when X-rays pass through a crystal they are refracted according to the ordinary laws of refraction, with refractive index $\sqrt{\varepsilon}$. Thus diffraction through small angles amounts to ordinary refraction, which is of no interest here. In what follows we shall always assume that $\mathbf{q}$ is appreciably different from zero.

The electron density, like any function of position in a crystal lattice, can be expanded as a Fourier series:

$$n = \sum_{\mathbf{b}} n_{\mathrm{b}}\exp(i\mathbf{b}\cdot\mathbf{r}), \tag{124.12}$$

where the summation is taken over all periods $\mathbf{b}$ of the reciprocal lattice (see $SP1$, §133). When (124.12) is substituted in (124.11) and the result is integrated over the volume of the crystal, we obtain practically zero except for values of $\mathbf{q}$ close to some $\mathbf{b}$. Between these values the intensity is negligible. We can therefore consider each diffraction maximum separately, putting

$$n = n_{\mathbf{b}}\exp(i\mathbf{b}\cdot\mathbf{r})$$

with the appropriate value of $\mathbf{b}$. Substitution in (124.10) gives

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \left(1+\cos^2\vartheta\right)|n_{\mathrm{b}}|^2 \left|\int \exp\left[-i\left(\mathbf{k}'-\mathbf{k}-\mathbf{b}\right)\cdot\mathbf{r}\right]\mathrm{d}V\right|^2 \mathrm{d}o' \tag{124.13}$$

The strongest maxima occur in directions for which the equation

$$\mathbf{k}'-\mathbf{k} = \mathbf{b} \tag{124.14}$$

(Laue's equation) is exactly satisfied, and are called principal maxima. For given $\mathbf{b}$, however, a principal maximum does not occur for an arbitrary direction and frequency of the incident

[0]† In solving equation (117.3) it was not possible to consider the field outside the body, since the boundary conditions on the surface would have had to be taken into account (the quantity ε' on the left-hand side being different inside and outside the body). The left-hand side of equation (124.7), however, is the same in all space.

radiation. If the equation (124.14) is written as $\mathbf{k}' = \mathbf{k} + \mathbf{b}$ and squared, and we use the fact that $k^2 = k'^2$, we have

$$2\mathbf{b} \cdot \mathbf{k} = -b^2 \tag{124.15}$$

This equation determines the values of the wave vector $\mathbf{k}$ for which principal maxima occur with the given value of $\mathbf{b}$. Geometrically, equation (124.15) represents a plane in k-space perpendicular to the vector b at a distance $\frac{1}{2}b$ from the origin. In particular, we see that $k \geqslant \frac{1}{2}b$.

Since $|\mathbf{k}' - \mathbf{k}| = 2k \sin \frac{1}{2}\vartheta$, it follows from (124.14) that

$$2k \sin \frac{1}{2}\vartheta = b \tag{124.16}$$

(Bragg and Vul'f's equation), which determines the angle of diffraction at the principal maximum.

Any vector $\boldsymbol{b}$ of the reciprocal lattice determines a family of crystal planes represented by the equations

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{b} = 2\pi \times \text{ an integer } .$$

These planes are perpendicular to $\mathbf{b}$, and the vectors $\mathbf{k}$ and $\mathbf{k}'$ corresponding to the condition (124.14) make equal angles of incidence and reflection with the planes (Fig. 64). For this reason, diffraction at a principal maximum is sometimes spoken of as reflection from the corresponding crystal planes.

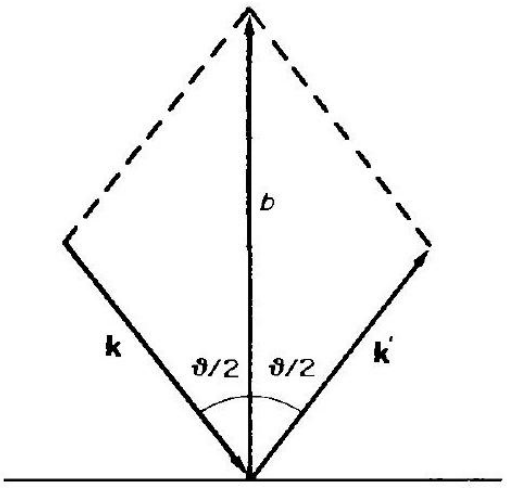


Fig. 64

The total intensity of the diffraction spot near a maximum is obtained by integrating (124.13) over a solid angle about the direction of $\mathbf{k}'$. Let us determine the total intensity near a principal maximum. We denote by $\mathbf{k}'_0$ the value of $\mathbf{k}'$ corresponding to Laue's equation for a given $\mathbf{k}$: $\mathbf{k}'_0 = \mathbf{k} + \mathbf{b}$, and put also $\varkappa = \mathbf{k}' - \mathbf{k}'_0$. Near the maximum, $\varkappa$ is small; since $\mathbf{k}'$ and $\mathbf{k}'_0$ differ only in direction, x is perpendicular to $\mathbf{k}'_0$. The solid angle element can therefore be written

$$\mathrm{d}o' = \mathrm{d}\kappa_x \, \mathrm{d}\kappa_y / k'^2 = \mathrm{d}\kappa_x \, \mathrm{d}\kappa_y / k^2 \tag{124.17}$$

where the z-axis is taken in the direction of $\mathbf{k}'_0$. Thus

$$\sigma = \frac{1}{2k^2}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \left(1+\cos^2\vartheta\right)|n_\mathrm{b}|^2 \iint \mathrm{d}\kappa_x\ \mathrm{d}\kappa_y \left|\int \exp(-i\varkappa\cdot\mathrm{r})\mathrm{d}V\right|^2 .$$

In the volume integral we can effect the integration with respect to z, since $\exp(-i\boldsymbol{x}\cdot\mathbf{r})$ is independent of z : $\int \exp(-i\varkappa\cdot\mathbf{r})\mathrm{d}V = \int Z\exp(-i\varkappa\cdot\mathbf{r})\mathrm{d}f$, where $\mathrm{d}f = \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$ and $Z = Z(x,y)$ is the length of the body in the direction of $\mathbf{k}_0'$. Finally, using a well-known formula in the theory of Fourier integrals:

$$\frac{1}{(2\pi)^2}\int |\phi_\kappa|^2\ \mathrm{d}\kappa_x\ \mathrm{d}\kappa_y = \int \phi^2\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y \tag{124.18}$$

where

$$\phi_\kappa = \int \phi(x,y)\exp(-i\varkappa\cdot\mathbf{r})\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$$

are the two-dimensional Fourier components, we obtain

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{2\pi^2}{k^2}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \left(1+\cos^2\vartheta\right)|n_\mathrm{b}|^2 \int Z^2\ \mathrm{d}f \\ &= \frac{8\pi^2}{b^2}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \sin^2\frac{1}{2}\vartheta\left(1+\cos^2\vartheta\right)|n_\mathrm{b}|^2 \int Z^2\ \mathrm{d}f. \end{aligned}\tag{124.19}$$

The integral is of the order of L^4, where L is the linear dimension of the body. Thus the total diffraction cross-section, and therefore the total intensity of the spot, are proportional to $V^{4/3}$, where V is the volume of the body. The maximum intensity, however, follows a different law. For $\mathbf{k}'-\mathbf{k}=\mathbf{b}$, the integral in (124.13) is just V, and so $\mathrm{d}\sigma$ is proportional to V^2 :

$$\left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}o'}\right)_{\max} = \frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \left(1+\cos^2\vartheta\right)|n_\mathrm{b}|^2 V^2. \tag{124.20}$$

The sharpness of the maximum is shown by the fact that the maximum intensity is proportional to a higher power of V than the total intensity. The width of the peak is evidently proportional to $V^{4/3}/V^2 = V^{-2/3}$.

The theory given above is valid only if the diffraction effect is small. We now see that this requirement imposes a certain condition on the size of the crystal: σ must be small compared with the geometrical cross-section of the body ($\sim L^2$), whence

$$\frac{e^2}{mc^2}\frac{L}{k}|n_\mathrm{b}| \ll 1. \tag{124.21}$$

If this condition is not satisfied, then perturbation theory as used in the derivation of (124.8) is not valid. †

PROBLEMS

Problem 1. Determine the intensity distribution in the diffraction spot round a principal maximum in diffraction by a crystal in the form of a cuboid with sides L_x, L_y, L_z.

SOLUTION. As above, we use the vector $x = \mathbf{k}' - \mathbf{k}_0'$, and take the axes of coordinates parallel to the sides of the cuboid, with the origin at its centre.

The integral $\int \exp(-i\boldsymbol{x}\cdot\mathrm{r})\mathrm{d}V$ becomes a product of three integrals of the form

$$\int_{-\frac{1}{2}L}^{\frac{1}{2}L} \exp(-i\kappa x)\mathrm{d}x = \frac{2}{\kappa}\sin\frac{1}{2}\kappa L$$

Thus

$$\mathrm{d}\sigma = 32\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \left(1+\cos^2\vartheta\right)|n_\mathrm{b}|^2 \frac{1}{\kappa_x^2\kappa_y^2\kappa_z^2}\sin^2\frac{1}{2}\kappa_x L_x \sin^2\frac{1}{2}\kappa_y L_y \sin^2\frac{1}{2}\kappa_z L_z \ \mathrm{d}o'$$

The components of the vector x are not independent, being related by the condition $x\cdot \mathrm{k}_0' = 0$.
Problem 2. The same as Problem 1. but for diffraction by a spherical crysial with radius a.

SOLUTION. We again put $x = \mathbf{k}' - \mathbf{k}_\mathbf{0}'$, and take the z-axis in the direction of x, with the origin at the centre of the sphere. Then

$$\begin{aligned}\int \exp(-i\kappa z)\mathrm{d}V &= \int_{-a}^{a} \pi\left(a^2-z^2\right)\exp(-i\kappa z)\mathrm{d}z \\ &= \frac{4\pi}{\kappa^3}(\sin\kappa a - \kappa a\cos\kappa a)\end{aligned}$$

Thus

$$\mathrm{d}\sigma = 8\pi^2\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2\left(1+\cos^2\vartheta\right)|n_\mathrm{b}|^2\frac{1}{\kappa^6}(\sin\kappa a-\kappa a\cos\kappa a)^2\ \mathrm{d}o.$$

Problem 3. Determine the total intensity of the diffraction spot round a subsidiary maximum.

SOlution. In this case the wave vector $\mathbf{k}$ of the incident wave does not satisfy the condition (124.15). As shown above, (124.15) is the equation of a plane perpendicular to the vector $\mathbf{b}$. Let the small displacement of the end-point of the vector $\mathbf{k}$ from this plane be $\eta\mathrm{b}$, where $\eta \ll 1$. That is, we put $\mathbf{k} = \mathbf{k}_0 + \eta\mathrm{b}$, where $\mathbf{k}_0$ satisfies equation (124.15) (Fig. 65).

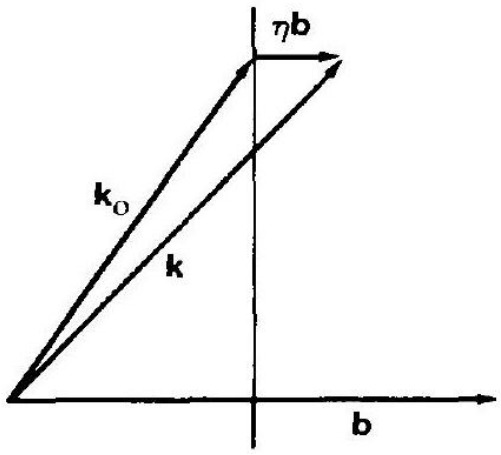


Fig. 65

The maximum intensity in the spot occurs for a direction of $\mathbf{k}'$ for which the difference $\mathbf{k}' - (\mathbf{k}+\mathbf{b})$ has its least magnitude (so that the integral in (124.13) has its maximum value). The magnitude of the difference of two vectors, one of which is arbitrary in direction, has its least value when they are parallel. Hence, since $k' = k$, we have

[0]† The dynamical theory of scattering, which is not subject to the restriction (124.21), is given by Z. G. Pinsker, Dynamical Scattering of X-Rays in Crystals, Springer, Berlin, 1978. The theory given above is called the kinematic theory.

$$|\mathbf{k}' - \mathbf{k} - \mathbf{b}|_{\min} = k - |\mathbf{k} + \mathbf{b}| = \frac{k^2 - (\mathbf{k} + \mathbf{b})^2}{k + |\mathbf{k} + \mathbf{b}|}$$

Since $\mathbf{k}$ is close to $\mathbf{k}_0$ and we are considering the region near the maximum, $\mathbf{k}' \cong \mathbf{k} + \mathbf{b}$ and the denominator can be replaced by $2k$. In the numerator, we expand the squared parenthesis and obtain

$$-2k \cdot b - b^2 = \left[-2k_0 \cdot b - b^2\right] - 2\eta b^2 = -2\eta b^2.$$

Thus $|\mathbf{k}' - \mathbf{k} - \mathbf{b}|_{\min} \cong -\eta b^2/k$.
Next, we put

$$\mathbf{k}' = (\mathbf{k} + \mathbf{b})\left(1 - \frac{\eta b^2}{k^2}\right) + x$$

and take the z-axis in the direction of $\mathbf{k} + \mathbf{b}$. This reduces the problem to the calculation of the integral (cf. the derivation of formula (124.19))

$$\iint \mathrm{d}\kappa_x \, \mathrm{d}\kappa_y \left| \int \exp\left\{ i\eta b^2 z/k - i\varkappa \cdot \mathrm{r} \right\} \mathrm{d}V \right|^2$$
$$= \iint \mathrm{d}\kappa_x \, \mathrm{d}\kappa_y \left| \int \exp(-i\varkappa \cdot \mathrm{r}) \frac{\sin\left(\frac{1}{2}\eta b^2 Z/k\right)}{\frac{1}{2}\eta b^2/k} \, \mathrm{d}f \right|^2$$

Finally, using formula (124.18), we obtain

$$\sigma = \frac{2\pi^2}{k^2}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \left(1 + \cos^2\vartheta\right) |n_b|^2 \int \frac{\sin^2\left(\frac{1}{2}\eta b^2 Z/k\right)}{\left(\frac{1}{2}\eta b^2/k\right)^2} \, \mathrm{d}f$$

As $\eta \to 0$ this formula becomes (124.19). If $\frac{1}{2}\eta b^2 Z/k \gg 1$ (which is compatible with $\eta \ll 1$), the squared sine can be replaced by its mean value $\frac{1}{2}$, and we have

$$\sigma = 4\pi^2 \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \frac{1 + \cos^2 9}{\eta^2 b^4} - |n_b|^2 S$$

where S is the area of the "shadow", i.e. the projection of the body on the xy-plane.

12.8.3 §125. The integral intensity

The formulae derived in §124 give the diffracted intensity when a strictly plane monochromatic wave is incident on a crystal. Let us now consider some cases where these conditions are not fulfilled.

First, let the incident wave be plane but not monochromatic, † its spectral resolution including waves with wave vectors $\mathbf{k}$ whose directions are the same but whose magnitudes $k = \omega/c$ are not. Let $\rho(k)$ be the frequency distribution of the incident radiation intensity, normalized by the condition $\int \rho(k)\mathrm{d}k = 1$.

The total intensity of the diffraction spot is determined by the cross-section, which is obtained by multiplying the expression (124.13) by $\rho(k)$ and integrating with respect to o' and k :

$$\sigma = \frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 |n_\mathrm{b}|^2 \iint \left| \int \exp\left[-i\left(\mathbf{k}' - \mathbf{k} - \mathbf{b}\right) \cdot \mathbf{r}\right] \mathrm{d}V \right|^2 \left(1 + \cos^2\vartheta\right) \rho(k) \mathrm{d}o' \mathrm{d}k \qquad (125.1)$$

We put temporarily $\mathbf{K} = \mathbf{k}' - \mathbf{k} - \mathbf{b}$ and write the squared modulus as a double integral:

$$\left| \int \exp(-i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}) \mathrm{d}V \right|^2 = \iint \exp\left[i\mathbf{K} \cdot (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \right] \mathrm{d}V_1 \, \mathrm{d}V_2$$

Using instead of $\mathbf{r}_1$ and $\mathbf{r}_2$ the variables $\frac{1}{2}(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)$ and $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ and integrating with respect to the first gives $\left| \int \exp(i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}) \mathrm{d}V \right|^2 = V \int \exp(i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}) \mathrm{d}V$. In the remaining integral we can effect the integration over all space, ‡ and the result is

$$\left| \int \exp(i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}) \mathrm{d}V \right|^2 = (2\pi)^3 V \delta(\mathbf{K}) \tag{125.2}$$

Substituting this result in (125.1), we obtain

$$\sigma = 4\pi^3 \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 |n_\mathrm{b}|^2 \, V \left(1 + \cos^2 \vartheta_0 \right) \iint \delta\left(\mathbf{k}' - \mathbf{k} - \mathbf{b} \right) \rho(k) \mathrm{d}o' \mathrm{d}k \tag{125.3}$$

on account of the presence of the delta function. the factor $1 + \cos^2 \vartheta$ in the integrand can be replaced by its value at $\vartheta = \vartheta_0$, where ϑ_0 is the angle between the $\mathbf{k}$ and $\mathbf{k}'$ which satisfy Laue's conditions (denoted by $\mathbf{k}_0$ and $\mathbf{k}'_0 = \mathbf{k}_0 + \mathbf{b}$).

The integration with respect to o' can be carried out by noticing that it is equivalent to an integration with respect to

$$\mathrm{d}^3 k' = k'^2 \, \mathrm{d}k' \mathrm{d}o' = \frac{1}{2} k' \mathrm{d}\left(k'^2 \right) \mathrm{d}o'$$

if an additional factor $(2/k)\delta\left(k'^2 - k^2 \right)$ is included in the integrand. Thus the integral in (125.3) becomes

$$\iint \frac{2}{k} \delta\left(\mathbf{k}' - \mathbf{k} - \mathbf{b} \right) \delta\left(k'^2 - k^2 \right) \rho(k) \mathbf{d}^3 k' \mathbf{d}k$$

Effecting the integration with respect to $\mathrm{d}^3 k'$ by means of the first delta function, we can replace k'^2 by $(\mathbf{k} + \mathbf{b})^2$ in the second delta function, and the result is

$$\sigma = (2\pi)^3 \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 |n_\mathbf{b}|^2 \, V \left(1 + \cos^2 \vartheta_0 \right) \int \frac{1}{k} \delta\left(2\mathbf{b} \cdot \mathbf{k} + b^2 \right) \rho(k) \mathrm{d}k \tag{125.4}$$

Finally, we have to carry out the integration over k (the direction $\mathbf{n} = \mathbf{k}/k$ being given). The argument of the delta function is zero for $k = k_0$, and the integral is $\frac{1}{2}\rho\left(k_0\right)/k_0 |\mathbf{b} \cdot \mathbf{n}| = \frac{1}{2}\rho\left(k_0\right)/\left|\mathbf{b} \cdot \mathbf{k}_0\right| = \rho\left(k_0\right)/b^2$. Thus

$$\sigma = (2\pi)^3 \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 |n_\mathrm{b}|^2 \, I' \left(1 + \cos^2 \vartheta_0 \right) \rho\left(k_0\right)/b^2 \tag{125.5}$$

Let us now consider another case, where the incident wave is monochromatic but its components have varying directions of $\mathbf{k}$ which differ by rotation about some axis; † let $\mathbf{1}$ be a unit vector along that axis, and ψ the angle of rotation about it. Let $\rho(\psi)$ be the angular distribution of the incident radiation intensity, normalized by the condition

$$\int_0^{2\pi} \rho(\psi) \mathrm{d}\psi = 1$$

The calculations leading to formula (125.4) are valid in this case also, except that the integration with $\rho(k)\mathrm{d}k$ must be replaced by one with $\rho(\psi)\mathrm{d}\psi$:

[0]† Corresponding to Laue's method in the X-ray analysis of crystals.

‡ This is possible because we require only the total intensity of the diffraction spot, and not its width.

$$\sigma = (2\pi)^3 \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 |n_{\rm b}|^2 V \left(1+\cos^2\vartheta_0\right) \int_k^1 \delta\left(2\mathbf{b}\cdot\mathbf{k}+b^2\right)\rho(\psi)\mathrm{d}\psi \tag{125.6}$$

We again denote by $\mathbf{k}_0$ the value of $\mathbf{k}$ for which the argument of the delta function is zero. and measure ψ from the plane of $\mathbf{1}$ and $\mathbf{k}_0$. For small $\psi, \mathbf{k} = \mathbf{k}_0 + (\mathbf{1}\times\mathbf{k}_0)\,\psi$. Then the integral in (125.6) becomes

$$\begin{aligned}\int_k^1 \delta\left[2\mathbf{b}\cdot(\mathbf{1}\times\mathbf{k}_0)\,\psi\right]\rho(\psi)\mathrm{d}\psi &= \frac{1}{2}\rho(0)/k\Big|\ \mathbf{b}\cdot(\mathbf{1}\times\mathbf{k}_0)\Big] \\ &= \frac{1}{2}\rho(0)/k^2\,|\mathbf{b}\cdot(\mathbf{1}\times\mathbf{n}_0)| \\ &= 2\rho(0)\sin^2\left(\frac{1}{2}\vartheta_0\right)/b^2\,|\mathbf{b}\cdot(\mathbf{1}\times\mathbf{n}_0)|\,.\end{aligned}$$

Thus

$$\sigma = \frac{2(2\pi)^3}{b^2}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \sin^2\frac{1}{2}\vartheta_0\left(1+\cos^2\vartheta_0\right)|n_b|^2 V\frac{\rho(0)}{|\mathbf{b}\cdot(\mathbf{1}\times\mathbf{n}_0)|}. \tag{125.7}$$

Finally, let us consider the diffraction of a plane monochromatic wave from a body consisting of crystallites arranged at random. ‡

Let $\mathbf{k}_0'$ and $\mathbf{b}_0$ be values of $\mathbf{k}'$ and $\mathbf{b}$ such that Laue's condition $\mathbf{k}_0' = \mathbf{k}+\mathbf{b}_0$ is satisfied. The directions of $\mathbf{k}_0'$ and $\mathbf{b}_0$ are not uniquely determined, since Laue's condition is, of course, still fulfilled when the triangle $\mathbf{k}, \mathbf{b}_0, \mathbf{k}_0'$ is rotated about the direction of $\mathbf{k}$. Thus the principal maximum corresponds to directions of $\mathbf{k}'$ occupying a conical surface with vertical angle $2\vartheta_0$. Instead of a diffraction spot we now have a ring.

The required total cross-section is determined by a formula which differs from (125.4) only in that the integration with $\rho(k)\mathrm{d}k$ is replaced by an averaging over the directions of $\mathbf{b}$:

$$\sigma = (2\pi)^3 I\cdot\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 |n_{\rm b}|^2\left(1+\cos^2\vartheta_0\right)\int\frac{1}{k}\delta\left(2\mathbf{b}\cdot\mathbf{k}+b^2\right)\frac{\mathrm{d}o_{\mathbf{b}}}{4\pi} \tag{125.8}$$

where $\mathrm{d}o_{\rm b}$ is an element of solid angle about the direction of $\mathbf{b}$. Denoting by α the angle between $\mathbf{k}$ and $\mathbf{b}$, we can write the integral in (125.8) as

$$\int\frac{1}{k}\delta\left(2bk\cos\alpha+b^2\right)\frac{2\pi\ \mathrm{d}\cos\alpha}{4\pi} = \frac{1}{4bk^2} = \frac{1}{b^3}\sin^2\frac{1}{2}\vartheta_0.$$

Thus

$$\sigma = (2\pi)^3\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 |n_b|^2\frac{V}{b^3}\left(1+\cos^2\vartheta_0\right)\sin^2\frac{1}{2}\vartheta_0 \tag{125.9}$$

Each of the three cases considered in this section corresponds to a particular method of averaging the diffraction pattern. The dependence of the total averaged diffraction intensity on the volume of the body reduces, as we should expect, to a simple proportionality. In the pattern which is not averaged, the intensity and its distribution over the spot depend more markedly on the volume.

[0]† Corresponding to Bragg's method (the rotation method) in X-ray analysis. The rotation referred to is that of the crystal about 1 , not that of the direction of k.

‡ Corresponding to Debye and Scherrer's method (the powder method) in X-ray analysis.

12.8.4 §126. Diffuse thermal scattering of X-rays

In §§124 and 125 we have taken $n(x, y, z)$ to be the time-averaged electron density in the crystal: various density oscillations were thereby excluded, and consequently so was the corresponding (non-coherent) scattering of X-rays. One cause of non-coherent scattering is the thermal fluctuations of density. This scattering is diffusely distributed in all directions, but it is characterized by a relatively high intensity near directions corresponding to the sharp lines of the structural scattering described in the preceding sections. Here we shall discuss these maxima of the thermal scattering (W. H. Zachariasen, 1940).

The thermal oscillations of the crystal lattice can be represented as combinations of sound waves. As we shall see, the maxima of the thermal scattering arise from wavelengths large compared with the lattice constant. The change in the electron density due to such a wave can be regarded, at any point, as due to a simple displacement of the lattice by an amount equal to the local value of the displacement vector $\mathbf{u}$ in the wave. Thus the change in the density (not averaged with respect to time) when a given sound wave passes can be expressed in terms of the mean density by

$$\delta n = n(\mathbf{r} - \mathbf{u}) - n(\mathbf{r}) \cong -\mathbf{u} \cdot \partial n / \partial \mathbf{r}$$

In considering diffuse scattering near a given line, we must replace n by $n_\mathrm{b} \exp(i\ \mathrm{b} \cdot \mathbf{r})$ with the appropriate b, so that

$$\delta n = -i\mathbf{b} \cdot \mathbf{u} n_\mathbf{b} \exp(i\mathbf{b} \cdot \mathbf{r}). \tag{126.1}$$

The scattering by density fluctuations is, of course, not coherent with that by the mean density, and the two therefore do not interfere. Hence the cross-section for diffuse scattering can be obtained from (124.10), substituting δn for n and then carrying out the statistical averaging over fluctuations:

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 |n_\mathrm{b}|^2 \left(1 + \cos^2\vartheta\right) \langle | \int \mathbf{b} \cdot \mathbf{u} \exp(-i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}) \mathrm{d}V \Big|^2 \Big\rangle \, \mathrm{d}o', \tag{126.2}$$

where $\mathbf{K} = \mathbf{k}' - \mathbf{k} - \mathbf{b}$. The scattered intensity is large for directions where $K \ll b$. The integral $\int \mathbf{u} \exp(-i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}) \mathrm{d}V$ gives the Fourier space component of $\mathbf{u}$ whose wave vector is $\mathbf{K}$, and we can therefore take $\mathbf{u}$ to be simply the displacement vector in a sound wave having this wave vector. The inequality $K \ll b$ thus implies that the wavelength of the scattering sound wave is large compared with the dimension of the crystal lattice cell.

Thus we can put

$$\mathbf{u} = \frac{1}{2}\left[\mathbf{u}_0 \exp(i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}) + \mathbf{u}_0^* \exp(-i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r})\right] \tag{126.3}$$

so that $\int (\mathbf{b} \cdot \mathbf{u}) \exp(-i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}) \mathrm{d}V = \frac{1}{2} V \mathbf{b} \cdot \mathbf{u}_0$ and the cross-section is

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{8}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 |n_\mathrm{b}|^2 \left(1 + \cos^2\vartheta\right) b_i b_k \langle u_{0i} u_{0k} \rangle V^2 \, \mathrm{d}o' \tag{126.4}$$

The products of the components of $\mathbf{u}_0$ are averaged as in §123 for a sound wave in an isotropic medium. The elastic energy per unit volume of a deformed crystal is $\frac{1}{2}\lambda_{iklm} u_{ik} u_{lm}$, where u_{ik} is the strain tensor and λ_{iklm} the elastic modulus tensor (see TE, §10). Hence the mean elastic energy of the whole crystal is $\frac{1}{2} V \lambda_{iklm} \langle u_{ik} u_{lm} \rangle$. We substitute

$$u_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\,\mathrm{re}\,\{(iK_k u_{0i} + iK_i u_{0k})\exp(i\mathbf{K}\cdot\mathbf{r})\}$$

The terms containing $\exp(\pm 2i\mathbf{K}\cdot\mathbf{r})$ give zero on averaging. Using also the symmetry of the tensor λ_{iklm} with respect to interchange of i,k, or l,m, or i,k and l,m, we obtain $\frac{1}{4}V\lambda_{iklm}K_kK_m\langle u_{0i}u_{0l}{}^*\rangle$ or $\frac{1}{4}Vg_{ik}\langle u_{0i}u_{0k}{}^*\rangle$, where

$$g_{ik} = \lambda_{ilkm}K_lK_m \tag{126.5}$$

According to the general theory of thermodynamic fluctuations, we can at once write down the required mean values: †

$$\langle u_{0i}u_{0k}^*\rangle = (4T/V)g_{ik}^{-1} \tag{126.6}$$

where $g^{-1}{}_{ik}$ is the tensor inverse to g_{ik}, and the scattering cross-section is

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{2}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 TV\,|n_\mathrm{b}|^2\left(1+\cos^2\vartheta\right)b_ib_kg^{-1}{}_{ik}\;\mathrm{d}o' \tag{126.7}$$

Thus the diffusely scattered intensity is, as we should expect, proportional to the volume of the crystal. A characteristic feature of this scattering is the way in which its intensity is distributed over the area of the spot. Apart from the factor $1+\cos^2\vartheta$, which is almost

constant for a given spot, the intensity is given by the expression $g^{-1}{}_{ik}b_ib_k$. This expression is the product of $1/K^2$ and a fairly involved function of the direction of the vector K with respect to the crystal axes. For scattering near a principal maximum the diffusely scattered intensity is itself a maximum where $K=0$ (the expression (126.7) becomes infinite for $\mathbf{K}=0$ and is, of course, invalid). If the condition (124.15) $2\mathbf{b}\cdot\mathbf{k} = -b^2$ is not satisfied, however, K cannot be zero, and the maximum of the diffusely scattered intensity lies at some K different from zero, which in general does not coincide with the maximum of the structural scattering. In either case the diffuse scattering forms a background whose intensity falls off essentially as $1/K^2$, that is, considerably more slowly than the intensity in the sharp structural-scattering line superposed upon it.

12.8.5 §127. The temperature dependence of the diffraction cross-section

Let us now calculate the temperature dependence of the cross-section for coherent scattering of X-rays. This amounts to determining the temperature dependence of the microscopic electron density in the crystal averaged with allowance for the thermal motion of the atoms.

We shall assume the atoms to be so heavy that the majority of their electrons are localized in non-overlapping shells which are only slightly deformed by the lattice vibrations. We shall also assume that the lattice consists of atoms of only one kind, with one atom in each unit cell; it must be emphasized that this assumption has no fundamental significance, and is made only to simplify the writing of the formulae.

The exact (not averaged) microscopic electron density may then be expressed as

[0]† See *SP*1, §111. If the probability distribution for fluctuating quantities $x_1, x_2, \ldots$ is of the form $\exp\left(-\frac{1}{2}\lambda_{ik}x_ix_k\right)$, then $\langle x_ix_k\rangle = \lambda^{-1}{}_{ik}$ A factor 2 in (126.6) appears because each of the complex u_{0i} involves two independent quantities.

$$n(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{n}} F\left(\mathbf{r} - \mathbf{r_n}\right) = \sum_{\mathbf{n}} F\left(\mathbf{r} - \mathbf{r_{n0}} - \mathbf{u_n}\right), \tag{127.1}$$

where $F(\mathbf{r})$ is the electron density in a single atom (the atomic form factor); the summation is taken over all the atoms in the lattice, and $\mathbf{r_n}$ are the position vectors of the nuclei, labelled by the vector suffix $\mathbf{n}$ (with integral components). Denoting the equilibrium position vectors of the nuclei (at the lattice sites) by $\mathbf{r_{n0}}$ and the displacement vectors of the atoms from these positions by $\mathbf{u}_n$, we have $\mathbf{r}_n = \mathbf{r}_{n0} + \mathbf{u}_n$, as used in the second equation (127.1).

Expanding the density (127.1) as a Fourier series (124.12) in the volume V of the lattice, we can write the expansion coefficients as

$$n_{\mathrm{b}} = \frac{1}{V} \sum_{\mathrm{n}} \exp\left[-i\left(\mathbf{r}_{\mathrm{m0}} + \mathbf{u}_{\mathrm{n}}\right) \cdot \mathbf{b}\right] F_{\mathrm{b}}$$

where

$$F_{\mathbf{b}} = \int F(\mathbf{r}) \exp(-i\mathbf{b} \cdot \mathbf{r}) \mathrm{d}V \tag{127.2}$$

are the Fourier components of the atomic form factor. All the products $\mathbf{r_{n0}} \cdot \mathbf{b}$ are integral multiples of 2π. Hence all the factors $\exp\left(-i\mathbf{r_{n0}} \cdot \mathbf{b}\right) = 1$, and so

$$n_{\mathrm{b}} = \left(F_{\mathrm{b}}/\nu\right) \sum_{\mathrm{n}} \exp\left(-i\mathbf{u}_{\mathrm{n}} \cdot \mathbf{b}\right) \tag{127.3}$$

This expression can now be averaged over the motion of the atoms It is evident that the mean values of the terms in the sum do not depend on $\mathbf{n}$. Hence

$$\langle n_{\mathbf{b}} \rangle = \left(F_{\mathbf{b}}/v\right) \langle \exp(-i\mathbf{b} \cdot \mathbf{u}) \rangle, \tag{127.4}$$

where $\mathbf{u}$ is the displacement vector of any atom, and $v = V/N$ is the unit cell volume (N being the number of cells in the volume V). The averaging in (127.4) is to be taken as a complete statistical averaging, i.e. over the wave functions of the stationary states and then over the Gibbs distribution.

To carry out this averaging, we have to regard $\mathbf{u}$ as a quantum-mechanical operator

$$\hat{\mathbf{u}} = \sum_{\mathbf{k},\alpha} \left(\frac{\hbar}{2MN\omega_\alpha(\mathbf{k})}\right)^{1/2} \left\{\hat{c}_{\mathbf{k}\alpha}\mathbf{e}_{\mathbf{k}\alpha} \exp\left(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r_n}\right) + \hat{c}_{\mathbf{k}\alpha}{}^{+}\mathbf{e}_{\mathbf{k}\alpha}{}^{*} \exp\left(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r_n}\right)\right\}; \tag{127.5}$$

see SP 1, §72. The summation is taken over all values of the phonon wave vector $\mathbf{k}$ (in the volume V) and over the independent phonon polarizations labelled by $\alpha = 1, 2, 3; \omega_\alpha(\mathbf{k})$ are the phonon frequencies, $\mathbf{e}_{\mathbf{k}\alpha}$ the phonon polarization vectors, and M the atomic mass; $\hat{c}_{\mathbf{k}\alpha}$ and $\hat{c}_{\mathbf{k}\alpha}{}^{+}$are the annihilation and creation operators for phonons in the states $\mathbf{k}, \alpha$.

For operators having the form (127.5), Wick's theorem holds: the average product of any even number of operators is equal to the sum of all possible products of pair means (the average product of an odd number of operators is zero). † An essential result here is

$$\langle \exp \hat{L} \rangle = \exp\left(\frac{1}{2}\left\langle \hat{L}^2 \right\rangle\right) \tag{127.6}$$

which is valid for any operator $\hat{L}$ satisfying Wick's theorem; its correctness is easily seen by expanding $\exp \hat{L}$ in series and averaging each term in the expansion. ‡

Applying (127.6) to (127.4), we obtain

$$\langle n_{\mathbf{b}} \rangle = (F_{\mathbf{b}}/v) \exp\left\{ -\frac{1}{2} \left\langle (\mathbf{b}\cdot\mathbf{u})^2 \right\rangle \right\}.$$

The diffraction cross-section is proportional to the square of this quantity, and its temperature dependence is therefore given by the separate factor

$$D = \exp\left\{ -\left\langle (\mathbf{b}\cdot\mathbf{u})^2 \right\rangle \right\}, \tag{127.7}$$

called the Debye-Waller factor (P. Debye, 1912; I. Waller, 1925).
It remains to calculate the mean square $\langle (\mathbf{b}\cdot\mathbf{u})^2 \rangle$. Of all the products of pairs of operators $\hat{c}_{\mathbf{k}\alpha}, \hat{c}_{\mathbf{k}\alpha}{}^+$, the only non-zero mean values are

$$\left\langle \hat{c}_{\mathbf{k}\alpha}{}^+ \hat{c}_{\mathbf{k}\alpha} \right\rangle = N_{\mathbf{k}\alpha}, \quad \left\langle \hat{c}_{\mathbf{k}\alpha} \hat{c}_{\mathbf{k}\alpha}{}^+ \right\rangle = N_{\mathbf{k}\alpha} + 1,$$

where $N_{\mathrm{k}\alpha}$ are the mean phonon state occupation numbers in equilibrium. Hence

$$\begin{aligned} \left\langle (\mathbf{b}\cdot\mathbf{u})^2 \right\rangle &= \sum_{\mathbf{k},\alpha} \frac{\hbar}{2MN\omega_\alpha(\mathbf{k})} \left| \mathbf{e}_{\mathbf{k}\alpha}\cdot\mathbf{b} \right|^2 \left\langle \hat{c}_{\mathbf{k}\alpha} \hat{c}_{\mathbf{k}\alpha}{}^+ + \hat{c}_{\mathbf{k}\alpha}{}^+ \hat{c}_{\mathbf{k}\alpha} \right\rangle \\ &= \sum_{\mathbf{k},\alpha} \frac{\hbar}{MN\omega_\alpha(\mathbf{k})} \left| \mathbf{b}\cdot\mathbf{e}_{\mathbf{k}\alpha} \right|^2 \left(N_{\mathbf{k}\alpha} + \frac{1}{2} \right) \end{aligned}$$

The numbers $N_{\mathbf{k}\alpha}$ are given by the Bose distribution

$$N_{\mathbf{k}\alpha} = \left[\exp\left\{ h\omega_\alpha(\mathbf{k})/T \right\} - 1 \right]^{-1} \tag{127.8}$$

$$\left\langle \hat{L}^{2n} \right\rangle = \left[(2n-1)(2n-3)\ldots 1 \right] \left\langle \hat{L}^2 \right\rangle^n$$

On substitution in (127.7), the term involving the zero-point vibrations gives a factor independent of temperature, which may be omitted (or rather, included in the definition of F_b). Finally, changing from summation over $\mathbf{k}$ to integration over $V\ \mathrm{d}^3k/(2\pi)^3$, we have

$$D = \exp\left\{ -\frac{\hbar v}{M} \sum_a \int \frac{\left| \mathbf{b}\cdot\mathbf{e}_{\mathbf{k}\alpha} \right|^2}{\omega_\alpha(\mathbf{k})} N_{\mathbf{k}\alpha} \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3} \right\}. \tag{127.9}$$

As $T \to 0$, $N_{\mathrm{k}x}$ tends to zero, and accordingly D tends to unity; as the temperature increases, D becomes smaller. The effect of the temperature amounts to a general lowering of the scattered line intensity, with no change in the shape or width of the line.

The mean thermal displacement of the atoms from the lattice sites is usually small, even at high temperatures, in comparison with the lattice constant. The exponent in D, for scattering lines with only slight changes in $\mathbf{b}$, is then much less than unity, and the temperature effect is a small correction. The decrease in intensity becomes considerable, however, for scattering lines which correspond to large $\mathbf{b}$.

For temperatures much higher than the Debye temperature, $\langle \mathbf{u}^2 \rangle \propto T$, and the exponent in D is also proportional to T. At low temperatures, the thermal phonons belong mainly to the acoustic branches of the spectrum, for which $\omega \propto k$; in this case, the integration over ω in (127.9) can be extended to infinity, and the exponent is then proportional to T^2.

[0]† The theorem is proved in $SP2$, §13, for the "macroscopic limit" ($N \to \infty$), corresponding to the application in statistical physics.
‡ The product of an even number $2n$ of factors $\hat{L}$ can be resolved into pairs in $(2n-1)(2n-3)\ldots 1$ ways (having chosen one of the $2n$ factors, we can "pair" it with any of the other $2n-1$ factors; then choosing one of the remaining $2n-2$ operators, we can pair it in $2n-3$ ways and so on). Hence

At low temperatures, when only the long-wavelength phonons are important, the validity of formulae (127.7)-(127.9) does not depend on the possibility of expressing the density $n(\mathbf{r})$ as the sum over atoms (127.1). In long-wavelength vibrations, large regions of the lattice move as a whole with their respective electron density values, and only on this does the derivation of the formulae in question depend.

12.9 Other Scatterings

12.9.1 Mie scattering (on a sphere) (??)

(??????????????????)

13 Extra Theory about Wave Propagation in Media by Batygin Toptygin

13.1 12 Propagation of Electromagnetic Waves

12.1. Поперечные волны в изотропных средах. Отражение и преломление волн

Электромагнитные волны в вакууме представляют собой колебания напряженностей электрического и магнитного полей, которые происходят в отсутствие источников излучения. Свойства волн в вакууме были рассмотрены в разделе 2.3 . В веществе колебаниям напряженностей поля сопутствуют колебания заряженных частиц - электронов и ионов вещества. Поэтому колебательные процессы становятся более разнообразными. В частности, в общем случае в средах электромагнитные волны непоперечны - векторы поля могут иметь как поперечные относительно направления распространения, так и продольные компоненты.

Собственные колебания в изотропной среде. Собственные колебания среды можно исследовать с помощью системы уравнений Максвелла (11.25)-(11.28), положив в ней $\rho_{\text{ext}} = \boldsymbol{j}_{\text{ext}} = 0$. После исключения вектора $\boldsymbol{B}$ получим уравнение

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{E} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathscr{D}}{\partial t^2} \tag{12.1}$$

которое надо дополнить уравнением связи между векторами $\mathscr{D}$ и $\boldsymbol{E}$. В случае однородной среды используем уравнение (11.34), связывающее гармоники Фурье этих векторов:

$$\mathscr{D}_\alpha(\boldsymbol{k},\omega) = \epsilon_{\alpha\beta}(\boldsymbol{k},\omega)E_\beta(\boldsymbol{k},\omega). \tag{1.2}$$

Преобразовав по Фурье уравнение (12.1), получим с помощью (12.2) систему однородных алгебраических уравнений относительно компонент поля:

$$\left[k^2\delta_{\alpha\beta} - k_\alpha k_\beta - \frac{\omega^2}{c^2}\epsilon_{\alpha\beta}(\boldsymbol{k},\omega)\right] E_\beta(\boldsymbol{k},\omega) = 0$$

Ненулевое решение системы возможно только при равенстве нулю ее определителя:

$$\left|k^2\delta_{\alpha\beta} - k_\alpha k_\beta - \frac{\omega^2}{c^2}\epsilon_{\alpha\beta}(\boldsymbol{k},\omega)\right| = 0 \tag{12.4}$$

Уравнение (12.4) связывает частоту и волновой вектор собственных мод среды и называется дисперсионным уравнением волн в среде. При нахождении явного вида

дисперсионной зависимости задают либо волновой вектор, либо частоту и определяют другую величину из дисперсионного уравнения. Первый случай реализуется, когда волновой вектор определен геометрией тел (например, граничными условиями в кусочно-неоднородной среде). Тогда дисперсионное уравнение позволяет найти частоту $\omega(\boldsymbol{k})$, вообще говоря, комплексную ввиду комплексности $\epsilon_{\alpha\beta}$. Но в областях прозрачности среды мнимая часть диэлектрической проницаемости может быть пренебрежимо малой. Если поле создается внешним монохроматическим источником, то задается его частота ω, а волновой вектор $k(\omega)$ определяется из дисперсионного уравнения и некоторых дополнительных условий (симметрия, условия на границах и др.). При этом волновой вектор в общем случае тоже комплексный,

$$\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}' + i\boldsymbol{k}'' \tag{12.5}$$

причем действительные векторы $\boldsymbol{k}', \boldsymbol{k}''$ могут иметь разные направления. Такие плоские волны называются неоднородными. Их направления распространения и затухания не совпадают.

Как правило, в среде существует несколько ветвей колебаний, которые определяются уравнением дисперсии и граничными условиями. Каждой ветви соответствует своя поляризация (соотношение между компонентами вектора $\boldsymbol{E}$), которые определяются из системы (12.3). Способы анализа поляризаций изложены в разделе 2.3. Магнитный вектор можно найти из уравнения (11.41):

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{k},\omega) = \frac{c}{\omega}\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{k},\omega) \tag{12.6}$$

В изотропных средах поперечные и продольные колебания могут существовать раздельно. Дисперсионные уравнения для них были получены в разделе 11.1 (формулы (11.56)-(11.58)):

$$\varepsilon_l(\boldsymbol{k},\omega) = 0, \quad \omega^2\varepsilon_t(\boldsymbol{k},\omega) = c^2k^2$$
$$\text{либо} \quad \varepsilon(\boldsymbol{k},\omega) = 0, \quad \omega^2\varepsilon(\boldsymbol{k},\omega)\mu(\boldsymbol{k},\omega) = c^2k^2.$$

Дисперсионные зависимости для продольных волн в некоторых средах рассмотрены в задачах (11.44)-(11.48).

Групповая скорость. Зависимость частоты от волнового вектора у электромагнитных волн в диспергирующих средах имеет более сложный характер, чем прямая пропорциональность $\omega(k) = ck$ у волн в вакууме. Поэтому фазовые скорости волн $v_{ph}(\boldsymbol{k}) = \omega(\boldsymbol{k})/k$ зависят от длины волны (или от частоты), т. е. разные гармоники Фурье распространяются с разными скоростями. Это приводит к тому, что волновые пакеты в диспергирующей среде (в отличие от вакуума, см. задачу 2.127) не сохраняют своей формы, а скорость переноса энергии не совпадает с фазовой скоростью.

Пример 12.1. Показать, что квазимонохроматический ($\Delta\omega \ll \omega$) пакет волн распространяется в диспергирующей прозрачной среде с групповой скоростью

$$\boldsymbol{v}_g = \frac{d\omega(\boldsymbol{k})}{d\boldsymbol{k}} \tag{12.8}$$

Показать также, что скорость переноса энергии пакетом волн в среде без пространственной дисперсии совпадает с групповой скоростью.

Решение. Необходимо оценить интеграл вида

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = \int \boldsymbol{a}(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q})\exp[i(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q})\cdot\boldsymbol{r} - i\omega(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q})t]\frac{d^3q}{(2\pi)^3} \tag{1}$$

по области значений $|\boldsymbol{q}| \leqslant \Delta k$, где $\Delta k \ll k, \omega(\boldsymbol{k})$ - дисперсионная зависимость для рассматриваемых волн. Произведем разложение частоты с точностью до линейных членов:

$$\omega(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}) \approx \omega(\boldsymbol{k}) + \frac{d\omega}{d\boldsymbol{k}} \cdot \boldsymbol{q} = \omega + \boldsymbol{v}_g \cdot \boldsymbol{q} \tag{2}$$

Подстановка этого разложения в (1) дает

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{v}_g t\right) \exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - i\omega t) \tag{3}$$

где $\boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{v}_g t\right) = \int \boldsymbol{a}(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q}) \exp\left[i\boldsymbol{q}\cdot(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{v}_g t)\right] \frac{d^3q}{(2\pi)^3}$.
Мы получили плоскую волну с медленно меняющейся амплитудой. Ширина пакета в координатном пространстве порядка $1/\Delta k$ (см. задачу 2.40). В рассмотренном приближении пакет не меняет своей формы и перемещается в пространстве с групповой скоростью $\boldsymbol{v}_g$. Расплывание пакета происходит при учете следующих членов разложения частоты по $\boldsymbol{q}$ (см. задачу 12.6).

Скорость переноса энергии $\boldsymbol{v}$ вычислим по формуле $\boldsymbol{v} = \gamma/w$, где γ - плотность потока энергии, w - плотность энергии, усредненные по
времени. Они даются выражениями (11.110). Магнитный вектор вычисляем из закона электромагнитной индукции, считая медленно меняющуюся амплитуду постоянной. Получим

$$\boldsymbol{H} = \frac{c}{\omega\mu}\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}, \quad \gamma = \frac{c^2\boldsymbol{k}}{8\pi\omega\mu}\boldsymbol{E}^*\cdot\boldsymbol{E}$$
$$w = \frac{1}{16\pi}\left[\frac{d}{d\omega}(\omega\varepsilon(\omega)) + \frac{\varepsilon}{\mu}\frac{d}{d\omega}(\omega\mu(\omega))\right]\boldsymbol{E}^*\cdot\boldsymbol{E} \tag{4}$$

Из этих соотношений находим

$$\boldsymbol{v} = \frac{c}{\frac{d}{d\omega}\omega\sqrt{\varepsilon(\omega)\mu(\omega)}}\frac{\boldsymbol{k}}{k} = \boldsymbol{v}_g \tag{5}$$

На последнем этапе преобразований нужно использовать уравнение дисперсии $\omega^2\varepsilon\mu = c^2k^2$.

Математическую теорию распространения узкополосных импульсов в диспергирующих средах, основанную на разложении Фурье (к сожалению, без должного числа физических примеров) можно найти в монографии Вайнштейна и Вакмана (1983). Анализ коротких электромагнитных импульсов в диспергирующих средах, основанный на точных решениях без использования разложений Фурье, см. в [Шварцбург (1998)].

Отражение и преломление волн на границе двух сред.

Пример 12.2. На плоскую границу раздела двух прозрачных диэлектриков с проницаемостями $\varepsilon_1(\omega), \mu_1 = 1$ и $\varepsilon_2(\omega), \mu_2 = 1$ падает под заданным углом θ_0 к нормали (рис. 12.1а) плоская монохроматическая волна с произвольной поляризацией. Из граничных условий найти частоты, направления распространения и амплитуды отраженной и преломленной волн. Найти также коэффициент отражения R - долю энергии падающей волны, переходячую отраженной волне. Какому условию должна удовлетворять толщина переходного слоя δ, чтобы ею можно было пренебречь и считать равной нулю?

Решение. На границе сред ($z = 0$) должны выполняться граничные условия:

$$E_{0\tau} + E_{1\tau} = E_{2\tau}, H_{0\tau} + H_{1\tau} = H_{2\tau} \tag{1}$$

где индексы $0, 1, 2$ относятся к падающей, отраженной и преломленной волнам соответственно. Волновой вектор отраженной волны должен быть направлен в глубь первой среды, а волновой вектор преломленной волны -

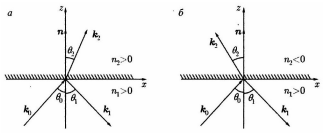


Рис. 12.1

в глубь второй среды. Поскольку каждое из полей содержит множитель $\exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - i\omega t)$ с соответствующими $\boldsymbol{k}$ и ω, то из необходимости выполнения граничных условий в любой точке плоскости $z = 0$ и в любой момент времени получаем равенство частот и одноименных компонент волнового вектора у всех трех волн: $\omega_0 = \omega_1 = \omega_2 = \omega; k_{0x} = k_{1x} = k_{2x}$ (выбираем систему координат так, чтобы было $k_y = 0$). Использовав дисперсионное соотношение (12.7), находим $n_1 \sin\theta_0 = n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$, где $n_1 = \sqrt{\varepsilon_1}, n_2 = \sqrt{\varepsilon_2}$ - коэффициенты преломления, и получаем законы отражения и преломления Снеллиуса

$$\theta_1 = \theta_0, \quad \frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_0} = \frac{n_1}{n_2} \tag{12.9}$$

Эти соотношения выполняются при любой поляризации падающей волны. Если $\mu \neq 1$, то коэффициент преломления определяется как $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$.

Для вычисления амплитуд отраженной и преломленной волн разложим падающую волну на две, из которых у одной вектор $\boldsymbol{E}$, а у другой вектор $\boldsymbol{H}$ параллельны границе раздела (и перпендикулярны плоскости, в которой лежат волновые векторы всех трех волн). Из граничных условий (1) выражаем амплитуды отраженной и преломленной волн через амплитуду падающей волны (формулы Френеля). В первом случае записываем их для вектора E, во втором - для H:

$$E_1 = \frac{\sin(\theta_2 - \theta_0)}{\sin(\theta_2 + \theta_0)} E_0, \quad E_2 = \frac{2\sin\theta_2\cos\theta_0}{\sin(\theta_2 + \theta_0)} E_0 \tag{12.10}$$

$$H_1 = \frac{\operatorname{tg}(\theta_0 - \theta_2)}{\operatorname{tg}(\theta_0 + \theta_2)} H_0, \quad H_2 = \frac{\sin 2\theta_0}{\sin(\theta_0 + \theta_2)\cos(\theta_0 - \theta_2)} H_0 \tag{12.11}$$

Коэффициенты отражения вычисляем как отношение нормальных к границе сред компонент плотности потока энергии в отраженной и падающей волнах, обозначая их через $R_\perp$ и $R_\parallel$(индексы характеризуют ориентацию поля $\boldsymbol{E}$ относительно плоскости падения). Используем формулу (11.110) для вектора Пойнтинга:

$$R_\perp = \frac{\sin^2(\theta_0 - \theta_2)}{\sin^2(\theta_0 + \theta_2)}, \quad R_\parallel = \frac{\operatorname{tg}^2(\theta_0 - \theta_2)}{\operatorname{tg}^2(\theta_0 + \theta_2)} \tag{12.12}$$

Анализ полученных соотношений см. в задаче 12.9•. Они выполняются, если толщина границы много меньше длин волн в обеих средах: $\delta \ll \lambda_1, \lambda_2$.

Во всех полученных выше формулах коэффициент преломления определен как положительная величина: $n > 0$. Но в конце $90-$ годов прошлого века были созданы и исследованы экспериментально и теоретически композитные материалы (периодические структуры), обладающие отрицательным коэффициентом преломления. В длинноволновом пределе их можно рассматривать как изотропные среды с

$\varepsilon < 0, \mu < 0, n = -\sqrt{\varepsilon\mu} < 0$. Поскольку $\boldsymbol{B} = \mu\boldsymbol{H}$, то из (12.6) следует, что при $\mu > 0$ (т. е. в обычных средах) векторы $\boldsymbol{k}, \boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}$ образуют правую тройку. При $\mu < 0$ они образуют левую тройку, т. е. при заданных $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}$ направления волнового вектора и определяемой им фазовой скорости меняются на противоположные. В то же время направление потока энергии и групповой скорости определяются вектором Пойнтинга $\gamma = (c/4\pi)\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}$, который всегда образует правую тройку с $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$. Поэтому в изотропных средах с $n > 0$ (обычных, «правых») фазовая и групповая скорости направлены одинаково, а в средах с $n < 0$ («левых») эти две скорости направлены противоположно. Расположение падающего и отраженного лучей на границе раздела правой и левой сред также изменяются по сравнению с обычным случаем (см. рис. 12.1б). Падающий и преломленный лучи теперь расположены по одну сторону от нормали к границе. Формула (12.9) остается в силе, по при $n_2 < 0$ угол преломления $\theta_2 < 0$, т. е. должен откладываться в другую сторону. В левой среде поток энергии направлен, как и в обычном случае, от границы раздела, но фазовая скорость направлена к границе. Другие весьма необычные свойства левых сред и их возможные применения в технике обсуждаются в работах Веселаго (2003), Блиоха и Блиоха (2004). Мы ниже будем рассматривать только обычные среды.

Пример 12.3. Плоская монохроматическая волна падает наклонно из области, занятой прозрачным диэлектриком с проницаемостями $\varepsilon_1, \mu_1 = 1$
на границу проводящей среды ($\mu = 1, \varepsilon = \varepsilon' + i\varepsilon''$). Найти закон преломления, т. е. направление распространения, направление затухания и фазовую скорость волны в проводящей среде.

Решение. В проводящей среде имеем $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}' + i\boldsymbol{k}''$, где $\boldsymbol{k}', \boldsymbol{k}''$ - действительные векторы. Обозначив действительные углы между этими векторами и нормалью через θ, ϑ, из сравнения показателей экспонент всех трех волн найдем равенства

$$\theta_1 = \theta_0, \quad k_1 \sin\theta_0 = k' \sin\theta + ik'' \sin\vartheta \tag{1}$$

Отсюда находим $\sin\theta = k_1/k', \vartheta = 0$ (значение $\vartheta = \pi$ не подходит ввиду условия ограниченности полей в проводящей среде). Таким образом, вектор $\boldsymbol{k}''$ направлен по нормали в глубь проводящей среды. Остается выразить величины k', k'' через $\varepsilon, \varepsilon_1, \theta_0$.

Это достигается с помощью уравнения дисперсии

$$k^2 \equiv k'^2 - k''^2 + 2ik'k'' \cos\theta = \frac{\omega^2}{c^2}(\varepsilon' + i\varepsilon'') \tag{2}$$

Приравнивая действительные и мнимые части, находим

$$k''^2 = \frac{\omega^2}{2c^2}\left[(\varepsilon_1 \sin\theta_0 - \varepsilon') + \sqrt{(\varepsilon_1 \sin\theta_0 - \varepsilon')^2 + \varepsilon''^2}\right] > 0, k'^2 = k''^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon' > 0 \tag{3}$$

Плоская волна в проводящей среде неоднородна (рис. 12.2): $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{E}_2 e^{-k''z} \exp(ik'x \sin\theta + ik'z \cos\theta - -i\omega t)$. Поверхность постоянной фазы перемещается в направлении вектора $\boldsymbol{k}'$ с фазовой скоростью $v_{ph} = \omega/k'$, зависящей от частоты и угла падения волны на границу проводника. Глубина проникновения поля в проводник $\delta = 1/k''$ также зависит от этих величин. Комплексная амплитуда $\boldsymbol{E}_2$ на границе выражается с помощью граничных условий через амплитуду падающей волны.

Граничное условие Леонтовича. Рассмотрим область частот, в которой

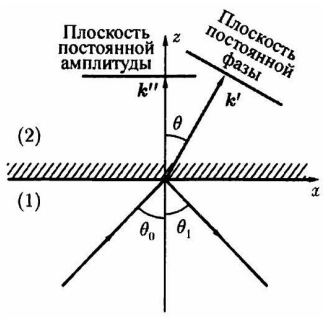


Рис. 12.2

$\sqrt{\varepsilon''} \gg \sqrt{\varepsilon'}, \sqrt{\varepsilon_1}$ (это условие выполняется для металлов в широком диапазоне). При этом $k' \approx k'' \approx \omega\sqrt{\varepsilon''}/2c, \sin\theta = k_1/k' \ll 1$, т. е. направления $\boldsymbol{k}'$ и $\boldsymbol{k}''$ приблизительно совпадают, волна в проводящей среде становится однородной, она распространяется и затухает в одинаковых направлениях, по нормали вглубь среды. Если $\mu \neq 1$, то $k'' \approx \omega\sqrt{\varepsilon''\mu}/2c$. Векторы поля внутри проводящей среды связаны соотношением, следующим из уравнения Максвелла:

$$\boldsymbol{E} = -(1+i)\frac{ck''}{\varepsilon\omega}\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{H} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\boldsymbol{H} \times \boldsymbol{n}$$

где $\varepsilon = i\varepsilon'', \boldsymbol{n}$ - единичный вектор нормали. В это соотношение входят только тангенциальные компоненты полей. В силу их непрерывности на границе сред таким же соотношением связаны тангенциальные компоненты в прозрачной среде на границе независимо от угла падения волны:

$$\boldsymbol{E}_\tau = \zeta \boldsymbol{H}_\tau \times \boldsymbol{n} \quad \text{на} \quad S, \quad \text{где} \quad \zeta = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \tag{12.13}$$

- поверхностный импеданс, относящийся к проводящей среде. Поэтому соотношение (12.13) можно использовать как приближенное граничное условие при решении внешней по отношению к проводнику задачи (граничное условие Леонтовича). Это условие применимо при $|\zeta| \ll 1$ не только к плоской, но и к искривленной поверхности при условии, что локальный радиус кривизны велик по сравнению с глубиной $\delta = 1/k''$ проникновения поля в проводник. Последняя величина играет роль длины волны в проводящей среде.

Аномальный скин-эффект в металлах. Глубина проникновения поля в металл

$$\delta = c/\sqrt{2\pi\mu\kappa_0\omega} \tag{12.14}$$

найденная в главе 10 (формула (10.17)) и в задаче 12.20°, соответствует нормальному скин-эффекту. Это означает, что $\omega \ll \gamma$ или $\omega\tau \ll 1$, где $\tau = 1/\gamma$ - время свободного пробега электрона. Кроме того, при нормальном скин-эффекте применим обычный закон Ома $\boldsymbol{j} = \kappa_0\boldsymbol{E}$: ток определяется локальным значением поля. Такая зависимость предполагает однородность электрического поля на расстояниях порядка длины свободного пробега $\Lambda \approx v_F\tau$, где v_F - скорость электронов на поверхности Ферми. Это означает, что должно выполняться неравенство $\Lambda \ll \delta$. Но глубина проникновения уменьшается с ростом частоты, а свободный пробег растет с уменьшением температуры. Так, при гелиевой температуре ($T \approx 4K$) на сантиметровых волнах в чистых металлах $\delta \approx 10^{-6}$ см, $\Lambda \approx 10^{-2}$ см. Выполняется
условие $\Lambda \gg \delta$, при котором лишь малая часть электронов, пришедших в данную точку после последнего столкновения, испытала на себе действие электрического поля (см.

рис. 12.3). Это - случай, когда пространственная дисперсия очень существенна (аномальный скин-эффект).

Последовательное вычисление поля в металле в случае аномального скин-эффекта можно найти в книге [Бредов и др., Классическая электроднамика]. Здесь мы ограничимся порядковой оценкой глубины проникновения на основе «концепции неэффективности» Пиппарда. При нормальном скин-эффекте ток определяется электропроводностью $\kappa_0 = \omega_{0e}^2/4\pi\gamma =$

Поверхность металла

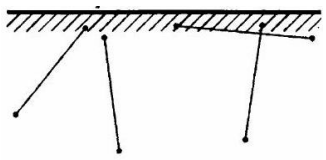


Рис. 12.3 $= Ne^2\tau/m$, где N - полная концентрация электронов проводимости. При аномальном скин-эффекте большая их часть неэффективна для создания тока. Эффективна лишь небольшая доля электронов, пробег которых лежит в заштрихованном узком слое толщиной δ у поверхности металла. Концентрацию эффективных электронов можно записать в виде $N_{ef} = aN(\delta/\Lambda)$, где a - безразмерная постоянная порядка единицы. Этому значению соответствует электропроводность $\kappa_{ef} = a\kappa_0(\delta/\Lambda)$. Подставив эту величину в формулу (12.14) и вычислив из получившегося уравнения глубину проникновения, получим

$$\delta = \left(\frac{c^2\Lambda}{2\pi a\mu\kappa_0\omega}\right)^{1/3} \propto \omega^{-1/3} \tag{12.15}$$

Два выражения для глубины проникновения, (12.14) и (12.15), сшиваются при $\omega \approx \omega_c = c^2/2\pi\mu\kappa_0\Lambda^2$.

Неоднородная среда. Наиболее разработанный метод для неоднородных сред - это приближение геометрической оптики, которое предполагает малость длины волны по сравнению со всеми другими размерами в рассматриваемой задаче. Подробное изложение этого метода можно найти в фундаментальной монографии Борна и Вольфа (1970). Ниже, в разделе 12.3, этот метод будет использован для решения задач дифракции волн. Точные же решения для неоднородных сред удается получить лишь в немногих случаях ввиду сложности соответствующих уравнений.

При $\mu = 1$ находим из (12.1) следующее уравнение для электрического поля частоты ω:

$$\Delta\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) - \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})) + \frac{\omega^2\varepsilon(\boldsymbol{r},\omega)}{c^2}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = 0 \tag{12.16}$$

Здесь масштаб L пространственной неоднородности диэлектрической проницаемости считается большим по сравнению с межатомным расстоянием: $L \gg a$. Примеры точного решения уравнения (12.16) см. в задачах $12.28^\star, 12.29^\star$.

Недавно Шварцбург(2000) предложил метод, позволяющий существенно расширить класс точно решаемых одномерных электродинамических задач для неоднородных и нестационарных сред. Ниже дается понятие о сущности этого метода.

Рассмотрим область частот, в которой несущественны временная и микроскопическая пространственная дисперсии, рассмотренные в главе 11. Среду считаем немагнитной ($\mu = 1$) и изотропной, но пространственно неоднородной:

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon(z)\boldsymbol{E}, \quad \varepsilon(z) = n_0^2U^2(z), \quad U(0) = 1 \tag{12.17}$$

где n_0 - показатель преломления при $z = 0, U(z)$ - некоторая функция, описывающая макроскопическую пространственную неоднородность среды. Эта функция пока не конкретизируется. Вместо уравнения (12.16) рассмотрим пару одномерных уравнений Максвелла, описывающих поперечное электромагнитное поле:

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = -\frac{1}{c}\frac{\partial B_y}{\partial t}, \quad -\frac{\partial B_y}{\partial z} = \frac{1}{c}\frac{\partial D_x}{\partial t} \tag{12.18}$$

Один из способов решения последней системы основан на использовании векторного потенциала, у которого отлична от нуля одна проекция $A_x \equiv A(z,t)$

$$E_x = -\frac{1}{c}\frac{\partial A}{\partial t}, \quad B_y = \frac{\partial A}{\partial z} \tag{12.19}$$

Первое уравнение (12.18) обращается в тождество, а второе дает уравнение второго порядка

$$\frac{\partial^2 A}{\partial z^2} - \frac{n_0^2 \dot{U}^2(z)}{c^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 0 \tag{12.20}$$

Далее вводим новую независимую переменную η и новые функции

$$F(\eta, t) = A(z,t)\sqrt{U(z)}, \quad Q(z) = U^{-1}(z), \quad \eta(z) = \int\limits_0^z U\left(z'\right) dz' \tag{12.21}$$

Переменная η имеет размерность координаты и при умножении на n_0 дает длину оптического пути в неоднородной среде. Уравнение (12.20) в новых переменных принимает вид

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} - \frac{n_0^2}{c^2}\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = -F\left\{\frac{1}{2}Q\frac{d^2Q}{dz^2} - \frac{1}{4}\left(\frac{dQ}{dz}\right)^2\right\} \tag{12.22}$$

Выберем теперь функцию $Q = U^{-1}$ таким образом, чтобы упростить уравнение (12.22):

$$\frac{1}{2}Q\frac{d^2Q}{dz^2} - \frac{1}{4}\left(\frac{dQ}{dz}\right)^2 = -p^2 = \text{ const} \tag{12.23}$$

Постоянная p^2 будет определена ниже. При таком выборе $Q(z)$ и гармонической зависимости поля от времени уравнение (12.22) принимает простой вид

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} + \left(\frac{n_0^2\omega^2}{c^2} - p^2\right)F = 0 \tag{12.24}$$

и имеет решение $F(\eta, t) = \exp(\pm iq\eta - i\omega t)$, а векторный потенциал представляется в виде двух бегущих волн с переменной амплитудой:

$$A(z,t) = \frac{e^{-i\omega t}}{\sqrt{U(z)}}\left(A_1 e^{iq\eta} + A_2 e^{-iq\eta}\right) \tag{12.25}$$

где $q = kN, \quad k = \frac{n_0\omega}{c}, \quad N = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}, \quad \omega_p^2 = \frac{p^2c^2}{n_0^2}$,
A_1 и A_2 - произвольные постоянные, которые определяются из граничных условий.

При $p^2 > 0$ решение (12.25) эквивалентно бегущим волнам в холодной бесстолкновительной плазме с плазменной частотой ω_p. Произведение $n_0 N$ дает коэффициент преломления такой среды, которая прозрачна для волн с частотами $\omega > \omega_p$. Но в данном случае дисперсия вызвана не реакцией электронов на приложенное

поле, а макроскопической неоднородностью среды. Частота отсечки может существенно отличаться от плазменной частоты ω_{0e} (см. пример 11.6). При $p^2 < 0$ имеет место нормальная дисперсия (коэффициент преломления убывает с ростом частоты).

Задачи.

Значения параметра p^2 и профили диэлектрической проницаемости, которые можно исследовать рассматриваемым методом, определяются путем решения уравнения (12.23). Будем искать его решение в виде полинома с действительными коэффициентами. При $Q(z) = 1$ имеем случай однородной среды: $\eta = z, p^2 = 0$. Полином первой степени запишем в виде $Q(z) = 1 \pm z/L$, где L - произвольный параметр с размерностью длины. Из (12.23) находим $p^2 = 1/4L^2$. Без затруднений определяется зависимость $\eta(z)$. Полученные соотношения можно использовать для расчета поля в неоднородной среде с диэлектрическими проницаемостями

$$\varepsilon(z) = \frac{n_0^2}{(1 \pm z/L)^2} \tag{12.26}$$

Рассмотрим также полином второй степени:

$$Q(z) = U^{-1}(z) = 1 \pm z/L_1 \pm z^2/L_2^2 \tag{12.27}$$

Здесь знаки $\pm$ могут выбираться в двух слагаемых независимо, L_1 и L_2 - произвольные длины. Из (12.22) находим $p^2 = 1/4L_1^2 \pm 1/L_2^2$. В зависимости от соотношения между L_1, L_2 и знака возможны значения $p^2 > 0, p^2 < 0$ и $p^2 = 0$. Оптический путь $\eta(z)$ для этого случая тоже вычисляется в элементарных функциях. Варьируя свободные параметры, с помощью (12.27) можно строить монотонные и немонотонные профили изменения диэлектрической проницаемости и получать для них решения электродинамических задач. Недостаток этого представления состоит в том, что неоднородный диэлектрический слой должен иметь ограниченную толщину. При достаточно больших z диэлектрическая проницаемость попадает в нефизическую область $\varepsilon(z) < 1$ (представление, свободное от этого недостатка, см. в задаче 12.30*).

Рекомендуемая литература: [Батыгин и Топтыгин, Современная электродинамика, ч. 1; Памятных и Туров (2000); Батыгин и Топтыгин (2002); Ландау и Лифшиц, Электродинамика сплошных сред; Фейнберг (1999); Бредов и др., Классическая электродинамика; Шварцбург (1998); Шварцбург (2000); Борн и Вольф (1970); Вайнштейн и Вакман (1983); Островский и Потапов (2003)].

12.1*. Плоская волна распространяется в однородной и изотропной недиспергирующей среде, в которой ε и μ не зависят от частоты и волнового вектора. Найти с помощью уравнений (12.7) дисперсионные зависимости для продольных $\omega_l(k)$ и поперечных $\omega_t(k)$ волн, а также соотношение между напряженностями электрического и магнитного полей поперечных волн и соответствующими плотностями энергий.

12.2. Найти дисперсионную зависимость для поперечных электромагнитных волн вблизи одной из резонансных частот диэлектрика, молекулы которого не имеют постоянных дипольных моментов (неполярный диэлектрик). Диэлектрическая проницаемость неполярного диэлектрика была получена в модели Лоренц-Лоренца в задаче 11.43. Найти область непрозрачности такого диэлектрика. Изобразить дисперсионные зависимости на графиках.

12.3. Найти дисперсионную зависимость для поперечных электромагнитных волн в бесстолкновительной газовой плазме (диэлектрическая проницаемость вычислена в примере 11.6 и в задаче 11.9).

12.4. Найти дисперсионную зависимость для поперечных электромагнитных волн в ионном кристалле, диэлектрическая проницаемость которого вычислена в задаче 11.49.

Найти область непрозрачности ионного кристалла. Изобразить дисперсионные зависимости на графиках.

12.5. Исследовать форму и движение волнового пакета, полученного наложением плоских волн с одинаковыми амплитудами a_0 и с волновыми векторами, лежащими в области $|\boldsymbol{k}_0 - \boldsymbol{k}| \leqslant q$ ($\boldsymbol{k}_0, q$ - постоянные). Действительный закон дисперсии $\omega(\boldsymbol{k})$ заменить приближенным соотношением $\omega(\boldsymbol{k}) = \omega(\boldsymbol{k}_0) + \boldsymbol{v}_g \cdot (\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}_0)$.

12.6. Исследовать «расплывание» одномерного волнового пакета в диспергирующей среде. Для этого выбрать амплитудную функцию в виде кривой Гаусса $a(k) = a_0 e^{-\alpha(k-k_0)^2}$ и учесть квадратичный член в разложении частоты ω по k.

12.7. Найти фазовую v_{ph} и групповую v_g скорости распространения волн в средах, диэлектрические проницаемости которых

$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_{0e}^2}{\omega^2}$ (плазма), $\varepsilon(\omega) = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2}$ (неполярный диэлектрик).

Во втором случае ограничиться рассмотрением только случаев больших и малых (по сравнению с ω_0) частот $\omega(\mu = 1)$.

12.8. В однородной плазме с концентрацией электронов N_e распространяются от одного источника два узких волновых пакета, испущенные одновременно. Несущим (центральным) частотам, которые велики по сравнению с электронной плазменной частотой $\omega_{0e} = \sqrt{4\pi N_e e^2/m_e}$, соответствуют длины волн λ_1 и λ_2. Сигналы приходят на приемник, который находится на расстоянии L от источника, в разное время, что вызвано различием их групповых скоростей. Использовав диэлектрическую проницаемость плазмы из предыдущей задачи, выразить время запаздывания Δt между приходом сигналов на приемник через их длины волн и произведение $N_e L$, которое называется в радиоастрономии мерой дисперсии (Dispersion Measure, $DM = N_e L$).

12.9. Произвести анализ формул Френеля (12.11)-(12.12) для случая прозрачных диэлектриков:

а) показать, что отраженный свет будет полностью поляризован, если угол падения $\theta_0 = \theta_p$ удовлетворяет условию $\operatorname{tg}\theta_p = n_2/n_1$ (угол полной поляризации Брюстера);

б) показать, что при падении света на оптически менее плотную среду ($n_2 < n_1$) под углом $\theta_0 = \theta_r$, где $\sin\theta_r = n_2/n_1$, преломленный свет распространяется параллельно границе; при $\theta_0 > \theta_r$ происходит полное отражение (т. е. $R = 1$ при любой поляризации падающего света; $\sin\theta_2 > 1$, а $\cos\theta_2$ становится чисто мнимой величиной);

в) показать, что при нормальном падении ($\theta_0 \to 0$) коэффициент отражения для обеих поляризаций дается формулой

$$R = \left|\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right|^2$$

г) показать, что волна испытывает полное отражение от среды, у которой $\varepsilon < 0(\mu = 1)$.

12.10. Поляризованная по кругу плоская монохроматическая волна падает наклонно на плоскую границу диэлектрика. Определить характер поляризации отраженной и преломленной волн.

12.11*. Пучок почти монохроматического неполяризованного света падает на плоскую границу диэлектрика. Найти тензоры поляризации $I_{ik}^{(1)}$, $I_{ik}^{(2)}$ и коэффициенты деполяризации ρ_1, ρ_2 отраженного и преломленного света.

12.12. Неполяризованный почти монохроматический пучок света падает на плоскую границу раздела диэлектриков. Найти коэффициент отражения R и коэффициенты деполяризации $\rho_{1,2}$ отраженного и преломленного света, если угол падения равен углу Брюстера.

12.13*. Показать, что после полного отражения от границы диэлектрика линейно поляризованная волна приобретает в общем случае эллиптичесскую поляризацию. При

каких условиях поляризация будет круговой?
12.14. Исследовать движение энергии при полном внутреннем отражении. Найти поток энергии вдоль поверхности раздела и в перпендикулярном направлении в среде, от которой происходит отражение. Определить линии вектора Пойнтинга γ.
12.15. Плоская монохроматическая волна падает на плоскую границу раздела двух диэлектриков с проницаемостями ε_1 и ε_2. Какой характер примет поле по обе стороны от границы в случае скользящего падения (угол падения $\theta_0 \to \pi/2$)?
12.16. Плоская монохроматическая волна падает на плоскую границу раздела прозрачной среды с вакуумом и частично отражается от нее с коэффициентом отражения $R(\theta)$. Вычислить давление волны на границу (световое давление), выразив его через плотность энергии в падающей волне.
12.17. Плоская монохроматическая волна падает из вакуума на плоскую границу проводящей среды, коэффициент отражения от которой $R(\theta)$ известен. Прошедшая во вторую среду волна полностью поглощается в ней. Вычислить давление, которое оказывает падающая волна на проводящую среду.
12.18*. Диэлектрический слой с проницаемостью ε_2, ограниченный плоскостями $z = 0$ и $z = a$, разделяет диэлектрические среды с проницаемостями ε_1 и ε_3 ($\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 1$). На этот слой нормально к его поверхности падает из области $z < 0$ электромагнитная волна. При какой толщине слоя отражение будет минимальным? При каком соотношении между $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ отражения не будет?
12.19. Пусть плоская монохроматическая волна падает из прозрачной среды с проницаемостями ε_1, μ_1 на границу другой прозрачной среды с ε_2, μ_2, причем $\sqrt{\varepsilon_2\mu_2} \gg \sqrt{\varepsilon_1\mu_1}$. Показать, что граничное условие Леонтовича (12.13) применимо к этому случаю, причем поверхностный импеданс может быть не малым.
12.20^. Произвести анализ глубины проникновения поля в проводящую среду при разных частотах ω, воспользовавшись результатами примера 12.3 и модельной диэлектрической проницаемостью

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 + i\frac{4\pi\kappa(\omega)}{\omega}, \quad \kappa(\omega) = \frac{\omega_{0e}^2}{4\pi(\gamma - i\omega)}$$

полученной в задаче 11.17. Рассмотреть разные соотношения между параметрами среды: а) $\varepsilon_0 \approx 1, \omega_{0e}^2/\gamma^2 \gg \varepsilon_0$ (металл; плазма); б) $\varepsilon_0 \approx 10$, $\omega_{0e}^2/\gamma^2 \ll \varepsilon_0$ (полупроводник) $, \omega \ll \gamma^* \ll \omega_{0e}, \omega_{0e} \ll \omega \ll \gamma$. Вычислить глубину проникновения δ и поверхностный импеданс ζ проводника.
12.21. Применить модель предыдущей задачи к газовой плазме со столкновениями. Вычислить глубину проникновения поля в плазму в области частот $\gamma \ll \omega \ll \omega_{0e}$ и $\omega \gg \omega_{0e}$.
12.22. Пусть в плоской неоднородной волне вектор электрического поля $\boldsymbol{E}$ поляризован линейно. Определить взаимное расположение векторов $\boldsymbol{E}_0, \mathscr{H}_1, \mathscr{H}_2, \boldsymbol{k}', \boldsymbol{k}'', \mathscr{H}_1, \mathscr{H}_2$ - вещественная и мнимая части комплексной амплитуды $\boldsymbol{H}_0; \boldsymbol{k}'$ и $\boldsymbol{k}''$ - вещественная и мнимая части волнового вектора k). Какую кривую описывает конец вектора $\boldsymbol{H}$ в фиксированной точке пространства?

Решить ту же задачу для случая, когда вектор $\boldsymbol{H}$ поляризован линейно.
12.23. Вывести формулы Френеля для случая, когда электромагнитная волна падает из вакуума на плоскую границу проводящей среды с малым поверхностным импедансом ζ.
12.24. Найти коэффициент отражения R от металлической поверхности с малым поверхностным импедансом $\zeta = \zeta' + i\zeta''$. При каких углах падения θ_0 коэффициент отражения минимален?
12.25. Линейно поляризованная волна падает на плоскую границу проводящей среды с малым поверхностным импедансом ζ. Определить характер поляризации отраженной

волны, если угол скольжения падающей волны равен углу Φ_0, определенному в предыдущей задаче.

12.26. Линейно поляризованная плоская волна падает под углом θ_0 на поверхность металла. Направление ее поляризации составляет с плоскостью падения угол $\pi/4$. Экспериментально определены отношение поперечной и продольной (относительно плоскости падения) компонент отраженной волны $E_{\parallel 1}/E_{\perp 1} = \operatorname{tg}\rho$ и сдвиг фаз между ними δ:

$$\frac{E_{\parallel 1}}{E_{\perp 1}} = \operatorname{tg}\rho e^{i\delta}$$

Выразить через ρ, δ и θ_0 вещественную часть показателя преломления n' и коэффициент поглощения n'' ($n' + in'' = 1/\zeta$, ζ - поверхностный импеданс), считая $|n'^2 - n''^2| \gg \sin^2\theta_0$.

12.27. .Найти коэффициент отражения R от плоской границы проводника при нормальном падении в предельном случае малых значений проводимости (см. формулу (8) из решения задачи 11.17).

12.28*. Плоская волна падает нормально из вакуума на границу диэлектрика. Исследовать влияние размытости границы на коэффициент отражения. Для этого аппроксимировать ход диэлектрической проницаемости функцией

$$\varepsilon(z) = \varepsilon - \frac{\Delta\varepsilon}{e^{z/a} + 1}, \quad \varepsilon = 1 + \Delta\varepsilon$$

где ε и $\Delta\varepsilon$ - постоянные. Исследовать частные случаи больших и малых a.

Указание. В дифференциальном уравнении для $E(z)$ (см. (12.16) сделать замену независимой переменной $\xi = -e^{-z/a}$ и подстановку $E(\xi) = \xi^{-ika}\psi(\xi)$, где $\psi(\xi)$ будет удовлетворять гипергеометрическому уравнению (см. справочник Абрамовиц и Стиган, 1979).

12.29*. При отсутствии поглощения диэлектрическая проницаемость плазмы имеет вид (см. задачу 11.9):

$$\varepsilon = 1 - \frac{4\pi e^2 N}{m\omega^2}$$

Рассмотреть распространение электромагнитной волны в плазме, концентрация которой меняется линейно: $N(z) = N_0 z$. Плоская монохроматическая волна падает на неоднородный слой плазмы нормально. (Такой случай может иметь место при распространении радиоволн в ионосфере.)

Указание. Уравнение для $E(z)$ можно решать путем разложения искомой функции в интеграл Фурье.

12.30^. Найти решение уравнений Максвелла (12.18) для монохроматического поля с помощью подстановки

$$E_x = \frac{1}{U^2(z)}\frac{\partial I}{\partial z}, \quad B_y = -\frac{n_0^2}{c}\frac{\partial I}{\partial t} \qquad (*)$$

Получить уравнение для новой неизвестной функции $I(z,t)$ и преобразовать его путем второй подстановки $I = \cdot f\sqrt{U}$ в уравнение с постоянными
коэффициентами
(**)

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} - \frac{n_0^2}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = p^2 f$$

Здесь фазовая координата (оптический путь) η определяется уравнением (12.21) через $U(z)$, а p - постоянная, которая удовлетворяет уравнению
$(***)$

$$\frac{d^2Q}{d\eta^2} = p^2Q, \quad \text{где} \quad Q = \frac{1}{\sqrt{U}}$$

12.31*. Вычислить коэффициент отражения от неоднородной среды, рассмотренной в предыдущей задаче. Плоская монохроматическая волна падает из вакуума нормально на границу $z = 0$ среды, неоднородность которой при $z > 0$ задается в функции оптического пути профилем $U(\eta) = [\cos(\eta/L) + M\sin(\eta/L)]^{-2}, L > 0, M > 0$ - постоянные параметры. Построить на компьютере зависимость диэлектрической проницаемости $\varepsilon(z)$ в неоднородной среде.
12.32*. Слой неоднородного диэлектрика занимает область $0 \leqslant z \leqslant L$. Внутри слоя диэлектрическая проницаемость дается формулой (12.26) (знак плюс в знаменателе). Слой находится в воздухе, у которого $\varepsilon \approx 1$. На границу слоя по нормали падает плоская монохроматическая волна. Записать выражения для электрического и магнитного полей во всем пространстве. Вычислить коэффициент R отражения электромагнитной волны.
12.33**. Построить решения уравнений Максвелла (12.18) для нестационарной немагнитной среды, в которой

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon(t)\boldsymbol{E}, \quad \varepsilon(t) = n_0^2U^2(t), U(0) = 1$$

Предполагается, что характерные периоды изменения $\varepsilon(t)$ велики по сравнению с временами микроскопической релаксации, рассмотренной в главе 11, и обусловлены внешним воздействием на среду (нагрев, ионизация, сильное внешнее поле). Но эти периоды могут быть сравнимы с обратными частотами изменения вычисляемых полей $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$.

Следует произвести некоторую модификацию и обобщение изложенных выше методов построения решений уравнений Максвелла для пространственно неоднородных сред. В частности, нужно ввести временную координату $\tau = \int\limits_0^t d\tau'/U(\tau')$ и получить уравнения, которые определяют
возможные функции $U(t)$ либо $U(\tau)$, позволяющие упростить исходную систему (12.18) и найти ее решения в аналитической форме. Вычислить и проанализировать коэффициент отражения электромагнитной волны от нестационарной среды.

12.2. Плоские волны в анизотропных и гиротропных средах

Анизотропные среды. Оптически анизотропными называются такие среды, у которых электрические и магнитные свойства различны по разным направлениям. Электрическая и магнитная проницаемости таких сред являются тензорами, даже если их зависимость от волнового вектора (пространственная дисперсия) не учитывается. Оптическая анизотропия может быть следствием кристаллической структуры тела, а также вызываться внешним электрическим полем (см. задачи 11.18, 11.19) или внешними механическими воздействиями. При отсутствии внешнего магнитного поля и в пренебрежении потерями тензоры $\varepsilon_{ik}(\omega)$ и $\mu_{ik}(\omega)$ симметричны:

$$\varepsilon_{ik}(\omega) = \varepsilon_{ki}(\omega), \quad \mu_{ik}(\omega) = \mu_{ki}(\omega) \tag{12.28}$$

Как известно из общих свойств симметричных тензоров (см. раздел 1.1), каждый такой тензор в главных осях является диагональным и определяется тремя скалярными

главными значениями. Главные оси взаимно перпендикулярны, их направления определяются внутренней симметрией среды.

Не обязательно для одной и той же среды обе проницаемости должны быть тензорами. В большинстве оптических кристаллов $\mu_{ik} = \mu\delta_{ik}, \mu \approx 1$. В ферритах (см. раздел 11.4) анизотропны магнитные свойства, а диэлектрическую проницаемость часто можно считать скаляром.

Запишем систему уравнений (11.11)-(11.14) для плоских монохроматических волн, положив $\boldsymbol{j}_{\text{ext}} = \rho_{\text{ext}} = 0$ и.считая магнитную проницаемость скаляром:

$$\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{E} = \frac{\omega}{c}\mu\boldsymbol{H}, \quad \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{H} = -\frac{\omega}{c}\boldsymbol{D}, \quad \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{D} = 0, \quad \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{B} = 0. \tag{12.29}$$

Дисперсионное уравнение для волн в анизотропной среде получается из первых двух уравнений с использованием уравнения связи $D_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta}E_\beta$:

$$\left| k^2\delta_{\alpha\beta} - k_\alpha k_\beta - \frac{\omega^2}{c^2}\mu\varepsilon_{\alpha\beta}(\omega) \right| = 0 \tag{12.30}$$

Оно отличается от (12.4) в основном тем, что в анизотропной среде неприменимо выражение (11.38) для диэлектрического тензора.

Введем безразмерный вектор $\boldsymbol{n} = c\boldsymbol{k}/\omega$ и запишем дисперсионное уравнение в главных осях тензора $\varepsilon_{\alpha\beta}$:

$$\begin{aligned} n^2\mu \left(\varepsilon^{(1)}n_1^2 + \varepsilon^{(2)}n_2^2 + \varepsilon^{(3)}n_3^2 - \mu^2 \left[\varepsilon^{(1)} \left(\varepsilon^{(2)} + \varepsilon^{(3)}\right) n_1^2 + \right.\right. \\ \left. \left. + \varepsilon^{(2)} \left(\varepsilon^{(1)} + \varepsilon^{(3)}\right) n_2^2 + \varepsilon^{(3)} \left(\varepsilon^{(1)} + \varepsilon^{(2)}\right) n_3^2\right] + \varepsilon^{(1)}\varepsilon^{(2)}\varepsilon^{(3)}\mu^3 = 0 \end{aligned} \tag{12.31}$$

Это - уравнение Френеля, основное уравнение кристаллооптики. В отсутствие зависимости главных значений диэлектрической и магнитной проницаемостей от k при заданном направлении распространения уравнение Френеля имеет второй порядок относительно величины $n^2 > 0$. Следовательно, в каждом направлении в общем случае будут распространяться две волны с разными фазовыми скоростями $v_{ph} = c/n$, зависящими от направления распространения. Электрическая и магнитная индукции в них согласно (12.29) перпендикулярны направлению распространения $\boldsymbol{n}$, но вектор $\boldsymbol{E}$ будет иметь не только поперечную, но и продольную относительно n составляющую. Поэтому поляризацию удобно определять с помощью вектора электрической индукции D. Направления, вдоль которых фазовые скорости двух волн совпадают, называются оптическими осями. Они в общем случае не совпадают с главными осями тензора $\varepsilon_{\alpha\beta}$.

Пример 12.4. Показать, что в двух волнах, распространяющихся в заданном направлении, вектор $\boldsymbol{D}$ поляризован линейно в двух взаимно перпендикулярных плоскостях.

Решение. Исключаем из первых двух уравнений (12.29) вектор $\boldsymbol{H}$ и записываем получившееся равенство в проекциях на плоскость, перпендикулярную вектору $\boldsymbol{n}$: $\mu D_\alpha = n^2 E_\alpha$. Введя обратный тензор диэлектрической проницаемости, получим

$$\dot{\mu}D_\alpha = n^2\varepsilon^{-1}_{\alpha\beta}E_\beta \tag{1}$$

где иднексы α, β принимают по два значения и нумеруют оси, перпендикулярные вектору $\boldsymbol{n}$. Совместим эти оси со взаимно перпендикулярными главными осями двумерного симметричного тензора $\varepsilon^{-1}_{\alpha\beta}$. В этих осях тензор будет иметь только диагональные компоненты $\varepsilon'_1, \varepsilon'_2$ (отличающиеся от его главных значений $\varepsilon^{(i)}, i = 1, 2, 3$, входящих в (12.31)). В указанных осях соотношение (1) запишется в виде двух уравнений

$$\left(\frac{\mu}{n^2}-\frac{1}{\varepsilon_1'}\right)D_1=0,\quad \left(\frac{\mu}{n^2}-\frac{1}{\varepsilon_2'}\right)D_2=0 \tag{2}$$

При $n=\sqrt{\varepsilon_1'\mu}$ будем иметь $D_2=0$, волна поляризована вдоль оси 1. При $n=\sqrt{\varepsilon_2'\mu}$ получаем $D_1=0$, волна поляризована вдоль оси 2.

Плотность энергии и плотность потока энергии квазимонохроматического поля в анизотропной среде определяются выражениями (11.112):

$$w=\frac{1}{16\pi}\left[\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\omega\varepsilon_{\alpha\beta}(\omega)\right)E_\alpha^*E_\beta+\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\omega\mu_{\alpha\beta}(\omega)\right)H_\alpha^*H_\beta\right] \tag{12.32}$$

$$\gamma=\frac{c}{16\pi}\left(\boldsymbol{E}^*\times\boldsymbol{H}+\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*\right)$$

Направление распространения энергии в общем случае не совпадает с направлением волнового вектора (см. задачу 12.37°).

Гиротропные среды. При наличии внешнего постоянного магнитного поля тензоры ε_{ik} и μ_{ik} перестают быть симметричными; но в непоглощающих средах, которые только и будут рассматриваться в этом параграфе, они являются эрмитовыми:

$$\varepsilon_{ik}=\varepsilon_{ki}^*,\quad \mu_{ik}=\mu_{ki}^* \tag{12.33}$$

В этом случае мнимая часть каждого из тензоров антисимметрична относительно перестановки индексов, $\varepsilon_{\alpha\beta}''=\left(\varepsilon_{\alpha\beta}-\varepsilon_{\alpha\beta}^*\right)/2i=-\varepsilon_{\beta\alpha}''$, и их можно заменить дуальными векторами, $\boldsymbol{g}_e$ и $\boldsymbol{g}_m$ соответственно. Связь между напряженностями полей и индукциями можно записать в виде (ср. с задачей 11.21)

$$\boldsymbol{D}=\widehat{\varepsilon}'\boldsymbol{E}+i\left(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{g}_e\right),\quad \boldsymbol{B}=\widehat{\mu}'\boldsymbol{H}+i\left(\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{g}_m\right) \tag{12.34}$$

где g_e и $\boldsymbol{g}_m$ - векторы гирации (электрический и магнитный), $\hat{\varepsilon}'\boldsymbol{E}$ - вектор с компонентами $\varepsilon_{ik}'E_k$. Тензоры $\widehat{\varepsilon}'$ и $\widehat{\mu}'$ действительны и симметричны. Среды, в которых векторы поля связаны уравнениями (12.34), называются гиротропными.

Гиротропными средами являются, в частности, плазма и ферритовые материалы, находящиеся во внешнем магнитном поле. Если ось Oz выбрана вдоль поля, то в изотропной (в отсутствие поля) ферритовой среде тензор магнитной проницаемости имеет вид (см., в частности, задачи 11.56, 11.57)

$$\mu_{ik}=\begin{pmatrix}\mu_\perp & -i\mu_a & 0\\ i\mu_a & \mu_\perp & 0\\ 0 & 0 & \mu_\parallel\end{pmatrix} \tag{12.35}$$

где компоненты $\mu_\perp,\mu_\parallel,\mu_a$ действительны, если среда без потерь. Аналогичный вид имеет тензор ε_{ik} (см. задачу 11.23). Гиротропией могут обладать некоторые кристаллические и неупорядоченные среды и в отсутствие внешнего магнитного поля. В этом случае гиротропию называют естественной оптической активностью. Вектор гирации в таких средах зависит от волнового вектора распространяющейся волны.

В гиротропной среде в заданном направлении могут распространяться с разными фазовыми скоростями две плоские волны одной частоты. Эти волны поляризованы эллиптически с противоположными направлениями вращения, эллипсы поляризации имеют одинаковое отношение осей и повернуты друг относительно друга на $\pi/2$.

Граничные условия на поверхности анизотропного или гиротропного тела имеют такой же вид, как и на границе раздела изотропных сред (см. формулы (11.30)).

Рекомендуемая литература: [Борн и Вольф (1970); Ландау и Лифшиц, Электродинамика сплошных сред; Батыгин и Топтыгин, Современная электродинамика, ч. 1; Бредов и др., Классическая электродинамика; Каганов и др. (1997); Гуревич и Мелков (1994); Федоров (2004)].

Задачи

12.34. С помощью уравнения Френеля (12.31) найти фазовые скорости волн, распространяющихся вдоль главных осей тензора диэлектрической проницаемости в анизотропной среде.

12.35*. Среда, в которой два главных значения тензора $\varepsilon_{\alpha\beta}$ одинаковы $\left(\varepsilon^{(1)} = \varepsilon^{(2)} = \varepsilon_\perp, \varepsilon^{(3)} = \varepsilon_\parallel\right)$, называется одноосной.

1. Показать, что оптическая ось совпадает с осью 3.

2. Из уравнения Френеля найти фазовые скорости волн, распространяющихся под углом θ к оптической оси:

$$v_{ph}^{(1)} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_\perp \mu}}, \quad v_{ph}^{(2)} = c\sqrt{\frac{\varepsilon_\perp \sin^2\theta + \varepsilon_\parallel \cos^2\theta}{\varepsilon_\perp \varepsilon_\parallel \mu}}$$

Первая волна называется обыкновенной, а вторая - необыкновенной (ее скорость зависит от направления распространения).

3. Найти поляризации обыкновенной и необыкновенной волн.

12.36. С помощью формул, полученных в задаче 11.38, показать, что в анизотропной недиспергирующей среде плотности электрической и магнитной энергий плоской монохроматической волны одинаковы:

$$w_e = w_m = \frac{1}{8\pi}[\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}] \cdot \boldsymbol{n}$$

Здесь $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ - действительные векторы.

12.37 . С помощью формул, полученных в задаче 11.38, и уравнений Максвелла найти скорость v_g распространения энергии плоской квазимонохроматической волны в анизотропной недиспергирующей среде. Определить ее как отношение плотности потока энергии к плотности самой энергии, $\boldsymbol{v}_g = \gamma/w$, и выразить через электрические векторы $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{D}$. Сравнить с фазовой скоростью $\boldsymbol{v}_{ph} = \mathrm{cn}/n^2$. Изобразить на рисунке относительное расположение векторов $\boldsymbol{e}, \boldsymbol{D}, \boldsymbol{H}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{v}_{ph}, \boldsymbol{v}_g$.

12.38. Необыкновенная волна распространяется в одноосном кристалле под углом θ к оптической оси. Определить угол α между волновым вектором k и вектором $\boldsymbol{E}$, а также угол ϑ между направлением луча (вектором Пойнтинга) и оптической осью кристалла.

12.39. Плоская электромагнитная волна с частотой ω распространяется в недиспергирующем диэлектрике с проницаемостями ε, μ. Диэлектрик перемещается как целое с постоянной скоростью V. Найти фазовую скорость волны как функцию частоты и направления распространения. Вычислить групповую скорость и определить поляризацию волны. Сравнить свойства волн в движущейся среде и в неподвижном одноосном кристалле.

Указание. Использовать уравнения (11.144), (11.145) для электромагнитных потенциалов в движущейся среде.

12.40. Плоская волна падает из вакуума на плоскую поверхность одноосного кристалла. Оптическая ось кристалла нормальна к его поверхности. Найти направления обыкновенного и необыкновенного лучей в кристалле, если угол падения θ_0.

12.41. Решить предыдущую задачу для случія, когда оптическая ось кристалла

параллельна его поверхности и составляет угол α с плоскостью падения:
12.42. Плоская волна падает нормально на плоскую решетку, образованную тонкими параллельными бесконечно длинными проводниками. Расстояния между проводниками и их толщина много меньше длины волны. Какое влияние окажет решетка на распространение волн с различными поляризациями?
12.43. Плоская монохроматическая волна распространяется в безграничной ферритовой намагниченной до насыщения среде под углом θ к постоянному магнитному полю. Магнитная проницаемость феррита тензор (12.35). Диэлектрическую проницаемость феррита $\varepsilon \approx 15$ можно считать скаляром (это объясняется тем, что в СВЧ-диапазоне влияние постоянного магнитного поля на магнитные свойства феррита значительно сильнее, чем на электрические). Найти фазовые скорости распространения нормальных волн.
12.44. Исследовать волны, полученные в предыдущей задаче, для случая продольного распространения ($\theta = 0$), использовав компоненты тензора магнитной проницаемости

$$\mu_\perp = 1 + \frac{\omega_M \omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2}, \quad \mu_a = \frac{\omega \omega_M}{\omega_0^2 - \omega^2}, \quad \mu_\parallel = 1 \tag{12.36}$$

которые были получены в задаче 11.56 .

1. Найти дисперсионные зависимости $k(\omega)$ нормальных волн и области их существования (построить графики).

2. Определить поляризации нормальных волн и их поверхностные импедансы [1](12.13).

3. Вычислить угол поворота на длине z плоскости поляризации линейно поляризованной волны (эффект Фарадея).
   12.45. Сделать то же самое для случая поперечного распространения ($\theta = \pi/2$) :

4. Найти дисперсионные зависимости $k(\omega)$ для нормальных волн и области их существования (построить графики).

5. Определить поляризации нормальных волн и их поверхностные импедансы.

6. Найти изменение поляризации волны при поперечном распространении (эффект Коттона-Мутона).
   12.46. Плоская монохроматическая волна оптической частоты распространяется в ферродиэлектрике, у которого тензоры электрической и магнитной проницаемостей имеют структуру (12.35). Для случая продольного распространения вычислить угол фарадеевского вращения плоскости поляризации на длине l. При этом использовать компоненты тензора μ, приведенные в задаче 12.44, и приближения $\omega \gg \omega_M, \omega_0, \varepsilon_a \ll \varepsilon_\perp$.

12.47. Магнитостатическими волнами называются колебания намагниченности и магнитного поля, удовлетворяющие условию $kc \gg \omega$. В нулевом приближении по малому параметру (ω/kc) их можно описывать уравнениями магнитостатики $\operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0, \operatorname{rot} \boldsymbol{H} = 0$. Найти дисперсионное соотношение $\omega(\boldsymbol{k})$ для магнитостатических волн в безграничной ферритовой среде с тензором магнитной проницаемости (12.35) и его компонентами (12.36). Найти интервал частот, в котором существуют магнитостатические волны, и электрическое поле в волне.
12.48. Немагнитный диэлектрик находится во внешнем магнитном поле. Плоская монохроматическая волна распространяется в направлении магнитного поля (ось Oz) и

[01] В безграничной среде больше подходит термин «волновой импеданс».

имеет при $z = 0$ линейную поляризацию. Использовав тензор диэлектрической проницаемости, полученный в задаче 11.23, определить поляризацию волны при $z > 0$.

12.49. В однородной плазме с концентрацией электронов N_e и однородным магнитным полем B распространяются от одного источника две квазимонохроматические волны, длины которых λ_1 и λ_2. Обе частоты велики по сравнению с электронной плазменной частотой $\omega_{0e} = \sqrt{4\pi N_e e^2/m_e}$ и электронной циклотронной частотой $\omega_{Be} = eB/m_e c$. В источнике обе волны поляризованы линейно в одной плоскости. Использовав эрмитов тензор диэлектрической проницаемости, полученный в задаче 11.24, вычислить относительный поворот $\Delta\chi$ плоскостей поляризации этих волн на пути к приемнику, который находится на расстоянии L от источника. Выразить его через величину $RM = e^3 N_e BL/2\pi\,(m_e c)^2$, которая в радиоастрономии называется мерой вращения (Rotation Measure).

12.50. Плоская поляризованная по кругу волна падает из вакуума нормально на плоскую границу феррита. Феррит намагничен в направлении падения волны. Определить характер поляризации и амплитуды отраженной и прошедшей волн. Найти также коэффициент R отражения электромагнитной энергии от поверхности феррита, выразив его через поверхностный импеданс. При каких условиях отражение будет полным?

12.51. Решить предыдущую задачу для случая, когда падающая волна поляризована линейно.

12.52*. Искусственный диэлектрик состоит из тонких идеально проводящих круглых дисков, ориентированных одинаковым образом и находящихся в вакууме. Перпендикулярно плоскостям дисков приложено постоянное магнитное поле $\boldsymbol{H}_0$ и в том же направлении распространяется плоская электромагнитная волна. Определить фазовые скорости распространения, рассматривая диэлектрик как сплошную среду.

Указание. Учесть эффект Холла, который возникнет из-за наличия внешнего магнитного поля.

12.53. Ионизованный газ находится в постоянном магнитном поле. Вдоль направления поля распространяется поперечная плоская волна. Найти фазовые скорости распространения. Рассмотреть, в частности, случай малых частот ($\omega \to 0$) и исследовать характер электромагнитных волн с учетом движения положительных ионов.

Указание. Использовать выражение для тензора диэлектрической проницаемости ионизованного газа в постоянном магнитном поле, полученное в задаче 11.25 .

12.54. Найти с учетом члена $q\nabla^2 M$ в выражении (11.116) дисперсионное уравнение для электромагнитных волн, распространяющихся в изотропной, намагниченной до насыщения ферродиэлектрической среде. Показать, что в такой среде могут распространяться три типа волн с разными законами дисперсии $\omega(\boldsymbol{k})$. Определить явный вид зависимости $\omega(\boldsymbol{k})$ для того типа волн, у которого может выполняться условие $\omega^2\varepsilon/(ck)^2 \ll 1$. Оценить относительную величину электрического и магнитного полей для этой ветви колебаний.

12.55. Вычислить поверхностный импеданс ζ ферромагнитного проводника, находящегося в постоянном магнитном поле, параллельном его поверхности. Тензор магнитной проницаемости приведен в условии задачи 12.40, а компоненты тензора электропроводности равны $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_1$, $\sigma_{33} = \sigma_3, \sigma_{12} = -\sigma_{21} = -i\sigma_2, \sigma_{13} = \sigma_{31} = \sigma_{23} = \sigma_{32} = 0$.

Указание. Поверхностный импеданс в данном случае - тензор II ранга и должен быть определен из условия (ср. с (12.13))

$$E_{\tau i} = \zeta_{ik}\,(\boldsymbol{H}_\tau \times \boldsymbol{n})_k$$

где $i, k = 1, 2, \boldsymbol{E}_\tau$ и $\boldsymbol{H}_\tau$ - касательные составляющие векторов поля вблизи поверхности проводника, $\boldsymbol{n}$ - орт нормали к поверхности.

12.56. Решить предыдущую задачу для случая, когда постоянное магнитное поле нормально к поверхности ферромагнитного проводника.

12.3. Рассеяние электромагнитных волн на макроскопических телах. Дифракция

Точное решение задачи о взаимодействии электромагнитной волны с проводящим или диэлектрическим телом сводится к интегрированию уравнений Максвелла при соответствующих граничных условиях. Оно возможно в немногих случаях (см., например, задачи 12.58, 12.65). В ряде случаев может быть найдено приближенное решение.

Рассеяние. Если линейные размеры тела малы по сравнению с длиной волны, то электромагнитное поле вблизи тела можно считать однородным. Тело, находящееся в однородном периодическом поле, приобретет электрический и магнитный моменты, которые зависят от времени по тому же закону, что и внешнее поле.

Рассеянная волна возникает в результате излучения этими переменными моментами. Задача о рассеянии электромагнитных волн на теле малых размеров сводится к определению дипольных моментов, которые приобретает тело. Поля излучения выражаются через дипольные моменты по формулам (5.28)-(5.29) и (5.37).

Эффективное дифференциальное сечение рассеяния в телесный угол $d\Omega$ вычисляется по формуле (5.119):

$$d\sigma_s = \frac{dI(\vartheta, \alpha)}{\gamma_0} \tag{12.37}$$

Здесь $dI = \gamma dS = \gamma r^2 d\Omega$ - средняя (по времени) интенсивность излучения в телесный угол $d\Omega$; γ и γ_0 - средние плотности потока энергии в рассеянной и падающей волнах. Плотность потока энергии описывается вектором Пойнтинга (11.110)

$$\gamma = \frac{c}{16\pi} \left(\boldsymbol{E}^* \times \boldsymbol{H} + \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}^* \right) \tag{12.38}$$

если рассеивающее тело находится в среде без пространственной дисперсии.

Эффективным сечением поглощения называется отношение средней энергии Q, поглощаемой телом в единицу времени, к средней плотности потока энергии в падающей волне:

$$\sigma_a = \frac{Q}{\gamma_0} \tag{12.39}$$

В противоположном предельном случае, когда длина волны много меньше размеров тела, применимы методы геометрической оптики. Рассмотрим их в связи с задачами о распространении волн через отверстия в плоских экранах и огибании ими различных препятствий. Такие процессы называются дифракцией волн (от латинского diffractus - разломанный, преломленный).

Принцип Гюйгенса-Френеля и формула Кирхгофа. В разделе 5.1 были вычислены запаздывающие потенциалы. Они позволяют найти электромагнитное поле, создаваемое движущимися зарядами в вакууме. Но при наличии вещества постановка задачи может быть иной: заряды и токи могут быть заданы в некотором ограниченном объеме V. Источники же, находящиеся за пределами V, могут задаваться не распределением зарядов и токов в них, а тем электромагнитным полем, которое они создают на поверхности S, ограничивающей объем V. В этом случае для расчета поля внутри V нужно учесть источники поля, находящиеся внутри V, и те возмущения, которые исходят от поверхности S.

Мы будем рассматривать в дальнейшем случай отсутствия зарядов внутри объема V, когда все поле в этом объеме будет создаваться внешними источниками. Но явное рассмотрение источников можно заменить рассмотрением поля, которое они создают на поверхности S. Как мы увидим ниже, каждый элемент поверхности S можно рассматривать как источник вторичных возмущений, распространяющихся во все стороны. Накладываясь, эти возмущения и создают результирующее поле в объеме V. Качественные соображения такого рода были развиты еще Х.Гюйгенсом [2] в XVII в. и носят название принцип Гюйгенса. Впоследствии их уточнили и сформулировали в количественном виде другие исследователи, особенно О.Френель [3] и Г.Кирхгоф [4]. Ниже мы получим формулу Кирхгофа, которая позволяет решить поставленные задачи.

Используем тождество Грина (1.98):

$$\int\limits_V (\varphi\Delta\psi - \psi\Delta\varphi)dV = \oint\limits_S \left(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right) dS \tag{12.40}$$

Будем понимать под $\varphi(\boldsymbol{r},t) = \varphi(\boldsymbol{r})e^{-i\boldsymbol{t}}$ некоторую функцию, удовлетворяющую однородному уравнению Даламбера и зависящую от времени по гармоническому закону. Это может быть одна из декартовых компонент напряженностей поля либо потенциала. В этом случае $\partial^2\varphi/\partial t^2 = -\omega^2\varphi$

и амплитуда $\varphi(\boldsymbol{r})$ будет удовлетворять уравнению Гельмгольца [5]
$$

$$\Delta\varphi + k^2\varphi = 0 \tag{12.41}$$

$$

где $k^2 = \omega^2\varepsilon\mu/c^2$, если пространство заполнено однородной средой. Функцию ψ в (12.40) отождествим с фурье-образом запаздывающей функции Грина $G_\omega(\boldsymbol{r})$. Она удовлетворяет неоднородному уравнению Гельмгольца

$$\Delta G_\omega + k^2 G_\omega = -4\pi\delta(\boldsymbol{R}), \quad \boldsymbol{R} = \boldsymbol{r}_P - \boldsymbol{r} \tag{12.42}$$

(ср. с уравнением (5.5)). Здесь индексом P отмечена точка наблюдения, лежащая внутри объема V; по координатам $\boldsymbol{r} = (x,y,z)$ производится интегрирование, а $\boldsymbol{n}$ - внешняя нормаль к поверхности S.

Подставим в левую часть (12.40) величины

$$\Delta\varphi = -k^2\varphi, \quad \Delta\psi = \Delta G_\omega = -k^2 G_\omega - 4\pi\delta(\boldsymbol{R}) \tag{12.43}$$

Вычислив интеграл с дельта-функцией, получим

$$\varphi(\boldsymbol{r}_P) = \frac{1}{4\pi}\oint\limits_S \left(G_\omega(R)\frac{\partial\varphi(\boldsymbol{r})}{\partial n} - \varphi(\boldsymbol{r})\frac{\partial}{\partial n}G_\omega(R)\right) dS \tag{12.44}$$

Здесь запаздывающая функция Грина G_ω может быть взята в форме (5.14) (с заменой c на $v_{ph} = c/\sqrt{\varepsilon\mu}$):

$$G_\omega(R) = \frac{1}{R}e^{ikR} \tag{12.45}$$

[02] Гюйгенс Христиан (1629-1695) - голландский ученый-энциклопедист. Занимался физикой, механикой, математикой и астрономией. Его теория распространения света была опубликована в 1690 г.

[3] Френель Огюстен Жан (1788-1827) - французский физик, автор многих исследований по оптике, один из основателей волновой оптики.

[4] Кирхгоф Густав Роберт (1824-1887) - выдающийся немецкий физик. С его именем связаны правило Кирхгофа для постоянных токов (см. раздел 9.1), закон Кирхгофа для излучения (см. главу 13), теория дифракции и др. открытия.

(функция Грина для свободного пространства). Но следует иметь в виду, что можно использовать и другие запаздывающие функции Грина, удовлетворяющие уравнению Гельмгольца и определенным граничным условиям на поверхности S. В частности, в электростатике (см. раздел 8.3) мы использовали функции Грина, удовлетворяющие граничным условиям

$$G|_S = 0 \quad \text{либо} \quad \left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_S = 0 \tag{12.46}$$

Такие функции Грина используются и в задачах дифракции (см. раздел 13.2).
Соотношение (12.44) носит название интеграла Кирхгофа (в скалярной форме) и дает количественную формулировку принципу Гюйгенса: связывает поле в произвольной точке с его значением на некоторой замкнутой

поверхности. Тем самым, электромагнитные возмущения на поверхности играют роль источников, возбуждающих вторичные возмущения, которые и создают поле в точке $\boldsymbol{r}_P$. Вывод интеграла Кирхгофа при произвольной зависимости поля от времени и при наличии в объеме свободных зарядов можно найти в [Бредов и др., Классическая электродинамика].

Следует отметить, что формулу (12.44) нельзя рассматривать как решение волнового уравнения, так как значения φ и $\partial\varphi/\partial n$ на поверхности заранее не известны и не могут быть заданы произвольным образом. Фактически (12.44) представляет собой сложное интегральное уравнение. Но интеграл Кирхгофа очень полезен в задачах дифракции электромагнитных волн, когда значения поля на некоторой поверхности. можно задать приближенно. Пусть нужно вычислить поле внутри объема, в который оно проникает через отверстия в непроницаемом для волн экране. В этом случае чаще всего принимают следующие предположения о поле на границе объема:

1. Значения φ и $\partial\varphi/\partial n$ на теневой стороне экрана равны нулю.

2. Значения

$$\varphi = \varphi_0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial n} = \frac{\partial\varphi_0}{\partial n} \tag{12.47}$$

на отверстиях принимаются такими, какими они были бы в отсутствие экрана (через φ_0 обозначено неискаженное первичное поле).

Задача

12.57ˆ. Уравнению (12.44) в отсутствие сторонних зарядов удовлетворяет любая декартова компонента векторов поля $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}$. Показать, что указанные векторы внутри объема V можно представить в виде

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi}\oint_S \{G_\omega(R)(\boldsymbol{n}\cdot\nabla)\boldsymbol{E} - \boldsymbol{E}(\boldsymbol{n}\cdot\nabla)G_\omega(R)\}\,dS \tag{12.48}$$
$$\boldsymbol{B} = \frac{1}{4\pi}\oint_S \{G_\omega(R)(\boldsymbol{n}\cdot\nabla)\boldsymbol{B} - \boldsymbol{B}(\boldsymbol{n}\cdot\nabla)G_\omega(R)\}\,dS$$

[05] Гельмгольц Герман Людвиг Фердинанд (1821-1894) - выдающийся немецкий естествоиспытатель. Занимался исследованиями в многих областях: в электродинамике, оптике, акустике, гидродинамике, термодинамике, физиологии зрения и слуха. Один из первооткрывателей закона сохранения энергии как всеобщего закона природы.

Показать также, что уравнения (12.48) преобразуются к виду

$$\boldsymbol{E} = -\frac{1}{4\pi}\oint_S [ik(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{B}) + (\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E})\times\nabla + (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{E})\nabla]G_\omega(R)dS$$
$$\boldsymbol{B} = -\frac{1}{4\pi}\oint_S [-ik(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}) + (\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{B})\times\nabla + (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{B})\nabla]G_\omega(R)dS \qquad (12.49)$$

где $G_\omega(R)$ - гармоника Фурье запаздывающей функции Грина (12.45).

Интеграл Кирхгофа в векторной форме можно записать и для векторов Герца, применяя формулу (12.44) к каждой из их декартовых компонент. Это приводит к соотношению

$$\boldsymbol{Z} = \oint_S \{G_\omega(R)(\boldsymbol{n}\cdot\nabla)\boldsymbol{Z} - \boldsymbol{Z}(\boldsymbol{n}\cdot\nabla)G_\omega(R)\}\, dS \qquad (12.50)$$

Напряженности поля вычисляются затем через электромагнитные потенциалы по формулам (5.40), (5.46). Преимущество такого подхода состоит в том, что уравнения Максвелла в однородной среде $\nabla\cdot\boldsymbol{E} = 0$ и $\nabla\cdot\boldsymbol{H} = 0$ выполняются автоматически, независимо от точности, с которой задается поле на поверхности интегрирования (см. [Низьев (2002)]).

Геометрическая оптика. Дифракция Френеля. Скалярная и векторная формулы Кирхгофа особенно полезны для анализа распространения коротких электромагнитных волн (для краткости ниже будем говорить о свете). Случай, когда длина волны света мала по сравнению с размерами тел и расстояниями от них до источника и точки наблюдения, называется приближением геометрической оптики.

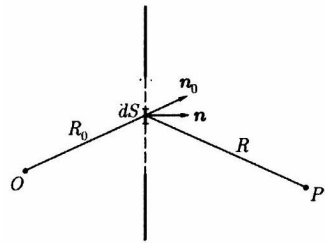


Рис. 12.4

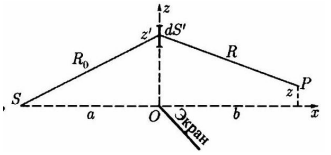


Рис. 12.5

Рассмотрим дифракцию света от точечного источника O (рис. 12.4) на отверстии в непрозрачном экране в приближении геометрической оптики. Будем предполагать, что длина волны света λ мала по сравнению с расстояниями от источника O и от точки наблюдения P до краев отверстия. Эти расстояния мы будем считать конечными. В силу последнего обстоятельства нужно учитывать кривизну фронта как падающей, так и дифрагированной волн. Явления, наблюдающиеся при таких условиях, называются дифракцией Френеля. Если же точки O и P находятся на очень больших расстояниях от экрана, то волновые фронты падающей и дифрагированной волн можно считать плоскими. Такой случай называется дифракцией Фраунгофера [6].

Воспользуемся скалярным вариантом формулы Кирхгофа (12.44), понимая под $\varphi(\boldsymbol{r})$ одну из декартовых компонент электрического поля, которую обозначим через u. В качестве поверхности интегрирования примем поверхность отверстия. Примем также обычное в теории дифракции приближение, согласно которому волновое поле на указанной поверхности совпадает с невозмущенным полем источника. При сферически симметричном распределении излучения источника O будем иметь на отверстии

$$u = \frac{A}{R_0} e^{ikR_0}$$

где $A = \text{const}$, R_0 - расстояние от источника до dS (см. рис. 12.4).
Учитывая, что $kR, kR_0 \gg 1$ и дифференцируя по этой причине в (12.44) только экспоненты, получим поле в точке P за экраном:

$$u_P = \frac{ik}{4\pi} \int\limits_S \frac{u \exp(ikR)}{R} \left(\frac{\boldsymbol{R}_0}{R_0} + \frac{\boldsymbol{R}}{R} \right) \cdot \boldsymbol{n} dS \tag{12.51}$$

Мы увидим ниже, что свет при малых (по сравнению с другими расстояниями задачи) длинах волн распространяется в основном прямолинейно, испытывая лишь сравнительно малые отклонения от прямолинейности, приводящие к огибанию препятствий (дифракции). Ввиду этого в интеграле (12.51) существенна только малая часть поверхности интегрирования вблизи прямой, соединяющей источник и точку наблюдения. В этой области можно заменить $(\boldsymbol{R}_0/R_0 + \boldsymbol{R}/R) \approx -2\boldsymbol{R}_0/R_0 = -2\boldsymbol{n}_0$, что позволит представить (12.51) в виде

$$u_P = \frac{k}{2\pi i} \int\limits_S \frac{u}{R} e^{ikR} \boldsymbol{n}_0 \cdot \boldsymbol{n} dS \tag{12.52}$$

где u - поле на отверстии, $\boldsymbol{n}_0 \cdot \boldsymbol{n} dS$ - проекция элемента поверхности отверстия на плоскость, перпендикулярную направлению луча от источника к элементу dS.

Конкретный расчет проведем для дифракции света от точечного источника на краю непрозрачного экрана (рис. 12.4). В качестве поверхности интегрирования выберем полуплоскость $yz(z > 0)$. В предэкспоненциальных

множителях можно положить $R_0 \approx a, R \approx b$, а в показателе экспоненты следует учесть малые добавки:

$$R_0 + R \approx a + b + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) y^2 + \frac{1}{2} \left[\frac{z^2}{a} + \frac{(z_P - z)^2}{b} \right]$$

При интегрировании по dy воспользуемся табличными интегралами

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \sin t^2 dt = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cos t^2 dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

и получим

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp \left[\frac{ik}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) y^2 \right] dy = \sqrt{\frac{\pi ab}{k(a+b)}} (1+i) \tag{12.53}$$

Из последнего результата следует, что основной вклад в интеграл вносит отрезок длиной $[2\lambda ab/(a+b)]^{1/2} \approx \sqrt{\lambda L}$, где L - меньшее из расстояний a, b. Ввиду малости

[06] Фраунгофер Йозеф (1787-1826) - немецкий физик и оптик-изобретатель.

отношения λ/L существенная для интегрирования область имеет линейные размеры $(\lambda/L)^{1/2}L \ll L$. Отрезок, существенный для интегрирования по dz, имеет такой же порядок величины.

Из слагаемых, зависящих от z, выделим полный квадрат:

$$\frac{1}{2}\left[\frac{z^2}{a}+\frac{(z_P-z)^2}{b}\right]=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\left(z-\frac{az_P}{a+b}\right)^2+\frac{z_P^2}{2(a+b)}$$

После замены переменной $t=z\sqrt{k(a+b)/2ab}$ приведем интеграл по dz к виду

$$\int\limits_0^\infty \exp\left[\frac{ik}{2}\left(\frac{z^2}{a}+\frac{(z_P-z)^2}{b}\right)\right]dz=\sqrt{\frac{2ab}{k(a+b)}}\exp\left[\frac{ikz_P^2}{2(a+b)}\right]\int\limits_{-s}^\infty e^{it^2}dt$$

где

$$s=z_P\sqrt{\frac{ka}{2b(a+b)}} \tag{12.54}$$

Интеграл по dt выражаем через интегралы Френеля:

$$C(s)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\int\limits_0^s\cos t^2dt,\quad S(s)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\int\limits_0^s\cos t^2dt$$

$$\int\limits_{-s}^\infty e^{it^2}dt=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left[\left(C(s)+\frac{1}{2}\right)+i\left(S(s)+\frac{1}{2}\right)\right] \tag{12.55}$$

Собрав воедино результаты (12.51)-(12.55), запишем поле в точке P:

$$u_P=\frac{A(1-i)}{2(a+b)}\exp\left[ik(a+b)+is^2b/a\right]\left[\left(C(s)+\frac{1}{2}\right)+i\left(S(s)+\frac{1}{2}\right)\right] \tag{12.56}$$

При свободном распространении волновое поле на расстоянии $a+b$ от источника имело бы значение

$$u_0=\frac{A}{a+b}e^{ik(a+b)}$$

Вводя интенсивности $I(s)=|u_P|^2, I_0=|u_0|^2$, получим

$$I(s)=\frac{I_0}{2}\left[\left(C(s)+\frac{1}{2}\right)^2+\left(S(s)+\frac{1}{2}\right)^2\right] \tag{12.57}$$

Пример 12.5. Исследовать распределение интенсивности (12.57) в области тени ($s<0$) и в освещенной области ($s>0$). Получить асимптотики и построить графики.

Решение. Асимптотика в области тени ($|s|\gg 1$) получается путем интегрирования по частям:

$$\int\limits_{|s|}^\infty e^{it^2}dt=-\frac{1}{2i|s|}e^{is^2}+\frac{1}{4|s|^3}e^{is^2}-\dots \tag{1}$$

Учитывая одно слагаемое, получим интенсивность света в области геометрической тени:

$$I = \frac{I_0}{4\pi s^2} \tag{12.58}$$

Асимптотика освещенной области ($s \gg 1$):

$$\int_{-s}^{\infty} e^{it^2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}(1+i) + \frac{1}{2is} e^{is^2} + \dots \tag{2}$$

Интенсивность света:

$$I = I_0 \left[1 - \frac{\sin\left(s^2 - \pi/4\right)}{\sqrt{\pi} s} \right] \tag{12.59}$$

На границе тени и света при $s = 0$ имеем $I = I_0/4$. В промежуточной области надо использовать точную формулу. График интенсивности, включающий и промежуточную область, изображен на рис. 12.6.

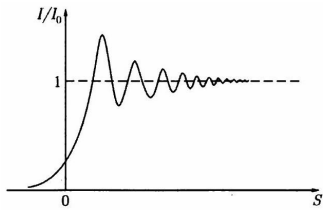


Рис. 12.6

Дифракция Фраунгофера происходит на отверстии в плоском непрозрачном экране, если источник света и точка наблюдения удалены на расстояние, значительно превышающее размер l отверстия. Длина волны света мала по сравнению с l. В этих условиях лучи, падающие на отверстие, можно считать плоскими. На отверстии происходит дифракция и лучи расходятся веерообразно.

Пример 12.6. Исследовать распределение интенсивности при дифракции Фраунгофера на отверстии произвольной формыв в непрозрачном плоском экране (рис. 12.7). Вычислить сечение дифракиии $d\sigma = dI/I_0$, где dI - интенсивность света, рассеянного в данный телесный угол, I_0 - интенсивность света, падающего на отверстие. Рассмотреть конкретный случай дифракции на прямоугольном отверстии $2l_1 \times 2l_2$.

Решение. Используем формулу (12.52) и приближение неискаженного поля в падающей волне в плоскости отверстия. В показателе экспоненты полагаем $R_0 \approx a + \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{r}/a, R \approx b + \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{r}/b$, а в предэкспоненциальном множителе $R_0 \approx a, R \approx b$. Вектор $\boldsymbol{a}$ указывает направление распространения падающей, а вектор b - дифрагированной волн. Поскольку частота волны при дифракции не меняется, то $k\boldsymbol{a}/a = \boldsymbol{k}_0, k\boldsymbol{b}/b = \boldsymbol{k}$ - волновые векторы падающей и дифрагированной волн. Подставив полученные величины в (12.52), получим в точке наблюдения

$$u_P = -\frac{iku e^{ikb}}{2\pi b} \int_S e^{-i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}} dS \tag{12.60}$$

где $u = Ae^{ika}/a$ - поле падающей волны на отверстии, b - расстояние от отверстия до точки наблюдения, $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}_0$ - изменение волнового вектора при дифракции, интегрирование производится по площади отверстия. Далее вычисляем интенсивность рассеяния в данный телесный угол $d\Omega$

$$dI = |u_P|^2 b^2 d\Omega = \frac{k^2|u|^2}{(2\pi)^2}\left|\int\limits_S e^{-i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}} dS\right|^2 d\Omega \tag{12.61}$$

и дифференциальное сечение дифракции

$$d\sigma = \frac{k^2}{(2\pi)^2}\left|\int\limits_S e^{-i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}} dS\right|^2 d\Omega \tag{12.62}$$

Полученная формула годится для расчета дифракции плоскопараллельного пучка света на отверстии любой формы.

В случае прямоугольного отверстия интеграл по плоскости отверстия дает

$$\int\limits_S e^{-i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}} dS = \frac{4\sin(q_x l_1)\sin(q_y l_2)}{q_x q_y}$$

При малых углах дифракции имеем $q_x = k\theta_x, q_y = k\theta_y$, где θ_x, θ_y - углы отклонения света в направлениях осей Ox, Oy. Сечение дифракции принимает вид

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{4l_1 l_2}{\lambda}\right)^2 \left(\frac{\sin kl_1\theta_x}{kl_1\theta_x}\right)^2 \left(\frac{\sin kl_2\theta_y}{kl_2\theta_y}\right)^2 \tag{12.63}$$

Угловое распределение дифрагированного света по каждому из взаимно перпендикулярных направлений дается функцией $f(x) = \sin^2 x/x^2$, где

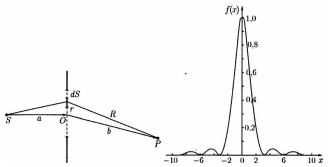


Рис. 12.7

Рис. 12.8

$x = kl\theta$. Эта функция максимальна ($f(0) = 1$) при $x = 0$ и быстро убывает с ростом x, испытывая колебания (рис. 12.8). Заметные отклонения света происходят только в пределах главного максимума на углы

$$\theta \leqslant 2\pi/kl = \lambda/l \tag{12.64}$$

Этим условием и определяются характерные углы дифракции.

При дифракции Фраунгофера существует простое соотношение, связывающее дифрагированные поля u_1, u_2 от двух взаимно дополнительных экранов. Дополнительным называется экран, имеющий отверстия там, де другой экран не прозрачен, и не прозрачный там, где другой экран имеет отверстия. Сумма полей $u_1 + u_2$ представляет собой поле в отсутствие каких-либо экранов, т. е. плоскую монохроматическую волну. Но падающая волна имеет определенное направление распространения $\boldsymbol{k}' = \boldsymbol{k}, \boldsymbol{q} = 0$, поэтому при $\boldsymbol{q} \neq 0$ будем иметь

$$u_1 + u_2 = 0, \quad u_2 = -u_1 \tag{12.65}$$

Это означает, что дополнительные экраны дают одинаковые интенсивности дифрагированного света (принцип Бабине).

Метод медленно изменяющейся амплитуды. Укороченное уравнение. Познакомимся с этим методом в простейшем варианте на характерном примере.

Пример 12.7. Стационарный пучок света (монохроматических волн) падает нормально на отверстие в плоском непрозрачном экране, расположенном в плоскости $z = 0$. В результате при $z = +0$ непосредственно за экраном волновое поле описывается функцией $u_0(x, y, 0)$ (временной множитель $e^{-i\omega t}$ опущен), которая отлична от нуля только в пределах отверстия, размер которого $l_\perp$ много больше длины волны. Представив поле в области $z > 0$ в виде

$$u(x, y, z) = A(x, y, z)e^{ikz}, \quad k = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon\mu} > 0 \tag{12.66}$$

вывести приближенное уравнение, которому удовлетворяет амплитуда $A(x, y, z)$. Записать в общем виде решение для области $z > 0$.

Решение. Монохроматическое поле удовлетворяет уравнению Гельмгольца (12.41). Подставив в него (12.66), получим точное уравнение для амплитуды:

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} + 2ik\frac{\partial A}{\partial z} = 0 \tag{1}$$

Покажем, что в рассматриваемых условиях члены с производными по z имеют разный порядок величины: $k|\partial A/\partial z| \gg |\partial^2 A/\partial z^2|$. Предполагая выполненным это неравенство, оценим по порядку величины отдельные члены в (1):

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \approx \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} \approx \frac{A}{l_\perp^2}; \quad \frac{\partial A}{\partial z} \approx \frac{A}{l_\parallel}; \quad l_\parallel \approx (kl_\perp)\, l_\perp \gg l_\perp$$

$$\frac{|\partial^2 A/\partial z^2|}{k|\partial A/\partial z|} \approx (kl_\perp)^{-2} \ll 1 \tag{2}$$

Эта оценка позволяет «укоротить» уравнение (1) и опустит в нем вторую производную по z:

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + +2ik\frac{\partial A}{\partial z} = 0 \tag{3}$$

Погрешность укороченного уравнения (3) порядка $(kl_\perp)^{-2} \ll 1$ тем меньше, чем больше поперечный размер пучка по сравнению с длиной волны $\lambda = 2\pi/k$. Это уравнение можно рассматривать как уравнение диффузии с мнимым коэффициентом диффузии χ:

$$\frac{\partial A}{\partial z} - \chi\Delta_\perp A = 0, \quad \chi = \frac{i}{2k} \tag{12.67}$$

Полезно сравнить это уравнение с уравнением диффузии магнитного поля в примере 10.6. Распространение пучка света в области $z > 0$ можно исследовать с использованием результатов указанного примера. Но следует учесть, что роль времени здесь играет координата z, а оператор Лапласа $\Delta_\perp$ двумерен. Поэтому функция Грина уравнения (12.67) будет иметь вид

$$G\left(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}', z\right) = \frac{1}{4\pi\chi z}\exp\left\{-\frac{\left(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'\right)^2}{4\chi z}\right\} \tag{12.68}$$

$$\boldsymbol{\rho} = (x, y), \boldsymbol{\rho}' = \left(x', y'\right), z \geqslant 0$$

Ее можно получить таким же путем, как это было сделано в примере 10.6. Амплитуда пучка выразится в виде интеграла

$$A(x,y,0)=\int G\left(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}',z\right)u_0\left(x',y'\right)dx'dy' \tag{12.69}$$

На границе $z=0$ имеем $G\left(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}',z\right)|_{z\to 0}\to\delta\left(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'\right)$, выполняется граничное условие $A(x,y,0)=u_0(x,y)$.

Использование полученных формул и их анализ см. в задачах 12.9412.96*.

Рекомендуемая литература: [Ландау и Лифшиц, Электродинамика сплошных сред; Батыгин и Топтыгин, Современная электродинамика, ч. 1; Бредов и др., Классическая электродинамика; Вайнштейн (1988); Борн и Вольф (1970); Ньютон (1969); Ваганов и Каценеленбаум (1982); Вайнштейн (1966b); Зоммерфельд (1960); Фейнберг (1999); Ахманов и Никитин (1998); Виноградова и др. (1979)].

Задачи

12.58*. На бесконечный круговой идеально проводящий цилиндр радиуса a, находящийся в вакууме, падает плоская монохроматическая волна в направлении, перпендикулярном оси цилиндра. Вектор $\boldsymbol{E}_0$ падающей волны параллелен оси цилиндра. Определить результирующее поле, распределение тока по поверхности цилиндра и полный ток $\mathscr{I}$; текущий вдоль цилиндра.

12.59. Найти дифференциальное сечение рассеяния $d\sigma_s$ электромагнитной волны (диаграмму направленности вторичных волн) цилиндром, рассмотренным в задаче 12.58*. Найти также полное сечение рассеяния σ_s.

12.60*. Плоская монохроматическая волна падает на идеально проводящий круговой цилиндр так, что ее магнитный вектор $\boldsymbol{H}_0=\mathscr{H}_0e^{i(\boldsymbol{k}\cdot r-\omega t)}$ параллелен, а волновой вектор k перпендикулярен оси цилиндра. Цилиндр находится в вакууме. Найти результирующее электромагнитное поле. Рассмотреть, в частности, случай тонкого ($ka\leqslant 1$) цилиндра, определить дифференциальное $d\sigma_s$ и полное σ_s сечения рассеяния для этого случая.

12.61. Пусть $d\sigma_{\|}$и $d\sigma_{\perp}$ - дифференциальные сечения рассеяния на бесконечном цилиндре плоской волны с вектором $\boldsymbol{E}$, направленным соответственно параллельно и перпендикулярно оси цилиндра. Найти дифференциальное сечение $d\sigma_s'$ рассеяния волны, у которой вектор $\boldsymbol{E}$ составляет с осью цилиндра угол φ, а также дифференциальное сечение $d\sigma_s''$ рассеяния неполяризованной волны.

Указание. Использовать принцип суперпозиции полей.

12.62. Неполяризованная плоская волна рассеивается на идеально проводящем тонком ($ka\ll 1$) цилиндре. Определить степень деполяризации ρ рассеянных волн в зависимости от угла рассеяния.

Указание. Степень деполяризации определяется формулой (2.134).

12.63. Решить задачу 12.60* о дифракции плоской волны на бесконечном цилиндре, не предполагая цилиндр идеально проводящим, но считая его поверхностный импеданс ζ малым. Воспользоваться приближенным граничным условием Леонтовича (12.13).

12.64. Определить среднюю потерю энергии Q и сечение поглощения σ_a на единицу длины цилиндра, рассмотренного в предыдущей задаче. Исследовать, в частности, случай $ka\ll 1$ и объяснить получающийся результат.

12.65*. Рассмотреть дифракцию плоской монохроматической волны на диэлектрическом цилиндре. Цилиндр радиуса a с диэлектрической проницаемостью ε и магнитной проницаемостью μ находится в вакууме. Волна падает нормально к образующей цилиндра, вектор $\boldsymbol{E}$ параллелен его оси. Определить результирующее поле.

12.66*. Линейно поляризованная плоская монохроматическая волна рассеивается на шаре, радиус которого a много меньше длины волны λ. Выразить составляющие электромагнитного поля рассеянного излучения в волновой зоне через электрическую и

магнитную поляризуемости шара. Определить эффективное дифференциальное сечение рассеяния.

Указание. В силу условия $a \ll \lambda$ считать внешнее поле вблизи шара однородным и рассмотреть излучение индуцированных электрического $\boldsymbol{p}$ и магнитного $\boldsymbol{m}$ дипольных моментов.

12.67. Вычислить дифференциальное $d\sigma_s$ и полное σ_s сечения рассеяния, а также степень деполяризации ρ вторичного излучения при рассеянии неполяризованной волны шаром, радиус которого a много меньше длины волны λ. Результат выразить через электрическую β_e, и магнитную β_m поляризуемости шара.

12.68. Используя результаты предыдущей задачи, определить дифференциальное $d\sigma_s$ и полное σ_s сечения рассеяния неполяризованного света малым диэлектрическим шаром с проницаемостью $\varepsilon(\mu = 1)$, а также степень деполяризации ρ рассеянного света. Построить графики зависимости этих величин от угла рассеяния θ. Указать условие применимости полученных формул. Решить ту же задачу для идеально проводящего шара с $\mu = 1$.

12.69. Плоская монохроматическая волна $\mathscr{E}_0 \exp[i(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} - \omega t)]$ рассеивается на диэлектрическом шаре радиуса a, удельная поляризуемость которого $(\varepsilon - 1)/4\pi \ll 1(\mu = 1)$. Соотношение между радиусом шара и длиной волны произвольно. Вследствие малой поляризуемости поляризация шара в первом приближении пропорциональна полю падающей волны. Определить дифференциальное сечение рассеяния и степень деполяризации ρ рассеянного излучения. Какой характер приобретает рассеяние в случае очень большого шара $(ka \gg 1)$?

12.70. Определить полное сечение рассеяния σ_s диэлектрической сферой, рассмотренной в предыдущей задаче, в предельном случае $ka \gg 1$. Сравнить со случаем $ka \ll 1$.

12.71*. Плоская монохроматическая линейно поляризованная электромагнитная волна падает на идеально проводящий шар радиуса a, находящийся в вакууме. Вычислить поле во всем пространстве, а также дифференциальное и полное сечения рассеяния электромагнитной волны шаром для общего случая, не предполагая его радиус малым по сравнению с длиной волны.

12.72*. Сделать то же самое для шара из прозрачного диэлектрика, находящегося в пространстве, заполненном другим диэлектриком.

12.73. Плоская монохроматическая волна падает под углом $\frac{\pi}{2} - \alpha$ на идеально проводящий тонкий диск, радиус которого a много меньше длины волны λ. Определить дифференциальное $d\sigma_s$ и полное σ_s сечения
рассеяния при различных поляризациях падающей волны, а также сечение рассеяния неполяризованной волны.

12.74. В однородном диэлектрике с проницаемостью $\varepsilon(\mu = 1)$ вырезана полость, имеющая форму тонкого диска радиуса a, толщиной $2h$. Нормально к плоскости полости падает неполяризованный свет с длиной волны $\lambda \gg a$. Найти дифференциальное $d\sigma_s$ и полное σ_s сечения рассеяния.

12.75^. Найти дифференциальное и полное сечения рассеяния плоской волны длиной λ на идеально проводящем цилиндре высотой $2h$ и радиуса $a \ll h \ll \lambda$. Исследовать различные случаи поляризации падающей волны. Цилиндр аппроксимировать вытянутым эллипсоидом вращения с полуосями a и h.

Указание. Использовать результаты, полученные в задачах (8.38), (8.39), (10.41).

12.76. Решить предыдущую задачу для диэлектрического цилиндра, высота которого $2h$ много меньше длины волны λ внутри цилиндра.

12.77*. Плоская монохроматическая волна рассеивается некоторой системой зарядов (например, макроскопическим телом). Электрическое поле на больших расстояниях от рассеивателя имеет вид

$$\boldsymbol{E} = E_0 \left[\boldsymbol{e} e^{ikz} + \boldsymbol{F}(\boldsymbol{n}) \frac{e^{ikr}}{r} \right]$$

где $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{r}/r, \boldsymbol{e} = \boldsymbol{E}_0/E_0, k = \omega/c, \boldsymbol{E}_0$ - амплитуда падающей волны, $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{n})$ - амплитуда рассеяния - функция, характеризующая свойства рассеивателя и зависящая от частоты. Доказать соотношение («оптическую теорему»):

$$\sigma_t = \frac{4\pi}{k} \operatorname{Im} \left[\boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{F}\left(\boldsymbol{n}_0\right) \right]$$

Здесь $\sigma_t = \sigma_s + \sigma_a$ - полное сечение взаимодействия волны с системой зарядов, равное сумме сечений рассеяния σ_s и поглощения $\sigma_a, \boldsymbol{F}\left(\boldsymbol{n}_0\right)$ - амплитуда рассеяния «вперед», т. е. в направлении распространения падающей волны.

12.78ˆ. Плоская монохроматическая волна падает на макроскопическую частицу, размер которой много меньше длины волны λ. Электрическая и магнитная поляризуемости частицы: $\beta_e = \beta_e' + i\beta_e''$ и $\beta_m = \beta_m' + i\beta_m''$ - комплексны, поэтому наряду с рассеянием происходит поглощение электромагнитной энергии. Вычислить сечение поглощения σ_a.

Указание. Поглощаемая в единицу времени энергия равна потоку вектора Пойнтинга через поверхность сферы большого радиуса, окружающей частицу.

12.79. Вычислить сечение σ_a поглощения электромагнитной волны проводящим шаром с малым поверхностным импедансом $\zeta = \zeta' + i\zeta''$. Радиус шара b мал по сравнению с длиной волны λ.

12.80. Плоская монохроматическая волна падает на макроскопическое тело. Сечение поглощения волны телом σ_a и дифференциальное сечение рассеяния $d\sigma_s/d\Omega$ - известны. Выразить через них среднюю по времени силу $\bar{F}$, действующую на тело со стороны волны.

12.81*. Определить среднюю силу $\bar{F}$, которая действует на малый шар радиуса a, находящийся в поле плоской монохроматической волны. Рассмотреть случаи идеально проводящего шара и диэлектрического шара с диэлектрической проницаемостью ε (магнитная проницаемость $\mu = 1$). Амплитуда падающей волны E_0.

12.82. Точечный источник света расположен на оси, проходящей через центр круглого непрозрачного экрана радиуса a перпендикулярно его плоскости. Считая выполненным условие применимости геометрической оптики ($\lambda \ll a$), найти интенсивность света I в симметричной относительно экрана точке P.

12.83. В предыдущей задаче рассмотреть дифракцию на дополнительном экране (т. е. на круглом отверстии в бесконечном непрозрачном экране). □

12.84. Параллельный пучок света падает на круглое отверстие в непрозрачном экране перпендикулярно его плоскости. Найти распределение интенсивности света I на средней линии за экраном.

12.85. Найти угловое распределение интенсивности света dI при дифракции Фраунгофера на кольцевом отверстии (радиусы $a > b$) в бесконечном непроницаемом экране. Начальный пучок света падает нормально к плоскости отверстия. Рассмотреть частный случай дифракции на круглом отверстии.

12.86. Найти угловое распределение интенсивности света dI при наклонном падении параллельного пучка на круглое отверстие (дифракция Фраунгофера).

12.87. Вычислить сечение дифракции Фраунгофера на длинной щели шириной l_1 в непрозрачном экране.

12.88*. В непроницаемом экране имеется N бесконечно длинных щелей шириной $2l$, расстояния между соседними щелями $2a$. Вычислить сечение дифракции на такой решетке (в расчете на единицу длины щелей). Исследовать зависимость сечения от угла дифракции при $N \gg 1$.

12.89. Плоская линейно поляризованная волна падает на прямоугольное отверстие $-a \leqslant x \leqslant a, -b \leqslant y \leqslant b$ в бесконечном тонком экране нормально к его плоскости. Амплитуды электрического и магнитного полей имеют составляющие $E_y = E_0, H_x = -E_0, H_y = E_x = 0$. Определить поле излучения из отверстия, а также угловое распределение излучения dI.

12.90. Плоская линейно поляризованная волна $\boldsymbol{E}_0 e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}$ падает на круглое отверстие радиуса a в бесконечном тонком экране нормально к его плоскости. Определить поле излучения из отверстия и угловое распределение интенсивности излучения dI.

12.91. Плоская монохроматическая волна $\boldsymbol{E}^0(x,z) = \boldsymbol{E}_0 \exp(i\boldsymbol{k}_0 \cdot \boldsymbol{r})$, $\boldsymbol{k}_0 = (k\sin\theta_0 0, k\cos\theta_0), k = \omega/c$ падает наклонно на непроницаемый экран, который занимает плоскость $z = 0$. В экране имеется длинная щель шириной $2l$ ($-l \leqslant x \leqslant l$, параллельная оси Oy. Вычислить электромагнитное поле в волновой зоне за экраном ($z > 0$), воспользовавшись формулой Кирхгофа для вектора Герца в форме (12.50).

12.92. Решить предыдущую задачу для случая, когда вместо щели в экране имеется прямоугольное отверстие размером $2l \times 2a$. По образцу решения задачи 12.87 осуществить предельный переход к случаю бесконечно длинной щели.

12.93**. В непроницаемом экране имеется щель кольцевой формы (внешний радиус b, внутренний a). На экран нормально к его поверхности падает плоская монохроматическая волна. Вычислить и проанализировать поле в волновой зоне за экраном. Рассмотреть, в частности, случаи азимутальной и радиальной (относительно кольцевой щели) поляризации падающей волны.

12.94. Исследовать распространение пучка света в приближении медленно меняющейся амплитуды (формула (12.69)) для случая точечного отверстия в экране: $u_0(x,y) = A_0\delta(x/a)\delta(y/a)$, где A_0, a - постоянные. Из сравнения с точным решением $u = Ce^{ikR}/R$ для точечного источника указать пределы применимости решения.

12.95. Исследовать распространение пучка света в приближении медленно меняющейся амплитуды (формула (12.69)) для случая, когда амплитуда поля на отверстии в экране представляется распределением Гаусса
$u_0(\rho) = A_0 \exp(-\rho^2/a^2)$. Найти, в частности, ширину пучка $a(z)$ как функцию продольной координаты z и начальной ширины a.

12.96*. Сделать то же самое для случая, когда поле на отверстии изменяется по фазе: $u_0(\rho) = A_0 \exp(-\rho^2/a^2 - ik\rho^2/2R)$, где A_0, a, R - постоянные. Исследовать зависимость ширины пучка от z.

12.4. Дифракция рентгеновых лучей

Рентгеновские (рентгеновы [7]) лучи - это высокочастотное электромагнитное излучение в диапазоне от $\approx 2 \times 10^{23}$ рад/с до $\approx 2 \times 10^{16}$ рад/с (от $\lambda \approx 10^{-12}$ см до $\lambda \approx 10^{-5}$ см), между ультрафиолетом и гамма-излучением.

Диэлектрическая проницаемость. При рассмотрении рассеяния рентгеновых лучей на макроскопических телах существенным является то обстоятельство, что длина волны λ сравнима с размерами a атомов. В конденсированных средах тот же порядок величины имеют межатомные расстояния, в газах эти расстояния много больше a. Вследствие этого становится невозможным усреднение по физически малым элементам объема, рассматривавшееся в главе 7. Требуется производить усреднение по ансамблю (см. гл. 11). Однако в том случае, когда частота рентгеновых лучей велика по сравнению с характерными атомными частотами $\omega_0 \sim v_0/c$, электроны среды можно рассматривать как свободные. Для свободных (к тому же нерелятивистских) электронов уравнения движения во внешнем электромагнитном поле легко интегрируются, без затруднений может быть вычислен наведенный полем ток и определена диэлектрическая проницаемость, зависящая от координат $\boldsymbol{r}$ (см. задачу 11.7):

$$\varepsilon(\boldsymbol{r}) = 1 - \frac{4\pi e^2 n(\boldsymbol{r})}{m\omega^2} \tag{12.70}$$

Здесь $n(\boldsymbol{r})$ - концентрация электронов в рассеивателе, определяемая законами квантовой механики, усредненная по равновесному статистическому распределению состояний теплового движения атомов. При высоких частотах магнитные свойства среды чрезвычайно слабы, и можно положить $\mu = 1$. Теория диэлектрической проницаемости в рентгеновском и гаммадиапазоне изложена в обзоре [Колпаков и др. (1978)].

Кинематическая теория дифракции. Мы не будем рассматривать строгую теорию взаимодействия рентгеновых лучей с веществом и ограничимся случаем, когда это взаимодействие можно учесть по теории возмущений. Это означает, что рассматриваются тела небольших размеров и амплитуда дифрагированной волны предполагается малой по сравнению с амплитудой первичной волны. Поэтому наложим ограничение

$$\frac{4\pi e^2 n}{m\omega^2} \ll 1 \tag{12.71}$$

Запишем уравнения Максвелла для монохроматических полей в обычном виде

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = i\frac{\omega}{c}\boldsymbol{B}, \quad \nabla \times \boldsymbol{B} = -i\frac{\omega}{c}\boldsymbol{D}, \quad \nabla \cdot \boldsymbol{D} = \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \tag{12.72}$$

где

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}, \quad \text{или} \quad \boldsymbol{E} = \boldsymbol{D} + \frac{4\pi e^2 n}{m\omega^2}\boldsymbol{E}$$

Исключив из системы (12.72) вектор $\boldsymbol{B}$, будем иметь $\nabla \times [\nabla \times \boldsymbol{E}] = (\omega/c)\boldsymbol{D}$ или, с учетом уравнения $\nabla \cdot \boldsymbol{D} = 0$, получим окончательно

$$\Delta \boldsymbol{D} + \frac{\omega^2}{c^2}\boldsymbol{D} = \nabla \times \left[\nabla \times \left(\frac{4\pi e^2 n}{m\omega^2}\boldsymbol{E}\right)\right] \tag{12.73}$$

Это уравнение применимо как внутри рассеивателя, где $\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E}$, так и вне его, где $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{E}$. В правую часть ввиду наличия малого множителя (12.71) в дальнейшем следует подставлять невозмущенное электрическое поле падающей волны. Из уравнения следует, что рассеянное поле имеет ту же частоту, что и первичная волна, т.е. оно описывает процесс когерентного рассеяния без изменения частоты.

Решение уравнения (12.73) можно записать через запаздывающую функцию Грина (см. раздел 5.1). На больших расстояниях от тела $'$ ($r \gg r'$) используем функцию Грина (5.14) вида

$$G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = \frac{1}{r}\exp(ikr - i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}'), \quad k = \frac{\omega}{c}$$

где $\boldsymbol{k} = k\boldsymbol{r}/r$ - волновой вектор рассеянной волны. Падающую волну возьмем в виде $\boldsymbol{E}_0 \exp(i\boldsymbol{k}_0 \cdot \boldsymbol{r}')$. Электрическое поле рассеянной волны вдали от тела запишется в виде

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -\frac{e^2}{m\omega^2}\int G(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')\,\nabla' \times [\nabla' \times \boldsymbol{E}_0 n(\boldsymbol{r}')\exp(i\boldsymbol{k}_0 \cdot \boldsymbol{r}')]\,dV'$$

Интегрирование по частям позволяет выразить эту величину через гармонику Фурье электронной плотности:

[07] Рентген Вильгельм Конрад (1845-1923) - выдающийся немецкий физик-экспериментатор. За открытие рентгеновских лучей и исследование их свойств получил первую в истории Нобелевскую премию по физике (1901). Его учеником был основоположник советской физики А. Ф. Иоффе.

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{e^2}{m\omega^2 r} e^{ikr} \boldsymbol{k} \times [\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{E}_0] \int n(\boldsymbol{r}') e^{-i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}'} dV' \tag{12.74}$$

Здесь $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}_0$ - изменение волнового вектора при рассеянии, интегрирование производится по объему рассеивающего тела.

С помощью (12.74), пользуясь определением (12.37), можно записать дифференциальное сечение рассеяния поляризованной рентгеновской волны:

$$d\sigma = r_0^2 \sin^2\theta \left| \int n(\boldsymbol{r}) \exp[-i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}] dV \right|^2 d\Omega \tag{1.75}$$

где $r_0 = e^2/mc^2$ - классический радиус электрона, θ - угол между $\boldsymbol{E}_0$ и $k, d\Omega$ - элемент телесного угла, в который происходит рассеяние. Для того чтобы падающее излучение можно было рассматривать как плоскую поляризованную волну, необходимо, чтобы размеры тела были малы по сравнению с длиной когерентности [8]. Обычно рентгеновские волны неполяризованы. Усреднение по поляризациям дает

$$d\sigma = \frac{1}{2} r_0^2 \left(1 + \cos^2\vartheta\right) \left| \int n(\boldsymbol{r}) \exp[i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}] dV \right|^2 d\Omega \tag{1.76}$$

где ϑ - угол рассеяния, т. е. угол между $\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{k}_0$. Условием применимости формул (12.75), (12.76) является требование, чтобы полное сечение $\sigma = \int\limits_{(4\pi)} d\sigma$ было мало по сравнению с площадью поперечного сечения образца в целом. Изложенный выше подход, основанный на теории возмущений, называется кинематическим. Если сформулированное условие не выполняется, то требуется более точная динамическая теория (см., например, [Пинскер (1974)]; основные уравнения динамической теории имеются в учебнике [Бредов и др., Классическая электродинамика]).

Полученные выше формулы применимы и к рассеянию рентгеновых лучей отдельным атомом. В этом случае интеграл берется по объему атома, а величина

$$F_a(\boldsymbol{q}) = \int\limits_{V_a} n_a(\boldsymbol{r}) \exp[-i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}] dV \tag{12.77}$$

называется атомным форм-фактором. Атомный форм-фактор представляет собой просто компоненту Фурье от распределения $n_a(\boldsymbol{r})$ электронов в атоме и через него можно с помощью обратного преобразования Фурье вычислить $n_a(\boldsymbol{r})$.

Дифракция на монокристаллах. При дифракции рентгеновых лучей на монокристалле электронная плотность $n(\boldsymbol{r})$ представляет собой периодическую функцию координат:

$$n(\boldsymbol{r}) = n(\boldsymbol{r} + \boldsymbol{a}), \quad \boldsymbol{a} = m_1\boldsymbol{a}_1 + m_2\boldsymbol{a}_2 + m_3\boldsymbol{a}_3 \tag{12.78}$$

где a_1, a_2, a_3 - основные векторы кристаллической решетки, m_i - целые числа (это условие строго выполняется только для бесконечного и бездефектного кристалла). Ввиду периодичности разложение электронной плотности в ряд Фурье по координатам имеет вид

$$n(\boldsymbol{r}) = \sum_{\boldsymbol{b}} n_b e^{i\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{r}}, \quad n_b = \frac{1}{V} \int \cdot n(\boldsymbol{r}) e^{-i\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{r}} dV \tag{12.79}$$

[08] Длиной когерентности называется расстояние, на котором отдельные цуги волн, входящие в любой реальный сигнал, сохраняют малую разность фаз. На большей длине сигнал становится некогерентным и неполяризованным. Более точное определение длины когерентности см. в следующей главе, в разделе 13.1

где $\boldsymbol{b} = 2\pi\boldsymbol{g}$ - векторы обратной решетки, а отличающиеся от них множителем 2π векторы g образуют взаимный базис (см. пример 1.2 в гл. 1) по отношению к векторам $\boldsymbol{a}$ исходной решетки. Элементарные векторы взаимного базиса определяются соотношениями

$$\boldsymbol{g}_1 = \frac{\boldsymbol{a}_2 \times \boldsymbol{a}_3}{V_c}, \quad \boldsymbol{g}_2 = \frac{\boldsymbol{a}_3 \times \boldsymbol{a}_1}{V_c}, \quad \boldsymbol{g}_3 = \frac{\boldsymbol{a}_1 \times \boldsymbol{a}_2}{V_c}, \quad V_c = \boldsymbol{a}_1 \cdot [\boldsymbol{a}_2 \times \boldsymbol{a}_3] \tag{12.80}$$

При замене в (12.79) $\boldsymbol{r}$ на $\boldsymbol{r} + \boldsymbol{a}$ значение электронной плотности не изменится, так как $e^{i\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}} = e^{2\pi i N}$, где N - целое число.

В случае кристаллического рассеивателя

$$\int n(\boldsymbol{r}) dV = \sum_{\boldsymbol{b}} n_b \int e^{i(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{q})\cdot\boldsymbol{r}} dV \tag{12.81}$$

Интеграл по объему имеет наибольшее значение при $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{b}$ или

$$\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}_0 = \boldsymbol{b} = 2\pi\boldsymbol{g} \tag{12.82}$$

(уравнение Лауэ) [9]. В этом случае он равен объему кристалла. При нарушении этого равенства интеграл сильно уменьшается из-за осцилляций

экспоненты. Взяв обе части равенства (12.78) по модулю и учитывая, что $q = |\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}_0| = 2k\sin(\vartheta/2)$, где ϑ - угол рассеяния, получим уравнение Брегга [10]-Вульфа [1!]
$$

$$2k\sin\frac{\vartheta}{2} = b = 2\pi g \tag{12.83}$$

$$

Уравнения Лауэ и Брегга-Вульфа определяют те направления в пространстве, вдоль которых сечение рассеяния рентгеновых лучей имеет наибольшее значение (главные максимумы дифракции). При заданном значении b главный максимум возникнет лишь при условии $k = \omega/c > b/2$.

Более подробные сведения о дифракции рентгеновых лучей содержатся в [Ландау и Лифшиц, Электродинамика сплошных сред; Бредов и др., Классическая электродинамика; Каули (1979); Пинскер (1974); Кривоглаз (1967); Джеймс (1950)].

Задачи

12.97. Выяснить, при каких условиях сечение рассеяния рентгеновых лучей на телах конечной протяженности принимает вид сечения рассеяния на свободных зарядах (формула Томсона). Написать соответствующие выражения для сечений. Число атомов в теле N, число электронов в каждом атоме Z.

12.98. Распределение электронной концентрации в Z-электронном атоме аппроксимируется выражением $n_a(r) = n_{0a}\exp\left[-\frac{r}{a}\right]$, где $n_{0a} = Z/\pi a^3, a = a_B/Z^{1/3}, a_B = 0,529 \times 10^{-8}$ см - боровский радиус. Найти дифференциальное сечение рассеяния волны рентгенового диапазона на одноатомном газе, содержащем N атомов, считая распределение атомов совершенно хаотическим.

12.99. Найти сечение рассеяния рентгеновых лучей на объеме газа, содержащем N двухатомных молекул. Атомы в молекуле одинаковы и находятся на фиксированном

[09] фон Лауэ Макс Феликс Теодор (1879-1960) - немецкий физик-теоретик, Нобелевский лауреат (1914), разработал теорию дифракции рентгеновых лучей. Основоположник рентгеноструктурного анализа.

расстоянии R друг от друга. Принять, что формфактор $F_a(q)$ атома, входящего в состав молекулы, тот же, что и у изолированного атома.

12.100. Как изменится сечение рассеяния рентгеновых лучей на объеме газа из двухатомных молекул, рассмотренном в предыдущей задаче, если учесть тепловые колебания атомов в молекуле?

Указание. Считать, что расстояния R между атомами распределены около среднего значения $R_0 \gg b$ по закону

$$dW_x = \frac{1}{b\sqrt{\pi}} \exp\left[-\frac{x^2}{b^2}\right] dx, \quad \text{где} \quad x = R - R_0, \quad b = \sqrt{\frac{2kT}{\mu\omega^2}}$$

T - температура, μ - приведенная масса, ω - частота собственных колебаний атомов в молекуле.

12.101. Вывести уравнение Лауэ (12.82) и условие БрэггаВульфа (12.83), рассматривая интерференцию волн, рассеянных на отдельных центрах идеальной кристаллической решетки.

12.102. Найти сечение рассеяния рентгеновых лучей на идеальном монокристалле, состоящем из N одинаковых атомов с формфакторами $F_a(q)$ (считать, что эти формфакторы те же, что и в случае изолированных атомов). Элементарная ячейка имеет форму куба с ребром a, кристалл имеет форму прямоугольного параллелепипеда с ребрами L_1, L_2, L_3, параллельными ребрам элементарной ячейки. Определить положение главных максимумов, убедиться в выполнении уравнения Лауэ (12.82). Найти величину сечения в этих максимумах.

12.103. Кристалл состоит из кубических элементарных ячеек с ребром a и имеет форму прямой призмы с прямоугольным равнобедренным треугольником в основании (катеты основания $L_1 = L_2$, боковое ребро L_3). Определить положения главных максимумов, найти величину сечения в этих максимумах.

12.104*. Найти распределение интенсивности в дифракционном пятне вблизи одного из главных максимумов при рассеянии рентгеновых лучей на монокристалле, рассмотренном в задаче 12.102. Волновой вектор падающих рентгеновых лучей параллелен ребру L_3, а $k \gg 1/a$. Определить ширину дифракционного максимума и полное сечение, отвечающее рассеянию в пределах одного дифракционного пятна.

12.105. Вычислить распределение интенсивности в дифракционном пятне вокруг главного максимума при произвольном направлении падения и произвольном соотношении между k и $1/a$. Рентгеновы лучи рассеиваются на монокристалле, имеющем форму прямоугольного параллелепипеда с ребрами L_1, L_2, L_3 (см. задачу 12.102).

12.106. Решить предыдущую задачу для случая рассеяния на монокристаллическом образце шарообразной формы (радиус R).

12.5. Ответы и решения

12.1. $\omega_t(k) = ck/n, n = \sqrt{\varepsilon\mu}$ - показатель преломления. Продольных колебаний не существует.

$$\boldsymbol{H} = \frac{c}{\omega\mu}\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{E}, \quad \frac{H}{E} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}, \quad \frac{\varepsilon E^2}{8\pi} = \frac{\mu H^2}{8\pi}$$

12.2. Электромагнитное поле с частотой ω может распространяться в виде поперечных волн с волновым числом

[010] Брегг Лоуренс (1890-1971)- английский физик, Нобелевская премия (1915) за рентгеноструктурные исследования.

[11] Вульф Георгий Викторович (1863-1925) - российский кристаллофизик и кристаллограф.

$$k = \frac{\omega}{c}\sqrt{\frac{\omega_l^2 - \omega^2}{\omega_s^2 - \omega^2}} \quad (\text{ полагаем } \quad \gamma_s \ll \omega_s, \omega_l)$$

где $\omega_l^2 = \omega_s^2 + \omega_p^2 f_s$ - квадрат частоты продольных колебаний, найденный в задаче 11.44. Волновое число (постоянная распространения) становится чисто мнимой в интервале частот $\omega_s < \omega < \omega_l$, в котором диэлектрик непрозрачен. Затухание связано не с диссипацией электромагнитной энергии, а с интерференционным гашением волны колебаниями осцилляторов. Вне этого интервала диэлектрик прозрачен, при $0 \leqslant \omega \leqslant \omega_l$ дисперсионная зависимость вида $2\omega_{t1}(k) = \omega_l^2 + c^2k^2 - \sqrt{\left(\omega_l^2 + c^2k^2\right)^2 - \omega_s^2 c^2 k^2}$, $0 \leqslant k < \infty$. При частотах $\omega > \omega_l$ закон дисперсии $2\omega_{t2}(k) = \omega_l^2 + c^2k^2 + \sqrt{\left(\omega_l^2 + c^2k^2\right)^2 - \omega_s^2 c^2 k^2}, 0 \leqslant k < \infty$. В частности, при $ck \ll \omega_l$ имеем $\omega_{t2} \approx \omega_l + \left(1 - \omega_s^2/\omega_l^2\right) c^2k^2/2$, при $ck \gg \omega_l$ дисперсионная зависимость $\omega_{t2} = ck$ такая же, как в вакууме. В области частот порядка ω_s, ω_l проявляется сильная связь между колебаниями электромагнитного поля и атомных осцилляторов (поляритонные волны и их квантовые возбуждения - поляритоны).

12.3. $k = (\omega/c)\sqrt{1 - \omega_{0e}^2/\omega^2}$. Область непрозрачности $\omega < \omega_{0e}$, поэтому ветвь поперечных волн в плазме начинается с частоты $\omega_t = \omega_{0e}$: $\omega_t(k) = \sqrt{\omega_{0e}^2 + c^2k^2}$. Фазовая скорость поперечной волны $v_{ph} = c/\sqrt{1 - \omega_{0e}^2/\omega^2} > c$, поэтому затухание Ландау полностью отсутствует. Тепловые поправки к закону дисперсии имеют порядок $v_{Te}^2/c^2 \ll 1$.

12.4. Область непрозрачности: $\omega_t < \omega < \omega_l$. Дисперсионные зависимости при малых k : $\omega_{t1}(k) = c^2k^2/\varepsilon_0, \omega_{t2}(k) = \omega_l^2 + c^2k^2/\varepsilon_\infty$. При больших $k : \omega_{t1}(k) = \omega_t, \omega_{t2}(k) = c^2k^2/\varepsilon_\infty (k \leqslant 1/a)$.

12.5. Волновой пакет описывается функцией

$$\Psi(\boldsymbol{r}, t) = 4\pi a_0 \sqrt{\frac{\pi q^3}{2\rho^3}} J_{3/2}(\rho q) \exp\left(i\boldsymbol{k}_0 \cdot \boldsymbol{r} - i\omega_0 t\right)$$

где $J_{3/2}(x) = \sqrt{2/\pi x}(\sin x/x - \cos x)$ - функция Бесселя, $\rho = |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{v}_g t|$. Амплитуда волнового пакета заметно отлична от нуля только в пространственной (сферически симметричной) области $\rho q \leqslant 1$. Пакет ограничен по всем трем измерениям.

Как видно из выражения для $\Psi(\boldsymbol{r}, t)$, форма пакета со временем не меняется. Это обусловлено линейным законом дисперсии, который строго справедлив для электромагнитных волн только в вакууме. При учете следующих членов разложения ω по k имеет место изменение («расплывание») формы пакета. Пакет движется как целое с групповой скоростью v_g.

12.6. Представив зависимость $\omega(k)$ в виде

$$\omega = \omega_0 + v_g\left(k - k_0\right) + \beta\left(k - k_0\right)^2$$

получим

$$\Psi(x, t) = a_0 \sqrt{\frac{\pi}{\alpha + i\beta t}} \exp\left\{-\frac{\left(x - v_g t\right)^2}{4(\alpha + i\beta t)} + i\left(k_0 x - \omega_0 t\right)\right\}$$

Характер зависимости этой комплексной амплитуды от x и t проще исследовать, образовав квадрат модуля (именно он определяет интенсивность волны):

$$|A(x, t)|^2 = \frac{\pi a_0^2}{\sqrt{\alpha^2 + (\beta t)^2}} \exp\left\{-\frac{\alpha\left(x - v_g t\right)^2}{2\left(\alpha^2 + \beta^2 t^2\right)}\right\}$$

Из этого выражения видно, что интенсивность волны как функция x при фиксированном t имеет вид кривой Гаусса, но ее ширина l растет со временем:

$$l = \sqrt{\frac{2\left(\alpha^2 + \beta^2 t^2\right)}{\alpha}}$$

а высота убывает за счет множителя $\left(\alpha^2 + \beta^2 t^2\right)^{-1/2}$.

Волновой пакет расплывается: Расплывание происходит симметричным образом (в сторону $t = +\infty$ и в сторону $-\infty$) и, разумеется, не связано с поглощением энергии, так как k вещественно. Отсутствие диссипации видно и из того, что интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |A(x,t)|^2 dx = \sqrt{\frac{\pi}{2\alpha}} a_0^2$ не зависит от времени, т. е. полная энергия сохраняется. Причиной расплывания является неодинаковость скоростей распространения (фазовых) $v_{ph} = \omega/k$ отдельных плоских волн, входящих в суперпозицию: вследствие дисперсии отношение ω/k зависит от k.

12.7. Плазма. При $\omega > \omega_{0e}, v_{ph} = c/\sqrt{\varepsilon(\omega)}, v_g = c\sqrt{\varepsilon(\omega)}$.

Неполярный диэлектрик. При $\omega \ll \omega_0$

$$v_{ph} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_0}}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{\omega_p^2\omega^2}{\varepsilon_0\omega_0^4}\right) < c, \quad v_g = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_0}}\left(1 - \frac{3}{2}\frac{\omega_p^2\omega^2}{\varepsilon_0\omega_0^4}\right) < c$$

где $\varepsilon_0 = \varepsilon(0)$. При $\omega \gg \omega_0$

$$v_\varphi = c\left(1 + \frac{\omega_p^2}{2\omega^2}\right) > c, \quad v_g = c\left(1 - \frac{\omega_p^2}{2\omega^2}\right) < c$$

В последнем случае $v_{ph} \cdot v_g \approx c^2$. Вблизи резонансной частоты ($\omega \approx \omega_0$) понятие групповой скорости теряет смысл.

12.8.

$$\Delta t = \frac{e^2\left(\lambda_1^2 - \lambda_2^2\right)}{2\pi m_e c^3} DM \approx 4,6\left(\lambda_1^2 - \lambda_2^2\right) DM \text{ мкс.}$$

В последнем выражении запаздывание выражено в микросекундах, λ - в см, а мера дисперсии - в парсеках на см ^{3} (1 пк $\approx 3 \times 10^{18}$ см). В радиоастрономии меры дисперсии определяют по запаздыванию сигналов от пульсаров быстро вращающихся нейтронных звезд. Ввиду неоднородности межзвездной плазмы таким путем определяется средняя концентрация электронов на луче зрения от пульсара согласно формуле $DM = \int\limits_0^L N_e dl = \bar{N}_e L$ (если расстояние до пульсара определено каким-либо другим способом).

12.10. Обе волны будут поляризованы эллиптически. Одна из главных осей эллипса поляризации лежит в плоскости падения, другая к ней перпендикулярна. Полуоси имеют следующую величину.

В отраженной волне:

$$E_\parallel = \frac{\operatorname{tg}\left(\theta_0 - \theta_2\right)}{\operatorname{tg}\left(\theta_0 + \theta_2\right)} E_0, \quad E_\perp = \frac{\sin\left(\theta_2 - \theta_0\right)}{\sin\left(\theta_2 + \theta_0\right)} E_0$$

В преломленной волне:

$$E_\parallel = \frac{2\cos\theta_0 \sin\theta_2}{\sin\left(\theta_0 + \theta_2\right)\cos\left(\theta_0 - \theta_2\right)} E_0, \quad E_\perp = \frac{2\cos\theta_0 \sin\theta_2}{\sin\left(\theta_0 + \theta_2\right)} E_0$$

где θ_0 - угол падения, θ_2 - угол преломления, E_0 - абсолютная величина амплитуды падающей волны.

При $\theta_0 = \pi/2 - \theta_2$ (угол Брюстера) отраженная волна поляризована линейно.

12.11. Неполяризованный (естественный) свет можно рассматривать как некогерентную суперпозицию двух «дополнительным образом» поляризованных волн с одинаковой интенсивностью. Воспользуемся этим и представим падающий пучок в виде суперпозиции двух некогерентных компонент, одна из которых, $E_\parallel$, поляризована в плоскости падения, а другая, $E_\perp$ - в перпендикулярной плоскости. Интенсивности этих волн одинаковы:

$$I_\parallel = I_\perp = I$$

После отражения обе компоненты по-прежнему будут некогерентными. С помощью формул Френеля найдем

$I_{ik}^{(1)} = I\frac{\sin^2(\theta_0-\theta_2)}{\sin^2(\theta_0+\theta_2)}\left(e_i^\perp e_k^\perp + \frac{\cos^2(\theta_0+\theta_2)}{\cos^2(\theta_0-\theta_2)}e_i^\parallel e_k^\parallel\right), \rho_1 = \frac{\cos^2(\theta_0+\theta_2)}{\cos^2(\theta_0-\theta_2)} < 1,$

$e^\perp$ и $e^{\parallel l}$ - единичные векторы, указывающие направления поляризации поперечной и продольной компонент; эти векторы лежат в плоскости, перпендикулярной направлению отраженного света. Степень деполяризации падающего света равна 1 ; при отражении свет поляризуется.

Аналогичный расчет дает для преломленного света:

$I_{ik}^{(2)} = \frac{4I\cos^2\theta_0\sin^2\theta_2}{\sin^2(\theta_0+\theta_2)}\left(e_i^\perp e_k^\perp + \frac{e_i^\parallel e_k^\parallel}{\cos^2(\theta_0-\theta_2)}\right), \quad \rho_2 = \cos^2(\theta_0-\theta_2) < 1$

12.12. $R = \frac{(\varepsilon_1-\varepsilon_2)^2}{2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}, \quad \rho_1 = 0, \quad \rho_2 = \frac{4\varepsilon_1\varepsilon_2}{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)^2}$, где ε_1 и ε_2 - диэлектрические проницаемости первого и второго диэлектрика.

12.13. Сдвиги фаз между $E_{\perp 1}, E_0$ и $E_{\parallel 1}, E_0$ можно определить с помощью формул Френеля:

$$\operatorname{tg}\frac{\delta_\perp}{2} = \frac{\sqrt{\sin^2\theta_0 - n^2}}{\cos\theta_0}, \quad \operatorname{tg}\frac{\delta_\parallel}{2} = \frac{\sqrt{\sin^2\theta_0 - n^2}}{n^2\cos\theta_0} \tag{1}$$

Поскольку $\delta_\perp \neq \delta_\parallel$, волна поляризована по эллипсу.

Эллиптическая поляризация перейдет в круговую при выполнении условий:

$$\text{a) } \delta = \delta_\parallel - \delta_\perp = \frac{\pi}{2}; \quad \text{b) } E_{\parallel 0} = E_{\perp 0}$$

Условие b) означает, что падающая волна должна быть поляризована в плоскости, составляющей угол $\pi/4$ с плоскостью падения. Исследуем, может ли выполняться условие a).

Из формул (1) получим:

$$\operatorname{tg}\frac{\delta}{2} = \frac{\cos\theta_0\sqrt{\sin^2\theta_0 - n^2}}{\sin^2\theta_0} \tag{2}$$

Отсюда следует, что при $\theta_0 = \arcsin n$ и $\theta_0 = \pi/2, \delta$ обращается в нуль, а между этими точками принимает максимальное значение. Обычным способом легко найти, что $\operatorname{tg}\delta_{\max}/2 = (1-n^2)/2n$. Чтобы $\operatorname{tg}\delta/2$ был равен 1 ($\delta = \pi/2$), должны выполняться неравенства $1 - n^2 \geqslant 2n, n \leqslant 0,414$.

12.14. Если вектор $\boldsymbol{E}_0$ нормален к плоскости падения, поперечная и продольная составляющие вектора Пойнтинга имеют вид

$$\left.\begin{aligned}\gamma_\perp &= \tfrac{c^2k''}{8\pi\omega}E_0^2e^{-2k''z}\sin 2(k'x-\omega t)\\ \gamma_\parallel &= \tfrac{c^2k''}{8\pi\omega}E_0^2e^{-2k''z}\left[1-\cos 2(k'x-\omega t)\right]\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Здесь ось Oz нормальна к границе сред, ось Ox представляет собою линию пересечения плоскости падения и границы раздела,

$$k' = k_2 \sin\theta_0, \quad k'' = k_2\sqrt{\sin^2\theta_0 - n^2}$$

где $k_2 = \frac{\omega}{c} n_2$ - волновой вектор во второй среде, θ_0 - угол падения.
Из формул (1) видно, что в направлении нормали к границе энергия совершает колебания с частотой 2ω. Средний (по времени) поток энергии
во вторую среду равен нулю. Среднее значение $\gamma_{\|}$не равно нулю: имеется поток энергии вдоль границы раздела.

Линии вектора Пойнтинга во второй среде определяются уравнением

$$z = \frac{1}{k''} \ln \frac{|\sin k'x|}{C}, \tag{2}$$

где C - постоянная интегрирования.
Примерный ход этих линий изображен на рис. 12.9. В первой среде линии γ имеют более сложный вид.

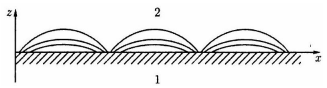


Рис. 12.9

12.15. Из формул Френеля получим, что при $\theta_0 \to \pi/2$ амплитуда прошедшей волны $E_1 \to 0$, а амплитуда отраженной волны $E_2 \to -E_0$. Это означает, что плоская монохроматическая волна не может распространяться вдоль границы раздела диэлектриков.

12.16. Удобно использовать квантовую картину электромагнитного поля и представить падающую волну как поток фотонов (см. главу 6). Давление на границу будут создавать только отраженные фотоны. Они будут передавать в единицу времени удвоеннную проекцию своего импульса на нормаль к границе, которая и создаст давление p_{rad}:

$$p_{\text{rad}} = 2N\hbar k R(\theta) \cdot c\cos\theta = 2wR(\theta)\cos^2\theta$$

Здесь $c\cos\theta$ - проекция скорости фотона на нормаль, $2\hbar k\cos\theta$ - импульс, передаваемый одним отраженным фотоном, $R(\theta)$ - доля отраженных фотонов, N - число фотонов в единице объема, $w = N\hbar\omega$ - плотность энергии в падающей волне. Давление приложено к слою диэлектрика толщиной порядка длины волны в диэлектрике $\lambda = 2\pi c/\omega\sqrt{\varepsilon\mu}$.

12.17. В обозначениях предыдущей задачи

$$p_{\text{rad}} = w(1 + R(\theta))\cos^2\theta$$

12.18. Для определения коэффициента отражения от плоского слоя нужно найти связь между амплитудами отраженной и падающей волн. Эту связь можно определить двумя способами.

По первому способу - с помощью граничных условий. Учитывая, что на границах $z = 0$ и $z = a$ должны быть непрерывны касательные компоненты векторов $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$, и что перед слоем со стороны падающей волны имеются волны, распространяющиеся в обе стороны, а за слоем - только прошедшая волна, распространяющаяся в положительном направлении оси z, получим из граничных условий:

$$E_1 = \frac{\alpha_{12} + \alpha_{23}\exp(-2ik_2a)}{1 + \alpha_{12}\alpha_{23}\exp(-2ik_2a)} E_0 \tag{1}$$

где E_1 - амплитуда отраженной, а E_0 - амплитуда падающей волны,

$$\alpha_{12}=\frac{1-n_{12}}{1+n_{12}},\quad \alpha_{23}=\frac{1-n_{23}}{1+n_{23}},\quad n_{ik}=\sqrt{\frac{\varepsilon_k}{\varepsilon_i}},\quad k_2=\frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_2}$$

Второй способ решения задачи - рассмотрение многократных отражений волны от границ раздела. Используя формулы Френеля для нормального падения, найдем, что амплитуда волны, однократно отраженной от границы $z=0$, запишется в виде

$$\mathscr{E}_0=\alpha_{12}E_0$$

Амплитуда волны, прошедшей внутрь слоя:

$$\mathscr{E}_\alpha=\beta_{12}E_0$$

где

$$\beta_{12}=\frac{2}{1+n_{12}}$$

Амплитуда волны, вышедшей из слоя в область $z<0$ после однократного отражения от границы $z=a$:

$$\mathscr{E}_1=\beta_{21}\alpha_{23}\beta_{12}E_0e^{-2ik_2a}$$

Амплитуда волны, вернувшейся в область $z<0$ после s-кратного отражения от границы $z=a$:

$$\mathscr{E}_s=\beta_{21}\beta_{12}\alpha_{23}e^{-2ik_2a}\left(\alpha_{21}\alpha_{23}e^{-2ik_3a}\right)^{s-1}$$

Полная амплитуда E_1 волны, отраженной от плоского слоя, равна сумме всех $\mathscr{E}_s$:

$$E_1=\sum_{s=0}^{\infty}\mathscr{E}_s\doteq\alpha_{12}E_0+\beta_{21}\beta_{12}\alpha_{23}e^{-2ik_2a}\sum_{s=1}^{\infty}\left(\alpha_{21}\alpha_{23}e^{-2ik_2a}\right)^{s-1}$$

С помощью формулы для суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии, получим снова соотношение (1).

Коэффициент отражения определяется как $\dot{R}=|E_1|^2/|E_0|^2$. Находя минимум R обычным способом, получим, что отражение минимально, если толщина слоя удовлетворяет условию

$$a=a_n=n\frac{\lambda_2}{4},\quad n=1,2,3,\ldots \tag{2}$$

где λ_2 - длина волны внутри слоя.

Рассмотрим наименьшую толщину слоя, $a=\lambda_2/4$, соответствующую минимуму R. Приравнивая R нулю, найдем условие отсутствия отражения:

$$\varepsilon_2=\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_3}$$

12.20. Находим действительную и мнимую части диэлектрической проницаемости проводника:

$$\varepsilon'(\omega)=\varepsilon_0-\frac{\omega_{0e}^2}{\gamma^2+\omega^2},\quad \varepsilon''(\omega)=\frac{\omega_{0e}^2\gamma}{\omega\left(\gamma^2+\omega^2\right)} \tag{1}$$

Глубина проникновения $\delta=1/k''$, где k'' определяем по формуле (3) из примера 12.3 $(\theta_0=0):k''=(\omega/c\sqrt{2})\sqrt{|\varepsilon|-\varepsilon'}$.

1. $\omega \ll \gamma \ll \omega_{0e}; \omega_{0e}^2/\gamma^2 \gg \varepsilon_0$. Имеем $\delta \approx c/\sqrt{2\pi\kappa_0\omega}$, где $\kappa_0 = \omega_{0e}^2/4\pi\gamma$ - статическая электропроводность. Это значение δ совпадает с формулой 10.17. $\approx\approx (1-i)\sqrt{\mu\omega/8\pi\kappa_0}$.

2. $\omega_{0e} \ll \omega \ll \gamma, \omega_{0e}^2/\gamma\omega \ll \varepsilon_0$;

$$\delta \approx \frac{c}{2\pi\kappa_0}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu}}, \quad \zeta \approx \sqrt{\mu/\varepsilon_0}$$

(случай полупроводника). В отличие от первого случая, здесь глубина проникновения поля не зависит от частоты в области применимости формулы.

12.21. 1. $\gamma \ll \omega \ll \omega_{0e}$. При этом $\varepsilon' = \varepsilon_0 - \omega_{0e}^2/\omega^2 < 0, |\varepsilon'| \gg \varepsilon'' = \omega_{0e}^2\gamma/\omega^3, \delta \approx c/\omega_{0e}$ - в этой области частот столкновительная диссипация несущественна и поле волны гасится вторичным полем электронных колебаний.

2. $\omega \gg \omega_{0e}$. Если при таких частотах дисперсия ε_0 еще не сказывается, то $\delta \approx 2c\sqrt{\varepsilon_0}\omega^2/\omega_{0e}^2\gamma$. Величина ε_0 учитывает влияние связанных зарядов, входящих в состав ионов и нейтральных атомов.

12.22. Поскольку вектор $\boldsymbol{E}$ поляризован линейно, адмплитуду $\boldsymbol{E}_0$ можно выбрать вещественной. Из уравнения $\operatorname{div}\boldsymbol{E} = 0$ имеем $\boldsymbol{k}' \cdot \boldsymbol{E}_0 = 0$, $\boldsymbol{k}'' \cdot \boldsymbol{E}_0 = 0$, т. е. $\boldsymbol{E}_0$ перпендикулярна к плоскости $(\boldsymbol{k}', \boldsymbol{k}'')$. Из уравнения для $\operatorname{rot}\boldsymbol{E}$ следует

$$\frac{\mu\omega}{c}\mathscr{H}_1 = \boldsymbol{k}' \times \boldsymbol{E}_0, \quad \frac{\mu\omega}{c}\mathscr{H}_2 = \boldsymbol{k}'' \times \boldsymbol{E}_0$$

т. е. $\mathscr{H}_1$ и $\mathscr{H}_2$ перпендикулярны $\boldsymbol{E}_0, \mathscr{H}_1 \perp \boldsymbol{k}', \mathscr{H}_2 \perp \boldsymbol{k}''$.

Конец вектора $\boldsymbol{H}$ описывает эллипс в плоскости $(\boldsymbol{k}', \boldsymbol{k}'')$ (рис. 12.10).

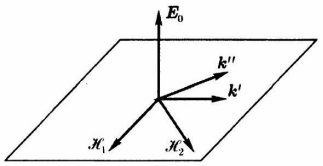


Рис. 12.10

12.23.

$$E_{\perp 1} = (-1 + 2\zeta\cos\theta_0)\, E_{\perp 0}, \quad E_{\parallel 1} = (1 - 2\zeta/\cos\theta_0)\, E_{\parallel 0}$$
$$E_{\perp 2} = 2\zeta\cos\theta_0 E_{\perp 0}, \qquad E_{\parallel 2} = 2\zeta E_{\parallel 0}$$

Формулы для $E_{\parallel 1}$ и $E_{\parallel 2}$ применимы только в том случае, если угол скольжения $\varphi_0 = \pi/2 - \theta_0 \gg |\zeta|$.

При $\varphi_0 \ll 1$ справедливы формулы

$$E_{\parallel 1} = \frac{\varphi_0 - \zeta}{\varphi_0 + \zeta}E_{\parallel 0}, \quad E_{\parallel 2} = \frac{\varphi_0\zeta}{\varphi_0 + \zeta}E_{\parallel 0}$$

Относительная величина $|\zeta|$ и φ_0 при этом произвольна.

12.24. $R_\perp = 1 - 4\zeta'\cos\theta_0$. При всех углах падения $R_\perp$ близок к 1, достигая минимума при $\theta_0 = 0$ (нормальное падение);

$$R_\parallel = 1 - \frac{4\zeta'}{\cos\theta_0} \quad \text{при} \quad \varphi_0 = \frac{\pi}{2} - \theta_0 \gg 4\zeta'$$
$$R_\parallel = \frac{(\varphi_0 - \zeta')^2 + \zeta''^2}{(\varphi_0 + \zeta')^2 + \zeta''^2} \quad \text{при} \quad \varphi_0 \ll 1$$

Из условия $\partial R_\parallel/\partial\varphi_0 = 0$ находим угол φ_0, при котором $R_\parallel$минимален:

$$\varphi_0 = \Phi_0 = |\zeta|, \quad R_\parallel = \frac{|\zeta| - \zeta'}{|\zeta| + \zeta'}$$

Угол Φ_0 является аналогом угла Брюстера, так как значение $R_\parallel$ при $\varphi_0 = \Phi_0$ минимально (при падении волны на границу диэлектрика под углом Брюстера коэффициент $R_\parallel$также минимален и равен нулю).

12.25. Характер поляризации отраженной волны определяется разностью фаз между продольной и поперечной компонентами. Используя результаты двух предыдущих задач, получим

$$E_{\perp 1} \approx -E_{\perp 0} = e^{i\delta_\perp} E_{\perp 0}, \quad \delta_\perp = \pi$$

$$E_{\parallel 1} = \left[\frac{|\zeta| - \zeta'}{|\zeta| + \zeta'}\right]^{1/2} e^{i\delta_\parallel} E_{\parallel 0}, \quad \operatorname{tg}\delta_\parallel = -\left.\frac{2\Phi_0\zeta''}{\Phi_0^2 - |\zeta|^2}\right|_{\varphi_0\to\Phi_0} \to \infty$$

т. е. $\delta_\parallel = \pi/2$.

Таким образом, разность фаз $\delta = \delta_\perp - \delta_\parallel = \pi/2$; отраженная волна в общем случае окажется эллиптически поляризованной, причем одна из осей эллипса будет лежать в плоскости падения.

При $\left|E_{\parallel 1}\right| = |E_{\perp 1}|$ поляризация будет круговой. При $E_{\parallel 0} = 0$ или $E_{\perp 0} \doteq 0$ поляризация останется линейной.

12.26. С помощью формул Френеля находим

$$n' = \frac{\sin\theta_0 \operatorname{tg}\theta_0 \cos 2\rho}{1 + \sin^2 2\rho\cos\delta}, \quad n'' = \frac{\sin\theta_0 \operatorname{tg}\theta_0 \sin 2\rho \sin\delta}{1 + \sin 2\rho\cos\delta}$$

12.27. $R = \frac{\left(\sqrt{\varepsilon}-\sqrt{\varepsilon'}\right)^2}{\left(\sqrt{\varepsilon}+\sqrt{\varepsilon'}\right)^2} + \frac{4}{\left(\sqrt{\varepsilon}+\sqrt{\varepsilon'}\right)^4} \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}} \left(\frac{2\pi\kappa}{\omega}\right)^2$.

Здесь ε - диэлектрическая проницаемость среды, из которой падает свет,
ε' - вещественная часть диэлектрической проницаемости проводящей среды, κ - вещественная электропроводность.

12.28. Уравнение, которому удовлетворяет электрическое поле, запишется в виде:

$$\frac{d^2E}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2}\left(\varepsilon - \frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon^{z/a} + 1}\right) E = 0 \tag{1}$$

Мы должны найти решение этого уравнения, которое при всех z является ограниченным и при $z \to \pm\infty$ удовлетворяет некоторым условиям, вытекающим из физического смысла задачи. При $z \to -\infty$ решение должно представлять суперпозицию двух волн, падающей и отраженной, т. е.

$$E(z) \to Ae^{ik_0 z} + Be^{-ik_0 z} \tag{2}$$

где $k_0 = \omega/c$.

При $z \to \infty$ должна оставаться только прошедшая волна:

$$E(z) \to Ce^{ikz} \tag{3}$$

где $k_0 = \omega\sqrt{\varepsilon}/c$.

Произведем в уравнении (1) замену независимой переменной $-e^{-z/a} = \xi$. Новая переменная меняется в пределах $-\infty \leqslant \xi \leqslant 0$ при изменении z от $-\infty$ до $+\infty$. С помощью подстановки $E(\xi) = \xi^{-ika}\psi(\xi)$, получим для новой неизвестной функции $\psi(\xi)$ уравнение

$$\xi(1-\xi)\psi'' + (1-2ika)(1-\xi)\psi' + \boldsymbol{k}^2 a^2 \psi = 0 \tag{4}$$

где $\boldsymbol{k}^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\Delta\varepsilon$. Это уравнение называется гипергеометрическим.
Как следует из условия (3), функция $\psi(\xi)$ должна стремиться к постоянному пределу при $\xi \to 0$. Решением уравнения (4), ведущим себя указанным образом, является гипергеометрическая функция

$$F(\alpha,\beta,\gamma,z) = 1 + \frac{\alpha\beta}{\gamma\cdot 1!}z + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)\cdot 2!}z^2 + \dots$$

Поэтому решение уравнения (4) запишем в виде

$$\psi = CF\left[-i\left(k+k_0\right)a, -i\left(k-k_0\right)a, 1-2ika, -e^{-z/a}\right] \tag{5}$$

Чтобы найти вид функции ψ при $\xi \to -\infty$, воспользуемся асимптотическим представлением гипергеометрической функции:
(6) $F(\alpha,\beta,\gamma,z) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\alpha)}(-\xi)^{-\alpha} + \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma\left(\gamma^{-\beta}\right)}(-\xi)^{-\beta}$.

С помощью этой формулы убеждаемся, что условие (2) выполнено.
Коэффициент отражения

$$R = \left|\frac{B}{A}\right|^2 = \left|\frac{\Gamma\left(2ik_0a\right)\Gamma\left[1-i\left(k+k_0\right)a\right]\Gamma\left[-i\left(k+k_0\right)a\right]}{\Gamma\left(-2ik_0a\right)\Gamma\left[1-i\left(k-k_0\right)a\right]\Gamma\left[-i\left(k-k_0\right)a\right]}\right|^2 \tag{7}$$

Для упрощения полученного выражения используем формулы

$$\left|\frac{\Gamma\left(2ik_0a\right)}{\Gamma\left(-2ik_0a\right)}\right| = \left|\frac{\Gamma\left(2ik_0a\right)}{\Gamma^*\left(2ik_0a\right)}\right| = 1, \quad \Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin\pi z}$$

Окончательно получим

$$R = \frac{\operatorname{sh}^2\pi a\left(k-k_0\right)}{\operatorname{sh}^2\pi a\left(k+k_0\right)} \tag{8}$$

При малых $a(ka \ll 1)R$ переходит в известное выражение, справедливое при скачкообразном изменении ε:

$$R = \frac{\left(k-k_0\right)^2}{\left(k+k_0\right)^2}$$

С ростом a, R монотонно убывает. При больших ka убывание происходит по экспоненциальному закону:

$$R = e^{-4\pi k_0 a}, \quad ka \gg 1$$

12.29. При нормальном падении волны на неоднородный слой, электрическое поле зависит только от z и удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2E}{dz^2} = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon(\omega,z)E = 0 \tag{1}$$

Обозначим $m\omega^2/4\pi e^2 N_0 = z_1$, тогда $\varepsilon = 1 - z/z_1$. Введением переменной $\xi = \left(\omega^2/c^2 z_1\right)^{1/3}(z_1 - z)$ уравнение (1) приводится к виду

$$\frac{d^2E}{d\xi^2} + \xi E = 0 \tag{2}$$

Решение уравнения (2) проще всего получить с помощью преобразования Фурье. Разложим $E(\xi)$ в интеграл Фурье:

$$E(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} E(u)e^{i\xi u}du, \quad E(u) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} E(\xi)e^{-i\xi u}d\xi$$

Подставляя разложение $E(\xi)$ в (2), получаем относительно амплитуды $E(u)$ дифференциальное уравнение первого порядка:

$$\frac{dE(u)}{du} + iu^2E(u) = 0 \tag{3}$$

В результате преобразования Фурье мы получили вместо уравнения второго порядка более простое уравнение первого порядка. Уравнение (3) легко интегрируется, его решение

$$E(u) = A'e^{-iu^3/3}$$

Переходя к $E(\xi)$, имеем

$$E(\xi) = A'\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-i\left(u^3/3 - \xi u\right)\right]du$$

Представляя $\exp\left[-i\left(u^3/3 - \xi u\right)\right]$ в виде суммы синуса и косинуса, и замечая, что в силу нечетности подынтегральной функции интеграл от $\sin\left(u^3/3 - -\xi u\right))$ равен нулю, получим:

$$E(\xi) = \frac{A}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{0}^{\infty} \cos\left(\frac{u^3}{3} - \xi u\right)du \tag{4}$$

Функция

$$\Phi(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{0}^{\infty} \cos\left(\frac{u^3}{3} + \xi u\right)du$$

называется функцией Эйри (она может быть выражена через функции Бесселя с индексом $\frac{1}{3}$). Таким образом, окончательно

$$E(\xi) = A\Phi(-\xi)$$

Константа A должна определяться из условия на границе слоя.
Исследуем поведение $E(\xi)$ при больших $|\xi|$. Пользуясь асимптотическими формулами для $\Phi(\xi)$, получаем при больших положительных значениях ξ:

$$E(\xi) = \frac{A}{\xi^{1/4}}\sin\left(\frac{2}{3}\xi^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right)$$

Здесь поле имеет осциллирующий характер.
При больших по абсолютной величине отрицательных значениях ξ:

$$E(\xi) = \frac{A}{2|\xi|^{1/4}}e^{-\frac{2}{3}|\xi|^{3/4}}$$

Поле экспоненциально затухает. Причина этого состоит в том, что отрицательным ξ соответствуют отрицательные значения диэлектрической постоянной ε. Но при $\varepsilon < 0$ волновой вектор $k = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon}$ становится чисто мнимым, что и ведет к затуханию. Однако

затухание в данном случае связано не с переходом электромагнитной энергии в тепло (так как диэлектрическая проницаемость вещественна - потери отсутствуют), а с интерференционным гашением падающей волны вторичным полем.

12.30. После преобразования уравнений указанным в условии задачи способом находим для величины $I(z,t)$ два линейно независимых частных решения: $I(z,t) = \sqrt{U(z)}e^{\pm iq\eta(z)-i\omega t}$. Здесь квазиволновой вектор q определяется соотношениями (12.25). Зависимость $U(\eta) = Q^{-2}(\eta)$ вычисляется из уравнения $(***)$:

$$U(\eta) = [\mathrm{ch}(p\eta) + M\,\mathrm{sh}(p\eta)]^{-2}, p^2 > 0$$

$$U(\eta) = [\cos(\eta/L) + M\sin(\eta/L)]^{-2}, p^2 < 0, L = 1/|p| \tag{1}$$

Чтобы найти зависимость между U и z, выразим из (1) η через обратные гиперболические или тригонометрические функции и воспользуемся соотношением, вытекающим из (12.21): $dU/dz = (dU/d\eta)(d\eta/dz) = U(z)(dU/d\eta)$. Вычисления дают

$$\frac{dU}{dz} = \pm\frac{2U^2}{L}\sqrt{1 - U\left(1 - M^2\right)} \tag{2}$$
$$0 \leqslant M \leqslant 1, 1 \leqslant U \leqslant U_{\max} = \left(1 - M^2\right)^{-1}, p^2 = 1/L^2 > 0$$

$$\frac{dU}{dz} = \pm\frac{2U^2}{L}\sqrt{U\left(1 + M^2\right) - 1}, \quad 1 \geqslant U \geqslant \left(1 + M^2\right)^{-1}, p^2 = -1/L^2 < 0 \tag{3}$$

Из этих дифференциальных уравнений вычисляется z как функция U. Тем самым будет получено решение для неоднородной среды с $\varepsilon(z) = n_0^2 U^2(z)$.

12.31.

$$R = \frac{n_0^2\left(n_0 - N\right)^2 + c^2M^2/\omega^2L^2}{n_0^2\left(n_0 + N\right)^2 + c^2M^2/\omega^2L^2}, \quad \text{где} \quad N = \sqrt{1 + \frac{c^2}{\left(Ln_0\omega\right)^2}}.$$

Отношение амплитуд отраженной и падающей волн комплексно:

$$\frac{E_1}{E_0} = \frac{n_0\left(n_0 - N\right) - icM/\omega L}{n_0\left(n_0 + N\right) + icM/\omega L}$$

Это означает, что рассматриваемые волны имеют сдвиг фаз вследствие неоднородности среды.

12.32. Компоненты поля выражаются по формулам (12.19) через векторный потенциал $A(z,t) = e^{i\omega z/c} + \widetilde{R}e^{-i\omega z/c}$ при $z < 0, A(z,t) = Ke^{i\omega z/c}$ при $z > L$. При $0 \leqslant z \leqslant L$ векторный потенциал имеет вид (12.25). Постоянные $\widetilde{R}, A_1, A_2, K$ определяются из условий непрерывности компонент поля на границах $z = 0$ и $z = L$. Коэффициент отражения определяется как $R = |\widetilde{R}|^2$.

12.33. См. обзор [Шварцбург (2000)].

12.34. Скорости волн вдоль каждой оси определяются главными значениями $\varepsilon^{(i)}$ вдоль двух других осей. Так, вдоль оси 1 скорости $c/\sqrt{\varepsilon^{(2)}\mu}$ и $c/\sqrt{\varepsilon^{(3)}\mu}$ ит.д.

12.35. Обыкновенная волна поперечна, векторы $\boldsymbol{D}, \boldsymbol{E}$ оба перпендикулярны плоскости, проходящей через волновой вектор и оптическую ось (плоскость главного сечения). В необыкновенной волне вектор $\boldsymbol{D}$ лежит в плоскости главного сечения и перпендикулярен волновому вектору, а вектор $\boldsymbol{E}$ тоже лежит в плоскости главного сечения, но не параллелен $\boldsymbol{D}$.

12.37.

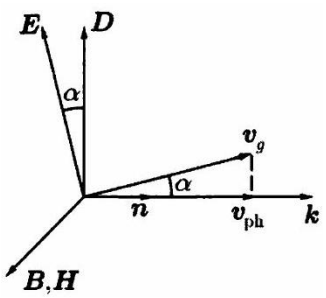


Рис. 12.11

$$\boldsymbol{v}_g = \boldsymbol{v}_{ph} - \frac{c(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{D}}{\mu n D^2}$$

Скорость распространения энергии в анизотропной среде не совпадает по величине и направлению с фазовой скоростью. Второе слагаемое в правой части перпендикулярно фазовой скоро- сти. Расположение векторов см. на рисунке 12.11 . Все векторы, кроме $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{H}$, лежат в одной плоскости.

12.38.

$$\cos\alpha = \frac{\left(\varepsilon_\parallel - \varepsilon_\perp\right)\sin\theta\cos\theta}{\sqrt{\varepsilon_\parallel^2\cos^2\theta + \varepsilon_\perp^2\sin^2\theta}}, \quad \operatorname{tg}\vartheta = \frac{\varepsilon_\perp}{\varepsilon_\parallel}\operatorname{tg}\theta$$

12.39. Собственные колебания в движущейся среде описываются указанными в условии задачи уравнениями при $\boldsymbol{j}_{\text{ext}} = \rho_{\text{ext}} = 0$. Выбрав $\varphi = 0$, из оставшихся двух уравнений находим

$$k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} - \kappa\gamma^2\frac{(\omega - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{V})^2}{c^2} = 0, \quad \left\{\boldsymbol{k} + \frac{\kappa\gamma^2}{c^2}(\omega - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{V})\boldsymbol{V}\right\}\cdot\boldsymbol{A} = 0$$

Первое равенство позволяет получить дисперсионное соотношение, а второе определяет поляризацию плоской волны. Волна поперечна, ее амплитуда перпендикулярна вектору, стоящему в фигурных скобках и представляющему собой комбинацию волнового вектора и вектора скорости среды. Из первого равенства находим значения фазовой скорости

$$v_{ph1,2}(\omega,\theta) \equiv \frac{\omega}{k} = c\frac{\kappa\gamma^2\beta\cos\theta \pm \sqrt{1 + \kappa\gamma^2\left(1 - \beta^2\cos^2\theta\right)}}{1 + \kappa\gamma^2}$$

Решения связаны условием $v_{ph}(\omega, \pi - \theta) = -v_{ph2}(\omega,\theta)$. Таким образом, в заданном направлении может распространяться одна волна с определенной фазовой скоростью и с произвольной, но поперечной поляризацией, т. е.
имеет место вырождение по поляризациям. В одноосном неподвижном кристалле в каждом направлении могут распространяться две волны заданной частоты с разными фазовыми скоростями и разными поляризациями.

$$\boldsymbol{v}_g = \frac{d\omega}{d\boldsymbol{k}} = c\frac{\boldsymbol{k} + \left(\kappa\gamma^2/c^2\right)(\omega - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{V})\boldsymbol{V}}{(\omega/c) + \left(\kappa\gamma^2/c\right)(\omega - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{V})}$$

Подробный анализ дисперсионных соотношений при разных значениях скорости среды см. в обзоре [Болотовский и Столяров (1974)].
12.40. Для того чтобы граничные условия для векторов поля выполнялись в любой точке поверхности раздела, необходимо равенство касательных к границе раздела

компонент волнового вектора у падающей, отраженной и обеих преломленных волн. Для обыкновенной волны это дает

$$k_0 \sin\theta_0 = k_1 \sin\theta_2', \quad \frac{\sin\theta_2'}{\sin\theta_0} = \sqrt{\varepsilon_\perp \mu}$$

Направление луча (вектора Пойнтинга) в обыкновенной волне совпадает с направлением волнового вектора и составляет, следовательно, угол θ_2' с нормалью к границе.

В случае необыкновенной волны имеем

$$k_0 \sin\theta_0 = k_2 \sin\theta_2'' = k_0 \sin\theta_2'' \sqrt{\frac{\varepsilon_\perp \varepsilon_\parallel \mu}{\varepsilon_\perp \sin^2\theta_2'' + \varepsilon_\parallel \cos^2\theta_2''}}$$

(см. задачу 12.35°). Отсюда находим

$$\sin^2\theta_2'' = \frac{\varepsilon_\parallel \sin^2\theta_0}{\varepsilon_\perp \varepsilon_\parallel \mu + \left(\varepsilon_\parallel - \varepsilon_\perp\right)\sin^2\theta_0}$$

Угол ϑ'' между лучом и оптической осью (совпадающей с нормалью к поверхности раздела), согласно результатам предыдущей задачи, определяется условием

$$\operatorname{tg}\vartheta'' = \frac{\varepsilon_\perp}{\varepsilon_\parallel}\operatorname{tg}\theta_2'' = \frac{\sqrt{\varepsilon_\perp}\sin\theta_0}{\sqrt{\varepsilon_\parallel\left(\varepsilon_\parallel\mu - \sin^2\theta_0\right)}}$$

Угол отражения от кристалла, как и от изотропной среды, равен углу падения: $\theta_1 = \theta_0$.

12.41. Обыкновенный луч лежит в плоскости падения и составляет с нормалью к поверхности угол θ_2':

$$\sin\theta_2' = \sqrt{\varepsilon_\perp \mu}\sin\theta_0$$

Волновой вектор k_2 необыкновенной волны лежит в плоскости падения и составляет с нормалью угол θ_2'':

$$\sin^2\theta_2'' = \frac{\varepsilon_\perp \sin^2\theta_0}{\varepsilon_\perp \varepsilon_\parallel \mu + \left(\varepsilon_\perp - \varepsilon_\parallel\right)\sin^2\theta_0 \cos^2\alpha}$$

Направление луча в необыкновенной волне не лежит в плоскости падения. Луч расположен в одной плоскости с k_2 и оптической осью и составляет с последней угол ϑ, причем (рис. 12.12):

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{\sqrt{\varepsilon_\perp^2 \varepsilon_\parallel \mu + \varepsilon_\perp\left(\varepsilon_\perp - \varepsilon_\parallel\right)\sin^2\theta_0\cos^2\alpha}}{\varepsilon_\parallel \sin\theta_0 \cos\alpha}$$

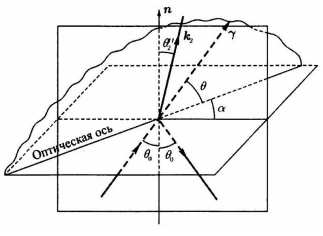


Рис. 12.12

12.42. Волна, у которой электрический вектор параллелен проводникам, отразится от решетки, как от сплошной металлической плоскости. Волна, у которой электрический вектор перпендикулярен проводникам, будет распространяться как в свободном пространстве, потому что она не возбудит токов в решетке.

12.43. Подставляя в уравнения Максвелла выражения полей $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ в виде плоских монохроматических волн, получим уравнение, определяющее амплитуды и волновые векторы волн, которые могут распространяться в данной среде:

$$\boldsymbol{k} \times (\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{H}_0) = -\frac{\omega^2 \varepsilon}{c^2} \widehat{\mu} \boldsymbol{H}_0 \tag{1}$$

Введем угол θ между волновым вектором k и осью Oz и запишем (1) в проекциях на оси координат.

Приравнивая нулю определитель системы, получим биквадратное уравнение относительно k. Его решение дает:

$$k_{1,2}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon \mu_{\pm}^{ef}$$

$$\mu_{\pm}^{ef} = \mu_{\parallel} \frac{\mu \sin^2\theta + \left(2\mu_{\perp}/\mu_{\parallel}\right) \pm \sqrt{\mu^2 \sin^4\theta + \left(2\mu_a/\mu_{\parallel}\right)^2 \cos^2\theta}}{2\left[\left(\mu_{\perp}/\mu_{\parallel} - 1\right)\sin^2\theta + 1\right]} \tag{2}$$

где

$$\mu = \frac{\mu_{\perp}^2 - \mu_a^2 - \mu_{\perp}\mu_{\parallel}}{\mu_{\parallel}^2}$$

Величины $\mu_{\pm}^{ef}$ можно рассматривать как эффективные магнитные проницаемости двух нормальных волн.

В каждом направлении могут распространяться две волны с разными фазовыми скоростями $v_{1,2} = \omega/k_{1,2}$, зависящими от угла θ. Направлений, для которых эти фазовые скорости становились бы одинаковыми, не существует, так как радикал в (2) не принимает нулевых значений ни при каких θ. В области частот, близких к резонансным частотам тензора μ, электромагнитное поле сильно связано с колебаниями намагниченности. В этом случае рассматриваемые волны называют магнитными поляритонами.

Если в формуле (2) положить $\mu_a = 0$, то она будет определять фазовые скорости волн, которые могут распространяться в негиротропном, но анизотропном магнитном кристалле:

$$k_1^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon\mu_{\perp}, \quad k_2^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \cdot \frac{\varepsilon\mu_{\perp}\varepsilon_{\parallel}}{\mu_{\parallel}\cos^2\theta + \mu_{\perp}\sin^2\theta}$$

Первая из этих волн (обыкновенная) имеет скорость $v_1 = c/\sqrt{\varepsilon\mu_{\perp}}$, не зависящую от направления распространения. Скорость второй волны
(необыкновенной) зависит от угла между осью симметрии кристалла и направлением распространения. При распространении волны вдоль оси симметрии ($\theta = 0$) обе скорости совпадают, две волны вырождаются в одну.

12.44. 1. При продольном распространении удобно рассмотреть циклические компоненты полей $E_{\pm} = E_x \mp iE_y, H_{\pm} = H_x \mp iH_y$. Из уравнений Максвелла вычислим их волновые векторы:

$$k_{\pm} = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon\left(\mu_{\perp} \pm \mu_a\right)} = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon}\left(1 + \frac{\omega_M}{\omega_0 \mp \omega}\right)^{1/2} \tag{1}$$

волна с k_+существует в интервалах частот $0 \leqslant \omega \leqslant \omega_0$ и $\omega_0 + \omega_M \leqslant \omega < \infty$, волна с k_-- в интервале $0 \leqslant \omega < \infty$ (рис. 12.13).
2. Обе волны поляризованы по кругу, волна с k_+имеет правую спиральность, волна с k_-- левую спиральность (определение направления вращения см. в задаче 2.130). Поверхностные импедансы неодинаковы у двух волн:

$$\zeta_{\pm} = \pm i\frac{E_{\pm}}{H_{\pm}} = \sqrt{\frac{\mu_{\perp} \pm \mu_a}{\varepsilon}} \tag{2}$$

3. Линейно поляризованную волну следует рассматривать как совокупность двух циркулярно поляризованных волн с разными направлениями вращения. Пусть при $z = 0$ вектор $\boldsymbol{E}_0$ ориентирован вдоль оси Ox. Тогда на глубине z будем иметь

$$E_x = (1/2)E_0\left[e^{ik_+z} + e^{ik_-z}\right], E_y = (i/2)E_0\left[-e^{ik_+z} + e^{ik_-z}\right] \tag{3}$$

Вводя полусумму и полуразность волновых векторов, $k = \left(k_+ + k_-\right)/2, \kappa = \left(k_+ - k_-\right)/2$, находим $E_x(z) = E_0 e^{ikz}\cos\kappa z, E_y(z) = E_0 e^{ikz}\sin\kappa z$. Отношение $E_y/E_x = \operatorname{tg}\kappa z$ определяет тангенс δ угла поворота плоскости поляризации: $\delta = \kappa z = \left(k_+ - k_-\right)z/2$.
12.45. Пусть волны распространяются вдоль оси Ox. Обыкновенная волна имеет волновой вектор $k_1 = \omega\sqrt{\varepsilon}/c$ и поляризована линейно, ее компоненты поля $E_y = \zeta_1 H_z \neq 0$, поверхностный импеданс $\zeta_1 = 1/\sqrt{\varepsilon}$.

Необыкновенная волна имеет $k_2 = \omega\sqrt{\varepsilon\mu_{\perp}^{ef}}/c$, где $\mu_{\perp}^{ef} = \mu_{\perp} - \mu_a^2/\mu_{\perp}$, поляризована линейно, $E_z = -\zeta_2 H_y \neq 0, \zeta_2 = \sqrt{\mu_{\perp}^{ef}/\varepsilon}$. Дисперсионные кривые см. на рис. 12.14 .

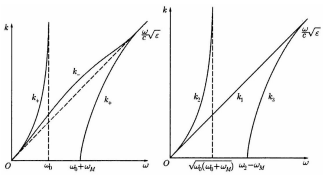


Рис. 12.13
Рис. 12.14

Пусть на границе среды ($x = 0$) волна поляризована линейно, вектор $\boldsymbol{E}$ колеблется вдоль биссектрисы угла между осями Oy и Oz. На глубине x имеем

$$\boldsymbol{E}(x,t) = E_0\left[\left(\boldsymbol{e}_y + \boldsymbol{e}_z\right)\cos\kappa x + i\left(\boldsymbol{e}_y - \boldsymbol{e}_z\right)\sin\kappa x\right]e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{x} - i\omega t}$$

где $k = \left(k_1 + k_2\right)/2, \kappa = \left(k_1 - k_2\right)/2$. Из приведенной формулы непосредственно видно, что при фиксированном x конец вектора $\boldsymbol{E}$ описывает эллипс с полуосями $\sqrt{2}E_0\cos\kappa x, \sqrt{2}E_0\sin\kappa x$. В точках, где $\cos\kappa x = \sin\kappa x$, эллипс превращается в окружность, а в точках $\kappa x = n\pi/2, n = 0, \pm 1, \ldots$ поляризация линейна, но может быть ортогональна начальной поляризации. Явление изменения поляризации при поперечном распространении волны в гиротропной среде называется эффектом Коттона-Мутона.
12.46.

$$\delta = -\frac{l}{2c}\left(\omega_M\sqrt{\varepsilon_{\perp}} + \varepsilon_a\frac{\omega}{\sqrt{\varepsilon_{\perp}}}\right)$$

12.47.

$$\omega(\boldsymbol{k}) = \sqrt{\omega_0\left(\omega_0 + \omega_M \sin^2\theta\right)} = \sqrt{\omega_0\left(\omega_0 + \omega_M \frac{k_\perp^2}{k_\perp^2 + k_\parallel^2}\right)}$$

$$\omega_0 \leqslant \omega \leqslant \sqrt{\omega_0\left(\omega_0 + \omega_M\right)}$$

где θ - угол между направлением волнового вектора и приложенным постоянным магнитным полем.

$$\boldsymbol{E} = \frac{\omega}{ck^2}\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{B}, \quad \boldsymbol{B} = \widehat{\mu}\boldsymbol{H}, \quad |\boldsymbol{E}| \ll |\boldsymbol{B}|$$

12.48. В направлении магнитного поля могут распространяться с разными фазовыми скоростями две волны, поляризованные по кругу в противоположных направлениях. Поэтому волна, поляризация которой, отлична от круговой, расщепится на две волны, поляризованные по кругу. Так как фазовые скорости этих двух волн различны, сдвиг фаз между ними будет меняться от точки к точке, вследствие чего поляризация суммарной волны будет различной в разных точках.

Проведя вычисления, получим, что поляризация результирующей волны остается линейной, но плоскость поляризации повернется на угол $\chi = \frac{1}{2}\left(k_+ - k_-\right) z$ (эффект Фарадея). Величины k_+и k_-представляют собой волновые векторы двух волн с круговыми поляризациями и могут быть найдены из результатов задач 12.44 и 11.23. В случае слабого магнитного поля получим

$$\chi = VHz$$

где коэффициент пропорциональности V носит название постоянной Верде. Если атомы вещества рассматриваются как гармонические осцилляторы, постоянная V примет вид:

$$V = \frac{2\pi e^3 N}{nm^2c^2} \cdot \frac{\omega^2}{\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2}$$

где $n = \sqrt{\varepsilon}$ - показатель преломления в отсутствие магнитного поля.
12.49.

$$\Delta\chi = \left(\lambda_1^2 - \lambda_2^2\right) RM$$

Меры вращения в межзвездной среде можно измерить, принимая сигналы на разных частотах от пульсаров - вращающихся нейтронных звезд. Измерив для тех же пульсаров меры дисперсии (см. задачу 12.8), можно оценить межзвездное магнитное поле. В тех случаях, когда магнитное поле направлено под углом к лучу зрения, а электронная концентрация неоднородна, мера вращения будет определяться интегралом от проекции поля на направление наблюдения:

$$RM = \frac{e^3}{2\pi\left(m_e c^2\right)^2} \int\limits_0^L N_e B_\parallel dl$$

Подробнее см. в [Физика космоса (1986)].
12.50. Из соображений симметрии следует, что волновые векторы отраженной и прошедшей волн перпендикулярны к границе раздела. Обе эти волны будут поляризованы по кругу в том же направлении, что и падающая волна. Амплитуды отраженной и прошедшей волн:

$$H_1 = \frac{\zeta_\pm - 1}{\zeta_\pm + 1} H_0, \quad H_2 = \frac{2}{\zeta_\pm + 1} H_0$$

где H_0 - амплитуда падающей волны, $\zeta_\pm = \sqrt{(\mu_\perp \pm \mu_a)/\varepsilon}$ - поверхностный импеданс для волн с правой и левой круговыми поляризациями. Коэффициент отражения

$$R_\pm = \frac{(\zeta_\pm - 1)^2}{(\zeta_\pm + 1)^2}$$

обращается в единицу при $\zeta \to \infty$ и при $\zeta \to 0$. Первый случай реализуется вблизи резонанса, $\omega \approx \omega_0$. Второй соответствует антирезонансу, когда $\mu_\perp \pm \mu_a \approx 0$. Для феррита с магнитной проницаемостью антирезонанс наступает у волны с правой круговой поляризацией при $\omega = \omega_0 + \omega_M$.

12.51. Волновые векторы отраженной и прошедших волн перпендикулярны к границе раздела. Отраженная волна поляризована эллиптически, полуоси эллипса

$$H_1' = H_0 \frac{1 - \zeta_+ \zeta_-}{(\zeta_+ + 1)(\zeta_- + 1)}, \quad H_1'' = H_0 \frac{\zeta_- - \zeta_+}{(\zeta_+ + 1)(\zeta_- + 1)}$$

Направление H_1' совпадает с направлением поляризации вектора $\boldsymbol{H}$ в падающей волне. Прошедшая волна расщепляется на две волны с амплитудами

$$H_2' = \frac{H_0}{\zeta_+ + 1}, \quad H_2'' = \frac{H_0}{\zeta_- + 1}$$

поляризованные по кругу в противоположных направлениях. Скорости их распространения различны (см. ответ к задаче 12.44).

$$R = \frac{(1 - \zeta_+ \zeta_-)^2 + (\zeta_- - \zeta_+)^2}{(\zeta_+ + 1)^2 (\zeta_- + 1)^2}$$

12.52. Если длина волны много больше радиуса дисков и расстояний между соседними дисками, то искусственный диэлектрик можно рассматривать как сплошную среду. Электрическое поле падающей волны касательно к плоскостям дисков. Поэтому при отсутствии внешнего магнитного поля $\boldsymbol{H}_0$ поляризуемость диэлектрика будет иметь значение $\alpha = N\beta_e$,
где $\beta_e = \frac{4a^3}{3\pi}$ - продольная (относительно плоскости диска) электрическая поляризуемость диска, N - число дисков в единице объема.

Продольная магнитная поляризуемость диска β_m равна нулю (см. задачу 10.42), поэтому магнитная восприимчивость диэлектрика χ при рассматриваемом направлении магнитного поля волны обращается в нуль.

Наличие внешнего магнитного поля $\boldsymbol{H}_0$ приводит к эффекту Холла: электроны проводимости, создающие ток в каждом диске, будут отклоняться под действием поля $\boldsymbol{H}_0$ и создавать добавочное электрическое поле $\boldsymbol{E}_H$, которое должно уравновесить отклоняющее действие магнитного поля. Это приведет к появлению добавочного электрического момента каждого диска, вследствие чего изменяются вектор поляризации среды и электрическая индукция. Чтобы вычислить это изменение индукции, удобно рассмотреть полную плотность поляризационного тока $\partial \boldsymbol{P}/\partial t$ в диэлектрике, а не ток в отдельном диске.

В первом приближении по H_0 поле $\boldsymbol{E}_H$, вызванное эффектом Холла, выразится в виде

$$\boldsymbol{E}_H = R(\boldsymbol{H}_0 \times \boldsymbol{j}) = R\left(\boldsymbol{H}_0 \times \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t}\right) \tag{1}$$

где R - постоянная Холла, $\boldsymbol{P} = \alpha \boldsymbol{E}$ - вектор поляризации в нулевом приближении. За счет поля $\boldsymbol{E}_H$ вектор поляризации получит приращение

$$\Delta \boldsymbol{P} = \alpha \boldsymbol{E}_H = \alpha^2 R \left(\boldsymbol{H}_0 \times \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \right) \tag{2}$$

благодаря чему индукция $\boldsymbol{D}$ выразится через $\boldsymbol{E}$ и производную $\partial \boldsymbol{E}/\partial t$:

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{E} + 4\pi(\boldsymbol{P} + \Delta \boldsymbol{P}) = \varepsilon \boldsymbol{E} + 4\pi\alpha^2 R \left(\boldsymbol{H}_0 \times \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \right) \tag{3}$$

Здесь $\varepsilon = 1 + 4\pi N \beta_e$ - диэлектрическая проницаемость при отсутствии внешнего магнитного поля.

При гармонической зависимости $\boldsymbol{E}$ от времени уравнение (3) даст связь между $\boldsymbol{D}$ и $\boldsymbol{E}$ вида

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon \boldsymbol{E} + i(\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{g})$$

где $\boldsymbol{g} = 4\pi\alpha^2 \omega R \boldsymbol{H}_0$ - вектор гирации (см. (12.34). Таким образом, среда будет гиротропной. Как следует из результатов задачи 12.44, в направлении вектора g возможно распространение двух волн, поляризованных по кругу
в разных направлениях и имеющих разные фазовые скорости $v_\pm = \omega/k_\pm$. Определяя $k_\pm$обычным способом, получим

$$k_\pm^2 = \frac{\omega^2}{c^2}(\varepsilon \pm g) \tag{4}$$

12.53. Вдоль направления постоянного магнитного поля возможно распространение двух волн с правой и левой круговыми поляризациями. Волновые векторы этих волн определяются равенством

$$\frac{k^2 c^2}{\omega^2} = \varepsilon_\pm = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega\left(\omega + i\gamma \mp \omega_H - \omega_H \Omega_H/\omega\right)}$$

При $\Omega_H \ll \omega$ влияние движения положительных ионов очень мало, их можно рассматривать как неподвижные. В обратном предельном случае $\Omega_H \gg \omega$ и $\gamma\omega \ll \omega_H \Omega_H$ роль положительных ионов становится определяющей:

$$\frac{k^2 c^2}{\omega^2} = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_H \Omega_H} = 1 + \frac{4\pi N M c^2}{H_0^2}$$

Обе волны распространяются с одинаковой фазовой скоростью v_{ph}, которая совпадает с их групповой скоростью v_g:

$$v_g = v_{ph} = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{1 + 4\pi N M c^2/H_0^2}} \tag{2}$$

или

$$v_g = v_{ph} = \frac{H_0}{\sqrt{4\pi N M}} = \frac{H_0}{\sqrt{4\pi\tau}} \tag{3}$$

если можно пренебречь единицей по сравнению со вторым членом; здесь $\tau = NM$ - плотность газа (очевидно, массой электронов можно пренебречь). Если бы движение положительных ионов не учитывалось, то вместо конечной постоянной скорости (3) при $\omega \to 0$ получилась бы нулевая скорость, и соответствующие волны не могли бы существовать. Таким образом, механические колебания газа и колебания

электромагнитного поля оказываются в этом случае тесно связанными. Волны, распространяющиеся со скоростью (3), называются магнитогидродинамическими. Они уже рассматривались в разделе 10.3. Они играют большую роль в астрофизических, геофизических и других процессах.

12.54. Ищем совместное решение уравнений Максвелла и уравнения движения вектора намагниченности (11.115), имеющее вид плоских монохроматических волн:

(1) $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}, \boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_0 + \boldsymbol{h}_0 e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}, \boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}_0 + \boldsymbol{m}_0 e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}$.

Амплитуды полей и намагниченности удовлетворяют системе уравнений:

$$c\,(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{h}_0) = -\omega\varepsilon\boldsymbol{E}_0, c\,(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}_0) = \omega\,(\boldsymbol{h}_0 + 4\pi\boldsymbol{m}_0)\,, \boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{h}_0 + 4\pi\boldsymbol{m}_0) = 0 \tag{2}$$
$$i\omega\boldsymbol{m}_0 = -\eta\,(\boldsymbol{M}_0\times\boldsymbol{h}_0) - \eta\,(\boldsymbol{m}_0\times\boldsymbol{H}_0) + \eta q k^2\,(\boldsymbol{M}_0\times\boldsymbol{m}_0)$$

Исключая $\boldsymbol{E}_0$ и $\boldsymbol{h}_0$ из (2), и вводя обозначения

$$u = \frac{\omega_M}{\Omega}, \quad x = \frac{\omega}{\Omega}, \quad \xi = \frac{ck}{\Omega\sqrt{\varepsilon}}, \quad \Omega = \omega_0 + \omega_M + \omega_{ex}a^2k^2 \tag{3}$$
$$\omega_0 = \eta H_0, \quad \omega_{ex}a^2k^2 = \eta M_0 q k^2, \quad \omega_M = 4\pi\eta M_0$$

получим

(4) $ix\boldsymbol{m}_0 = \frac{u}{x^2-\xi^2}\left[x^2\,(\boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{m}_0) + \xi^2\,(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}_0)\,(\boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{n})\right] + (1-u)\,(\boldsymbol{e}_z\times\boldsymbol{m}_0)$,

где $\boldsymbol{n} = k/k, \boldsymbol{e}_z$ - единичный вектор в направлении $\boldsymbol{H}_0$ ($\boldsymbol{M}_0$ параллелен $\boldsymbol{H}_0$).

Выберем ось x в плоскости $(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{e}_z)$ и обозначим угол между e_z и $\boldsymbol{n}$ через θ. Из (4) следует система линейных уравнений относительно компонент m_0:

$$ixm_{0x} + \left(1 + \tfrac{u\xi^2}{x^2-\xi^2}\right) m_{0y} = 0$$
$$\left(1 + \tfrac{u\xi^2}{x^2-\xi^2}\cos^2\theta\right) m_{0x} - ixm_{0y} = 0$$

Условие разрешимости этой системы дает искомое дисперсионное уравнение

$$\left(1 + \frac{u\xi^2}{x^2-\xi^2}\right)\left(1 + \frac{u\xi^2}{x^2-\xi^2}\cos^2\theta\right) - x^2 = 0 \tag{5}$$

Это уравнение - третьей степени относительно $\omega^2\,(\omega^2 = \Omega^2x^2, \Omega$ не зависит от $\omega)$, поэтому в рассматриваемой среде могут распространяться волны трех разных типов, различающиеся законами дисперсии. Два из этих законов дисперсии были исследованы в задаче 12.43 (где мы полагали $\omega_{ex} = 0$). Им соответствуют обычные электромагнитные волны, распространяющиеся в гиротропной среде. Для исследования третьего типа волн используем условие $\omega^2\varepsilon/c^2k^2 \ll 1$, аналогичное условию существования магнитостатических волн (см. задачу 12.47). При этом $x^2 \ll \xi^2$. Пренебрегая в знаменателях в уравнении (4) x^2 по сравнению с ξ^2, получим третий закон дисперсии:

$$\omega^2(\boldsymbol{k}) = \left(\omega_0 + \omega_{ex}a^2k^2\right)\left(\omega_0 + \omega_{ex}a^2k^2 + \omega_M\sin^2\theta\right) \tag{6}$$

Из условия $\omega^2\varepsilon \ll c^2k^2$, считая ω_0, ω_1 и ω_M сравнимыми по величине, находим, что закон дисперсии (6) справедлив только при выполнении условия $\xi^2 \gg 1$.

Найдем относительную величину E_0 и h_0 для волн с законом дисперсии (6). Используя уравнения Максвелла (2) и условие $\omega^2\varepsilon/c^2k^2 \ll 1$, получим

$$\boldsymbol{E}_0 \approx \frac{4\pi\omega}{ck^2}(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{m}); \quad \boldsymbol{h}_0 \approx 4\pi\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m})$$

Таким образом, $E_0 \ll h_0$. Рассматриваемые волны представляют собой чисто магнитные колебания вектора намагниченности, при которых электрическое поле очень мало. Они называются спиновыми волнами и определяют многие магнитные, тепловые и электрические свойства ферромагнетиков. В задаче 11.53 спектр спиновых волн был получен в приближении $\omega_{ex}a^2k^2 \gg \omega_0, \omega_M$

12.55. Направим ось Oy в глубь металла нормально к поверхности, ось Oz - вдоль постоянного магнитного поля. Поскольку импеданс ζ, если он мал, не зависит от угла падения волны, рассмотрим случай нормального падения. Решая уравнения Максвелла и пользуясь определением поверхностного импеданса, получим

$$\zeta_{xx} = (1-i)\sqrt{\frac{\omega\mu_\parallel}{8\pi\kappa}}, \quad \zeta_{zz} = (1-i)\sqrt{\frac{\omega\mu}{8\pi\kappa_3}}, \quad \zeta_{xz} = \zeta_{zx} = 0$$

где

$$\kappa = \frac{\kappa_1^2 - \kappa_2^2}{\kappa_1}, \quad \mu = \frac{\mu_\perp^2 - \mu_a^2}{\mu_\perp}$$

Зависимость ζ_{zz} от частоты носит резонансный характер (см. (12.36)). Компонента ζ_{xx} не обладает резонансными свойствами, так как $\mu_\parallel = 1$.

12.56.

$$\zeta_\pm = \pm\frac{E_{\pm1}}{h_{\pm1}} = -(1-i)\sqrt{\frac{\omega\mu^\pm}{8\pi\kappa^\pm}}, \quad \text{где} \quad \mu^\pm = \mu_\perp \pm \mu_a, \quad \kappa^\pm = \kappa_1 \pm \kappa_2$$

$E_{\pm1}$ и $h_{\pm1}$ - циклические компоненты $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{h}$ ($h_{\pm1} = \mp(h_x \pm ih_y)/\sqrt{2}$.

12.58. Удобно ввести цилиндрические координаты с осью Oz вдоль оси цилиндра и отсчитывать угол α от направления волнового вектора k падающей волны. Из соображений симметрии следует, что векторы поля не зависят от z и имеют только компоненты E_z, H_r и H_α. Опуская в дальнейшем везде временной множитель $e^{-i\omega t}$, воспользуемся для определения отличных от нуля компонент поля волновым уравнением (2.119) для $\boldsymbol{E}$ и уравнением Максвелла (2.91). Первое из них позволяет определить E_z, а второе - выразить H_r и H_α. через E_z:

$$H_r = \frac{1}{ikr}\frac{\partial E_z}{\partial\alpha}, \quad H_\alpha = -\frac{1}{ik}\frac{\partial E_z}{\partial r} \tag{1}$$

Вторичное поле $E' = E_z - E_{0z}$, вызванное наличием цилиндра, удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial E'}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 E'}{\partial r^2} + k^2E' = 0 \tag{2}$$

Если положить $E' = R(r)\Phi(\alpha)$ и разделить переменные в уравнении (2), то получим

$$R_m'' + \frac{1}{r}R_m' + \left(k^2 - \frac{m^2}{r^2}\right)R_m = 0 \tag{3}$$

$$\Phi_m'' + m^2\Phi_m = 0 \tag{4}$$

Через m^2 обозначен параметр разделения. Общее решение уравнения (2) запишется в виде суммы по всем допустимым значениям m:

$$E'(r,\alpha) = \sum_m \Phi_m(\alpha)R_m(r) \tag{5}$$

Чтобы записать решение уравнения Бесселя (3) сразу в удобной для нас форме, обратимся к граничному условию $r \to \infty$. Поскольку E' описывает вторичное поле, создаваемое наводимыми на цилиндре токами, то при $r \to \infty$ оно будет иметь вид расходящихся цилиндрических волн. Это означает, что E' должно быть в этой области функцией вида

$$E' = \mathscr{E}_0 f(\alpha) \frac{e^{ikr}}{\sqrt{r}} \tag{6}$$

Условие (6) будет удовлетворено, если в качестве решения уравнения (3) выбрать функцию Ханкеля $H_m^{(1)}(kr)$ (см. (1.160)), которая при больших r имеет вид

$$H_m^{(1)}(kr) = \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} e^{i(kr - m\pi/2 - \pi/4)} \quad (kr \gg 1)$$

Второе линейно независимое решение будет содержать член вида (const $/\sqrt{r}) e^{-ikr}$, описывающий сходящуюся цилиндрическую волну, которой в условиях нашей задачи быть не может. Поэтому решение уравнения (3) запишем в виде $R_m(r) = H_m^{(1)}(kr)$. Уравнение (4) имеет решение

$$\Phi_m(\alpha) = A_m e^{im\alpha} + B_m e^{-im\alpha}$$

Так как при изменении α на 2π поле не может измениться, число m должно быть целым. Если считать, что m принимает и отрицательные значения, то в выражении для $\Phi_m(\alpha)$ достаточно оставить только один член, например, $e^{im\alpha}$. Окончательно $E'(r, \alpha)$ примет вид

$$E'(r, \alpha) = \mathscr{E}_0 \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m H_m^{(1)}(kr) e^{im\alpha} \tag{7}$$

на больших расстояниях (7) переходит в (6), причем

$$f(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi k}} \sum_m A_m \exp\left[i\left(m\alpha - \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right]$$

Коэффициенты A_m ряда (7) нужно определить из граничного условия на поверхности цилиндра. Поскольку он считается идеально проводящим, то

$$E' + E_0 = 0 \quad \text{при} \quad r = a \tag{8}$$

или

$$\exp(ika\cos\alpha) + \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m H_m^{(1)}(ka) e^{im\alpha} = 0 \tag{9}$$

Пользуясь ортогональностью функций $e^{im\alpha}$, получим

$$\int_0^{2\pi} \exp\left[i\left(ka\cos\alpha - m'\alpha\right)\right] d\alpha + 2\pi A_{m'} H_{m'}^{(1)}(ka) = 0$$

откуда с помощью (1.150) находим

$$A_m = \frac{i^m J_m(ka)}{H_m^{(1)}(ka)} \tag{10}$$

Полное электрическое поле, таким образом, равно

$$E(r,\alpha)=\mathscr{E}\exp(ikr\cos\alpha)-\mathscr{E}_0\sum_m\frac{i^mJ_m(ka)}{H_m^{(1)}(ka)}H_m^{(1)}(kr)e^{im\alpha}$$

Компоненты магнитного поля определяются по формулам (1):

$$H_r=-\mathscr{E}_0\sin\alpha\exp(ikr\cos\alpha)-\mathscr{E}_0\sum_m\frac{i^mJ_m(ka)}{H_m^{(1)}(ka)}\frac{H_m^{(1)}(kr)}{kr}e^{im\alpha}$$

$$H_\alpha=-\mathscr{E}_0\cos\alpha\exp(ikr\cos\alpha)+\mathscr{E}_0\sum_m\frac{i^{m-1}J_m(ka)}{H_m^{(1)}(ka)}\frac{dH_m^{(1)}(kr)}{d(kr)}e^{im\alpha}$$

Вторичное электрическое поле поперечно во всем пространстве; вторичное магнитное поле становится поперечным на большом расстоянии от цилиндра, при $kr\gg1$ (волновая зона), когда продольная составляющая H_r исчезает вследствие наличия лишнего множителя kr в знаменателе.

Поверхностная плотность тока определяется из граничного условия для касательной составляющей $\boldsymbol{H}$:

$$i(\alpha)=i_z(\alpha)=\frac{c}{4\pi}H_\alpha(a,\alpha)$$

Полный ток:

$$\mathscr{I}=-\frac{i}{2}ca\mathscr{E}_0\left[J_1(ka)-\frac{J_0(ka)H_1^{(1)}(ka)}{H_0^{(1)}(ka)}\right]$$

12.59. В рассматриваемом случае поле двумерно. Поэтому в общей формуле $d\sigma_s=dI/\gamma_0$ (12.37) под dI нужно понимать интенсивность вторичных волн внутри угла $d\alpha$, отнесенную к единице длины цилиндра: $dI=\gamma r d\alpha$.

Эффективное дифференциальное сечение рассеяния будет иметь размерность длины. Пользуясь результатами задачи 12.58*, найдем

$$d\sigma_s=|f(\alpha)|^2d\alpha$$

где

$$f(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi k}}\sum_m i^m\frac{J_m(ka)}{H_m^{(1)}}\exp\left[i\left(m\alpha-\frac{m\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right]\tag{1}$$

При произвольных ka формула (1) весьма сложна; она существенно упрощается, если $ka\ll1$. В этом случае в бесконечной сумме для $f(\alpha)$ достаточно учесть один член с $m=0$, что дает изотропное распределение вторичного излучения:

$$d\sigma_s=\frac{\pi d\alpha}{2k\ln^2(ka)}=\frac{\lambda}{4\ln^2(ka)}d\alpha\tag{2}$$

Полное сечение получится интегрированием (1) по $d\alpha$. Воспользовавшись ортогональностью функций $e^{im\alpha}$, получим

$$\sigma_s=\frac{4}{k}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\left|\frac{J_m(ka)}{H_m^{(1)}(ka)}\right|^2\tag{3}$$

При $ka\ll1$(3) переходит в

$$\sigma_s = \frac{\pi\lambda}{2\ln^2(ka)}$$

12.60.

$$H_z = \mathscr{H}_0\left[\exp(ikr\cos\alpha) - \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m \frac{J'_m(ka)}{H_m^{(1)'}(ka)} H_m^{(1)}(kr)e^{im\alpha}\right]$$

$$E_r = \mathscr{H}_0\left[\sin\alpha\exp(ikr\cos\alpha) + \frac{1}{kr}\sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m \frac{mJ'_m(ka)}{H_m^{(1)'}(ka)} H_m^{(1)}(kr)e^{im\alpha}\right]$$

$$E_\alpha = \mathscr{H}_0\left[\cos\alpha\exp(ikr\cos\alpha) + \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^{m+1} \frac{J'_m(ka)}{H_m^{(1)'}(ka)} H_m^{(1)'}(kr)e^{im\alpha}\right]$$

где α отсчитывается от направления k, а ось цилиндрической системы координат совпадает с осью цилиндра.

$$d\sigma_s(\alpha) = \frac{\pi(ka)^3}{8} a(1-2\cos\alpha)^2 d\alpha, \quad \sigma_s = \frac{3}{4}\pi^2 k^3 a^4$$

12.61. $d\sigma'_s = \cos^2\varphi d\sigma_\parallel + \sin^2\varphi d\sigma_\perp, \quad d\sigma''_s = \frac{1}{2}\left(d\sigma_\parallel + d\sigma_\perp\right)$.

12.62. Неполяризованную волну рассматриваем как совокупность двух некогерентных компонент одинаковой интенсивности, у одной из которых вектор $\boldsymbol{E}$ направлен вдоль оси цилиндра, а у другой - перпендикулярно оси. Сечения рассеяния первой и второй компонент получены в задачах 12.59 и 12.60*. Степень деполяризации ρ определяется отношением интенсивностей рассеянных волн (меньшей и большей):

$$\rho = \frac{d\sigma_\perp}{d\sigma_\parallel} = \frac{1}{4}(ka)^4\ln^2(ka)(1-2\cos\alpha)^2$$

Так как $(ka) \ll 1$, то ρ очень мало, т. е. рассеянные волны почти полностью поляризованы при любом угле рассеяния; при $\cos\alpha = \frac{1}{2}$, т. е. при $\alpha = 60°$, ρ обращается в нуль.

12.63.

$$H_z = \mathscr{H}_0\left[\exp(ikr\cos\alpha) + \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m \frac{J'_m(ka) - i\zeta J_m(ka)}{i\zeta H_m^{(1)}(ka) - H_m^{(1)}(ka)} H_m^{(1)}(kr)e^{im\alpha}\right],$$

где ζ - поверхностный импеданс металла;

$$H_\alpha = H_r = 0, \quad \boldsymbol{E} = \frac{i}{k}\operatorname{rot}\boldsymbol{H}$$

12.64.

$$Q = \frac{ac\zeta'\mathscr{H}_0^2}{4}\sum_m \left|\frac{J'_m Y_m - J_m Y'_m}{i\zeta H_m^{(1)} - H_m^{(1)'}}\right|^2$$

где ζ' - вещественная часть поверхностного импеданса. Цилиндрические функции J_m, Y_m и $H_m^{(1)}$ (см. раздел 1.3) и их производные берутся в точке ka.

Сечение поглощения:

$$\sigma_a = \frac{Q_0}{\gamma_0} = 2\pi a\zeta'\sum_m \left|\frac{J'_m Y_m - J_m Y'_m}{i\zeta H_m^{(1)} - H_m^{(1)'}}\right|^2$$

При $ka \ll 1$, т. е. при $\lambda \gg a$, поле в окрестности цилиндра является квазистационарным (проводящий цилиндр в продольном квазистационарном магнитном

поле, см. задачу 10.30). Поэтому, выразив ζ' через проводимость $\sigma \gg \omega$ с помощью (11.65) и (12.13), получим для Q выражение

$$Q = \frac{ac\mathscr{H}_0^2}{8}\sqrt{\frac{\mu\omega}{2\pi\sigma}}$$

которое совпадает с найденным в задаче 10.32 для случая сильного скинэффекта, если в нем выразить Q через магнитное поле.

12.65. При $r > a$:

$$E_z = \mathscr{E}_0[\exp(ikr\cos\alpha) + \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m \frac{\zeta J'_m(ka)J_m(k'a) - J_m(ka)J'_m(k'a)}{H_m^{(1)}(ka)J'_m(k'a) - \zeta H_m^{(1)\prime}(ka)J_m(k'a)} H_m^{(1)}(kr)e^{im\alpha}]$$

при $r < a$:

$$E_z = \mathscr{E}_0\zeta \sum_{m=-\infty}^{\infty} i^m \frac{J'_m(k'a)\,H_m^{(1)}(ka) - J'_m(k'a)\,H_m^{(1)'}(ka)}{J'_m(k'a)\,H_m^{(1)}(ka) - \zeta J_m(k'a)\,H_m^{(1)}(ka)} J_m(k'r)\,e^{im\alpha}$$

Здесь $\mathscr{E}_0$ - амплитуда падающей волны, $\zeta = \sqrt{\mu/\varepsilon}, k = \omega/c, k' = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}/c$, остальные компоненты $\boldsymbol{E}$ равны нулю.

Поле $\boldsymbol{E}$ вычисляется по формуле

$$\boldsymbol{H} = \frac{c}{i\omega\mu}\operatorname{rot}\boldsymbol{E}$$

12.66. Дипольные моменты шара запишутся

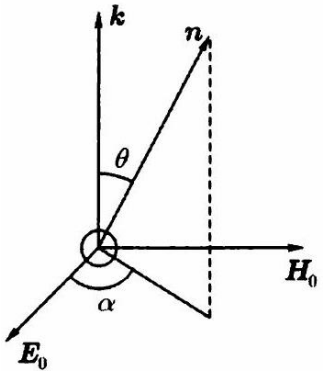


Рис. 12.15

$$\boldsymbol{p} = \beta_e \boldsymbol{E}_0 e^{-i\omega t}, \quad \boldsymbol{m} = \beta_m \boldsymbol{H}_0 e^{-i\omega t}$$

где β_e и β_m - электрическая и магнитная поляризуемости шара, которые в общем случае являются комплексными величинами.

По формулам (5.28), (5.29), (5.37) найдем компоненты векторов $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ рассеянной волны: в виде

$$H_\alpha = E_\theta = \frac{\omega^2 E_0}{c^2 r}(\beta_e\cos\theta + \beta_m)\cos\alpha$$

$$H_\theta = -E_\alpha = \frac{\omega^2 E_0}{c^2 r}(\beta_e + \beta_m)\sin\alpha$$

Углы θ и α, характеризующие направление рассеяния, указаны на рис. 12.15.

Дифференциальное сечение рассеяния определяется по формуле (12.37):

$$\frac{d\sigma_s(\theta,\alpha)}{d\Omega} = \frac{\omega^4}{c^4}\left[|\beta_e|^2\left(\cos^2\theta\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\right)+\right.$$
$$\left.+|\beta_m|^2\left(\cos^2\theta\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)+(\beta_e\beta_m^*+\beta_e^*\beta_m)\cos\theta\right].$$

12.67.

$$d\sigma_s(\theta) = \frac{1}{2}\left[d\sigma_s(\theta,\alpha)+d\sigma_s(\theta,\alpha+\pi/2)\right] =$$
$$= \frac{\omega^4}{2c^4}\left[\left(|\beta_e|^2+|\beta_m|^2\right)\left(1+\cos^2\theta\right)+2\left(\beta_e\beta_m^*+\beta_e^*\beta_m\right)\cos\theta\right]d\Omega$$
$$\sigma_s = \frac{8\pi\omega^4}{3c^4}\left(|\beta_e|^2+|\beta_m|^2\right)$$

Чтобы определить степень деполяризации рассеянного излучения, нужно найти главные направления тензора поляризации. В рассматриваемой задаче это легко сделать из соображений симметрии. При фиксированных k и $\boldsymbol{n}$ (см. рис. 12.15) выделенными направлениями для $\boldsymbol{E}_0$ будут направление нормали к плоскости рассеяния и направление в плоскости рассеяния, перпендикулярное k.

Этим направлениям поляризации соответствуют дифференциальные сечения рассеяния $d\sigma_s(\theta,\pi/2)$ и $d\sigma_s(\theta,0)$, полученные при решении предыдущей задачи. Степень деполяризации ρ определяется как отношение меньшей из этих величин к большей.

Если $|\beta_m|<|\beta_e|$, то

$$\rho = \frac{d\sigma_s(\theta,0)}{d\sigma_s(\theta,\pi/2)} = \left|\frac{\beta_m+\beta_e\cos\theta}{\beta_m\cos\theta+\beta_e}\right|^2$$

12.68. Для диэлектрического шара:
$d\sigma_{sd} = \frac{\omega^4a^6}{2c^4}\left(\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}\right)^2(1+\cos^2\theta)\,d\Omega$, $\sigma_{sd} = \frac{8\pi\omega^4a^6}{3c^4}\left(\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}\right)^2$; $\rho_d = \cos^2\theta$.
Для идеально проводящего шара:
$d\sigma_{sc} = \frac{\omega^4a^6}{8c^4}\left[5\left(1+\cos^2\theta\right)-8\cos\theta\right]d\Omega$, $\sigma_{sc} = \frac{10\pi\omega^4a^6}{3c^4}$, $\rho_c = \left(\frac{1-2\cos\theta}{2-\cos\theta}\right)^2$.
Из формулы для $d\sigma_{sd}$ видно, что сечение рассеяния диэлектрическим шаром симметрично относительно направлений вперед ($\theta=0$) и назад ($\theta=\pi$). Отношение $d\sigma_{sd}(0)/d\sigma_{sd}(\pi)=1$. Сечение рассеяния проводящим шаром значительно более анизотропно и несимметрично: $d\sigma_{sc}(0)/d\sigma_{sc}(\pi) = \frac{1}{9}$. Свет; рассеянный диэлектрическим шаром под углом $\theta=\pi/2$, будет полностью поляризованным; при рассеянии идеально проводящим шаром полная поляризация достигается при $\cos\theta=1/2$, $\theta=\pi/3=60^\circ$.

Применение полученных формул в случае диэлектрического шара законно, если можно пренебречь эффектами, связанными с конечной скоростью распространения электромагнитной волны внутри шара, т. е. если длина волны внутри шара велика по сравнению с его радиусом. В случае идеально проводящего шара, распространения волны внутри шара не происходит, и достаточно, чтобы выполнялось условие $a \ll \lambda$, где λ - длина волны в веществе, окружающем шар.

12.69. Полную напряженность электрического поля в некоторой точке пространства можно представить в виде

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r},t)+\boldsymbol{E}'(\boldsymbol{r},t) \tag{1}$$

Здесь

$$\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{\delta}_0\exp[i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)]$$

- поле падающей волны, $\boldsymbol{E}'(\boldsymbol{r},t)$ - поле рассеянного (вторичного) излучения.

В каждой точке внутри тела (которое может быть неоднородным) вектор поляризации $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r},t)$ пропорционален $\boldsymbol{E}$, а приближенно $-\boldsymbol{\delta}_0$, так как рассеянное поле много меньше падающего ($E' \ll \mathscr{E}_0$) при $(\varepsilon-1)/4\pi \ll 1$.[12]

Рассеянное поле $\boldsymbol{E}'$ может быть выражено через электрический вектор Герца

$$\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{r},t) = \int \frac{\boldsymbol{P}\,(\boldsymbol{r}',t)}{R}\exp[i(kR-\omega t)]dV' \tag{2}$$

(см. (5.40)-(5.43)) формулой
$\boldsymbol{E}' = \operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{Z} - 4\pi\boldsymbol{P} = \frac{\varepsilon-1}{4\pi}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{E}_0\frac{\exp[ikr]}{r}\int\exp\left[i(\boldsymbol{k}-k\boldsymbol{n})\cdot\boldsymbol{r}'\right]dV'$.
Разность $k-kn$ представляет собою изменение волнового вектора при рассеянии; обозначим ее через $\boldsymbol{q}(q = 2k\sin(\theta/2), \theta$ - угол рассеяния). При вычислении интеграла выберем полярную ось вдоль $\boldsymbol{q}$, тогда

$$\int\exp\left[i\,(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}')\right]r'^2dr'd\Omega = 4\pi\frac{\sin qa - q\dot{a}\cos qa}{q^3} \tag{4}$$

При вычислении двойного вихря в (3) оставляем только члены, пропорциональные $1/r$:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathscr{E}_0\frac{\exp[ikr]}{r} = k^2\left[\boldsymbol{n}\times(\mathscr{E}_0\times\boldsymbol{n})\right]\frac{\exp[ikr]}{r}$$

Окончательно, для рассеянного поля $\boldsymbol{E}'$ получим

$$\boldsymbol{E}' = \frac{\omega^2a^3}{c^2}\frac{\varepsilon-1}{3}\left[\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{\delta}_0\times\boldsymbol{n})\right]\varphi(qa)\frac{\exp[ikr]}{r} \tag{5}$$

где

$$\varphi(qa) = \frac{3(\sin q - qa\cos qa)}{(qa)^3} = 3\sqrt{\frac{\pi}{(qa)^3}}J_{3/2}(qa)$$

Сравним выражение (5) с тем, которое имеет место при малых a (см. задачу 12.68). Переходя в (5) к пределу $qa \ll 1$, получим

$$\boldsymbol{E}' = \frac{\omega^2a^3}{c^2}\frac{\varepsilon-1}{3}\frac{e^{ikr}}{r}\left[\boldsymbol{n}\times(\mathscr{E}_0\times\boldsymbol{n})\right] \tag{6}$$

так как $\varphi(qa)\approx 1$ при $qa \ll 1$.
С другой стороны, вычисляя $\boldsymbol{E}'$ по формуле

$$\boldsymbol{E}' = \boldsymbol{n}\times(\ddot{\boldsymbol{p}}\times\boldsymbol{n})\frac{e^{ikr}}{c^2r}, \quad \text{где} \quad \boldsymbol{p} = \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}a^3\boldsymbol{E}_0$$

- статический дипольный момент шара, найдем

$$\boldsymbol{E}' = \frac{\omega^2a^3}{c^2}\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}\frac{e^{ikr}}{r}\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{E}_0\times\boldsymbol{n}) \tag{6}$$

В (6') вместо множителя $1/3$ стоит $1/(\varepsilon+2)$. Однако противоречия между (6) и (6′) нет, так как (6) справедливо с точностью до $1/(\varepsilon-1)$.

Дифференциальное сечения рассеяния

$$\frac{d\sigma_s(\theta,\alpha)}{d\Omega} = \frac{\omega^4a^6(\varepsilon-1)^2}{9c^4}\varphi^2(qa)\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\cos^2\theta\right) \tag{7}$$

[012] Метод, применяемый при решении этой задачи, аналогичен методу Борна в квантовой механике. Последний широко применяется при решении задач о рассеянии частиц квантовомеханическими системами.

(углы θ и α обозначены на рис. 12.15).
Это сечение отличается от сечения рассеяния малой диэлектрической сферой (см. ответ к задаче 12.68) заменой в знаменателе $(\varepsilon+2)^2$ на 9 и множителем $\varphi^2(qa)$, учитывающим интерференцию вторичных волн от различных элементов сферы. Поэтому степень деполяризации рассеянного света будет такой же, как в случае малой диэлектрической сферы:

$$\rho = \cos^2\theta \tag{8}$$

Усреднение по поляризациям дает

$$\frac{d\sigma_s(\theta)}{d\Omega} = \frac{\omega^4 a^6(\varepsilon-1)^2}{18c^4}\varphi^2(qa)\left(1+\cos^2\theta\right)$$

Рассмотрим еще случай очень большой сферы, т. е. $ka \gg 1$. Если углы таковы, что и $qa \gg 1$, то $\varphi(qa) \to 0$, и сечение в этой области углов очень мало. Из явного вида q следует, что $qa \gg 1$ эквивалентно условию $\theta \gg 1/ka$; таким образом, если шар велик, то рассеяние происходит вперед в интервал углов $\theta \leqslant 1/ka$.
12.70. При $ka \gg 1$ функция $\varphi^2(qa)$, входящая в выражение дифференциального сечения (см. предыдущую задачу), заметно отлична от нуля только в узком интервале углов $\theta \leqslant \frac{1}{ka}$. В этом интервале множитель $(1+ + \cos^2\theta)$ может считаться постоянным и равным 2. Поэтому имеем:

$$\sigma_s = \frac{2\pi\omega^4 a^6(\varepsilon-1)^2}{9c^4}\int\limits_0^\pi \varphi^2(qa)\sin\theta d\theta$$

Введем новую переменную $y = qa = 2ka\sin\theta/2$. В предельном случае $ka \gg 1$, получим окончательно:

$$\sigma_s = \frac{\pi\omega^2 a^4(\varepsilon-1)^2}{18c^2}$$

Для малого шара ($ka \ll 1$), заменяя (см. ответ к задаче 12.68) $\varepsilon+2$ на 3, имеем:

$$\sigma_s = \frac{8\pi\omega^4 a^6(\varepsilon-1)^2}{27c^4}$$

Как видно из этих результатов, сечения по-разному зависят от частоты ($\sim\omega^4$ и $\sim\omega^2$) и от размера шара ($\sim a^6$ и $\sim a^4$).
12.71. Решаем задачу в сферических координатах. Используем представление поля через векторы Герца (см. формулы (5.40), (5.46)). Для рассматриваемого общего случая следует ввести оба вектора - электрический и магнитный, которые, согласно (5.42) и (5.45), должны удовлетворять в области $r > a$ однородным волновым уравнениям. Выразим их через скалярные функции $u(r,\vartheta,\alpha), v(r,\vartheta,\alpha)$:
(1)

$$\boldsymbol{Z}^{(e)} = u\boldsymbol{r} + \nabla\chi, \quad \chi = k^{-2}\frac{\partial}{\partial r}(ru)$$

$$\boldsymbol{Z}^{(m)} = v\boldsymbol{r} + \nabla\psi, \quad \psi = k^{-2}\frac{\partial}{\partial r}(rv), \quad k = \frac{\omega}{c}$$

Относительно сложная связь этих функций (потенциалов Дебая [13]) с векторами Герца выбрана таким образом, чтобы u и v удовлетворяли волновым уравнениям.

Записав напряженности поля через векторы Герца с помощью формул (5.42) и (5.45),

$$\boldsymbol{E} = k^2\boldsymbol{Z}^{(e)} + \nabla\left(\nabla\cdot\boldsymbol{Z}^{(e)}\right) + ik\nabla\times\boldsymbol{Z}^{(m)} = \nabla\times\left[\nabla\times\boldsymbol{Z}^{(e)}\right] + ik\nabla\times\boldsymbol{Z}^{(m)} \tag{2}$$
$$\boldsymbol{H} = \nabla\times\left[\nabla\times\boldsymbol{Z}^{(m)}\right] - ik\nabla\times\boldsymbol{Z}^{(e)}$$

убеждаемся в том, что электрический вектор $Z^{(e)}$ порождает поле с $E_r \neq 0$ (E-волна), а магнитный вектор $Z^{(m)}$ - поле с $H_r \neq 0$ (H-волна); заметим, что в рассматриваемой задаче $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{H}$.

Покажем теперь, что векторы Герца будут удовлетворять однородным волновым уравнениям, если таким же уравнениям подчинить функции $u(r,\vartheta,\alpha), v(r,\vartheta,\alpha)$

$$\Delta u + k^2 u = 0, \quad \Delta v + k^2 v = 0 \tag{3}$$

Эти уравнения, записанные для монохроматических полей и не содержащие производных по времени, называют также уравнениями Гельмгольца. Имеем из (1)

$$\left(\Delta + k^2\right)\boldsymbol{Z}^{(e)} = \left(\Delta + k^2\right)u\boldsymbol{r} + \nabla\left(\Delta + k^2\right)\chi \tag{4}$$

Применив оператор Δ к вектору $u\boldsymbol{r}$, будем иметь

(5) $\Delta(u\boldsymbol{r}) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)u\left(x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y + z\boldsymbol{e}_z\right) = \boldsymbol{r}\Delta u + 2\nabla u.$

Далее записываем в сферических координатах

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\widehat{l^2}}{r^2}, \quad \chi = k^{-1}\left(u + r\frac{\partial u}{\partial r}\right) \tag{6}$$

где $-\widehat{l^2}$ - угловая часть оператора Лапласа, используем волновое уравнение (3) для u и находим

$$\Delta\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) = -k^2\left(2u + r\frac{\partial u}{\partial r}\right) \tag{7}$$

В итоге получаем

$$\Delta\chi + k^2\chi + 2u = 0 \tag{8}$$

и с помощью (4)-(8) убеждаемся, что волновое уравнение для $\boldsymbol{Z}^{(e)}$ выполняется:

$$\left(\Delta + k^2\right)\boldsymbol{Z}^{(e)} = \boldsymbol{r}\left(\Delta u + k^2 u\right) + \nabla\left(\Delta\chi + k^2\chi + 2u\right) = 0. \tag{9}$$

Аналогичный результат получается и для $\boldsymbol{Z}^{(m)}$.

Напряженности поля выражаются через функции u, v с помощью уравнений (2), (3):

$$\boldsymbol{E} = k^2(u\boldsymbol{r} + \nabla\chi) + ik\nabla v\times\boldsymbol{r}, \quad \boldsymbol{H} = k^2(v\boldsymbol{r} + \nabla\psi) - ik\nabla u\times\boldsymbol{r}. \tag{10}$$

В проекциях на сферические оси получим

$$\begin{cases} E_r = \frac{\partial^2(ru)}{\partial r^2} + k^2 ru, & H_r = \frac{\partial^2(rv)}{\partial r^2} + k^2 rv, \\ E_\vartheta = \frac{1}{r}\frac{\partial^2(ru)}{\partial r\partial\vartheta} + \frac{ik}{\sin\vartheta}\frac{\partial v}{\partial\alpha}, & H_\vartheta = \frac{1}{r}\frac{\partial^2(rv)}{\partial r\partial\vartheta} - \frac{ik}{\sin\vartheta}\frac{\partial u}{\partial\alpha} \\ E_\alpha = \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial^2(ru)}{\partial r\partial\alpha} - ik\frac{\partial v}{\partial\vartheta}, & H_\alpha = \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial^2(rv)}{\partial r\partial\alpha} + ik\frac{\partial u}{\partial\vartheta}. \end{cases} \tag{11}$$

Заметим, что корректность представления (11) компонент поля через скалярные функции u, v (потенциалы Дебая) легко проверить непосредственно, путем подстановки (11) в уравнения Максвелла $\nabla\times\boldsymbol{E} = ik\boldsymbol{H}, \nabla\times\boldsymbol{H} = -ik\boldsymbol{E}$, записанные в проекциях на

[013] Дебай Петер (1884-1966) - европейский ученый, физик и химик, Нобелевский лауреат.

сферические орты. Четыре из шести уравнений обратятся в тождества, а два уравнения примут форму (3).

Следующий шаг - построение общего решения уравнения Гельмгольца (3). Ищем частные решения методом разделения переменных: $u(r,\vartheta,\alpha) = R(r)\Theta(\vartheta)\Phi(\alpha)$. Использовав явный вид оператора Лапласа в сферических координатах (1.137), получим три обыкновенных дифференциаліных уравнения

$$\frac{d^2\Phi}{d\alpha^2} + m^2\Phi = 0, \quad \left(1-x^2\right)\frac{d^2\Theta}{dx^2} - 2x\frac{d\Theta}{dx} + \left[\lambda - \frac{m^2}{1-x^2}\right]\Theta = 0 \tag{12}$$
$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dR}{dr} + \left(k^2 - \frac{\lambda}{r^2}\right)R = 0$$

где $x = \cos\vartheta$, а m^2, λ - постоянные, введенные при разделении переменных. Параметр $m = 0, \pm 1 \ldots$ должен быть действительным и целочисленным, чтобы функция $\Phi(\alpha)$ была однозначной, т. е. принимала исходное значение при замене α на $\alpha + 2\pi$. Общее решение для Φ имеет вид

$$\Phi(\alpha) = b_1 \cos m\alpha + b_2 \sin m\alpha \tag{13}$$

где $b_{1,2}$ - произвольные постоянные.
Уравнение для Θ имеет вид (1.190), и его решение, ограниченное в области $-1 \leqslant x \leqslant 1$, существует только при $\lambda = l(l+1), l = 0, 1, 2 \ldots, |m| \leqslant l$. Решением при этих условиях является присоединенный полином Лежандра (1.189):

$$\Theta_{lm}(x) = P_l^m(x) \tag{14}$$

Уравнение для R с помощью подстановок $\varrho = kr, R = \varrho^{-1/2}Q$ приводится к уравнению Бесселя (1.151). Поэтому общее решение можно записать через сферические функции Бесселя (1.171):

$$R_l(kr) = a_1 z_l^{(1)}(kr) + a_2 z_l^{(2)}(kr) \tag{15}$$

Здесь $a_{1,2}$ - постоянные, а $z_l^{(1,2)}(kr)$ - две произвольные линейно независимые сферические функции Бесселя. Найденные решения обыкновенных уравнений (12) позволяют записать общее решения уравнения Гельмгольца (3):

$$u(r,\vartheta,\alpha) = \sum_{l,m} u_{lm}(r,\vartheta,\alpha) \tag{16}$$

$u_{lm}(r,\vartheta,\alpha) = \left(a_{1l} z_l^{(1)}(kr) + a_{2l} z_l^{(2)}(kr)\right) P_l^m(x)\,(b_{1m}\cos m\alpha + b_{2m}\sin m\alpha)$.
Такой же вид имеет общее решение для v. Эти решения можно было бы записать и через комплексные сферические функции Лежандра (1.192).

Построим функции u^0, v^0, позволяющие описать падающую плоскую волну

$$\boldsymbol{E}^0(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{e}_x e^{ikr\cos\vartheta}, \quad \boldsymbol{H}^0(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{e}_y e^{ikr\cos\vartheta} \tag{17}$$

(полагаем амплитуду $E_0 = 1$). Проецируя поля на орт $\boldsymbol{e}_r$, находим

$$E_r = \sin\vartheta\cos\alpha e^{ikr\cos\vartheta}, \quad H_r = \cos\vartheta\cos\alpha e^{ikr\cos\vartheta} \tag{18}$$

Далее записываем

$$E_r = \frac{i\cos\alpha}{kr}\frac{\partial}{\partial\vartheta}e^{ikr\cos\vartheta} \tag{19}$$

и пользуемся разложением плоской волны по полиномам Лежандра (см. задачу 1.138)

$$E_r = \frac{i\cos\alpha}{kr}\sum_{l=0}^{\infty} i^l(2l+1)j_l(kr)\frac{dP_l(\cos\vartheta)}{d\vartheta} = \tag{20}$$
$$= -\frac{i}{kr}\sum_{l=1}^{\infty} i^l(2l+1)j_l(kr)P_l^1(\cos\vartheta)\cos\alpha$$

где $j_l(kr)$ - сферическая функция Бесселя (1.171). Производная от полинома Лежандра по углу преобразована с помощью формулы (1.189) в присоединенный полином Лежандра. Суммирование начинается с $l = 1$, так как $P_0^1 = 0$.

Исходя из разложения (20), ищем u^0 в виде ряда

$$u^0 = \sum_{l=1}^{\infty} a_{1l}j_l(kr)P_l^1(\cos\vartheta)\cos\alpha \tag{21}$$

выбрав в (16) $b_{1m} = \delta_{m1}, b_{2m} = a_{2l} = 0, z_l^{(1)} = j_l(kr)$. Уравнение для E_r из системы (11) с помощью уравнения Гельмгольца перепишем в виде

$$E_r = -\frac{1}{r}\widehat{l}^2 u(r,\vartheta,\alpha) \tag{22}$$

и, подставив в качестве u ряд (21), получим

$$E_r^0 = -\sum_{l=1}^{\infty} a_{1l}l(l+1)j_l(kr)P_l^1(\cos\vartheta)\cos\alpha \tag{23}$$

где использовано уравнение $\widehat{l}^2 P_l^1 = l(l+1)P_l^1$. Теперь сравнение (23) с (20) позволяет найти коэффициенты a_{1l} и записать разложение для u^0:

$$u^0 = \frac{1}{k}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{i^{l-1}(2l+1)}{l(l+1)}j_l(kr)P_l^1(\cos\vartheta)\cos\alpha \tag{24}$$

Аналогичный расчет дает сходное выражение для второго потенциала Дебая:

$$v^0 = \frac{1}{k}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{i^{l-1}(2l+1)}{l(l+1)}j_l(kr)P_l^1(\cos\vartheta)\sin\alpha \tag{25}$$

Представим потенциалы Дебая полного поля в присутствии рассеивающего тела в виде сумм $u = u^0 + u^s, v = v^0 + v^s$, где индексом s обозначены потенциалы, которые описывают поле рассеянных волн. Рассеянные волны на больших расстояниях от шара должны иметь вид расходящихся сферических волн (принцип излучения). Это требование приводит к граничному условию

$$u^s \propto \frac{1}{r}e^{ikr}, \quad v^s \propto \frac{1}{r}e^{ikr} \quad \text{при} \quad \dot{kr} \gg l \tag{26}$$

Граничное условие на поверхности идеально проводящего шара требует обращения в нуль тангенциальных компонент электрического поля: $E_\vartheta = E_\alpha = 0$ при $r = a$. Согласно (11), оно будет выполнено, если подчинить полные потенциалы Дебая условиям

$$v(a,\vartheta,\alpha) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial r}(ru(r,\vartheta,\alpha))\Big|_{r=a} = 0 \tag{27}$$

На основе общего решения (16) и результатов (24), (25) записываем полные потенциалы Дебая в форме, удовлетворяющей условию (26) для рассеянной волны:

$$u = k^{-1}\cos\alpha \sum_{l=1}^{\infty} \frac{i^{l-1}(2l+1)}{l(l+1)} \left[j_l(kr) + a_l h_l^{(1)}(kr) \right] P_l^1(\cos\vartheta)$$
$$v = k^{-1}\sin\alpha \sum_{l=1}^{\infty} \frac{i^{l-1}(2l+1)}{l(l+1)} \left[j_l(kr) + b_l h_l^{(1)}(kr) \right] P_l^1(\cos\vartheta) \tag{28}$$

где a_l, b_l - неизвестные коэффициенты, которые определяются из граничных условий (27):

$$a_l = -\frac{(kaj_l(ka))'}{\left(kah_l^{(1)}(ka)\right)'}, \quad b_l = -\frac{j_l(ka)}{h_l^{(1)}(ka)} \tag{29}$$

Здесь $h_l^{(1)}(kr)$ - сферическая функция Ханкеля первого рода (1.171), обладающая нужной асимптотикой (1.173); штрихом обозначена производная
по аргументу ka. Как следует из (1.54), (1.71), $h_l^{(1)} = j_l + iy_l$, где y_l - сферическая функция Бесселя второго рода (1.153). Поэтому $|a_l| \leqslant 1, |b_l| \leqslant 1$, и коэффициенты разложения можно выразить через фазовые сдвиги:
(30)

$$a_l = ie^{i\delta_l'}\sin\delta_l', \quad b_l = ie^{i\delta_l}\sin\delta_l$$

$$\text{где} \quad \operatorname{tg}\delta_l' = \frac{(kaj_l(ka))'}{(kay_l(ka))'}, \operatorname{tg}\delta_l = \frac{j_l(ka)}{y_l(ka)}, -\frac{\pi}{2} \leqslant \delta_l, \delta_l' \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Результаты (28), (29) позволяют по формулам (11) вычислить векторы напряженности электрического и магнитного полей во всем пространстве. Для вычисления сечения рассеяния нужно знать напряженности поля на больших расстояниях от рассеивателя. С помощью (1.173) получим потенциалы Дебая рассеянной волны в волновой зоне:

$$u^s = u_e^s(\vartheta,\alpha)\frac{e^{ikr}}{r}, \quad v^s = v_m^s(\vartheta,\alpha)\frac{e^{ikr}}{r} \tag{31}$$

где

$$u_e^s = -k^{-2}\sum_{l=1}^{\infty} \frac{(2l+1)}{l(l+1)} a_l P_l^1(\cos\vartheta)\cos\alpha \tag{32}$$
$$v_m^s = -k^{-2}\sum_{l=1}^{\infty} \frac{(2l+1)}{l(l+1)} b_l P_l^1(\cos\vartheta)\sin\alpha$$

Напряженности поля записываются в виде

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{e}_x e^{ikz} + \boldsymbol{F}(\vartheta,\alpha)\frac{e^{ikr}}{r}, \quad \boldsymbol{H} = \boldsymbol{e}_x e^{ikz} + \boldsymbol{e_r} \times \boldsymbol{F}(\vartheta,\alpha)\frac{e^{ikr}}{r} \tag{33}$$

Здесь векторная амплитуда рассеянной волны

$$\boldsymbol{F} = ik\left(\frac{\partial u_e^s}{\partial\vartheta} + \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial v_m^s}{\partial\alpha}\right)\boldsymbol{e}_\vartheta + ik\left(\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial u_e^s}{\partial\alpha} - \frac{\partial v_m^s}{\partial\vartheta}\right)\boldsymbol{e}_\alpha \tag{3}$$

называется амплитудой рассеяния (см. условие задачи 12.77*).
Дифференциальное сечение рассеяния выражается через амплитуду рассеяния. С помощью формул (12.37), (12.38) находим

$$d\sigma_s(\vartheta,\alpha) = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{F}^* d\Omega = |\boldsymbol{F}(\vartheta,\alpha)|^2 d\Omega \tag{34}$$

Полное сечение рассеяния вычисляется путем интегрирования (34) по всему телесному углу. Можно, однако, избежать этой утомительной работы, если использовать оптическую теорему (см. задачу 12.77*). В данном случае поглощение отсутствует, и полное сечение всех упругих и неупругих процессов совпадает с сечением рассеяния:

$$\sigma_s = \sigma_t = \frac{4\pi}{k}\,\mathrm{Im}\,(e_x\cdot\boldsymbol{F}(0,\alpha)) \tag{35}$$

где в аргументе амплитуды рассеяния указаны углы, определяющие направление волнового вектора падающей волны, а e_x - ее векторная амплитуда. Использовав формулу (33), получим
$\boldsymbol{e}_x\cdot\boldsymbol{F}(\vartheta,\alpha) = ik\left(\frac{\partial u_e^s}{\partial\vartheta}+\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial v_m^s}{\partial\alpha}\right)\cos\vartheta\cos\alpha - ik\left(\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial u_e^s}{\partial\alpha}-\frac{\partial v_m^s}{\partial\vartheta}\right)\sin\alpha.$
При переходе к пределу $\vartheta\to 0$ пользуемся формулами (1.189), (1.186):

$$\begin{aligned}\left.\frac{P_l^1}{\sin\vartheta}\right|_{\vartheta\to 0} &= P_l'(x)|_{x\to 1} = \frac{1}{2}l(l+1)\\ \left.\frac{dP_l^1}{d\vartheta}\right|_{\vartheta\to 0} &= l(l+1) - P_l'(x)|_{x\to 1} = \frac{1}{2}l(l+1)\end{aligned} \tag{37}$$

Окончательное выражение:

$$\sigma_s = \frac{2\pi}{k^2}\sum_{l=1}^{\infty}(2l+1)\left(\sin^2\delta_l' + \sin^2\delta_l\right) = \frac{2\pi}{k^2}\sum_{l=1}^{\infty}(2l+1)\left(|a_l|^2+|b_l|^2\right) \tag{38}$$

12.72. При записи решения внутри шара нужно использовать ограниченные при $r\to 0$ функции $j_l(k_2 r)$, где $k_2 = \omega\sqrt{\varepsilon_2}/c, \varepsilon_2$ - диэлектрическая проницаемость внутри шара. Решение для внешней области будет содержать функции $j_l(k_1 r), h_l^{(1)}(k_1$ к), где $k_1 = \omega\sqrt{\varepsilon_1}/c$. В формулы (11) войдут $\varepsilon_1(\varepsilon_2)$, их расположение легко устанавливается с помощью уравнений Максвелла. Вместо граничного условия (27) предыдущей задачи нужно потребовать, чтобы на поверхности шара были непрерывны касательные компоненты $E_\vartheta, H_\vartheta, E_\alpha, H_\alpha$. Это приведет к непрерывности величин

$$\varepsilon u,\quad v,\quad \frac{\partial}{\partial r}(ru),\quad \frac{\partial}{\partial r}(rv)\quad \text{при}\quad r=a \tag{1}$$

Приведем коэффициенты, определяющие рассеянную волну во внешней области:

$$\begin{aligned}a_l &= \frac{\varepsilon_2 j_l(k_2a)\,(k_1a j_l(k_1a))' - \varepsilon_1 j_l(k_1a)\,(k_2a j_l(k_2a))'}{\varepsilon_1 h_l^{(1)}(k_1a)\,(k_2a j_l(k_2a))' - \varepsilon_2 j_l(k_2a)\left(k_1a h_l^{(1)}(k_1a)\right)'}\\ b_l &= \frac{j_l(k_2a)\,(k_1a j_l(k_1a))' - j_l(k_1a)\,(k_2a j_l(k_2a))'}{h_l^{(1)}(k_1a)\,(k_2a j_l(k_2a))' - j_l(k_2a)\left(k_1a h_l^{(1)}(k_1a)\right)'}\end{aligned} \tag{2}$$

12.73. Так же, как и в задаче 12.66*, нужно рассмотреть излучение индуцированных электрического $\boldsymbol{p}$ и магнитного $\boldsymbol{m}$ моментов. Выберем систему координат, как показано на рис. 12.16. Вектор k первичной волны лежит в плоскости xz. Рассмотрим два случая

поляризации падающей волны: а) вектор $\boldsymbol{E}_0$ лежит в плоскости падения xz; б) вектор $\boldsymbol{E}_0$ нормален к плоскости падения.

В случае а) компонента внешнего электрического поля, продольная относительно плоскости диска: $E_{0\parallel} = -E_{0x} = E_0 \cos\alpha$; поперечная компонента: $E_{0\perp} = -E_{0z} = E_0 \sin\alpha$. Электрический момент $\boldsymbol{p}$ в рассматриваемом приближении ($a \ll \lambda$) можно вычислить как статический момент проводящего диска в однородном электрическом поле.

Согласно результатам задач 8.38, 8.40, продольная поляризуемость диска $\beta_{e\parallel} = 4a^3/3\pi$, а поперечная поляризуемость $\beta_{e\perp} = 0$. Поэтому

$$p_x = \beta_{e\parallel} E_{0x} = -\frac{4a^3}{3\pi} E_0 \cos\alpha, \quad p_y = p_z = 0$$

Магнитное поле имеет только продольную составляющую. Но продольная магнитная поляризуемость диска равна нулю (см. задачу 10.41), поэтому $m = 0$.

Дифференциальное сечение рассеяния

$$d\sigma_s = \frac{16a^6\omega^4}{9\pi^2 c^4} \cos^2\alpha \left(1 - \sin^2\vartheta \cos^2\varphi\right) d\Omega \tag{1}$$

Полное сечение рассеяния

$$\sigma_s = \frac{128a^6\omega^4}{27\pi c^4} \cos^2\alpha \tag{2}$$

В случае б) имеем

$$p_y = \frac{4a^3}{3\pi} E_0, \quad p_x = p_z = 0, \quad m_z = \frac{2a^3}{3\pi} E_0 \sin\alpha, \quad m_x = m_y = 0$$

$$d\sigma_s = \frac{16a^6\omega^4}{9\pi^2 c^4} \left[1 + \sin^2\vartheta \left(\frac{1}{4}\sin^2\alpha - \sin^2\varphi\right) + \sin\vartheta \sin\alpha \cos\varphi\right] d\Omega, \tag{3}$$

$$\sigma_s = \frac{128a^6\omega^4}{27\pi c^4} \left(1 + \frac{1}{4}\sin^2\alpha\right).$$

Для неполяризованной волны, с помощью (1), (2) и (3) находим

$$\begin{aligned} d\sigma_s =& \frac{8a^6\omega^4}{9\pi^2 c^4} \left[1 + \sin^2\vartheta \left(1 - \frac{1}{4}\sin^2\alpha - \sin^2\alpha\cos^2\varphi\right) + \right. \\ & \left. + \cos^2\alpha + \sin\vartheta\sin\alpha\cos\varphi\right] d\Omega \\ \sigma_s =& \frac{128a^6\omega^4}{27\pi c^4} \left(1 - \frac{3}{8}\sin\alpha\right) \end{aligned} \tag{4}$$

12.74.

$$d\sigma_s = \frac{a^4 h^2 \omega^4 (\varepsilon - 1)^2}{18 c^4 \varepsilon^2} \left(1 + \cos^2\vartheta\right) d\Omega, \quad \sigma_s = \frac{8\pi a^4 h^2 \omega^4 (\varepsilon - 1)^2}{27 c^4 \varepsilon^2}$$

где ϑ - угол рассеяния.

12.75. Выберем координатную систему, как показано на рис. 12.17. Вектор k первичной волны лежит в плоскости xz. Цилиндр аппроксимируем вытянутым эллипсоидом вращения с полуосями a и h. Как следует из решений задач 8.38, 8.39, 10.41, продольная электрическая поляризуемость сильно вытянутого эллипсоида вращения по порядку величины в h/a раз больше его поперечных электрической и магнитной

поляризуемостей. Поэтому сечение рассеяния существенно зависит от того, имеется ли продольная составляющая электрического поля в падающей волне.

Если эта составляющая имеет заметную величину, то вторичное излучение обусловлено z-компонентой электрического дипольного момента. Остальными компонентами электрического момента и магнитным моментом можно пренебречь. Выбирая $\boldsymbol{E}_0$ в плоскости xz, получим

$$d\sigma_s = \frac{\dot{\omega}^4 h^6}{9c^4 \ln^2(h/a)} \sin^2\alpha \sin^2\vartheta d\Omega, \quad \sigma_s = \frac{8\pi\omega^4 h^6}{27c^4 \ln^2(h/a)} \sin^2\alpha.$$

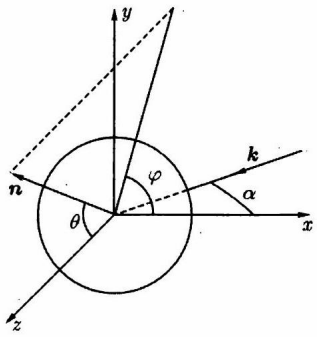


Рис. 12.16

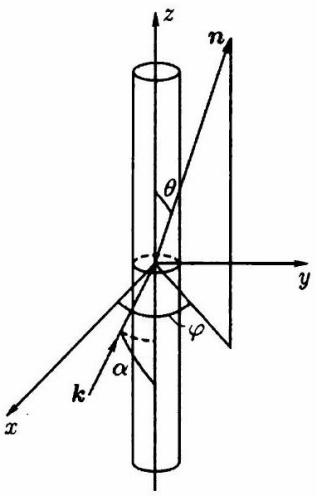


Рис. 12.17

Если продольная компонента $\boldsymbol{E}_0$ равна нулю, рассеяние обусловлено лоперечной составляющей электрического момента и магнитным моментом, имеющими одинаковый порядок величины. В этом случае

$$\begin{aligned} d\sigma_s =& \frac{a^4 h^2 \omega^4}{9c^4} \left[(1 + 2n_x \sin\alpha)^2 + 3\cos^2\alpha + \right. \\ & \left. + n_z^2 \left(4 - \sin^2\alpha\right) + 8n_z \cos\alpha + 2n_x n_z \sin 2\alpha\right] d\Omega \\ \sigma_s =& \frac{40\pi a^4 h^2 \omega^4}{27c^4} \left(1 + \frac{3}{5}\cos^2\alpha\right) \end{aligned}$$

где $n_i (i = x, y, z)$ - компоненты единичного вектора, указывающего направление рассеяния.

Сечения рассеяния неполяризованной волны:

$$\frac{d\sigma_s}{d\Omega} = \frac{\omega^4 h^6}{18c^4 \ln^2(h/a)} \sin^2\alpha \sin^2\vartheta, \quad \sigma_s = \frac{4\pi\omega^4 h^6}{27c^4 \ln^2(h/a)} \sin^2\alpha$$

12.76. Вектор $\boldsymbol{E}_0$ поляризован в плоскости xz (рис. 12.17):

$$d\sigma_{s\parallel} = \frac{4\omega^4 a^4 h^2}{9c^4}\left(\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}\right)^2\left[\left(1-n_x^2\right)\cos^2\alpha+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{4}(\varepsilon+1)^2\left(1-n_x^2\right)\sin^2\alpha-\frac{1}{2}(\varepsilon+1)n_x n_z\sin 2\alpha\right]d\Omega$$

Вектор $\boldsymbol{E}_0$ поляризован нормально к плоскости xz:

$$d\sigma_{s\perp} = \frac{4\omega^4 a^4 h^2}{9c^4}\left(\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}\right)^2\left(1-\sin^2\vartheta\sin^2\varphi\right)d\Omega.$$

12.77. Исходим из соотношения

$$\sigma_a = -\frac{1}{E_0^2}\operatorname{Re}\int(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*)\cdot\boldsymbol{n}r^2 d\Omega \tag{1}$$

где $n = r/r, \sigma_a$ - сечение поглощения и интегрирование ведется по поверхности сферы большого радиуса, окружающей рассеиватель. Формула (1) выражает тот факт, что сечение поглощения пропорционально потоку энергии через поверхность сферы, направленному к центру.

Подставляя в (1) выражение для $\boldsymbol{E}$ из условия задачи и

$$\boldsymbol{H} = E_0\left\{(\boldsymbol{n}_0\times\boldsymbol{e})\,e^{i\boldsymbol{kz}}+[\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{F}(\boldsymbol{n})]\frac{e^{ikr}}{r}\right\}$$

и используя условие поперечности $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{F}(\boldsymbol{n}) = 0$, получим:

$$\frac{1}{E_0^2}\operatorname{Re}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}^*)\cdot\boldsymbol{n} = (\boldsymbol{n}_0\cdot\boldsymbol{n})+\frac{|\boldsymbol{F}|^2}{r^2}+$$

$$+\frac{1}{2}\left[(\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{F})+(\boldsymbol{n}_0\cdot\boldsymbol{n})(\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{F})-(\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{n})(\boldsymbol{n}_0\cdot\boldsymbol{F})\right]\frac{e^{ik(r-z)}}{r}+ \tag{2}$$
$$+\frac{1}{2}\left[(\boldsymbol{e}^*\cdot\boldsymbol{F}^*)+(\boldsymbol{n}_0\cdot\boldsymbol{n})(\boldsymbol{e}^*\cdot\boldsymbol{F}^*)-(\boldsymbol{e}^*\cdot\boldsymbol{n})(\boldsymbol{n}_0\cdot\boldsymbol{F}^*)\right]\frac{e^{-ik(r-z)}}{r}$$

При интегрировании по углам первое слагаемое даст нуль, а второе полное сечение рассеяния σ_s. Интегралы от остальных слагаемых могут быть преобразованы с помощью интегрирования по частям:

$$\frac{1}{r}\int(\boldsymbol{n}_0\cdot\boldsymbol{n})(\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{F})e^{ik(r-z)}r^2 d\Omega = \frac{1}{ik}\int_0^{2\pi}d\varphi\left\{\left[(\boldsymbol{n}_0\cdot\boldsymbol{n})(\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{F})e^{ikr(1-\cos\vartheta)}\right|_{\vartheta=0}^{\vartheta=\pi}-\right.$$
$$\left.-\int_0^{\pi}e^{ikr(1-\cos\vartheta)}\frac{\partial}{\partial\cos\vartheta}(\boldsymbol{n}_0\cdot\boldsymbol{n})(\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{F})d\cos\vartheta\right\}.$$

Последний интеграл при повторном интегрировании по частям дает члены, пропорциональные $1/r$, и поэтому может быть отброшен. Кроме того, нужно отбросить член с осциллирующим множителем e^{2ikr}, так как он дает нулевой вклад в полный поток энергии. Чтобы убедиться в этом, учтем, что представление о строго монохроматической волне является идеализацией. В действительности, всякая реальная «монохроматическая» волна является суперпозицией гармоник, частоты которых лежат

в более или менее узком интервале $\Delta\omega$. При усреднении множителя e^{2ikr} по любому такому интервалу получим нуль, так как r очень велико. Поэтому

$$\frac{1}{r}\int (\boldsymbol{n}_0\cdot\boldsymbol{n})\,(\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{F})e^{ik(r-z)}r^2d\Omega=\frac{2\pi i}{k}\left[e\cdot\boldsymbol{F}\left(\boldsymbol{n}_0\right)\right]$$

Аналогично вычисляются интегралы от других слагаемых. Члены, содержащие множители $(\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{n})$ и $(e^*\cdot\boldsymbol{n})$, при интегрировании не дадут вклада, вследствие того, что $(\boldsymbol{e}\cdot n_0)=0$. Подставляя вычисленные интегралы в (1), получим окончательно

$$\sigma_t=\frac{4\pi}{k}\operatorname{Im}\left[\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{F}\left(\boldsymbol{n}_0\right)\right] \tag{3}$$

Оптическая теорема (3) допускает простую физическую интерпретацию: полное сечение дает меру ослабления первичной волны. Это ослабление является результатом интерференции падающей волны с той частью рассеянной волны, которая имеет ту же поляризацию и направление распространения, что и падающая волна. Поэтому полное сечение оказывается связанным с амплитудой рассеяния «вперед».

12.78. Рассеянная волна создается электрическим и магнитным дипольными моментами, которые индуцируются падающей волной. Амплитуда рассеяния $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{n})$ (см. предыдущую задачу) определяется по формулам раздела 5.2 (излучение электрического и магнитного диполей).

Окончательный результат:

$$\sigma_a=\frac{4\pi\omega}{c}\left(\beta_e''+\beta_m''\right)$$

12.79. $\sigma_a=6\pi b^2\zeta'$.

12.80. Сила направлена вдоль волнового вектора падающей волны и имеет величину

$$\bar{F}=\frac{\bar{\gamma}_0}{c}\left[\sigma_a+\int(1-\cos\vartheta)\left(\frac{d\sigma_s(\vartheta,\varphi)}{d\Omega}\right)d\Omega\right]$$

где $\bar{\gamma}_0$ - средняя плотность потока энергии в падающей волне и интегрирование производится по всему телесному углу.

12.81. Для идеально проводящего шара:

$$\bar{F}=\frac{43a^6\omega^4}{96c^4}E_0^2$$

для диэлектрического шара:

$$\bar{F}=\frac{a^6\omega^4}{3c^4}\left(\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2}\right)^2E_0^2$$

12.82. Применяем дифракционную формулу (12.52). В качестве поверхности интегрирования выберем плоскость, в которой находится экран. Тогда на поверхности интегрирования

$$u=A\frac{e^{ikR_1}}{R_1},\quad dS_n=2\pi r dr\cos\left(R_1,z\right)=2\pi\frac{z_1r}{R_1}dr$$

где $A=\text{const}$. После подстановки этих выражений в (12.52) переходим к новой переменной интегрирования $\rho=R+R_1$:

$$u_P(z)=-ikAz_1\int\limits_a^\infty\frac{e^{ik(R+R_1)}}{RR_1^2}rdr=-ikAz_1\int\limits_{\rho_0}^\infty\frac{e^{ik\rho}}{\rho R_1(\rho)}d\rho \tag{1}$$

где

$$\rho_0 = \sqrt{a^2 + z^2} + \sqrt{a^2 + z_1^2}$$

Интегрированием по частям можно представить (1) в виде ряда по возрастающим отрицательным степеням $k\rho$; условие $\lambda \ll a$ позволяет отбросить все члены ряда, кроме первого. Это дает

$$u_P(z) = u_0 \frac{z_1 e^{ik\sqrt{a^2+z^2}}}{\rho_0}$$

где $u_0 = A \exp\left(ik\sqrt{a^2 + z_1^2}\right) / \sqrt{a^2 + z_1^2}$ - амплитуда падающей волны на границе экрана.

Переходя к интенсивности $I \sim |u_P|^2$, имеем

$$I(z) = I_0 \frac{z_1^2}{\left(\sqrt{a^2 + z_1^2} + \sqrt{a^2 + z^2}\right)^2} \tag{2}$$

В точке, симметричной относительно экрана ($z_1 = z$):

$$I(z) = \frac{I_0}{4} \cdot \frac{z^2}{a^2 + z^2}$$

Таким образом, в симметричной точке за экраном, не слишком близкой к нему, будет светлое пятнто.

Этот результат, противоречащий представлению о прямолинейном ходе световых лучей, был теоретически предсказан Пуассоном (1818 г.), который выдвигал его в качестве возражения против теории дифракции Френеля и волновой теории света в целом. Однако эксперименты, выполненные Араго и Френелем, подтверждали наличие пятна, появляющегося вследствие симметрии экрана. Волны, огибающие его края, приходят в среднюю точку с одинаковыми фазами. Очевидно, таким свойством обладают все точки, лежащие на средней линии: в этих точках интенсивность света будет значительно больше, чем в соседних, не лежащих на оси Oz.

12.83. Используя принцип Бабине (см. (12.65)), получим при $z = z_1 \gg a$:

$$I = I_0 \sin^2 \frac{ka^2}{2z}$$

где I_0 - интенсивность первичной волны на краю отверстия.

12.84. При $z \gg a, I = 4I_0 \sin^2 (ka^2/4z)$.

Интенсивность света на средней линии круглой диафрагмы осциллирует бесконечное число раз, уменьшаясь до нуля при $z \to \infty$. Убывание интенсивности по оси связано с тем, что параллельный пучок становится из-за дифракции на отверстии расходящимся и поток энергии через отверстие с увеличением z распределяется на все большую площадь.

12.85. Пользуясь формулой (12.61) для дифракции Фраунгофера, находим

$$dI = I_0 \frac{\left[aJ_1(ak\alpha) - bJ_1(bk\alpha)\right]^2}{\alpha^2} d\Omega$$

где α - угол дифракции, I_0 - интенсивность падающего света.

В случае круглого отверстия

$$dI = I_0' \frac{J_1^2(ak\alpha)}{\pi\alpha^2} d\Omega$$

где $I_0' \sim \pi a^2 |u_0|^2$ - полная интенсивность падающего на отверстие света.

12.86. Дифрагированная волна будет описываться функцией

$$u_P = \frac{u_0 e^{ikR_0}}{2\pi i R_0} \int e^{i\boldsymbol{q}_\parallel \cdot \boldsymbol{r}_{dS}} dd$$

где $\boldsymbol{k}' - \boldsymbol{k} = \boldsymbol{q}, \boldsymbol{q}_\parallel$и $\boldsymbol{q}_\perp$ - составляющие $\boldsymbol{q}$ в плоскости экрана и в перпендикулярном направлении.

При интегрировании по плоскости отверстия воспользуемся полярными координатами с началом в центре отверстия и полярной осью вдоль $\boldsymbol{q}_\parallel$. Это дает

$$u_P = \frac{u_0 e^{ikR_0} k \cos\theta}{2\pi i R_0} \int e^{-iq_\parallel r \cos\vartheta} r dr d\varphi$$

где через θ обозначен угол падения.

С помощью формул (1.150) и рекуррентных соотношений для функций Бесселя получим

$$dI = |u_P|^2 R_0^2 d\Omega = I_0 \frac{J_1^2\left(q_\parallel a\right)}{\pi q_\parallel^2} d\Omega$$

где $I_0 \sim |u_0|^2 \pi a^2 \cos\theta$ - полная интенсивность падающего на отверстие света.

Считая угол дифракции α (угол между $\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{k}'$) малым, выразим $q_\parallel$ через α, угол падения θ и азимутальный угол α' между $\boldsymbol{q}$ и плоскостью падения:

$$q_\parallel = k\alpha\sqrt{1 - \sin^2\theta\cos^2\alpha'},$$
$$dI = I_0 \frac{J_1^2\left(ka\alpha\sqrt{1 - \sin^2\theta\cos^2\alpha'}\right)}{\pi\alpha^2\left(1 - \sin^2\theta\cos^2\alpha'\right)} d\Omega.$$

Формула становится несправедливой при скользящем падении ($\theta \approx \pi/2$).

12.87. Сечение дифракции на бесконечно длинной щели расходится, поэтому вычислим сечение, отнесенное к единице длины щели. Используем формулу (12.59) для дифракции на прямоугольном отверстии:

$$d\Sigma = \lim_{l_2\to\infty} \frac{d\sigma}{2l_2} = \left(\frac{4l_1 l_2}{\lambda}\right)^2 \left(\frac{\sin kl_1\theta_x}{kl_1\theta_x}\right)^2 \left(\lim_{l_2\to\infty} \frac{\sin^2 kl_2\theta_y}{2l_2\left(k\theta_y\right)^2}\right) d\theta_x d\theta_y$$

Предел вычисляем с помощью формул (1.217) и (1.207). После интегрирования по $d\theta_y$ находим

$$d\Sigma = \frac{4l_1^2}{\lambda} \left(\frac{\sin kl_1\theta_x}{kl_1\theta_x}\right)^2 d\theta_x$$

Сечение имеет размерность длины. Отклонения лучей в направлении вдоль щели не происходит.

12.88.

$$d\Sigma = \frac{4l^2}{\lambda} \left(\frac{\sin kl\theta_x}{kl\theta_x}\right)^2 \left(\frac{\sin Nkb\theta_x}{\sin kb\theta_x}\right)^2 d\theta_x, \quad b = a + l \tag{1}$$

При $N \gg 1$ записываем

$$d\Sigma = N d\Sigma^{(1)} \left(\frac{\sin Nkb\theta_x}{\sqrt{N}\sin kb\theta_x}\right)^2 \tag{2}$$

где $d\Sigma^{(1)}$ - сечение дифракции на одной щели, полученное в предыдущей задаче, и рассматриваем углы дифракции, удовлетворяющие условию $kb\theta_x = n\pi + \alpha, \alpha \ll 1, n$ - целое число. При таких значениях угла имеем

$$\left(\frac{\sin Nkb\theta_x}{\sqrt{N}\sin kb\theta_x}\right)^2 = \frac{\sin^2(N\alpha)}{N\alpha^2} \approx \pi\delta(\alpha) = \frac{\pi}{kb}\delta\left(\theta_x - n\pi/kb\right) \tag{3}$$

Мы использовали формулу (1.217), считая $N \gg 1$. Из (3) следует, что сечение имеет острые максимумы при $\theta_x \approx n\pi/kb$. Проинтегрировав по углу с использованием дельта-функции (3), получим вклад такого максимума в полное сечение дифракции:

$$\Sigma^{(n)} = N\int \frac{d\Sigma^{(1)}}{d\theta_x}\frac{1}{kb}\delta\left(\theta_x - n\pi/kb\right)d\theta_x = N\frac{2b}{\pi^2 l}\frac{\sin^2(\pi nl/b)}{n^2} \tag{4}$$

Полное сечение дифракции равно сумме сечений по всем максимумам.

12.89. Применение формулы Кирхгофа в векторной форме (12.49) позволяет получить следующие выражения для поля излучения:

$$E_\vartheta = H_\alpha = -ikabE_0\frac{e^{ikR}}{\pi R}\left(\frac{\sin k_x a}{k_x a}\right)\left(\frac{\sin k_y b}{k_y b}\right)(1+\cos\vartheta)\sin\alpha$$

$$E_\alpha = -H_\vartheta = -ikabE_0\frac{e^{ikR}}{\pi R}\left(\frac{\sin k_x a}{k_x a}\right)\left(\frac{\sin k_y b}{k_y b}\right)(1+\cos\vartheta)\cos\alpha$$

где ϑ, α - углы сферической системы координат с полярной осью, перпендикулярной плоскости отверстия, $k_x = k\sin\vartheta\cos\alpha, k_y = k\sin\vartheta\sin\alpha$ - проекции волнового вектора дифрагированной волны.

Угловое распределение излучения:

$$dI = I_0\frac{abk^2}{4\pi^2}\left(\frac{\sin k_x a}{k_x a}\right)^2\left(\frac{\sin k_y b}{k_y b}\right)^2(1+\cos\vartheta)^2 d\Omega$$

где $I_0 = cabE_0^2/2\pi$ - интенсивность падающей на отверстие волны.

12.90. Если направить оси Ox, Oy, Oz вдоль векторов $\boldsymbol{E}_0, \boldsymbol{H}_0$ и $\boldsymbol{k}$ соответственно, то поле излучения:

$$E_\vartheta = H_\alpha = -\frac{ika^2E_0}{2}\cdot\frac{e^{ikR}}{R}\left(\frac{J_1(ka\sin\vartheta)}{ka\sin\vartheta}\right)(1+\cos\vartheta)\cos\alpha$$

$$E_\alpha = -H_\vartheta = \frac{ika^2E_0}{2}\cdot\frac{e^{ikR}}{R}\left(\frac{J_1(ka\sin\vartheta)}{ka\sin\vartheta}\right)(1+\cos\vartheta)\sin\alpha$$

$$dI = \frac{1}{4}I_0\left(\frac{J_1(ka\sin\vartheta)}{\sin\vartheta}\right)^2(1+\cos\vartheta)^2 d\Omega$$

где $I_0 = ca^2E_0^2/8$ - интенсивность волны, падающей на отверстие.

При $\vartheta \ll 1$ имеем

$$dI = I_0\frac{J_1^2(ka\vartheta)}{\vartheta^2}d\Omega$$

Этот результат был получен в задаче 12.85 с помощью скалярной дифракционной формулы.

12.91. Выразим электромагнитное поле через электрический вектор Герца $\boldsymbol{Z}(x,z)$ по формулам (см. (5.40))

$$\boldsymbol{E} = \nabla\times[\nabla\times\boldsymbol{Z}], \quad \boldsymbol{H} = -ik\nabla\times\boldsymbol{Z} \tag{1}$$

Падающей волне соответствует $\boldsymbol{Z}_0 = k^{-2}\boldsymbol{E}_0 \exp(i\boldsymbol{k}_0 \cdot \boldsymbol{r})$. В правую часть формулы Кирхгофа (12.50) в качестве $\boldsymbol{Z}$ подставим его невозмущенное значение $\boldsymbol{Z}_0$ и получим

$$\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{-l}^{l}\left(\frac{e^{ikR}}{R}(\boldsymbol{n}\cdot\nabla)\boldsymbol{Z}_0 - \boldsymbol{Z}_0(\boldsymbol{n}\cdot\nabla)\frac{e^{ikR}}{R}\right)dx' \tag{2}$$

Здесь $\boldsymbol{n}\cdot\nabla = -\partial/\partial z, R = \sqrt{(x-x')^2 + z^2}$ - расстояние между dx' и точкой наблюдения, имеющей радиус-вектор $\boldsymbol{r} = (x, 0, z)$. В волновой зоне
$kR \gg 1, R \gg l$, поэтому в (2) следует дифференцировать только экспоненты:

$$\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{r}) = -\frac{i}{4\pi k}\boldsymbol{E}_0\int\limits_{-l}^{l}\frac{e^{ik(R+\sin\theta_0 x')}}{R}\left(\cos\theta_0 - \frac{z}{R}\right)dx' \tag{3}$$

Далее полагаем в знаменателях $R \approx r$, а в показателе экспоненты $R + \sin\theta_0 x' \approx r + (\sin\theta_0 - \sin\theta)\,x'$, где $\sin\theta = x/r, \cos\theta = z/r$, и после интегрирования получим

$$\boldsymbol{Z} = e_0 Z(r,\theta), \quad Z(r,\theta) = -E_0\frac{il}{2\pi k}\frac{e^{ikr}}{r}\frac{\sin\chi}{\chi}(\cos\theta_0 - \cos\theta) \tag{4}$$
$$\chi = kl(\sin\theta_0 - \sin\theta)$$

Здесь e_0 - единичный вектор поляризации падающей на экран волны.
При вычислении векторов поля в волновой зоне по формулам (1) опять следует дифференцировать только экспоненты. В результате получим

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = -k^2\boldsymbol{e}_r \times [\boldsymbol{e}_r \times \boldsymbol{e}_0]\, Z(r,\theta) \tag{5}$$

Если вектор $\boldsymbol{E}_0$ лежит в плоскости падения, т. е. $\boldsymbol{e}_0 = \boldsymbol{e}_x\cos\theta_0 - \boldsymbol{e}_z\sin\theta_0$, разложим его по сферическим ортам $\boldsymbol{e}_r = \boldsymbol{e}_x\sin\theta + \boldsymbol{e}_z\cos\theta, \boldsymbol{e}_\theta = \boldsymbol{e}_x\cos\theta - \boldsymbol{e}_z\sin\theta : \boldsymbol{e}_0 = \boldsymbol{e}_\theta\cos(\theta-\theta_0) + \boldsymbol{e}_r\sin(\theta-\theta_0)$. Подставив это разложение в (5), получим

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = k^2 Z(r,\theta)\cos(\theta-\theta_0)\,\boldsymbol{e}_\theta \tag{6}$$

Если вектор $\boldsymbol{E}_0$ перпендикулярен плоскости падения, то $\boldsymbol{e}_0 = \boldsymbol{e}_y$. Из (5) сразу получим

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = k^2 Z(r,\theta)\boldsymbol{e}_0 \tag{7}$$

12.92.

$$\boldsymbol{E} = k^2 Z(r,\theta,\phi)\boldsymbol{q}(\theta,\phi), \quad Z = -E_0\frac{ial}{\pi k}\frac{e^{ikr}}{r}\frac{\sin\chi}{\chi}\frac{\sin\zeta}{\zeta}(\cos\theta_0 - \cos\theta)$$
$$\chi = kl(\sin\theta_0 - \sin\theta\cos\phi), \quad \zeta = ka\sin\theta\sin\phi$$

Если $\boldsymbol{E}_0$ в плоскости падения, то $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{e}_\theta(\sin\theta_0\sin\theta + \cos\theta_0\cos\theta\cos\varphi)$ - - $\boldsymbol{e}_\phi\cos\theta_0\sin\phi$.
Если $\boldsymbol{E}_0$ перпендикулярно плоскости падения, то $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{e}_\theta\cos\theta\sin\phi + \boldsymbol{e}_\phi\cos\phi$
12.93. См. статью [Низьев (2002)].
12.94.

$$u = \frac{C}{z}\exp\left[ik\left(z + \frac{x^2+y^2}{2z}\right)\right], \quad C = \frac{A_0 k a^2}{2\pi i}$$

Решение совпадает с точным только вблизи оси Oz при $|x|, |y| \ll z$ и $z \gg \lambda$.
12.95.

$$A(\rho, z) = \frac{A_0}{\sqrt{1+L^2}} \exp\left[-\frac{\rho^2}{\dot{a}^2\,(1+L^2)} + i\frac{\rho^2 L}{a^2\,(1+L^2)} - i\,\mathrm{arctg}\,L\right], L = \frac{2z}{ka^2}$$

Диаметр пучка нарастает по закону $a^2(z) = a^2\,(1+L^2)$, а амплитуда на оси пучка ($\rho = 0$) убывает как $(1+L^2)^{-1/2}$. При $L(z) \gg 1, a(z) \approx 2z/ka$ и пучок приобретает вид конуса с углом при вершине порядка $a(z)/z \approx \lambda/\pi a$.
12.96. Диаметр пучка меняется по закону $a^2(z) = a^2\,[(1-z/R)^2 + \ + L^2(z)]$. Сначала с ростом z диаметр уменьшается (пучок фокусируется) до величины $a_{\min} = a/\sqrt{1+\sigma^2}, \sigma = ka^2/2R$, при $L > \sigma/\,(1+\sigma^2)$ ширина монотонно возрастает, при $L \gg 1$ по закону $a(z) \propto z$. По сравнению с предыдущим случаем имеется новое физическое.явление - дифракционная самофокусировка пучка.
12.97. Прежде всего необходимо, чтобы выполнялось неравенство $\omega \gg \omega_0$. Однако этого недостаточно. Рассмотрим сначала случай, когда длина l когерентности велика по сравнению с размерами L тела. Тогда при достаточно малых углах рассеяния $\vartheta < \lambda/L$ произведение $qL \ll 1$, экспоненты в формулах (12.71) или (12.72) для сечений близки к единице и $\int n \exp[i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}]dV = NZ$. Если длина волны $\lambda \geqslant L$, то это выполняется при любых углах. При этом мы получим, например, из (12.75)

$$d\sigma = r_0^2 N^2 Z^2 \sin^2\theta d\Omega \tag{1}$$

Эта формула соответствует когерентному томсоновскому рассеянию на всех NZ зарядах тела. Если же, например, длина когерентности меньше межатомного расстояния, но больше размера атома, то при $\vartheta < \lambda/l$ когерентно сложатся только вклады от Z электронов атома, и в формуле (1) вместо N^2Z^2 нужно будет написать NZ^2. При больших значениях углов величина сечения будет резко убывать из-за быстро осциллирующего множителя $\exp[i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}]$ под интегралом.
12.98. Концентрацию электронов в газе можно представить в виде суммы членов, относящихся к отдельным атомам, $n(\boldsymbol{r}) = \sum\limits_{a=1}^{Z} n_a\,(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{R}_a)$, где $\boldsymbol{R}_a$ характеризует мгновенное расположение a-го атома. Тогда

$$\left|\int n(\boldsymbol{r})\exp[i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}]dV\right|^2 = \left|\sum_a \exp\left[i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{R}_a\right]\int n_a\left(\boldsymbol{r}'\right)\exp\left[i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}'\right]dV'\right|^2 =$$

$$= |F_a(\boldsymbol{q})|^2\left|\sum_a \exp\left[i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{R}_a\right]\right|^2 \tag{1}$$

где $\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{R}_a$, а $F_a(\boldsymbol{q})$ - атомный форм-фактор (12.77). Усреднение в (1) должно быть выполнено по всем положениям R_a. Так как атомы в газе расположены хаотически, то $\overline{\left|\sum\limits_a \exp\left(i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{R}_a\right)\right|^2} = N$. В итоге, для неполяризованного излучения

$$d\sigma = \frac{1}{2}r_0^2\left(1+\cos^2\vartheta\right)|F_a(q)|^2 N d\Omega \tag{2}$$

Вычисление форм-фактора при заданной в задаче плотности $n_a(r)$ выполняется элементарно и дает

$$F_a(q) = \frac{8\pi}{a\,(1/a^2+q^2)^2} \tag{3}$$

Окончательно:

$$d\sigma(\vartheta) = \frac{32\pi^2 r_0^2 n_{0a} N}{a^2} \frac{1+\cos^2\vartheta}{\left[1/a^2 + (4\pi/\lambda)^2 \sin^2(\vartheta/2)\right]^4} d\Omega \tag{4}$$

Из экспериментально найденного сечения (2) можно получить модуль формфактора. Для нахождения распределения электронов надо, вообще говоря, знать еще фазу формфактора.

12.99.

$$d\sigma = N r_0^2 \frac{1+\cos^2\vartheta}{2} |F_a(q)|^2 \cdot 2\left(1 + \frac{\sin qR}{qR}\right) d\Omega.$$

Сечение отличается от сечения рассеяния на изолированных атомах структурным множителем $2(1+\sin qR/qR)$, зависящим от взаимного расположения атомов в молекуле.

12.100.

$$\overline{d\sigma} = N r_0^2 \left(1+\cos^2\vartheta\right) |F_a(q)|^2 \cdot \frac{1}{b\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(1 + \frac{\sin q\,(R_0+x)}{q\,(R_0+x)}\right) \exp\left[-\frac{x^2}{b^2}\right] dx$$

Существенна сравнительная величина $1/q$ и b. При $q \gg 1/b$ исчезает быстро осциллирующий член с $\sin q\,(R_0+x)$. Тепловое движение уничтожает структурный эффект при таких передачах. При $q \ll 1/b$ структурный множитель имеет тот же вид $1+\sin qR_0/qR_0$, что и в случае неподвижных ядер.

12.102. Направим оси Ox, Oy, Oz вдоль ребер L_1, L_2, L_3 монокристалла.

$$\int n(\boldsymbol{r}) \exp[i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}] dV = F_a(\boldsymbol{q}) \sum_{\boldsymbol{R}} \exp[i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{R}] =$$

$$= F_a(\boldsymbol{q}) \left(\sum_{n_1=0}^{N_1} \exp\left[iq_x a n_1\right]\right) \left(\sum_{n_2=0}^{N_2} \exp\left[iq_y a n_2\right]\right) \left(\sum_{n_3=0}^{N_3} \exp\left[iq_z a n_3\right]\right) =$$

$$= F_a(\boldsymbol{q}) \frac{1-\exp\left[iq_x a N_1\right]}{1-\exp\left[iq_x a\right]} \cdot \frac{1-\exp\left[iq_y a N_2\right]}{1-\exp\left[iq_y a\right]} \cdot \frac{1-\exp\left[iq_z a N_3\right]}{1-\exp\left[iq_z a\right]}$$

где $N_1 = L_1/a, N_2 = L_2/a, N_3 = L_3/a$ - числа элементарных ячеек вдоль ребер L_1, L_2, L_3; очевидно, $N = N_1 N_2 N_3$. Используя (12.76), получим (1)
$d\sigma = \frac{1}{2} r_0^2 \left(1+\cos^2\vartheta\right) |F_a(\boldsymbol{q})|^2 \frac{\sin^2(q_x a N_1/2)}{\sin^2(q_x a/2)} \frac{\sin^2(q_y a N_2/2)}{\sin^2(q_y a/2)} \frac{\sin^2(q_z a N_3/2)}{\sin^2(q_z a/2)} d\Omega.$
Положения главных максимумов определяются условием обращения знаменателей в нуль, откуда следует, что $q_x = 2\pi m_x/a, q_y = 2\pi m_y/a, q_z = 2\pi m_z/a$, где m_x, m_y, m_z - целые числа. Последние равенства представляют собой уравнение Лауэ, записанное в проекциях, поскольку компоненты $\boldsymbol{g}$ выражаются формулами: $\boldsymbol{g} = (m_x/a, m_y/a, m_z/a)$. В максимумах сечение

$$d\sigma = \frac{1}{2} r_0^2 \left(1+\cos^2\vartheta\right) |F_a(2\pi g)|^2 \frac{\left(L_1 L_2 L_3\right)^2}{a^6} d\Omega. \tag{2}$$

Оно пропорционально квадрату объема кристалла. Результаты задач (12.101)-(12.105) справедливы, только если монокристалл целиком расположен внутри объема когерентности (об объеме когерентности см. раздел 13.1).

12.103.

$$d\sigma = \frac{1}{2}r_0^2\left(1+\cos^2\vartheta\right)|F_a(\boldsymbol{q})|^2\,\frac{\sin^2(q_z aN_3/2)}{4\sin^2(q_y a/2)\sin^2(q_z a/2)}\times$$
$$\times\left\{\left[\frac{\sin(q_x aN_1/2)}{\sin(q_x a/2)}-\frac{\sin[(q_x+q_y)aN_1/2]}{\sin[(q_x+q_y)a/2]}\right]^2+\right.$$
$$\left.+4\sin^2(q_y aN_1/2)\,\frac{\sin(q_x aN_1/2)\sin[(q_x+q_y)N_1 a/2]}{\sin(q_x a/2)\sin[(q_x+q_y)a/2]}\right\}$$

где $N_1 = L_1/a, N_3 = L_3/a$. Положения главных максимумов выражаются условием Лауэ: $\boldsymbol{q} = 2\pi\boldsymbol{g}$, где $\boldsymbol{g} = (m_x/a, m_y/a, m_z/a)$. В максимумах сечение

$$d\sigma = \frac{r_0^2}{2}\left(1+\cos^2\vartheta\right)|F_a(2\pi\boldsymbol{g})|^2\,\frac{\left(L_1^2L_3\right)^2}{4a^6}d\Omega$$

Угол ϑ_0 связан с $q = 2\pi g$ соотношением $\sin(\vartheta_0/2) = \pi g/k$.

12.104. При $k \gg 1/a$ дифракционная картина сосредоточена в области малых углов, поскольку, согласно уравнению Лауэ, $k\vartheta = 2\pi g \sim 1/a$ и $\vartheta \sim 1/ak \ll 1$; при этом $q \ll k$.

Введем обозначение:

$$\boldsymbol{\kappa} = \boldsymbol{q} - 2\pi\boldsymbol{g} = \boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}_* \tag{1}$$

где $\boldsymbol{k}_* = \boldsymbol{k}_0 + 2\pi\boldsymbol{g}$ - значение волнового вектора $\boldsymbol{k}$ рассеянной волны при точном выполнении условия Лауэ (12.82). В пределах узкого дифракционного максимума k и $\boldsymbol{k}_*$ близки по направлению. Поэтому их разность κ приблизительно перпендикулярна каждому из них; в частности, поскольку κ направлен вдоль Oz, то $|\kappa_z| \ll |\kappa_x|, |\kappa_y|$. Благодаря этому в выражении (1) задачи (12.102) отношение

$$\frac{\sin^2(q_z aN_3/2)}{\sin^2(q_z a/2)} = \frac{\sin^2(\kappa_z aN_3/2)}{\sin^2(\kappa_z a/2)}$$

является значительно более пологой функцией от κ_z, чем первые два отношения, и может быть заменено значением N_3^2 в максимуме ($\kappa_z = 0$). Сечение принимает вид ($\vartheta \ll 1$)

$$d\sigma = 4r_0^2\,|F_a(2\pi g)|^2\,N_3^2\frac{\sin^2(\kappa_x aN_1/2)}{(\kappa_x a/2)^2}\frac{\sin^2(\kappa_y aN_2/2)}{(\kappa_y a/2)^2}d\Omega \tag{2}$$

откуда видно, что угловая ширина главного максимума по порядку величины составляет $1/kaN_1$ и $1/kaN_2$ в направлениях Ox и Oy соответственно. Записав элемент телесного угла в виде $d\Omega = d\kappa_x d\kappa_y/k^2$ и интегрируя по κ_x и κ_y в бесконечных пределах, получим

$$\sigma = 4r_0^2\,|F_a(2\pi\boldsymbol{g})|^2\left(\frac{\pi}{ak}\right)^2 N_3^2 N_1 N_2 \tag{3}$$

Сечение по-разному зависит от продольных и поперечных размеров. При приблизительном равенстве их полное сечение пропорционально $V^{4/3}$ (V - объем тела), а угловая ширина пропорциональна $\left(V^{4/3}/V^2\right)^{1/2} = 1/V^{1/3}$.

12.105.

$d\sigma = 32r_0^2\left(1+\cos^2\vartheta\right)|F_a(2\pi g)|^2\,\frac{\sin^2(\kappa_x L_x/2)}{\kappa_x^2}\frac{\sin^2(\kappa_y L_y/2)}{\kappa_y^2}\frac{\sin^2(\kappa_z L_z/2)}{\kappa_z^2}d\Omega,$

где

$$\kappa_x k_{\boldsymbol{g}x} + \kappa_y k_{\boldsymbol{g}y} + \kappa_z k_{\boldsymbol{g}z} = 0, \quad \boldsymbol{k}_{\boldsymbol{g}} = \boldsymbol{k}_0 + 2\pi\boldsymbol{g}$$

12.106.

$$d\sigma = 8\pi r_0^2\left(1+\cos^2\vartheta\right)|F_a(2\pi\boldsymbol{g})|^2\,\frac{\sin\kappa R - \kappa R\cos\kappa R}{\kappa^6}d\Omega$$

13.2 13 Coherence and Nonlinear Waves

(это же в оптике будет)

13.2.1 13.1. Coherence and Interference

Корреляционные тензоры поля. Время и длина когерентности. Большинство реальных источников электромагнитных волн состоит из большого числа независимых (некогерентных) излучателей, испускающих волны со случайными значениями начальных фаз и амплитуд, а также со всевозможными поляризациями. Таковы, например, тепловые и люминесцентные источники света, а также источники, в которых электромагнитные волны испускаются пучком быстрых электронов при торможении их в веществе или в магнитном поле. Значительно большая степень согласованности достигается при излучении радиоволн антеннами или при излучении света оптическими квантовыми генераторами, в которых главную роль играет вынужденное излучение. Но и в этих устройствах возможны флуктуации фазы, амплитуды и поляризации из-за теплового движения частиц, спонтанного излучения и рассеяния на различных флуктуирующих неоднородностях.

Кроме того, каждый отдельный излучатель испускает немонохроматические волны. Поэтому поле, созданное реальными источниками, во многих случаях имеет очень сложную структуру: значения поля меняются непредсказуемым, случайным образом в пространстве и во времени. Такие поля называются случайными. Мы в этой книге уже встречались со случайными полями (см. раздел 10.3 и Дополнение 4). Для удобства читателя некоторые сведения о случайных полях будут приведены вновь.

Для задания случайного поля нужно указать некоторые усредненные величины, характеризующие такое поле. Способ усреднения тесно связан со способом измерения соответствующих величин. Чаще всего измерительные приборы производят усреднение по времени. Промежуток усреднения Δt должен выбираться так, чтобы он превышал периоды всех гармонических составляющих случайного поля. При таком усреднении среднее значение поля излучения обратится в нуль:

$$\overline{E_\alpha(\boldsymbol{r}, t)} = 0 \tag{13.1}$$

Отличным от нуля будет корреляционный тензор второго ранга:

$$J_{\alpha\beta}\left(\boldsymbol{r}_1, t_1; \boldsymbol{r}_2, t_2\right) = \overline{E_\alpha\left(\boldsymbol{r}_1, t_1\right) E_\beta^*\left(\boldsymbol{r}_2, t_2\right)} \tag{13.2}$$

где E_α - комплексная функция (аналитический сигнал), описывающая поле. Для полного описания случайного поля следует, вообще говоря, задать и бесконечную совокупность корреляционных тензоров более высоких рангов, но при решении многих задач можно ограничиться тензором второго ранга. Что касается усредненных характеристик магнитного поля, то их можно выразить через соответствующие значения электрического поля с помощью уравнений Максвелла. При совпадающих аргументах ($\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r}_2$, $t_1 = t_2, \alpha = \beta$) тензор (13.2) пропорционален энергии, заключенной в α-й компоненте электрического поля.

Для того чтобы усредненный тензор (13.2) остался функцией времени, усреднение нужно производить согласно (7.5), зафиксировав времена t_1, t_2:

$$J_{\alpha\beta}\left(\boldsymbol{r}_1, t_1; \boldsymbol{r}_2, t_2\right) = \frac{1}{\Delta t} \int\limits_{-\Delta t/2}^{\Delta t/2} E_\alpha\left(\boldsymbol{r}_1, t_1 + \tau\right) E_\beta^*\left(\boldsymbol{r}_2, t_2 + \tau\right) d\tau \tag{13.3}$$

Часто, особенно при измерениях в оптическом диапазоне, усреднение по времени осуществляется в процессе измерения за счет инерционности измерительного прибора. Времена срабатывания детекторов оптического излучения составляют $10^{-10} - 10^{-12}$ с, тогда как периоды оптических колебаний - порядка $10^{-15} - 10^{-16}$с.

Мы в дальнейшем будем интересоваться преимущественно стационарными случайными полями, усредненные характеристики которых не изменяются со временем. Это означает, что $J_{\alpha\beta}$ будет зависеть только от разности времен $\tau = t_1 - t_2$, но не от начала их отсчета:

$$J_{\alpha\beta}\left(\boldsymbol{r}_1, t_1; \boldsymbol{r}_2, t_2\right) = J_{\alpha\beta}\left(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \tau\right) \tag{13.4}$$

Если случайное поле однородно также и в пространстве, т. е. его средние (но не мгновенные) характеристики не зависят от координат, то и радиусывекторы r_1, r_2 войдут в $J_{\alpha\beta}$ только в виде разности $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2$. Такими свойствами, например, обладает поле теплового излучения в замкнутой полости. Но поле, создаваемое источником конечных размеров в свободном пространстве, неоднородно.

Для случайных полей корреляционный тензор $J_{\alpha\beta}\left(r_1, r_2, \tau\right)$ обычно достаточно быстро убывает с ростом времени задержки τ. Пусть, например,
поле излучения создается тепловыми источниками - атомами, возбужденными в случайных столкновениях друг с другом. Каждый атом испускает немонохроматическую волну конечной длительности τ_c (волновой пакет) в случайные моменты времени, поэтому волновые пакеты от отдельных атомов взаимно независимы. Излучение же каждого отдельного атома когерентно в течение времени τ_c испускания отдельного волнового пакета.

Фиксировав некоторую точку пространства $\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{r}$, рассмотрим среднее

$$\overline{E_\alpha(\boldsymbol{r}, t+\tau) E^*_\beta(\boldsymbol{r}, t)} = J_{\alpha\beta}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}, \tau)$$

Нетрудно сообразить, что это среднее будет отличаться от нуля только для таких значений τ, которые меньше или порядка длительности отдельного волнового пакета, $\tau \lesssim \tau_c$. Если же $\tau \gg \tau_c$, то усредняться будут поля различных волновых пакетов, независимые друг от друга. Между ними не будет заметной корреляции, и среднее от произведения можно будет заменить произведением средних:

$$J_{\alpha\beta}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}, \tau) \approx \overline{E_\alpha(t+\tau)} \cdot \overline{E^*_\beta(t)} = 0, \quad \tau \gg \tau_c \tag{13.5}$$

Время τ_c, в течение которого тензор $J_{\alpha\beta}$ заметно отличен от нуля, называется временем корреляции или временем когерентности компонент поля E_α и E_β. Это время можно определить и формально, например, следующим образом:

$$\tau_c = \left| \frac{1}{J_{\alpha\beta}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}, 0)} \int\limits_0^\infty J_{\alpha\beta}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}, \tau) d\tau \right| \tag{13.6}$$

Оно может быть, вообще говоря, различным для разных пар компонент, но мы в дальнейшем для простоты будем считать его одинаковым для всех составляющих поля.

Зависимость корреляционного тензора $J_{\alpha\beta}$ от координат носит аналогичный характер: с ростом разностей $x_1 - x_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2$ корреляция ослабляется. Можно по аналогии с (13.6) ввести корреляционные длины (длины когерентности) l_x, l_y, l_z. Они по порядку величины равны пространственным размерам волновых пакетов, в пределах которых отдельные фурье-гармоники поля связаны по фазе. В однородном и изотропном поле излучения корреляционные длины по всем направлениям одинаковы, а тензор $J_{\alpha\beta}$ зависит только от разности $\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2$. В таком поле $l_c \approx c\tau_c$, так как размер волновых пакетов в

пространстве порядка $c\tau_c$, а корреляция будет
сильно ослаблена, если поля в точках $\boldsymbol{r}_1$ и $\boldsymbol{r}_2$ будут принадлежать разным волновым пакетам.

В анизотропном поле излучения, например, когда волновые пакеты испускаются некоторым далеким источником и движутся все в одну сторону, соотношение $l_{\parallel} = c\tau_c$ будет справедливо только для продольной (в направлении распространения) длины когерентности. Поперечная длина когерентности в этом случае определяется другими факторами и не связана прямым образом с τ_c (см. ниже).

Для строго детерминированного процесса, каким является в стационарном случае плоская монохроматическая волна, длина и время когерентности бесконечны. Но для всех реальных процессов они имеют конечные значения. Так, тепловой источник света (например, натриевая лампа) имеет характерное время когерентности $\tau_c \approx 10^{-10}$ с и соответствующую длину когерентности $l_{\parallel} = c\tau_c \approx 3$ cm. Газовый гелий-неоновый лазер, работающий в непрерывном режиме, имеет время когерентности $\tau_c = 0,02 - 0,002$ и длину продольной когерентности $l_{\parallel} \approx 60 - 600$ км.

Усреднение по времени (13.3) часто заменяют усреднением по ансамблю всевозможных реализаций случайного поля. Представим себе большое (в пределе - бесконечное) число невзаимодействующих макроскопических систем, тождественных исходной, т. е. состоящих из одинаковых источников излучения вместе с той частью пространства, в которой это излучение распространяется. Такая совокупность макроскопически тождественных систем называется ансамблем. Из-за случайного характера излучения электромагнитных волн значения полей $E'_\alpha, E''_\alpha, \ldots$ в эквивалентных точках пространства в один и тот же момент времени у разных систем будут, вообще говоря, различными:

$$E'_\alpha(\boldsymbol{r}, t) \neq E''_\alpha(\boldsymbol{r}, t) \neq E'''_\alpha(\boldsymbol{r}, t) \neq \ldots$$

Среднее по ансамблю (или статистическое среднее) - это среднее арифметическое

$$\begin{aligned} &\left\langle E_\alpha\left(\boldsymbol{r}_1, t_1\right) E^*_\beta\left(\boldsymbol{r}_2, t_2\right)\right\rangle = \\ &\quad = \lim_{N\to\infty} \frac{E'_\alpha\left(\boldsymbol{r}_1, t_1\right) E^{*\prime}_\beta\left(\boldsymbol{r}_2, t_2\right) + E''_\alpha\left(\boldsymbol{r}_1, t_1\right) E^{*\prime\prime}_\beta\left(\boldsymbol{r}_2, t_2\right) + \ldots}{N} \end{aligned} \tag{13.7}$$

где N - полное число систем ансамбля. Для произвольных излучающих систем нет оснований считать, что усреднение по ансамблю (13.7) и по времени (13.3) дают одинаковые результаты. Однако для широкого класса случайных процессов, в том числе для многих реальных излучающих
систем, средние по ансамблю и по времени совпадают. Такие системы называются эргодическими.

Условие эргодичности [1] для стационарных случайных полей требует достаточно быстрого ослабления корреляции с ростом τ:

$$\lim_{\Delta t\to\infty} \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} J_{\alpha\beta}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}, \tau) d\tau = 0$$

При теоретическом анализе случайных полей, как правило, пользуются статистическим усреднением. Мы в дальнейшем также будем производить усреднение по ансамблю, считая рассматриваемые поля излучения эргодическими. В условиях эргодичности полученные таким образом результаты будут совпадать со средними по времени, которые измеряют детекторы излучения.

Влияние временной и пространственной когерентности на интерференцию волн. Возможность получения картины регулярного усиления и ослабления волн в пространстве и во времени при их интерференции (наложении) тесно связана с их когерентными свойствами. Из качественных соображений ясно, что регулярная интерференционная картина будет наблюдаться, только если разность фаз отдельных гармоник с одинаковыми частотами остается приблизительно неизменной за время наблюдения, т. е. колебания являются когерентными.

Связь временной когерентности с интерференционной картиной можно проследить с помощью интерферометра Майкельсона [2] (рис. 13.1). Луч света от небольшого источника S, состоящего из независимых излучателей (возбужденных атомов), делится полупрозрачным зеркалом 3 на два луча, 1 и 2 . Эти лучи в свою очередь отражаются от зеркал 3_1 и 3_2 и смешиваются в области 12, создавая интерференционную картину (чередование темных и светлых полос) на экране Э. Меняя длины путей s_1 и s_2, можно вводить временную задержку (разность хода) между интерферирующими колебаниями.

Выясним условия появления интерференционной картины в описанной установке. Пусть каждый атом излучает квазимонохроматичесую волну (волновой пакет) длительностью τ_c в интервале частот $\Delta\omega$. Поскольку

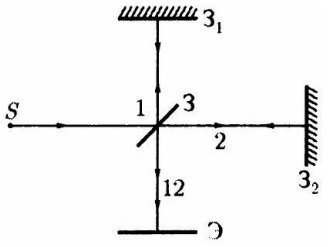


Рис. 13.1

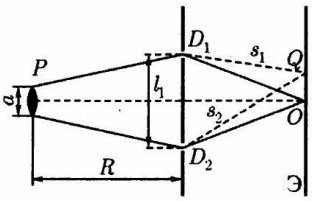


Рис. 13.2

волновые пакеты от разных атомов имеют случайные начальные фазы, то при наложении таких пакетов интерференционной картины не образуется - максимумы и минимумы поля отдельных пакетов будут накладываться случайным образом. Интерференция возникает при наложении полей, генерируемых одним атомом и прошедших разные пути s_1 и s_2. Но для того, чтобы такое наложение было возможно, время задержки $\tau = (s_1 - s_2)/c$ не должно превышать длительности волнового пакета - в противном случае его часть, распространявшаяся по более длинному пути, дойдет до экрана, когда вторая часть уже поглотится экраном или отразится от него.

Максимальное время задержки, при котором еще наблюдается интерференционная картина, не должно превышать длительности отдельного волнового пакета, которое и есть время когерентности:

[01] Доказательство эргодической теоремы и ее более строгую формулировку можно найти в книгах [Монин и Яглом (1965), Рытов (1976), Рытов (1978), Мандель и Вольф (2000)].

[2] Майкельсон Альберт Абрахам (1852-1931) - американский физик, изобрел интерферометр и произвел многие измерения, в частности способствовавшие признанию специальной теории относительности. Нобелевская премия (1907) присуждена за создание прецизионных приборов и выполненные на них измерения.

$$\tau \leqslant \tau_c \approx \frac{1}{\Delta\omega} \tag{13.8}$$

В анизотропном поле излучения, когда волновые пакеты испускаются некоторым далеким источником и движутся все в одну сторону, продольную (в направлении распространения) длину когерентности можно оценить соотношением

$$l_{\parallel} = c\tau_c \approx \frac{c}{\Delta\omega} \approx \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda} \tag{13.9}$$

Здесь λ - длина излучаемой квазимонохроматической волны, $\Delta\lambda$ - разброс длин волн, связанный со спектральной шириной соотношением $\Delta\lambda = (\lambda^2/2\pi c)\,\Delta\omega$.

Рассмотрим теперь интерференционный эксперимент в другой постановке (опыт Юнга) [3]. Пусть квазимонохроматический свет от некоторого

теплового источника конечных размеров a (рис. 13.2), пройдя через две щели D_1 и D_2 в непрозрачном экране, создает на другом экране Э интерференционную картину. Стабильную интерференцию могут создать только волны, испускаемые одним и тем же атомом, так как излучение разных атомов некогерентно. Для наблюдения интерференции от всего протяженного источника необходимо, чтобы интерференционные картины от отдельных атомов складывались примерно с одинаковыми фазами. Найдем соответствующие условия. Пусть расположение диафрагм, источника и экрана симметричное, как показано на рис. 13.2. Пусть, далее, расстояние от источника велико: $R \gg a, R \gg l_{\perp}$.

Относительный сдвиг в пространстве двух пучков света, прошедших через щели D_1 и D_2, определяется разностью путей $|PD_1 - PD_2|$. Интерференционные картины от разных атомов будут усиливать друг друга, если указанная разность путей не будет превышать длины волны излучения λ для всех атомов-излучателей, независимо от их расположения на поверхности источника.

Очевидно, что максимальное значение $|PD_1 - PD_2|$ будет достигаться для атомов, находящихся на краю источника. Записав

$$(PD_1)^2 = R^2 + (l_{\perp} - a)^2/4, \quad (PD_2)^2 = R^2 + (l_{\perp} + a)^2/4$$

получим $|PD_1 - PD_2| \approx al_{\perp}/2R, al_{\perp}/R \lesssim \lambda$, где в последнем неравенстве, справедливом по порядку величины, опущен множитель $1/2$. Итак, интерференционная картина будет наблюдаться при расстоянии между щелями, не превышающем

$$l_{\perp} \approx \lambda R/a \approx \frac{\lambda}{\Delta\vartheta} \tag{13.10}$$

которое играет в данном случае роль поперечной длины когерентности. Величина

$$A = l_{\perp}^2 \approx \frac{\lambda^2 R^2}{S} \tag{13.11}$$

представляет собой площадь когерентности, а произведение

$$\Delta V = l_{\parallel} A = c\tau_c A \tag{13.12}$$

называют объемом когерентности. Здесь $S = a^2$ - площадь поперечного сечения источника.

При квантовом описании (см. главу 6) свет представляет собой совокупность фотонов - квантов электромагнитного поля. Энергия каждого фотона частоты ω равна

[03] Юнг Томас (1773-1829) - английский физик, один из создателей волновой оптики, ввел в науку термин «интерференция».

$\hbar\omega$. Важной характеристикой когерентных свойств
поля является параметр вырождения δ, который равен среднему числу фотонов, находящихся в одном и том же состоянии поляризации внутри объема когерентности, т. е. среднему числу фотонов данной поляризации, пересекающих площадь когерентности за время когерентности.

Пусть I_ω - среднее число фотонов, испускаемых в единицу времени единичной площадкой поверхности источника в единичном интервале частот и в единичном телесном угле нормально к поверхности источника. Если оба возможных направления поляризации представлены равновероятно, то

$$\delta = \frac{1}{2} I_\omega S \Delta\omega \Delta\Omega \tau_c$$

где $\Delta\Omega = A/R^2$ - телесный угол, под которым площадь когерентности видна из источника. С помощью (13.8) и (13.11) будем иметь

$$\delta \approx \frac{2\pi^2 c^2}{\omega^2} I_\omega \tag{13.13}$$

Записанный в такой форме параметр вырождения не зависит от геометрии и характеризует только свойства источника излучения.

Из определения δ следует, что чем больше этот параметр, тем более когерентным является поле данного источника. Для тепловых источников света наибольшее значение δ порядка 10^{-3}, т. е. $\delta \ll 1$. Для лазерных источников $\delta \gg 1$ и может достигать значений порядка 10^{14}.

Взаимная функция когерентности и контрастность. Найдем количественную связь между интерференционной картиной, которая наблюдается на экране интерферометра Майкельсона или в опыте Юнга, и корреляционным тензором поля излучения. Будем считать для простоты, что свет поляризован линейно и при распространении его поляризация не меняется. Тогда поле излучения можно описывать скалярной комплексной функцией $U(\boldsymbol{r}, t)$. Поле в точке Q представляет собой результат наложения волн от отверстий D_1 и D_2. Его можно записать через поля в точках $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2$ в моменты времени $t - t_1, t - t_2$:

$$U(\boldsymbol{r}, t) = A_1 U\left(\boldsymbol{r}_1, t - t_1\right) + A_2 U\left(\boldsymbol{r}_2, t - t_2\right) \tag{13.14}$$

где $t_1 = s_1/c, t_2 = s_2/c$ - времена распространения возмущений из D_1 и D_2 в $Q; s_1 = |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1|, s_2 = |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_2|; A_1, A_2$ - «коэффициенты передачи», вообще говоря, комплексные, зависящие от размеров и формы отверстий. Их фазы мы в дальнейшем будем считать одинаковыми. Малые отверстия расположены в окрестностях точек, радиусы-векторы которых $\boldsymbol{r}_1$ и $\boldsymbol{r}_2$.

Интерференционная картина на экране будет определяться интенсивностью поля $I(\boldsymbol{r})$ - усредненным по ансамблю квадратом модуля $\langle U^*(\boldsymbol{r}, t) U(\boldsymbol{r}, t)\rangle = I(\boldsymbol{r})$. Ввиду предполагаемой стационарности источника величина I не будет зависеть от времени. С помощью (13.14) получим

$$I(\boldsymbol{r}) = |A_1|^2 I_1(\boldsymbol{r}) + |A_1|^2 I_2(\boldsymbol{r}) + 2|A_1 A_2| \operatorname{Re} \Gamma\left(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \tau\right) \tag{13.15}$$

Здесь $\tau = t_1 - t_2 = (s_1 - s_2)/c$, комплексная величина

$$\Gamma\left(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \tau\right) = \left\langle U^*\left(\boldsymbol{r}_1, t\right) U\left(\boldsymbol{r}_2, t + \tau\right)\right\rangle \tag{13.16}$$

называется взаимной функцией когерентности. Она представляет собой скалярный вариант корреляционного тензора (13.7) (или отдельную диагональную компоненту

указанного тензора). Интенсивности света в точках $\boldsymbol{r}_j, j = 1,2$ связаны с взаимной функцией когерентности соотношением

$$I(\boldsymbol{r}_j) = \Gamma(\boldsymbol{r}_j, \boldsymbol{r}_j, 0) \tag{13.17}$$

Интенсивность поля в точке Q, создаваемая первым отверстием (когда второе отверстие закрыто) дается выражением

$$I_1(\boldsymbol{r}) = |A_1|^2 I(\boldsymbol{r}_1) \tag{13.18}$$

Определим также нормированную функцию взаимной когерентности $\gamma(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \tau)$, которую называют еще комплексной степенью когерентности:

$$\gamma(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \tau) = \frac{\Gamma(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \tau)}{[I(\boldsymbol{r}_1) I(\boldsymbol{r}_2)]^{1/2}} \tag{13.19}$$

Запишем интенсивность поля в точке Q через интенсивности волн, прошедших через каждое из отверстий по отдельности:

$$I(\boldsymbol{r}) = I_1(\boldsymbol{r}) + I_2(\boldsymbol{r}) + 2[I_1(\boldsymbol{r}) I_2(\boldsymbol{r})]^{1/2} \operatorname{Re} \gamma(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \tau) \tag{13.20}$$

Для квазимонохроматического света, у которого $\Delta\omega \ll \omega$, зависимость $U(\boldsymbol{r}, t)$ от времени будет определяться в основном множителем $\exp(-i\omega t)$. Амплитуда $A(t)$ и добавочная фаза $\alpha(t)$, будучи для некогерентного света случайными функциями, изменяются значительно медленнее, как $\exp(-i\Delta\omega t)$. Поэтому, если записать

$$\gamma(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \tau) = |\gamma(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \tau)| \exp[i\alpha(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \tau) - i\omega t] \tag{13.21}$$

то γ и $\exp(i\alpha)$ будут медленными (по сравнению с $\exp(-i\omega t)$) функциями τ, они существенно изменяются только за время $\tau \gg \tau_c$, тогда как $\exp(-i\omega t)$ сильно изменяется за период оптических колебаний.

Использовав (13.21), перепишем (13.20) в виде

$$I(\boldsymbol{r}) = I_1(\boldsymbol{r}) + I_2(\boldsymbol{r}) + 2[I_1(\boldsymbol{r}) I_2(\boldsymbol{r})]^{1/2} \cos(\alpha - \omega\tau) \tag{13.22}$$

С учетом сказанного выше о медленности изменения γ и α мы видим, что $\cos(\alpha - \omega\tau)$ при $\tau \ll \tau_c$ меняется в основном за счет $\omega\tau$. Следовательно, при перемещении точки Q по экрану и при изменении разности $s_1 - s_2 = c\tau$ интенсивность освещенности экрана будет изменяться в пределах от

$$I_{\max}(\boldsymbol{r}) = I_1 + I_2 + 2(I_1 I_2)^{1/2} |\gamma| \tag{13.23}$$

до

$$I_{\min}(\boldsymbol{r}) = I_1 + I_2 - 2(I_1 I_2)^{1/2} |\gamma| \tag{13.24}$$

Поскольку $I \geqslant 0$ при любом соотношении между I_1 и I_2, то из (13.23) и (13.24) следует, что модуль комплексной степени когерентности может изменяться в пределах

$$0 \leqslant |\gamma(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \tau)| \leqslant 1 \tag{13.25}$$

Определим контрастность (видность, видимость) интерференционной картины в данной точке $\boldsymbol{r}$ параметром

$$\mathscr{V} = (I_{\max} - I_{\min}) / (I_{\max} + I_{\min}) \tag{13.26}$$

Из (13.23), (13.24) имеем

$$\mathscr{V} = 2\left(\sqrt{\frac{I_1}{I_2}} + \sqrt{\frac{I_2}{I_1}}\right)^{-1} |\gamma(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \tau)| \tag{13.27}$$

В частности, при $I_1 = I_2$

$$\mathscr{V} = |\gamma(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \tau)| \tag{13.28}$$

т. е. контрастность интерференционных полос, измеряемая на опыте, равна модулю комплексной степени когерентности.

Фазу комплексной степени когерентности можно измерить по положениям максимумов интенсивности интерференционной картины. Согласно (13.22), положение максимумов определяется условием

$$\alpha\left(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \frac{s_1 - s_2}{c}\right) - \frac{2\pi}{\lambda}(s_1 - s_2) = 2\pi m, \quad m = 0, \pm 1, \ldots \tag{13.29}$$

Интенсивности I_1 и I_2 - также измеримые величины. Таким образом, функцию взаимной когерентности $\Gamma(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \tau)$ можно (по крайней мере, в принципе) определить по наблюдаемой интерференционной картине и по измеренным интенсивностям I_1, I_2.

Из выражения (13.20) видно, что при $|\gamma| = 0$ не возникает никаких интерференционных полос, экран освещен равномерно. Это означает, что два световых пучка, достигающих экрана из отверстий D_1 и D_2, полностью некогерентны. Если $|\gamma| = 1$, то интерференционные полосы обладают максимально возможной контрастностью, а интенсивность поля излучения в минимумах освещенности падает до нуля. Оба пучка полностью когерентны. В промежуточных случаях, $0 \leqslant |\gamma| \leqslant 1$, они частично когерентны. Это ясно показывает запись уравнения (13.22) в форме

$$I(\boldsymbol{r}) = (1 - |\gamma|)(I_1(\boldsymbol{r}) + I_2(\boldsymbol{r})) + |\gamma|\left[I_1(\boldsymbol{r}) + I_2(\boldsymbol{r}) + 2[I_1(\boldsymbol{r})I_2(\boldsymbol{r})]^{1/2}\cos(\alpha - \omega\tau)\right] \tag{13.30}$$

Мы видим, что поле в точке Q можно представить как смесь полностью некогерентного и полностью когерентного света. Первый имеет интенсивность $(1 - |\gamma|)(I_1 + I_2)$, а второй представляет собой полностью когерентную смесь двух пучков с интенсивностями $|\gamma|I_1, |\gamma|I_2$ и разностью фаз $\alpha - \omega\tau$.

Понятие о голографии. Если в поле когерентной световой волны находится некоторый предмет, рассеивающий эту волну, то в области наложения рассеянного света на поле основной («опорной») волны образуется интерференционная картина, интенсивность которой в каждой точке этой области зависит как от интенсивностей, так и от разности фаз рассеянной и опорной волн. Эту картину можно отобразить на фотопластинке, а затем использовать эту фотопластинку как дифракционную решетку, пропуская через нее когерентный свет. Интенсивность I' света, прошедшего через проявленную фотопластинку в данной ее точке (x, y) при освещении пластинки светом, пропорциональна его интенсивности $I(x, y)$:

$$I'(x, y) = T(x, y)I(x, y) \tag{13.31}$$

и зависит от степени почернения фотопластинки, характеризуемой «пропусканием» $T(x, y)$. Пропускание зависит от интенсивности $I_0(x, y)$ первичного поля, вызвавшего почернение, и от контрастности фотоэмульсии, характеризуемой законом $T(x, y) \propto [I_0(x, y)]^{-\gamma/2}$, где γ - коэффициент контрастности фотоэмульсии.

Фотопластинка, на которой изображена картина интерференции опорной волны с волной, рассеянной от предмета, называется голограммой. Оказывается, что при пропускании через голограмму когерентного света
за нею образуется объемное изображение первоначального предмета. Процесс восстановления первичного волнового поля называется голографией. Теоретические основы голографии изложены в книгах [Строук (1967), Сороко (1971)] и иллюстрируются задачами 13.16-13.19.

Рекомендуемая литература: [Мандель и Вольф (2000); Скалли и Зубайри (2003); Бредов и др. Классическая электродинамика; Франсон и Сланский (1967); Строук (1967); Сороко (1971)].

Задачи

13.1. Квазимонохроматический источник имеет поперечный размер L и испускает свет с длиной волны λ. Оценить порядок величины того телесного угла $\Delta\Omega$, в котором его излучение когерентно.

13.2. Каковы поперечная и продольная длина, а также телесный угол и объем когерентности излучения, испускаемого атомами натрия, находящимися в атмосфере Солнца. Наблюдается (на Земле) спектральная линия с длиной волны $\lambda_0 = 5 \cdot 10^{-5}$ cm, масса атома $m = 3,7 \cdot 10^{-23}$ г. Главный вклад в ширину спектральной линии дает тепловое движение атомов (температура $T \approx 6000$ K). Среднее расстояние от Солнца до Земли $1,5 \times 10^{13}$ cm.

Указание. Доплеровская ширина спектральной линии

$$\gamma_D = \sqrt{\frac{8\pi^2 kT}{m\lambda_0^2}}$$

где k - постоянная Больцмана (см. задачу '5.123).

13.3. Как изменятся результаты предыдущей задачи, если с Земли наблюдается звезда типа Солнца, находящаяся на расстоянии 10 световых лет? Один световой год равен 9.46×10^{17} см.

13.4. Определить продольную и поперечную длины, а также объем когерентности в непосредственной близости от квантового оптического генератора, работающего на длине волны $\lambda_0 = 5 \cdot 10^{-5}$ см с разбросом частот $\Delta\nu = 10^2$ гц. Диаметр зеркал $D = 5$ см.

13.5. Найти параметр вырождения δ излучения абсолютно черного тела, находящегося при температуре T. Сделать численные оценки для $\lambda = 1$ см и $\lambda = 5 \cdot 10^{-5}$ см при $T = 273°$ и для $\lambda = 5 \cdot 10^{-5}$ см при $T = 10000°$.

Указание. Спектральная плотность энергии излучения черного тела (см. задачу 6.23)

$$I_\omega \doteq \frac{\omega^3}{\pi^2 c^3} \frac{\hbar\omega}{\exp(\hbar\omega/T) - 1}$$

Здесь температура T выражена в энергетических единицах: $T = kT°\mathrm{K}$, где $k = 1,38 \cdot 10^{-16}$ эрг/град - постоянная Больцмана.

13.6. Найти параметр вырождения для квантового оптического генератора, рассмотренного в задаче 13.4. Мощность излучения 200 Вт. Какой эффективной температуре отвечает это значение δ?

13.7. Связать автокорреляционную функцию

$$\Gamma(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}, \tau) = \langle U^*(\boldsymbol{r}, t) U(\boldsymbol{r}, t + \tau) \rangle$$

со спектром мощности $I(\omega)$ излучения. Интенсивность излучения $I = \langle U^*(t)U(t)\rangle = \int\limits_0^\infty I(\omega)d\omega$.

13.8. Найти автокорреляционную функцию излучения, если линия испускания узкая и имеет прямоугольную форму в интервале шириной $\Delta\omega$ около ω_0. Интенсивность излучения I.

13.9. В интерференционном опыте Юнга наблюдается интерференционная картина в области перекрытия пучков, дифрагировавших на двух отверстиях (рис. 13.3). Отверстия расположены на расстоянии D друг от друга в точках с координатами $(0, 0)$ и (x, y). Источник света протяженный, его размер значительно превышает D и он находится на расстоянии R от отверстий ($R \gg D$). Свет достаточно монохроматичен, так что для каждого из независимых излучателей выполняется условие временной когерентности. Выразить коэффициент частичной когерентности через распределение интенсивности $I(x, y)$ излучения по поперечнику источника света.

13.10. Звездный интерферометр Майкельсона представляет собой вариант интерференционной схемы Юнга, в которой расстояние между отверстиями может изменяться. Найти зависимость контрастности $\mathscr{V}$ интерференционных полос в интерферометре Майкельсона от расстояния D между отверстиями и от длины волны λ для двух случаев.

а) Наблюдается двойная звезда - система двух близких звезд, находящихся на угловом расстоянии α друг от друга. Каждую из звезд можно рассматривать как точечный источник света. Считать светимости обеих звезд одинаковыми.

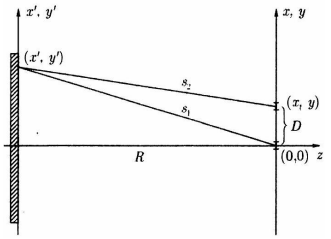


Рис. 13.3

б) Наблюдается одиночная звезда больших размеров с угловым поперечником α (можно рассматривать эту звезду как равномерно излучающий диск).

13.11. В звездный интерферометр Майкельсона, рассмотренный в предыдущей задаче, поступает свет от двойной звезды или от одиночной звезды больших размеров. При увеличении расстояния D между отверстиями контрастность интерференционных полос ослабевает и при некотором значении $D = D_0$ обращается в нуль. Определить: а) расстояние ρ между компонентами двойной звезды Капелла, находящейся от нас на расстоянии $R = 44,6$ световых лет, если $D_0 = 70,8$ см, а наблюдение ведется на длине волны $\lambda = 5 \cdot 10^{-5}$ см; б) диаметр d звезды Бетельгейзе, расстояние до которой составляет 652 световых года, если $D_0 = 720$ см, а $\lambda = 6 \cdot 10^{-5}$ см.

Указание. Первый ненулевой корень функции Бесселя $J_1(x)$ равен $x_1 = 3,8317$.

13.12*. В интерферометре Брауна и Твисса (рис. 13.4) независимо детектируются, а затем перемножаются и регистрируются интенсивности света, идущего от двух удаленных некогерентных точечных источников или от различных точек одного протяженного источника. Волны, идущие от источников, можно считать плоскими (волновые векторы k_1, и k_2), их амплитуды и фазы флуктуируют случайным образом. Показать, что с помощью интерферометра Брауна и Твисса можно путем наблюдения корреляции между интенсивностями измерять угловое расстояние между источниками.

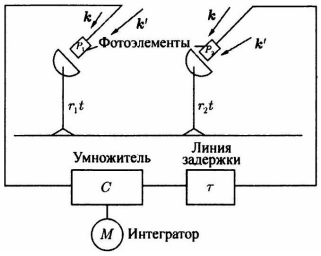
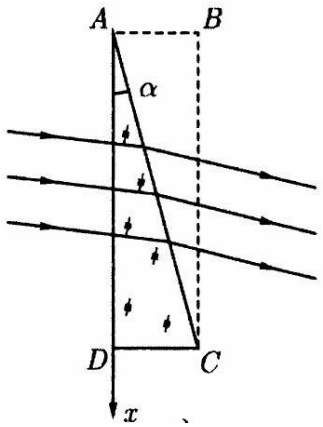
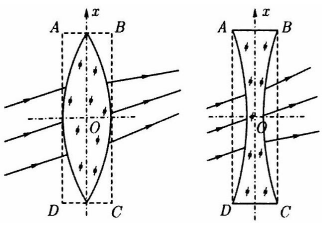


Рис. 13.4

13.13. Плоская волна (длина волны λ) падает почти нормально на боковую поверхность тонкой призмы с углом $\alpha \ll 1$ при вершине и показателем преломления n. Найти зависимость от x (рис. 13.5 а) фазового сдвига, который приобретает волна в плоском слое $ABCD$, часть которого занята призмой.



а)



б)

Рис. 13.5

13.14. Плоская волна падает на тонкую собирающую или рассеивающую линзу с радиусами кривизны R_1, R_2 и показателем преломления n (рис. 13.5 б). Длина волны λ, угол между волновым вектором и оптической осью линзы мал. Найти зависимость от x фазового сдвига, приобретаемого волной в плоском слое $ABCD$, часть которого занята линзой.

13.15. Монохроматическая плоская волна (длина волны λ) от квантового оптического генератора падает на бизеркало Френеля (рис. 13.6) с углом $\vartheta \ll 1$ между плоскостями зеркал. В области перекрытия двух плоских волн, идущих от бизеркала, образуется интерференционное волновое поле. На фотопластинке, помещенной в эту область и образующей угол $\vartheta_1 \ll 1$ с фронтом одной из волн, возникает система прозрачных и темных интерференционных полос. Какое волновое поле образуется за этой фотопластинкой, если после проявления пропустить сквозь нее нормально к поверхности плоскую волну от того же самого оптического генератора?

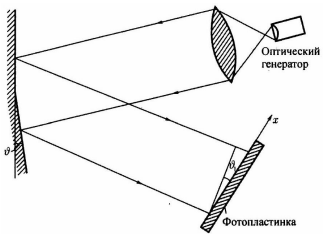


Рис. 13.6

13.16. Плоская монохроматическая волна проходит одновременно через призму и отверстие в непрозрачном экране, находящемся на расстоянии f (рис. 13.7). Призма тонкая, преломляющий угол $\alpha \ll 1$, а показатель преломления ее вещества n. На фотопластинке возникает некоторое распределение интенсивности поля за счет интерференции между «опорной» плоской волной (часть волны, прошедшая через призму и отклоненная вниз) и волной, дифрагировавшей на отверстии (угол дифракции считать малым). Найти это распределение.

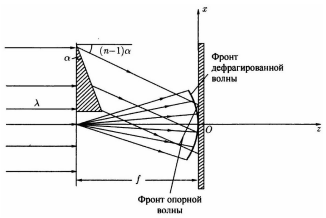


Рис. 13.7

13.17. Найти распределение пропускания $T(x)$ сквозь голограмму, полученную в условиях, описанных в предыдущей задаче. Считать при этом, что при создании голограммы интенсивность опорной волны была велика по сравнению с интенсивностью волны, прошедшей сквозь отверстие. Проследить за процессом восстановления первоначальных волновых фронтов при пропускании через эту голограмму нормально падающей плоской монохроматической волны $u_0 = A_0' \exp[i(kz - \omega t)]$ (длина волны та же, что и у первичной волны). В частности, проследить за возникновением точечного изображения первоначального отверстия.

Указание. Волновое поле за голограммой можно получить простым умножением падающей на голограмму волны $u_0(x)$ на пропускание $T(x)$. Для интерпретации получившегося выражения следует обратиться к решениям задач 13.13, 13.14.

13.18. На установке, рассмотренной в задачах 13.16, 13.17, получается голограмма двух отверстий, находящихся на расстоянии $2D$ друг от друга в плоскости призмы. По этой голограмме восстанавливается изображение двух отверстий. Найти это изображение и выяснить, в каком случае оно будет увеличенным.

Указание. Голограмму можно освещать при восстановлении изображения светом с длиной волны λ', не совпадающей с той λ, которая применялась при получении голограммы.

13.19. Определить разрешающую способность голограммы, которая получена на установке типа, рассмотренного в задаче 13.16. Голограмма выполнена на фотопластинке с размером зерен эмульсии d.

13.20. Электромагнитная волна с фиксированной линейной поляризацией описывается в некоторый момент времени функцией $E(\rho, z) = \mathscr{E}(\boldsymbol{\rho}) \exp(ikz)$, где $\mathscr{E}(\boldsymbol{\rho})$ - случайная функция, зависящая от поперечных координат $\rho = (x, y)$. Такое поле возникает после пропускания плоской волны через экран в плоскости (x, y), прозрачность которого и набег фазы меняются от точки к точке по случайному закону. Вычислить поперечную

корреляционную функцию $K_\perp(\rho_1,\rho_2)=\langle\mathscr{E}(\rho_1)\,\mathscr{E}^*(\rho_2)\rangle$, если известно, что она однородна и изотропна в плоскости (x,y), а распределение гармоник Фурье случайного поля по поперечным волновым векторам задается следующим образом:

1. Равномерное распределение в области $0\leqslant\kappa\leqslant\kappa_0$, т. е. $K(\kappa)=K_0=\text{const}$ при $0\leqslant\kappa\leqslant\kappa_0, K(\kappa)=0$ при $\kappa>\kappa_0$.
2. Гауссово распределение: $K(\kappa)=K_0\exp(-\kappa^2/\kappa_0^2)$.

13.2.2 13.2. Random Waves and Waves in Randomly Inhomogeneous Media

Флуктуации электромагнитного поля в равновесной среде. Начнем этот раздел с рассмотрения тепловых флуктуаций электромагнитного поля в равновесной однородной среде без пространственной дисперсии, имеющей скалярные электрическую и магнитную проницаемости $\varepsilon(\omega),\mu(\omega)$. Любая реальная среда является поглощающей, что выражается в наличии мнимых частей у ε и μ. В такой среде при конечных температурах, помимо вакуумных флуктуаций поля, рассмотренных в главе 6, будет существовать электромагнитное поле, находящееся в термодинамическом равновесии с веществом. Это поле будет иметь характер случайных флуктуаций, отдельные цуги волн будут испускаться и поглощаться частицами вещества в случайные моменты времени.

Вычисление флуктуаций поля произведем в несколько этапов. На первом этапе найдем поле, которое вызывает в рассматриваемой среде слабый заданный гармонический ток

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})\cos\omega t \tag{13.32}$$

Выберем такую калибровку электромагнитных потенциалов, при которой скалярный потенциал $\varphi=0$, все векторы поля выразятся через векторный потенциал:

$$\boldsymbol{E}=\frac{i\omega}{c}\boldsymbol{A},\quad \boldsymbol{D}=\frac{i\omega\varepsilon(\omega)}{c}\boldsymbol{A},\quad \boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A},\quad \boldsymbol{H}=\frac{1}{\mu(\omega)}\nabla\times\boldsymbol{A}, \tag{13.33}$$

где учтена гармоническая зависимость от времени.
Поскольку свойства среды определяются квантовыми закономерностями, выполним квантовый расчет. Оператор взаимодействия среды с внешним током запишем в виде (см. аналогичную четырехмерную формулу (4.108))

$$\widehat{V}(t)=-\frac{1}{c}\int j_\lambda(\boldsymbol{r},t)\widehat{A}_\lambda(\boldsymbol{r})d^3r \tag{13.34}$$

где $\widehat{\boldsymbol{A}}_\lambda(r)$ - квантованный векторный потенциал (6.13), не зависящий от времени, суммирование производится по трем значениям индекса λ. Будем считать среду бесконечно протяженной, выберем достаточно большую «основную область», и наложим на заданный ток и векторный потенциал периодические граничные условия, как это делалось в разделах 2.3 и 6.1. В таком случае оператор взаимодействия можно записать как бесконечную сумму слагаемых

$$\widehat{V}(t)=-\frac{1}{c}\sum_k j_{k\lambda}(t)\widehat{A}_{k\lambda} \tag{13.35}$$

Здесь $\widehat{A}_{k\lambda}=\widehat{A}^\dagger_{k\lambda}$ - эрмитов оператор, не зависящий от времени, а $j_{k\lambda}(t)$ - действительная функция:

$$j_{k\lambda}(t)=\frac{1}{2}\left(j^0_{k\lambda}e^{-i\omega t}+j^{0\star}_{k\lambda}e^{i\omega t}\right) \tag{13.36}$$

Теперь оператор взаимодействия приобрел стандартный для теории флуктуаций вид суммы произведений классических «сторонних
сил» $j_{k\lambda}(t)$, генерирующих поле, на операторы $\widehat{A}_{k\lambda}$, средние значения которых по состояниям среды представляют собой макроскопическое электромагнитное поле в среде (ср. с формулой (125, 1) из [Ландау и Лифшиц, Статистическая физика]). В отсутствие сторонних токов имеем

$$A_{\boldsymbol{k}\lambda} = Sp\left(\widehat{\rho}\widehat{A}_{\boldsymbol{k}\lambda}\right) \equiv \sum_n \rho_n \langle n|\widehat{A}_{\boldsymbol{k}\lambda}|n\rangle = 0 \tag{13.37}$$

В правой части символом $A_{k\lambda}$ (без знака усреднения) обозначен макроскопический, т. е. усредненный потенциал. Усреднение производится по формулам, подобным (11.5), $\hat{\rho}$ - равновесный статистический оператор плотности среды (ДЗ.43), через $|n\rangle$ обозначены векторы стационарных состояний среды. При наличии слабого внешнего тока, $j_{k\lambda}(t) \neq 0$, возникнет электромагнитное поле, величина которого пропорциональна току и определяется функцией электромагнитного отклика среды с учетом принципа причинности (см. раздел 11.1):

$$A_{k\lambda}(t) = \int_0^\infty \alpha_{\lambda\nu}(\boldsymbol{k}, \tau) j_{k\nu}(t-\tau) d\tau \tag{13.38}$$

(мы считаем связь между током и потенциалом локальной). Отличие от (13.37) вызвано тем, что теперь состояние тела неравновесно и оператор плотности $\widehat{\rho}(t)$, с которым производится усреднение, отличается от равновесного оператора (ДЗ.43).

Введем обобщенную восприимчивость

$$\alpha_{\lambda\nu}(\boldsymbol{k}, \omega) = \int_0^\infty \alpha_{\lambda\nu}(\boldsymbol{k}, \tau) e^{i\omega\tau} d\tau \tag{13.39}$$

и выразим через нее макроскопический электромагнитный потенциал с использованием (13.32). В результате будем иметь

$$A_{\boldsymbol{k}\lambda}(t) = \frac{1}{2}\left[\alpha_{\lambda\nu}(\boldsymbol{k}, \omega) j^0_{k\nu} e^{-i\omega t} + \alpha_{\lambda\nu}(\boldsymbol{k}, -\omega) j^{0\star}_{k\nu} e^{i\omega t}\right] \tag{13.40}$$

бобщенная восприимчивость является комплексной величиной и обладает звойствами симметрии, которые уже обсуждались в разделе 11.1 применигельно к $\varepsilon_{\lambda\nu}, \mu_{\lambda\nu}$. В частности,

$$\alpha_{\lambda\nu}(\boldsymbol{k}, \omega) = \alpha_{\nu\lambda}(\boldsymbol{k}, \omega), \quad \alpha_{\lambda\nu}(\boldsymbol{k}, \omega) = \alpha^*_{\lambda\nu}(\boldsymbol{k}, -\omega) \tag{13.41}$$

Действительная часть обобщенной восприимчивости является четной, мнимая часть - нечетной функцией действительной частоты.

Пример 13.1. Выразить среднюю за период энергию Q, поглощаемую телом в единицу времени, через внешний ток и обобщенную восприимчивость.

- Решение. Нужно вычислить среднее по ансамблю от оператора, представляющего собой производную по времени от полного гамильтониана тела:

$$\frac{dE}{dt} = \left\langle \frac{d\widehat{\mathscr{H}}}{dt} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial\widehat{\mathscr{H}}}{\partial t} \right\rangle = \left\langle \frac{\partial\widehat{V}}{\partial t} \right\rangle =$$

$$= -\frac{1}{c}\sum_k \left\langle \widehat{A}_{k\lambda} \right\rangle \frac{\partial j_{k\lambda}(t)}{\partial t} = -\frac{1}{c}\sum_k A_{k\lambda}(t)\frac{\partial j_{k\lambda}(t)}{\partial t} \tag{1}$$

где $A_{k\lambda}(t)$ дается равенством (13.40). Если усреднить (1) по времени, то получим мощность диссипации энергии в теле в единицу времени:

$$Q = \frac{-i\omega}{4c}\sum_k \left[\alpha_{\lambda\nu}(\boldsymbol{k},\omega) - \alpha^*_{\lambda\nu}(\boldsymbol{k},\omega)\right] j^{0\star}_{k\lambda} j^0_{k\nu} = \frac{\omega}{2c}\sum_k \alpha''_{\lambda\nu}(\boldsymbol{k},\omega) j^{0\star}_{k\lambda} j^0_{k\nu} \tag{13.42}$$

Здесь двумя штрихами обозначена мнимая часть обобщенной восприимчивости.

Пример 13.2. С помощью уравнений Максвелла найти обобщенную восприимчивость $\alpha_{\lambda\nu}(\boldsymbol{k},\omega)$, выразив ее через электрическую и магнитную проницаемости $\varepsilon(\omega), \mu(\omega)$ для изотропной среды.

Решение. Обобщенная восприимчивость связывает внешний ток и макроскопический векторный потенциал. Эту связь можно найти с помощью уравнения для векторного потенциала, получив его из уравнения Максвелла (11.12) и формул (13.33):

$$\frac{1}{\mu}\nabla \times [\nabla \times \boldsymbol{A}] = \frac{\omega^2\varepsilon}{c^2}\boldsymbol{A} + \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j} \tag{1}$$

В k-представлении уравнение (1) принимает вид

$$\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon\mu\right)\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}} - \boldsymbol{k}\left(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}}\right) = \frac{4\pi\mu}{c}\boldsymbol{j}_k \tag{2}$$

Из этого уравнения находим

$$\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}} = -\frac{4\pi c}{\omega^2\varepsilon}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{j}_{\boldsymbol{k}} \tag{3}$$

и, подставив этот результат в (2), получим

$$A_{k\lambda} = -\frac{4\pi\mu c}{\omega^2\varepsilon\mu - c^2k^2}\left(\delta_{\lambda\nu} - \frac{\dot{c}^2 k_\lambda k_\nu}{\omega^2\varepsilon\mu}\right) j_{k\nu} \tag{4}$$

Отсюда находим обобщенную восприимчивость:

$$\alpha_{\lambda\nu}(\boldsymbol{k},\omega) = \frac{4\pi\mu c}{c^2k^2 - \omega^2\varepsilon\mu}\left(\delta_{\lambda\nu} - \frac{c^2k_\lambda k_\nu}{\omega^2\varepsilon\mu}\right) \tag{13.43}$$

При этом действительный векторный потенциал (вместе с временным множителем) выразится в виде (13.40). При интегрировании этих величин правила обхода особых точек должны соответствовать выбору запаздывающих потенциалов.

Пример 13.3. Произвести квантовомеханический расчет поглощаемой телом мощности Q в низшем порядке теории возмущений, выразив ее через матричные элементыи $\langle n|\widehat{A}_{k\lambda}|m\rangle$ векторного потенциала между стационарными состояниями тела. Путем сравнения с формулой (13.42) из примера 13.1 найти представление мнимой части обобщенной восприимчивости $\alpha_{\lambda\nu}(\boldsymbol{k},\omega)$ через указанные матричные элементы.

Решение. Оператор возмущения зависит от времени по гармоническому закону:

$$\widehat{V} = \sum_k \widehat{V}_k, \quad \widehat{V}_k = -\frac{1}{2c}\left(j^0_{k\lambda}e^{-i\omega t} + j^{0\star}_{k\lambda}e^{i\omega t}\right)\widehat{A}_{k\lambda} \tag{1}$$

Вычислим вероятность перехода $w'_{n\to m}$ в единицу времени под действием гармонического возмущения в низшем порядке теории возмущений, учтя в операторе

возмущения лишь одно слагаемое с определенным k. Использовав известную ([Ландау и Лифшиц, Квантовая механика]) формулу, получим

$$w'_{n\to m} = \frac{\pi}{2\hbar^2 c^2} \left| \langle n| j_k \cdot \widehat{A}_k \right| m \Big\rangle \, |^2 \left[\delta\left(\omega - \omega_{mn}\right) + \delta\left(\omega + \omega_{mn}\right)\right] \tag{2}$$

При учете суммы по k в операторе (1) в вероятность (2) войдут произведения матричных элементов $\langle n|\widehat{A}_{\boldsymbol{k}\lambda}|m\rangle\langle m|\widehat{A}_{\boldsymbol{k}'\lambda'}|n\rangle$. При $\boldsymbol{k} \neq \boldsymbol{k}'$ эти матричные элементы соответствуют рождению или уничтожению разных
квантов и не могут быть отличны от нуля одновременно. Поэтому полную вероятность перехода $w'_{n\to m}$ мы получим, просуммировав (2) по $\boldsymbol{k}$:

$$w_{n\to m} = \frac{\pi}{2\hbar^2 c^2} \sum_k \left| \langle n| j_k \cdot \widehat{A}_k \right| m \Big\rangle \, |^2 \left[\delta\left(\omega - \omega_{mn}\right) + \delta\left(\omega + \omega_{mn}\right)\right] \tag{3}$$

Это дает возможность вычислить поглощаемую мощность, просуммировав все переходы в возможные состояния m и усреднив сумму по начальным состояниям n:

$$Q = \sum_{m,n} \rho_n w_{n\to m} \hbar\omega_{mn} \tag{4}$$

где, согласно формулам (Д3.44)-(Д3.46), $\rho_n = \exp\left[\left(F - E_n\right)/T\right]$ - статистическая матрица. Она описывает распределение Гиббса равновесной среды вместе с электромагнитным излучением, которое находится в статистическом равновесии со средой. Использовав равенство $\rho_m = \rho_n \exp\left(\hbar\omega_{mn}/T\right)$ и свойства дельта-функции, приведем (4) к виду

$$Q = \frac{\pi\omega}{2\hbar c^2}\left(1 - e^{-\hbar\omega/T}\right) \sum_k \sum_{m,n} \rho_n \langle n|\widehat{A}_{k\lambda}|m\rangle\langle m|\widehat{A}_{k\nu}|n\rangle \delta\left(\omega - \omega_{mn}\right) j^0_{k\lambda} j^{0\star}_{k\nu} \tag{5}$$

Из сравнения последнего выражения с (13.42) находим мнимую часть обобщенной восприимчивости:

$$\alpha''_{\lambda\nu}(\boldsymbol{k},\omega) = \frac{\pi}{c\hbar}\left(1 - e^{-\hbar\omega/T}\right) \sum_{m,n} \rho_n \langle n|\widehat{A}_{\boldsymbol{k}\lambda}|m\rangle\langle m|\widehat{A}_{\boldsymbol{k}\nu}|n\rangle \delta\left(\omega - \omega_{mn}\right) \tag{13.44}$$

Этим результатом завершается выполнение предварительных расчетов, и теперь можно сделать последний шаг - найти флуктуации электромагнитного поля в равновесной среде.

Пример 13.4. Вычислить фурье-образ по времени $K_{\lambda\nu}(\boldsymbol{k},\omega)$ корреляционной функции

$$K_{\lambda\nu}\left(\boldsymbol{k}, t - t'\right) = \frac{1}{2}\left\langle \widehat{A}_{\boldsymbol{k}\lambda}(t)\widehat{A}_{\boldsymbol{k}\nu}\left(t'\right) + \widehat{A}_{\boldsymbol{k}\nu}\left(t'\right)\widehat{A}_{\boldsymbol{k}\lambda}(t)\right\rangle \tag{13.45}$$

где $\widehat{A}_{k\lambda,\nu}(t)$ - операторы векторного потенциала в гейзенберговском представлении, скобками обозначено усреднение по ансамблю состояний равновесной системы, а зависимость от разности времен объясняется стационарностью состояния системы. Гейзенберговские операторы, взятые в
разные моменты времени, друг с другом в общем случае не коммутируют; поэтому корреляционная функция определяется через их симметризованное произведение. В отличие от предыдущего рассмотрения, здесь не предполагается наличия в системе стороннего тока, и флуктуации поля обязаны исключительно тепловому движению частиц среды. Напомним, что в квантовой системе это движение не прекращается и при нулевой температуре.

Использовав результаты предыдущих примеров, найти связь между спектральным тензором $K_{\lambda\nu}(\boldsymbol{k},\omega)$ и обобщенной восприимчивостью (13.43).

Решение. В отсутствие внешнего тока $\widehat{V}=0$ и среда может находиться в стационарных состояниях $|n\rangle$, удовлетворяющих уравнению Шредингера $\widehat{\mathscr{H}}|n\rangle = E_n|n\rangle$, где $\widehat{\mathscr{H}}$ - гамильтониан среды. Гейзенберговские операторы согласно формуле (Д3.31) имеют вид

$$\widehat{A}_{k\lambda,\nu}(t) = \exp\left(\frac{i}{\hbar}\widehat{\mathscr{H}}t\right)\widehat{A}_{k\lambda,\nu}\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\widehat{\mathscr{H}}t\right) \tag{1}$$

где в правую часть равенства входят не зависящие от времени операторы в шредингеровском представлении. Производим последовательные вычисления:

$$\begin{aligned}
K_{\lambda\nu}(\boldsymbol{k},\omega) = &\int\limits_{-\infty}^{\infty} K_{\lambda\nu}(\boldsymbol{k},\tau)e^{i\omega\tau}d\tau = \\
=&\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left\langle \widehat{A}_{\boldsymbol{k}\lambda}(\tau)\widehat{A}_{\boldsymbol{k}\nu}(0)+\widehat{A}_{\boldsymbol{k}\nu}(0)\widehat{A}_{\boldsymbol{k}\lambda}(\tau)\right\rangle e^{i\omega\tau}d\tau = \\
=&\frac{1}{2}\sum_{m,n}\rho_n\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Big\{\langle n|\widehat{A}_{\boldsymbol{k}\lambda}(\tau)|m\rangle\langle m|\widehat{A}_{\boldsymbol{k}\nu}(0)|n\rangle + \\
&+\langle n|\widehat{A}_{\boldsymbol{k}\nu}(0)|m\rangle\langle m|\widehat{A}_{\boldsymbol{k}\lambda}(\tau)|n\rangle\Big\}e^{i\omega\tau}d\tau
\end{aligned} \tag{2}$$

Далее имеем

$$\langle n|\widehat{A}_{k\lambda}(\tau)|m\rangle = \langle n|\widehat{A}_{k\lambda}|m\rangle e^{i\omega_{nm}\tau} \tag{3}$$

и после подстановки (3) в (2) получим

(4) $K_{\lambda\nu}(\boldsymbol{k},\omega) = \pi\left(1+e^{-\hbar\omega/T}\right)\sum\limits_{m,n}\rho_n\langle n|\widehat{A}_{\boldsymbol{k}\lambda}|m\rangle\langle m|\widehat{A}_{\boldsymbol{k}\nu}|n\rangle\delta\left(\omega-\omega_{mn}\right)$.

Сравнение с (13.44) приводит к соотношению

$$K_{\lambda\nu}(\boldsymbol{k},\omega) = c\hbar\,\mathrm{cth}\left(\frac{\hbar\omega}{2T}\right)\alpha''_{\lambda\nu}(\boldsymbol{k},\omega) \tag{13.46}$$

где в качестве $\alpha''_{\lambda\nu}$ следует использовать мнимую часть выражения (13.43). Тем самым флуктуации электромагнитного поля в равновесной системе выражены через электрическую и магнитную проницаемости среды.

Соотношение (13.46) носит название флуктуационно-диссипационной теоремы. Оно связывает флуктуации равновесного параметра (в данном случае векторного потенциала) с диссипативными свойствами системы, которые описываются мнимой частью обобщенной восприимчивости.

Изложенный материал можно найти в книгах [Гинзбург (1987); Лифшиц и Питаевский, Статистическая физика, ч. 2; Левин и Рытов (1967); Рытов (1978)].

Рассеяние света в равновесной изотропной прозрачной среде. Согласно результатам раздела 12.1 предыдущей главы, в отсутствие поглощения электромагнитная волна распространяется в однородной среде без ослабления. Но этот результат не учитывает малых случайных неоднородностей диэлектрической проницаемости, вызываемых тепловым движением частиц среды. Из-за теплового движения частиц плотность и температура среды испытывают случайные флуктуации, которые вызывают флуктуации

$\widetilde{\varepsilon}$ (считаем для простоты магнитную проницаемость $\mu = 1$). Это приводит к рассеянию падающей волны на неоднородностях диэлектрической проницаемости, к появлению случайных рассеянных волн и к ослаблению падающей волны. Вычислим соответствующее ослабление в простейшей модели рассеивающей среды.

Разделим среду на одинаковые макроскопические ячейки объемом V, линейные размеры которых малы по сравнению с длиной волны. Представим в каждой ячейке диэлектрическую проницаемость в виде

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon + \Delta\varepsilon, \quad \langle \Delta\varepsilon \rangle = 0 \tag{13.47}$$

где $\varepsilon(\omega, \tau, T) = \langle \tilde{\varepsilon} \rangle$ - среднее по ансамблю состояний среды значение диэлектрической проницаемости, с которым мы имели дело в главе 12; τ и T - плотность и температура среды; $\Delta\varepsilon$ - флуктуирующая добавка, которая меняется от ячейки к ячейке. Пусть линейные размеры такой области много больше радиуса межмолекулярного взаимодействия. Тогда флуктуации в разных ячейках будут статистически независимыми и среднее по равновесному ансамблю от произведения флуктуаций в разных ячейках обратится в
нуль:

$$\langle \Delta\varepsilon_i \Delta\varepsilon_k \rangle = \left\langle \Delta\varepsilon^2 \right\rangle \delta_{ik} \tag{13.48}$$

где i, k - номера ячеек. Ввиду независимости флуктуаций в разных ячейках рассеянные ими поля также будут независимыми, и достаточно рассмотреть одну такую ячейку.

Пусть первоначальная плоская монохроматическая волна распространяется вдоль оси Ox. Считаем рассеянное поле $\boldsymbol{E}_s$ малым и записываем полное поле в виде $\widetilde{\boldsymbol{E}} = \boldsymbol{E} + \boldsymbol{E}_s, |\boldsymbol{E}_s| \ll |\boldsymbol{E}|$. Здесь $\boldsymbol{E} = \langle \widetilde{\boldsymbol{E}} \rangle$ - поле, усредненное по флукутуациям среды. Флуктуация электрической поляризации имеет вид $\Delta\boldsymbol{P} = \boldsymbol{E}\Delta\varepsilon/4\pi$, а флуктуирующий дипольный момент объема V равен $\boldsymbol{p} = V\Delta\boldsymbol{P}$. Рассеянное этим объемом поле $\boldsymbol{E}_s$ можно вычислить по формуле (5.29). Его частота будет совпадать с частотой ω падающей волны. Полный поток энергии, рассеянный объемом V, вычислим по формуле (5.31). Если усреднить эту величину по флуктуациям и по периоду изменения поля, записав электрическое поле в виде $\boldsymbol{E}(x,t) = \boldsymbol{E}(x)\cos(kx - \omega t)$, то получим

$$\left\langle \bar{I}_s \right\rangle = \frac{2}{3c^3} \left\langle \overline{\ddot{p}^2} \right\rangle = \frac{cE^2(x)}{8\pi} \cdot \frac{\omega^4 V \left\langle \Delta\varepsilon^2 \right\rangle_V}{6\pi c^4} \cdot V \tag{13.49}$$

Здесь $I = \bar{\gamma} = cE^2(x)/8\pi$ - поток энергии падающей волны, определяемый ее вектором Пойнтинга. Представим объем ячейки в виде призмы длиной Δx в направлении оси Ox с площадью поперечного сечения $S : V = S\Delta x$. Тогда отношение $\left\langle \bar{I}_s \right\rangle / S = -\Delta I$ можно рассматривать как убыль потока энергии, вызванную частичным рассеянием волны, и записать соотношение (13.49) в виде

$$\Delta I = -Ih\Delta x, \quad \text{где} \quad h = \frac{\omega^4 V \left\langle \Delta\varepsilon^2 \right\rangle_V}{6\pi c^4} \tag{13.50}$$

Закон ослабления интенсивности волны получим, заменив $\Delta x \to dx$, $\Delta I \to dI$ и проинтегрировав равенство (13.50):

$$I(x) = I_0 e^{-hx} \tag{13.51}$$

Величина h называется коэффициентом экстинкции. Он определяется частотой и произведением $V \left\langle \Delta\varepsilon^2 \right\rangle_V$, где $\left\langle \Delta\varepsilon^2 \right\rangle_V$ - средняя квадратичная флуктуация диэлектрической проницаемости в объеме V. Эту величину

можно выразить через более удобные параметры с помощью термодинамической теории флуктуаций (см. [Ландау и Лифшиц, Статистическая физика]

$$\left\langle \Delta\varepsilon^2 \right\rangle_V = \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\right)^2 \left\langle \Delta\tau^2 \right\rangle_V + \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial T}\right)^2 \left\langle \Delta T^2 \right\rangle_V + 2\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\right)\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial T}\right)\langle \Delta\tau\Delta T\rangle_V \tag{13.52}$$

где

$$\left\langle \Delta\tau^2 \right\rangle_V = \frac{\tau T}{V}\left(\frac{\partial\tau}{\partial p}\right)_T, \quad \left\langle \Delta T^2 \right\rangle_V = \frac{T^2}{V\tau c_v}, \quad \langle \Delta\tau\Delta T\rangle_V = 0$$

c_v - теплоемкость на единицу массы при постоянном объеме. Использовав эти соотношения, получим формулу Эйнштейна для коэффициента экстинкции:

$$h = \frac{\omega^4}{6\pi c^4}\left[\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau}\right)_T^2 \left(\frac{\partial\tau}{\partial p}\right)_T T\tau + \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial T}\right)_\tau^2 \frac{T^2}{c_v\tau}\right] \tag{13.53}$$

Изложенная выше простейшая теория молекулярного рассеяния предполагала, что при флуктуациях сохраняется изотропия среды, т. е. их можно описывать скалярной диэлектрической проницаемостью. Такое предположение оправдывается для сферически симметричных молекул, но несправедливо для более сложных молекул. При флуктуациях среда может испытывать отклонения от изотропии, что приводит к более сложным выражениям для коэффициента экстинкции. Кроме того, рассеяние может сопровождаться изменением частоты (комбинационное рассеяние Рамана [4] Ландсберга-Мандельштама). Рассмотренное рассеяние без изменения частоты называется рэлеевским [5]. Первые этапы развития теории рассеяния света в газах освещены в статье Собельмана (2002). Более полное изложение современной теории рассеяния света см. в книгах [Гинзбург (1987); Леонтович (1983); Ландау и Лифшиц, Электродинамика сплошных сред].

Однократное рассеяние электромагнитных волн случайными неоднородностями среды. Часто среда, сквозь которую распространяются электромагнитные волны, находится в неравновесном состоянии (например, облака водяного пара и пыли в атмосфере, облака плазмы и разреженного

нейтрального вещества в межзвездном пространстве и др.). В этих случаях рассеяние волн происходит значительно интенсивнее, чем на равновесных флуктуациях, а рассеянное излучение содержит важную информацию о структуре и свойствах рассеивающей среды.

Пример 13.5. Рассмотреть облако, состоящее из N одинаковых неподвижных макроскопических сферических частиц, которые находятся в вакууме или в прозрачной среде. На облако падает плоская монохроматическая электромагнитная волна, длина которой велика по сравнению с размером отдельной частичы (но не облака). Вычислить эффективное дифференчиальное сечение рассеяния волны облаком частиц в приближении однократного рассеяния. Это условие означает, что ослаблением падающей волны и вторичным рассеянием в облаке уже рассеянных волн можно пренебречь. Но следует учесть возможную корреляцию в расположении частич облака (структурный фактор среды). Электрическая поляризуемость $\beta(\omega)$ частич известна, магнитная поляризуемость пренебрежимо мала.

[04] Раман Чандрасекхара Венката (1888-1970) - выдающийся индийский физик. Нобелевская премия (1930). за обнаружение комбинационного рассеяния света в жидкостях. Историю открытия комбинационного рассеяния советскими учеными Г. С. Ландсбергом и Л. И. Мандельштамом и неполучения ими Нобелевской премии см. в статье Е. Л. Фейнберга (2003).

[5] Рэлей (Стретт) Джон Уильям (1842-1919) - крупнейший английский физик, Нобелевский лауреат.

Решение. Если длина волны $\lambda = 2\pi v_{ph}/\omega$ велика по сравнению с размером отдельной частицы, то ее дипольный момент выразится через поляризуемость $\beta(\omega)$ в однородном поле:

$$\boldsymbol{p}_a(t) = \beta \boldsymbol{E}_0 \exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - i\omega t),$$

где $\boldsymbol{r}_a$ - радиус-вектор центра масс частицы, $\boldsymbol{E}_0$ - амплитуда падающей волны, $\boldsymbol{k}$ - ее волновой вектор. Для однородной сферической частицы с диэлектрической проницаемостью ε поляризуемость вычислена в задаче 8.11:

$$\beta = \frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon + 2\varepsilon_0} a^3$$

где ε_0 - диэлектрическая проницаемость окружающей среды, a - радиус частицы. В волновой зоне рассеянное поле дается формулой (5.29) с заменой с на v_{ph}:

$$\boldsymbol{E}'_a = \frac{\omega^2}{v_{ph}^2 R}\boldsymbol{n}' \times [\boldsymbol{p}_a \times \boldsymbol{n}'] \exp\left(-i\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{r}_a\right), \quad r_a \ll R, \quad \boldsymbol{k}' = \frac{\omega}{v_{ph}}\boldsymbol{n}'$$

Единичный вектор $\boldsymbol{n}'$ указывает направление рассеяния.
Дифференциальное сечение рассеяния волны облаком вычисляется по формулам, приведенным в начале раздела 12.3. Следует учесть рассеяние от всех частиц облака и произвести усреднение по ансамблю взаимных
расположений частиц:

$$\frac{d\Sigma}{d\Omega} = \left\langle \left| \sum_{a=1}^{N} \exp\left(-i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}_a\right) \right|^2 \right\rangle \frac{\varepsilon_0^2\omega^4\beta^2(\omega)}{c^4}\sin^2\theta = F(\boldsymbol{q})\frac{d\sigma}{d\Omega} \tag{13.54}$$

Здесь $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{k}' - \boldsymbol{k}$ - переданный среде волновой вектор, $q = 2k\sin(\vartheta/2)$, ϑ - угол рассеяния, $d\Omega = \sin\vartheta d\vartheta d\varphi, \theta$ - угол между $\boldsymbol{E}_0$ и $\boldsymbol{k}'$. Величина

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\varepsilon_0^2\omega^4\beta^2(\omega)}{c^4}\sin^2\theta \tag{13.55}$$

представляет собой сечение рассеяния волны отдельной частицей,

$$F(\boldsymbol{q}) = \left\langle \left| \sum_{a=1}^{N} \exp\left(-i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}_a\right) \right|^2 \right\rangle \tag{13.56}$$

- структурный фактор среды (фактор когерентности). В задаче 5.122 мы уже рассмотрели его для двух предельных случаев полностью когерентного ($|\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}_a| \ll 1$) и полностью некогерентного $\left(\sum_{a\neq b}\exp\left(i\boldsymbol{q}\cdot(\boldsymbol{r}_a - \boldsymbol{r}_b)\right) \approx 0\right)$ рассеяния. Здесь рассмотрим более общий случай.

Плотность числа частиц в облаке можно записать в виде

$$n(\boldsymbol{r}) = \sum_{a=1}^{N}\delta\left(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_a\right)$$

а структурный фактор можно представить в виде двойного интеграла по объему облака:

$$F(\boldsymbol{q}) = \left\langle |n_{\boldsymbol{q}}|^2 \right\rangle = \int \left\langle n\left(\boldsymbol{r}_1\right) n\left(\boldsymbol{r}_2\right)\right\rangle \exp\left[-i\boldsymbol{q}\cdot(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2)\right] d^3r_1 d^3r_2 \tag{13.57}$$

Будем считать распределение частиц в пределах облака однородным и изотропным. Запишем среднее от произведения их концентраций в двух точках через функцию взаимной корреляции (см. [Ландау и Лифшиц, Статистическая физика]):

$$\langle n(\boldsymbol{r}_1)\, n(\boldsymbol{r}_2)\rangle = \bar{n}^2 + \bar{n}\left[\delta(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2) + g(|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|)\right] \tag{13.58}$$

где $\bar{n}$ - средняя по облаку концентрация, $g(r)$ - корреляционная функция, имеющая порядок величины $\bar{n}$ при $r \to 0$ и стремящаяся к нулю при $r \gg l_c$, где $l_c \ll L$ - корреляционная длина, L - размер облака.

Первое слагаемое в (13.58) описывает когерентное рассеяние вперед. При его интегрировании согласно (13.57) получим

$$\int \bar{n}^2 \exp\left[-i\boldsymbol{q}\cdot(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2)\right] d^3r_1 d^3r_2 = \bar{n}^2 \int \exp(-i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}) d^3r d^3R \approx (2\pi)^3 V \bar{n}^2 \delta(\boldsymbol{q})$$

где $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2, \boldsymbol{R} = (\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2)/2$, а правая часть близка к дельта-функции, если линейный размер облака L велик по сравнению с длиной волны. При $q \to 0$ следует сделать замену $(2\pi)^3\delta(\boldsymbol{q}) \to V$, которая позволяет записать сечение рассеяния вперед:

$$\left.\frac{d\Sigma(\boldsymbol{q})}{d\Omega}\right|_{\boldsymbol{q}\to 0} \to N^2 \frac{d\sigma}{d\Omega}, \quad N = \bar{n}V \tag{13.59}$$

При $q \to 0$ и $N \gg 1$ вклад от членов, пропорциональных $\bar{n}$ в (13.58), пренебрежимо мал.

При углах рассеяния $\vartheta > 1/kL$ будем иметь

$$\frac{d\Sigma}{d\Omega} = N\frac{d\sigma}{d\Omega}\left\{1 + \int g(r)\exp(-i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}) d^3r\right\} \tag{13.60}$$

Первое слагаемое в скобках описывает некогерентное рассеяние на N частицах: $d\Sigma/d\Omega = N(d\sigma/d\Omega)$. Второе слагаемое описывает когерентное рассеяние, исчезающее при полностью беспорядочном распределении частиц (при $g \to 0$). Если $l_c \ll \lambda$ (мелкомасштабные макроскопические неоднородности), то $\exp(i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}) \approx 1$ и $\int g(r) d^3r \approx \bar{n} l_c^3$. Угловая зависимость сечения рассеяния на облаке такая же, как на отдельной частице, а когерентный вклад существенен при $\bar{n} l_c^3 > 1$. В обратном предельном случае $l_c \gg \lambda$ и $\bar{n} l_c^3 \gg 1$ когерентное слагаемое велико в области малых углов рассеяния $\vartheta < 1/kl_c$ (но $\vartheta > 1/kL$), что приводит к резко анизотропному рассеянию. При $\vartheta \gg 1/kl_c$ когерентный вклад убывает из-за осцилляций экспоненты и главную роль играет некогерентное рассеяние.

Приближение однократного рассеяния применимо, если в облаке рассеивается лишь малая доля энергии волны, т. е. полное сечение рассеяния на облаке мало по сравнению с его геометрическими размерами: $\Sigma \ll L^2$.

Дифракция на случайном экране. Если некоторая регулярная волна проходит через слой среды со случайными неоднородностями, то при выходе из слоя поле будет иметь случайную составляющую и его следует описывать корреляционными функциями. При малой толщине слоя по
сравнению с другими длинами задачи такой слой можно рассматривать как плоский хаотический экран, который случайным образом модулирует по амплитуде и по фазе падающую на него волну. Свойства такого экрана задаются его функцией пропускания - безразмерной комплексной случайной функцией $M(\rho), |M(\rho)| \leqslant 1$, где вектор ρ расположен в плоскости экрана, которую мы отождествим с плоскостью (x, y). Если на экран падает начальная регулярная волна $u_0(\rho, z)e^{-i\omega t}$, то сразу за экраном $(z \to +0)$ возникнет случайное волновое поле

$$u(\boldsymbol{\rho},0)=M(\boldsymbol{\rho})u_0(\boldsymbol{\rho},0) \tag{13.61}$$

статистические характеристики которого будут определяться случайной функцией $M(\rho)$. Мы для простоты рассматриваем скалярный случай, когда можно пренебречь изменением направления векторных величин. Будем считать падающую волну плоской и положим $u_0(\rho,0)=1$.

Пусть за экраном ($z>0$) находится однородная среда. В этом случае задача сводится к исследованию распространения случайного поля в однородной среде, где оно удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$\Delta u+k^2u=0,\quad k^2=\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon(\omega)\mu(\omega) \tag{13.62}$$

и граничному условию (13.61). Применим метод Рэлея: разложим поле в плоскости $z=0$ в интеграл Фурье:

$$u(\boldsymbol{\rho},0)=M(\boldsymbol{\rho})=\int m(\boldsymbol{\kappa})\exp(i\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{\rho})\frac{d^2\boldsymbol{\kappa}}{(2\pi)^2} \tag{13.63}$$
$$m(\boldsymbol{\kappa})=\int M\left(\boldsymbol{\rho}'\right)\exp\left(-i\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{\rho}'\right)d^2\rho'$$

В области $z>0$ каждая пространственная гармоника поля должна удовлетворять уравнению (13.62). Это означает, что ее зависимость от координат должна иметь вид

$$m(\boldsymbol{\kappa})\exp\left(i\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{\rho}+ik_zz\right),\quad k_z=\sqrt{k^2-\kappa^2} \tag{13.64}$$

В зависимости от фурье-спектра $m(\kappa)$ функции пропускания значения κ могут быть как меньше, так и больше k. Поэтому суперпозиция (13.63) плоских волн при $z>0$ будет содержать распространяющиеся волны
с $\sqrt{k^2-\kappa^2}>0,\kappa<k$ и затухающие («неоднородные») волны $\mathbf{c}\sqrt{k^2-\kappa^2}=i\sqrt{|k^2-\kappa^2|},\kappa>k$:

$$u(\boldsymbol{\rho},z)=\int m(\boldsymbol{\kappa})\exp\left(i\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{\rho}+i\sqrt{k^2-\kappa^2}z\right)\frac{d^2\kappa}{(2\pi)^2} \tag{13.65}$$

Поле (13.65) выражается через фурье-образ случайной функции пропускания $m(\boldsymbol{\kappa})$ и должно характеризоваться своими корреляционными функциями. Для их нахождения нужно задать статистические свойства функции $M(\rho)$. Примем предположения о статистической однородности и изотропии ансамбля случайных неоднородностей экрана. Это означает, что

$$\langle M(\boldsymbol{\rho})\rangle=M_0=\text{ const},\quad \langle\left(M\left(\boldsymbol{\rho}_1\right)-M_0\right)\left(M^*\left(\boldsymbol{\rho}_2\right)-M_0^*\right)\rangle=K_m\left(|\boldsymbol{\rho}_1-\boldsymbol{\rho}_2|\right). \tag{13.66}$$

Здесь корреляционная функция $K_m(\rho)$ характеризуется некоторой корреляционной длиной l_m, т.е. становится исчезающе малой при $\rho\gg l_m$. Нам потребуется и фурье-образ корреляционной функции, который мы обозначим через $\langle m^2\rangle_\kappa$:

$$\left\langle m^2\right\rangle_\kappa=\int K_m(\rho)\exp(-i\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{\rho})d^2\rho \tag{13.67}$$

Эта величина заметно отлична от нуля при значениях κ порядка или меньше $2\pi/l_m$. При $\kappa\gg2\pi/l_m$ интеграл в (13.67) становится весьма малым из-за быстрых осцилляций экспоненты.

Пример 13.6. Вычислить усредненное по ансамблю поле $\bar{u}(\rho, z) \equiv \langle u(\rho, z)\rangle$ в области $z > 0$.

Решение. Из (13.65) получаем

$$\langle u(\boldsymbol{\rho}, z)\rangle = \int \langle m(\boldsymbol{\kappa})\rangle \exp\left(i\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{\rho} + i\sqrt{k^2-\kappa^2}z\right)\frac{d^2\kappa}{(2\pi)^2} \tag{1}$$

Соотношения (13.63) и (13.66) дают $\langle m(\boldsymbol{\kappa})\rangle = (2\pi)^2 M_0\delta(\boldsymbol{\kappa})$. В итоге находим

$$\bar{u}(\rho, z) = M_0 e^{ikz}$$

Независимость от ρ объясняется статистической однородностью экрана.

Пример 13.7. Вычислить корреляционную функцию поля

$$K_u\left(\boldsymbol{\rho}, z; \boldsymbol{\rho}', z'\right) = \left\langle \left(u(\boldsymbol{\rho}, z) - \bar{u}(\boldsymbol{\rho}, z)\right)\left(u\left(\boldsymbol{\rho}', z'\right) - \bar{u}\left(\boldsymbol{\rho}', z'\right)\right)\right\rangle$$

вдали за экраном ($z, z' \gg \lambda$, где λ - длина волныь за экраном). Выразить K_u через фурье-образ корреляционной функции (13.67), характеризующий статистические свойства пропускания экрана.

Решение. Записываем с помощью (13.63) разность

$$u(\boldsymbol{\rho}, z) - \bar{u}(\boldsymbol{\rho}, z) = \int \left(m(\boldsymbol{\kappa}) - \langle m(\boldsymbol{\kappa})\rangle\right)\exp\left(i\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{\rho} + ik_z z\right)\frac{d^2\kappa}{(2\pi)^2} \tag{1}$$

и составляем искомую корреляционную функцию:

$$K_u\left(\boldsymbol{\rho}, z; \boldsymbol{\rho}', z'\right) = \int \left\langle \left(m(\boldsymbol{\kappa}) - \langle m(\boldsymbol{\kappa})\rangle\right)\left(m^*\left(\boldsymbol{\kappa}'\right) - \langle m^*\left(\boldsymbol{\kappa}'\right)\rangle\right)\right\rangle \times$$
$$\times \exp\left\{i\left(\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\kappa}'\cdot\boldsymbol{\rho}'\right) + ik_z z - ik_z^* z'\right\}\frac{d^2\kappa d^2\kappa'}{(2\pi)^4} \tag{2}$$

Далее вычисляем коррелятор, входящий в подынтегральное выражение (2), с помощью второй формулы (13.63):

$$\left\langle \left(m(\boldsymbol{\kappa}) - \langle m(\boldsymbol{\kappa})\rangle\right)\left(m^*\left(\boldsymbol{\kappa}'\right) - \langle m^*\left(\boldsymbol{\kappa}'\right)\rangle\right)\right\rangle =$$
$$= \int K_m\left(\left|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'\right|\right)\exp\left(-i\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{\rho} + i\boldsymbol{\kappa}'\cdot\boldsymbol{\rho}'\right)d^2\rho d^2\rho' \tag{3}$$

Введя новые переменные интегрирования $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}', \boldsymbol{R} = \left(\boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\rho}'\right)/2$ и использовав формулу (1.219), $\int \exp\left(-i\left(\boldsymbol{\kappa} - \boldsymbol{\kappa}'\right)\cdot\boldsymbol{R}\right)d^2R = (2\pi)^2\delta\left(\boldsymbol{\kappa} - \boldsymbol{\kappa}'\right)$, находим с помощью (13.67)

$$\left\langle \left(m(\boldsymbol{\kappa}) - \langle m(\boldsymbol{\kappa})\rangle\right)\left(m^*\left(\boldsymbol{\kappa}'\right) - \langle m^*\left(\boldsymbol{\kappa}'\right)\rangle\right)\right\rangle = (2\pi)^2\left\langle m^2\right\rangle_{\boldsymbol{\kappa}}\delta\left(\boldsymbol{\kappa} - \boldsymbol{\kappa}'\right). \tag{4}$$

Это позволяет записать (2) в виде

$$K_u\left(\boldsymbol{\rho}, z; \boldsymbol{\rho}', z'\right) = \int \left\langle m^2\right\rangle_{\kappa}\exp\left\{i\boldsymbol{\kappa}\cdot\left(\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}'\right) + ik_z z - ik_z^* z'\right\}\frac{d^2\kappa}{(2\pi)^2} \tag{5}$$

Здесь постоянная распространения $k_z = \sqrt{k^2-\kappa^2}$ становится чисто мнимым числом при $\kappa > k$. Но при $z, z' \gg \lambda$ эта область значений κ вносит экспоненциально малый вклад в интеграл. Поэтому ее можно исключить из
интегрирования. В итоге получим корреляционную функцию, зависящую от разности координат $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}', \zeta = z - z'$:

$$K_u(\boldsymbol{r},\zeta)=\int\limits_{\kappa\leqslant k}\left\langle m^2\right\rangle_\kappa\exp\left\{i\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{r}+i\sqrt{k^2-\kappa^2}\zeta\right\}\frac{d^2\kappa}{(2\pi)^2} \tag{13.68}$$

(напоминаем, что здесь r - поперечный радиус-вектор, лежащий в плоскости $z=\text{const}$).

Здесь мы рассмотрели лишь самые простые задачи о распространении электромагнитных волн в случайно-неоднородных средах. Более подробная теория изложена в книгах [Рытов (1978); Татарский (1967); Басс и Фукс (1972); Исимару (1981)]. См. также обзор [Кузьмин и Романов (1996)].

Задачи

13.21. Пользуясь формулой (13.46), вычислить зависимость от координат корреляционного тензора $K_{\lambda\nu}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}',\omega)$ для компонент векторного потенциала на заданной частоте ω в однородной (безграничной) изотропной среде.

13.22. Для однородной изотропной равновесной среды вычислить корреляционные тензоры

$$\langle E_\lambda(\boldsymbol{r},t)E_\nu(\boldsymbol{r}',t')\rangle_{k\omega},\quad\langle E_\lambda(\boldsymbol{r},t)B_\nu(\boldsymbol{r}',t')\rangle_{k\omega},\quad\langle B_\lambda(\boldsymbol{r},t)B_\nu(\boldsymbol{r}',t')\rangle_{k\omega}$$

аналогичные тензору $K_{\lambda\nu}(\boldsymbol{k},\omega)\equiv\langle A_\lambda(\boldsymbol{r},t)A_\nu(\boldsymbol{r}',t')\rangle_{k\omega}$, который определяется уравнениями (13.46), (13.43).

13.23 Для случая прозрачной равновесной среды ($\operatorname{Im}\varepsilon\to 0$, $\operatorname{Im}\mu\to 0$) вычислить спектральную плотность энергии $\rho(\omega)$ равновесного электромагнитного поля.

13.24. Записать коэффициент экстинкции (13.53) для газов в оптической области спектра через коэффициент преломления $n=\sqrt{\varepsilon}$, считая $n-1\ll 1$ и пренебрегая зависимостью ε от температуры.

13.25. В области объемом V возбуждены стохастические флуктуации среды, которые можно описать заданной корреляционной функцией диэлектрической проницаемости $K_\varepsilon(|\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|)=\langle\Delta\varepsilon(\boldsymbol{r}_1)\Delta\varepsilon(\boldsymbol{r}_2)\rangle$ обладающей (в пределах объема V) свойствами однородности и изотропии. Корреляционная длина l_c мала по сравнению с линейным размером L рассматриваемого объема. В приближении однократного рассеяния (см. пример 13.5) выразить сечение рассеяния электромагнитной волны через корреляционную функцию диэлектрической проницаемости.

13.26. Вычислить дифференциальное и полное сечения рассеяния электромагнитной волны, если корреляционная функция диэлектрической проницаемости (см. предыдущую задачу) имеет гауссову форму $K_\varepsilon(r)=K_0\exp(-r^2/2l_c^2)$, где K_0, l_c - постоянные.

13.27. Пусть флуктуации пропускания хаотического экрана мелкомасштабны по сравнению с длиной распространяющейся волны, т. е. $kl_m\ll 1$. Исследовать на основе формулы (13.68) корреляционные свойства поля за экраном в поперечном ($\zeta=0$) и продольном ($\boldsymbol{r}=0$) направлениях. Оценить для этих случаев корреляционную функцию K_u и соответствующие корреляционные длины $l_\perp, l_\parallel$.

13.28. Исследовать противоположный предельный случай крупномасштабных флуктуаций хаотического экрана $kl_m\gg 1$. Вычислить приближенно корреляционные функции и оценить поперечную и продольную корреляционные длины.

13.29. Для случая крупномасштабных флуктуаций хаотического экрана ($kl_m\gg 1$) с гауссовским спектром $\langle m^2\rangle_\kappa=\langle m^2\rangle_0\exp(-\kappa^2 l_m^2/2)$ вычислить трехмерную корреляционную функцию $K_u(\boldsymbol{r},\zeta)$. Оценить продольную и поперечную длины корреляции.

13.2.3 13.3. Waves in Nonlinear and Active Media

С нелинейными волнами мы уже имели дело в разделе 10.3, посвященном магнитной гидродинамике. К их числу относятся, в частности, простые волны Римана и ударные волны, распространяющиеся в электропроводящей среде с магнитным полем. Поэтому в настоящем разделе мы рассмотрим в первую очередь некоторые типы нелинейных волн в плазме.

Уравнение Бюргерса. Пусть имеется одномерная волна с плоским фронтом, распространяющаяся в проводящей среде вдоль внешнего магнитного поля (ось Ox). В отличие от задач, рассмотренных в разделе 10.3, учтем здесь диссипацию энергии волны и ее нелинейность, считая их малыми эффектами. В рассматриваемой геометрии магнитное поле не влияет на движение вещества, и его можно описать одномерными уравнениями (10.24), (10.23) и (10.26),

$$\partial_t \tau + u\partial_x \tau + \tau \partial_x u = 0 \tag{13.69}$$

$$\partial_t u + u\partial_x u = -\tau^{-1}\partial_x p + \nu \partial_x^2 u \tag{13.70}$$

$$\partial_t s + u\partial_x s = (\chi/\tau T)\partial_x^2 T \tag{13.71}$$

причем в последнем уравнении отброшен в правой части член, пропорциональный $(\partial_x u)^2$, который имеет третий порядок малости. Здесь в целях сокращения письма мы обозначаем частные производные символами ∂_x, ∂_t и т. д., уже применявшимися в главе 4. С помощью уравнения состояния $\tau = \tau(p, s)$ получим

$$\partial_t \tau + u\partial_x \tau = (\partial_p \tau)_s (\partial_t p + u\partial_x p) + (\partial_s \tau)_p (\partial_t s + u\partial_x s)$$

Использовав последнее равенство, получим из (13.69) и (13.71)

$$\partial_t p + u\partial_x p + (\partial_\tau p)_s \tau \partial_x u = -(\chi/\tau T)(\partial_\tau p)_s (\partial_s \tau)_p \partial_x^2 T \tag{13.72}$$

Далее используем приближенное равенство $\partial_x^2 T \approx (\partial_p T)_s \partial_x^2 p$ (остальные слагаемые дадут в уравнении (13.72) члены третьего порядка) и термодинамическое тождество $T\left(c_V^{-1} - c_p^{-1}\right) = -(\partial_\tau p)_s (\partial_p T)_s (\partial_s \tau)_p$. С помощью этих равенств приводим уравнение (13.72) к виду

$$\partial_x u + \tau^{-1}(\partial_\tau p)_s (\partial_t p + u\partial_x p) = \chi \tau_0^{-2} c_s^{-2}\left(c_V^{-1} - c_p^{-1}\right)\partial_x^2 p \tag{13.73}$$

Здесь в правую часть подставлены невозмущенные величины τ_0 и $c_s^2 = (\partial_\tau p)_{s0}$.

Теперь исключим из уравнений (13.70) и (13.73) переменные u и τ и получим одно уравнение, которое будет содержать только переменную часть давления $p' = p - p_0$ и невозмущенные величины. При этом будем учитывать в левых частях уравнений только члены не выше второго порядка малости, как уже сделано в правых частях. Воспользуемся тем, что в квадратичных членах можно принять те же соотношения между малыми возмущениями, которые выполняются в линейной теории, т. е. для звуковых волн малой амплитуды:

$$u \approx c_s \tau'/\tau_0 \approx p'/c_s \tau_0, \quad \tau \approx \tau_0 + p'/c_s^2$$

$$\tau^{-1}(\partial_\tau p)_s^{-1} \approx c_s^{-2}\tau_0^{-1} + p'/c_s^4 \tau_0^2 - \tau^0 \left(\partial_p^2 V\right)_s p'$$

где $V = 1/\tau$ - удельный объем. С помощью этих соотношений записываем уравнения (13.70), (13.73) в виде

$$\partial_t u + \tau_0^{-1}\partial_x p' = \nu\left(c_s\tau_0\right)^{-1}\partial_x^2 p'$$
$$\partial_x u + c_s^{-2}\tau_0^{-1}\partial_t p' = -c_s\tau^{(}\left(\partial_p^2 V\right)_s p'\partial_x p' + \left(\chi/\tau_0^2 c_s^2\right)\left(c_V^{-1} - c_p^{-1}\right)\partial_x^2 p'$$

Продифференцировав первое из этих уравнений по x, второе по t и вычитая их друг из друга, получим

$$\left(\partial_x - c_s^{-1}\partial_t\right)\left(\partial_x + c_{s.}^{-1}\partial_t\right)p' = 2\partial_x\left[ac_s^2\partial_x^2 p' - bc_s^{-1}p'\partial_x p'\right] \tag{13.74}$$

Здесь a и b - постоянные коэффициенты:

$$a = 2^{-1}c_s^{-3}\left[\nu + \chi V\left(c_V^{-1} - c_p^{-1}\right)\right], \quad b = \left(c_s^2/2V^2\right)\left(\partial_p^2 V\right)_s \tag{13.75}$$

Для волны, распространяющейся вдоль оси Ox, естественно ожидать зависимости от координаты и времени вида $p'\left(x - c_s t, \epsilon x\right)$, где ϵ - малый параметр (в меру малости нелинейности и диссипации). Поэтому оператор $\partial_x + c_s^{-1}\partial_t$ имеет порядок ϵ, а оператор $\partial_x - c_s^{-1}\partial_t \approx 2\partial_x$ с точностью до членов порядка ϵ. Мы видим, таким образом, что уравнение (13.74) будет удовлетворяться, если

$$\partial_t p' + c_s\partial_x p' + bp'\partial_x p' = ac_s^3\partial_x^2 p' \tag{13.76}$$

Последнему уравнению можно придать более простую форму; если перейти к новым независимым переменным $t, \xi = x - c_s t$ и к новой зависимой переменной $P(\xi, t) = bp'(x, t)$:

$$\partial_t P + P\partial_\xi P = \kappa\partial_\xi^2 P \tag{13.77}$$

где $\kappa = ac_s^2$. Мы получили уравнение Бюргерса, которое описывает волны в сплошных средах с учетом их слабой нелинейности и диссипации. Мы получили его в результате довольно трудоемких вычислений, исходя из некоторой конкретной модели сплошной среды. Но область применения этого уравнения намного шире, чем та, которая следует из нашего рассмотрения. Оно получается и во многих других случаях. Более подробные сведения об этой и других нелинейных проблемах можно получить из книги Уизема (1977) и других источников, приведенных в конце раздела.

Пример 13.8. С помощью уравнения (13.76) вычислить профиль скорости и оценить толщину фронта стационарной слабой магнитогидродинамической ударной волны, распространяющейся параллельно внешнему магнитному полю. Давление изменяется от значения p_1 вдали перед фронтом до $p_2 > p_1$ за фронтом.

Решение. Рассматриваем волну, движущуюся в положительном направлении оси Ox. Отсчитываем добавку к давлению p' от невозмущенного значения p_1 перед фронтом. При $t = \text{const}$ имеем граничные условия $p' \to 0$ при $x \to +\infty$ (перед фронтом), $p' \to p_2 - p_{1.} = \Delta p$ при $x \to -\infty$ (за фронтом). Для стационарного профиля следует искать решение в виде $p'\left(x - u_{sh}t\right)$, где $u_{sh} > c_s$ - неизвестная скорость фронта. Обозначив аргумент через $\zeta = x - u_{sh}t$, получаем из (13.76)

$$\partial_\zeta\left[\left(c_s - u_{sh}\right)p' + \frac{b}{2}p'^2 - \kappa\partial_\zeta p'\right] = 0 \tag{1}$$

и находим первый интеграл этого уравнения:

$$\kappa\partial_\zeta p' = \frac{b}{2}p'^2 + \left(c_s - u_{sh}\right)p' + \text{ const.} \tag{2}$$

Из граничных условий находим $\text{const} = 0, u_{sh} = c_s + b\Delta p/2$ и записываем (2) для полного давления $p = p_1 + p'$ в виде

$$\frac{dp}{d\zeta} = \frac{b}{2\kappa}\,(p-p_1)\,(p-p_2) \tag{3}$$

Это уравнение имеет решение, удовлетворяющее поставленным граничным условиям:

$$p(\zeta) = \frac{1}{2}\,(p_1+p_2) + \frac{1}{2}\,(p_1-p_2)\,\mathrm{th}(\zeta/\delta) \tag{4}$$

где

$$\delta = 4\kappa/b\Delta p = 2\kappa/\,(u_{sh}-c_s) \tag{5}$$

представляет собой толщину фронта слабой ударной волны.
Необходимо отметить, что сама возможность существования стационарных волн связана с одновременным действием двух эффектов: нелинейного укручения фронта и диссипации, которые действуют в противоположных направлениях и компенсируют изменение профиля волны. Эффект нелинейности без диссипации не позволяет получить стационарные решения - он приводит к укручению переднего фронта и образованию разрыва (см. раздел 10.3, задачу 10.69). На спектральном языке это означает рождение коротковолновых гармоник в спектре. Диссипативные эффекты ослабляют в первую очередь гармоники с большими k, так как вторая производная в (13.77) дает зависимость вида k^2. Диссипация без нелинейности приводит к неограниченному диффузионному расплыванию возмущения (см. пример 10.6). Взаимное уравновешивание нелинейного укручения и диффузионного расплывания делает возможным существование нелинейных стационарных волн в диссипативной среде.

Диссипативный коэффициент κ можно оценить как произведение Λc_s, где Λ - средний пробег частиц между столкновениями. Это дает для толщины фронта ударной волны оценку $\delta \approx \Lambda/(M-1)$, где $M = u_{sh}/c_s$ число Маха. Таким образом, толщина фронта слабой ($M-1 \ll 1$) ударной волны намного больше свободного пробега частиц. При экстраполяции этой
оценки на случай $M-1 \approx 1$ получим $\delta \approx \Lambda$. Такое значение можно рассматривать как наименьшее из возможных, поскольку для преобразования энергии потока во внутреннюю энергию за фронтом волны требуется по крайней мере одно или несколько столкновений частиц.

Но если ударная волна распространяется в плазме, которая всегда многокомпонентна (электроны и ионы разных типов, причем $m_e \ll m_i$), то структура фронта усложняется ввиду медленного обмена энергией и импульсом между электронами и ионами. Толщина ионного скачка температуры определяется пробегом Λ_i ионов, тогда как выравнивание температур между электронами и ионами происходит на большей длине $\Lambda_{ei} \approx (m_i/m_e)^{1/2}\,\Lambda_i$.

Уравнение Кортевега-де Вриза. Исследуем слабонелинейные движения в двухкомпонентной холодной замагниченной плазме, основываясь на уравнениях, полученных в примере 10.9:

$$\partial_t \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} = (4\pi n m_i)^{-1}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{B} \tag{13.78}$$

$$\partial_t \boldsymbol{B} = \mathrm{rot}(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B}) - \mathrm{rot}\,\nu_m\left(0,51\,\mathrm{rot}_{\parallel}\,\boldsymbol{B} + \mathrm{rot}_{\perp}\,\boldsymbol{B}\right) - \mathrm{rot}(4\pi e n)^{-1}(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{B}) -$$

$$-\left(m_e c/e^2\right)\left\{\partial_t(\boldsymbol{j}/n) + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)(\boldsymbol{j}/n) + n^{-1}(\boldsymbol{j}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} - (en)^{-1}(\boldsymbol{j}\cdot\nabla)(\boldsymbol{j}/n)\right\} \tag{13.79}$$

где $\boldsymbol{j} = (c/4\pi)\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{B}$.
Пусть $\boldsymbol{B}_0$ - внешнее однородное поле, а $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{B} - \boldsymbol{B}_0$ - поле волны. Сначала рассмотрим

линеаризованную систему, считая $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{u}$ малыми добавками, пропорциональными $\exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - i\omega t)$. Выбрав ось Ox вдоль $\boldsymbol{k}$, а $\boldsymbol{B}_0$ лежащим в плоскости xz, получим после исключения $\boldsymbol{u}$ систему алгебраических уравнений для b_y, b_z:

$$b_y\left[(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}_A)^2 - i\nu_m k^2\omega - \omega^2\left(1 + c^2k^2/\omega_{0e}^2\right)\right] - b_z\left(ick\omega/\omega_{0i}\right)(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}_A) = 0 \tag{13.80}$$

$$b_y\left(ick\omega/\omega_{0i}\right)(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}_A) + b_z\left[v_A^2k^2 - i\nu_m k^2\omega - \omega^2\left(1 + c^2k^2/\omega_{0e}^2\right)\right] = 0 \tag{13.81}$$

При $\omega_{0e}, \omega_{0i} \to \infty, \nu_m \to 0$ получаем из предыдущих уравнений законы дисперсии $\omega(\boldsymbol{k}) = v_A k\cos\theta, \omega(k) = v_A k$ для альвеновской и быстрой магнитозвуковой волн соответственно.

Рассмотрим нелинейное обобщение быстрой магнитозвуковой волны. В приближении $ck \ll \omega_{0i}, \nu_m k^2 \ll \omega, \theta \gg ck/\omega_{0i}$ находим для нее закон дисперсии с малыми дисперсионной и диссипативной поправками:

$$\omega(k) = v_A k - \mu k^3 - i\nu_m k^2/2, \quad \mu = v_A\left(c^2/2\omega_{0i}^2\right)\left(m_e/m_i - \cot^2\theta\right) \tag{13.82}$$

С помощью полученного дисперсионного соотношения нетрудно записать дифференциальное уравнение для b_z, учитывающее дисперсионную
поправку и диссипацию. Компонента b_z играет главную роль в волне, поскольку $b_x = 0$ в силу условия $\operatorname{div}\boldsymbol{b} = 0$, а $b_y \ll b_z$ в меру малости дисперсионной поправки, как следует из (13.80), (13.81). Представляем (13.82) в виде

$$\left[-i\omega + v_A ik + \mu(ik)^3\right] b_z = (\nu_m/2)(ik)^2 b_z \tag{13.83}$$

и переходим к координатно-временному представлению:

$$\partial_t b_z + v_A\partial_x b_z + \mu\partial_x^3 b_z = \frac{1}{2}\nu_m\partial_x^2 b_z \tag{13.84}$$

Это уравнение, однако, не содержит нелинейности. Чтобы учесть нелинейные члены низшего порядка, отвечающие квадратичной нелинейности, используем уравнение (13.79) в проекции на ось Oz:

$$\begin{aligned}\partial_t b_z = {} & \boldsymbol{e}_z\operatorname{rot}(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B}) + \nu_m\Delta b_z - \\ & - (4\pi e n)^{-1}\boldsymbol{e}_z\cdot\operatorname{rot}(\operatorname{rot}\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{B}_0) - c^2/\omega_{0e}\partial_t(\boldsymbol{e}_z\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{b})\end{aligned} \tag{13.85}$$

При записи этого уравнения учтено, что нелинейность, дисперсию и диссипацию мы рассматриваем как три малых аддитивных эффекта, поэтому нелинейные слагаемые в дисперсионных и диссипативных членах отброшены. Нетрудно проверить, что если исключить $\boldsymbol{u}$ из (13.85) с помощью (13.78), сохранив лишь линейные члены, и использовать связь между производными по координате и времени, вытекающую из дисперсионного уравнения (13.83), то получится уравнение (13.84). Для включения в уравнение нелинейных поправок следует сохранить в (13.85) члены с квадратичной нелинейностью вида $\operatorname{rot}\left(\boldsymbol{u}^{(1)}\times\boldsymbol{b} + \boldsymbol{u}^{(2)}\times\boldsymbol{B}_0\right)$, где $u^{(1)}$ и $u^{(2)}$ пропорциональны b_z и b_z^2 соответственно.

Запишем уравнение (13.78) с точностью до членов второго порядка в виде

$$\partial_t\left(\boldsymbol{u}^{(1)} + \boldsymbol{u}^{(2)}\right) = (4\pi n m_i)^{-1}(\boldsymbol{e}_x\times\partial_x\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{B}_0 + \boldsymbol{b}) - u_x^{(1)}\partial_x\boldsymbol{u}^{(1)}$$

Заменив $\partial_t \to -v_A\partial_x$, находим $\boldsymbol{u}^{(1)} = -(4\pi n m_i)^{-1/2}(\boldsymbol{e}_x\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{b}_0$, где $\boldsymbol{b}_0 = \boldsymbol{B}_0/B_0$. При вычислении $\boldsymbol{u}^{(2)}$ отбрасываем малую компоненту b_y:

$$\boldsymbol{u}^{(2)} = (4\pi n m_i)^{-1/2} \left[e_x \left(1 + \sin^2\theta\right) - \boldsymbol{e}_z \sin\theta\cos\theta\right] \left(b_z^2/2B_0\right)$$

Вычислив rot $\left(\boldsymbol{u}^{(1)} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{u}^{(2)} \times \boldsymbol{B}_0\right)$ и включив эту величину в правую часть (13.85), получим вместо (13.84) нелинейное уравнение

$$\partial_t b_z + v_A \left(1 + 4\sin\theta b_z/B_0\right) \partial_x b_z + \mu\partial_x^3 b_z = \kappa\partial_x^2 b_z \tag{13.86}$$

где $\kappa = \nu_m/2$. Уравнение упрощается путем введения новой независимой переменной $\xi = x - v_A t$ и новой неизвестной функции $u(\xi, t) = 4c_A \sin\theta b_z(\xi, t)/B_0$

$$\partial_t u + u\partial_\xi u + \mu\partial_\xi^3 u = \kappa\partial_\xi^2 u \tag{13.87}$$

В отсутствие дисперсионного эффекта ($\mu = 0$) это уравнение превращается в уравнение Бюргерса (13.77). Если же отсутствует диссипация ($\kappa = 0$), то оно переходит в уравнение Кортевега-де Вриза (КдВ)

$$\partial_t u + u\partial_\xi u + \mu\partial_\xi^3 u = 0 \tag{13.88}$$

Оно было получено впервые еще в 1895 г. для гравитационных волн в жидкости, находящейся в канале конечной глубины. В последние десятилетия выяснилось, что область применимости уравнения КдВ весьма широка.

Пример 13.9. Исследовать на основе уравнения КдВ (т.е. в отсутствие диссипачии) нелинейные стационарные волны в холодной плазме, зависящие от x и t в комбинации $\zeta = x - c_w t$, где c_w - скорость волны, подлежащая определению. Получить общее решение для таких волн и проанализировать частное решение, удовлетворяющее условию $u(\zeta) \to 0$ при $\zeta \to \pm\infty$ (уединенная волна, солитон).

Решение. Из уравнения (13.88) после подстановки в него решения получим

$$\left(-\Delta c u + u^2/2 + \mu u''\right)' = 0, \quad \Delta c = c_w - v_A \tag{1}$$

где штрих обозначает производную по ζ. Интегрируя (1), получаем уравнение, формально совпадающее с уравнением классической механики:

$$\mu u'' = K + \Delta c u - \frac{1}{2}u^2 = -\frac{\partial W}{\partial u} \tag{2}$$

где K - постоянная интегрирования;

$$W(u) = \frac{u^3}{6} - \frac{\Delta c u^2}{2} - Ku \tag{3}$$

- «потенциальная энергия» частицы, зависящая от ее «обобщенной координаты» u. Роль времени играет ζ. Постоянную K нетрудно обратить в нуль заменой $u \to u + u_0$; такая замена, как следует из (1), означает переход в систему, движущуюся со скоростью $v_A - u_0$. В дальнейшем считаем $K = 0$.

Основываясь на механической аналогии, нетрудно провести интегрирование до конца. С помощью интеграла «энергии» $\mu u^2 + W(u) = E = \text{const}$ записываем решение уравнения (2) в квадратурах

$$\int \frac{du}{\sqrt{P(u)}} = \pm\frac{\zeta}{\sqrt{3\mu}}, \qquad \text{где} \qquad P(u) = 6E + 3\Delta c u^2 - u^3 \tag{4}$$

- кубический полином. Решение (4) будет иметь физический смысл только при $P(u) \geqslant 0$ и u - ограниченном (а в случае холодной плазмы требуется еще $|u| \ll v_A$). Постоянную интегрирования, определяемую начальным отсчетом координаты ζ, мы опустили. Решение записано для $\mu > 0$, что, согласно (13.82), соответствует отрицательной поправке к линейному закону дисперсии.

Уединенная волна получается при $E = 0$. Если $u \geqslant 0$, то условие $P(u) = u^2(3\Delta c - u) \geqslant 0$ требует, чтобы было $\Delta c > 0$ и $0 \leqslant u \leqslant 3\Delta c$. В этом случае

(5)
$\int \frac{du}{\sqrt{P(u)}} = -(3\Delta c)^{-1/2} \ln \left\{ \left[(3\Delta c)^{1/2} - (3\Delta c - u)^{1/2}\right] \left[(3\Delta c)^{1/2} + (3\Delta c + u)^{1/2}\right] \right\}$
и решение принимает вид

$$u(x,t) = 3\Delta c \, \mathrm{ch}^{-2} \left[(\Delta c/4\mu)^{1/2} (x - c_w t)\right] \tag{5}$$

Солитон представляет собой в данном случае горб магнитного поля, который возвышается над окружающим фоном на величину $b_z = B_z - B_0 = B_0 u / 4 v_A \sin\theta$ и движется со скоростью $c_w = v_A + \Delta c$. С возмущением магнитного поля связаны возмущения скорости плазмы и ее плотности. Величина Δc - превышение скорости солитона над скоростью v_A линейной магнитозвуковой волны - связана с амплитудой u_0 соотношением

$$u_0 = 3\Delta c \tag{6}$$

Ширина солитона

$$\delta = 2(\mu/\Delta c)^{1/2} = 2\,(3\mu/u_0)^{1/2} \tag{7}$$

обратно пропорциональна корню квадратному из его амплитуды. Для солитона, распространяющегося поперек магнитного поля ($\theta = \pi/2$) имеем $\delta = (c/\omega_{0e})\,(3B_0/2b_0)$, где b_0 - высота магнитного горба, а параметр $a_D = c/\omega_{0e}$ определяет характерную длину дисперсии.

При $u < 0$ условие $P(u) \geqslant 0$ выполняется для $u \leqslant -3\Delta c$. В этом случае

$$u(x,t) = -3\Delta c \, \mathrm{tg}^2 \left[(\Delta c/4\mu)^{1/2} (x - c_w t)\right] \tag{8}$$

Это решение не удовлетворяет условию ограниченности и поэтому физически нереализуемо.

В предыдущем примере рассмотрена уединенная нелинейная волна солитон. Как выяснилось в последние десятилетия, солитоны играют значительную роль в физике нелинейных волновых явлений. Это определяется следующими двумя обстоятельствами: а) при взаимодействии солитоны во многих случаях сохраняют асимптотически свою форму и скорость, т. е. ведут себя как частицы; б) произвольное нелинейное начальное возмущение при определенных условиях эволюционирует в некоторую совокупность солитонов (и волновых «хвостов»). Это дает основание рассматривать солитонные решения как своего рода «собственные функции» нелинейного уравнения, через которые можно выражать его решения более общего характера. Солитонные решения имеет не только уравнение КдВ, но и другие нелинейные уравнения, см. многочисленные учебные пособия и монографии, посвященные этой теме: [Новокшенов (2002); Захаров и др. (1980); Ньюэлл (1989); Додд и др. (1988); Солитоны в действии (1981); Абловиц и Сигур (1987); Ахмедиев и Анкевич (2003); Ильичев (2003)]. Любопытно, что солитон как физическое явление (движущийся без расплывания водяной горб в узком канале) был наблюден и описан шотландским ученым и инженером Скоттом Расселом еще в 1834 г., задолго до создания математической теории солитонов.

Нелинейное уравнение Шредингера. Выше мы получили уравнение КдВ для холодной плазмы, в которой $c_s^2 \ll v_A^2$. Если внутренняя энергия и энергия магнитного поля одного порядка величины, то линейные и нелинейные волны быстро затухают вследствие их резонансного взаимодействия с ионами (затухание Ландау). Исключение составляют только волны, распространяющиеся вдоль внешнего магнитного поля или под прямым углом к нему. Поперечное распространение по-прежнему подчиняется уравнению КдВ, но продольное распространение описывается другим нелинейным уравнением (см. Вайнштейн и др., 1989):

$$\partial_\tau h + i\partial_\xi^2 h + \partial_\xi \left(h^2 h^*\right) = 0 \tag{13.89}$$

$\tau = \omega_{Bi} t/2, \xi = x/r_A - \omega_{Bi} t, h = \left(b_y + ib_z\right)/B_0(1-\beta)^{1/2}, \omega_{Bi} = eB_0/m_i c$ - циклотронная частота ионов, $r_A = v_A/\omega_{Bi}, \beta = c_s^2/v_a^2$, причем $b/(1-\beta)^{1/2} \ll B_0$. Уравнение (13.89) называется нелинейным уравнением Шредингера с производной в кубическом члене.

Нелинейный отклик вещества на высокочастотное поле. В разделах 8.3 о сегнетоэлектриках, 9.3 о ферромагнетиках и в настоящем разделе о волнах в плазме мы уже рассматривали нелинейную реакцию среды на внешнее возмущение. Все эти явления были свойственны статическим или квазистатическим (медленно меняющимся) полям. Но высокочастотные поля, создаваемые лазерами, могут приближаться или даже превышать внутриатомные поля в конденсированном веществе ($E_a \approx 10^8 \div 10^9$ В/ см). В этих условиях предположение о линейной связи электрической поляризации с напряженностью поля (см. формулу (7.24)) теряет силу и уравнения связи следует записывать в более общей форме.

В изотропной недиспергирующей среде его можно записать в виде

$$P(E) = \alpha E + \alpha^{(3)} E^3 + \alpha^{(5)} E^5 + \ldots \tag{13.90}$$

где α - линейная электрическая восприимчивость, с которой мы имели дело раньше; $\alpha^{(3)}, \alpha^{(5)} \ldots$ - нелинейные восприимчивости рассматриваемой среды. В более общем случае анизотропной диспергирующей среды (но без пространственной дисперсии) уравнение связи нужно записать как обобщение причинного соотношения типа (11.66):

$$P_\mu(t) = \int_0^\infty \alpha_{\mu\nu}(\tau) E_\nu(t-\tau) d\tau + \int_0^\infty d\tau_1 \int_0^\infty d\tau_2 \alpha^{(2)}_{\mu\nu\kappa}\left(\tau_1, \tau_2\right) E_\nu\left(t-\tau_1\right) E_\kappa\left(t-\tau_2\right) +$$
$$+ \int_0^\infty d\tau_1 \int_0^\infty d\tau_2 \int_0^\infty d\tau_3 \alpha^{(3)}_{\mu\nu\kappa\sigma}\left(\tau_1, \tau_2, \tau_3\right) E_\nu\left(t-\tau_1\right) E_\kappa\left(t-\tau_2\right) E_\sigma\left(t-\tau_3\right) + \ldots \tag{13.91}$$

Переход к гармоникам Фурье позволяет записать это уравнение связи в эквивалентной форме

$$P_m(\omega) = \alpha_{\mu\nu}(\omega) E_\nu(\omega) + \int_{-\infty}^\infty \frac{d\omega_1}{2\pi} \alpha^{(2)}_{\mu\nu\kappa}\left(\omega_1, \omega-\omega_1\right) E_\nu\left(\omega_1\right) E_\kappa\left(\omega-\omega_1\right) +$$
$$+ \int_{-\infty}^\infty \frac{d\omega_1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{d\omega_1}{2\pi} \alpha^{(3)}_{\mu\nu\kappa\sigma}\left(\omega_1, \omega_2, \omega-\omega_1-\omega_2\right) E_\nu\left(\omega_1\right) E_\kappa\left(\omega_2\right) E_\sigma\left(\omega-\omega_1-\omega_2\right) + \ldots \tag{13.92}$$

Здесь нелинейные восприимчивости определены по аналогии с (11.67):

$$\alpha^{(2)}_{\mu\nu\kappa}(\omega_1,\omega_2)=\int\limits_0^\infty \alpha^{(2)}(\tau_1,\tau_2)\exp\left(i\omega_1\tau_1+i\omega_2\tau_2\right)d\tau_1 d\tau_2 \tag{13.93}$$

и аналогично величины более высокого порядка. Из формулы (13.92) следует, что в нелинейной среде частота вектора поляризации может существенно отличаться от частоты электрического поля (см. также ниже пример 13.10).

Классическая модель нелинейной восприимчивости - ангармонический осциллятор. Мы видели в разделе 11.1 (см. задачи 11.12, 11.13), что классическая модель связанных электронов в виде линейных осцилляторов с затуханием дает правильную качественную картину электрической восприимчивости среды в слабых полях. Используем модель ангармонического (нелинейного) осциллятора с затуханием для оценки нелинейных восприимчивостей.

Пример 13.10. Заряженный изотропный ангармонический осиилляор находится во внешнем электрическом поле с линейной поляризачией $E(t) = E_0\cos\omega t$. Неоднородностью поля в пределах области колебаний осиилляора пренебрегаем. Амплитуда колебаний осчиллятора мала и в разложении его потенчиальной энергии достаточно учесть низший ангармонический член. Пусть диэлектрическая среда состоит из нелинейных осиилляторов с плотностью N на единицу объема. Вычислить электрическую поляризацию среды и ее линейную и нелинейную восприимчивости.

Решение. Выберем ось Ox вдоль направления электрического поля и запишем потенциальную энергию осциллятора с учетом ангармонических членов:

$$U(x)\approx\frac{1}{2}m\omega_0^2x^2+\frac{1}{3}mqx^3+\ldots \tag{1}$$

Здесь m - масса электрона, ω_0 - собственная частота гармонического осциллятора, q - параметр нелинейности. Если потенциальная энергия - четная функция координат, то $q = 0$ и следует учесть член четвертого порядка в разложении потенциальной энергии. Уравнение движения осциллятора с учетом выписанных членов имеет вид

$$\ddot{x}+\gamma\dot{x}+\omega_0^2x+qx^2=\frac{e}{m}E(t) \tag{2}$$

где слагаемое $\gamma\dot{x}$ описывает затухание осциллятора. Действием на электрон магнитного поля пренебрегаем.

Полученное уравнение будем решать методом возмущений, считая ангармонический член малым по сравнению с гармоническим: $|qx| \ll \omega_0^2$. Ищем решение в виде $x = x_l + x_{nl}$, где x_{nl} - малая нелинейная поправка к решению x_l линейного уравнения:

$$\ddot{x}+\gamma\dot{x}+\omega_0^2x=\frac{e}{m}E(t) \tag{3}$$

Для монохроматического поля $E(t) = E_0\cos\omega t$ решение уравнения (3) на достаточно больших временах $t \gg 1/\gamma$ имеет вид

$$x_l(t)=\frac{1}{2}E_0\left(\beta(\omega)e^{-i\omega t}+\beta^*(\omega)e^{i\omega t}\right),\qquad \text{где}\qquad \beta(\omega)=\frac{e}{m}\frac{1}{\omega_0^2-\omega^2+i\omega\gamma} \tag{4}$$

- линейная поляризуемость осциллятора. Уравнение для малой нелинейной добавки получаем из (2), оставляя в нелинейном слагаемом только полученное линейное решение (4):

$$\ddot{x}_{nl}+\gamma\dot{x}_{nl}+\omega_0^2x_{nl}=-qx_l^2 \tag{5}$$

Решение уравнения (5) имеет вид

$$x_{nl}(t) = x_0 + Ce^{-2i\omega t} + C^* e^{2i\omega t}, \quad x_0 = -\frac{q}{2\omega_0^2}|\beta(\omega)|^2 E_0^2$$
$$C = -\frac{q\beta^2(\omega)E_0^2}{4\left(\omega_0^2 - 4\omega^2 - 2i\gamma\omega\right)} \tag{6}$$

Решения (4) и (5) позволяют найти электрическую поляризацию среды:

$$P(t) = Np(t) = Ne\left(x_l + x_{nl}\right) = P_0 + P_l(t) + P_{nl}(t) \tag{7}$$

Здесь $P_l = Nex_l = (E_0/2)\left[\alpha(\omega)e^{-i\omega t} + \alpha^*(\omega)e^{i\omega t}\right]$ - линейная поляризация среды, меняющаяся с частотой падающей волны; $\alpha(\omega) = Ne\beta(\omega)$. $P_0 = Nex_0 = \alpha^{(2)}(0)E_0^2$ - постоянная нелинейная поляризация, пропорциональная квадрату напряженности поля; нелинейная восприимчивость на нулевой частоте $\alpha^{(2)}(0) = -Nqe|\beta(\omega)|^2/2\omega_0^2$. Она зависит от частоты исходной волны и параметров осциллятора. Наконец, $P_{nl}(t) = Ne\left(Ce^{-2i\omega t} + \right.$ $\left. + C^* e^{2i\omega t}\right)$ - нелинейная поляризация, меняющаяся с удвоенной частотой. Выделяя из этого выражения нелинейную восприимчивость на удвоенной частоте с помощью соотношений $P_{nl}(t) = (1/2)P_{nl}(2\omega)\exp(-2i\omega t) +$ к.с.,
$P_{nl}(2\omega) = \alpha^{(2)}(2\omega)E_0^2$, где к.с. - комплексно сопряженное выражение, находим

$$\alpha^{(2)}(2\omega) = \frac{Nqe\beta^2(\omega)}{2\left(\omega_0^2 - 4\omega^2 - 2i\gamma\omega\right)} \tag{8}$$

Самофокусировка. Рассмотрим на полукачественном уровне еще один нелинейный эффект. В примере 12.7 и в задаче 12.95 о распространении ограниченного пучка света в линейной однородной среде было установлено, что пучок испытывает дифракционное расширение. На расстояниях, превышающих его первоначальную ширину a, пучок приобретает форму конуса с углом при вершине

$$\theta_d \approx \frac{2}{ka} = \frac{\lambda_0}{\pi n_0 a} \tag{13.94}$$

где λ_0 - длина волны в вакууме, n_0 - коэффициент преломления прозрачной среды. Но если ограниченный в поперечном направлении пучок имеет высокую интенсивность, при которой возникает заметная нелинейная поляризация, то коэффициенты преломления внутри пучка и за его пределами будут различными. Пусть снаружи $n = n_0$, а внутри пучка

$$n = n_0 + n_2|A|^2, \quad n_2 > 0 \tag{13.95}$$

где учтена нелинейная поправка, пропорциональная квадрату локальной амплитуды пучка (см. (13.90)). Границу пучка можно рассматривать как границу двух сред с разными коэффициентами преломления. При углах падения лучей на границу, больших угла θ_r полного внутреннего отражения (см. задачу 12.8)

$$\sin\dot{\theta}_r = \frac{n_0}{n_0 + n_2|A|^2} \tag{13.96}$$

лучи будут возвращаться внутрь пучка, т. е. фокусироваться к его оси (см. рис. 13.8).

Можно подобрать такую мощность пучка, при которой эффекты нелинейной фокусировки и дифракционной дефокусировки взаимно уравновесятся и стационарный пучок света будет распространяться без расширения внутри некоторого световода, который он сам создает своим полем. В этом состоит эффект самофокусировки, который

был предсказан теоретически советским ученым Г.А.Аскарьяном в 1962 г. Критическую мощность самофокусировки можно оценить путем сравнения соответствующих углов.

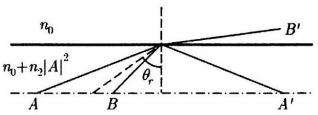


Рис. 13.8

Критический угол θ_r соответствует лучу, наклон которого к оси $\theta_{nl} = \pi/2$ - $-\theta_r$, т. е. $\cos\theta_{nl} = \sin\theta_r$ дается формулой (13.96). При $\theta_{nl} < \theta_d$ дифракционный эффект преобладает, пучок расплывается, но медленнее, чем в линейном случае, рассмотренном в задаче 12.95 . При $\theta_{nl} = \theta_d$ эффекты уравновешены. Если $\theta_{nl} << 1$, то из (13.96) имеем

$$\theta_{nl}^2 = \frac{2n_2|A|^2}{n_0 + n_2|A|^2} \tag{13.97}$$

и, приравнивая эту величину квадрату угла дифракции, оцениваем по порядку величины критическую амплитуду пучка $|A_c|^2 \approx n_0\theta_d^2/2n_2$. Полная критическая мощность пучка, переносимая в единицу времени через его поперечное сечение, дается выражением

$$P_c = \pi a^2\bar{\gamma}_c = \frac{a^2 c n_0^2\overline{E^2}}{4} \approx \frac{c n_0^2\lambda_0^2}{16\pi^2 n_2} \tag{13.98}$$

Полученная мощность определяется длиной волны и свойствами среды, но не зависит от ширины пучка.

Рекомендуемая литература: [Бломберген (1966); Бредов и др. Классическая электродинамика; Ахманов и др. (1981); Ахманов и др. (1988); Ахманов и Никитин (1998); Клышко (1980); Клышко (1986); Рыскин и Трубецков (2000)].

Усиление электромагнитных волн в неравновесных средах. В разделе 11.3 было отмечено, что в равновесных средах всегда происходит диссипация энергии электромагнитных волн, что является следствием второго закона термодинамики. Он приводит к соотношениям

$$\omega\varepsilon''(\omega) \geqslant 0, \quad \omega\mu''(\omega) \geqslant 0 \tag{13.99}$$

для мнимых частей электрической и магнитной проницаемостей. Но эти условия могут не выполняться в неравновесных средах. Их релаксация (переход к равновесию) может сопровождаться раскачкой колебаний, энергия которых будет черпаться из энергии неравновесной среды. Среды, в которых электромагнитные волны усиливаются, называются активными. Рассмотрим один из наиболее простых примеров таких сред - раскачку электрических колебаний в неравновесной холодной бесстолкновительной плазме.

Пример 13.11. Квазинейтральная плазма без столкновений и без магнитного поля состоит из нескольких типов частич с зарядами e_α и кончентрациями $N_\alpha = \text{const}, \alpha = 1, 2, \ldots, s, \sum\limits_\alpha e_\alpha N_\alpha = 0$. Каждая популяция частиц движется со своей постоянной скоростью $\boldsymbol{V}_\alpha$ без теплового разброса. Записать дисперсионное уравнение для малых электростатических колебаний такой плазмы, удовлетворяющих условию $\boldsymbol{B} = 0, \boldsymbol{E} = -\nabla\varphi$, где φ - скалярный потенциал.

Решение. При возникновении колебаний концентрации частиц и их скорости приобретут малые добавки $n_\alpha, \boldsymbol{u}_\alpha$. Электростатический потенциал будет удовлетворять уравнению Пуассона

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho = -4\pi\sum_\alpha e_\alpha n_\alpha \tag{1}$$

где концентрации n_α следует найти из линеаризованных уравнений движения частиц (2) $\frac{\partial \boldsymbol{u}_\alpha}{\partial t} + (\boldsymbol{V}_\alpha\cdot\nabla)\,\boldsymbol{u}_\alpha = -\frac{e_\alpha}{m_\alpha}\nabla\varphi, \quad \frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + \nabla\cdot(N_\alpha\boldsymbol{u}_\alpha) + \nabla\cdot(n_\alpha\boldsymbol{V}_\alpha) = 0$

Рассмотрим возмущения в виде плоских монохроматических волн $\boldsymbol{u}_\alpha, n_\alpha \propto \exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - i\omega t)$. Из уравнений (2) находим

$$\boldsymbol{u}_\alpha = \frac{e_\alpha}{m_\alpha\left(\omega - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{V}_\alpha\right)}\boldsymbol{k}\varphi, \quad n_\alpha = \frac{N_\alpha e_\alpha}{m_\alpha\left(\omega - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{V}_\alpha\right)^2}k^2\varphi \tag{3}$$

Подставив последний результат в (1), находим искомое дисперсионное уравнение:

$$1 = \sum_\alpha \frac{\omega_{0\alpha}^2}{\left(\omega - \boldsymbol{k}\cdot V_\alpha\right)^2}, \quad \omega_{0\alpha}^2 = 4\pi N_\alpha e_\alpha^2/m_\alpha$$

Пример 13.12. Применить полученное дисперсионное уравнение к плазие с неподвижными ионами, в которой имеется два электронных пучка с одинаковыми кониентрачиями электронов $N_1 = N_2 = N$. Пучки движутся навстречу с одинаковыми скоростями $V_1 = -V_2 = V$. Показать, что в плазме будет происходить раскачка колебаний, и найти инкремент $\gamma = \operatorname{Im}\omega$ соответствующей волны.

Решение. Дисперсионное уравнение принимает вид

$$1 - \frac{\omega_{0e}^2.}{(\omega - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{V})^2} - \frac{\omega_{0e}^2}{(\omega + \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{V})^2} = 0 \tag{1}$$

где $k_\parallel$- проекция волнового вектора на общее направление движения электронов. При $V = 0, \omega = \omega_{0e}\sqrt{2}$, что соответствует продольным плазменным колебаниям с частотой, определяемой полной концентрацией $2N$ электронов (ср. с задачей 11.47). Второе значение $\omega = 0$ соответствует отсутствию колебаний.

При $V \neq 0$, решая полученное биквадратное уравнение, находим частоты собственных волн

$$\omega = \pm\sqrt{\left(k_\parallel V\right)^2 + \omega_{0e}^2 \pm \omega_{0e}\left(\omega_{0e}^2 + 4k_\parallel^2 V^2\right)^{1/2}}$$

Неустойчивы колебания, для которых подкоренное выражение отрицательно. Это имеет место, если $\left|k_\parallel\right| < \omega_{0e}\sqrt{2}/V$. Частота при этом становится чисто мнимой: $\omega = \pm i\gamma\left(k_\parallel\right), \gamma > 0$, и амплитуда волны с $\omega = i\gamma$ нарастает экспоненциально. Наибольшего значения $\gamma_{\max} = \omega_{0e}/2$ инкремент достигает при $k_\parallel^2 = 3\omega_{0e}^2/4V^2$.

Рекомендуемая литература: [Михайловский (1975); Незлин (1976); Ораевский (1998); Бойко и Петров (1988)].

Задачи

13.30*. Записать общее решение уравнения Бюргерса (13.77) в однородной безграничной среде, удовлетворяющее начальному условию $P(\xi, 0) = P_0(\xi)$.

Указание. Свести нелинейное уравнение Бюргерса к линейному уравнению теплопроводности с помощью нелинейной подстановки $P(\xi, t) = -2\kappa\partial_\xi \ln\varphi(\xi, t)$, где $\varphi(\xi, t)$ - новая неизвестная функция.

13.31. На основе решения, полученного в предыдущей задаче, рассмотреть случай, когда начальное возмущение сосредоточено в узкой области: $P_0(\xi) = A\delta(\xi)$. Поскольку P_0 имеет размерность скорости, то A представляет собой произведение скорости на длину, а безразмерная величина $R = A/2\kappa$ имеет смысл числа Рейнольдса. Найти форму волны

при $t > 0$, исследовать случаи $R \ll 1$ и $R \gg 1$.

13.32**. Вывести уравнение Бюргерса для МГД волны, распространяющейся в проводящей среде поперек внешнего магнитного поля. Исследовать профиль слабой поперечной ударной волны.

13.33. Используя результаты, полученные в примере 13.9, построить солитон КдВ для случая положительной дисперсионной поправки (т. е. для $\mu < 0$).

13.34*. Используя механическую аналогию, получить решение уравнения КдВ для стационарных нелинейных волн при $E \neq 0$ (см. пример 13.9). Проанализировать переход полученного решения в солитоны и в периодические линейные волны.

13.35*. Исследовать структуру фронта ударной волны с помощью уравнения КдВ-Бюргерса (13.87), удержав в нем и диссипативный, и дисперсионный члены. Сравнить с результатом задачи 13.32ˆ, полученным без учета дисперсионного эффекта.

13.36. Оценить толщину фронта ударной волны, рассмотренной в предыдущей задаче, при разных соотношениях между диссипативным и дисперсионным членами.

13.37**. Построить солитонные решения нелинейного уравнения Шредингера (13.89) и проанализировать их физический смысл. Сравнить солитоны НУШ с солитонами КдВ.

13.38. Нелинейный осциллятор, рассмотренный в примере 13.10, находится в вакууме. На него действует внешнее линейно поляризованное электрическое поле $\boldsymbol{E}(t) = \boldsymbol{E}_0 e^{-i\omega t}$. Указать спектральный состав рассеянного излучения и вычислить сечения рассеяния гармоник, усредненные по периоду падающей волны.

13.39*. На нелинейный осциллятор, рассмотренный в примере 13.10, действуют две линейно поляризованные в одной плоскости волны с разными частотами, $E(t) = E_1 \cos\omega_1 t + E_2 \cos\omega_2 t$. Будем моделировать нелинейную среду совокупностью нелинейных осцилляторов. Вычислить нелинейные восприимчивости среды, обусловленные взаимодействием волн.

13.40. На основе результатов примера 13.11 рассмотреть холодную плазму с концентрацией электронов N, в которой имеется пучок малой плотности $N' \ll N$, движущийся со скоростью V. Найти условия, при которых электрические колебания неустойчивы, и вычислить инкремент.

13.41*. Электронный компонент квазинейтральной холодной плазмы движется относительно ионов со скоростью V. Найти инкремент нарастающих колебаний. Рассмотреть, в частности, резонансный случай.

13.2.4 13.4. Answers and Solutions

13.1.

$$\Delta\Omega = \frac{l_\perp^2}{R^2} \sim \frac{c^2}{\nu^2}\frac{1}{L^2} = \left(\frac{\lambda}{L}\right)^2$$

Телесный угол когерентности не зависит от расстояния R до источника.

13.2. $\Delta\lambda \approx 3,52 \cdot 10^{-10}$c; $l_\perp \sim \lambda\frac{R}{L} = 5,4 \cdot 10^{-3}$ cm; $l_\parallel \sim \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda} = 7,1$ cm; $\Delta\Omega \sim 1,3 \cdot 10^{-31}$ стерад; $\Delta V = l_\perp^2 l_\parallel \sim 2,1 \cdot 10^{-4}$ cm^3.

13.3. $R = 9,46 \cdot 10^{18}$ км, т. е. в $6,3 \cdot 10^5$ раз больше, чем расстояние от Земли до Солнца. Отсюда следует, что $l_\perp \approx 3,4 \cdot 10^3$ cm - в $6,3 \cdot 10^5$ раз больше, чем $l_\perp$ в предыдущей задаче. Что же касается $l_\parallel \approx \lambda^2/\Delta\lambda \approx 7,1$ cm и $\Delta\Omega \approx 1,3 \cdot 10^{-31}$ стерад, то они сохраняют те же значения, что и в предыдущей задаче. Объем когерентности $\Delta V \approx 8,3 \cdot 10^7$ см ^{3} - в $4{\cdot}10^{11}$ раз больше, чем объем когерентности солнечного излучения на Земле. Характерным является увеличение степени когерентности света по мере его распространения. Это относится только к поперечной когерентности.

13.4. $l_\parallel \sim \lambda/\Delta\lambda \approx 3 \cdot 10^8$ см. Так как от оптического генератора идет конус лучей с углом

раствора $\Delta\vartheta \sim \lambda/D = 10^{-5}$, то прилегающий к генератору объем когерентности имеет вид конуса, обращенного к генератору вершиной.

$$l_\perp \approx \begin{cases} D = 5 \text{ см у генератора} \\ l_\parallel \frac{\lambda}{D} \approx 6000 \text{ см у основания конуса когерентности} \end{cases}$$

$$\Delta V = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{l_\perp}{2}\right)^2 l_\parallel \approx 28 \cdot 10^{14} \text{ см}^3.$$

13.5.

$$\delta = \frac{1}{\exp(\hbar\omega/T) - 1} = \frac{1}{\exp(2\pi\hbar c/\lambda kT) - 1}$$
$$\delta \approx \frac{\lambda kT}{2\pi\hbar c} \approx 200 \quad \text{при} \quad \lambda = 1\text{c}, T = 273K$$
$$\delta = e^{-100} \approx 10^{-43} \quad \text{при} \quad \lambda = 5 \cdot 10^{-5}\text{c}, T = 273K$$
$$\delta = \frac{1}{\exp(2.73) - 1} \approx 0.07 \quad \text{при} \quad \lambda = 5 \times 10^{-5}\text{c}, T = 10000K$$

13.6. $\delta = 5 \times 10^{18}, \quad T = 1.4 \times 10^{23}K$

13.7. $\Gamma(\tau) = \frac{1}{2}\int\limits_0^\infty I(\omega)(1 + \cos\omega\tau)d\omega.$

13.8. $\Gamma(\tau) = 2I\frac{\sin(\Delta\omega\tau/2)}{\Delta\omega\tau}\cos\omega_0\tau.$

13.9. Разность хода для света от одного из независимых излучателей, находящегося в точке (x', y'), есть $s_1 - s_2 \approx (xx' + yy')/R$ (см. рис. 13.3), если учесть, что поперечные размеры источника много больше, чем $D = \sqrt{x^2 + y^2}$. Поле в точках $\boldsymbol{r}_1(0,0), \boldsymbol{r}_2(x,y)$ создается всеми излучателями источника:

$$U(\boldsymbol{r}_1, t) = \sum_i U_i(t), \quad U(\boldsymbol{r}_2, t) = \sum_i U_i(t) \exp\left[-i\frac{xx_i' + yy_i'}{R}k\right]$$

где $U_i(\boldsymbol{r}, t), U_i(\boldsymbol{r}, t)$ - амплитуды поля i-го излучателя на первом и втором отверстиях в момент времени t. Корреляционная функция

$$\Gamma(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, 0) = \langle U^*(\boldsymbol{r}_1, t)\, U(\boldsymbol{r}_2, t)\rangle =$$
$$= \sum_i \langle U_i^*(t)U_i(t)\rangle \exp\left[-ik\frac{xx_i' + yy_i'}{a}\right] + \sum_{i\neq j} \langle U_i^*(t)U_j(t)\rangle \exp\left[-ik\frac{xx_j' + yy_j'}{R}\right]$$

Второй член в Γ пропадает из-за некогерентности независимых излучателей. Первый же член представляет собой усредненную интенсивность излучения от отдельных излучателей с учетом разности хода $s_1 - s_2$. Перейдя
от суммирования к интегрированию, получим

$$\gamma(x,y) = \frac{\int\limits_S I(x', y') \exp\left[-ik\frac{xx'+yy'}{R}\right] dx'dy'}{\int\limits_S I(x', y')\, dx'dy'}$$

где интегрирование выполняется по поперечному сечению источника.

13.10. а) $\mathscr{V}(D) = |\gamma(D, 0)| = \cos(\pi D\alpha/\lambda)$;
б) $\mathscr{V}(D) = (2\lambda/\pi D)J_1(\pi\alpha D/\lambda)$.

13.11. а) $\rho = \alpha R = \lambda R/2D_0 \approx 1.5 \times 10^8$ км;
б) $d = \alpha R = 1.22\lambda R/D_0 \approx 6.3 \times 10^8$ км;

диаметр звезды Бетельгейзе приблизительно в 450 раз больше диаметра Солнца и, следовательно, больше, чем диаметры орбит не только Земли, но и Марса!

13.12. От первого источника идет плоская волна $U_1 = A_1 \exp[i\mathbf{k}_1\boldsymbol{r}] = |A_1| \exp[i(\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{r} + \alpha_1)]$, фаза α_1 и амплитуда A_1, которой меняются случайным образом, причем $\overline{A_1} = 0$, а $\overline{|A_1|^2}$ имеет постоянное ненулевое значение. От второго источника идет волна $U_2 = A_2 \exp[i\boldsymbol{k}_2\boldsymbol{r}]$, обладающая аналогичными свойствами. Обе эти волны поступают в фотоэлементы P_1 и P_2. Неусредненный сигнал от фотоэлемента P_1 был бы пропорционален

$$I(\boldsymbol{r}_1, t) = |U_1(\boldsymbol{r}_1, t) + U_2(\boldsymbol{r}_1, t)|^2 =$$
$$= |A_1|^2 + |A_2|^2 + A_1 A_2^* \exp[i(\boldsymbol{k}_1 - \boldsymbol{k}_2)\cdot\boldsymbol{r}] + A_1^* A_2 \exp[-i(\boldsymbol{k}_1 - \boldsymbol{k}_2)\cdot\boldsymbol{r}] \quad (1)$$

Сигнал (1) испытывает случайные флуктуации за счет флуктуаций фаз A_1 и A_2 на частотах, значительно меньших, чем частота волн U_1, U_2, пришедших от источников. Эти флуктуации, тем не менее, не регистрируются и наблюдается усредненная интенсивность. При включении только одного детектора усредненная интенсивность

$$I(r_1, t) = |A_1|^2 + |A_2|^2 = I(r_2, t)$$

не зависит от $\boldsymbol{k}_1 - \boldsymbol{k}_2$ (фазы A_1 и A_2 флуктуируют независимо, так что $\langle A_1 A_2^* \rangle = \langle A_1 \rangle \langle A_2^* \rangle = 0$).

Пусть теперь сигналы от фотоэлементов P_1 и P_2 поступают сначала в умножитель, в котором интенсивности $I(\boldsymbol{r}_1, t)$ и $I(\boldsymbol{r}_2, t)$ перед регистрацией перемножаются. Наблюдаемый на выходе сигнал будет пропорционален (2)
$\langle I(\boldsymbol{r}_1, t) I(\boldsymbol{r}_2, t)\rangle = \left(\langle |A_1|^2\rangle + \langle |A_2|^2\rangle\right) + 2\langle |A_1|^2\rangle \langle |A_2|^2\rangle \cos[(\boldsymbol{k}_1 - \boldsymbol{k}_2)\cdot(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2)]$.

Он зависит от $k_1 - k_2$ и, следовательно, от углового расстояния между удаленными источниками. Меняя расстояни $\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2$ между детекторами и наблюдая ослабления и усиления сигнала, можно найти это угловое расстояние.

13.13. $\Delta\varphi = (2\pi/\lambda)(n-1)x$, где координата x отсчитывается от преломляющего ребра перпендикулярно ему.

Если любым способом осуществить на плоскости xy фазовый сдвиг $\Delta\varphi \propto x$, то такая плоскость будет поворачивать фронт плоской волны в сторону больших x, т. е. действовать так же, как призма.

13.14. Фазовый сдвиг на расстоянии x от оси линзы в случае собирающей линзы есть

$$\Delta\varphi = -\frac{\pi x^2}{f\lambda}$$

где f - фокусное расстояние, определяемое равенством

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

В случае рассеивающей линзы

$$\Delta\varphi = +\frac{\pi x^2}{f\lambda}$$

13.15. Распределение интенсивности света на фотопластинке имеет вид

$$I(x) = |A_1 \exp[ikx\vartheta_1] + A_2 \exp[ikx\vartheta_2]|^2 = I_1 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos k\vartheta x$$

где $\vartheta_2 = \vartheta + \vartheta_1, k = 2\pi/\lambda, I_1 = |A_1|^2, I_2 = |A_2|^2$, координата x отсчитывается вдоль фотопластинки, как показано на рис. 13.6. Распределение почернения на проявленной фотопластинке определяется распределением интенсивности $I(x)$. Пропускание $T(x)$ пропорционально $[I(x)]^{-\gamma/2}$, где γ - кэффициент контрастности фотоэмульсии, и

является периодической функцией x с периодом λ/ϑ. Оно может быть записано в виде $T(x) = a + b\cos k\vartheta x$ (a и b - постоянные), если оставить только две низшие гармоники. Проявленную фотопластинку можно рассматривать как дифракционную решетку, которая разбивает падающую плоскую волну на плоские пучки, направления θ распространения которых определяются соотношением $(\lambda\vartheta)\sin\theta = n\lambda, n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ Главными являются центральный пучок нулевого порядка и два пучка первого порядка в направлениях $\theta = \pm\vartheta$. Заметим, что эти три основных пучка можно получить, умножив падающую волну $A_0\exp[ikz]$ на пропускание $T(x)$. При этом получим волновое поле за фотопластинкой вида

$$A_0 a\exp[ikx] + A_0\frac{b}{2}\exp[ik(z+\vartheta x)] + A_0\frac{b}{2}\exp[ik(z-\vartheta x)]$$

где первый член описывает неотклоненный центральный пучок, второй пучок первого порядка, отклоненный на $+\vartheta$, третий - пучок первого порядка, отклоненный на $-\vartheta$.

13.16. Опорное поле на пластинке имеет вид

$$U_1 = A_0\exp[-i\beta x], \quad \beta = \frac{2\pi(n-1)\alpha}{\lambda}$$

Мы не пишем здесь и далее общего множителя $\exp[i(kz-\omega t)]$. Поле, дифрагировавшее на отверстии:

$$U_2 = A(x)\exp\left[i\frac{\pi x^2}{f\lambda}\right]$$

Суммарное поле $U(x) = U_1 + U_2$, а интенсивность

$$I(x) = |u(x)|^2 = A_0^2 + A^2(x) + 2A_0A(x)\cos\left(\beta x + \frac{\pi x^2}{f\lambda}\right)$$

Распределение интенсивности содержит информацию о фазе дифрагировавшей волны только благодаря наличию опорного пучка.

13.17. Пропускание $T(x)$ проявленной фотоэмульсии

$$T(x) \propto [I(x)]^{-\gamma/2} = A_0^{-\gamma}\left\{1 + \frac{A^2(x)}{A_0^2} + 2\frac{A(x)}{A_0}\cos\left(\beta x + \frac{\pi x^2}{f\lambda}\right)\right\}^{-\gamma/2} \approx$$
$$\approx A_0^{-\gamma-2}\left\{A_0^2 - \frac{\gamma}{2}A^2(x) - \gamma A_0A(x)\cos\left(\beta x + \frac{\pi x^2}{f\lambda}\right)\right\}$$

если использовать условие $A_0 \gg A(x)$. Последнее соотношение можно переписать в виде

$$T(x) \propto 2A_0^2 - \gamma A^2(x) - \gamma A_0A(x)\exp\left[i\left(\beta x + \frac{\pi x^2}{f\lambda}\right)\right] -$$
$$-\gamma A_0A(x)\exp\left[-i\left(\beta x + \frac{\pi x^2}{f\lambda}\right)\right] \qquad (1)$$

Это соотношение называется формулой голограммы Габора [6].

[06] Габор Деннис (1900-1979) - английский ученый венгерского происхождения. Нобелевская премия (1971) присуждена ему за изобретение голографии.

При освещении голограммы плоской монохроматической световой волной $A_0 \exp[i(kz - \omega t)]$ за голограммой возникает волновое поле, представляющее собой результат дифракции на голограмме. Это поле можно получить (ср. решение задачи 13.15) просто путем умножения первичного волнового поля $A_0' \exp[i(kz - \omega t)]$ на пропускание $T(x)$, выражаемое формулой Габора (1). При этом получится поле вида

$$U \sim (2A_0^2 - \gamma A^2(x)) \exp[i(kz - \omega t)] - \gamma A_0 A(x) \exp[i(kz - \omega t)] \exp\left[i\left(\beta x - \tfrac{kx^2}{f\lambda}\right)\right] -$$

$$-\gamma A_0 A(x) \exp[i(kz - \omega t)] \cdot \exp\left[-i\left(\beta x + \frac{kx^2}{f\lambda}\right)\right] \qquad (2)$$

Первый член в (2) соответствует неравномерному дифракционному (изза $A^2(x)$) ослаблению падающей волны. Угол дифракции мал, так как $A(x)$ - плавно меняющаяся функция по сравнению с участвующими экспонентами. Второй член действует как комбинация призмы, отклоняющей пучок вверх, и рассеивающей линзы с фокусным расстоянием f (см. задачи 13.13, 13.14). Третий член действует как комбинация призмы, отклоняющей пучок вниз и собирающей линзы. В итоге при пропускании плоской монохроматической волны через голограмму восстанавливаются первоначальные волновые фронты (рис. 13.9): плоская волна и сферический фронт от отверстия. Последний воссоздается два раза: в виде волны от действительного и от мнимого изображений.

13.18.

$$\exp[ik'z]\, T(x) \propto \left[2A_0^2 - 2\gamma A^2\left(1 + \cos\frac{4\pi}{\lambda f} Dx\right)\right] \exp[ik'z] -$$

$$-\gamma A_0 A \left\{\exp\left[i\frac{\pi}{\lambda f}(x - D)^2\right] + \exp\left[i\frac{\pi}{\lambda f}(x + D)^2\right]\right\} \exp[i(\beta x + k'z)] -$$

$$-\gamma A_0 A \left\{\exp\left[-i\frac{\pi}{\lambda f}(x - D)^2\right] + \exp\left[-i\frac{\pi}{\lambda f}(x + D)^2\right]\right\} \exp[-i(\beta x - k'z)]$$

Второй и третий члены, как и в задаче 13.17, описывают поле, отклоненное вверх и вниз и сфокусированное в две пары точек. Однако фокусные расстояния соответствующих рассеивающей и собирающей линз другие, а именно

$$f' = \frac{\lambda}{\lambda'} f$$

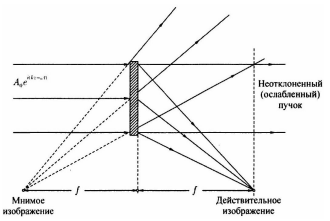


Рис. 13.9

Линейное увеличение выражается формулой

$$\frac{2\Delta}{2D} = \frac{p + q}{p} = \frac{\lambda'}{\lambda}\frac{q}{f}$$

где

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f'} = \frac{\lambda'}{\lambda f}$$

p - расстояние от источника волн λ' до голограммы, а q - расстояние изображения от голограммы (рис. 13.10). Чтобы достичь увеличения, надо использовать при восстановлении длину волны $\lambda' > \lambda$, а источник помещать на конечном расстоянии p от голограммы.

13.19. Распределение интенсивности на голограмме может быть передано без существенных искажений, если пространственный период дифракционной картины больше, чем d,

$$\frac{1}{|\beta + (\pi x/f\lambda)|} \geqslant d$$

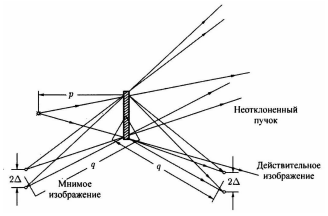


Рис. 13.10

(см. решение задачи 13.16). Этим условием ограничивается максимальный размер голограммы в направлении $x, 2x_{\max} \approx 2\lambda f/d$. Этот размер играет роль диаметра линзы в теории разрешающей способности Рэлея (см. задачу 2.144). Применяя критерий Рэлея для минимального размера s предмета, который может быть разрешен, мы получим

$$s \approx \frac{\lambda}{2\vartheta} \approx \frac{\lambda f}{2x_{\max}} \approx \frac{d}{2}$$

Здесь ϑ - половина угла раствора конуса лучей, идущего от голограммы к изображению.

13.20. Из однородности и изотропии поля в плоскости (x, y) следует, что

$$K_\perp(\rho_1, \rho_2) = K_\perp(|\rho_1 - \rho_2|) = K_\perp(|\rho|), \rho = \rho_1 - \rho_2 \tag{1}$$

Координатная корреляционная функция выражается через интеграл Фурье от спектральной функции:

$$K_\perp(\boldsymbol{\rho}) = \int K(\boldsymbol{\kappa}) \exp(i\boldsymbol{\kappa} \cdot \boldsymbol{\rho}) \frac{d^2\kappa}{(2\pi)^2} \tag{2}$$

При изотропии волновых векторов и отсутствии выделенного направления $K_\perp$ зависит только от модуля $|\rho| = \rho$. Равномерное распределение:

$$K_\perp(\rho) = \frac{K_0\kappa_0^2}{2\pi} \frac{J_1(\kappa_0\rho)}{\kappa_0\rho} \tag{3}$$

Гауссово распределение:

$$K_\perp(\rho) = \frac{K_0\kappa_0^2}{4\pi} \exp\left\{-(\kappa_0\rho)^2/2\right\} \tag{4}$$

13.21. Нужно вычислить интеграл Фурье

$$K_{\lambda\nu}(\boldsymbol{r},\omega) = \int K_{\lambda\nu} e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} = \\ = c\hbar \operatorname{cth}\frac{\hbar\omega}{2T} \int (\operatorname{Im}\alpha_{\lambda\nu}(\boldsymbol{k},\omega))\, e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} = \\ = c\hbar \operatorname{cth}\frac{\hbar\omega}{2T} \operatorname{Im}\int \alpha_{\lambda\nu}(\boldsymbol{k},\omega) e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} \frac{d^3k}{(2\pi)^3}. \tag{1}$$

Последнее равенство вытекает из свойства обобщенной восприимчивости $\alpha_{\lambda\nu}(\boldsymbol{k},\omega) = \alpha_{\lambda\nu}(-\boldsymbol{k},\omega)$ (см. (13.43)). В силу этого свойства имеем

$$\int (\operatorname{Im}\alpha_{\lambda\nu}(\boldsymbol{k},\omega))\, e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} d^3k = \int \operatorname{Im}\alpha_{\lambda\nu}(\boldsymbol{k},\omega)\cos(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}) d^3k = \\ = \operatorname{Im}\int \alpha_{\lambda\nu}(\boldsymbol{k},\omega) e^{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} d^3k \tag{2}$$

После подстановки в (1) обобщенной восприимчивости (13.43) вычисляем интеграл по пространству волновых векторов:

$$\int \frac{\exp(ikr\cos\vartheta}{k^2-\omega^2\varepsilon\mu/c^2} \frac{2\pi k^2 dk d\cos\vartheta}{(2\pi)^3} = \frac{1}{(2\pi)^2 ir} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{k e^{ikr}}{k^2-\omega^2\varepsilon\mu/c^2} dk = \\ = \frac{1}{4\pi r} \exp\left(i\frac{\omega r}{c}\sqrt{\varepsilon\mu}\right). \tag{3}$$

Последний интеграл взят с помощью вычетов путем замыкания контура интегрирования дугой большого радиуса в верхней полуплоскости комплексного k. В силу неравенств (11.93) величина $\operatorname{Im}\omega\sqrt{\varepsilon(\omega)\mu(\omega)} > 0$ и обеспечивает затухание корреляции на больших расстояниях r. Интеграл, содержащий произведение $k_\lambda k_\nu$, приводится к выражению

$$\frac{\partial^2}{\partial x_\lambda \partial x_\nu} \frac{1}{4\pi r} \exp\left(i\frac{\omega r}{c}\sqrt{\varepsilon\mu}\right) \tag{4}$$

Конечный результат:

$$K_{\lambda\nu}(\boldsymbol{r},\omega) = \hbar \operatorname{cth}\left(\frac{\hbar\omega}{2T}\right) \operatorname{Im}\left(\mu\delta_{\lambda\nu} + \frac{c^2}{\omega^2\varepsilon}\frac{\partial^2}{\partial x_\lambda \partial x_\nu}\right) \frac{1}{r} \exp\left(i\frac{\omega r}{c}\sqrt{\varepsilon\mu}\right) \tag{5}$$

13.22.

$\langle E_\lambda(\boldsymbol{r},t) E_\nu(\boldsymbol{r}',t')\rangle_{k\omega} = \operatorname{cth}\left(\frac{\hbar\omega}{2T}\right) \operatorname{Im}\frac{4\pi\omega^2\mu\hbar}{c^2k^2-\omega^2\varepsilon\mu}\left(\delta_{\lambda\nu} - \frac{c^2k_\lambda k_\nu}{\omega^2\varepsilon\mu}\right)$,
$\langle E_\lambda(\boldsymbol{r},t) B_\nu(\boldsymbol{r}',t')\rangle_{k\omega} = -e_{\lambda\nu\beta}k_\beta \operatorname{cth}\left(\frac{\hbar\omega}{2T}\right) \operatorname{Im}\frac{4\pi\omega\mu\hbar c}{c^2k^2-\omega^2\varepsilon\mu}$,
$\langle B_\lambda(\boldsymbol{r},t) B_\nu(\boldsymbol{r}',t')\rangle_{k\omega} = (k^2\delta_{\lambda\nu} - k_\lambda k_\nu) \operatorname{cth}\left(\frac{\hbar\omega}{2T}\right) \operatorname{Im}\frac{4\pi\mu\hbar}{k^2-\omega^2\varepsilon\mu/c^2}$.

13.23. Для вычисления спектральной плотности энергии необходимо найти спектральные плотности напряженностей поля $\langle E^2\rangle_\omega, \langle H^2\rangle_\omega$. Ищем их с использованием результатов предыдущей задачи:

$$\langle E^2\rangle_\omega = \langle E_\lambda(\boldsymbol{r},t) E_\lambda(\boldsymbol{r},t)\rangle_\omega = \\ = \operatorname{cth}\left(\frac{\hbar\omega}{2T}\right) \operatorname{Im}\int \frac{4\pi\omega^2\mu\hbar}{c^2k^2-\omega^2\varepsilon\mu}\left(3 - \frac{c^2k^2}{\omega^2\varepsilon\mu}\right)\frac{4\pi k^2 dk}{(2\pi)^3} \tag{1}$$

Малые мнимые части ε и μ следует учесть только в знаменателе, воспользовавшись формулой Сохоцкого (1.223):

$$\frac{1}{k^2-\omega^2\varepsilon\mu/c^2} \approx i\pi\delta\left(k^2-\frac{\omega^2n^2}{c^2}\right)+\frac{\mathscr{P}}{k^2-\omega^2n^2/c^2} \tag{2}$$

В этом равенстве в правой части $n=\sqrt{\varepsilon'\mu'}$ - коэффициент преломления, который определяется действительными частями ε' и μ'. В правую часть (1)
даст вклад только дельта-функция. Произведя интегрирование, получим

$$\left\langle E^2\right\rangle_\omega = \frac{2\hbar\omega^3 n}{c^3}\operatorname{cth}\left(\frac{\hbar\omega}{2T}\right) \tag{3}$$

Аналогичным образом найдем

$$\left\langle H^2\right\rangle_\omega = \frac{1}{\mu^2}\left\langle B^2\right\rangle_\omega = \frac{\varepsilon}{\mu}\left\langle E^2\right\rangle_\omega \tag{4}$$

где ε и μ следует считать действительными величинами.
Спектральную плотность теплового электромагнитного поля вычислим с помощью формулы (11.110), относящейся к квазимонохроматическому полю (узкий интервал частот $\Delta\omega \ll \omega$). В указанной формуле надо сделать замены

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{E}^*\cdot\boldsymbol{E}\to\left\langle E^2\right\rangle_\omega\frac{\Delta\omega}{2\pi},\quad \frac{1}{2}\boldsymbol{H}^*\cdot\boldsymbol{H}\to\left\langle H^2\right\rangle_\omega\frac{\Delta\omega}{2\pi} \tag{5}$$

и умножить ее на 2. Первая замена связана с переходом от квадратов полей к их спектральным плотностям, а множитель 2 учитывает симметрию $\left\langle E^2\right\rangle_\omega = \left\langle E^2\right\rangle_{-\omega}$. Выполнив указанные замены с помощью (3), (4) и поделив результат на $\Delta\omega$, получим спектральную плотность энергии поля

$$\rho(\omega)=\left[\frac{\hbar\omega}{2}+\frac{\hbar\omega}{e^{\hbar\omega/T}-1}\right]\frac{\omega^2n^2}{\pi^2c^3}\frac{d(\omega n(\omega)}{d\omega} \tag{6}$$

Для получения полной энергии нужно проинтегрировать (6) по частоте в пределах от 0 до ∞.

Сравним (6) с формулой Планка для спектральной плотности равновесного излучения в вакууме (полость внутри непрозрачного тела), которая дается формулой (2) из задачи 6.23:

$$\rho(\omega)=\frac{1}{e^{\hbar\omega/T}-1}\frac{\hbar\omega^3}{\pi^2c^3} \tag{7}$$

Первое слагаемое в квадратных скобках в правой части (6) дает плотность энергии нулевых колебаний (см. формулу (6.7)) и при интегрировании по всем частотам расходится. Второе слагаемое описывает равновесное излучение в прозрачной среде и совпадает с формулой Планка (7) при $n=1$.

Коэффициент преломления $n(\omega)$ вошел через число собственных колебаний: $k^2dk = (\omega n/c)^2 d(\omega n/c)$, если использовать закон (12.7) дисперсии плоских волн в изотропной среде $k=\omega n(\omega)/c$.
13.24. Формула Рэлея:

$$h=\frac{2\omega^4(n-1)^2}{3\pi c^4N}$$

где N - концентрация молекул газа.

13.25.

$$\frac{d\Sigma}{d\Omega} = \frac{\varepsilon_0^2 \omega^4 V}{16\pi^2 c^4} \sin^2\theta \int K_\varepsilon(r) \exp(-i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}) d^3r$$

где обозначения те же, что в примере 13.5 .
13.26.

$$\frac{d\Sigma}{d\Omega} = \frac{\varepsilon_0^2 \omega^4 l_c^3 V K_0}{4\sqrt{2\pi} c^4} \sin^2\theta \exp\left[-2\left(kl_c\right)^2 \sin^2\vartheta/2\right]$$

Интегрирование по углам можно произвести в аналитической форме.

13.27. По определению

$$K_u(r,0) = \int\limits_{\kappa\leqslant k} \left\langle m^2 \right\rangle_\kappa \exp(i\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{r}) \frac{d^2\kappa}{(2\pi)^2} \tag{1}$$

Согласно оценке, сделанной после формулы (13.67), фурье-образ $\left\langle m^2 \right\rangle_\kappa$ заметно отличен от нуля в области $\kappa < \kappa_m \approx 2\pi/l_m = 2\pi k/\left(kl_m\right) \gg 2\pi k$. В малой части $\kappa \leqslant k$ этой области величину $\left\langle m^2 \right\rangle_\kappa$ можно заменить ее значением при $\kappa \approx 0$:

$$\left\langle m^2 \right\rangle_0 = \int K_m(\rho) d^2\rho \approx \pi l_m^2 K_m(0) = \pi l_m^2 \left(\left\langle |M|^2 \right\rangle - |\langle M \rangle|^2 \right) \tag{2}$$

В итоге получим

$$K_u(r,0) \approx \left\langle m^2 \right\rangle_0 \int\limits_{\kappa\leqslant k} \exp(i\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{r}) \frac{d^2\kappa}{(2\pi)^2} = \frac{\left\langle m^2 \right\rangle_0 k^2}{2\pi} \frac{J_1(kr)}{kr} \tag{3}$$

где J_1 - функция Бесселя. Поперечная корреляционная длина определяется аргументом функции Бесселя. Она обращается в нуль первый раз при $kr \approx 3,83$, т. е. можно положить $l_\perp \approx 3,83/k \approx \lambda \gg l_m$. На больших расстояниях от экрана поперечная корреляционная длина порядка длины волны и намного превосходит корреляционную длину неоднородностей экрана.

Продольная корреляционная функция

$$K_u(0,\zeta) \approx \frac{\left\langle m^2 \right\rangle_0 k^2}{2\pi} \frac{d}{d(k\zeta)} \frac{1 - e^{ik\zeta}}{k\zeta} \tag{4}$$

В этом случае также $l_\parallel \approx \lambda$, но продольная корреляция убывает с ростом расстояния по более медленному закону, чем поперечная корреляция.
13.28. В формуле (13.68) используем условие $\kappa < \kappa_m \approx 2\pi/l_m = 2\pi k/\left(kl_m\right) \ll 2\pi k$ и аппроксимируем радикал двумя первыми членами: $\sqrt{k^2 - \kappa^2} \approx k - \kappa^2/2k$. Пределы интегрирования по κ считаем бесконечными. Получаем

$$K_u(\boldsymbol{r},\zeta) \approx e^{ik\zeta} \int \left\langle m^2 \right\rangle_\kappa \exp\left\{ i\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{r} - i\kappa^2\zeta/2k \right\} \frac{d^2\kappa}{(2\pi)^2} \tag{1}$$

Поперечная корреляционная функция

$$K_u(\boldsymbol{r},0) \approx \int \left\langle m^2 \right\rangle_\kappa \exp(i\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{r}) \frac{d^2\kappa}{(2\pi)^2} = K_m(r) \tag{2}$$

совпадает с корреляционной функцией проницаемости экрана. Корреляционные длины тоже совпадают: $l_\perp = l_m$. Продольная функция корреляции, согласно (1), имеет вид

$$K_u(0,\zeta) \approx e^{ik\zeta} \int \left\langle m^2 \right\rangle_\kappa \exp\left(-i\kappa^2\zeta/2k\right) \frac{d^2\kappa}{(2\pi)^2} \tag{3}$$

Ее явный вид можно найти, задавшись конкретным спектром $\left\langle m^2 \right\rangle_\kappa$ (см. следующую задачу). Но продольную корреляционную длину можно оценить из условия, чтобы экспонента в (3) слабо осциллировала в области $\kappa \leqslant \kappa_m \approx 2\pi/l_m$, существенной при интегрировании: $l_\parallel \approx (kl_m)\, l_m \gg l_m$.

13.29.

$$K_u(\boldsymbol{r},\zeta) \approx \left\langle m^2 \right\rangle_0 q(\zeta) \exp\left\{ ik\zeta - \frac{r^2 q(\zeta)}{2l_m^2} \right\}, \quad q(\zeta) = \frac{1}{1 + i\zeta/kl_m^2}$$

13.30. Выполнив указанную подстановку сначала в слагаемом $\partial P/\partial t$, получим из (13.77) $\partial_\xi \left[-2\kappa\partial_t \ln\varphi + P^2/2 - \kappa\partial_\xi P\right] = 0$. Продолжив подстановку, найдем $\partial_\xi \left[\varphi^{-1}\left(-\partial_t\varphi + \kappa\partial_\xi^2\varphi\right)\right] = 0$. Это означает, что $\partial_t\varphi - \kappa\partial_\xi^2\varphi = \varphi dF/dt$, где dF/dt - произвольная функция времени. Еще одна подстановка

$$\varphi(\xi,t) = \Phi(\xi,t)\exp F(t) \tag{1}$$

приводит к уравнению теплопроводности для Φ:

$$\partial_t\Phi = \kappa\partial_\xi^2\Phi \tag{2}$$

Поскольку $F(t)$ не влияет на значение $P(\xi,t)$, то можно переобозначить $\Phi \to \varphi$ и считать, что уравнению (2) удовлетворяет функция φ.

Общее. решение уравнения (2) можно построить с помощью функции Грина, как это было сделано в примере 10.6:

$$\varphi(\xi,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\kappa t}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{ -\frac{(\xi-\eta)^2}{4\kappa t} - \frac{1}{2\kappa}\int\limits_0^\eta P_0\left(\eta'\right) d\eta' \right\} d\eta \tag{3}$$

13.31. Из формулы (3) решения предыдущей задачи запишем решение уравнения Бюргерса в виде

$$P(\xi,t) = \frac{\int\limits_{-\infty}^{\infty} [(\xi-\eta)/t] e^{-G/2\kappa} d\eta}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-G/2\kappa} d\eta} \tag{1}$$

где

$$G(\xi,\eta,t) = \frac{(\xi-\eta)^2}{2t} + \int\limits_0^\eta P_0\left(\eta'\right) d\eta' \tag{2}$$

Решение не зависит от нижнего предела последнего интеграла, который можно выбрать произвольно. Уточним выбор предела и запишем

$$\int\limits_{+0}^{\eta} P_0\left(\eta'\right) d\eta' = \begin{cases} 0, & \eta > 0 \\ -A, & \eta < 0 \end{cases} \tag{3}$$

Теперь интеграл в числителе (1) можно вычислить и придать решению форму

$$P(\xi,t)=\sqrt{\frac{\kappa}{t}}\frac{\left(e^R-1\right)e^{-\xi^2/4\kappa t}}{\sqrt{\pi}+\left(e^R-1\right)\int\limits_{\xi/\sqrt{4\kappa t}}^{\infty}e^{-\eta^2}d\eta},\quad R=\frac{A}{2\kappa}. \tag{4}$$

Частные случаи: $R\ll 1$; в знаменателе оставляем только первое слагаемое и получаем

$$P(\xi,t)=\sqrt{\frac{\kappa}{\pi t}}Re^{-\xi^2/4\kappa t}=\frac{A}{\sqrt{4\pi\kappa t}}e^{-\xi^2/4\kappa t} \tag{5}$$

т. е. решение уравнения теплопроводности. В этом случае диссипативный эффект в уравнении Бюргерса преобладает над нелинейностью.

Для исследования второго предельного случая вводим безразмерную переменную $\zeta=\xi/\sqrt{2At}$ и записываем точное решение (2) в виде

(6) $P(\xi,t)=\sqrt{\frac{2A}{t}}g(\zeta,R),\quad g(\zeta,R)=\frac{e^R-1}{2\sqrt{R}}\frac{e^{-\zeta^2R}}{\sqrt{\pi}+(e^R-1)\int\limits_{\zeta\sqrt{R}}^{\infty}e^{-\eta^2}d\eta}$.

Теперь используем условие $R\gg 1$:

$$g(\zeta,R)\approx\frac{1}{2\sqrt{R}}\frac{e^{R\left(1-\zeta^2\right)}}{\sqrt{\pi}+e^R\int\limits_{\zeta\sqrt{R}}^{\infty}e^{-\eta^2}d\eta} \tag{7}$$

При $z<0$ имеем

$$\int\limits_{\zeta\sqrt{R}}^{\infty}e^{-\eta^2}d\eta\approx\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\eta^2}d\eta=\sqrt{\pi}$$

т. е. $g\approx(1/2\sqrt{R})e^{-R\zeta^2}\to 0$ при $R\to\infty$.

Если $z>0$, то

$$\int\limits_{\zeta\sqrt{R}}^{\infty}e^{-\eta^2}d\eta\approx\frac{e^{-R\zeta^2}}{2\zeta\sqrt{R}}$$

и из (7) получаем

$$g(\zeta,R)\approx\frac{\zeta}{1+2\zeta\sqrt{\pi R}e^{R(\zeta^2-1)}} \tag{8}$$

Это приближение приводит к простой зависимости $g(\zeta,R)\approx\zeta$ при $0<\zeta<1, R\gg 1$. В итоге, возвращаясь к исходным переменным, получаем треугольную волну с разрывом в точке $\xi=\sqrt{2At}$:

$$P(\xi,t)\approx\begin{cases}\xi/t & \text{при}\quad 0<\xi<\sqrt{2At}\\ 0\ \text{при} & \xi<0,\xi>\sqrt{2At}\end{cases} \tag{9}$$

В окрестностях точек $\xi=0$ и $\xi=\sqrt{2At}$ имеются узкие (при $R\gg 1$) переходные области. Их исследование проведено в монографии Уизема (1977), из которой заимствовано и приведенное выше решение.

13.32. См. Вайнштейн и др. (1989). Искомое уравнение можно записать в форме (13.76) или (13.77) с заменой $p\to p_*=p+B^2/8\pi, c_s\to c_\perp=\sqrt{c_s^2+v_A^2}, b\to b_*=(c_\perp^3/2V^2)\left(\partial_{p_*}^2V\right)_s, a\to a_*=2^{-1}c_\perp^{-3}\left[\nu+\nu_m v_A^2/c_\perp^2+\right.$ $\left.+\chi V\left(c_V^{-1}-c_p^{-1}\right)c_s^2/c_\perp^2\right]$, где

$v_A = B/\sqrt{4\pi\tau}$ - альвеновская скорость.
13.33.

$$u(x,t) = -3\Delta c \operatorname{ch}^{-2}\left[(\Delta c/4|\mu|)^{1/2}(x - c_w t)\right]$$

где $\Delta c = v_A - c_w > 0, c_w < v_A$. Солитон представляет собой магнитную яму и является «медленным» - его скорость меньше скорости магнитозвуковой волны малой амплитуды.
13.34. Используем график эффективной потенециальной энергии (рис. 13.11). При $u > 0$ и $0 \geqslant E \geqslant W_{\min} = -2\Delta c^3/3$ частица в потенциальной яме совершает нелинейные колебания, при этом ее координата u изменяется в пределах от u_1 до u_2, определяемых точками пересечения горизонтальной прямой $E = \text{const}$ с границами ямы. Солитону отвечает $E = 0$ и изменение u в пределах от $3\Delta c$ до 0 в соответствии с результатами примера 13.9. При $u < 0$ движение частицы инфинитно, что соответствует неограниченному росту u. Этот случай не описывает какой-либо реальной волны. При E, близком к $W_{\min}$, колебания происходят около значения $u = 2\Delta c$ с малой амплитудой и носят синусоидальный характер.

Эту качественную картину можно перевести на язык формул. Представим $P(u)$ в виде $P(u) = (u_1 - u)(u - u_2)(u - u_3)$, где $u_1 \geqslant u_2 \geqslant u_3$ - корни кубического уравнения $P(u) = 0$. При $u_1 \geqslant u \geqslant u_2$, вычисляя интеграл в формуле (4) примера 13.9 с помощью справочника [Градштейн и Рыжик (1971)], получим

$$\frac{\pm\zeta}{\sqrt{3\mu}} = \frac{2F(\lambda, p)}{\sqrt{(u_1 - u_3)}} \tag{1}$$

где

$$\lambda = \arcsin\sqrt{\frac{u_1 - u}{u_1 - u_2}}, \quad p = \sqrt{\frac{u_1 - u_2}{u_1 - u_3}} \tag{2}$$

Разрешая (1) относительно u, будем иметь

$$u(x,t) = u_1 - (u_1 - u_2)\operatorname{sn}^2(\xi, p) \tag{3}$$

где $\xi = \left[(u_1 - u_2)/12\mu\right]^{1/2}(x - c_w t)$, а $\operatorname{sn}(\xi, p)$ - функция Якоби. При ξ и p действительных функция Якоби имеет период по ξ, равный $4K(p)$ где $K(p)$ - полный эллиптический интеграл первого рода. Решение (3) описывает кноидальную волну.

В частном случае $E \to 0$ имеем $u_1 \to 3\Delta c, u_2 \to u_3 \to 0$. При этом $p \to 1, \operatorname{a\,sn}(\xi, p) \to \operatorname{th}\xi$. Таким образом, мы снова имеем солитон. При малых $E\,(E/W_{\min} \ll 1)$ кноидальная волна представляет собой бесконечную цепочку солитонов, разделенных расстоянием $L \approx \delta \ln(864 W_{\min}/E) \gg \delta$, где $\delta = 2(\mu/\Delta c)^{1/2}$ - ширина отдельного солитона. При $1 - E/W_{\min} \ll 1$ получаем $u_1 \approx 2\Delta c, u_1 - u_2 \approx 2\left[(E - W_{\min})/\Delta c\right]^{1/2}, p \ll 1$, а $\operatorname{sn}(\xi, p) \approx \approx \sin\xi$; решение (3) принимает вид
(4) $u(x,t) = 2\Delta c + \left[(E - W_{\min})/\Delta c\right]^{1/2} \cos\left[(u_1 - u_2)/3\mu\right]^{1/2}(x - c_w t)$
и представляет собой линейную волну малой амплитуды.

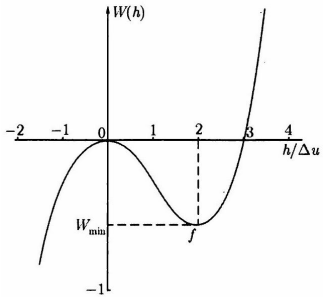


Рис. 13.11

13.35. Будем искать решение уравнения КдВ-Бюргерса в виде $u(x - v_{sh}t)$. Оно приводится к виду

$$\mu u'' - \kappa u' = -\frac{\partial W}{\partial u} = \Delta c u - \frac{1}{2}u^2 \tag{1}$$

который отличается от уравнения (2) из примера 13.9 только наличием диссипативного члена $-\kappa u'$. В эффективной потенциальной энергии (3) $\Delta c = v_{sh} - v_A > 0$, постоянная интегрирования $K = 0$, если потребовать, чтобы асимптотически перед фронтом $u \to 0$, а за фронтом $u \to \Delta u = \text{const}$. Параметр Δu определяет силу ударной волны. Штрихами в (1) обозначено дифференцирование по переменной $\zeta = x - v_{sh}t$. Устремив в (1) $\zeta \to -\infty$ (область за фронтом), найдем связь между параметрами Δc и Δu:

$$\Delta u = 2\Delta c \tag{2}$$

Качественную картину поведения u выясним на основе механической аналогии с колебаниями частицы в потенциальной яме с трением (рис. 13.12). Считаем $\mu > 0$. Осциллятор стартует из состояния a при $\zeta \to +\infty$ (асимптотика $u = 0$ перед фронтом волны). С ростом t (что соответствует уменьшению ζ) осциллятор переходит в состояние b (вершина первого максимума магнитного поля, весьма сходного с солитоном, если диссипация невелика). Далее происходит еще бесконечное число осцилляций (состояния c, d и т. д.), сопровождающиеся уменьшением амплитуды, пока асимптотически при $\zeta \to -\infty$ осциллятор не переходит в состояние f, отвечающее постоянному значению $u = \Delta u$ за фронтом волны.

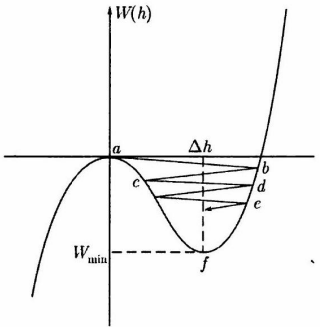


Рис. 13.12

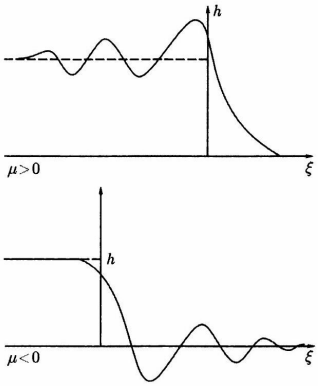


Рис. 13.13

Осцилляционный режим легко исследовать при малых амплитудах путем линеаризации уравнения (1). Записывая его решение в виде $u(\zeta) = a_{1,2}\exp(k_{1,2}\zeta)$, получим перед фронтом (область 1)

$$k_1 = -(\kappa/2\mu)\left[\left(1 - 4\mu\Delta c/\kappa^2\right)^{1/2} - 1\right] \tag{3}$$

Это соответствует апериодическому режиму изменения u от 0 до некоторого $u_{\max}$. За фронтом (область 2) будем иметь

$$k_2 = \kappa/2\mu \pm i(\kappa/2\mu)\left(4\mu\Delta c/\kappa^2 - 1\right)^{1/2} \tag{4}$$

Режим оказывается колебательным, если

$$\kappa < (4\mu\Delta c)^{1/2} = (2\dot{\mu}\Delta u)^{1/2} \tag{5}$$

(рис. 13.13). При $\mu < 0$ (положительная дисперсия) картина меняется на противоположную: перед фронтом - колебания при выполнении условия (5) для $|\mu|$, за фронтом - плавный выход на асимптотику $u_2 = \Delta u$. Ширина
ударного фронта определяется расстоянием, на котором затухают осцилляции.
13.36.

$$\delta = 2\left(\frac{1}{|\mathrm{Re}\, k_1|} + \frac{1}{|\mathrm{Re}\, k_2|}\right) = \frac{4|\mu|\left(1 + 4|\mu|\Delta c/\kappa^2\right)^{1/2}}{\kappa\left[\left(1 + 4|\mu|\Delta c/\kappa^2\right)^{1/2} - 1\right]}$$

μ может иметь любой знак. При $\mu \to 0$ получаем формулу (5) примера 13.8, а при $\kappa^2 \ll 4|\mu|\Delta c$ ширина фронта не зависит от силы волны: $\delta \approx 4|\mu|/\kappa$.
13.37. См. раздел 8.8 в монографии Вайнштейна и др. (1989).
13.38.

$$\sigma(\omega) = \frac{8\pi\omega^4|\beta(\omega)|^2}{3c^4} = \frac{8\pi}{3}r_0^2\frac{\omega^4}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \gamma^2\omega^2}$$

где $r_0 = e^2/mc^2$ (ср. с задачей 5.127).

$$\sigma(2\omega) = \sigma(\omega)\frac{4q^2|\beta(\omega)|^2E_0^2}{\left(\omega_0^2 - 4\omega^2\right)^2 + 4\gamma^2\omega^2}$$

13.39. Возникает нелинейная поляризация на нулевой частоте $P_0 = \alpha_1^{(2)}(0)E_1^2 + \alpha_2^{(2)}(0)E_2^2$, которая определяется нелинейными восприимчивостями $\alpha_{1,2}^{(2)}(0) = -Neq\left|\beta\left(\omega_{1,2}\right)\right|^2/2\omega_0^2$, и нелинейные поляризации на удвоенных $2\omega_1, 2\omega_2$, суммарной $\omega_1 + \omega_2$ и разностной $\omega_1 - \omega_2$ частотах. Соответствующие нелинейные восприимчивости:

$$\alpha^{(2)}\left(2\omega_{1,2}\right) = -\frac{Neq\beta^2\left(\omega_{1,2}\right)}{2\left(\omega_0^2 - 4\omega_{1,2}^2 - 2i\gamma\omega_{1,2}\right)}$$

$$\alpha^{(2)}\left(\omega_1 + \omega_2\right) = -\frac{Neq\beta\left(\omega_1\right)\beta\left(\omega_2\right)}{\omega_0^2 - \left(\omega_1 + \omega_2\right)^2 - i\gamma\left(\omega_1 + \omega_2\right)}$$

$$\alpha^{(2)}\left(\omega_1 - \omega_2\right) = -\frac{Neq\beta\left(\omega_1\right)\beta^*\left(\omega_2\right)}{\omega_0^2 - \left(\omega_1 - \omega_2\right)^2 - i\gamma\left(\omega_1 - \omega_2\right)}$$

Они определены так же, как в примере 13.10 .
13.40. Дисперсионное уравнение:

$$1 - \frac{\omega_{0e}^2}{\omega^2} - \frac{\alpha\omega_{0e}^2}{\left(\omega - k_\parallel V\right)^2} = 0, \quad \alpha = \frac{N'}{N} \tag{1}$$

Отсюда при $\left|k_\parallel\right| V < \omega_{0e}$ имеем

$$\omega = k_\parallel V + i\gamma, \quad \gamma = \frac{\alpha^{1/2}\omega_{0e}}{\sqrt{\left(\omega_{0e}/k_\parallel V\right)^2 - 1}} \tag{2}$$

Групповая скорость нарастающей волны $v_g = d\omega/dk_\parallel = V$. В системе пучка колебания имеют нулевую частоту и нарастают апериодически с инкрементом γ (сносовые колебания).

При $k_\parallel V \approx \omega_{0e}$ формула (2) для инкремента теряет силу, и уравнение (1) надо решать заново. Ищем решение в виде $\omega = \omega_{0e} + \beta, |\beta| \ll \omega_{0e}$, но $|\beta| \gg \left|\omega_{0e} - k_\parallel V\right|$. Из уравнения (1) получаем

$$\frac{2\beta}{\omega_{0e}} = \frac{\alpha\omega_{0e}^2}{\beta^2} \tag{3}$$

Это уравнение имеет действительные и комплексные корни. Нам требуется комплексный корень, удовлетворяющий условию $\gamma = \operatorname{Im}\beta > 0$. Он имеет вид

$$\beta = \omega_{0e}\alpha^{1/3}2^{-4/3}(-1 + i\sqrt{3}) \tag{4}$$

которым и определяется инкремент γ вблизи резонанса между ленгмюровскими и сносовыми колебаниями.

13.41. При $\left|k_\parallel\right| V < \omega_{0e}$ имеем

$$\omega = i\gamma, \quad \text{где} \quad \gamma = \frac{\omega_{0i}}{\sqrt{\left(\omega_{0e}/k_\parallel V\right)^2 - 1}}$$

При $k_\parallel V \approx -\omega_{0e}$

$$\omega \approx -\frac{\omega_{0e}}{2^{4/3}}\left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/3} + i\gamma, \quad \text{где} \quad \gamma = \omega_{0e}\frac{\sqrt{3}}{2^{4/3}}\left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/3}$$

- инкремент неустойчивости Бунемана.

13.3 14 Electromagnetic Vibrations in Finite Bodies

13.3.1 14.1. Electromagnetic Waves in Waveguides

Во многих технических устройствах (а иногда и в естественных условиях) электромагнитные волны распространяются вдоль некоторых направляющих, в роли которых могут выступать металлические или диэлектрические тела (провода, металлические трубы произвольного сечения, диэлектрические и ферромагнитные пластины и их комбинации). Такие устройства называются волноводами (в оптическом диапазоне - световодами). Вопросы, относящиеся к волноводам, составляют широкую область прикладной электродинамики. Мы рассмотрим только самые общие и принципиальные вопросы о возможных типах волн в волноводах и о структуре их электромагнитного поля.

Поверхностные волны. Начнем с выяснения условий существования на плоской границе диэлектрика и вакуума поверхностной монохроматической волны - такого электромагнитного возмущения, которое распространяется вдоль границы и амплитуда которого убывает при удалении от границы. Диэлектрик будем считать изотропным и характеризовать скалярными проницаемостями $\varepsilon(\omega), \mu(\omega)$ (без пространственной дисперсии). Ось Oz направим по нормали к границе вглубь диэлектрика. Поле поверхностной волны удовлетворяет в каждом полупространстве уравнениям Максвелла

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = \frac{i\omega}{c}\mu \boldsymbol{H}, \quad \nabla \times \boldsymbol{H} = -\frac{i\omega}{c}\varepsilon \boldsymbol{E}, \tag{14.1}$$

причем в вакууме $\varepsilon = \mu = 1$. Обращение в нуль дивергенций векторов $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}$ вытекает из (14.1). Из этих уравнений следуют также уравнения второго порядка:

$$\Delta \boldsymbol{E} = -\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon\mu \boldsymbol{E} \tag{14.2}$$

и точно такое же уравнение для $\boldsymbol{H}$.

Ищем зависимость поля от координат в виде

$$\begin{array}{ll} \boldsymbol{E}_1 = \mathscr{E}_1 \exp\left(ikx + q_1 z\right), & \boldsymbol{H}_1 = \mathscr{H}_1 \exp\left(ikx + q_1 z\right), \quad q_1 > 0 \\ \boldsymbol{E}_2 = \mathscr{E}_2 \exp\left(ikx - q_2 z\right), & \boldsymbol{H}_2 = \mathscr{H}_2 \exp\left(ikx - q_2 z\right), \quad q_2 > 0 \end{array} \tag{14.3}$$

Индексы 1 и 2 относятся к вакууму и диэлектрику соответственно, волна распространяется вдоль оси Ox и затухает при удалении от границы как в вакууме, так и в диэлектрике. При действительных проницаемостях затухание не связано с диссипацией электромагнитной энергии. Волновое число k выбрано одинаковым в диэлектрике и в вакууме, чтобы можно было произвести сшивание полей на границе $z = 0$:

$$\boldsymbol{E}_{1\tau} = \boldsymbol{E}_{2\tau}, \quad \boldsymbol{H}_{1\tau} = \boldsymbol{H}_{2\tau}; \quad E_{1n} = \varepsilon E_{2n}, \quad H_{1n} = \mu H_{2n} \tag{14.4}$$

Связь постоянных затухания с частотой и волновым числом находим из уравнения (14.2), подставив в него решение (14.3):

$$q_1 = \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} > 0, \quad q_2 = \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon(\omega)\mu(\omega)} > 0 \tag{14.5}$$

Из условий положительности постоянных затухания находим ограничения:

$$k^2 > \frac{\omega^2}{c^2}, \quad k^2 > \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon(\omega)\mu(\omega) \tag{14.6}$$

Рассмотрим возможность существования поверхностной волны с поперечным магнитным вектором, расположенным в плоскости раздела сред: $\mathscr{H}_1 = \mathscr{H}_2 = \mathscr{H} e_y$. Из второго уравнения (14.1) находим амплитуды электрического поля в двух областях: $\mathscr{E}_{1x} = -\left(icq_1/\omega\right)\mathscr{H}, \mathscr{E}_{1z} = -(ck/\omega)\mathscr{H}$, $\mathscr{E}_{2x} = \left(icq_2/\omega\varepsilon\right)\mathscr{H}, \mathscr{E}_{2z} = -(ck/\omega\varepsilon)\mathscr{H}$. Граничные условия (14.3) для магнитного поля и z-компоненты электрического поля выполняются тождественно, а приравнивание x-компонент электрического вектора дает важное соотношение $q_1 = -q_2/\varepsilon$. Из него и (14.5) следует еще одно ограничение на свойства диэлектрика:

$$\varepsilon(\omega) < 0 \tag{14.7}$$

Пользуясь значениями постоянных затухания (14.5), находим уравнение дисперсии для поверхностной волны:

$$\frac{\sqrt{k^2 - (\omega/c)^2\varepsilon(\omega)\mu(\omega)}}{\sqrt{k^2 - (\omega/c)^2}} + \varepsilon(\omega) = 0 \tag{14.8}$$

Обратим внимание на то, что поверхностная волна непоперечна - электрический вектор у нее имеет продольную (относительно направления распространения) компоненту. Это - волна электрического (E) типа, или TM (поперечно-магнитная) волна.

Аналогичный анализ волны H типа ($\mathscr{H}_x \neq 0, \mathscr{H}_z \neq 0, \mathscr{E}_y \neq 0$) приводит к дисперсионному уравнению

$$\frac{\sqrt{k^2-(\omega/c)^2\varepsilon(\omega)\mu(\omega)}}{\sqrt{k^2-(\omega/c)^2}}+\mu(\omega)=0, \quad \mu(\omega)<0 \tag{14.9}$$

Для этой волны остаются в силе ограничения (14.6), но не действует (14.7). Рассмотрение поверхностных волн для конкретных моделей среды см. в задачах $14.1^{\bullet} - 14.4^{\star\star}$. Волны в световоде (в одномерной модели) рассмотрены в задачах $14.5 - 14.7$.

Металлические влноводы. Достаточно длинные волны (например, сантиметрового диапазона) передают по волноводам, представляющим собой металлические трубы с разными формами сечения. Вдоль оси волновода (ось Oz) возможно распространение бегущих волн, в поперечном направлении волна является стоячей. В общем случае волны в волноводе не являются поперечными, как уже было показано на примере поверхностных волн. Только в волноводах с неодносвязной формой поперечного сечения возможны чисто поперечные электромагнитные волны.

Типы волн, которые могут распространяться в данном волноводе, определяются путем решения уравнений Максвелла при соответствующих граничных условиях. Волна, бегущая вдоль оси волновода, описывается функциями

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=\mathscr{E}(x,y)\exp(ikz-i\omega t), \quad \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)=\mathscr{H}(x,y)\exp(ikz-i\omega t) \tag{14.10}$$

Здесь ω - частота волны, k - составляющая волнового вектора в направлении оси волновода. Величину k называют также постоянной распространения.

В случае волн электрического типа (E-волн) $\mathscr{H}_z=0$, а $\mathscr{E}_z$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta_\perp\mathscr{E}_z+\kappa^2\mathscr{E}_z=0 \tag{14.11}$$

где κ - поперечная составляющая волнового вектора, ε и μ - проницаемости диэлектрика, заполняющего волновод, и граничному условию

$$\mathscr{E}_z=0 \tag{14.12}$$

на стенке волновода.

В случае волн магнитного типа (H-волн) $\mathscr{E}_z=0$, а $\mathscr{H}_z$ является решением уравнения

$$\Delta_\perp\mathscr{H}_z+\kappa^2\mathscr{H}_z=0 \tag{14.13}$$

удовлетворяющим граничному условию

$$\mathscr{E}_\tau=0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial\mathscr{H}_z}{\partial n}=0 \tag{14.14}$$

на стенке волновода.

В уравнениях (14.11) и (14.13) $\Delta_\perp$ - двумерный оператор Лапласа. Граничные условия (14.12) и (14.14) строго справедливы только для волноводов с идеально проводящими стенками.

Поперечные составляющие векторов $\mathscr{E}$ и $\mathscr{H}$ могут быть выражены с помощью уравнений Максвелла (14.1) через продольные составляющие этих векторов.

Возможные значения поперечного волнового числа κ определяются из граничных условий на стенках волновода. Частота ω, волновые числа κ, k, а также проницаемости ε, μ диэлектрика, заполняющего волновод, связаны дисперсионным соотношением

$$\omega^2\varepsilon\mu=\omega_c^2+(ck)^2 \tag{14.15}$$

которое получается при подстановке решений (14.10) в (14.2). Здесь $\omega_c = c\kappa$ - граничная частота волновода для волны данного типа (с конкретным значением κ). В волноводе с односвязной формой сечения (см. задачи 14.9, 14.11, 14.21 и др.) все возможные значения $\kappa > 0$. В таких волноводах распространяются волны лишь с частотами $\omega > \omega_0$, где ω_0 - минимальная граничная частота. Соответствующая «длина волны в вакууме» $\lambda_0 = 2\pi c/\omega_0$ порядка линейного размера сечения волновода. При $\omega < \omega_0$ постоянная распространения k становится чисто мнимой, поэтому распространение волны невозможно. Однако и при $\omega > \omega_0 k$ в общем случае комплексно.

Это связано с тем, что стенки волновода имеют конечную проводимость, поэтому в них происходит диссипация энергии и электромагнитная волна затухает по закону $e^{-\alpha z}$. Коэффициент затухания α (мнимая часть k) равен отношению энергии, диссипируемой в единицу времени в стенках волновода на единице его длины, к удвоенному потоку энергии вдоль волновода. В случае, когда поверхностный импеданс $\zeta = \zeta' + i\zeta''$ стенок мал, можно получить приближенные выражения коэффициента затухания для E волн:

$$\alpha = \frac{\omega\zeta'}{2\kappa k c} \cdot \frac{\oint |\nabla \mathscr{E}_z|^2 \, dl}{\int |\mathscr{E}_z|^2 \, dS} \tag{14.16}$$

и для H-волн:

$$\alpha = \frac{c\kappa^2\zeta'}{2k\omega} \cdot \frac{\oint \left[|\mathscr{H}_z|^2 + (k^2/\boldsymbol{k}^4)\,|\nabla \mathscr{H}_z|^2\right] dl}{\int |\mathscr{H}_z|^2 \, dS} \tag{14.17}$$

Здесь $\mathscr{E}_z$ и $\mathscr{H}_z$ - компоненты полей, вычисленные при $\zeta = 0$ (т. е. в предположении идеальной проводимости стенок волновода), dl - элемент контура поперечного сечения волновода, dS - элемент площади этого сечения.

В волноводах с неодносвязным сечением (см. задачи 14.9, 14.18) возможны чисто поперечные (ТЕМ) волны.

Рекомендуемая литература: [Джексон (1975); Вайнштейн (1988); Вайнштейн (1966а); Гуревич и Мелков (1994); Солимено и др. (1989); Каганов и др. (1997); Пановский и Филипс (1963); Иорганев и Бондаренко (2002); Памятных и Туров (2000); Никольский (1973); Де Бройль (1948)].

Задачи

14.1*. В бесстолкновительной плазме и в любой конденсированной среде при достаточно высоких частотах диэлектрическая проницаемость имеет вид $\varepsilon(\omega) = 1 - \omega_{0e}^2/\omega^2$, а магнитная проницаемость $\mu = 1$. Произвести с помощью формул (14.7), (14.8) анализ поверхностной плазменной волны, найти для нее зависимость $\omega(k)$, рассмотреть частные случаи.

14.2. Сделать то же самое для немагнитного и неполярного диэлектрика с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon(\omega) = 1 + \omega_p^2/\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)$ (поверхностный поляритон).

14.3. Ферродиэлектрик, намагниченный до насыщения вдоль оси Oz, занимает полупространство $y > 0$. Получить в магнитостатическом приближении дисперсионное уравнение для поверхностной волны, волновой вектор которой ориентирован вдоль либо против оси Ox, а вектор напряженности магнитного поля имеет отличные от нуля компоненты H_x, H_y. Для магнитной проницаемости использовать формулы (12.36). Какие направления имеет фазовая скорость волны при двух указанных выше направлениях волнового вектора? Суть магнитостатического приближения разъяснена в задаче 12.43 .

14.4. *Ферродиэлектрик, намагниченный до насыщения вдоль оси Oz, занимает полупространство $y > 0$. Исследовать поверхностную*

H-волну, распространяющуюся в направлении Ox с отличными от нуля компонентами векторов поля E_x, H_x, H_y. Получить дисперсионное уравнение для этой волны, считая $\varepsilon = const$ и используя выражения (12.36) для тензора $\hat{\mu}$. Исследовать его решения с учетом невзаимности, т. е. зависимости частоты от направления распространения волны (по или против оси Ox при неизменном направлении постоянного намагничивающего поля $\boldsymbol{H}_0$ и намагниченности $\boldsymbol{M}_0 \| \boldsymbol{H}_0$). Найти на плоскости (k_x, ω) области существования поверхностной волны.

14.5. Бесконечно протяженный диэлектрический слой заполняет в вакууме область $-a \leqslant x \leqslant a$ и имеет проницаемости ε и μ. Показать, что такой слой может действовать как волновод (для этого нужно, чтобы поле бегущей электромагнитной волны концентрировалось, в основном, внутри слоя). Определить типы волн, которые могут распространяться в таком волноводе. Ограничиться случаем, когда векторы поля не зависят от координаты y.

14.6. Диэлектрический слой с проницаемостями ε, μ, заполняющий область $0 \leqslant x \leqslant a$, нанесен на поверхность идеального проводника. В области $x > a$ - вакуум. Какие типы электромагнитных волн с амплитудой, убывающей при удалении от слоя, могут распространяться вдоль слоя? Сравнить возможные типы волн с системой волн, полученной в предыдущей задаче.

14.7. Диэлектрический слой, рассмотренный в задаче (14.5) и прозрачный в оптической области, можно использовать как световод. Вычислить для четных E-волн ту долю K потока электромагнитной энергии, которая передается внутри диэлектрика (по отношению к полному потоку). При каких условиях она будет близка к единице?

14.8. Вывести формулы (14.16) и (14.17) для коэффициентов затухания волн в металлическом волноводе с малым поверхностным импедансом.

14.9. Плоский волновод образован двумя идеально проводящими параллельными плоскостями больших («бесконечных») размеров, расстояние между которыми a, и заполнен диэлектриком с проницаемостями ε, μ. Найти возможные типы волн, их дисперсионные уравнения и распределение монохроматического поля в пространстве.

14.10. Определить типы волн, которые могут распространяться в прямоугольном волноводе с идеально проводящими стенками (длины сторон a, b). Найти для них закон дисперсии и конфигурации полей (т. е. зависимость компонент поля от координат).

14.11. Определить коэффициенты затухания α разных типов волн в прямоугольном волноводе. Поверхностный импеданс стенок волновода ζ задан.

14.12. Найти возможные типы волн в круглом волноводе радиуса a, считая его стенки идеально проводящими. Определить граничную частоту ω_0 для такого волновода.

14.13. Используя результат предыдущей задачи, найти коэффициенты затухания α разных типов волн в круглом волноводе. Поверхностный импеданс стенок ζ задан.

14.14. Определить фазовую v_{ph} и групповую v_g скорости волн в прямоугольном и круглом волноводах с идеально проводящими стенками. Построить их зависимость от $\lambda = 2\pi c/\omega$.

14.15. Определить фазовую v_{ph} и групповую v_g скорости волн в волноводе геометрическим методом. Для этого рассмотреть простейшую волну типа H_{10} в прямоугольном волноводе, разложить ее на плоские волны и исследовать отражение этих волн от стенок волновода.

14.16. Дисперсионное соотношение (14.15) для электромагнитной волны в незаполненном ($\varepsilon = \mu = 1$) металлическом волноводе формально совпадает с уравнением связи между энергией и импульсом релятивистской частицы [1]:

$$\mathscr{E}^2 = \left(Mc^2\right)^2 + (cp)^2, \quad M - \text{ масса частицы;}$$

$$\omega^2 = \omega_{n0}^2 + (ck)^2, \quad \omega_{n0} \text{ - предельная частота рассматриваемой моды.}$$

Аналогия становится более явной, если использовать квантовые представления о фотонах в волноводе. Тогда $\mathscr{E}_\omega = \hbar\omega$ - энергия фотона, $\hbar k = p$ - его импульс, а величина $M_\omega = \hbar\omega_{n0}/c^2$ играет роль массы:

$$\mathscr{E}_\omega^2 = \left(M_\omega c^2\right)^2 + (cp)^2$$

Таким образом, фотон в волноводе, в отличие от фотонов в неограниченном пространстве, приобретает массу. Проанализировать некоторые аспекты такой трактовки волноводных мод на примере простейшего плоского волновода, рассмотренного в задаче 14.9 .

1. Показать, что при адиабатическом (медленном) изменении расстояния между металлическими плоскостями сохраняется продольный импульс $\hbar k = p$ фотона, который является в данном случае адиабатическим

инвариантом. [2] Энергия волноводного фотона и его «масса» при этом изменяются.

2. Вычислить изменение энергии волноводной моды при сближении стенок, рассматривая его как результат работы внешнего источника против сил светового давления. Показать, что в процессе эволюции сохраняется обычный адиабатический инвариант гармонического осциллятора, т. е. отношение энергии моды к ее частоте.

Указание. При выполнении п. 1 разложить волноводную моду на две поперечные плоские волны, распространяющиеся под углом к оси волновода, и вычислить изменения их частот и направлений распространения при отражении от движущейся полностью отражающей стенки.

14.17*. Произвести дальнейший анализ свойств фотона в волноводе. С какой скоростью распространяется фотон вдоль волновода? Рассмотреть его «продольную» и «поперечную» массы (их определение было дано в задаче 4.41). Рассмотреть также поведение волноводного фотона в гравитационном поле.

14.18. Исследовать структуру поперечной электромагнитной волны в идеально проводящей коаксиальной линии (большой и малый радиусы соответственно b и a). Подсчитать средний поток энергии $\bar{\gamma}$ вдоль линии. Рассмотреть предельный случай одиночного идеально проводящего провода.

14.19. Определить возможные типы непоперечных электромагнитных волн в коаксиальной линии с идеально проводящими стенками (радиусы a и $b > a$).

14.20. Определить коэффициент затухания α поперечной электромагнитной волны в коаксиальной линии. Заданы радиусы $a, b > a$ и поверхностный импеданс $\zeta = \zeta' + i\zeta''$.

Указание. Использовать приведенное в начале раздела определение коэффициента затухания через потери энергии.

14.21*. Рассмотреть распространение аксиально симметричной волны электрического типа вдоль одиночного бесконечно длинного цилиндрического проводника с конечной проводимостью, находящегося в вакууме. Определить фазовую скорость волны. Показать, что в случае идеально проводящего провода волна перейдет в поперечную электромагнитную волну

(см. задачу 14.18). Использовать приближенное граничное условие Леонтовича (12.13).

14.22. Аксиально симметричная E-волна распространяется в круглом волноводе радиуса b, частично заполненном диэлектриком. Диэлектрик имеет проницаемость ε и занимает область $a \leqslant r \leqslant b$. Считая $a \ll b$, определить зависимость фазовой скорости от частоты и граничную частоту. При каких условиях фазовая скорость будет меньше c? Рассмотреть

[01] Эта аналогия привлекла внимание одного из основоположников квантовой механики (см. [Де Бройль (1948)]).

[02] См. подраздел «Адиабатические инварианты» раздела 4.2.

предельный случай волновода, полностью заполненного диэлектриком.

14.23. Между двумя идеально проводящими плоскостями $x = \pm a$ (рис. 14.1,а) помещена в плоскости $y = 0$ лестничная перегородка (рис. 14.1,), состоящая из тонких металлических полосок, ориентированных вдоль оси Ox. Расстояния между полосками и их ширина малы по сравнению с длиной волны. Область $y > 0$ над лестничной перегородкой заполнена диэлектриком с проницаемостью ε, в области $y < 0$ - воздух. Найти возможные типы бегущих волн, которые могут распространяться в такой системе вдоль оси z. Как связана постоянная распространения этих волн с частотой?

Указание. Лестничную перегородку для достаточно длинных волн можно рассматривать как анизотропно проводящую плоскость, проводимость которой в направлении оси Ox бесконечна, а в направлении Oz равна нулю.

14.24. Прямоугольный волновод с поперечным сечением $a \times b$ и идеально проводящими стенками заполнен ферродиэлектриком. Постоянное магнитное поле приложено перпендикулярно широкой стенке волновода (вдоль оси Oy). Тензоры электрической и магнитной проницаемостей ферродиэлектрика имеют вид

$$\varepsilon_{ik} = \begin{pmatrix} \varepsilon_\perp & 0 & -i\varepsilon_a \\ 0 & \varepsilon_\parallel & 0 \\ i\varepsilon_a & 0 & \varepsilon_\perp \end{pmatrix}, \quad \mu_{ik} = \begin{pmatrix} \mu_\perp & 0 & -i\mu_a \\ 0 & \mu_\parallel & 0 \\ i\mu_a & 0 & \mu_\perp \end{pmatrix}$$

Определить составляющие электромагнитного поля, постоянную распространения и граничную частоту волновода для случая, когда поле не зависит от Oy.

14.25. Электрическое и магнитное поля в волноводе с идеально проводящими стенками, не содержащем диэлектрика, описываются функциями

$$\boldsymbol{E}_0 = \mathscr{E}_0(x,y)e^{i(k_0 z - \omega t)}, \quad \boldsymbol{H}_0 = \mathscr{H}_0(x,y)e^{i(k_0 z - \omega t)}$$

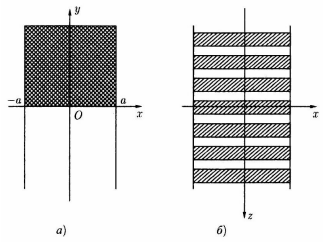


Рис. 14.1

Если в волновод вставить диэлектрический сердечник, имеющий форму цилиндра произвольного сечения с осью, параллельной оси волновода, то поля в волноводе примут вид

$$\boldsymbol{E} = \mathscr{E}(x,y)e^{i(kz - \omega t)}, \quad \boldsymbol{H} = \mathscr{H}(x,y)e^{i(kz - \omega t)}$$

Диэлектрик в общем случае может характеризоваться тензорными параметрами $\varepsilon_{ik}, \mu_{ik}$. Показать с помощью уравнений Максвелла, что постоянная распространения изменится на величину

$$\Delta k = k - k_0 = \frac{\omega \int\limits_{\Delta S} (\Delta\varepsilon_{ik}\mathscr{E}_k\mathscr{E}_{0i}^* + \Delta\mu_{ik}\mathscr{H}_k\mathscr{H}_{0i}^*)\, dS}{c \int\limits_S [(\mathscr{E}_0^* \times \mathscr{H}) + (\mathscr{E} \times \mathscr{H}_0^*)] \cdot \boldsymbol{e}_z dS}$$

где $\Delta\varepsilon_{ik} = \varepsilon_{ik} - \delta_{ik}, \Delta\mu_{ik} = \mu_{ik} - \delta_{ik}$, интеграл в числителе берется по площади сечения диэлектрического стержня (ΔS), интеграл в знаменателе по площади сечения волновода (S).

14.26. В прямоугольный волновод с идеально проводящими стенками вносится ферродиэлектрическая пластинка толщиной $d \ll a$, намагниченная вдоль оси волновода (рис. 14.2). Пользуясь формулой, полученной в предыдущей задаче, определить с точностью до членов порядка d изменение Δk постоянной распространения волны типа H_{10}. Диэлектрическая
проницаемость пластинки - скалярная величина, тензор ее магнитной проницаемости дается формулой (12.35).
14.27. В коаксиальный волновод (рис. 14.3) вставлена тонкая ферритовая пластина ($d < a, b$), намагниченная вдоль оси волновода. Определить изменение Δk постоянной распространения поперечной электромагнитной волны.

Указание. Амплитуды возмущенных полей определить таким же методом, как в предыдущей задаче.

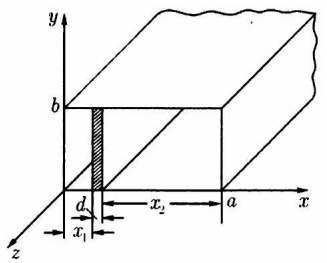


Рис. 14.2

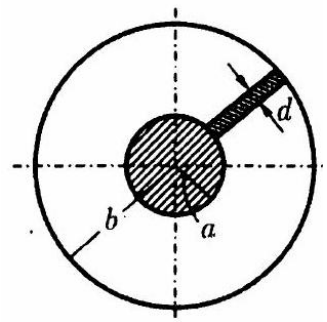


Рис. 14.3
14.28. Решить предыдущую задачу для случая, когда постоянное подмагничивающее поле H_0 направлено перпендикулярно оси волновода. Рассмотреть два направления этого поля: а) H_0 перпендикулярно широкой грани пластинки; б) H_0 перпендикулярно узкой грани пластинки.

13.3.2 14.2. Electromagnetic Oscillations in Resonators

Резонаторы СВЧ-диапазона представляют собой замкнутые полости, окруженные металлическими стенками. В резонатор часто помещают диэлектрики, магнетики, металлические стержни и другие элементы для управления электромагнитными колебаниями. В резонаторе может существовать система стоячих волн с определенными частотами ω (собственными частотами резонатора) и длинами волн, которые соизмеримы с размерами резонатора. Эта система волн определяется (в случае не заполненного
диэлектриком резонатора с идеально проводящими стенками) путем решения уравнений

$$\Delta \boldsymbol{E} + \frac{\omega^2}{c^2}\boldsymbol{E} = 0, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{E} = 0 \tag{14.18}$$

с граничным условием для тангенциальной компоненты поля

$$\boldsymbol{E}_\tau = 0 \tag{14.19}$$

Собственные функции резонатора $\boldsymbol{E}_\nu$,[3] отвечающие различным собственным частотам ω_ν, взаимно ортогональны. Собственные функции, соответствующие одной и той же частоте (их может быть несколько - см. задачи 14.29, 14.31), также можно выбрать взаимно ортогональными. Условимся нормировать их на 4π:

$$\int \boldsymbol{E}_{\nu'} \cdot \boldsymbol{E}_\nu dV = 4\pi\delta_{\nu\nu'} \tag{14.20}$$

где интеграл берется по объему резонатора. Этому же условию удовлетворяют собственные функции $\boldsymbol{H}_\nu$, которые выражаются через $\boldsymbol{E}_\nu$ с помощью уравнений Максвелла.

Вследствие потерь энергии в стенках или в веществе, заполняющем резонатор, а также излучения энергии во внешнее пространство, свободные колебания реальных резонаторов являются затухающими. Потери энергии в металлических стенках можно учесть с помощью граничных условий Леонтовича. Потери энергии данного типа колебаний характеризуются добротностью Q_ν, которая определяется отношением

$$Q_\nu = \frac{\widetilde{\omega}_\nu W_\nu}{P_\nu} \quad \text{или} \quad Q_\nu = \frac{\widetilde{\omega}_\nu}{2\gamma_\nu}. \tag{14.21}$$

Здесь W_ν - энергия, запасенная в резонаторе, P_ν - средняя (по времени) мощность потерь; $\widetilde{\omega}_\nu$ - резонансная частота, которая может отличаться от резонансной частоты идеального резонатора; γ_ν - декремент затухания.

Оптические резонаторы, которые применяются в лазерах, как правило являются открытыми. У них отсутствует боковая поверхность, и электромагнитная волна удерживается в резонаторе, попеременно отражаясь от двух плоско-параллельных, сферических или иной формы зеркал, расстояние между которыми намного превосходит длину волны.

Рекомендуемая литература: [Джексон (1975); Вайнштейн (1988); Вайнштейн (1966а); Гуревич и Мелков (1994); Солимено и др. (1989); Звелто (1984); Пановский и Филипс (1963); Иорганев и Бондаренко (2002); Памятных и Туров (2000); Никольский (1973); Де Бройль (1948)].

Задачи

14.29. Определить типы собственных колебаний в полом резонаторе с идеально проводящими стенками. Резонатор имеет форму прямоугольного параллелепипеда, его размеры $a \times b \times h$.

14.30. Определить число собственных колебаний $\Delta N(\omega)$, приходящихся на интервал частот $\Delta\omega$ в полом резонаторе объема V, рассмотренном в предыдущей задаче. Считать, что выполняются неравенства $\Delta\omega \ll \omega$ и $\Delta N \gg 1$.

14.31. Резонатор имеет форму прямого кругового цилиндра высотой h и радиуса a. Считая стенки резонатора идеально проводящими, найти частоты собственных колебаний. Рассмотреть колебания электрического и магнитного типов.

[03] Значком ν обозначена совокупность четырех величин, однозначно определяющих собственный тип колебаний («моду») резонатора.

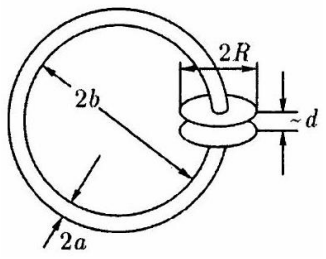


Рис. 14.4

14.32. Две круглые металлические пластинки радиуса R находятся на малом расстоянии d друг от друга, образуя конденсатор. Обкладки конденсатора замкнуты проводником толщиной $2a$, имеющим форму кольца радиуса b (рис. 14.4). Найти собственную частоту колебаний такого «открытого резонатора», предполагая применимым квазистационарное приближение. Все проводники считать идеально проводящими.

14.33. Найти собственную частоту ω_0 колебаний системы, изображенной на рис. 14.5, предполагая, что соответствующая ей длина волны λ_0 велика по сравнению с размерами системы. Потерями энергии и краевыми эффектами пренебречь.

14.34. Для уменьшения потерь энергии на излучение вместо открытого колебательного контура (см. рис. 14.4) используют закрытый резонатор, состоящий из соединенных вместе тороидальной камеры и плоского конденсатора с круглыми пластинами (его разрез и размеры показаны на

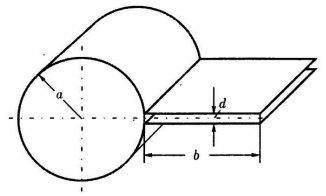


Рис. 14.5

рис. 14.6). Найти собственную частоту ω_0 основного типа колебаний такого резонатора в квазистационарном приближении. При каких условиях применимо такое приближение? Стенки резонатора считать идеально проводящими.

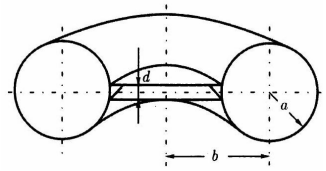


Рис. 14.6

14.35. Решить предыдущую задачу для тороидального резонатора с камерой прямоугольного сечения (рис. 14.7).

14.36. Резонатор представляет собой цилиндр кругового сечения (внутренний радиус b, высота h), вдоль оси которого вставлен идеально проводящий стержень радиуса a (рис. 14.8). Стенки цилиндра также обладают идеальной проводимостью.

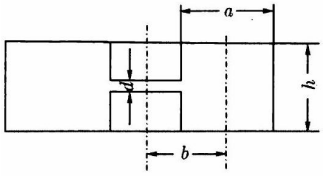


Рис. 14.7

Между стержнем и одним из торцов цилиндра оставлен зазор d. Найти собственные частоты поперечных относительно оси системы электромагнитных колебаний, считая, что длина волны этих колебаний много больше зазора d (но не высоты h цилиндра). Как изменится спектр колебаний при $d \to 0$?

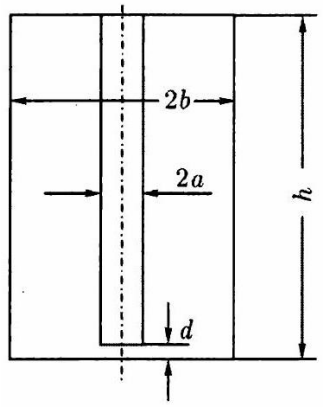


Рис. 14.8

14.37. Известны собственные частоты колебаний ω_ν и собственные функции $\boldsymbol{E}_\nu, \boldsymbol{H}_\nu$ резонатора с идеально проводящими стенками. Вычислить изменение собственных частот, вызванное конечной проводимостью стенок резонатора. Поверхностный импеданс ζ стенок мал.

Указание. Искать решение уравнений Максвелла в виде

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = \sum_\nu q_\nu(t)\boldsymbol{E}_\nu(\boldsymbol{r})$$
$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t) = \sum_\nu p_\nu(t)\boldsymbol{H}_\nu(\boldsymbol{r})$$

где q_ν и p_ν - неизвестные функции времени. Вывести уравнения для q_ν и p_ν с точностью до членов, линейных по ζ и исследовать их решения.

14.38. Полый резонатор имеет форму куба со стороной a. Проводимость стенок σ, магнитная проницаемость $\mu = 1$. Вычислить добротность резонатора для произвольного типа колебаний. Как она зависит от частоты? При каких частотах резонансные свойства системы исчезнут?

14.39. Полый резонатор, стенки которого имеют поверхностный импеданс ζ, возбуждается сторонним током $j(\boldsymbol{r})e^{-i\omega t}$, текущим внутри резонатора. Частота тока ω близка к одной из собственных частот резонатора. Найти электромагнитное поле, возбуждаемое в резонаторе, и его зависимость от частоты ω вблизи резонанса.

Указание. Использовать метод решения, развитый в задаче 14.37.

14.40. Открытый резонатор инфракрасного диапазона состоит из двух параллельных круглых зеркал диаметром D, находящихся на расстоянии L друг против друга (рис. 14.9). Пусть собственное колебание такой системы реализуется в виде двух волн с $\lambda \ll L, D$, распространяющихся перпендикулярно плоскостям зеркал навстречу друг другу и образующих стоячую электромагнитную волну.

Оценить по порядку величины добротность такого резонатора в приближении геометрической оптики. Учесть потери энергии при отражениях от зеркал (коэффициент отражения R) и излучение через боковую поверхность резонатора за счет дифракции. Параметры резонатора: $D = L = 1$ см; $R = 0,95$; $\lambda = 3 \cdot 10^{-4}$ cm.

14.41. Зеркала открытого резонатора, рассмотренного в предыдущей задаче, слегка непараллельны. Угол между их плоскостями $\beta \ll 1$. Оценить дополнительные потери на

излучение и соответствующий вклад в добротность резонатора, обусловленный непараллельностью зеркал. Какие значения угла β допустимы без существенного уменьшения полной добротности резонатора?

14.42. В резонаторе, образованном двумя параллельными зеркалами (см. рис. 14.9), собственные колебания с $\lambda \ll L, D$ осуществляются в виде стоя-

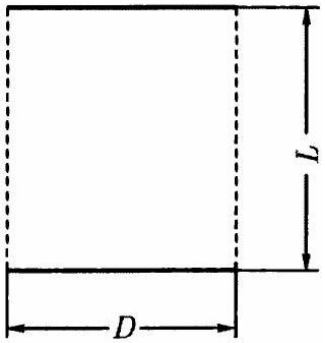


Рис. 14.9 чих волн в пространстве между зеркалами. Рассмотреть тот тип колебаний, в котором волновой вектор стоячей волны составляет малый угол ϑ с нормалью к плоскостям зеркал.

а) Найти условие, определяющее возможные значения ϑ при заданной λ.

б) Оценить по порядку величины добротность резонатора как функцию угла ϑ. Рассмотреть различные соотношения между потерями в зеркалах и потерями на излучение.

14.43. Открытый резонатор с двумя параллельными плоскими зеркалами (рис. 14.9) отличается от закрытого прямоугольного резонатора (задача 14.29) отсутствием боковых стенок. Разумно предположить, что при $L \gg \lambda$ это различие несущественно для тех типов колебаний, у которых волновой вектор k направлен по нормали к зеркалам. У таких долгоживущих мод, согласно результатам 14.40, дифракционные потери малы. Пользуясь результатами задачи 14.29, найти приближенное выражение для спектра частот долгоживущих мод.

14.44. Исследовать собственные однородные магнитостатические колебания ферродиэлектрического эллипсоида малых размеров, намагниченного до насыщения. Внешнее постоянное магнитное поле H_0 приложено вдоль одной из главных осей эллипсоида, его размагничивающие факторы и намагниченность насыщения M_0 известны. Вычислить без учета потерь
собственную частоту малых колебаний. Рассмотреть, в частности, различные предельные случаи эллипсоида (см. задачу 9.51). Найти поляризацию вектора намагниченности.

14.45. Резонатор имеет форму сферической полости радиуса a. Считая стенки резонатора идеально проводящими, найти частоты собственных колебаний, кратность их вырождения и распределение электромагнитного поля в полости. Рассмотреть колебания электрического и магнитного типов, использовав результаты задачи 12.69 .

13.3.3 14.3. Answers and Solutions

14.1. Из (14.7) получаем условие $\omega(k) < \omega_{0e}$. Подставив заданные ε и μ в (14.8), находим закон дисперсии для поверхностной плазменной волны:

$$\omega^2(k) = \frac{\omega_{oe}^2}{2} + (ck)^2 \left[1 - \sqrt{1 + \frac{\omega_{0e}^4}{4(ck)^4}}\right] \tag{1}$$

Наибольший интерес представляет случай $ck \gg \omega_{0e}$. Частота поверхностной волны $\omega = \omega_{0e}/\sqrt{2}$. Волна в этих условиях является «медленной», ее фазовая скорость $v_{ph} = \omega/k \ll c$. Энергию поверхностного плазмона в металлах $\hbar\omega = \hbar\omega_{oe}/\sqrt{2}$ (порядка 10 эВ, см. задачу 11.47) при измерениях можно хорошо отличить от энергии $\hbar\omega_{0e}$ объемного плазмона. При $ck \ll \omega_{0e}$ имеем $\omega(k) = ck$, волна «быстрая», $v_{ph} = c$. Условия (14.6), (14.7) выполняются во всем диапазоне волновых чисел $0 < k < \infty$.

14.2. Из условия (14.7) получаем возможный диапазон частот для поляритонной поверхностной волны: $\omega^2 > \omega_p^2/2 + \omega_0^2$. Уравнение дисперсии:

$$\omega^2(k) = \frac{1}{2}\left(\omega_p^2 + \omega_{0e}^2\right) + (ck)^2 \left[1 - \sqrt{1 - \frac{\omega_0^2}{(ck)^2} + \frac{\left(\omega_p^2 + \omega_{0e}^2\right)^2}{4(ck)^4}}\right]$$

$\omega^2(k) = \sqrt{\omega_0^2 + \omega_p^2/2}$ при $ck \gg \omega(k); \omega^2(k) = \omega_0^2$ при $ck = \omega_0$. Отсюда получаем диапазон возможных волновых чисел: $k \geqslant \omega_0/c$.

14.3. Постоянные затухания поля в вакууме и в ферродиэлектрике имеют значения $q_1 = q_2 = k$, а частота волны $\omega(\boldsymbol{k}) = (k_x/k)\,(\omega_0 + \omega_M/2)$,

где $k = |k_x|$ - абсолютная величина волнового вектора. Фазовая скорость волны $v_{ph} = \omega(\boldsymbol{k})/k_x$, т. е. скорость перемещения плоскости, на которой фаза $k_x x - \omega(\boldsymbol{k})t$ постоянна, направлена вдоль оси Ox независимо от знака проекции k_x.

14.4. Дисперсионное уравнение

$$\sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon\mu_{ef}} + \mu_{ef}\sqrt{k^2\frac{\omega^2}{c^2}} - k_x\frac{\mu_a}{\mu_\perp} = 0$$

где $k = |k_x|\,, \mu_{ef} = \left(\mu_\perp^2 - \mu_a^2\right)/\mu_\perp$, а радикалы представляют собой постоянные затухания поверхностной волны вдоль оси Oy в диэлектрике и в вакууме. Наличие в дисперсионном уравнении величины k_x свидетельствует о том, что частоты, фазовые и групповые скорости волн, распространяющихся в противоположных направлениях, различны (невзаимность). Это объясняется тем, что магнитная проницаемость ферродиэлектрика неинвариантна относительно обращения времени (замена t на $-t$): величины $\boldsymbol{H}, \boldsymbol{M}$, а с ними и недиагональные компоненты тензора меняют знаки при обращении времени.

Дальнейший анализ дисперсионного уравнения см. в обзоре Каганова и др. (1997) и в оригинальных статьях.

14.5. Пусть волна распространяется вдоль оси Oz, постоянную распространения обозначим через k.

Волны электрического типа.

а) Поперечные компоненты полей - четные функции координаты x. Поле внутри диэлектрика может выражаться через тригонометрические либо гиперболические функции:

при $x > a$

$$\mathscr{E}_z = Ae^{-sx}, \quad \mathscr{E}_x = \frac{ik}{s}Ae^{-sx}, \quad \mathscr{H}_y = \frac{i\omega}{sc}Ae^{-sx}, \quad s > 0 \tag{1}$$

при $-a \leqslant x \leqslant a$

(2) $\mathscr{E}_z = B\sin\kappa x, \quad \mathscr{E}_x = \frac{ik}{\kappa}B\cos\kappa x, \quad \mathscr{H}_y = \frac{i\omega\varepsilon}{\kappa c}B\cos\kappa x, \quad \kappa > 0;$

либо

(3) $\mathscr{E}_z = B\,\mathrm{sh}\,\kappa x, \quad \mathscr{E}_x = -\frac{ik}{\kappa}B\,\mathrm{ch}\,\kappa x, \quad \mathscr{H}_y = -\frac{i\omega\varepsilon}{\kappa c}B\,\mathrm{ch}\,\kappa x, \quad \kappa > 0;$

при $x < -a$

$$\mathscr{E}_x = -Ae^{sx}, \quad \mathscr{E}_x = \frac{ik}{s}Ae^{sx}, \quad \mathscr{H}_y = \frac{i\omega}{sc}Ae^{sx} \tag{4}$$

где $A = Be^{sa}\sin\kappa a$; остальные компоненты $\mathscr{E}$ и $\mathscr{H}$ равны нулю. Параметры κ и s удовлетворяют системе уравнений

$$(sa)^2 + (\kappa a)^2 = \frac{\omega^2 a^2}{c^2}(\varepsilon(\omega)\mu(\omega) - 1) \tag{5}$$

$$sa = \frac{1}{\varepsilon(\omega)}\kappa a \operatorname{tg}\kappa a \tag{6}$$

в случае тригонометрических функций либо системе

$$(sa)^2 - (\kappa a)^2 = \frac{\omega^2 a^2}{c^2}(\varepsilon(\omega)\mu(\omega) - 1) \tag{7}$$

$$sa = -\frac{1}{\varepsilon(\omega)}\kappa a \operatorname{th}\kappa a \tag{8}$$

если поля выражаются через гиперболические функции.
Обе системы легко проанализировать графически. В первом случае возможные значения κ и s соответствуют точкам пересечения кривых (6) с окружностью радиуса $r = (\omega a/c)\sqrt{\varepsilon\mu - 1}$ (рис. 14.10). Тригонометрические решения имеются при $\varepsilon > 0, \mu > 0, \varepsilon\mu > 1$ и при $\varepsilon < 0, \mu < 0, \varepsilon\mu > 1$. При заданных $\omega, a, \varepsilon, \mu$ имеется конечное число точек пересечения, т.е. конечное число типов волн, у которых распределение поля описывается формулами (1), (2), (4). В частности, при $r < \pi$ существует лишь одна волна типа E_{00}.

Рассмотрим зависимость постоянной распространения

$$k = \sqrt{\frac{\omega^2\varepsilon\mu}{c^2} - \kappa^2} = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} + s^2} \tag{9}$$

от частоты ω при заданных параметрах диэлектрического слоя для данного типа волны. Из рис. 14.10 видно, что при частотах, близких к граничной частоте, при которой появляется данный тип волны, s близко к нулю, а $k-$

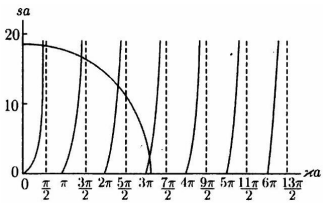


Рис. 14.10

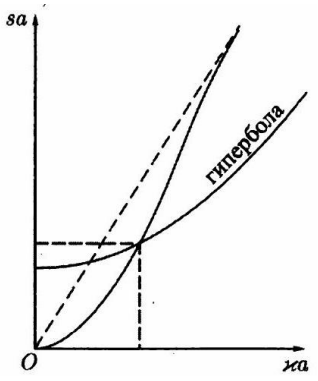


Рис. 14.11

к ω/c. Волна при этих частотах имеет такую же постоянную распространения, как и в вакууме, и поле проникает на большие расстояния от границы слоя. С ростом ω параметр s возрастает, а κ остается ограниченным. При этом k стремится к $(\omega/c)\sqrt{\varepsilon\mu}$, т. е. к тому значению, которое соответствует волне, распространяющейся в неограниченной диэлектрической среде с параметрами ε, μ. При достаточно больших ω и, следовательно, больших s, поле сосредоточено почти целиком внутри диэлектрического слоя.

В случае гиперболического решения нужно искать точку пересечения гиперболы (7) с кривой (8). Поскольку произведение κa th κa неотрицательно, нужное решение существует только при условиях $\varepsilon < 0, \kappa^2 + +(\omega/c)^2(\varepsilon\mu - 1) > 0$. Имеется всего одна точка пересечения, удовлетворяющая этим условиям (рис. 14.11).

б) Поперечные компоненты полей - нечетные функции координаты x. Поле внутри диэлектрика опять может выражаться через тригонометрические либо гиперболические функции:

при $x > a$

$$\mathscr{E}_z = Ae^{-sx}, \quad \mathscr{E}_x = \frac{ik}{s}Ae^{-sx}, \quad \mathscr{H}_y = \frac{i\omega}{sc}Ae^{-sx}, \quad s > 0 \tag{10}$$

при $-a \leqslant x \leqslant a$

(11) $\mathscr{E}_z = B\cos\kappa x, \quad \mathscr{E}_x = -\frac{ik}{\kappa}B\sin\kappa x, \quad \mathscr{H}_y = -\frac{i\omega\varepsilon}{\kappa c}B\sin\kappa x, \quad \kappa > 0$

либо

(12) $\mathscr{E}_z = B\,\mathrm{ch}\,\kappa x, \quad \mathscr{E}_x = -\frac{ik}{\kappa}B\,\mathrm{sh}\,\kappa x, \quad \mathscr{H}_y = -\frac{i\omega\varepsilon}{\kappa c}B\,\mathrm{sh}\,\kappa x, \quad \kappa > 0;$

при $x < -a$

$$\mathscr{E}_z = Ae^{sx}, \quad \mathscr{E}_x = -\frac{ik}{s}Ae^{sx}, \quad \mathscr{H}_y = -\frac{i\omega}{sc}Ae^{sx} \tag{13}$$

где $A = Be^{sa}\,\mathrm{ch}\,\kappa a$; остальные компоненты $\mathscr{E}$ и $\mathscr{H}$ равны нулю. Для тригонометрического решения параметры s и κ определяются из системы уравнений

$$(sa)^2 + (\kappa a)^2 = \frac{\omega^2 a^2}{c^2}(\varepsilon(\omega)\mu(\omega) - 1), \quad sa = -\frac{1}{\varepsilon(\omega)}\kappa a\,\mathrm{ctg}\,\kappa a \tag{14}$$

в гиперболическом случае имеем систему

$$(sa)^2 - (\kappa a)^2 = \frac{\omega^2 a^2}{c^2}(\varepsilon(\omega)\mu(\omega) - 1), \quad sa = -\frac{1}{\varepsilon(\omega)}\kappa a\,\mathrm{ctg}\,\kappa a \tag{15}$$

Волны магнитного типа можно проанализировать таким же путем.

14.6. Вдоль слоя могут распространяться четные волны электрического типа и нечетные волны магнитного типа с теми же характеристиками (постоянная распространения, конфигурация полей в области $x > 0$ и др.), что и в предыдущей задаче.

14.7.

$$K = \left\{1 + \frac{(\varepsilon/sa)\cos^2\kappa a}{1 + \sin 2\kappa a/\kappa a}\right\} \approx 1 - \frac{\varepsilon\cos^2\kappa a}{sa + (s/\kappa)\sin 2\kappa a} \quad \text{при} \quad sa \gg \varepsilon$$

Распространение волны внутри диэлектрика в условиях, когда во внешнюю область поле почти не проникает, можно рассматривать как результат многократного полного отражения от его границ (см. задачу 12.13).

14.9. Волноводные моды описываются формулами (14.10). E-волны:

$$\mathscr{E}_z = \mathscr{E}_0 \sin \kappa_n x, \quad \mathscr{E}_x = \frac{ik}{\kappa_n} \mathscr{E}_0 \cos \kappa_n x$$
$$\mathscr{H}_y = \frac{i\omega\varepsilon}{\kappa_n c} \mathscr{E}_0 \cos \kappa_n x, \quad \kappa_n = \frac{n\pi}{a}, \quad n = 1, 2 \dots$$

H-волны:

$$\mathscr{H}_z = \mathscr{H}_0 \cos \kappa_n x, \quad \mathscr{H}_x = -\frac{ik}{\kappa_n} \mathscr{H}_0 \sin \kappa_n x$$
$$\mathscr{E}_y = \frac{i\omega\mu}{\kappa_n c} \mathscr{H}_0 \sin \kappa_n x, \quad \kappa_n = \frac{n\pi}{a}, \quad n = 1, 2 \dots$$

Постоянная распространения (волновое число) тех и других волн выражается через частоту и параметр κ_n, характеризующий пространственное распределение поля:

$$k^2 = \frac{\omega^2 \varepsilon\mu}{c^2} - \kappa_n^2, \quad \text{где} \quad \omega > \omega_n$$

ω_n - частота отсечки, ограничивающая снизу частоты волн с данным пространственным распределением поля. Кроме указанных выше, возможно распространение чисто поперечной (ТЕН) волны с $\mathscr{E}_z = \mathscr{E}_y = \mathscr{H}_z = \mathscr{H}_x = 0, \quad \mathscr{E}_x = \sqrt{\mu/\varepsilon}\mathscr{H}_y \neq 0$ и с произвольной частотой $0 < \omega < \infty$. У этой волны, как в неограниченной среде, $k^2 = \omega^2\varepsilon\mu/c^2$.

14.10. В случае E-волн:

$$\mathscr{E}_z = \mathscr{E}_0 \sin \kappa_1 x \sin \kappa_2 y$$

где

$$\kappa_1 = \frac{n_1\pi}{a}, \quad \kappa_2 = \frac{n_2\pi}{b}, \quad n_1, n_2 = 1, 2 \dots$$

начало координат - в углу прямоугольного сечения, размеры которого по осям Ox и Oy равны соответственно a и b.

, В случае H-волн:

$$\mathscr{H}_z = \mathscr{H}_0 \cos \kappa_1 x \cos \kappa_2 y$$

с теми же κ_1, κ_2, однако одно из чисел n_1, n_2 может теперь принимать значение 0 . Из приведенных формул следует, что в поперечных направлениях поле имеет характер стоячих волн. Зависимость постоянной распространения k от ω имеет вид:

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \pi^2 \left(\frac{n_1^2}{a^2} + \frac{n_2^2}{b^2} \right)$$

Поперечные компоненты полей выражаются через $\mathscr{E}_z, \mathscr{H}_z$ с помощью уравнений Максвелла.

14.11. Для E-волн:

$$\alpha = \frac{2\zeta'\omega}{ck\kappa^2 ab} \left(\kappa_1^2 b + \kappa_2^2 a \right)$$

где

$$\kappa^2 = \kappa_1^2 + \kappa_2^2, \quad \zeta' = \operatorname{Re} \zeta$$

Для волн типа H_{n0}:

$$\alpha = \frac{\zeta'\omega}{ckab}\left(a + \frac{2\kappa^2 b}{k^2+\kappa^2}\right)$$

Для волн типа $H_{n_1 n_2}$ $(n_1, n_2 \neq 0)$:

$$\alpha = \frac{2c\kappa^2\zeta'}{\omega kab}\left[a + b + \frac{k^2}{\kappa^4}\left(\kappa_1^2 a + \kappa_2^2 b\right)\right]$$

Обозначения те же, что и в предыдущей задаче.

14.12. Волны электрического типа.

Для определения волн этого типа нужно решить уравнение для продольной компоненты электрического поля:

$$\frac{\partial^2 \mathscr{E}_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \mathscr{E}_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \mathscr{E}_z}{\partial \alpha^2} + \kappa^2 \mathscr{E}_z = 0 \tag{1}$$

Уравнение (1) интегрируется путем разделения переменных. Частные решения имеют вид

$$\mathscr{E}_z(r, \alpha) = J_m(\kappa r)\sin\left(m\alpha + \psi_m\right) \tag{2}$$

где J_m - функция Бесселя, ψ - произвольная постоянная. Чтобы поле возвращалось к исходному значению при изменении α на 2π, нужно считать m целым числом ($m = 0, 1, 2, \ldots$).

Поперечные компоненты электрического и магнитного полей выражаются через $\mathscr{E}_z$ с помощью уравнений Максвелла:

$$\begin{aligned}
\mathscr{E}_r &= \frac{ik}{\kappa} J'_m(\kappa r)\sin\left(m\alpha + \psi_m\right) \\
\mathscr{E}_\alpha &= \frac{imk}{\kappa^2 r} J_m(\kappa r)\cos\left(m\alpha + \psi_m\right) \\
\mathscr{H}_r &= -\frac{im\omega}{\kappa^2 cr} J_m(\kappa r)\cos\left(m\alpha + \psi_m\right) \\
\mathscr{H}_\alpha &= \frac{i\omega}{\kappa c} J'_m(\kappa r)\sin\left(m\alpha + \psi_m\right)
\end{aligned}$$

Возможные значения параметра κ определяются из граничных условий на стенке волновода:

$$\mathscr{E}_r|_{r=a} = 0, \quad \mathscr{E}_\alpha|_{r=a} = 0$$

Это дает $\kappa_{mn} a = \alpha_{mn}$, где $\alpha_{mn} - n$-й корень функции Бесселя: $J_m(\alpha_{mn}) = 0, n = 1, 2, \ldots$

Таким образом, волны рассматриваемого типа характеризуются двумя индексами m, n; при $m = 0$ поле обладает симметрией вращения относительно оси z. Фазы ψ_m в случае идеального волновода определяются условиями возбуждения. В реальных случаях, однако, они существенно зависят от дефектов стенок волновода (отступления от круговой формы сечения, продольные царапины и т. д.).

Распространение волны вдоль волновода возможно, если $k = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \kappa^2}$ будет вещественной величиной. Поэтому волна типа m, n будет распространяться в волноводе, если ее частота удовлетворяет неравенству

$$\omega^2 \geqslant \frac{c^2 \alpha_{mn}^2}{a^2}$$

Наименьшая частота возможна для волны типа $(0, 1)$:

$$\omega_0 = \frac{c\alpha_{01}}{a} \approx 2,4\frac{c}{a}$$

Соответствующая длина волны

$$\lambda_0 = \frac{2\pi c}{\omega_0} \approx 2,6a$$

- порядка радиуса волновода.

Волны магнитного типа:

$$\mathscr{H}_z = J_m(\kappa r)\sin(m\alpha + \psi_m) \quad (m = 0, 1, 2, \ldots)$$

Значения постоянной распространения k определяются из равенства

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\beta_{mn}^2}{a^2} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

где $\beta_{mn} - n$-й корень уравнения $J'_m(\beta_{mn}) = 0$. Наименьший корень $\beta_{11} \approx \approx 1,8$; ему соответствуют граничная частота $\omega_0 \approx 1,8c/$ и и граничная длина волны $\lambda_0 = 2\pi c/\omega_0 \approx 3,5a$.

Для волн магнитного типа граничная частота ниже, чем для волн электрического типа. Если частота волны лежит в пределах $\omega_{0e} > \omega > \omega_{0m}$, то эта волна может быть только типа H_{11}.

14.13. Для E-волны:

$$\alpha = \frac{\omega\zeta'}{cak}$$

для H-волны типа (m, n):

$$\alpha = \frac{c\zeta'\kappa^2}{\omega ak}\left[1 + \frac{m^2\omega^2}{c^2\kappa^2\left(a^2\kappa^2 - m^2\right)}\right]$$

где $\zeta' = \operatorname{Re}\zeta$.

14.14. Волновой вектор k и частота ω волн в волноводе связаны соотношением

$$\frac{\omega^2}{c^2} = k^2 + \kappa^2$$

где κ - постоянная, зависящая от типа волны и размеров поперечного сечения волновода. По обычным формулам имеем

$$v_{ph} = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\sqrt{1 - (\lambda/\lambda_0)^2}}, \quad v_g = \frac{d\omega}{dk} = c\sqrt{1 - (\lambda/\lambda_0)^2}$$

где λ_0 - граничная длина волны.

Из полученных формул видно, что всегда $v_{ph} > c, v_g < c$, причем $v_{ph} \cdot v_g = c^2$. Этот результат справедлив для волновода, внутри которого вакуум (диэлектрические свойства воздуха для рассматриваемой области явлений практически не отличаются от свойств вакуума).

Если волновод заполнен диэлектриком, причем дисперсией ε и μ можно пренебречь, все вышеприведенные формулы остаются справедливыми при замене c на $v = c/\sqrt{\varepsilon\mu}$. Поэтому в таком волноводе

$$v_{ph} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu\left(1 - \lambda^2/\lambda_0^2\right)}}$$

может стать меньше c, волна «замедляется» (см. также задачу 14.23, в которой рассмотрена лестничная замедляющая структура).

14.15. $H_z = \frac{1}{2}\mathscr{H}_0\left[e^{i(\kappa_1 x+kz)} + e^{i(-\kappa_1 x+kz)}\right]e^{-i\omega t}$. Направления распространения двух плоских волн, на которые разлагается волна H_{10}, составляют с осью волновода угол θ (рис. 14.12), который определяется условием

$$\cos\theta = \frac{k}{\sqrt{k^2+\kappa_1^2}} = \sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_0}\right)^2}$$

Фазовая плоскость I перемещается со скоростью c в направлении, составляющем угол θ с осью Oz; однако скорость ее перемещения вдоль оси волновода будет больше:

$$v = \frac{c}{\cos\theta} = \frac{c}{\sqrt{1-(\lambda/\lambda_0)^2}} = v_{ph}$$

Это и есть фазовая скорость волны в волноводе.

Групповая скорость совпадает со скоростью движения энергии. Но в плоской волне в вакууме энергия движется со скоростью c в направлении распространения волны. Каждая плоская волна, входящая в состав рассматриваемой волны H_{10}, будет испытывать многократные отражения от стенок волновода, и ее «путь» будет зигзагообразным. Результирующая скорость вдоль оси волновода будет

$$v = c\cos\theta = c\sqrt{1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_0}\right)^2}$$

что совпадает с групповой скоростью v_g.

14.16. 1. Пусть стенки волновода медленно раздвигаются, каждая со скоростью βc относительно его средней линии (рис. 14.13). Лучевой путь одной из двух плоских волн, образующих волноводную моду, изображен на рисунке. Падающая волна распространяется под углом θ к оси Ox, где $\cos\theta = \omega_n/\omega, \omega_n$ - граничная частота рассматриваемой моды. В системе стенки для отраженной волны имеем $\theta' = \theta, \omega' = \omega$. В лабораторной системе (см. задачу 3.40) в результате преобразований Лоренца получаем

$$\omega' = \omega\frac{1+\beta^2-2\beta\cos\theta}{1-\beta^2}, \quad \cos\theta' = \frac{\cos\theta\,(1+\beta^2)-2\beta}{1+\beta^2-2\beta\cos\theta} \tag{1}$$

При медленном перемещении стенок ($\beta \ll 1$) достаточно взять формулы (1) в линейном по β приближении:

$$\Delta\omega = \omega' - \omega \approx -2\beta\omega\cos\theta, \quad \Delta\theta = \theta' - \theta \approx 2\beta\sin\theta \tag{2}$$

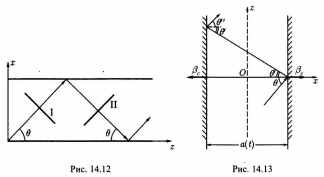


Рис. 14.12

Рис. 14.13

В этом же приближении вычислим прирост Δa расстояния между стенками за время τ распространения волны между последовательными отражениями:

$$\Delta a = 2\beta c\tau \approx \frac{2\beta a}{\cos\theta} \tag{3}$$

Теперь находим зависимость волноводной моды от расстояния a на временах, значительно превышающих время τ. На столь больших временах приращения

$\Delta\omega, \Delta\theta, \Delta a$ можно рассматривать как бесконечно малые. Деля почленно равенства (2), находим дифференциальное уравнение $d\omega/d\theta = -\omega\cos\theta/\sin\theta$, интегрирование которого дает адиабатический инвариант (Ривлин, 1991; 1997)

$$\omega\sin\theta = \omega_0\sin\theta_0 \tag{4}$$

Здесь ноликом отмечены начальные значения величин. Далее выражаем $\cos^2\theta = 1 - (\omega_0/\omega)^2\sin^2\theta_0$ и находим из (2) и (3) дифференциальное уравнение

$$\frac{d\omega}{da} = -\frac{1}{a}\left(\omega - \frac{\omega_0^2}{\omega}\sin^2\theta_0\right) \tag{5}$$

интегрирование которого дает еще один адиабатический инвариант

$$a^2\cot^2\theta = a_0^2\cot^2\theta_0 \tag{6}$$

С помощью дисперсионного соотношения и равенства (5) находим

$$(ck)^2 = \omega^2 - \omega_n^2 = \omega^2\left(1-\cos^2\theta\right) = \omega_0^2\sin^2\theta_0 = \omega_0^2 - \omega_{n0}^2 = (ck_0)^2$$

т. е. постоянная распространения k представляет собой адиабатический инвариант. □
2. Вычислим изменение энергии ΔW отдельной волноводной моды (на единицу площади волновода) при изменении расстояния a между стенками волновода, рассматривая это изменение как результат работы внешнего источника против сил давления электромагнитного поля моды на стенки. В задаче 12.17 было найдено, что плоская волна, падающая под углом θ на идеально отражающую стенку ($R(\theta) = 1$), оказывает давление $P = 2w\cos^2\theta$, где w - плотность энергии волны. Энергия моды на единицу площади волновода равна $W = 2wa$, поэтому давление на одну стенку $P = (W/a)\cos^2\theta$. Прирост энергии моды за счет работы источника по сближению стенок $\Delta W = -P\Delta a/2 - P\Delta a/2 = -(W/a)\cos^2\theta\Delta a$. Записываем последнее соотношение в дифференциальной форме и с помощью (6) получаем $dW = -(W/a)\cos^2\theta da = -W\cot\theta d\theta$. Интегрирование этого дифференциального уравнения с использованием (4) дает еще один адиабатический инвариант:

$$\frac{W}{\omega} = \frac{W_0}{\omega_0}. \tag{8}$$

Наглядный смысл этого инварианта проявляется при квантовой трактовке волноводной моды с частотой ω и постоянной распространения $k = +\sqrt{\omega^2 - \omega_n^2}$. Выразим ее энергию через число фотонов n : $W = \hbar\omega(n+ +1/2 + 1/2) = \hbar\omega(n+1)$. Здесь две половинки соответствуют нулевым колебаниям осцилляторов, которые относятся к модам k и $-k$, имеющим одинаковые частоты ω. Сохранение адиабатического инварианта (8) означает сохранение числа фотонов данной моды при медленном изменении расстояния между стенками.

Любопытная трактовка полученных соотношений возникает, если их применить к предельному случаю, когда начальный волновод охватывает все безграничное пространство и $a_0 \to \infty$. В свободном пространстве граничная частота $\omega_{n0} = 0$. Рассмотрим моду, представляющую собой постоянное поле с $\omega_0 = 0$. Хотя реальных фотонов в этом случае нет, но присутствуют вакуумные флуктуации, приводящие к эффекту Казимира (см. задачу 6.17). Из уравнения (7) находим $\omega = \omega_n$ для волновода конечных размеров. Работа по сближению стенок оказывается равной энергии $\hbar\omega_n$ фотона, имеющего граничную частоту ω_n. Эта энергия затрачена на создание массы $M = \hbar\omega_n/c^2$ волноводного фотона.

14.17. Скорость v движения волноводного фотона следует отождествить с групповой

скоростью моды: $v = d\omega/dk$. Пользуясь дисперсионными соотношениям из условия предыдущей задачи, находим $v = d\mathscr{E}_\omega/dp = c^2 p/\mathscr{E}_\omega < c$, откуда получаем связь энергии и импульса фотона с его скоростью:

$$\mathscr{E}_\omega = \frac{Mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad p = \frac{Mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad M = \frac{\hbar\omega_n}{c^2}$$

Эти формулы совпадают с соотношениями (3.33) для релятивистской частицы. Другие свойства фотонов в волноводе обсуждаются в обзоре Ривлина (1997).

14.18.

$$H_\alpha = E_r = \frac{A}{r} e^{i\omega(z/c - t)} \tag{1}$$

где A - постоянная, а остальные компоненты полей равны нулю.
Поток энергии

$$\bar{\gamma} = \frac{A^2 c}{4} \ln \frac{b}{a} \tag{2}$$

В случае одиночного идеально проводящего провода поля во всем пространстве вне провода описываются формулами (1); полный поток энергии через плоскость $z = \text{const}$ бесконечно велик: $\gamma \to \infty$ при $b \to \infty$. Поэтому такая волна не может поддерживаться источником конечной мощности, и, следовательно, рассматриваемый случай не имеет физического смысла.
14.19. Волны электрического типа:

$$\mathscr{E}_z = [A_{mn} J_m(\kappa_{mn} r) + B_{mn} Y_m(\kappa_{mn} r)] \sin(m\alpha + \psi_m), \quad m = 0, 1, 2 \ldots$$

где κ_{mn} – n-й корень уравнения

$$J_m(\kappa a) Y_m(\kappa b) - J_m(\kappa b) Y_m(\kappa a) = 0$$

Здесь Y_m, J_m - цилиндрические функции (см. главу 1), A_{mn} и B_{mn} - постоянные, связанные условием

$$A_{mn} J_m(\kappa_{mn} a) + B_{mn} Y_m(\kappa_{mn} a) = 0$$

Волны магнитного типа:

$$\mathscr{H}_z = [C_{mn} J_m(\kappa_{mn} r) + D_{mn} Y_m(\kappa_{mn} r)] \sin(m\alpha + \psi_m), \quad m = 0, 1, 2, \ldots$$

где κ_{mn} – n-й корень уравнения

$$J'_m(\kappa a) Y'_m(\kappa b) - Y'_m(\kappa a) J'_m(\kappa b) = 0$$

а C_{mn} и D_{mn} связаны условием:

$$C_{mn} J'_m(\kappa_{mn} a) + D_{mn} Y'_m(\kappa_{mn} a) = 0$$

Остальные компоненты электрического и магнитного полей выражаются через $\mathscr{E}_z$ и $\mathscr{H}_z$ с помощью уравнений Максвелла.
14.20.

$$\alpha = \frac{\zeta'(a+b)}{2ab \ln(b/a)}$$

где $\zeta' = \operatorname{Re}\zeta$.

14.21. Если поле симметрично относительно оси провода, продольная компонента $\mathscr{E}_z$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2\mathscr{E}_z}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\mathscr{E}_z}{dr} + \boldsymbol{k}^2\mathscr{E}_z = 0 \tag{1}$$

Поскольку рассматривается проводник с конечной проводимостью, параметры k и κ будут комплексными. Определим знак κ так, чтобы $\operatorname{Im}\kappa = \kappa'' > 0$.

Общее решение уравнения (1) запишем в виде

$$\mathscr{E}_z(r) = A'H_0^{(1)}(\kappa r) + B'H_0^{(2)}(\kappa r)$$

где $H_0^{(1)}, H_0^{(2)}$ - функции Ханкеля. Из асимптотического поведения этих функций (см. раздел 1.3) и условия $\operatorname{Im}\kappa > 0$ следует, что должно быть $B' = 0$, так как в противном случае поле будет возрастать на бесконечности. Остальные компоненты $\mathscr{E}$ и $\mathscr{H}$ выразим через $\mathscr{E}_z$ с помощью уравнений Максвелла:

$$\mathscr{E}_z = A'H_0^{(1)}(\kappa r), \quad \mathscr{E}_r = \frac{ik}{k}A'H_1^{(1)}(\kappa r), \quad H_\alpha = \frac{i\omega}{\kappa c}A'H_1^{(1)}(\kappa r)$$

При достаточно больших значениях κr функции $H_0^{(1)}$ и $H_1^{(1)}$ пропорциональны $e^{-\kappa'' r}/\sqrt{\kappa r}$ и, следовательно, электромагнитное поле затухает экспоненциально на больших расстояниях от провода. Максимальная концентрация поля существует вблизи провода, волна имеет поверхностный характер.

Граничное условие Леонтовича на поверхности провода

$$\mathscr{E}_z = \zeta\mathscr{H}_\alpha$$

приводит к характеристическому уравнению для определения :

$$\kappa a\frac{H_0^{(1)}(\kappa a)}{H_1^{(1)}(\kappa a)} = i\zeta\frac{\omega}{c}a.$$

Здесь ζ - поверхностный импеданс металла. Для хорошего проводника $|\zeta| \ll 1$, поэтому последнее равенство может выполняться только при малых ка. Пользуясь приближенными формулами для $H_0^{(1)}$ и $H_1^{(1)}$, получим

$$(\kappa a)^2 \ln\left(\frac{\gamma\kappa a}{2i}\right) = i\zeta\frac{\omega}{c}a, \quad \ln\gamma = 0,5772 \tag{3}$$

Трансцендентное уравнение (3) нельзя решить графическим методом, так как входящие в него величины комплексны (но нетрудно получить численное решение на компьютере с помощью стандартных программ). Зоммерфельд использовал для решения этого уравнения метод итераций, основанный на том, что $\ln(\kappa a)$ изменяется значительно медленнее, чем a. Обозначим $\left(\frac{\gamma\kappa a}{2i}\right)^2 = u, \frac{i\gamma^2\omega}{2c}\zeta a = v$. Тогда уравнение (3) запишется в виде

$$u\ln u = v.$$

Если найдено приближенное значение u_n (n-е приближение), то более точное значение u_{n+1}($(n+1)$-е приближение) можно получить по формуле

$$u_{n+1}\ln u_n = v$$

В нулевом приближении можно положить $u_0 = v$, тогда

$$u_1 = \frac{v}{\ln v}, \quad u_2 = \frac{v}{\ln\left(\frac{v}{\ln v}\right)}, \quad u_3 = \frac{v}{\ln\frac{v}{\ln\left(\frac{v}{\ln v}\right)}}$$

Для дециметровых радиоволн ($\lambda = 2\pi c/\omega = 30$ см), распространяющихся вдоль медного провода радиусом 1 мм (проводимость меди $\sigma = = 5,2 \cdot 10^{17}\text{с}^{-1}$), расчет указанным методом дает

$$u \approx (4,2 + 4,5i) \cdot 10^{-8}$$

откуда

$$k = \frac{\omega}{c}\left[1 + (6,0 + 6,4i) \cdot 10^{-5}\right].$$

Фазовая скорость волны

$$v_{ph} = \frac{\omega}{\operatorname{Re} k} = \left(1 - 6 \cdot 10^{-5}\right) c < c$$

волна несколько замедлилась.

Этот результат можно понять из следующих соображений. В случае идеальной проводимости провода поперечная электромагнитная волна имеет фазовую скорость c, поле внутри провода равно нулю. При конечной проводимости часть энергии будет распространяться внутри провода; так как скорость распространения в металле значительно меньше c, то «в среднем» электромагнитная волна замедлится. Кроме того, появится затухание.

Исследуем характер поля в предельном случае $\zeta \to 0$ (идеальная проводимость). При этом, как следует из (3), $\kappa \to 0, k \to \omega/c$. Используя выражение функций $H_0^{(1)}$ и $H_1^{(1)}$ при малых аргументах, получим из формул (2)

$$\mathscr{E}_z = \lim_{\kappa\to 0} \frac{2iA'}{\pi} \ln\left(\frac{\gamma\kappa r}{2i}\right), \quad \mathscr{E}_r = \lim_{\kappa\to 0} \frac{2kA'}{\pi\kappa^2} \cdot \frac{1}{r}, \quad \mathscr{H}_\alpha = \lim_{\kappa\to 0} \frac{2kA'}{\pi\kappa^2} \cdot \frac{1}{r}$$

Поскольку компоненты поля не могут принимать бесконечных значений, нужно предположить, что величина A' пропорциональна κ^2. Положим $A' = A\kappa^2/k$, тогда

$$\mathscr{E}_r = \mathscr{H}_\alpha = \frac{A}{r}, \quad \mathscr{E}_z = 0$$

Это - чисто поперечная электромагнитная волна, распространяющаяся со скоростью c.

14.22. Составляющие электромагнитного поля в волноводе определяются следующими выражениями:

при $r \leqslant a$

$$\mathscr{E}_z = \mathscr{E}_0 J_0(\kappa_1 r), \quad \mathscr{E}_r = -i\frac{k}{\kappa_1}\mathscr{E}_0 J_1(\kappa_1 r), \quad \mathscr{H}_\alpha = -i\frac{\omega}{c\kappa_1}\mathscr{E}_0 J_1(\kappa_1 r)$$

при $a \leqslant r \leqslant b$

$$\mathscr{E}_z = AJ_0(\kappa_2 r) + BY_0(\kappa_2 r), \quad \mathscr{E}_r = -i\frac{k}{\kappa_2}\left[AJ_1(\kappa k_2 r) + BY_1(\kappa_2 r)\right]$$

$$\mathscr{H}_\alpha = -i\frac{\varepsilon\omega}{c\kappa_2}\left[AJ_1(\kappa_2 r) + BY_1(\kappa_2 r)\right]$$

Здесь $\kappa_1 = \sqrt{\omega^2/c^2 - k^2}, \kappa_2 = \sqrt{\varepsilon\omega^2/c^2 - k^2}; \mathscr{E}_0, A, B$ - постоянные.

Граничные условия запишутся в виде

$$\mathscr{E}_z|_{r=b} = 0, \quad \mathscr{E}_z|_{r=a-0} = \mathscr{E}_z|_{r=a+0}, \quad \mathscr{H}_\alpha|_{r=a-0} = \mathscr{H}_\alpha|_{r=a+0}$$

При этом граничное условие для $\mathscr{E}_\alpha$ будет выполняться автоматически.
Исключая постоянные $A, B, \mathscr{E}_0$, получим трансцендентное уравнение, связывающее k и ω:

$$\frac{\varepsilon\kappa_1}{\kappa_2} \cdot \frac{J_0(\kappa_1 a)}{J_1(\kappa_1 a)} = \frac{J_0(\kappa_2 a) Y_0(\kappa_2 b) - Y_0(\kappa_2 a) J_0(\kappa_2 b)}{J_1(\kappa_2 a) Y_0(\kappa_2 b) - Y_1(\kappa_2 a) J_0(\kappa_2 b)} \tag{1}$$

При $a \ll b$ это уравнение существенно упрощается. Рассмотрим волну, которая будет иметь наибольшее k. Если бы волновод был заполнен диэлектриком целиком ($a = 0$), то соответствующее значение κ_2 было бы равно $\kappa_{02} = \alpha_{01}/b$, где $\alpha_{01} = 2,4$, $J_0(\alpha_{01}) = 0$ (см. задачу 14.12).

Будем искать решение, мало отличающееся от κ_{02}:

$$\kappa_2 = \kappa_{02} + \kappa_2' = \frac{\alpha_{01}}{b} + \frac{\Delta\alpha}{b}$$

где $\Delta\alpha$ имеет порядок не ниже a/b. Считая $\alpha_{01} a/b \ll 1$, используем приближенные формулы для J_0, Y_0, J_1, Y_1 из раздела 1.3. Это дает вместо (1) уравнение

$$\varepsilon\left[(\kappa_2 a)^2 Y_0(\kappa_2 b) + \frac{2}{\pi} J_0(\kappa_2 b)\right] = (\kappa_2 a)^2 \left[Y_0(\kappa_2 b) + \frac{2}{\pi} \ln\frac{2}{\gamma\kappa_2 a} J_0(\kappa_2 b)\right]$$

Положим в нем $Y_0(\kappa_2 b) = Y_0(\alpha_{01} + \Delta\alpha) \approx Y_0(\alpha_{01})$, $J_0(\kappa_2 b) = -J_1(\alpha_{10}\Delta\alpha)$. Тогда, отбрасывая малый член с логарифмом, получим

$$\Delta\alpha = \left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right) \frac{\kappa\alpha_{01}^2}{4} \cdot \frac{Y_0(\alpha_{01})}{J_1(\alpha_{01})} \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^2$$

Фазовая скорость волны

$$v_{ph} = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{\varepsilon\omega^2}{c^2} - \frac{\left(\alpha_{01}^2 + 2\alpha_{01}\Delta\alpha\right)}{b^2}}}$$

Вводя обозначение $\omega_0 = \alpha_{01} c/b \approx 2,4c/b$ (минимальная частота для волновода, не содержащего диэлектрика) и подставляя табличные значения $Y_0(\alpha_{01})$ и $J_1(\alpha_{01})$, получим

$$v_{ph} = c\left\{\varepsilon - \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 \left[1 + 3,7\left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right)\frac{a^2}{b^2}\right]\right\}^{-\frac{1}{2}} \tag{2}$$

Если волновод заполнен диэлектриком целиком ($a = 0$), то

$$v_{ph} = c\left[\varepsilon - \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}$$

Граничная частота частично заполненного волновода

$$\omega_c = \frac{\omega_0}{\sqrt{\varepsilon}}\left[1 + 1,85\left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right)\frac{a^2}{b^2}\right]$$

лежит между граничными частотами незаполненного и целиком заполненного волновода:

$$\frac{\omega_0}{\sqrt{\varepsilon}} < \omega_c < \omega_0$$

Фазовая скорость (2) становится меньше скорости при частотах

$$\omega > \frac{\omega_0}{\sqrt{\varepsilon - 1}} \left[1 + 1,85 \left(1 - \frac{1}{\varepsilon} \right) \frac{a^2}{b^2} \right]$$

Таким образом, волновод, частично или целиком заполненный диэлектриком, является замедляющей системой: фазовая скорость электромагнитных волн в нем может быть меньше c. Важной особенностью медленных волн является то, что они могут эффективно взаимодействовать с пучками заряженных частиц. Взаимодействие волн с пучком частиц может быть использовано как для генерации и усиления электромагнитных колебаний сверхвысокой частоты (клистрон, лампа с бегущей волной, магнетрон), так и для ускорения частиц (линейный ускоритель).

14.23. Граничные условия на анизотропно проводящей плоскости имеют вид

$$E_{1x} = E_{2x} = 0, \quad H_{1x} = H_{2x}, \quad E_{1z} = E_{2z}$$

Индексом 1 обозначена область $y > 0$, индексом 2 - область $y < 0$. Первые два равенства являются следствием идеальной проводимости полосок, последние два выражают отсутствие тока в направлении, перпендикулярном полоскам. Кроме того, $E_y = E_z = 0$ при $x = \pm a$ и все составляющие поля должны быть ограничены при $y \to \pm\infty$.

Решая уравнения Максвелла с указанными граничными условиями, найдем

$$\mathscr{E}_{1x} = 0, \quad \mathscr{E}_{1y} = -Be^{-\beta y} \cos \alpha x, \quad \mathscr{E}_{1z} = iB \frac{\beta}{k} e^{-\beta y} \cos \alpha x$$

$$\mathscr{H}_{1x} = B \left(\frac{k_0 \varepsilon}{k} - \frac{\alpha^2}{k_0 k} \right) e^{-\beta y} \cos \alpha x, \quad \mathscr{H}_{1y} = B \frac{\alpha \beta}{k k_0} e^{-\beta y} \sin \alpha x$$

$$\mathscr{H}_{1z} = -iB \frac{\alpha}{k_0} e^{-\beta y} \sin \alpha x$$

где $k_0 = \omega / c$, B - постоянная,

$$\alpha = \alpha_m = \frac{(2m+1)\pi}{2}, \quad m = 0, 1, 2 \ldots \quad \beta = \beta_m = \sqrt{k^2 - k_0^2 \varepsilon + \alpha_m^2}$$

Постоянная распространения k выражается через ω по формуле

$$k = k_m = \alpha_m \left[\frac{(k_0^2 \varepsilon / \alpha_m^2 - 1)\,(1 - k_0^2 / \alpha_m^2)}{1 - (\varepsilon + 1) k_0^2 / \alpha_m^2} \right]^{1/2}$$

Для заданного m волна может распространяться, если ее частота ω заключена в пределах

$$\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \leqslant \frac{\omega}{c \alpha_m} \leqslant \sqrt{\frac{2}{\varepsilon + 1}}$$

при этом k меняется от 0 до ∞.

Если $\varepsilon = 1$ (диэлектрик отсутствует), то система превращается в резонатор: в ней возможны колебания при дискретных частотах $\omega_m = c \alpha_m$. При $\varepsilon > 1$ рассмотренное устройство является замедляющей системой. Групповая и фазовая скорости волн в ней меньше скорости света c.

14.24. Волны электрического типа в рассматриваемом случае существовать не могут. Волны магнитного типа:

$$\mathscr{H}_z = \frac{i\mathscr{E}_0 c}{\omega\mu}\left(\kappa\cos\kappa x - k\frac{\mu_a}{\mu_\perp}\sin\kappa x\right)$$
$$\mathscr{H}_x = \frac{\mathscr{E}_0 c}{\omega\mu}\left(k\sin\kappa x - \kappa\frac{\mu_a}{\mu_\perp}\cos\kappa x\right), \quad \mathscr{E}_z = \mathscr{E}_0\sin\kappa x$$
$$\mathscr{E}_x = \mathscr{E}_y = \mathscr{H}_y = 0$$

где

$$\kappa = \frac{n\pi}{a}, \quad k = \sqrt{\frac{\omega^2\varepsilon_\parallel\mu}{c^2} - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}, \quad n = 1,2,3,\ldots, \quad \mu = \mu_\perp - \frac{\mu_a^2}{\mu_\perp}$$

Граничная частота $\omega_0^{(n)} = c\kappa_n/\varepsilon_\parallel\mu$.

Как следует из формул для $\mathscr{H}_z$ и $\mathscr{H}_x$, конфигурация магнитного поля для волны данного типа зависит от знака k, т. е. от направления распространения волны, и от знака μ_a, т. е. от направления постоянного магнитного поля. Этот эффект невзаимности связан с гиротропией среды, заполняющей волновод, и с нарушением инвариантности относительно обращения времени. Он уже обсуждался в задаче 14.4**.

14.25. Уравнения Максвелла для комплексно-сопряженных амплитуд $\mathscr{E}_0^*, \mathscr{H}_0^*$ имеют вид:

(1) $\operatorname{rot}\mathscr{E}_0^* - ik_0(\boldsymbol{e}_z\times\mathscr{E}_0^*) = -\frac{i\omega}{c}\mathscr{H}_0^*, \quad \operatorname{rot}\mathscr{H}_0^* - ik_0(\boldsymbol{e}_z\times\mathscr{H}_0^*) = \frac{i\omega}{c}\mathscr{E}_0^*$

Амплитуды $\mathscr{E}, \mathscr{H}$ удовлетворяют уравнениям

(2) $\operatorname{rot}\mathscr{E} + ik(\boldsymbol{e_z}\times\mathscr{E}) = \frac{i\omega}{c}\widehat{\mu}'\mathscr{H}, \quad \operatorname{rot}\mathscr{H} + ik(\boldsymbol{e_z}\times\mathscr{H}) = -\frac{i\omega}{c}\widehat{\varepsilon}'\mathscr{E}$,

где $\widehat{\mu}'\mathscr{H}, \widehat{\varepsilon}'\mathscr{E}$ - векторы с компонентами $\mu'_{ik}\mathscr{H}_k, \varepsilon'_{ik}\mathscr{E}_k; \mu'_{ik} = \varepsilon'_{ik} = \delta_{ik}$ - вне области, занятой диэлектриком, $\mu'_{ik} = \mu_{ik}, \varepsilon'_{ik} = \varepsilon_{ik}$ - внутри этой области.

Из уравнений для $\operatorname{rot}\mathscr{E}_0^*$ и $\operatorname{rot}\mathscr{H}$ следует:

(3) $\mathscr{H}\cdot\operatorname{rot}\mathscr{E}_0^* - \mathscr{E}_0^*\cdot\operatorname{rot}\mathscr{H} + i(k-k_0)(\boldsymbol{B}_z\times\mathscr{E}_0^*)\cdot\mathscr{H} = -i\omega(\mathscr{H}\cdot\mathscr{H}_0^* - \widehat{\varepsilon}'\mathscr{E}\cdot\mathscr{E}_0^*)$.

Проинтегрируем обе части этого равенства по поперечному сечению волновода S. Первые два члена можно преобразовать следующим образом:

$$\int\limits_S (\mathscr{H}\cdot\operatorname{rot}\mathscr{E}_0^* - \mathscr{E}_0^*\cdot\operatorname{rot}\mathscr{H})\,dS = \frac{1}{l}\int\limits_V \operatorname{div}(\mathscr{E}_0^*\times\mathscr{H})\,dV$$

В последнем выражении интеграл берется по объему, ограниченному стенкой волновода и двумя сечениями, отстоящими друг от друга на расстояние l (подынтегральное выражение не зависит от z).

Применяя затем теорему Остроградского-Гаусса, получим

$$\int \operatorname{div}(\mathscr{E}_0^*\times\mathscr{H})\,dV = \int(\mathscr{E}_0^*\times\mathscr{H})\cdot\boldsymbol{n}dS = \int(\boldsymbol{n}\times\mathscr{E}_0^*)\cdot\mathscr{H}dS$$

На стенке волновода $\boldsymbol{n}\times\mathscr{E}_0^* = 0$ в силу граничного условия $\mathscr{E}_{0\tau} = 0$, а интегралы по сечениям входят с противоположными знаками и взаимно сокращаются. Поэтому

$$\int(\boldsymbol{n}\times\mathscr{E}_0^*)\cdot\mathscr{H}dS = 0$$

и равенство (3) дает

$$(k-k_0)\int\limits_S(\mathscr{E}_0^*\times\mathscr{H})\cdot\boldsymbol{e}_z dS =$$
$$= -\omega\left[\int\limits_S(\mathscr{H}\cdot\mathscr{H}_0^*)\,dS - \int\limits_S(\mathscr{E}\cdot\mathscr{E}_0^*)\,dS - \int\limits_{\Delta S}\Delta\widehat{\varepsilon}\mathscr{E}\cdot\mathscr{E}_0^* dS\right] \qquad (4)$$

где $\Delta\widehat{\varepsilon} = \widehat{\varepsilon} - 1$ и ΔS - поперечное сечение области, занятой диэлектриком.
Таким же путем из уравнений для $\operatorname{rot}\mathscr{E}$ и $\operatorname{rot}\mathscr{H}_0^*$ находим

$$(k - k_0)\int\limits_S (\mathscr{E} \times \mathscr{H}_0^*)\cdot \boldsymbol{e}_z dS = \tag{5}$$
$$= \omega\left[\int\limits_S (\mathscr{H}\cdot\mathscr{H}_0^*)\,dS - \int\limits_S (\mathscr{E}\cdot\mathscr{E}_0^*)\,dS + \int\limits_{\Delta S}\Delta\widehat{\mu}\mathscr{H}\cdot\mathscr{H}_0^* dS\right]$$

где $\Delta\widehat{\mu} = \widehat{\mu} - 1$
Складывая равенства (4) и (5), получаем формулу, приведенную в условии задачи. Она представляет собой точное соотношение, связывающее изменение Δk постоянной распространения с амплитудами полей. Однако в большинстве случаев точное решение задачи о волноводе, частично заполненном диэлектриком, не может быть получено. Только при достаточно малых поперечных размерах области, занятой диэлектриком, удается приближенно определить амплитуды возмущенных полей $\mathscr{E}$ и $\mathscr{H}$. Тогда с помощью полученной формулы для Δk можно подсчитать изменение постоянной распространения, которая является важной характеристикой волны в волноводе. Примеры расчета волноводов таким методом приведены в трех последующих задачах.
14.26. В случае пластинки малой толщины амплитуды возмущенных полей можно приближенно выразить через невозмущенные амплитуды, которые для волны типа H_{10} имеют вид:

$$\mathscr{H}_{0z} = \mathscr{H}_0\cos\frac{\pi x}{a},\quad \mathscr{H}_{0x} = -\frac{ik_0 a}{\pi}\mathscr{H}_0\sin\frac{\pi x}{a}$$
$$\mathscr{E}_{0y} = \frac{i\omega a}{\pi c}\mathscr{H}_0\sin\frac{\pi x}{a},\quad \mathscr{E}_{0x} = \mathscr{E}_{0z} = \mathscr{H}_{0y} = 0$$

(Эти выражения могут быть получены из результатов задачи 14.10.) Пренебрежем изменением амплитуд поля вне объема, занятого пластинкой. Кроме того, пренебрежем изменением полей по толщине пластинки. Это эквивалентно отбрасыванию членов порядка d^2 и выше. На поверхности пластинки должны выполняться граничные условия:

$$\mathscr{E}_y = \mathscr{E}_{0y},\quad \mathscr{H}_z = \mathscr{H}_{0z},\quad \mu_\perp\mathscr{H}_x - i\mu_a\mathscr{H}_y = \mathscr{H}_{0x},\quad \mathscr{H}_y = \mathscr{H}_{0y} = 0$$

где невозмущенные амплитуды в правых частях берутся при $x = x_1$. Эти равенства определяют амплитуды возмущенного поля в пластинке.

Интеграл, стоящий в числителе выражения для Δk (см. условие предыдущей задачи), равен произведению подынтегральной функции на площадь поперечного сечения пластинки bd, так как поле не зависит от y, а зависимостью от x пренебрегаем.

В интеграл, стоящий в знаменателе, можно подставить невозмущенные значения амплитуд. В результате получим:

$$\Delta k = \frac{d}{k_0 a}\left\{\left[\frac{(\varepsilon-1)\omega^2}{c^2} + \left(1 - \frac{1}{\mu_\perp}\right)k_0^2\right]\sin^2\frac{\pi x_1}{a} + (\mu_\parallel - 1)\left(\frac{\pi}{a}\right)^2\cos^2\frac{\pi x_1}{a}\right\}$$

Так как $\mu_\perp$ зависит от величины постоянного подмагничивающего поля H_0 (см. задачу 11.55), то и Δk будет зависеть от этого поля. Изменение H_0 вызывает изменение фазы волны. Устройства, основанные на этом явлении, широко применяются в радиотехнике -для преобразования фазы.
14.27.

$$\Delta k = \frac{\omega d}{4\pi c} \cdot \frac{b-a}{ab \ln \frac{b}{a}} \left(\varepsilon - \frac{1}{\mu_\perp} \right)$$

14.28.

а) $\Delta k = \frac{\omega d}{4\pi c} \cdot \frac{b-a}{ab \ln \frac{b}{a}} \left(\varepsilon - \frac{1}{\mu_\parallel} \right)$;

б) $\Delta k = \frac{\omega d}{4\pi c} \cdot \frac{b-a}{ab \ln \frac{b}{a}} \left(\varepsilon - \frac{1}{\mu_\perp} \right)$.

В случае а) Δk практически не зависит от величины постоянного магнитного поля H_0, так как $\mu_\parallel \approx 1$ (см. задачу 11.56). Это объясняется тем, что внутри пластины высокочастотное магнитное поле совпадает по направлению с постоянным полем и не поддерживает прецессии намагниченности M. В случае б) высокочастотное магнитное поле внутри пластины перпендикулярно постоянному полю, $\mu_\perp$ зависит от H_0, причем эта зависимость носит резонансный характер.

14.29. Интегрируя уравнения (14.17) с граничным условием (14.18), находим

$$\begin{aligned} E_x &= A_1 \cos(k_1 x) \sin(k_2 y) \sin(k_3 z) \\ E_y &= A_2 \cos(k_2 y) \sin(k_1 x) \sin(k_3 z) \\ E_z &= A_3 \cos(k_3 z) \sin(k_1 x) \sin(k_2 y) \end{aligned} \tag{1}$$

где A_i - постоянные,

$$\begin{gathered} k_1 = n_1 \pi / a, \quad k_2 = n_2 \pi / b, \quad k_3 = n_3 \pi / h \\ \omega^2 = c^2 \left(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 \right) = \pi^2 c^2 \left[(n_1/a)^2 + (n_2/b)^2 + (n_3/h)^2 \right] \end{gathered} \tag{2}$$

$n_1, n_2, n_3 = 0, 1, 2, \ldots$ (временной множитель $e^{-i\omega t}$ опущен).

Вектор H выражается через $\mathbf{E}$ с помощью уравнений Максвелла.

Уравнение $\operatorname{div} \boldsymbol{E} = 0$ приводит к условию поперечности $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{k} = 0$, где вектор $\boldsymbol{A} = (A_1, A_2, A_3)$. Отсюда следует, что колебания при заданных $k_x, k_y, k_z \neq 0$ двукратно вырождены, так как вектор $\mathbf{A}$ можно выбрать в плоскости, перпендикулярной $\mathbf{k}$, двумя независимыми и произвольными способами. Положим для каждого такого $\mathbf{k}$:

$$\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{k}\sigma} = A \boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k}\sigma}, \quad \sigma = 1, 2 \tag{3}$$

где $e_{k\sigma}$ - единичный вектор такой, что $e_{k1} \cdot e_{k2} = 0$ и $e_{k\sigma} \cdot \boldsymbol{k} = 0$, а постоянная $A = \sqrt{32\pi/V}$, причем $V = abh$ - объем резонатора.

Тогда все собственные функции будут взаимно ортогональны и нормированы условием

$$\int \boldsymbol{E}_{\nu'} \boldsymbol{E}_\nu dV = 4\pi \delta_{\nu\nu'} \tag{4}$$

Это соотношение легко проверить, непосредственно интегрируя (1). Индексы ν, ν' введены для обозначения четырех чисел: n_1, n_2, n_3 и σ.

Если одна из проекций $\mathbf{k}$ равна нулю, то вырождение отсутствует, так как в решение (1) входит в этом случае только одна постоянная.

14.30.

$$\Delta N = \frac{V}{\pi^2 c^3} \omega^2 \Delta\omega$$

14.31. Колебания электрического типа:

$$E_z = \mathscr{E}_0 J_m(\kappa r)\sin(m\alpha+\psi_m)\cos(kz), \quad H_z = 0$$
$$E_r = -\frac{k}{\kappa}\mathscr{E}_0 J'_m(\kappa r)\sin(m\alpha+\psi_m)\sin(kz)$$
$$E_\alpha = -\frac{mk}{\kappa^2 r}\mathscr{E}_0 J_m(\kappa r)\cos(m\alpha+\psi_m)\sin(kz)$$
$$H_r = -\frac{im\omega}{\kappa^2 cr}\mathscr{E}_0 J_m(\kappa r)\cos(m\alpha+\psi_m)\cos(kz)$$
$$H_\alpha = \frac{i\omega}{\kappa c}\mathscr{E}_0 J'_m(kr)\sin(m\alpha+\psi_m)\cos(kz)$$
$$k = \frac{l\pi}{h}, l = 0,1,2,\ldots, \quad \kappa_{mn} = \frac{\alpha_{mn}}{a}$$

где α_{mn} - корни уравнения $J_m(\alpha_{mn}) = 0, \omega^2 = c^2(\kappa_{mn}^2 + k^2)$, множитель $e^{-i\omega t}$ всюду опущен.

Колебания магнитного типа:

$$H_z = \mathscr{H}_0 J_m(\boldsymbol{k}r)\sin(m\alpha+\psi_m)\sin(kz)$$

$k = l\pi/h, l = 1,2,\ldots$; значение $l = 0$ невозможно; $\kappa_{mn} = \beta_{mn}/a$, где β_{mn} - корень уравнения $J'_m(\beta_{mn}) = 0; \omega^2 = c^2(\kappa_{mn}^2 + k^2)$. Остальные компоненты полей выражаются через H_z с помощью уравнений Максвелла.

При $m \neq 0$ колебания как электрического, так и магнитного типов в общем случае двукратно вырождены, так как каждой собственной частоте соответствуют две собственные функции, например,

$$H_z = \mathscr{H}_0 J_m(\kappa r)\sin m\alpha \sin(kz)$$

и

$$H_z = \mathscr{H}_0 J_m(\boldsymbol{k}r)\cos m\alpha \sin(kz)$$

14.32. В квазистационарном приближении можно рассматривать указанную систему как колебательный контур, состоящий из конденсатора
емкостью $C = R^2/(4d)$ и катушки индуктивности с самоиндукцией $L = 4\pi b(\ln(8b/a) - 7/4)$. (Вычисление самоиндукции проволочного кольца см. в задаче 2.113). По формуле Томсона (10.5)

$$\omega_0 = \frac{c}{R\sqrt{(\pi b/d)(\ln(8b/a) - 7/4)}}$$

Квазистационарное приближение применимо, если $\lambda_0 = 2\pi c/\omega_0$ много больше размеров системы (т. е. $\lambda \gg R, b$).
14.33.

$$\omega_0 = \frac{c}{a}\sqrt{\frac{d}{\pi b}}$$

14.34. В квазистационарном приближении ($\lambda_0 = 2\pi c/\omega_0 \gg a, b$) считаем, что электрическое поле целиком сосредоточено между обкладками конденсатора, а магнитное поле - внутри тороидальной камеры. При таких предположениях резонатор эквивалентен обычному колебательному контуру, состоящему из емкости и индуктивности. Емкость конденсатора $C = \frac{(b-a)^2}{4d}$, самоиндукция тора $L = 4\pi\left(b - \sqrt{b^2 - a^2}\right)$ (см. задачу 2.110). Собственная частота:

$$\omega_0 = \frac{c}{(b-a)}\sqrt{\frac{d}{\pi\left(b-\sqrt{b^2-a^2}\right)}}$$

Высшие типы колебаний рассмотренного резонатора не могут быть вычислены в квазистационарном приближении, так как для них не выполняется условие $\lambda \gg a, b$.
14.35.

$$\omega_0 = \frac{2c}{2b-a}\sqrt{\frac{d}{2\pi h \ln\frac{2b+a}{2b-a}}}$$

14.36. В коаксиальном волноводе, закороченном с одной стороны (при $z = 0$) идеально проводящей перегородкой, устанавливается стоячая поперечная волна с напряженностями поля:

$$E_r = \frac{A}{r}\sin\frac{\omega z}{c}e^{-i\omega t}, \quad H_\alpha = -\frac{iA}{r}\cos\frac{\omega z}{c}e^{-i\omega t} \tag{1}$$

В любой плоскости, перпендикулярной оси волновода, распределение электрического поля такое же, как в цилиндрическом конденсаторе, и можно считать, что оно создается разностью потенциалов

$$\Delta\varphi = A\ln\frac{b}{a}\sin\frac{\omega z}{c} \tag{2}$$

между центральным стержнем и оболочкой.
Эту разность потенциалов следует приравнять напряжению на обкладках конденсатора, образованного торцом стержня и верхней крышкой резонатора:

$$\Delta\varphi|_{z=h} = q/C \tag{3}$$

Здесь $C = a^2/4d$ - емкость конденсатора; q - заряд одной из обкладок, который можно выразить через силу тока $\mathscr{I}$, протекающего по стержню (или равный ему по величине и противоположный по направлению ток в оболочке)

$$\mathscr{I} = -i\omega q$$

Вычисляя силу тока по известному магнитному полю (1) и подставляя ее, а также разность потенциалов (2) в формулу (3), найдем трансцендентное уравнение, которому удовлетворяют собственные частоты:

$$\operatorname{ctg}\frac{\omega h}{c} = \frac{2\pi a^2\omega}{cd}\ln\frac{b}{a} \tag{4}$$

Это уравнение легко решается графически. При $\omega h/c \ll 1$ (это означает, что $\lambda \gg 2\pi h$ - квазистационарное приближение) получаем

$$\omega = \frac{c}{\sqrt{\frac{a^2}{4d}\cdot 2h\ln\frac{b}{a}}} = \frac{c}{\sqrt{LC}} \tag{5}$$

где L - коэффициент самоиндукции отрезка коаксиальной линии длиной h. В этом приближении вычисляется только одна - низшая - собственная частота (ср. решения предыдущих задач 14.32-14.35).

При $d = 0$ (закороченный с двух сторон отрезок коаксиального волновода) имеем

$$\omega_m = \frac{\pi c}{h}\cdot m, \quad m = 1, 2, \ldots \tag{6}$$

Это означает, что на длине резонатора должно укладываться целое число полуволн: $h = (\lambda_m/2)\, m$.

14.37. Поле в резонаторе описывается уравнениями Максвелла (14.17), (14.18), причем $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{H}, \boldsymbol{D} = \boldsymbol{E}$. Умножим первое из них скалярно на $\boldsymbol{H}_\nu$, а второе - на $\boldsymbol{E}_\nu$ и проинтегрируем по объему резонатора:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\int \boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{H}_\nu dV = -c\int \boldsymbol{H}_\nu\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{E}dV \\ \frac{d}{dt}\int \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}_\nu dV = c\int \boldsymbol{E}_\nu\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{H}dV \end{cases} \tag{1}$$

Считая собственные функции $\boldsymbol{E}_\nu, \boldsymbol{H}_\nu$ ортонормированными в соответствии с условием (14.20), вычислим интегралы в правых частях равенств (1):

$$\frac{d}{dt}\int \boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{H}_\nu dV = 4\pi\dot{p}_\nu, \quad \frac{d}{dt}\int \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}_\nu dV = 4\pi\dot{q}_\nu \tag{2}$$

Собственные функции $\boldsymbol{E}_\nu, \boldsymbol{H}_\nu$ удовлетворяют уравнениям:

$$\begin{cases} \operatorname{rot}\boldsymbol{E}_\nu = ik_\nu\boldsymbol{H}_\nu, \operatorname{rot}\boldsymbol{H}_\nu = -ik_\nu\boldsymbol{E}_\nu \\ \operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{E}_\nu = k_\nu^2\boldsymbol{E}_\nu, \operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{H}_\nu = k_\nu^2\boldsymbol{H}_\nu \end{cases} \tag{3}$$

где $\boldsymbol{k}_\nu\,(k_1, k_2, k_3)$ - соответствующие собственные числа (они вычислялись в задачах 14.29, 14.31). С помощью (3) можно преобразовать интегралы, стоящие в правых частях равенств (1),

$\operatorname{div}[\boldsymbol{E}\times\operatorname{rot}\boldsymbol{E}_\nu] = \operatorname{rot}\boldsymbol{E}_\nu\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{E} - \boldsymbol{E}\cdot\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{E}_\nu = ik_\nu\boldsymbol{H}_\nu\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{E} - k_\nu^2\boldsymbol{E}_\nu\cdot\boldsymbol{E}$,

поэтому

$$\begin{aligned}\int \boldsymbol{H}_\nu\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{E}dV &= -ik_\nu\int \boldsymbol{E}_\nu\cdot\boldsymbol{E}dV + \frac{1}{ik_\nu}\int \operatorname{div}[\boldsymbol{E}\times\operatorname{rot}\boldsymbol{E}_\nu]\,dV = \\ &= -4\pi ik_\nu q_\nu + \oint \boldsymbol{H}_\nu\cdot[\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}]dS\end{aligned} \tag{4}$$

где последний интеграл берется по внутренней поверхности резонатора и $\mathbf{n}$ - орт нормали, направленный в глубь проводника. Но поле на стенке резонатора удовлетворяет условию (12.13), которое можно записать в виде

$$\zeta\boldsymbol{H}_\tau = \boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E} \tag{5}$$

Собственная функция $\boldsymbol{H}_\nu$ резонатора с идеальной проводимостью имеет на стенке только касательную составляющую, поэтому при подстановке (5) в интеграл (4) можно заменить $\boldsymbol{H}_\tau$ на $\boldsymbol{H}$. В итоге, собирая формулы (1)-(5), получим уравнение

$$\dot{p}_\nu - i\omega_\nu q_\nu = -\frac{c\zeta}{4\pi}\oint \boldsymbol{H}_\nu\cdot\boldsymbol{H}dS \tag{6}$$

Второе уравнение выводится аналогичным путем:

$$\dot{q}_\nu - i\omega_\nu p_\nu = 0 \tag{7}$$

Исследуем влияние конечной проводимости стенок на ν-й тип колебаний идеального резонатора. Возмущенное поле $\mathbf{H}$ при $\zeta \to 0$ должно переходить в невозмущенное поле, т. е. в сумме

$$\boldsymbol{H} = \sum_{\nu'} p_{\nu'}\boldsymbol{H}_{\nu'}$$

должен оставаться один член с $\nu' = \nu$. Следовательно, амплитуды $p_{\nu'}$ с $\nu' = \nu$ пропорциональны ζ и их подстановка в (6) дает члены порядка ζ^2 и выше. Пренебрегая такими членами, заменим $\mathbf{H}_{\text{в}}$ (6) на $p_\nu \boldsymbol{H}_\nu$ и получим уравнение вида

$$\dot{p}_\nu - i\omega_\nu q_\nu = -p_\nu \frac{c\zeta}{4\pi} \oint H_\nu^2 dS \tag{8}$$

Если исключить одну из переменных (p_ν) с помощью (7), то для другой получится уравнение

$$\ddot{q}_\nu + \omega_\nu^2 q_\nu + \left(\frac{c\zeta}{4\pi} \oint H_\nu^2 dS \right) \dot{q}_\nu = 0 \tag{9}$$

Величина, стоящая в скобке, комплексна. Поэтому уравнение (9) описывает гармонический осциллятор, на который действует «сила трения»

$$-\left(\frac{c\zeta'}{4\pi} \oint H_\nu^2 dS \right) \dot{q}_\nu$$

где ζ' - действительная часть поверхностного импеданса.
Решая последнее уравнение, найдем комплексную добавку $\Delta\omega_\nu - i\gamma_\nu$ к собственной частоте идеального резонатора. Потери приводят к затуханию собственных колебаний с декрементом

$$\gamma_\nu = \frac{c\zeta'}{8\pi} \oint H_\nu^2 dS \tag{10}$$

и к сдвигу собственных частот на величину

$$\Delta\omega_\nu = \frac{c\zeta''}{8\pi} \oint H_\nu^2 dS \tag{11}$$

так что измененная собственная частота $\widetilde{\omega}_\nu = \omega_\nu + \Delta\omega_\nu$.
Связь между добротностью резонатора и декрементом затухания дается формулой (14.21).
14.38.

$$Q_\nu = \frac{\omega_\nu a}{4c\zeta'} = \sqrt{\frac{\pi a^2 \sigma \omega_\nu}{2c^2}}$$

Система потеряет резонансные свойства при достаточно высоких частотах, когда расстояние между соседними собственными частотами станет сравнимым с шириной резонансной кривой, определяемой декрементом затухания $\gamma_\nu = \omega_\nu / 2Q_\nu$. При высоких частотах, как следует из результатов задачи 14.30, расстояние между соседними собственными частотами:

$$\frac{\Delta\omega}{\Delta N} = \frac{\pi^2 c^3}{a^3} \frac{1}{\omega^2}$$

Приравнивая эту величину декременту γ, найдем область частот, для которых система обладает резонансными свойствами:

$$\omega \lesssim 10^9 \sigma^{1/5} a^{4/5}$$

При $a \approx 1$ см и $\sigma = 10^{17}\text{с}^{-1}$ имеем: $\omega \lesssim 3 \cdot 10^{12}\text{с}^{-1}$.
14.39. Производя разложение $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ по собственным функциям идеального резонатора, как это сделано в задаче 14.37, получим для амплитуд p_ν и q_ν систему уравнений:

$$\dot{p}_\nu - i\omega q_\nu + 2i\sum_{\nu'} \Delta\Omega_{\nu'} j_{\nu'} = 0 \tag{1}$$

$$\dot{q}_\nu - i\omega_\nu p_\nu + \frac{1}{c} j_\nu e^{-i\omega t} = 0 \tag{2}$$

где $\Delta\Omega_\nu = \Delta\omega - i\gamma_\nu$ - комплексный сдвиг собственных частот;

$$j_\nu = \int \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{E}_\nu dV \tag{3}$$

Ищем решение уравнений (1), (2) в виде

$$p_\nu = p_\nu^0 e^{-i\omega t}, \quad q_\nu = q_\nu^0 e^{-i\omega t} \tag{4}$$

Исключив величины q_ν^0, получим

$$p_\nu^0 \left(\omega^2 - 3\omega\Delta\Omega_\nu - \omega_\nu^2\right) = \frac{i\omega_\nu}{c} j_\nu + 2\omega \sum_{\nu'}{}' \Delta\Omega_{\nu'} p_{\nu'}^0 \tag{5}$$

Знак «'» у суммы означает, что член с $\nu' = \nu$ отсутствует (он перенесен в левую часть равенства).

Решаем систему (5) методом последовательных приближений. В нулевом приближении отбрасываем сумму (Σ') и получаем

$$p_\nu^0 = \frac{i\omega_\nu j_\nu}{c\left(\omega^2 - 2\omega\Delta\Omega_\nu - \omega_\nu^2\right)} \tag{6}$$

В следующем приближении получим добавку к (6), равную

$$\frac{2\omega}{\omega^2 - 2\omega\Delta\Omega_\nu - \omega_\nu^2} \sum_{\nu'}{}' \Delta\Omega_{\nu'} p_{\nu'}^0$$

Она мала, если ω близко к ω_ν, а все остальные собственные частоты $\omega_{\nu'}$ удовлетворяют условию $|\omega - \omega_{\nu'}| \gg |\Delta\Omega_{\nu'}|$.

Выразим знаменатель (6) через добротность Q_ν и измененную собственную частоту $\widetilde{\omega}_\nu = \omega_\nu + \Delta\omega_\nu$. Имеем:

$$\omega\Delta\Omega_\nu = \omega\Delta\omega_\nu - i\omega\gamma_\nu \approx \omega_\nu\Delta\omega_\nu - \frac{i\omega\widetilde{\omega}_\nu}{2Q_\nu}$$

что справедливо вблизи резонанса ($|\omega - \omega_\nu| \ll \omega$). Отсюда

$$p_\nu^0 \approx \frac{i\omega_\nu j_\nu}{c\left(\omega^2 - \widetilde{\omega}_\nu^2 + \frac{i\omega\tilde{\omega}_\nu}{Q_\nu}\right)}, \quad q_\nu^0 \approx -\frac{i\omega j_\nu}{c\left(\omega^2 - \widetilde{\omega}_\nu^2 + \frac{i\omega\tilde{\omega}_\nu}{Q_\nu}\right)} \tag{7}$$

Зависимость амплитуд поля от частоты имеет резонансный характер. при заданном $\mathbf{j}$ поле при резонансе тем больше, чем выше добротность резонатора:

$$q_{\nu\,\mathrm{res}}^0 = p_{\nu res}^0 = \frac{j_\nu Q_\nu}{c\omega_\nu} \tag{8}$$

Из полученных формул следует также, что проводник с током нужно помещать в пучность электрического поля $\boldsymbol{E}_\nu$ и ориентировать вдоль $\boldsymbol{E}_\nu$. При этом величины j_ν и, следовательно, p_ν^0, q_ν^0 будут иметь наибольшее значение.

14.40. Если волновое поле с энергией W, заполняющее резонатор, отражается от зеркала один раз, то потеря энергии составляет $W(1-R)$. За время dt теряется энергия

$$dW = -W(1-R)\frac{cdt}{L}$$

где cdt/L - число отражений. По определению добротности (14.21)

$$Q_1 = \frac{\omega W}{-\frac{dW}{dt}} = \frac{\omega L}{c(1-R)}$$

где ω - частота рассматриваемых колебаний.
Излучение через боковую поверхность вызвано тем, что ограниченный в поперечном направлении пучок света не может быть строго направленным. Он обязательно имеет поперечную составляющую волнового вектора $\Delta k_\perp$, которую можно оценить из. условия $\Delta k_\perp \cdot D \approx 1$ (см. задачу 2.140). Это приведет к тому, что лучи света, распространяющиеся от одного зеркала к другому, образуют слегка расходящийся пучок с углом раствора

$$2\theta = \frac{2\Delta k_\perp}{k} = \frac{2c}{D\omega}$$

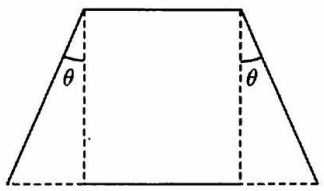


Рис. 14.14
Часть лучей не попадет на второе зеркало (рис. 14.14), и потеря энергии при одном отражении составит $WL\theta/D$. За время dt потеря

$$dW = -W\frac{L\theta}{D}\frac{cdt}{L} = -W\frac{c^2}{D^2\omega}dt$$

Добротность за счет излучения:

$$Q_2 = \frac{D^2\omega^2}{c^2}$$

Если потери в зеркалах и на излучение малы, они складываются. Полная добротность Q определяется по формуле

$$\frac{1}{Q} = \frac{1}{Q_1} + \frac{1}{Q_2}$$

При указанных в условии задачи значениях параметров:

$$Q_1 \approx 4\cdot 10^5; \quad Q_2 \approx 4\cdot 10^8 \gg Q_1; \quad Q \approx Q_1 \approx 4\cdot 10^5$$

14.41. Если первоначально луч распространялся по нормали к плоскости одного из зеркал, то после n-го отражения угол между нормалью и лучом будет равен $n\beta$ (рис. 14.15). За n-е прохождение между зеркалами луч смещается на расстояние $n\beta L$; число отражений N до выхода луча из резонатора оценивается из соотношения

$$\sum_{n=1}^{N} n\beta L \approx D$$

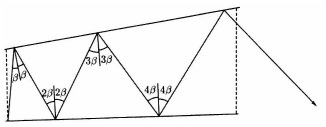


Рис. 14.15

При $N \gg 1$ получим $N = (2D/\beta L)^{1/2}$, что соответствует времени затухания собственного типа колебаний

$$\tau = N\frac{L}{c} = \frac{1}{c}\left(\frac{2DL}{\beta}\right)^{1/2}$$

Это время можно отождествить с обратным декрементом затухания γ:

$$\gamma = \frac{1}{\tau} = c\left(\frac{\beta}{2DL}\right)^{1/2}$$

Добротность за счет непараллельности зеркал:

$$Q_3 = \frac{\omega}{2\gamma} = \frac{\omega}{2c}\left(\frac{2DL}{\beta}\right)^{1/2}$$

Чтобы непараллельность зеркал не уменьшила существенным образом добротности резонатора, требуется выполнение условия $Q_3 \leqslant Q$, где Q - добротность резонатора с параллельными зеркалами. Отсюда

$$\beta \lesssim \frac{\omega^2}{2c^2}\frac{DL}{Q^2}$$

Для параметров резонатора, приведенных в условии предыдущей задачи, находим

$$\beta \lesssim 0,0012.$$

14.42. а) Угол ϑ принимает дискретные значения, определяемые условием

$$\frac{L}{\cos\vartheta} = \frac{n\lambda}{2} \tag{1}$$

где $n \gg 1$ - целое положительное число. Если при заданном λ возможно значение $\vartheta = 0$, которое соответствует $n = n_0$ ($L = n_0\lambda/2$), то дискретные значения угла $\vartheta_k \ll 1$ определяется формулой

$$\vartheta_k = \left(\frac{k\lambda}{L}\right)^{1/2} \tag{2}$$

б) Добротность Q_1, учитывающая потери в зеркалах, была найдена в задаче 14.40 . Добротность Q_2, связанная с потерями на излучение, по порядку величины составляет

$$Q_2 = \frac{\omega D}{c\vartheta} \quad \text{при} \quad \vartheta > \theta, \quad Q_2 = \frac{\omega D}{c\vartheta} = \frac{D^2\omega^2}{c^2} \quad \text{при} \quad \vartheta < \theta, \tag{3}$$

где θ - угол дифракции, определенный в задаче 14.40 .

Если $Q_1 < Q_{2\,\max}$, то полная добротность Q резонатора для тех типов колебаний, у которых $Q_2(\vartheta) > Q_1$, будет практически одинаковой и близкой к Q_1. Если $Q_1 > Q_{2\,\max}$, то Q будет определяться, в основном, величиной Q_2 в соответствии с формулами (3).

14.43. Используем формулу (2) из решения задачи 14.29, положив для простоты $a = b$ порядка h. При $h \gg \lambda$ имеем $n_3 \gg 1$, долгоживущими будут моды с $n_1, n_2 \ll n_3$. В этом случае

$$\omega \approx \frac{\pi c n_3}{h} + \frac{\pi c h \left(n_1^2 + n_2^2\right)}{a^2 n_3}$$

Расстояние между соседними частотами при изменении числа n_3 составляет $\Delta\omega_l \approx \pi c/h$, при изменении n_1 имеем $\Delta\omega_t \approx 2\pi c h n_1/n_3 \ll \Delta\omega_l$.

14.44. Согласно результатам задачи 9.51, магнитное поле внутри эллипсоида выражается через внешнее поле $\boldsymbol{H}_0$ и намагниченность $\boldsymbol{M}$:

$$\boldsymbol{H}_{\text{int}} = \boldsymbol{H}_0 - 4\pi\widehat{N}\boldsymbol{M} \tag{1}$$

где $\widehat{N} = (N_{ik})$ - тензор коэффициентов размагничивания. Используем уравнение Ландау-Лифшица (11.116), подставив в него в качестве $\boldsymbol{H}_{ef}$ поле (1):

$$\frac{d\boldsymbol{M}}{dt} = -\eta \boldsymbol{H}_{int} \times \boldsymbol{M} \tag{2}$$

В равновесном состоянии $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}_0 = \text{const}$ и из (2) получаем условие равновесия

$$\boldsymbol{M}_0 \times \left(\boldsymbol{H}_0 - 4\pi\hat{N}\boldsymbol{M}_0\right) = 0 \tag{3}$$

При малом отклонении вектора намагниченности от равновесия возникнут колебания: $\boldsymbol{M}(t) = \boldsymbol{M}_0 + \boldsymbol{m}(t)$, где $m \times \boldsymbol{M}_0 = 0, \boldsymbol{m} \propto e^{-i\omega t}$. Линеаризуя уравнение (2), находим однородную систему уравнений

$$i\omega\boldsymbol{m} - \eta\left\{\boldsymbol{m} \times \left(\boldsymbol{H}_0 - 4\pi\widehat{N}\boldsymbol{M}_0\right) + 4\pi\widehat{N}\boldsymbol{m} \times \boldsymbol{M}_0\right\} = 0 \tag{4}$$

Приравнивая нулю определитель системы, найдем частоту собственных копебаний:

$$\omega^2 = \left[\omega_0 + \left(N^{(x)} - N^{(z)}\right)\omega_M\right]\left[\omega_0 + \left(N^{(y)} - N^{(z)}\right)\omega_M\right] \tag{5}$$

здесь $\omega_0 = \eta H_0, \omega_M = 4\pi\eta M_0$.

Вектор $\boldsymbol{m}$ в общем случае имеет эллиптическую поляризацию:

'6)

$$\frac{m_y}{m_x} = i\sqrt{\frac{\omega_0 + \left(N^{(x)} - N^{(z)}\right)\omega_M}{\omega_0 + \left(N^{(y)} - N^{(z)}\right)\omega_M}}$$

Собственные частоты однородного магнитного резонанса для частных элучаев приведены в таблице:

Форма	Направление намагниченности	Собственная частота
тонкий диск	касательное	$\omega = \sqrt{\omega_0\left(\omega_0 + \omega_M\right)}$
тонкий диск	нормальное	$\omega = \lvert\omega_0 - \omega_M\rvert$
тонкий стержень	продольное	$\omega = \omega_0 + \omega_M/2$
тонкий стержень	поперечное	$\omega = \sqrt{\omega_0\left(\omega_0 - \omega_M/2\right)}$
сфера	произвольное	$\omega = \omega_0$

В поперечно намагниченном тонком стержне собственные колебания возможны только при $\omega_0 > \omega_M/2$.

14.45. H-волны. Собственные частоты: $\omega_{nl} = x_{nl}c/a$, где x_{nl} - корни уравнения $j_l(x_{nl}) = 0$, которые нумеруются в порядке возрастания натуральным числом n. Компоненты поля определяются через потенциал Дебая $v_{nlm} = j_l(x_{nl}r/a)\, P_l^m(\theta)(A\cos m\alpha + B\sin m\alpha), m = 0, 2, \ldots l$. Всего на заданной частоте имеется $2l + 1$ независимое распределение поля (кратность вырождения частоты).

E-волны. Собственные частоты: $\omega_{nl} = x_{nl}c/a$, где x_{nl} - корни уравнения $j_l(x_{nl}) + x_{nl}j_l'(x_{nl}) = 0$. Компоненты поля определяются через потенциал Дебая u_{nlm}, который совпадает с потенциалом v_{nlm} H-волны.

13.4 15 Interaction of Charged Particles with Equilibrium and Nonequilibrium Media

13.4.1 15.1. Ionization and Radiation Energy Losses of Fast Particles in Environments

Будем называть быстрыми такие частицы, скорости которых велики по сравнению со скоростями большинства атомных электронов среды. Напомним, что в квантовой механике это условие позволяет рассматривать процесс взаимодействия частицы с атомом по теории возмущений. Быстрые частицы при движении в среде, состояние которой близко к статистически равновесному, будут терять энергию. Для тяжелых частиц (мюоны, протоны, атомные ядра и др.) энергия в основном будет расходоваться на возбуждение и ионизацию атомов среды. Эти потери называются ионизационными. Легкие частицы (электроны и позитроны) при высоких энергиях интенсивно генерируют тормозное излучение. Их радиационные потери начиная с некоторой энергии превышают потери на ионизацию и играют главную роль.

Кинематика столкновения быстрой частицы с электроном. Ионизационные потери вызываются передачей энергии быстрой частицы атомным электронам. Если переданная электрону энергия значительно превышает его энергию связи, то электрон можно считать свободным и покоящимся. Переданную электрону кинетическую энергию K можно вычислить из результата задачи 3.94 как функцию угла θ его вылета относительно первоначального импульса налетающей частицы:

$$K = 2m_e c^2 \frac{c^2 p^2 \cos^2\theta}{\left(\mathscr{E} + m_e c^2\right)^2 - c^2 p^2 \cos^2\theta} \tag{15.1}$$

Здесь $\mathscr{E} = \sqrt{c^2p^2 + m^2c^4}$ и p - полные релятивистские энергия и импульс налетающей частицы, m_e - масса электрона. Максимальная передача энергии K_m происходит при лобовом столкновении ($\cos\theta = \pm 1$):

$$K_m = 2m_e c^2 \frac{T\left(\mathscr{E} + mc^2\right)}{\left(m_e^2 + m^2\right)c^4 + 2m_e c^2 \mathscr{E}} \tag{15.2}$$

где $T = \mathscr{E} - mc^2$ - кинетическая энергия налетающей частицы. При $m = m_e$ имеем $K_m = T$, т. е. вся энергия электрона или позитрона может перейти к первоначально неподвижному электрону.

В нерелятивистском случае

$$K_m = \frac{4mm_e}{\left(m + m_e\right)^2} T \tag{15.3}$$

При $m \gg m_e$ налетающая частица отдает электрону лишь малую долю своей энергии $K_m/T = (4m_e/m) \ll 1$.

В ультрарелятивистском случае при $\mathscr{E} \gg (m/m_e)\,mc^2$ из (15.2) получаем

$$K_m = T\left(1 - \frac{m^2c^2}{2m_e\mathscr{E}}\right) \tag{15.4}$$

В отличие от нерелятивистского случая, в этом пределе независимо от массы налетающей частицы почти вся ее кинетическая энергия может быть передана

электрону, но такие события редки. Наконец, при умеренном релятивизме налетающей частицы, $\mathscr{E} \ll (m/m_e)\, mc^2, m \gg m_e$, из (15.2) находим

$$K_m = 2m_e c^2 \left(\frac{p}{mc}\right)^2 = 2m_e c^2 \left(\gamma^2 - 1\right) \tag{15.5}$$

Передача энергии определяется только релятивистским фактором $\gamma = \mathscr{E}/mc^2$ налетающей частицы.

Ионизационные потери. Удобно разделить все возможные столкновения быстрой частицы с электронами среды на две группы - «близкие» и «далекие». При близких столкновениях электрону передается энергия K, значительно превышающая его энергию связи, мерой которой является средний ионизационный потенциал I атома: $K_m \geqslant K \geqslant K_0 \gg I$. Далеким столкновениям соответствует малая передача энергии, $K \leqslant K_0 \lesssim I$. Здесь величина K_0 обозначает условную границу между близкими и далекими столкновениями. В дальнейшем мы уточним требования к этой величине.

Выбранная классификация позволяет вычислять сечение близких столкновений по теории возмущений в приближении свободных электронов. Близкие столкновения как правило являются парными, потому что одновременное нахождение двух или нескольких электронов в малой области пространства малове-

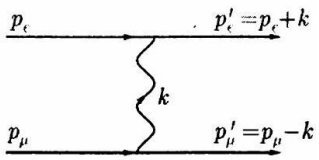


Рис. 15.1

роятно. В случае мюонов, протонов и других тяжелых частиц процесс столкновения описывается одной диаграммой Фейнмана (рис. 15.1), на которой все внешние линии относятся к свободным частицам. Их волновые функции - дираковские биспиноры - были построены в примере 6.17. Сечение столкновения (см. задачу 15.3), выраженное через релятивистский фактор γ_e электрона после столкновения, имеет вид

$$d\sigma = \frac{2\pi e^4}{m_e^2 c^2 v^2} \frac{d\gamma_e}{(\gamma_e - 1)^2} \left[1 - \beta^2 \frac{\gamma_e - 1}{\gamma_m - 1} + \frac{m_e^2 c^4}{2\mathscr{E}^2} (\gamma_e - 1)^2\right] \tag{15.6}$$

Здесь $v, \beta = v/c, \mathscr{E}$ относятся к быстрой тяжелой частице. На ее долю приходится также множитель e^2. Величина γ_m представляет собой наибольший релятивистский фактор электрона, определяемый с помощью формулы (15.2).

Потери $(d\mathscr{E}/dz)_{\gamma_e > \gamma_0}$ быстрой частицы на единице пути с передачей электронам энергии, превышающей $(\gamma_0 - 1)\, m_e c^2$, вычисляются путем умножения сечения (15.6) на среднюю концентрацию электронов n_e, энергию $(\gamma_e - 1)\, m_e c^2$ и интегрирования в пределах от γ_0 до γ_m:

$$\begin{aligned} \left.\frac{d\mathscr{E}}{dz}\right|_{\gamma_e > \gamma_0} &= -\, n_e \int_{\gamma_0}^{\gamma_m} (\gamma_{\dot{e}} - 1)\, m_e c^2 d\sigma = \\ &= -\frac{2\pi e^4 n_e}{m_e v^2} \left[\ln \frac{\gamma_m - 1}{\gamma_0 - 1} - \beta^2 + \frac{m_e^2 c^4}{4\mathscr{E}^2} (\gamma_m - 1)^2\right] \end{aligned} \tag{15.7}$$

Если среда состоит из атомов одного сорта, то $n_e = Z n_a$, где Z - зарядовое число, n_a - концентрация атомов. В сложной среде n_e равно сумме таких произведений.

Отметим, что потеря энергии обратно пропорциональна массе электрона m_e. Атомные ядра тоже участвуют в торможении, но их вклад меньше на фактор $m_e/M \ll 1$, где M

- масса ядра, и этим вкладом пренебрегаем. С ростом энергии релятивистской частицы потеря энергии нарастает по медленному логарифмическому закону.

Торможение за счет далеких столкновений часто носит коллективный характер и сопровождается малыми передачами импульса и энергии. Эти величины могут передаваться сразу большому числу частиц, т. е. коллективным возбуждениям среды, охватывающим макроскопические области пространства. Эту часть потерь удобно описывать методами макроскопической электродинамики с помощью функций отклика. Такой способ описания был предложен Ферми (1940) и развит Ландау (см. [Ландау и Лифшиц, Электродинамика сплошных сред]).

Потеря энергии частицей определяется электромагнитным полем, которое она создает в среде. Это поле естественным образом включает в себя и реакцию среды на движение заряженной частицы. Поэтому потерю энергии можно вычислить как работу результирующего электрического поля над частицей на единице пути. Второй эквивалентный способ - вычисление потоа электромагнитной энергии через поверхность цилиндра заданного радиуса, вдоль оси которого движется частица. Поток энергии даст потери за единицу времени, переданные частицам среды за пределами цилиндра и полю излучения.

Пример 15.1. Релятивистская частица с зарядом q движется в изотропной среде по прямолинейной траектории со скоростью $v = \text{const}$ (рассеянием частицы пренебрегаем). С помощью разложения Фурье вычислить электромагнитное поле частичы, выразив его через интегралы, содержащие диэлектрические проницаемости $\varepsilon_l(k,\omega), \varepsilon_t(k,\omega)$.

Решение. Уравнения (11.25)-(11.26) можно привести к виду

$$\nabla \times [\nabla \times \boldsymbol{E}] + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathscr{D}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial \boldsymbol{j}_{ext}}{\partial t} \tag{1}$$

Преобразование Фурье этого уравнения с использованием формулы $\mathscr{D}_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta}E_\beta$ дает

$$\left(k^2\delta_{\alpha\beta} - k_\alpha k_\beta - \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{\alpha\beta}\right) E_\beta(\boldsymbol{k},\omega) = i\frac{4\pi\omega}{c^2} j_\alpha^{ext}(\boldsymbol{k},\omega) \tag{2}$$

Из алгебраической системы уравнений, использовав формулу (11.38), получаем

$$E_\alpha(\boldsymbol{k},\omega) = -i\frac{4\pi\omega}{k^2}\left\{\frac{k_\alpha k_\beta}{\omega^2\varepsilon_l(k,\omega)} - \frac{k^2\delta_{\alpha\beta} - k_\alpha k_\beta}{c^2k^2 - \omega^2\varepsilon_t(k,\omega)}\right\} j_\alpha^{ext}(\boldsymbol{k},\omega) \tag{3}$$

а из уравнения Максвелла (11.26) имеем

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{k},\omega) = i4\pi c\frac{\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}_{\text{ext}}}{c^2k^2 - \omega^2\varepsilon_t(k,\omega)} \tag{4}$$

Плотность тока равномерно движущейся частицы имеет вид

$$\boldsymbol{j}_{ext}(\boldsymbol{r},t) = e\boldsymbol{v}\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{v}t) \tag{5}$$

а его фурье-образ содержит дельта-функцию

$$\boldsymbol{j}_{ext}(\boldsymbol{k},\omega) = 2\pi e\delta(\omega - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}) \tag{6}$$

Поэтому обратное преобразование Фурье выразится через трехкратный интеграл:

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) = i4\pi ec\int \frac{\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{v}}{c^2k^2 - \omega^2\varepsilon_t(k,\omega)}\exp[i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{v}t)]\frac{d^3k}{(2\pi)^3} \tag{15.8}$$

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = i4\pi e\int \left\{\frac{\boldsymbol{k}}{k^2\varepsilon_l(k,\omega)} - \frac{\omega\left(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{k}\omega/k^2\right)}{c^2k^2 - \omega^2\varepsilon_t(k,\omega)}\right\}\exp[i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{v}t)]\frac{d^3k}{(2\pi)^3} \tag{15.9}$$

где всюду нужно положить $\omega = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{v}$.

Пример 15.2. Записать потери энергии частицы в виде двукратного интеграла по частоте $\omega = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{v}$ и поперечному волновому вектору $q = \sqrt{k^2 - \omega^2/v^2}$, использовав выражение (15.9) для электрического поля частицы в среде.

Решение. В изотропной среде сила торможения направлена против скорости частицы, поэтому потери энергии в единицу времени можно вычислить по формуле

$$\frac{d\mathscr{E}}{dt} = e\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{E}|_{r=vt} \tag{1}$$

где поле берется в точке нахождения частицы. Чтобы получить потери на единицу пути, нужно поделить (1) на скорость частицы v. Подставим в (1) электрическое поле (15.9), заменив переменные: $d^3k = (2\pi/v)qdqd\omega$. В итоге получим

$$\frac{d\mathscr{E}}{dz} = -i\frac{e^2}{\pi v^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\omega d\omega \int\limits_0^{\infty}\frac{qdq}{k^2}\left\{\frac{1}{\varepsilon_l(k,\omega)} - \frac{\beta^2 q^2}{k^2 - (\omega^2/c^2)\,\varepsilon_t(k,\omega)}\right\} \tag{15.10}$$

где $k = \sqrt{q^2 + \omega^2/c^2}$.

Записав бесконечный предел в интеграле по q, мы учли тем самым все возможные прицельные параметры, вплоть до нулевых, так как по порядку величины $\rho \sim 1/q$. Поэтому формула (15.10) в принципе описывает полные потери, включая близкие столкновения. Но для этого нужно использовать диэлектрические проницаемости, учитывающие пространственную дисперсию с $k > 1/a$, где a - атомный размер. Такие диэлектрические проницаемости для сколько-нибудь сложных сред неизвестны, поэтому как правило формулу (15.10) используют для учета далеких столкновений, обрезая интеграл по q на некотором значении $q_0 \ll 1/a$. Это позволяет использовать диэлектрические проницаемости без учета пространственной дисперсии, рассматривая их как функции только частоты. Мы в дальнейшем тоже используем такой подход.

Пример 15.3. Показать, что правая часть (15.10) представляет собой действительную отрицательную величину. Показать также, что при равномерном движении частицы в вакууме величина (15.10) обращается в нуль.

Решение. Используем свойства (11.39) величин $\varepsilon_l, \varepsilon_t$, согласно которым их действительные части - четные, а мнимые части - нечетные функции частоты. По этой причине в подынтегральном выражении у комплексных величин

$$\frac{\omega}{\varepsilon_l} = \frac{\omega\,(\varepsilon_l' - i\varepsilon_t'')}{|\varepsilon_l|^2}, \quad \frac{\omega}{a - ib} = \frac{\omega(a + ib)}{a^2 + b^2}$$

где $a = k^2 - \omega^2\varepsilon_t'/c^2, b = \omega^2\varepsilon_t''/c^2$, действительные части - нечетные, а мнимые части - четные функции частоты. При интегрировании по частотам в симметричном интервале интегралы от действительных частей обращаются в нуль, а мнимые части дают

$$\frac{d\mathscr{E}}{dz} = -\frac{2e^2}{\pi v^2}\int\limits_0^{\infty}\omega d\omega \int\limits_0^{q_0}\frac{qdq}{q^2 + \omega^2/v^2}\left\{\frac{\varepsilon_l''}{|\varepsilon_l|^2} + \frac{\beta^2 q^2 b}{a^2 + b^2}\right\} < 0 \tag{15.11}$$

В вакууме $\varepsilon_l'' = \varepsilon_t'' = 0$ и $d\mathscr{E}/dz = 0$.

Нерелятивистский случай. Пренебрегая членом, пропорциональным β^2, находим

$$\frac{d\mathscr{E}}{dz} = -\frac{2e^2}{\pi v^2}\int\limits_0^{\infty}\frac{\varepsilon_l''}{|\varepsilon_l|^2}\omega d\omega \int\limits_0^{q_0}\frac{qdq}{q^2 + \omega^2/v^2} \tag{15.12}$$

Здесь мы ограничили верхний предел интегрирования по q значением $q_0 \ll 1/a$, как уже было указано выше. Но величину q_0 следует ограничить также и снизу. Пусть вещество представляет собой атомарный диэлектрик. Характерные частоты в интеграле (15.12) - порядка атомных частот. Скорость быстрой частицы намного больше скоростей электронов в атомах, поэтому величина $\omega_{at}/v \ll 1/a$ (но $\omega_{at}/v_{at} \sim 1/a$), и можно выбрать q_0 таким образом, чтобы было $\omega_{at}/v \ll q_0 \ll 1/a$. При этом $\varepsilon_l(\omega)$ зависит только от частоты. Выполнив интегрирование по dq, получим

$$\frac{d\mathscr{E}}{dz} = -\frac{2e^2}{\pi v^2}\int\limits_0^\infty \frac{\varepsilon_l''}{|\varepsilon_l|^2}\ln\left(\frac{q_0 v}{\omega}\right)\omega d\omega \tag{15.13}$$

Введем в формулу (15.13) среднюю атомную частоту ω_{at}, определив ее соотношением ([Ландау и Лифшиц, Электродинамика сплошных сред])

$$\ln\omega_{at} = \frac{\int\limits_0^\infty \omega f(\omega)\ln\omega d\omega}{\int\limits_0^\infty \omega f(\omega) d\omega}, \qquad \text{где} \qquad f(\omega) = \frac{\varepsilon_l''(\omega)}{|\varepsilon_l(\omega)|^2} \tag{15.14}$$

Интеграл, стоящий в знаменателе, представим в виде

$$\int\limits_0^\infty \omega f(\omega) d\omega = -\frac{i}{2}\int\limits_{-\infty}^\infty \frac{\omega}{\varepsilon_l(\omega)} d\omega$$

где опять использованы свойства четности и нечетности действительной и мнимой частей ε. Далее пользуемся отсутствием полюсов и нулей функции $\varepsilon_l(\omega)$ в верхней полуплоскости комплексного ω и деформируем контур так, чтобы он превратился в дугу C большого радиуса в верхней полуплоскости. На этой дуге можно использовать асимптотическое выражение $\varepsilon_l(\omega)$ для больших частот:

$$\varepsilon_l(\omega) = 1 - \frac{4\pi n_e e^2}{m_e\omega^2}$$

Интегрирование дает

$$\int\limits_0^\infty \omega f(\omega) d\omega = -\frac{i}{2}\int\limits_C \omega\left(1 + \frac{4\pi n_e e^2}{m_e\omega^2}\right) d\omega = 2\pi n_e e^2 m_e$$

(интеграл $\int\limits_C \omega d\omega = 0$). В итоге получаем из (15.14) компактное выражение

$$\left.\frac{d\mathscr{E}}{dz}\right|_{q\leqslant q_0} = -\frac{4\pi n_e e^4}{m_e v^2}\ln\frac{q_0 v}{\omega_{at}} \tag{15.15}$$

Поскольку импульс $\hbar q_0$ много больше импульсов атомных электронов, его можно отождествить с импульсом электрона, выбитого из атома быстрой частицей, и ввести энергию этого электрона $K_0 = (\hbar q_0)^2/2m_e$, переписав формулу (15.15) в виде

$$\left.\frac{d\mathscr{E}}{dz}\right|_{K\leqslant K_0} = -\frac{2\pi n_e e^4}{m_e v^2}\ln\frac{2m_e v^2 K_0}{\hbar^2\omega_{at}^2} \tag{15.16}$$

Как видно из структуры этого выражения и формулы (15.7) для близких столкновений, граничная энергия K_0 входит под знаком логарифма, причем таким образом, что из суммарных потерь эта энергия сокращается:

$$\frac{d\mathscr{E}}{dz} = \left.\frac{d\mathscr{E}}{dz}\right|_{K\leqslant K_0} + \left.\frac{d\mathscr{E}}{dz}\right|_{K\geqslant K_0} = -\frac{2\pi n_e e^4}{m_e v^2}\ln\frac{2m_e v^2 K_m}{\hbar^2\omega_{at}^2} \tag{15.17}$$

(мы опустили малые в нерелятивистском случае члены в формуле (15.7)).
При чисто квантовомеханическом расчете без использования методов макроскопической электродинамики для нерелятивистской частицы получается близкий результат (см., напр., Росси (1955)):

$$\frac{d\mathscr{E}}{dz} = -\frac{2\pi n_e e^4}{m_e v^2}\ln\frac{2m_e v^2 K_m}{I^2} \tag{15.18}$$

где I - средний ионизационный потенциал атома. В изложенном нами расчете Ландау и Лифшица вместо ионизационного потенциала входит некоторая средняя атомная энергия $\hbar\omega_{at}$, которая выражается через диэлектрическую проницаемость согласно (15.14). По-видимому, величины I и $\hbar\omega_{at}$ близки друг другу. Расчет, использующий диэлектрическую проницаемость, в принципе более точен, так как он учитывает поляризацию среды, т. е. влияние соседних атомов. Но в настоящее время ни одна из этих величин не может быть вычислена точно.

Релятивистский случай. Расчет производится по формуле (15.11) аналогичным образом, но более сложен. Для полноты изложения мы приведем без вывода основные результаты для быстрой тяжелой ($m \gg m_e$) частицы.

При $\beta^2 < \varepsilon_0^{-1}$, где ε_0 - статическое значение диэлектрической проницаемости, $\varepsilon_0 = \varepsilon_l(0) = \varepsilon_t(0), \mu = 1$, полные потери энергии имеют вид, сходный с (15.17):

$$\frac{d\mathscr{E}}{dz} = -\frac{4\pi n_e e^4}{m_e v^2}\left(\ln\frac{2m_e v^2\gamma^2}{\hbar\omega_{at}} - \beta^2\right) \tag{15.19}$$

При $\beta^2 > \varepsilon_0^{-1}$ для ультрарелятивистских ($\beta \approx 1$) тяжелых частиц полное торможение

$$\frac{d\mathscr{E}}{dz} = -\frac{2\pi n_e e^4}{m_e c^2}\left(\ln\frac{m_e^3 c^4\gamma^2}{\pi n_e e^2\hbar^2} - 1\right) \tag{15.20}$$

В теории, не учитывающей поляризации среды, полное торможение оказывается более сильным за счет далеких столкновений:

$$\frac{d\mathscr{E}}{dz} = -\frac{4\pi n_e e^4}{m_e c^2}\left(\ln\frac{2m_e c^2\gamma^2}{I} - 1\right) \tag{15.21}$$

В обеих теориях с ростом энергии частицы торможение растет по логарифмическому закону, но поляризация среды уменьшает потери энергии при далеких столкновениях, что и приводит к выражению (15.20). Формулы для торможения электронов за счет ионизационных потерь несколько отличаются от (15.20), (15.21), но это отличие не превышает $10-15\%$.

Генерация плазмонов. Вычислим потери релятивистской частицы в плазме. Близкие столкновения учитываются формулой (15.7). Торможение от далеких столкновений вычисляем по формуле (15.11), положив $\varepsilon_l = \varepsilon_t = \varepsilon = 1 - \omega_{0e}^2/\omega^2 + i\eta$, где $\omega_{0e} = \sqrt{4\pi n_e e^2/m_e}$ - плазменная частота, $\eta > 0$ - малая мнимая часть. Первое слагаемое в фигурных скобках после интегрирования по dq дает при $q_0 \gg \omega/v$

$$-\frac{2e^2}{\pi v^2}\int\limits_0^\infty \frac{\varepsilon''}{|\varepsilon|^2}\ln\left(\frac{q_0 v}{\omega}\right)\omega d\omega$$

Здесь $\varepsilon''(\omega) = \eta$ - малое положительное число. По формулам (1.215), (1.209) делаем замену

$$\frac{\varepsilon''}{|\varepsilon|^2} = \frac{\eta}{\varepsilon^2+\eta^2} \to \pi\delta\left(\varepsilon'(\omega)\right) =$$
$$= \pi\delta\left(1-\omega_{0e}^2/\omega^2\right) = \frac{1}{2}\pi\omega_{0e}\left[\delta\left(\omega-\omega_{0e}\right)+\delta\left(\omega+\omega_{0e}\right)\right]. \tag{15.22}$$

Во второе слагаемое формулы (15.11) входит дробь $b/\left(a^2+b^2\right)$. Снова переходя к пределу $\eta \to 0$, получим

$$\frac{b}{a^2+b^2} \to \pi\delta\left(q^2+\frac{\omega^2}{v^2}-\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon(\omega)\right) = \pi\delta\left(q^2+\frac{\omega^2}{v^2}-\frac{\omega^2}{c^2}+\frac{\omega_{0e}^2}{c^2}\right) \tag{15.23}$$

Аргумент дельта-функции положителен при всех $q \geqslant 0$ и $\omega \geqslant 0$, поэтому второе слагаемое не дает никакого вклада в интеграл. Объединяя предыдущие результаты, будем иметь

$$\left.\frac{d\mathscr{E}}{dz}\right|_{q\leqslant q_0} = -\frac{e^2\omega_{0e}^2}{v^2}\ln\frac{q_0 v}{\omega_{0e}} \tag{15.24}$$

Уравнение $\varepsilon_l(\omega)=0$, как мы видели в разделе 11.1, определяет частоту собственных колебаний плазмы. Таким образом, формула (15.24) описывает генерацию плазмонов быстрой частицей на единице пути. Мы уже отмечали в задаче 11.49, что этот процесс служит одним из способов экспериментального исследования электронной структуры твердых тел.

Добавляя к (15.24) потери от близких столкновений, получим полные столкновительные потери быстрой частицы в плазме:

$$\frac{d\mathscr{E}}{dz} = -\frac{2\pi n_e e^4}{m_e v^2}\left(\ln\frac{2m_e v^2 K_m}{\hbar^2\omega_{0e}^2} - \beta^2 + \frac{K_m^2}{4\mathscr{E}^2}\right) \tag{15.25}$$

Структура этой формулы та же, что и в предыдущих случаях, различия между ними связаны в основном с величиной, стоящей под знаком логарифма и малыми поправками в скобках.

Излучение Вавилова-Черенкова. Рассмотрим движение частицы в немагнитном ($\varepsilon_l = \varepsilon_t = \varepsilon(\omega) > 1$) непоглощающем диэлектрике и выделим ту часть полных потерь энергии, которая связана с генерацией поперечных электромагнитных воле. Она определяется вторым слагаемым в формуле (15.11):

$$\left.\frac{d\mathscr{E}}{dz}\right|_{tr} = -\frac{e^2}{\pi c^2}\int_0^\infty \omega d\omega \int_0^{q_0} \frac{q^2 dq^2}{q^2+\omega^2/v^2}\frac{b}{a^2+b^2} =$$
$$= -\frac{e^2}{c^2}\int_0^\infty \omega d\omega \int_0^{q_0} \frac{q^2 dq^2}{q^2+\omega^2/v^2}\delta\left(q^2+\frac{\omega^2}{v^2}-\frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon(\omega)\right) \tag{15.26}$$

Мы здесь использовали формулу (15.23). Аргумент дельта-функции обратится в нуль лишь при условии $\omega^2/v^2 - \omega^2\varepsilon(\omega)/c^2 < 0$, т. е.

$$\varepsilon(\omega) > 1, \quad v > \frac{c}{\sqrt{\varepsilon(\omega)}} = v_{ph} \tag{15.27}$$

Скорость частицы должна превышать фазовую скорость электромагнитных волн в диэлектрике. Несложно определить и угловое распределение излучения. Вернемся к

замене переменных в примере (15.2) и учтем, что $\omega = kv\cos\theta$, где θ - угол распространения электромагнитной волны относительно скорости частицы v. С другой стороны, в изотропном диэлектрике частота волны $\omega(k) = kv_{ph} = kc/n(\omega)$, где $n(\omega) = \sqrt{\varepsilon(\omega)}$ - коэффициент преломления. Сравнивая два выражения для частоты, находим

$$\cos\theta = \frac{v_{ph}}{v} = \frac{c}{n(\omega)v} \tag{15.28}$$

Излучение Вавилова-Черенкова заданной частоты испускается вдоль образующей конуса под углом, который определяется соотношением (15.28).

Произведя в (15.26) интегрирование по dq^2, получим полное черенковское излучение на единице пути:

$$\left.\frac{d\mathscr{E}}{dz}\right|_{tr} = -\frac{e^2}{c^2}\int\limits_0^\infty \left(1 - \frac{c^2}{n^2(\omega)v^2}\right)\omega d\omega \tag{15.29}$$

Интегрирование производится по области частот, в которой выполняется условие излучения (15.27). Это излучение было обнаружено в экспериментах С. И. Вавилова и П. А. Черенкова в 30 -х годах 20 -го века. Теоретическое объяснение эффекта дали И. Е. Тамм и И. М. Франк (1937). В 1958 г. П. А. Черенкову, И.Е. Тамму и И. М. Франку была присуждена Нобелевская премия по физике «за открытие, объяснение и использование эффекта, носящего имя Черенкова». История экспериментальных и теоретических исследований этого эффекта подробно описана участником открытия И. М. Франком в его монографии (1988) [1].

Ряд вопросов, относящихся к излучению Вавилова-Черенкова, рассмотрен в следующем разделе.

Многократное рассеяние быстрых частиц. Кроме потерь энергии, быстрые частицы в веществе испытывают многократные упругие столкновения, которые вызываются главным образом их взаимодействием с атомными ядрами. Ядра ввиду их большой массы можно считать неподвижными. Многократное рассеяние может существенно влиять на угловое распределение быстрых частиц и на радиационные процессы в среде. Характерной особенностью улоновских столкновений является резко анизотропный характер резерфордовского сечения упругого рассеяния. В каждом столкновении релятивистская частица отклоняется на малый угол. Дифференциальное сечение рассеяния на экранированном кулоновском потенциале в малоугловом приближении вычислено в задаче 15.2:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{2Ze^2}{pv}\right)^2 \frac{1}{\left(\theta^2 + \theta_0^2\right)^2}, \quad \theta_0 = Z^{1/3}\alpha\frac{m_e c}{p}, \quad \alpha = \frac{e^2}{\hbar c} \approx \frac{1}{137} \tag{15.30}$$

$d\Omega = \theta d\theta d\varphi$ - элемент телесного угла, θ_0 - учитывает радиус экранировки потенциала в приближении экспоненциальной экранировки. Сечение максимально при $\theta \approx \theta_0 \ll 1$ и убывает с ростом угла как θ^{-4} при $\theta \gg \theta_0$.

Получим уравнение для решения задач о многократном упругом рассеянии релятивистской частицы в приближении малых углов. Будем считать, что в начальный момент пучок частиц имел нулевой разброс по углу, а в конечном состоянии средний угол рассеяния мал по сравнению с единицей (но велик по сравнению с углом θ_0

[1] Теоретическое предсказание о возможности излучения заряда при его сверхсветовом движении в диэлектрике сделал в 1888 г. (еще до открытия первой элементарной частицы электрона) выдающийся английский физик О. Хевисайд (см. Болотовский (1985)). Но только советские ученые обнаружили это явление на опыте и изучили его исчерпывающим образом.

однократного рассеяния). Малый угол удобно изображать вектором ϑ, направление которого перпендикулярно первоначальной скорости частицы и указывает направление ее отклонения. Модуль же дает угол отклонения.

Внешнее поле отсутствует, поэтому уравнение Больцмана (7.38) для функции распределения $f(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{r}, t)$ будет иметь вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{r}} = I[f] \tag{15.31}$$

где $I[f]$ - интеграл столкновений быстрой частицы с неподвижными рассеивателями (атомами). С точностью до членов первого порядка по малому углу имеем

$$\boldsymbol{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} = v\frac{\partial}{\partial z} + v\boldsymbol{\vartheta} \cdot \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\rho}}$$

где начальное направление движения частицы совпадает с осью Oz, $\boldsymbol{\rho}$ радиус-вектор в плоскости (x, y). Интеграл столкновений записываем из
соображений баланса в виде

$$I[f] = n_a v \int [f(\boldsymbol{\vartheta} - \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{r}, t) - f(\boldsymbol{\vartheta}, \boldsymbol{r}, t)] d\sigma(\theta) \tag{15.32}$$

где первое слагаемое описывает приход частиц в состояние с углом $\boldsymbol{\vartheta}$ за счет упругого рассеяния, а второе - уход частиц из данного во все другие состояния. При этом энергия частиц сохраняется. В предположении $\theta \ll \vartheta$ производим разложение по углу рассеяния $\boldsymbol{\theta}$:

$$f(\boldsymbol{\vartheta} - \boldsymbol{\theta}) \approx f(\boldsymbol{\vartheta}) - \boldsymbol{\theta} \cdot \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\vartheta}} + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial \vartheta_x^2}\theta_x^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial \vartheta_x \partial \vartheta_y}\theta_x\theta_y + \frac{\partial^2 f}{\partial \vartheta_y^2}\theta_y^2\right]$$

Здесь проекции угла рассеяния можно выразить через азимутальный угол: $\theta_x = \theta\cos\varphi, \theta_y = \theta\sin\varphi$. Вычисление интегралов дает $\int \theta d\sigma(\theta) = \int \theta_x\theta_y d\sigma(\theta) = 0$ ввиду независимости сечения от азимутального угла. Обозначив

$$q = n_a \int \theta^2 d\sigma(\theta) \tag{15.33}$$

получим кинетическое уравнение в приближении Фоккера-Планка:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v\frac{\partial f}{\partial z} + v\boldsymbol{\vartheta} \cdot \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\rho}} = \frac{qv}{4}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \vartheta_x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial \vartheta_y^2}\right) \tag{15.34}$$

Все интегралы по углу, содержащие функцию распределения $f(\boldsymbol{\vartheta})$, можно брать в бесконечных пределах ввиду быстрой сходимости. Но интеграл (15.33) на верхнем пределе логарифмически расходится, и его следует ограничить:

$$q = 4\pi n_a \left(\frac{Ze^2}{pv}\right)^2 \left(\ln\frac{\theta_{\max}}{\theta_0} - \frac{1}{2}\right), \quad \theta_{\max} \gg \theta_0 \tag{15.35}$$

Это выражение имеет логарифмическую точность, т. е. применимо при условии $\ln(\theta_{\max}/\theta_0) \gg 1$. Величина $\theta_{\max}$ может быть любым числом порядка единицы. Для частиц очень высоких энергий нужно учитывать конечный размер ядра, в этом случае $\theta_{\max} \approx \hbar/pR_n$, где R_n - радиус ядра. Такое ограничение годится в тех случаях, когда $\theta_{\max} < 1$.

Решение уравнения Фоккера-Планка для многократного рассеяния см. в задачах $(15.7^{\bullet}), (15.8^{\star})$.

Радиационные потери энергии. Кроме потерь на ионизацию и возбуждение атомов, быстрая частица теряет энергию в среде на излучение. Один вид таких потерь - черенковские потери - мы уже рассмотрели выше в этом разделе (см. также раздел 15.2). Но черенковское излучение вносит небольшой вклад в общие потери энергии. Несравненно более существенную роль для сильно релятивистских электронов играет тормозное излучение гамма-квантов на атомных ядрах среды. В тормозном излучении масса частицы весьма важна, так как в ее сопутствующей системе ускорение обратно пропорционально массе, а интенсивность излучения, таким образом, обратно пропорциональна квадрату массы. Поэтому при одинаковых релятивистских факторах в одном и том же внешнем поле тормозное излучение протонов в миллион раз меньше, чем электронов. Но из этого не следует, что при движении тяжелой ультрарелятивистской частицы в среде излучение будет отсутствовать. Излучать будут электроны отдачи, возбуждаемые энергичной частицей (см. задачу 6.81).

Тормозное излучение ультрарелятивистского электрона на неэкранированном атомном ядре было вычислено методом эквивалентных фотонов в задаче 6.82 . Его сечение с вылетом квантов под всеми возможными углами имеет вид

$$d\sigma_r(\omega) = 4Z^2\alpha r_0^2 \frac{d\omega}{\omega}\left\{1 - \frac{2\mathscr{E}'}{3\mathscr{E}} + \frac{\mathscr{E}'^2}{\mathscr{E}^2}\right\}\ln\frac{2\mathscr{E}\mathscr{E}'}{m_e c^2\hbar\omega}$$
$$\mathscr{E} \gg m_e c^2, \quad \ln\frac{2\mathscr{E}\mathscr{E}'}{m_e c^2\hbar\omega} \gg 1 \tag{15.36}$$

Как уже отмечалось, расчет по теории возмущений в низшем порядке дает близкий результат:
$d\sigma_r^{(B)}(\omega) = 4Z^2\alpha r_0^2\frac{d\omega}{\omega}\left\{1 - \frac{2\mathscr{E}'}{3\mathscr{E}} + \frac{\mathscr{E}'^2}{\mathscr{E}^2}\right\}\left[\ln\frac{2\mathscr{E}\mathscr{E}'}{m_e c^2\hbar\omega} - \frac{1}{2}\right], \quad \mathscr{E} \gg m_e c^2$
Здесь $r_0 = e^2/m_e c^2$ - классический радиус электрона, $\alpha = e^2/\hbar c \approx 1/137$ - постоянная тонкой структуры, индекс B означает первое борновское приближение, $\mathscr{E}, \mathscr{E}'$ - начальная и конечная энергии электрона. При $\ln(2\mathscr{E}\mathscr{E}'/m_e c^2\hbar\omega) \gg 1$ оба сечения совпадают. В мягкой части тормозного спектра ($\hbar\omega \ll \mathscr{E}$) имеем

$$d\sigma_r^{(B)}(\omega) = \frac{16}{3}Z^2\alpha r_0^2\frac{d\omega}{\omega}\left[\ln\frac{2\mathscr{E}^2}{m_e c^2\hbar\omega} - \frac{1}{2}\right] \tag{15.38}$$

Использовав приведенные сечения, можно вычислить радиационные потери ультрарелятивистского электрона:

$$\left.\frac{d\mathscr{E}}{dz}\right|_{rad} = -n_a\int_0^{\mathscr{E}/\hbar}\hbar\omega\frac{d\sigma_r^{(B)}}{d\omega}d\omega \tag{15.39}$$

где n_a - концентрация атомных ядер. Величина, стоящая под знаком интеграла, представляет собой спектральную плотность потерь на единице пути и на единичный интервал частот:

$$\frac{d^2\mathscr{E}_\omega}{dzd\omega} = -n_a\hbar\omega\frac{d\sigma_r^{(B)}}{d\omega} \tag{15.40}$$

Спектральные потери в единицу времени получатся умножением этой величины на скорость частицы $v \approx c$. Они не эквивалентны спектральной интенсивности излучения (5.77), которая рассматривалась в классической теории. Формула (5.77) дает спектральные потери за все время излучения, которое предполагалось конечным. Здесь

же время излучения частицы неограничено, и следует рассматривать потери в единицу времени или на единице пути.

Возвращаясь к вычислению радиационных потерь, производим интегрирование согласно (15.39) и получаем

$$\left.\frac{d\mathscr{E}}{dz}\right|_{\text{rad}} = -4Z^2\alpha r_0^2 n_a \mathscr{E}\left[\ln\frac{2\mathscr{E}}{m_e c^2} - \frac{1}{3}\right] \tag{15.41}$$

Уже сравнение этого результата с формулой (15.19) для ионизационных потерь показывает, что у электронов при высоких энергиях радиационные потери преобладают, поскольку они растут пропорционально произведению $\mathscr{E}\ln\mathscr{E}$, тогда как ионизационные потери в релятивистской области пропорциональны только $\ln\mathscr{E}$. Но прежде, чем делать окончательные выводы, нужно уточнить зависимость (15.41) для радиационных потерь. Она получена в упрощенной модели вещества как совокупности голых ядер без электронных оболочек, расположенных случайным образом в пространстве. В действительности имеется еще подсистема электронов, которые экранируют поля ядер, изменяют закон дисперсии квантов, создавая диэлектрическую проницаемость среды и сами могут излучать кванты. Сначала мы учтем экранировку поля ядра атомными электронами, считая электронную систему статической. В конце этого раздела и в следующем разделе роль электронов среды будет рассмотрена более подробно.

Пример 15.4. Используя метод эквивалентных фотонов (см. раздел 6.3), вычислить сечение тормозного излучения релятивистского электрона в поле нейтрального атома. Использовать электростатический потениал атома с экспонениальной экранировкой: $\varphi(r) = (Ze/r)e^{-r/R}$, $R = a_B Z^{-1/3}, a_B$ - радиус·Бора. Выяснить роль экранировки в зависимости от энергии электрона и частоты излчаемых квантов.

Решение. В системе покоя среды скалярный и векторный потенциалы атома имеют следующий вид:

$$\varphi(r) = \int \frac{4\pi Ze}{k^2+\kappa^2}\exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})\frac{d^3k}{(2\pi)^3}, \quad \kappa = \frac{1}{R}, \quad \boldsymbol{A}(r) = 0 \tag{1}$$

Если электрон движется со скоростью $\boldsymbol{v} = \text{const}$, то в системе электрона (штрихованной) потенциалы как функции штрихованных координат и времени можно получить с помощью преобразований Лоренца (см. главу 3):

$$\varphi'(\boldsymbol{r}', t') = \frac{Ze\gamma}{2\pi^2}\int \frac{d^3k}{k^2+\kappa^2}\exp\left[i\boldsymbol{k}_\perp\cdot\boldsymbol{r}_\perp + ik_\parallel\gamma(z'+vt')\right] \tag{2}$$
$$\boldsymbol{A}'(\boldsymbol{r}', t') = -\frac{\boldsymbol{v}}{c}\varphi'(\boldsymbol{r}', t')$$

Поперечные относительно скорости координаты не преобразуются. Далее определяем напряженности электрического и магнитного полей:

$$E'_\parallel = -i\frac{Ze}{2\pi^2}\int \frac{k_\parallel d^3k}{k^2+\kappa^2}\exp\left[i\boldsymbol{k}_\perp\cdot\boldsymbol{r}_\perp + ik_\parallel\gamma(z'+vt')\right]$$

$$\boldsymbol{E}'_\perp = -i\frac{Ze\gamma}{2\pi^2}\int \frac{\boldsymbol{k}_\perp d^3k}{k^2+\kappa^2}\exp\left[i\boldsymbol{k}_\perp\cdot\boldsymbol{r}_\perp + ik_\parallel\gamma(z'+vt')\right], \quad \boldsymbol{H}' = -\frac{\boldsymbol{v}}{c}\times\boldsymbol{E}' \tag{3}$$

Здесь снова, как и в примере 6.19, проявляется близость электромагнитного поля релятивистского объекта к набору плоских волн в вакууме (или, на квантовом языке, эквивалентных фотонов). Поле почти поперечно, $E'_\perp/E'_\parallel \approx \gamma \gg 1$, частота волн, как следует из вида экспонент, близка к вакуумному значению

$$\omega' = v\gamma k_{\parallel} \approx ck' \tag{4}$$

поскольку $k'_{\perp} = k_{\perp} \ll k'_{\parallel} = \gamma k_{\parallel}$.

Спектральную плотность $n(\omega')$ числа эквивалентных фотонов, как и в примере 6.19, определяем путем приравнивания всей электромагнитной энергии, прошедшей через плоскость $z' = 0$ за время пролета атома мимо электрона, полной энергии эквивалентных фотонов:

$$-\frac{c}{4\pi v}\int d^2 r_{\perp}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dt'\,[\boldsymbol{E}'\times\boldsymbol{H}']\cdot\boldsymbol{v} = \int\limits_{0}^{\infty}\hbar\omega' n(\omega')\,d\omega' \tag{5}$$

Интегралы в левой части равенства по поперечным координатам и по времени дают дельта-функции, использование которых позволяет представить левую часть в виде трехкратного интеграла:

$$\frac{Z^2e^2\gamma}{2\pi^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dk'_{\parallel}\int\frac{k_{\perp}^2 d^2k_{\perp}}{\left(k^2+\kappa^2\right)^2} = \int\limits_{0}^{\infty}\hbar\omega' n(\omega')\,d\omega' \tag{6}$$

С помощью равенства (4) определяем из последнего уравнения спектральную плотность эквивалентных фотонов:

$$n(\omega')\,d\omega' = \frac{Z^2e^2}{2\pi^2\hbar c}\frac{d\omega'}{\omega'}\int\limits_{0}^{k_m}\frac{2\pi k_{\perp}^3\,dk_{\perp}}{\left(k^2+\kappa^2\right)^2} \tag{7}$$

Интеграл по поперечному волновому вектору расходится на верхнем пределе, и его следует обрезать на обратной комптоновской длине (см. условие (9) в примере 6.19):

$$k_m \approx \frac{1}{\Lambda_C} = \frac{m_e c}{\hbar}$$

Вычислив интеграл, получим

$$n(\omega') = -\frac{Z^2e^2}{\pi\hbar c}\frac{1}{\omega'}\ln\left[\left(\frac{\hbar\omega'}{\mathscr{E}}\right)^2+\left(\frac{\Lambda_C}{R}\right)^2\right] > 0 \tag{8}$$

Здесь опущена единица по сравнению с большим по модулю отрицательным логарифмом. В пределе неэкранированного кулоновского поля ($R\to\infty$) результат (8) совпадает с (6.129).

Дальнейшее решение производится по образцу задачи 6.82, отличаясь от него лишь более общим выражением (8) для спектральной плотности эквивалентных фотонов. Используя сечение комптоновского рассеяния в
системе электрона и переходя затем в систему среды, найдем сечение тормозного излучения:

$$d\sigma_r(\omega) = -2Z^2\alpha r_0^2\frac{d\omega}{\omega}\left\{1-\frac{2\mathscr{E}'}{3\mathscr{E}}+\frac{\mathscr{E}'^2}{\mathscr{E}^2}\right\}\ln\left[\left(\frac{m_e c^2\hbar\omega}{2\mathscr{E}\mathscr{E}'}\right)^2+\left(\frac{\Lambda_C}{R}\right)^2\right] \tag{9}$$

Рассмотрим два предельных случая этой формулы.
а) отсутствие экранировки:

$$\frac{\Lambda_C}{R} \ll \frac{m_e c^2\hbar\omega}{2\mathscr{E}\mathscr{E}'}, \quad \text{или} \quad R \gg l_c \tag{15.42}$$

где

$$l_c = \frac{2\mathscr{E}\mathscr{E}'}{m_e^2 c^3 \omega} = \frac{2\gamma\gamma' c}{\omega} \tag{15.43}$$

В этом случае получаем для сечения прежний результат (15.36).
б) полная экранировка:

$$\frac{\Lambda_C}{R} \gg \frac{m_e c^2 \hbar\omega}{2\mathscr{E}\mathscr{E}'}, \quad \text{или} \quad l_c \gg R \tag{15.44}$$

Под знаком логарифма в формуле (9) главным становится второе слагаемое, и сечение принимает вид

$$d\sigma_r(\omega) = 4Z^2\alpha r_0^2 \frac{d\omega}{\omega}\left\{1 - \frac{2\mathscr{E}'}{3\mathscr{E}} + \frac{\mathscr{E}'^2}{\mathscr{E}^2}\right\}\ln\frac{R}{\Lambda_C} \tag{15.45}$$

В этом пределе логарифмический фактор выходит на постоянное значение, не зависящее от энергий электрона и излученного кванта.

Особенности тормозного излучения кванта релятивистским электроном. Длина когерентности. Проанализируем физический смысл результатов, полученных в предыдущем примере, и особенно роль длины l_c, которая определяется формулой (15.43). Для этого, пользуясь законами сохранения, оценим продольный импульс, передаваемый внешнему полю в сильно релятивистском случае. Под внешним полем будем понимать поле отдельного атомного ядра, экранированного электронной оболочкой. В направлении начального импульса электрона $\boldsymbol{p}$ имеем

$$\hbar q_\parallel = p - p'\cos\vartheta - \hbar k\cos\theta \tag{15.46}$$

где ϑ, θ - углы рассеяния электрона и вылета кванта. В релятивистском случае эти углы весьма малы, не превышают $m_e c/p \ll 1$. Поэтому для оценки полагаем $\cos\vartheta \approx \cos\theta \approx 1$. Кроме того, считаем квант достаточно жестким и не учитываем поляризацию среды, используя дисперсионное соотношение $k = \omega/c$. В этих условиях переданный внешнему полю продольный волновой вектор

$$q_\parallel \approx \frac{1}{\hbar c}\left(\sqrt{\mathscr{E}^2 - m_e^2 c^4} - \sqrt{\mathscr{E}'^2 - m_e^2 c^4} - \frac{\omega}{c} \approx \frac{m_e^2 c^3 \omega}{2\mathscr{E}\mathscr{E}'}\right. \tag{15.47}$$

Обратная величина

$$l_c = \frac{1}{q_\parallel} = \frac{2\mathscr{E}\mathscr{E}'}{m_e^2 c^3 \omega} \tag{15.48}$$

определяет в продольном направлении размер области, существенной для процесса излучения. Это проявляется, в частности, в том, что квадрат модуля гармоники U_q внешнего поля определяет вероятность излучения (см. решение задачи (15.9**)).

При фиксированной энергии кванта $\hbar\omega$ продольная длина растет пропорционально произведению $\gamma\gamma'$ и может достичь макроскопических значений. При этом поперечная длина остается величиной порядка комптоновской длины электрона $\Lambda_C = \hbar/m_e c$, которая определяла параметр обрезания интеграла по поперечному волновому вектору $k_\perp$ в формуле (7) примера (15.4). Область, ограниченная двумя указанными длинами, определяет эффективный объем интегрирования при вычислении матричного эліемента в U_q, поэтому ее следует рассматривать как область формирования кванта.

Продольную длину называют также когерентной длиной. Смысл понятия «когерентная длина» особенно прозрачен в классическом случае, когда

$$\hbar\omega \ll \mathscr{E}, \quad \gamma' \approx \gamma \tag{15.49}$$

Пусть релятивистская частица ($v \approx c$) излучает электромагнитную волну, двигаясь по траектории $\boldsymbol{r}(t) \approx vt$, близкой к прямолинейной. Тогда излучаемые волны с частотой ω имеют фазовый множитель

$$\exp[i\varphi(t)] = \exp(ikv\cos\theta - i\omega t) \tag{15.50}$$

Оценим длину l'_c, на которой излучаемые волны приблизительно когерентны, т.е. их фазы отличаются на $\Delta\varphi \leqslant 1$. Длине l'_c соответствует время движения частицы $\Delta t = l'_c/v$. Из условия

$$\Delta\varphi = \varphi(t) - \varphi(t+\Delta t) = (\omega - kv\cos\theta)l'_c/v = 1 \tag{15.51}$$

учитывая малость угла излучения $\theta \lesssim \gamma^{-1}$, находим значение

$$l'_c = \frac{2\gamma^2 c}{\omega\,(1+\gamma^2\theta^2)} = \frac{l_c}{1+\gamma^2\theta^2} \tag{15.52}$$

где l_c совпадает с (15.48).
Используя концепцию области излучения, легко понять роль экранировки ядра электронной оболочкой при тормозном излучении. Экранированный кулоновский потенциал становится короткодействующим и в приближении экспоненциальной экранировки приведен в условии примера (15.4). Логарифму, входящему в формулы (15.36), (15.37), можно придать вид

$$\ln\frac{2\mathscr{E}\mathscr{E}'}{m_e c^2\hbar\omega} = \ln\frac{l_c}{\Lambda_C} \tag{15.53}$$

Под знаком логарифма стоит отношение двух длин, продольной и поперечной, определяющих область излучения. Использованные выше формулы (15.36), (15.37) для сечения применимы лишь при условии $l_c \ll R$. При этом радиус действия потенциала не ограничивает область излучения (отсутствие экранирования). В противоположном предельном случае $l_c \gg R$ (полное экранирование) продольный размер области излучения будет ограничен длиной R, которую и нужно ввести под знак логарифма вместо l_c:

$$\ln\frac{2\mathscr{E}\mathscr{E}'}{m_e c^2\hbar\omega} \to \ln\frac{R}{\Lambda_C} = \ln\frac{a_B}{Z^{1/3}\Lambda_C} = \ln\frac{1}{\alpha Z^{1/3}} \tag{15.54}$$

В результате сечение тормозного излучения примет вид

$$d\sigma_r(\omega) = 4Z^2\alpha r_0^2\frac{d\omega}{\omega}\left\{1 - \frac{2\mathscr{E}'}{3\mathscr{E}} + \frac{\mathscr{E}'^2}{\mathscr{E}^2}\right\}\ln 137Z^{-1/3} \tag{15.55}$$

Более точное выражение для сечения, учитывающее экранировку в модели Томаса-Ферми, было получено по теории возмущения Бете и Гайтлером. В случае полного экранирования сечение Бете-Гайтлера имеет вид

$$d\sigma_r(\omega) = 4Z^2\alpha r_0^2\frac{d\omega}{\omega}\left\{\left(1 - \frac{2\mathscr{E}'}{3\mathscr{E}} + \frac{\mathscr{E}'^2}{\mathscr{E}^2}\right)\ln 183Z^{-1/3} + \frac{\mathscr{E}'}{9\mathscr{E}}\right\}, \quad l_c \gg a_B Z^{-1/3} \tag{15.56}$$

Из этой формулы в подтверждение предыдущим качественным соображениям следует, что с ростом энергии электрона роль экранирования при

тормозном излучении возрастает. Экранированное сечение, как и следовало ожидать, оказывается меньше неэкранированного при той же энергии излучающей частицы.

В пределе малых энергий кванта, $\hbar\omega \ll \mathscr{E}, \mathscr{E}' \approx \mathscr{E}$, который можно получить и из классической теории излучения, сечение (15.56) принимает вид

$$d\sigma_{r.}(\omega) = \frac{16}{3} Z^2 \alpha r_0^2 \left(\ln 183 Z^{-1/3} + \frac{1}{12} \right) \frac{d\omega}{\omega} \tag{15.57}$$

Расходимость сечения при $\omega \to 0$ вызвана излучением большого числа мягких квантов при больших прицельных параметрах. Но эта расходимость устраняется при учете поляризации среды (см. ниже). Она не сказывается при расчете радиационных потерь.

Лавинная длина и электронно-фотонные ливни. Торможение электрона на единице пути в условиях полного экранирования вычисляется по формуле (15.39) с сечением (15.56):

$$\left.\frac{d\mathscr{E}}{dz}\right|_{\text{rad}} = -\frac{\mathscr{E}}{L_r}, \quad L_r^{-1} = 4Z^2 \alpha r_0^2 n_a \left(\ln 183 Z^{-1/3} - \frac{1}{18} \right) \tag{15.58}$$

Обратим внимание на то, что в интеграл (15.39) главный вклад дает область значений энергий квантов $\hbar\omega$, сравнимых с энергией излучающей частицы $\mathscr{E}$. Вклад квантов с энергиями $\hbar\omega \ll \mathscr{E}$ - порядка $\hbar\omega/\mathscr{E} \ll 1$. То же самое имело место и при выводе формулы (15.41), которая соответствует условию отсутствия экранирования $l_c \ll R$. Это свидетельствует о том, что радиационные потери, в отличие от ионизационных, происходят большими порциями и порождают сильные флуктуации энергии первичной частицы.

Согласно (15.58), значительную часть энергии сверхрелятивистский электрон теряет на характерной длине L_r (его энергия убывает в e раз на такой длине). Эта величина называется радиационной (или лавинной) длиной. Второе название указывает на то, что сверхрелятивистский электрон порождает лавину («ливень») других релятивистских частиц. Энергичные кванты в поле атомных ядер генерируют электронно-позитронные, а также мюонные и таонные пары, те в свою очередь рождают энергичные кванты, и процесс рождения новых частиц нарастает в геометрической прогрессии, пока не будет израсходована энергия первичной частицы, породившей ливень.

Приведем значения радиационной длины для некоторых сред:

Среда	воздух	вода	C	Si	Pb
L_r, см	30000	33.9	14.7	10.2	0.26

Из сравнения этих величин следует, что наибольший объем ливень занимает в атмосфере Земли. Регистрация и измерение различных характеристик широких атмосферных ливней - главный метод изучения космических частиц сверхвысоких энергий, вторгающихся в атмосферу Земли из космоса. Такие ливни захватывают на поверхности Земли площади в сотни и тысячи квадратных километров. Установки для изучения широких атмосферных ливней имеются в ряде стран, в том числе в России.

Определим с помощью формулы (15.58) энергию электрона $\mathscr{E}_*$, начиная с которой радиационные потери преобладают над ионизационными. Приравнивая (15.58) и (15.20) (последняя формула описывает ионизационные потери электрона с десятипроцентной точностью), находим

$$\mathscr{E}_* \approx \frac{1600 m_e c^2}{Z} \tag{15.59}$$

Это дает приблизительно 10МВ для свинца, 55 МэВ для меди и 200М для воздуха.

Влияние многократного рассеяния и поляризации среды на тормозное излучение. Для выяснения этого вопроса дадим более точную оценку когерентной длины (15.48). Во-первых, учтем поляризацию среды через диэлектрическую проницаемость $\varepsilon(\omega)$: $k = \omega\sqrt{\varepsilon}/c$. Считая, что частоты излучения много больше атомных частот и плазменной частоты $\omega_{0e} = \sqrt{4\pi n_e e^2/m_e}$, используем асимптотическое выражение диэлектрической проницаемости для больших чнастот, из которого получим

$$k \approx \frac{\omega}{c} - \frac{\omega_{0e}^2}{2\omega c} \tag{15.60}$$

Во-вторых, при большой продольной длине частица может испытать в области формирования излучения многократное рассеяние, что увеличит угол отклонения от первоначального направления. Оба эти фактора приведут к увеличению переданного импульса, к уменьшению когерентной длины и как следствие - к уменьшению излучения. Эффект подавления тормозного излучения многократным рассеянием электрона (эффект Ландау-Померанчука) был предсказан этими авторами в 1953 г. и впоследствии получил наблюдательные подтверждения (см. обзор ТерМикаэляна (2003)). Влияние поляризации среды на тормозное излучение обнаружил Тер-Микаэлян (см. его монографию (1969)).

Сделаем оценку продольного передаваемого волнового вектора с учетом указанных эффектов для случая $\hbar\omega \ll \mathscr{E}$, когда эти эффекты проявляются в наибольшей степени:

$$q_\parallel \approx \frac{\omega}{2\gamma^2 c}\left[1 + \gamma^2\theta^2 + \frac{\omega_{0e}^2\gamma^2}{\omega^2} + \frac{cp}{\hbar\omega}\gamma^2\vartheta^2\right] = \frac{1}{l_c} \tag{15.61}$$

В случае взаимодействия электрона с одним экранированным кулоновским центром угол рассеяния $\vartheta \approx \theta_0 \approx Z^{1/3}\alpha m_e c/p$, поэтому последнее слагаемое в скобках можно записать в виде

$$\frac{cp}{\hbar\omega}\gamma^2\vartheta^2 \approx Z^{2/3}\alpha^2\frac{\mathscr{E}}{\hbar\omega} \tag{15.62}$$

где $\mathscr{E}$ - энергия излучающего электрона. Из (15.61), (15.62) следует, что длина когерентности сохраняет по порядку величины значение (15.48) при условиях

$$\theta^2 \lesssim \gamma^{-2}, \quad \hbar\omega \gg \alpha^2 Z^{2/3}\mathscr{E} \approx 5\times 10^{-5} Z^{2/3}\mathscr{E}$$

но с ростом энергии частицы угол ϑ станет нарастать за счет многократного рассеяния электрона, что приведет в соответствии с (15.61) к уменьшению когерентной длины. При более низких частотах вступит в игру слагаемое $\omega_{0e}^2\gamma^2/\omega^2$, что тоже уменьшит когерентную длину, а вместе с ней и интенсивность излучения.

Для количественной оценки указанных эффектов проведем расчет интенсивности излучения в классической области спектра $\hbar\omega \ll \mathscr{E}$ методами классической электродинамики. Используем формулу (5.77) для спектральной плотности излучения в заданном направлении, восстановив в ней зависимость от k и не пользуясь вакуумным дисперсионным соотношением $k = \omega/c$:

$$\frac{d^2 I_\omega}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi^2 c}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dt' \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt\,[\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{v}\,(t')]\cdot[\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{v}(t)]\exp\left\{i\omega\,(t'-t) - i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}\,(t') - \boldsymbol{r}(t))\right\} \tag{15.63}$$

Перейдя к переменным интегрирования t и $\tau = t' - t$, запишем это соотношение в виде $\frac{d^2 I_\omega}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2}{2\pi^2 c}\,\mathrm{Re}\int\limits_0^\infty d\tau \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt[\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{v}(t+\tau)]\cdot[\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{v}(t)]\exp\{i\omega\tau - i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}(t+\tau) - \boldsymbol{r}(t))\}$.

В условиях многократного рассеяния электрона в неупорядоченной среде величины $\boldsymbol{v}(t)$ и $\boldsymbol{r}(t)$ становятся случайными функциями времени,
и необходимо произвести их усреднение по столкновениям электрона со случайно распределенными силовыми центрами. Будем руководствоваться работой Мигдала (1956). Усреднение следует провести с функциями распределения $F\left(\boldsymbol{v},\boldsymbol{r},t;0,\boldsymbol{v}_0,0\right)$ и $F\left(\boldsymbol{v}',\boldsymbol{r}',t+\tau;\boldsymbol{v},\boldsymbol{r},t\right)$. Первая группа аргументов соответствует концу движения, а вторая - его началу. Таким образом, начальные условия для ясности включены в число аргументов, от которых зависит соответствующая функция распределения. Каждая из них нормирована на единицу и представляет собой вероятность застать частицу в конечной точке фазового пространства при условии, что в начальный момент она находилась в начальной точке. Обе функции удовлетворяют кинетическому уравнению Фоккера-Планка (15.34) и начальным условиям
$F\left(\boldsymbol{v},\boldsymbol{r},0;0,\boldsymbol{v}_0,0\right)=\delta(\boldsymbol{r})\delta\left(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_0\right),\quad F\left(\boldsymbol{v}',\boldsymbol{r}',t+0;\boldsymbol{v},\boldsymbol{r},t\right)=\delta\left(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}\right)\delta\left(\boldsymbol{v}'-\boldsymbol{v}\right)$.
Заметим, что в рассматриваемом приближении абсолютная величина скорости электрона вообще не изменяется, поэтому обе функции распределения в любой момент пропорциональны соответственно $\delta\left(v-v_0\right)$ и $\delta\left(v'-v\right)$.

Усреднение производится следующим образом:

$$\begin{aligned}&\left\langle[\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{v}(t+\tau)]\cdot[\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{v}(t)]\exp\{-i\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}(t+\tau)-\boldsymbol{r}(t))\}\right\rangle=\\&=\int d^3rd^3vd^3r'd^3v'\left[\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{v}'\right]\cdot\left[\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{v}\right]\exp\left\{-i\boldsymbol{k}\cdot\left(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}\right)\right\}\times\\&\times F\left(\boldsymbol{v},\boldsymbol{r},t;0,\boldsymbol{v}_0,0\right)F\left(\boldsymbol{v}',\boldsymbol{r}',t+\tau;\boldsymbol{v},\boldsymbol{r},t\right)\end{aligned}\tag{15.66}$$

В однородной стационарной среде условные вероятности F зависят только от разностей координат и от разностей времен, $F\left(\boldsymbol{v}',\boldsymbol{r}',t+\tau;\boldsymbol{v},\boldsymbol{r},t\right)=F\left(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r},\boldsymbol{v}',\boldsymbol{v},\tau\right)$, поэтому в (15.66) входит фурье-образ по координатам

$$F_k\left(\boldsymbol{v}',\boldsymbol{v},\tau\right)=\int F\left(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r},\boldsymbol{v}',\boldsymbol{v},\tau\right)\exp\left\{-i\boldsymbol{k}\cdot\left(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}\right\}d^3\left(\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}\right)\right.\tag{15.67}$$

Углы, определяющие направления $\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}'$, считаем малыми и отсчитываем их от направления $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{k}/k$ вылета кванта,

$$\begin{gathered}\boldsymbol{v}\approx v\left(1-\frac{1}{2}\vartheta^2\right)\boldsymbol{n}+v\boldsymbol{\vartheta},\quad\boldsymbol{v}'\approx v\left(1-\frac{1}{2}\vartheta'^2\right)\boldsymbol{n}+v\boldsymbol{\vartheta}'\\\left[\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{v}'\right]\cdot\left[\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{v}\right]=(kv)^2\boldsymbol{\vartheta}'\cdot\boldsymbol{\vartheta}\end{gathered}\tag{15.68}$$

где векторы $\boldsymbol{\vartheta},\boldsymbol{\vartheta}'$ перпендикулярны $\boldsymbol{n}$ и изображают малые углы, как в равенстве (15.32).

Уравнение Фоккера-Планка для функции F_k имеет вид

$$\frac{\partial F_k}{\partial\tau}+ikv\left(1-\frac{1}{2}\vartheta'^2\right)F_k=\frac{qv}{4}\left(\frac{\partial^2F_k}{\partial\vartheta_x'^2}+\frac{\partial^2F_k}{\partial\vartheta_y'^2}\right)\tag{15.69}$$

причем q дается равенством (15.35).

Пример 15.5. Построить решение уравнения (15.69), удовлетворяющее начальному условию $F_{\boldsymbol{k}}\left(\boldsymbol{v}',\boldsymbol{v},0\right)=\delta\left(\boldsymbol{\vartheta}'-\boldsymbol{\vartheta}\right)$ и условиям ограниченности.

Решение. Вводим новую неизвестную функцию

$$w\left(\boldsymbol{\vartheta}',\boldsymbol{\vartheta},\tau\right)=e^{ikv\tau}F_k\left(\boldsymbol{v}',\boldsymbol{v},\tau\right)\tag{1}$$

удовлетворяющую уравнению

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} - \frac{1}{2} ikv\vartheta'^2 w = \frac{qv}{4}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial \vartheta_x'^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial \vartheta_y'^2}\right) \tag{2}$$

и ищем решение в форме

$$w\left(\boldsymbol{\vartheta}', \boldsymbol{\vartheta}, \tau\right) = \exp\left\{\alpha(\tau) + \beta(\tau)\boldsymbol{\vartheta}' \cdot \boldsymbol{\vartheta} + \gamma(\tau)\boldsymbol{\vartheta}'^2\right\} \tag{3}$$

где $\alpha(\tau), \beta(\tau), \gamma(\tau)$ - функции времени, которые должны определяться из уравнения (2) и начального условия. Подставляем (3) в уравнение (2) и приравниваем члены при одинаковых степенях независимой переменной $\boldsymbol{\vartheta}'$. Находим систему нелинейных уравнений

$$\dot{\alpha} = qv\gamma + \frac{1}{4} qv\vartheta^2\beta^2 \tag{4}$$

$$\dot{\beta} = qv\beta\gamma \tag{5}$$

$$\dot{\gamma} = qv\gamma^2 - \frac{1}{2} ikv \tag{6}$$

Из уравнения (6) находим

$$\gamma(\tau) = -a \operatorname{cth} b\tau, \quad a = \frac{1-i}{2}\sqrt{\frac{k}{q}}, \quad b = qva \tag{7}$$

Далее интегрируем поочередно уравнения (5) и (4), не забывая включать в решение постоянные интегрирования:

$$\beta(\tau) = \frac{C}{\operatorname{sh} b\tau}, \quad \alpha(\tau) = \frac{qvC^2\vartheta^2}{4ab}\gamma(\tau) - \ln \operatorname{sh} b\tau + \ln C' \tag{8}$$

Чтобы при $\tau \to 0$ выполнялось начальное условие, необходимо выбрать $C = 2a, C' = a/\pi$. Это приводит к решению

$$w\left(\boldsymbol{\vartheta}', \boldsymbol{\vartheta}, \tau\right) = \frac{a}{\pi \operatorname{sh} b\tau} \exp\left\{-\left(\vartheta'^2 + \vartheta^2\right) a \operatorname{cth} b\tau + 2\boldsymbol{\vartheta}' \cdot \boldsymbol{\vartheta} a \operatorname{sh}^{-1} b\tau\right\}. \tag{15.70}$$

Вернемся к вычислению интенсивности излучения. Мы усреднили величину (15.64) по столкновениям электрона с экранированными кулоновскими центрами. Подставляя в (15.64) результаты (15.66), (15.67), (15.70), получим

$$\left\langle \frac{d^2 I_\omega}{d\omega d\Omega} \right\rangle = \frac{e^2k^2c}{2\pi^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt \operatorname{Re} \int\limits_0^\infty d\tau e^{i(\omega - kv)\tau} \int d^3r d^2\vartheta d^2\vartheta' \left(\boldsymbol{\vartheta}' \cdot \boldsymbol{\vartheta}\right) \times \\ \times F\left(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{r}, t; 0, \boldsymbol{v}_0, 0\right) w\left(\boldsymbol{\vartheta}', \boldsymbol{\vartheta}, \tau\right). \tag{15.71}$$

Мы не будем интересоваться угловым распределением излучаемых квантов и проинтегрируем полученное выражение по направлениям начальной скорости v_0 электрона. После интегрирования в силу условия нормировки

$$\int d^3v_0 d^3r F\left(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{r}, t; 0, \boldsymbol{v}_0, 0\right) = 1$$

зависимость от t в подынтегральном выражении исчезнет, и интеграл по dt формально станет расходящимся. Это означает, что спектральная плотность излучения пропорциональна времени, поскольку частица непрерывно взаимодействует с рассеивающими центрами и излучает. Нужно ввести спектральную интенсивность в

единицу времени, поделив обе части (15.71) на промежуток времени $2T = \int\limits_{-T}^{T} dt$. Чтобы перейти к потерям энергии на единицу пути, которые мы вычисляли в предыдущих разделах, следует поменять знак и поделить результат на скорость частицы. В результате из (15.71) мы получим

$$\frac{d^2\mathscr{E}_\omega}{dzd\omega} = -\frac{e^2k^2}{2\pi^2}\,\mathrm{Re}\int\limits_0^\infty d\tau e^{i(\omega-kv)\tau}\int d^2\vartheta d^2\vartheta'\,(\boldsymbol{\vartheta}'\cdot\boldsymbol{\vartheta})\,w\,(\boldsymbol{\vartheta}',\boldsymbol{\vartheta},\tau) \tag{15.72}$$

Для выполнения оставшихся интегрирований в (15.72) удобно представить все выражение в виде

$\frac{d^2\mathscr{E}_\omega}{dzd\omega} = -\frac{e^2k^2}{2\pi^2}\,\mathrm{Re}\int\limits_0^\infty d\tau e^{i(\omega-kv)\tau}\int d^2\vartheta d^2\vartheta'\,(\boldsymbol{\vartheta}'\cdot\boldsymbol{\vartheta})\left[w\,(\boldsymbol{\vartheta}',\boldsymbol{\vartheta},\tau) - w^{(0)}\,(\boldsymbol{\vartheta}',\boldsymbol{\vartheta},\tau)\right]$

где

$$w^{(0)}\,(\boldsymbol{\vartheta}',\boldsymbol{\vartheta},\tau) = \delta\,(\boldsymbol{\vartheta}'-\boldsymbol{\vartheta})\,e^{ikv\vartheta^2/2} \tag{15.73}$$

- функция распределения свободной частицы, не дающая вклада в излучаемую энергию. Интегрирование по $d^2\vartheta'$ приводит к результату

$$\int d^2\vartheta'\,(\boldsymbol{\vartheta}'\cdot\boldsymbol{\vartheta})\left[w\,(\boldsymbol{\vartheta}',\boldsymbol{\vartheta},\tau) - w^{(0)}\,(\boldsymbol{\vartheta}',\boldsymbol{\vartheta},\tau)\right] =$$
$$= -\frac{2i}{kv}\frac{d}{d\tau}\left[e^{-\vartheta^2 a\,\mathrm{th}\,b\tau} - e^{ikv\vartheta^2/2}\right] \tag{15.75}$$

Далее интегрируем один раз по частям по $d\tau$. Выделившиеся на верхнем пределе бесконечно осциллирующие члены следует отбросить. Для обоснования этого достаточно ввести сколь угодно малое поглощение квантов. После интегрирования по $d^2\vartheta$ получим

$$\frac{d^2\mathscr{E}_\omega}{dzd\omega} = -\frac{e^2k(\omega-kv)}{\pi c}\,\mathrm{Re}\int\limits_0^\infty d\tau e^{i(\omega-kv)\tau}\left(\frac{1}{a}\,\mathrm{cth}\,b\tau - \frac{2i}{kv\tau}\right) \tag{15.76}$$

Преобразуем оставшийся интеграл к более удобному виду. Перейдем к интегрированию по $d\zeta = bd\tau$. В плоскости комплексного ζ это - интегрирование вдоль луча 1-2 (рис. 15.2). Рассмотрим замкнутый контур $1-2-3$, где $2-3$ - дуга бесконечного радиуса. В заштрихованной области подынтегральное выражение аналитично, поэтому интеграл по замкнутому контуру равен нулю. Обращается в нуль также интеграл по дуге бесконечного

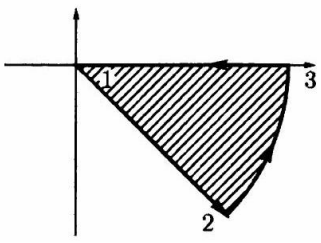


Рис. 15.2 радиуса вследствие наличия обрезающей экспоненты

$$\exp\left\{\frac{i(\omega-kv)}{b}\zeta\right\} = \exp\left\{(-1+i)\frac{\omega-kv}{c\sqrt{kq}}\zeta\right\}$$

Поэтому интеграл вдоль луча 1-2 равен интегралу по действительной полуоси $1-3$:

$$\frac{d^2\mathscr{E}_\omega}{dzd\omega} = \frac{2e^2(\omega - kv)}{\pi c^2} \operatorname{Re} i \int\limits_0^\infty \exp\left\{(-1+i)\frac{\omega - kv}{c\sqrt{kq}}\zeta\right\}\left(\operatorname{cth}\zeta - \frac{1}{\zeta}\right)d\zeta \tag{15.77}$$

Значение интеграла зависит от одного безразмерного параметра

$$s = \frac{\omega - kv}{2c\sqrt{kq}} \tag{15.78}$$

Следуя Мигдалу (1956), введем функцию

$$\Phi(s) = 24s^2 \int\limits_0^\infty e^{-2sx}\left(\operatorname{cth} x - \frac{1}{x}\right)dx \tag{15.79}$$

имеющую асимптотики

$$\Phi(s) \approx 1 \quad \text{при} \quad s \gg 1, \quad \Phi(s) \approx 6s \quad \text{при} \quad s \ll 1 \tag{15.80}$$

Функция $\Phi(s)$ протабулирована в работе Мигдала. Потеря энергии записывается в виде

$$\frac{d^2\mathscr{E}_\omega}{dzd\omega} = -\frac{e^2kq}{3\pi(\omega - kv)}\Phi(s) \tag{15.81}$$

Анализ результатов. Рассмотрим прежде всего случай, когда многократное рассеяние и поляризация среды не играют роли ($s \gg 1, k = \omega/c, \omega - kv \approx \omega/2\gamma^2$. Из (15.81) и (15.35) получаем

$$\frac{d^2\mathscr{E}_\omega}{dzd(\hbar\omega)} = -\frac{8}{3}Z^2\alpha r_0^2 n_a\left(\ln\frac{\theta_{\max}}{\theta_0} - \frac{1}{2}\right) \tag{15.82}$$

Формула Бете-Гайтлера для этой же величины имеет вид

$$\frac{d^2\mathscr{E}_\omega}{dzd(\hbar\omega)} = -\frac{16}{3}Z^2\alpha r_0^2 n_a\left(\ln 183Z^{-1/3} + \frac{1}{12}\right) \tag{15.83}$$

Расхождение логарифмических факторов в двух последних выражениях связано с неточным описанием однократного рассеяния с помощью уравнения

Фоккера-Планка. Сравнение (15.82) с (15.83) позволяет более адекватно определить параметр в кинетическом уравнении:

$$\ln\frac{\theta_{\max}}{\theta_0} - \frac{1}{2} \to 2\ln 183Z^{-1/3}, \quad q = 8\pi n_a\left(\frac{Ze^2}{\mathscr{E}}\right)^2 \ln 183Z^{-1/3} \tag{15.84}$$

(малую добавку 1/12 опускаем). После исправления логарифмического фактора итоговую формулу (15.81) можно выразить через спектральную плотность Бете-Гайтлера:

$$\frac{d^2\mathscr{E}_\omega}{dzd(\hbar\omega)} = \left(\frac{d^2\mathscr{E}_\omega}{dzd(\hbar\omega)}\right)_{BH}\Phi(s) \tag{15.85}$$

В общем случае с помощью соотношения (15.60) параметру s можно придать вид

$$s = \frac{1}{2\gamma^2}\sqrt{\frac{\omega}{cq}}\left(1 + \frac{\omega_{0e}^2\gamma^2}{\omega^2}\right) \tag{15.86}$$

где

$$cq = \frac{\omega_{0e}^2 r_0}{\gamma^2 c} 2Z \ln 183 Z^{-1/3} \tag{15.87}$$

Зависимость $s(\omega)$ немонотонная, и мы рассмотрим по отдельности случай высоких частот ($\omega \gg \omega_{0e}\gamma$) и низких частот ($\omega \ll \omega_{0e}\gamma$).

При высоких частотах эффект поляризации среды несущественен, а эффект многократного рассеяния проявляется при $s \ll 1$. Используя асимптотическую зависимость $\Phi(s) \approx 6s$, находим для этого случая результат, впервые полученный (с неточно определенным численным коэффициентом) Ландау и Померанчуком (1953):

$$\frac{d^2\mathscr{E}_\omega}{dzd(\hbar\omega)} \approx 6s \left(\frac{d^2\mathscr{E}_\omega}{dzd(\hbar\omega)}\right)_{BH} = \frac{\alpha}{\pi}\sqrt{\frac{\omega q}{c}} \tag{15.88}$$

По сравнению с формулой Бете-Гайтлера излучение подавлено и форма спектра иная. Эффект многократного рассеяния усиливается с уменьшением частоты квантов. Но он будет существенно влиять на лавинную длину лишь в том случае, когда условие $s(\omega) \ll 1$ будет выполнено для наиболее энергичных квантов, $\hbar\omega_{\max} \approx m_e c^2 \gamma$. Оценим параметр s для таких частот. С помощью (15.87) получим

$$s\left(\omega_{\max}\right) \approx \frac{1}{\sqrt{\gamma}}\sqrt{\frac{m_e c^3}{\hbar\omega_{0e}^2 r_0}}\frac{1}{\sqrt{32Z\ln 183Z^{-1/3}}} \tag{15.89}$$

Условие $s\left(\omega_{\max}\right) \ll 1$ выполняется при $\gamma \gg 4\times 10^6$ для свинца и $\gamma \gg 10^{10}$ для воздуха. Первая из этих величин доступна современным ускорителям, а вторая присутствует в широких атмосферных ливнях. Аналогичный эффект подавления проявляется и при образовании электронно-позитронных пар энергичными квантами в поле ядра. Там эффект вызван многократным рассеянием рождающихся частиц.

Обратимся теперь к области низких частот ($\omega \ll \omega_{0e}\gamma$). С уменьшением частоты в этой области параметр s нарастает как $\omega^{-3/2}$, поэтому рассмотрим случай $s > 1$, но $\omega - kv \approx \omega_{0e}^2/2\omega$. Подставив в (15.85) $\Phi(s) = 1$, получим спектральную мощность, излучаемую электроном в этом диапазоне:

$$\frac{d^2\mathscr{E}_\omega}{dzd(\hbar\omega)} \approx -\frac{2\alpha q\omega^2}{3\pi\omega_{0e}^2} \tag{15.90}$$

По сравнению со спектром Бете-Гайтлера излучение сильно подавлено:

$$\frac{d^2\mathscr{E}_\omega}{dzd(\hbar\omega)} = \frac{\omega^2}{\left(\gamma\omega_{0e}\right)^2}\left(\frac{d^2\mathscr{E}_\omega}{dzd(\hbar\omega)}\right)_{BH} \tag{15.91}$$

Влияние поляризации среды на тормозное излучение обнаружил ТерМикаэлян (1954) (см. также его монографию (1969) и обзор (2003)).

Заметим, что формула (15.90) не вполне адекватно отражает процессы, сопровождающие взаимодействие релятивистской частицы со средой в области высоких частот ($\hbar\omega \gtrsim m_e c^2 \gg \hbar\omega_p$). Диэлектрическая проницаемость $\varepsilon(\omega) = 1 - \omega_p^2/\omega^2$, использованная при получении дисперсионной зависимости (15.60) и спектральной мощности (15.90), учитывает взаимодействие квантов (или электромагнитных волн) с электронной системой среды лишь в низшем приближении по константе связи $\alpha = e^2/\hbar c$. В следующих порядках в диэлектрическую проницаемость добавляются действительные и мнимые поправки. Действительные поправки всегда будут входить в сумме с ω_p^2/ω^2, и ими можно пренебречь по малости, но мнимые добавки могут дать преобладающий вклад в некоторых спектральных диапазонах. Мнимые добавки к диэлектрической проницаемости, согласно результатам раздела 11.3 (см. формулу (11.92)), описывают

поглощение средой квантов соответствующей частоты. Главные процессы, приводящие к поглощению фотонов высоких энергий, это их комптоновское рассеяние (при этом возникают кванты меньших энергий) и рождение электронно-позитронных пар фотонами в полях атомных ядер.

Пример 15.6. Выразить мнимую часть $\varepsilon''(\omega)$ диэлектрической проницаемости среды при высоких частотах ($\hbar\omega \gtrsim m_e c^2 \gg \hbar\omega_p$ через полные
сечения $\sigma_C(\omega), \sigma_p(\omega)$ комптоновского рассеяния квантов электронами среды и образования электронно-позитронных пар квантами в полях атомных ядер.

Решение. Учет указанных процессов в диэлектрической проницаемости можно произвести следующим образом. Рассмотрим поток фотонов частоты ω с концентрацией квантов $N(\omega)$. Энергия, поглощаемая в единицу времени на единицу объема среды, дается выражением $(n_a\sigma_p + \ + n_a Z\sigma_C)\, c\hbar\omega N(\omega)$. С другой стороны, эту же величину можно записать через мнимую часть диэлектрической проницаемости по формуле (11.92):

$$(n_a\sigma_p + n_a Z\sigma_C)\, c\hbar\omega N(\omega) = \frac{\omega\varepsilon''(\omega)}{4\pi}\overline{E^2} \tag{1}$$

Но величина $\hbar\omega N(\omega)$ в левой части равенства как раз дает плотность электромагнитной энергии:

$$\hbar\omega N(\omega) = \frac{1}{8\pi}\left(\overline{E^2} + \overline{B^2}\right) = \frac{1}{4\pi}\overline{E^2} \tag{2}$$

(в области высоких частот действительная часть $\varepsilon'(\omega)$ близка к единице, и плотность энергии описывается вакуумным выражением). Из сравнения двух последних выражений находим

$$\varepsilon''(\omega) = \frac{c\,(n_a\sigma_p + n_a Z\sigma_C)}{\omega} = \frac{\Gamma_p + \Gamma_C}{\omega} \tag{3}$$

где $\Gamma_p = cn_a\sigma_p$ и $\Gamma_C = cn_a Z\sigma_C$ - вероятности поглощения кванта в единицу времени в результате образования им пары либо его комптоновского рассеяния. В результате диэлектрическая проницаемость принимает вид

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} + i\frac{\Gamma_p + \Gamma_C}{\omega} \tag{4}$$

причем малые действительные вклады от рассмотренных процессов не учтены.

Полное сечение $\sigma_C(\omega)$ комптоновского рассеяния было найдено в задаче 6.79. В ультрарелятивистском случае имеем

$$\sigma_C(\omega) = \pi r_0^2 \frac{m_e c^2}{\hbar\omega}\ln\left(\frac{2\hbar\omega}{m_e c^2}\right) \tag{5}$$

Сечение образования e^+e^--пары квантом с энергией $\hbar\omega$ в поле ядра заимствуем из учебников [Гайтлер (1956), Берестецкий и др. (1989)]:

$$\begin{aligned}\sigma_p(\omega) &= \tfrac{28}{9}Z^2\alpha r_0^2\left(\ln\tfrac{2\hbar\omega}{m_e c^2} - \tfrac{109}{42}\right)\\ \sigma_p(\omega) &= \tfrac{28}{9}Z^2\alpha r_0^2\left(\ln 183Z^{-1/3} - \tfrac{1}{42}\right)\end{aligned} \tag{6}$$

Первое выражение применимо при отсутствии экранирования, а второе при полном экранировании, но в обоих случаях энергии обеих частиц должны быть велики по сравнению с энергией покоя. Условия экранирования определяются равенствами (15.42), (15.44), в которых $\mathscr{E}, \mathscr{E}'$ представляют собой энергии электрона и позитрона. Эти сечения отличны от нуля только при $\hbar\omega > 2m_e c^2$. В области умеренного релятивизма

сечения комптоновского рассеяния и образования пар могут быть сравнимы по величине, а при $\hbar\omega < 2m_e c^2$ рождение пар невозможно. При $\hbar\omega \gg 137m_e c^2/Z$ эффект от рождения пар превалирует над комптоновским рассеянием.

Роль электронов среды в радиационных процессах. Выше мы рассмотрели поляризационные эффекты, когерентный (изменение закона дисперсии кванта) и некогерентный (комптоновское рассеяние). Но электроны среды принимают и более активное участие в излучении сверхрелятивистских частиц, движущихся сквозь вещество. Во-первых, рассеиваясь на электроне среды, релятивистский электрон может испустить тормозной квант. В этом смысле электроны среды подобны ядрам (не тяжелым) с $Z = 1$. Поскольку на каждое ядро приходится Z электронов, то вклад электронов в тормозное излучение можно приближенно учесть, заменив во всех полученных ранее формулах величину Z^2 на $Z^2 + Z = Z(Z + 1)$. В частности, такую замену нужно сделать в формуле (15.59) для лавинной длины. Но наиболее существенный эффект связан с излучением квантов электронами среды, возбужденными полем пролетающей релятивистской частицы. Поглощая первичный квант, электроны среды при комптоновском рассеянии излучают фотоны меньших энергий. Это излучение особенно важно в тех областях спектра, в которых излучение самой релятивистской частицы подавлено эффектом поляризации среды (либо большой массой частицы, см. задачи 15.11*, 15.12*).

При тормозном излучении квантов с частотами порядка частот перехода в атомах электронная оболочка принимает участие в этом процессе как динамическая система, способная возбуждаться. Вероятность излучения зависит в этом случае от динамической поляризуемости атома (т. е. его поляризуемости на частоте излучения). Такие процессы получили название
поляризационного (или динамического) тормозного излучения. Этот круг вопросов затрагивается в следующем разделе (см. примеры 15.10, 15.11).

Рекомендуемая литература: [Росси (1955); Ландау и Лифшиц, .Электродинамика сплошных сред; Тамм и Франк (1937); Гинзбург (1987); ТерМикаелян (1969); Ахиезер и Шульга (1993); Ферми (1951); Берестецкий и др. (1989); Ферми (1940); Ферми (1949); Амусья (1990); Базылев и Жеваго (1987)].

Задачи

15.1. Вычислить дифференциальное сечение рассеяния релятивистской дираковской частицы кулоновским полем ядра, считая ядро неподвижным. Использовать первое борновское приближение. Частицы не поляризованы по спину.

15.2. Вычислить дифференциальное сечение упругого рассеяния релятивистской дираковской частицы экранированным кулоновским полем ядра $U(r) = \pm(Ze^2/r)\exp(-r/R)$. Радиус экранировки в приближении Томаса-Ферми $R = a_B Z^{-1/3}$, где $a_B = \hbar^2/m_e e^2$ - радиус Бора. Использовать первое борновское приближение. Спиновая поляризация частиц в начальном состоянии отсутствует.

15.3*. Вычислить дифференциальное сечение упругого столкновения не поляризованного по спину релятивистского мюона с электроном. В системе, в которой электрон до столкновения покоился, записать дифференциальное сечение как функцию энергии, переданной электрону при столкновении.

15.4*. Сделать то же самое для столкновения электрона с электроном (мёллеровское рассеяние).

15.5. На основе результата предыдущей задачи вычислить потери релятивистского электрона на единицу пути в близких столкновениях, когда электроны среды можно считать свободными.

15.6. Вычислить интенсивность dI излучения Вавилова-Черенкова в заданном интервале

$d\omega$ частот в изотропном диэлектрике. Вычислить также интервал углов $d\theta$, в котором распространяется это излучение.

15.7. Коллимированный моноэнергичный стационарный пучок быстрых частиц, имеющий большое поперечное сечение, падает на границу рассеивающей среды. Пренебрегая потерями энергии, вычислить с помощью уравнения Фоккера-Планка (15.34) функцию распределения в зависимости от z и угла ϑ. Найти средний угол рассеяния как функцию z. Оценить
характерную длину l, на которой происходит изотропизация пучка. Сравнить ее с характерной длиной L замедления частиц, которое описывается формулой (15.18).

15.8*. Коллимированный моноэнергичный стационарный пучок быстрых частиц с малым («точечным») поперечным сечением падает на границу рассеивающей среды. Найти функцию распределения пучка. Вычислить средний квадрат радиуса пучка как функцию глубины его проникновения в рассеивающую среду.

15.9**. Пользуясь теорией возмущений в первом неисчезающем приближении, как это делалось в примере 6.18 при рассмотрении эффекта Комптона, вычислить сечение тормозного излучения электрона с произвольной энергией на неэкранированном атомном ядре с зарядом Ze.

15.10. Показать, что при $\gamma_0, \gamma \gg 1$ общая формула для тормозного излучения электрона произвольной энергии, полученная в предыдущей задаче, переходит в релятивистскую формулу (15.37).

15.11*. Найти спектральную плотность потери энергии релятивистской частицей на единице пути, используя диэлектрическую проницаемость, найденную в примере 15.6 . Использовать метод Ферми, т. е. вычислить поток вектора Пойнтинга через цилиндрическую поверхность, окружающую траекторию частицы. Интерпретировать полученный результат в терминах эквивалентных фотонов.

15.12*. Релятивистская частица движется в среде с приблизительно постоянной скоростью. Вычислить спектральную плотность потерь на тормозное излучение в расчете на единицу пути, создаваемое как самой частицей, так и электронами среды. Сравнить эти две величины для тяжелой и легкой частиц.

13.4.2 15.2. Macroscopic Mechanisms of Emission of Fast Particles in Media

В вакууме в отсутствие каких-либо макроскопических тел электромагнитные волны излучаются только при ускоренном движении заряженных частиц. При наличии вещества собственные колебания среды в виде поперечных, продольных или иных, более сложных волн, могут генерироваться и частицами, движущимися без ускорения. Примеры такого излучения уже были рассмотрены в предыдущем разделе (генерация плазменных колебаний, черенковское излучение). В этом разделе мы рассмотрим более подробно основные типы излучения электромагнитных возмущений быстрыми частицами в средах. При этом мы не будем стремиться к максимальной общности изложения и проведем рассмотрение на достаточно типичных конкретных примерах, а также при решении задач к настоящему разделу.

Пример 15.7. Для излучения Вавилова-Черенкова в прозрачном диэлектрике определить длину формирования (когерентную длину) излчения, аналогичную когерентной длине тормозного излучения, рассмотренной в предыдущем разделе. Вычислить граничную энергию частицы $\mathscr{E}_0$, начиная с которой возможно черенковские излучение в диэлектрике. Рассмотреть, в частности, случай $\varepsilon(\omega) - 1 \ll 1$.

Решение. Определим длину формирования l_c как расстояние, на котором частица и излучаемая волна расходятся на длину волны λ:

$$\frac{l_c}{v}\left(v-\frac{c}{\sqrt{\varepsilon(\omega)}}\right)=\lambda \tag{1}$$

Отсюда находим

$$l_c=\frac{\lambda\beta n}{\beta n-1},\qquad \text{где}\qquad n(\omega)=\sqrt{\varepsilon(\omega)} \tag{2}$$

- коэффициент преломления;

$$\mathscr{E}_0=\frac{mc^2n}{\sqrt{n^2-1}} \tag{3}$$

При $\varepsilon(\omega)-1=4\pi\alpha(\omega)\ll 1$ имеем
(4) $l_c=\frac{2\lambda}{4\pi\alpha(\omega)-\gamma^{-2}}, \mathscr{E}_0=\frac{mc^2}{\sqrt{4\pi\alpha(\omega)}}$.

Пример 15.8 (переходное излучение). Плоскость (x,y) разделяет две немагнитные среды с диэлектрическими проницаемостями ε_1 и ε_2 (рис. 15.3). Частиица с заря-

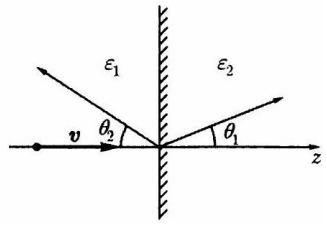


Рис. 15.3 дом e и скоростью $v=\text{const}$ движется в
положительном направлении оси Oz. Вычислить гармоники Фурье электромагнитного поля, создаваемого частицей.

Решение. Разлагаем уравнения Максвелла

$$\nabla\times\mathscr{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathscr{B}}{\partial t},\quad \nabla\times\mathscr{B}=\frac{1}{c}\frac{\partial\mathscr{D}}{\partial t}+\frac{4\pi e}{c}\boldsymbol{v}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{v}t) \tag{1}$$

в интеграл Фурье по переменным x,y,t, обозначив волновой вектор в плоскости (x,y) через κ. После исключения вектора $\boldsymbol{B}$ и проецирования полученного уравнения на направления $\boldsymbol{e}_z$ и κ получим два уравнения для поперечных и продольных компонент вектора $\boldsymbol{E}$:

$$\left(\kappa^2-\frac{\omega^2\varepsilon}{c^2}\right)E_z+i\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{E}=i\frac{4\pi e\omega}{c^2}e^{i\omega z/v}$$
$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\frac{\omega^2\varepsilon}{c^2}\right)\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{E}=i\kappa^2\frac{\partial E_z}{\partial z},\quad z\neq 0 \tag{2}$$

где амплитуды Фурье электрического и магнитного полей обозначены через $\boldsymbol{E},\boldsymbol{B}$. Из этих равенств получаем неоднородное уравнение для продольной компоненты:

$$\frac{\partial^2E_z}{\partial z^2}+\left(\frac{\omega^2\varepsilon}{c^2}-\kappa^2\right)\cdot E_z=-i\frac{4\pi e\omega}{c^2}\left(1-\frac{c^2}{\varepsilon v^2}\right)e^{i\omega z/v} \tag{3}$$

Решение этого уравнения складывается из частного решения

$$E_z^{(q)} = -i\frac{4\pi e\omega}{c^2}\left(1-\frac{c^2}{\varepsilon v^2}\right)\left(\frac{\omega^2\varepsilon}{c^2}-\kappa^2-\frac{\omega^2}{v^2}\right)^{-1} e^{i\omega z/v} \tag{4}$$

соответствующего заданной правой части, и общего решения однородного уравнения

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2}+\left(\frac{\omega^2\varepsilon}{c^2}-\kappa^2\right)E_z = 0 \tag{5}$$

Частное решение описывает электромагнитное поле, распространяющееся в пространстве со скоростью частицы v. В него входит как квазистационарное поле, создаваемое частицей, так и поле черенковского излучения, если последнее возможно (т. е. выполнено условие $v > c/n(\omega)$, см. решение задачи 15.13). Поперечная составляющая поля $\boldsymbol{E}^{(q)}$ определяется из второго
равенства (2):

$$\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{E}^{(q)} = i\frac{4\pi e\kappa^2}{\varepsilon v}\left(\frac{\omega^2\varepsilon}{c^2}-\kappa^2-\frac{\omega^2}{v^2}\right)^{-1} e^{i\omega z/v} \tag{6}$$

Вторая поперечная составляющая отсутствует.
Общее решение однородного уравнения (5) имеет вид

$$E_z^{(rad)} = Ae^{iqz}+Ce^{-iqz}, \quad q=\sqrt{\frac{\omega^2\varepsilon}{c^2}-\kappa^2}, \quad \operatorname{Im} q > 0 \tag{7}$$

где A, C - постоянные. Они должны быть найдены из граничных условий и условия ограниченности решения. При выбранном значении q ограниченность при больших $|z|$ требует, чтобы было $A = 0, z < 0$ и $C = 0, z > 0$:
(8)

$$E_{1z}^{(rad)}\Big|_{z<0} = Ce^{-iq_1 z}, q_1 = \sqrt{\frac{\omega^2\varepsilon_1}{c^2}-\kappa^2}$$

при $z < 0$

$$E_{2z}^{(rad)}\Big|_{z>0} = Ae^{iq_2 z}, q_2 = \sqrt{\frac{\omega^2\varepsilon_2}{c^2}-\kappa^2} \text{ при } z > 0$$

Верхний индекс (rad) указывает на то, что это решение может описывать поле излучения. Например, в прозрачном диэлектрике полю $E_z^{(rad)}$ соответствует дисперсионная зависимость

$$k_{1,2}^2 = \kappa^2 + q_{1,2}^2 = \frac{\omega^2\varepsilon_{1,2}}{c^2} \tag{9}$$

свойственная распространяющимся плоским монохроматическим волнам, если $\varepsilon_{1,2} > 0, q_{1,2} > 0$. Ниже мы увидим, что это излучение вызвано резким изменением диэлектрической проницаемости от значения ε_1 до ε_2. Оно называется переходным. Полученные решения удовлетворяют условию $\nabla\cdot\boldsymbol{E}^{(rad)} = 0$, которое приводит к соотношениям
(10) $\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{E}^{(rad)} = q_1 E_z^{(rad)}$ при $z < 0$; $\quad \boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{E}^{(rad)} = -q_2 E_z^{(rad)}$ при $z > 0$.

Эти соотношения определяют поперечные компоненты поля $\boldsymbol{E}^{(\mathrm{rad})}$ через его продольную компоненту.

Условия на границе раздела выражают непрерывность нормальной компоненты электрической индукции и тангенциальной компоненты напряженности полного электрического поля:

$$\varepsilon_1 \left(E_{1z}^{(q)} + E_{1z}^{(\mathrm{rad})}\right)\Big|_{z=-0} = \varepsilon_2 \left(E_{2z}^{(q)} + E_{2z}^{(\mathrm{rad})}\right)\Big|_{z=+0} \tag{11}$$
$$\left(\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{E}_1^{(q)} + q_1 E_{1z}^{(\mathrm{rad})}\right)_{z=-0} = \left(\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{E}_2^{(q)} - q_2 E_{2z}^{(\mathrm{rad})}\right)_{z=+0}$$

Отметим, что составляющие поля $\boldsymbol{E}^{(rad)}$ вдоль третьего направления, $e_z\times\kappa$, не связаны никакими соотношениями с полем частицы и не могут ею создаваться, поэтому в данной задаче они равны нулю. Из двух алгебраических уравнений (11) вычисляются постоянные C и A:

$$C = i\frac{4\pi e\kappa^2\left(1-\varepsilon_2/\varepsilon_1\right)}{v\left(\varepsilon_1 q_2+\varepsilon_2 q_1\right)\left(q_1^2-\omega^2/v^2\right)}\left\{1-\frac{\varepsilon_1\beta\omega}{c\left(q_2+\omega/v\right)}\right\} \tag{12}$$
$$A = -i\frac{4\pi e\kappa^2\left(1-\varepsilon_1/\varepsilon_2\right)}{v\left(\varepsilon_1 q_2+\varepsilon_2 q_1\right)\left(q_2^2-\omega^2/v^2\right)}\left\{1+\frac{\varepsilon_2\beta\omega}{c\left(q_1-\omega/v\right)}\right\} \tag{13}$$

Они обращаются в нуль, если диэлектрическая проницаемость не испытывает скачка.

Таким образом, электрическое поле в первой и второй средах определяется найденными величинами: $\boldsymbol{E}_{1,2} = \boldsymbol{E}_{1,2}^{(q)} + \boldsymbol{E}_{1,2}^{(\mathrm{rad})}$, где $\boldsymbol{E}_{1,2}^{(q)}, \boldsymbol{E}_{1,2}^{(\mathrm{rad})}$ даются формулами (4), (6), (8), (12), (13). Магнитное поле определяется с помощью первого уравнения Максвелла (1). В частности, та часть магнитного поля, которая обусловлена резкой границей сред, имеет вид

$$\boldsymbol{B}_1^{(rad)} = \frac{\varepsilon_1\omega}{c\kappa^2}\left[\boldsymbol{\kappa}\times\boldsymbol{e}_z\right]Ce^{-iq_1 z}, z<0; \quad \boldsymbol{B}_2^{(rad)} = \frac{\varepsilon_2\omega}{c\kappa^2}\left[\boldsymbol{\kappa}\times\boldsymbol{e}_z\right]Ae^{iq_2 z}, z>0 \tag{14}$$

Пример 15.9. Пусть в предыдущем примере обе среды представляют собой на рассматриваемых частотах прозрачные диэлектрики. Вычислить спектр и угловое распределение переходного излучения частицы в переднюю и заднюю полусферы за все время ее пролета через границу.

Решение. Вычисляем полную энергию Q переходного излучения, прошедшую через плоскость (x,y) в областях соответственно $z\to-\infty$
и $z\to\infty$:

$$Q_1 = \frac{c}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}dx\int\limits_{-\infty}^{\infty}dy\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\omega\left[\mathscr{E}_1\times\mathscr{B}_1\right]\cdot\boldsymbol{e}_z, z\to-\infty \tag{1}$$

$$Q_2 = \frac{c}{4\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}dx\int\limits_{-\infty}^{\infty}dy\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\omega\left[\boldsymbol{E}_2\times\mathscr{B}_2\right]\cdot\boldsymbol{e}_z, z\to+\infty \tag{2}$$

Здесь и далее всюду опускаем индекс (rad). Подставим в (2) разложение

$$\boldsymbol{E}_2 = \int\boldsymbol{E}_2\left(z,\boldsymbol{\kappa},q_2,\omega\right)\exp\left(i\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{r}_\perp - i\omega t\right)\frac{d^2\kappa}{(2\pi)^2}\frac{d\omega}{2\pi} \tag{3}$$

и аналогичное разложение для $\mathscr{B}_2$, где q_2 - продольная компонента волнового вектора. Воспользуемся соотношением

$$\boldsymbol{E}(z,\boldsymbol{\kappa},q,\omega) = \boldsymbol{E}^*(z,-\boldsymbol{\kappa},-q,-\omega) \tag{4}$$

и получим энергию излучения как интеграл по частоте и поперечному волновому вектору:

$$Q_2 = \frac{c}{(2\pi)^4}\,\mathrm{Re}\int\limits_0^\infty d\omega \int d^2\kappa\,[\boldsymbol{E}_2 \times \boldsymbol{B}_2^*]\cdot \boldsymbol{e}_z \tag{5}$$

Теперь в это выражение не входит координата z.
С помощью формул из предыдущего примера находим

$$[\boldsymbol{E}_2 \times \boldsymbol{B}_2^*]\cdot \boldsymbol{e}_z = \frac{q_2}{\kappa}E_{2z}B_2^* = \frac{\varepsilon_2\omega q_2}{c\kappa^2}|A|^2 \tag{6}$$

$$\text{где} \quad E_{2z} = Ae^{iq_2z}, \quad B_2^* = \frac{\varepsilon_2\omega}{c\kappa}A^*e^{-iq_2z}$$

Выразим все величины, входящее в подынтегральное выражение (5), через частоту и угол θ_2 между скоростью частицы $\boldsymbol{v}$ и волновым вектором $k_2 = \kappa + q_2\boldsymbol{e}_z$ в среде 2 (см. рис. 15.3). Имеем

$$k_2 = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_2}, \quad \kappa^2 = k_2^2 - q_2^2 = k_1^2 - q_1^2, \quad q_2 = k_2\cos\theta_2$$
$$d^2\kappa = k_2^2\cos\theta_2 d\Omega_2, \quad \theta_2 \leqslant \frac{\pi}{2} \tag{7}$$

Из приведенных формул следует также
$q_1 = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_1 - \varepsilon_2\sin^2\theta_2}$, $\quad \varepsilon_1 q_2 + \varepsilon_2 q_1 = k_2\left[\varepsilon_1\cos\theta_2 + \sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2 - \varepsilon_2^2\sin^2\theta_2}\right]$.
Использовав полученные результаты, извлечем из подынтегрального выражения (5) спектрально-угловое распределение переходного излучения вперед:

$$\frac{d^2I_\omega^{(2)}}{d\omega d\Omega_2} = \frac{e^2\beta^2\sqrt{\varepsilon_2}\,(\varepsilon_2-\varepsilon_1)^2\sin^2\theta_2\cos^2\theta_2\left|\beta^2\varepsilon_2 + \beta\sqrt{\varepsilon_1 - \varepsilon_2\sin^2\theta_2} - 1\right|^2}{\pi^2 c\,(\beta^2\varepsilon_2\cos^2\theta_2 - 1)^2\left|\left(\varepsilon_1\cos\theta_2 + \sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2 - \varepsilon_2^2\sin^2\theta_2}\right)\left(\beta\sqrt{\varepsilon_1 - \varepsilon_2\sin^2\theta_2} - 1\right)\right|^2}$$
$$\cos\theta_2 \neq 1/\beta\sqrt{\varepsilon_2} \tag{15.92}$$

Здесь использован знак модуля, так как радикалы могут быть мнимыми даже в случае прозрачных сред. Это связано с тем, что некоторые волны могут испытывать полное внутреннее отражение на границе. Излучение назад вычисляется аналогичным образом:

$$\frac{d^2I_\omega^{(1)}}{d\omega d\Omega_1} = \frac{e^2\beta^2\sqrt{\varepsilon_1}\,(\varepsilon_2-\varepsilon_1)^2\sin^2\theta_1\cos^2\theta_1\left|\beta^2\varepsilon_1 - \beta\sqrt{\varepsilon_2 - \varepsilon_1\sin^2\theta_1} - 1\right|^2}{\pi^2 c\,(\beta^2\varepsilon_1\cos^2\theta_1 - 1)^2\left|\left(\varepsilon_2\cos\theta_1 + \sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2 - \varepsilon_1^2\sin^2\theta_1}\right)\left(\beta\sqrt{\varepsilon_2 - \varepsilon_1\sin^2\theta_1} + 1\right)\right|^2}$$
$$\cos\theta_1 \neq 1/\beta\sqrt{\varepsilon_1} \tag{15.93}$$

Результат выражен через угол $\theta_1 \leqslant \pi/2$ между вектором $-\boldsymbol{v}$ и направлением волнового вектора k_1 в первой среде (рис. 15.3). Особенности выражения (15.92) при $\cos\theta_2 = 1/\beta\sqrt{\varepsilon_2}$ и (15.93) при $\cos\theta_1 = 1/\beta\sqrt{\varepsilon_1}$ связаны с эффектом Вавилова-Черенкова. Излучение в указанных направлениях можно вычислить путем предельного перехода таким же образом, как это было сделано в разделе 15.1 при рассмотрении черенковского излучения.

Переходное излучение предсказали на основе теоретического исследования советские ученые В.Л.Гинзбург и И.М.Франк в 1946 г. В настоящее время это - хорошо развитая область электродинамики, имеющая многочисленные практические приложения (см. [Гинзбург и Цытович (1984), Платонов и Флейшман (2002)]).

Переходное излучение поверхностных волн. Согласно результатам задачи 14.1, дисперсионное соотношение для поверхностных волн при $\mu_1 = \mu_2 = 1$ имеет вид

$$\kappa^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2} > 0, \quad \varepsilon_1\varepsilon_2 < 0, \quad \varepsilon_1+\varepsilon_2 < 0 \tag{15.94}$$

При этом величины q_1, q_2, определяющие поле $\boldsymbol{E}^{(\mathrm{rad})}$, найденное в примере 15.8, имеют значения

$$q_1^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\frac{\varepsilon_1^2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2} < 0, \cdot q_2^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\frac{\varepsilon_2^2}{\varepsilon_1+\varepsilon_2} < 0 \tag{15.95}$$

Отсюда следует, что поле переходного излучения в этом случае сконцентрировано в приповерхностной области:

$$E_{1z}^{(\mathrm{rad})} = Ce^{|q_1|z}, z < 0; \quad E_{1z}^{(\mathrm{rad})} = Ae^{-|q_2|z}, z > 0 \tag{15.96}$$

т. е. имеет место генерация поверхностных электромагнитных волн быстрой частицей. Вычисление энергии, излученной в форме поверхностных волн, нетривиально (см. [Гинзбург и Цытович (1984)]). Спектральная плотность излученной энергии имеет вид

$$\frac{dI_\omega}{d\omega} = \frac{2e^2\beta^2\left|\varepsilon_2-\varepsilon_1\right|\left|\varepsilon_1\varepsilon_2\right|\left(1+\beta^2\left|\varepsilon_1+\varepsilon_2\right|\right)}{c\sqrt{\left|\varepsilon_1+\varepsilon_2\right|}\left|\left|\varepsilon_1+\varepsilon_2\right.\right| + \beta^2\varepsilon_1^2\Big]\left[\left|\varepsilon_1+\varepsilon_2\right| + \beta^2\varepsilon_2^2\right]} \tag{15.97}$$

Поляризационное тормозное излучение.

Пример 15.10. Заряженная частица движется по прямолинейной траектории в разреженном атомарном газе со скоростью, значительно превышающей скорости атомных электронов. Динамическая поляризуемость $\alpha(\omega)$ отдельного атома в однородном переменном поле известна. Вычислить спектральное распределение излчения электронных оболочек атомов на частотах порядка атомных частот переходов ω_0, генерируемое пролетающей частицей на единице ее пути. После излучения атом остается в основном состоянии.

Решение. Движение частицы квазиклассично и в рассматриваемых условиях (излучение мягких оптических квантов) слабо возмущается взаимодействием с атомами. Поэтому можно рассматривать движение частицы по прямолинейной траектории с постоянной скоростью. Излучение происходит в результате поляризации атомных оболочек полем пролетающей частицы. При пролетах на расстоянии $\rho \gg R$ поле в пределах атома почти однородно и достаточно учесть только дипольную поляризацию. Для.вычисления электрического дипольного момента атома на частоте ω используем формулу

$$\boldsymbol{p}_\omega = \alpha(\omega)\boldsymbol{E}_\omega \tag{1}$$

где $\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{\omega}}$ - компонента Фурье поля частицы в точке нахождения атома.

Энергию $\mathscr{E}_\omega^{(at)}$, излученную нерелятивистскими атомными электронами, вычислим по формуле электрического дипольного излучения (5.31):

$$I(t) = \frac{2\ddot{\boldsymbol{p}}^2(t)}{3c^3} \tag{2}$$

где t - время с учетом запаздывания. Полная энергия, излученная атомной оболочкой за все время пролета частицы

$$\mathscr{E}^{(at)} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} I(t)dt = \frac{2}{3\pi c^3}\int\limits_{0}^{\infty} |\ddot{\boldsymbol{p}}_\omega|^2\, d\omega = \int\limits_{0}^{\infty} \mathscr{E}_\omega^{(at)} d\omega \tag{3}$$

откуда имеем

$$\mathscr{E}_\omega^{(at)} = \frac{2}{3\pi c^3}\,|\ddot{\boldsymbol{p}}_\omega|^2 = \frac{2r_0^2 c}{3\pi}\left|\frac{m\omega^2}{e^2}\alpha(\omega)\right|^2 |\boldsymbol{E}_\omega(\rho)|^2 \tag{4}$$

Здесь использована формула (1), r_0 - классический радиус электрона.
Чтобы найти излучение $d\mathscr{E}_\omega/dz$ на единице пути, надо умножить спектр излучения отдельного атома (4) на концентрацию атомов n_a и проинтегрировать по прицельным параметрам:

$$\frac{d\mathscr{E}_\omega}{dz} = \frac{2r_0^2 n_a c}{3\pi}\left|\frac{m\omega^2}{e^2}\alpha(\omega)\right|^2 \int\limits_{\rho_{\min}}^{\rho_{\max}} |\boldsymbol{E}_\omega(\rho)|^2\, 2\pi\rho d\rho \tag{5}$$

Нижний предел интегрирования должен быть порядка нескольких радиусов атома R, т. е. $\rho_{\min} \approx R$, поскольку при меньших прицельных параметрах формула (1) теряет силу. Верхний предел ввиду быстрой сходимости интеграла (см. ниже) можно считать бесконечным: $\rho_{\max} \to \infty$.

Компоненты Фурье электромагнитного поля релятивистской частицы в вакууме были вычислены в примере 6.19 (формула (5)) [2]:

$$\boldsymbol{E}_\omega = \frac{2q\omega}{\gamma v^2} K_1\left(\frac{\omega\rho}{\gamma v}\right)\frac{\boldsymbol{\rho}}{\rho} - i\frac{2q\omega}{\gamma^2 v^2} K_0\left(\frac{\omega\rho}{\gamma v}\right)\frac{\boldsymbol{v}}{v}, \quad \omega > 0 \tag{6}$$

После подстановки в (5) и интегрирования по прицельному параметру получим

$$\frac{d\mathscr{E}_\omega}{dz} = \frac{8q^2 r_0^2 n_a c u_m^2}{3v^2}\left|\frac{m\omega^2}{e^2}\alpha(\omega)\right|^2 \times$$
$$\times\left\{K_0(u_m)K_2(u_m) - \left(1-\frac{1}{\gamma^2}\right)K_1^2(u_m) - \frac{1}{\gamma^2}K_0^2(u_m)\right\}, u_m = \frac{\omega R}{\gamma v} \tag{7}$$

Здесь

$$u_m = \frac{\omega R}{\gamma v} \approx \frac{Rc}{\gamma\lambda v} \ll 1 \tag{8}$$

В диапазоне оптических частот условие малости выполняется не только для релятивистских, но и для быстрых ($v \gg v_{at}$) нерелятивистских частиц, так как $R/\lambda \approx 10^{-3}$ при таких частотах. Использовав формулы (1.168), получим с логарифмической точностью окончательное выражение:

$$\frac{d\mathscr{E}_\omega}{dz} = \frac{16q^2 r_0^2 n_a c}{3v^2}\left|\frac{m\omega^2}{e^2}\alpha(\omega)\right|^2 \ln\left(\frac{\gamma v}{\omega R}\right) \tag{9}$$

В случае релятивистских частиц, $\gamma \gg 1$, последняя формула применима и в рентгеновской области, где $\lambda < R$. При частотах $\omega \gg \omega_0$ атомные электроны ведут себя как свободные (см. задачу 11.7), а атомная поляризуемость принимает вид

[02] Здесь устранены опечатки, содержавшиеся в формуле (5) примера 6.19.

$$\alpha(\omega) = \frac{Ze^2}{m\omega^2}, \quad \omega \gg \omega_0 \tag{10}$$

В этом диапазоне излучение на единицу пути релятивистской частицы

$$\frac{d\mathscr{E}_\omega}{dz} = \frac{16Z^2q^2r_0^2n_a}{3c}\ln\left(\frac{\gamma c}{\omega R}\right) \tag{11}$$

Рассмотренное излучение называют поляризационным (или динамическим) тормозным излучением ([Амусья и др. (1987), Амусья (1990)]; последние исследования см в [Король и др. (2004)]). В этом названии термин «тормозное» не вполне адекватен, так как излучение возможно без всякого торможения быстрой частицы, при ее прямолинейном равномерном движении. С большим основанием его можно назвать переходным (в широком смысле) излучением или рассеянием, так как в данном случае излучение вызвано рассеянием поля быстрой частицы на микроскопических неоднородностях - электронных оболочках атомов. Подробное изложение теории переходного излучения и переходного рассеяния см. в монографии [Гинзбург и Цытович (1984)]. Поскольку излучает нерелятивистская система, то это излучение, даже генерированное релятивистской частицей, не имеет острой направленности вперед, ее анизотропия, как при любом электрическом дипольном излучении, невелика. Но интенсивность может быть значительной ввиду резонансной зависимости атомной поляризуемости от частоты (см. задачи 11.13-11.15).

Длина $l_\omega = \gamma v/\omega$ под знаком логарифма в (9) имеет смысл прицельного параметра, приводящего к излучению на заданной частоте. Если это расстояние больше межатомных расстояний среды, то при расчете поляризационного тормозного излучения необходимо учитывать влияние соседних атомов, т. е. диэлектрической проницаемости среды как на поле быстрой частицы, так и на распространение излученных фотонов.

Пример 15.11. Рассмотреть поляризационное тормозное излучение быстрой частичы на атомах с учетом влияния среды на электромагнитное поле. В частности, проанализировать эффект в условиях, когда $\varepsilon(\omega) > 1$ и одновременно происходит излучение Вавилова-Черенкова. Получить для этих условий спектр излчения частицы на единицу пути и дать физическую интерпретачию результата.

Решение. Общий подход остается таким же, как в предыдущем примере, но на всех этапах следует учитывать наличие окружающей среды с проницаемостями $\varepsilon(\omega) = \varepsilon'(\omega) + i\varepsilon''(\omega)$ и $\mu = 1$ (мнимая часть ε'' считается малой, за исключением узких резонансных пиков). В результате формула (4) предыдущего примера, которая определяет поляризационное излучение атома при пролете быстрой частицы на прицельном расстоянии ρ, примет вид

$$\mathscr{E}_\omega^{(at)} = \frac{2\omega^4\sqrt{\varepsilon'}}{3\pi c^3}\left|\boldsymbol{p}_\omega\right|^2 = \frac{2r_0^2c\sqrt{\varepsilon'}}{3\pi}\left|\frac{m\omega^2}{e^2}\alpha(\omega)\right|^2\left|\boldsymbol{E}_\omega(\boldsymbol{\rho})\right|^2 \tag{1}$$

где последний множитель содержит электрическое поле в среде, гармоники Фурье которого были вычислены в примере 15.1. Чтобы их использовать, нужно выразить величину $d\mathscr{E}_\omega/dz$ через интеграл по переданному среде волновому вектору $k_\perp$ взамен прицельного параметра:

$$\frac{d\mathscr{E}_\omega}{dz} = \frac{2r_0^2n_ac\sqrt{\varepsilon'}}{3\pi(2\pi)^2}\left|\frac{m\omega^2}{e^2}\alpha(\omega)\right|^2\int\limits_0^{1/R}\left|\boldsymbol{E}_\omega\left(\boldsymbol{k}_\perp\right)\right|^2 2\pi k_\perp dk_\perp \tag{2}$$

Большим значениям ρ соответствуют малые $k_\perp$, поэтому область интегрирования по $k_\perp$ ограничена окружностью с радиусом $1/R$.

Пользуясь формулой (15.9), найдем компоненты Фурье электрического вектора, поперечную и продольную относительно скорости частицы:

$$\boldsymbol{E}_{\omega}^{\perp}\left(\boldsymbol{k}_{\perp}\right)=-i\frac{4\pi q}{v\varepsilon}\frac{\boldsymbol{k}_{\perp}}{k_{\perp}^{2}+\omega^{2}/v^{2}-\omega^{2}\varepsilon/c^{2}} \tag{3}$$

$$E_{\omega}^{\parallel}\left(\boldsymbol{k}_{\perp}\right)=-i\frac{4\pi q\omega}{v^{2}\varepsilon}\frac{1-v^{2}\varepsilon/c^{2}}{k_{\perp}^{2}+\omega^{2}/v^{2}-\omega^{2}\varepsilon/c^{2}} \tag{4}$$

Обратим внимание на то, что знаменатели в этих формулах могут обращаться в нуль при интегрировании по $dk_{\perp}^{2}$, если диэлектрическая проницаемость вещественна и выполнено условие излучения Вавилова-Черенкова $v > c/\sqrt{\varepsilon'}$. Поэтому нужно рассмотреть отдельно два случая.

1. $v < c/\sqrt{\varepsilon'}$. Знаменатели не обращаются в нуль, малую мнимую часть ε'' можно не учитывать, интеграл в (2) легко вычисляется, и результат близок к полученному в предыдущем примере:

$$\frac{d\mathscr{E}_{\omega}}{dz}=\frac{16q^{2}r_{0}^{2}n_{a}c}{3v^{2}\varepsilon'^{3/2}}\left|\frac{m\omega^{2}}{e^{2}}\alpha(\omega)\right|^{2}\ln\left[\frac{v}{\omega R}\left(1-v^{2}\varepsilon'/c^{2}\right)^{1/2}\right] \tag{5}$$

где логарифм предполагается большим числом по сравнению с единицей. При $\varepsilon'=1$ формула (5) переходит в выражение (8) предыдущего примера. Основной вклад внесло поперечное поле, продольная составляющая приводит к замене логарифма величиной

$$\ln\left[\frac{v}{\omega R}\left(1-v^{2}\varepsilon'/c^{2}\right)^{1/2}\right]+\frac{1}{2}\left(1-\frac{v^{2}\varepsilon'}{c^{2}}\right) \tag{6}$$

2. $v > c/\sqrt{\varepsilon'}$. Кроме поляризационного тормозного излучения, происходит генерация черенковских квантов. При вычислении интеграла следует учитывать мнимую часть ε'', которая обеспечивает конечность знаменателя во всей области изменения $k_{\perp}^{2}$:

$$k_{\perp}^{2}-\frac{\omega^{2}}{v^{2}}\left(\frac{v^{2}}{\omega^{2}}\varepsilon'-1\right)-\frac{i\omega}{c^{2}}\Gamma(\omega),\qquad\text{где}\qquad\Gamma(\omega)=\omega\varepsilon''(\omega) \tag{7}$$

представляет собой мнимую часть частоты виртуального фотона, которая характеризует время его жизни $\tau=\Gamma^{-1}(\omega)$ (или время затухания компоненты поля на частоте ω). Согласно результатам задачи 11.15, эту величину можно записать в виде

$$\Gamma(\omega)=\omega\varepsilon''(\omega)=\frac{4\pi n_{a}e^{2}}{m}\sum_{s}\frac{f_{s}\omega^{2}\gamma_{s}}{\left(\omega^{2}-\omega_{0s}^{2}\right)^{2}+\omega^{2}\gamma_{s}^{2}} \tag{8}$$

где f_s - силы осцилляторов, ω_{0s} - частоты переходов, γ_s - постоянные затухания возбужденных состояний атома.

Следует отметить, что при более последовательном квантовом расчете в знаменатель (7) вошли бы и другие величины, характеризующие времена жизни излучающей частицы и атома. Время жизни основного состояния атомов при низких температурах бесконечно, но время жизни частицы в состоянии с импульсом $\boldsymbol{p}$ ограничено. Основные процессы, изменяющие ее состояние - это многократное рассеяние на атомах, упругое и неупругое, и черенковское излучение. Приведем без вывода вклад этих процессов:

$$\tau_{p}^{-1}=v\sigma n_{a}+\int\frac{q^{2}}{\hbar c}\left(1-\frac{c^{2}}{v^{2}\varepsilon'(\omega)}\right)d\omega \tag{9}$$

где σ - полное сечение столкновения частицы с атомом, а интегрирование в черенковском интеграле производится по частотам, при которых подынтегральное выражение положительно. Полная ширина, вызывающая уширение резонансного знаменателя (7), при учете перечисленных процессов выразится в виде

$$\Gamma(\omega) = \tau_p^{-1} + \omega\varepsilon''(\omega) \tag{10}$$

Вычисление интегралов, входящих в (2), дает

$$\int_0^{1/R^2} \frac{k_\perp^2 dk_\perp^2}{\left|k_\perp^2 - \frac{\omega^2}{v^2}b(\omega) - \frac{i\omega}{c^2}\Gamma(\omega)\right|^2} \approx \left(\frac{c}{v}\right)^2 \frac{\pi b\omega}{\Gamma} + 2\ln\left[\frac{v}{\omega R b^{1/2}}\right] \tag{11}$$

$$b(\omega) = \frac{v^2}{c^2}\varepsilon'(\omega) - 1 > 0$$

$$\int_0^{1/R^2} \frac{k_\perp^2 dk_\perp^2}{\left|k_\perp^2 - \frac{\omega^2}{v^2}b(\omega) - \frac{i\omega}{c^2}\Gamma(\omega)\right|^2} \approx \left(\frac{c}{v}\right)^2 \frac{\pi b\omega}{\Gamma} \tag{12}$$

при условиях $c^2/R^2\omega\Gamma \gg 1, c^2 b\omega/v^2\Gamma \gg 1$. Первое слагаемое в (11) обусловлено полюсной особенностью, второе - всей остальной областью интегрирования. Во втором слагаемом пренебрежено членами, содержащими Γ, ввиду их малости. В результате получаем для спектральной плотности излучения на единице пути $d\mathscr{E}_\omega/dz = d\mathscr{E}_\omega/\,dz|_1 + d\mathscr{E}_\omega/\,dz|_2$ два слагаемых,
соответствующих двум механизмам поляризационного тормозного излучения:

$$\left.\frac{d\mathscr{E}_\omega}{dz}\right|_1 = \frac{16q^2r_0^2n_ac}{3v^2\varepsilon'^{3/2}}\left|\frac{m\omega^2}{e^2}\alpha(\omega)\right|^2 \ln\left[\frac{v}{\omega R}b^{1/2}\right] \tag{13}$$

$$\left.\frac{d\mathscr{E}_\omega}{dz}\right|_2 = \frac{8\pi q^2r_0^2n_acb}{3v^2\varepsilon'^{1/2}}\left|\frac{m\omega^2}{e^2}\alpha(\omega)\right|^2 \frac{\omega}{\Gamma(\omega)}, \quad v > c/\sqrt{\varepsilon'} \tag{14}$$

Первое из двух слагаемых имеет ту же природу, что излучение при $v < c/\sqrt{\varepsilon'}$ либо при $\varepsilon' = 1$: оно происходит от встряхивания атомной оболочки полем быстрой частицы. Второе слагаемое существует только при наличии эффекта Вавилова-Черенкова. Перегруппируем в нем сомножители таким образом, чтобы каждый из них приобрел простой физический смысл:

$$\left.\frac{d\mathscr{E}_\omega}{dz}\right|_2 = \left(n_a\sigma_T\frac{\lambda}{2\pi}\right)\left|\frac{m\omega^2}{e^2}\alpha(\omega)\right|^2 \frac{(q^2/\hbar c)\,\omega\,(1 - c^2/v^2\varepsilon')}{\Gamma}\frac{\hbar\omega}{c}$$

Здесь $\sigma_T = 8\pi r_0^2/3$ - томсоновское сечение рассеяния мягкого кванта свободным электроном без изменения его частоты; первый множитель $(n_a\sigma_T\lambda/2\pi)$ представляет собой число атомов в цилиндре с основанием σ_T и высотой порядка длины волны кванта λ. Множитель $|m\omega^2\alpha(\omega)/e^2|^2$ учитывает отличие поляризуемости атомной оболочки от поляризуемости свободных электронов; произведение первого и второго множителей можно трактовать как полное эффективное число свободных электронов, рассеивающих черенковские кванты, с учетом связи электронов в атомах и когерентного характера рассеяния кванта атомной оболочкой в целом. Далее в (14') следует безразмерная дробь, числитель которой имеет смысл парциальной ширины, связанной с излучением черенковского кванта; дробь в целом представляет собой отношение указанной ширины к полной ширине, характеризующей вероятность распада состояния излучающей

быстрой частицы. Числитель дроби всегда меньше ее знаменателя. Наконец, последний множитель имеет нужную размерность спектральной плотности энергии, деленной на расстояние, и содержит энергию кванта. Таким образом, рассмотренный механизм поляризационного излучения представляет собой рассеяние черенковских квантов электронными оболочками атомов. Черенковский механизм обладает резонансностью, и он будет преобладать над обычным механизмом, т.е. будет выполняться неравенство $d\mathscr{E}_\omega/\,dz|_2 > d\mathscr{E}_\omega/\,dz|_1$ при $\omega/\Gamma > 2\ln(v/\omega R)$

Обычное излучение Вавилова-Черенкова намного более интенсивно, чем обе составляющие поляризационного излучения, однако черенковские кванты распространяются только под углом $\theta = \arccos\left(c/v\sqrt{\varepsilon'}\right)$ к скорости быстрой частицы. Поляризационное тормозное излучение имеет угловое распределение, близкое к изотропному, в частности, оно существует и за пределами черенковского конуса. В этой области углов оно преобладает над прочими каналами излучения и может быть измерено.

Эффект плотности в магнитотормозном излучении. В предыдущем разделе было показано, что в тормозном излучении сверхрелятивистских электронов в среде при частотах $\omega < \omega_p\gamma$, где $\omega_p = \sqrt{4\pi n_a Z e^2/m}$ - плазменная частота, становится существенным эффект плотности. Он приводит к подавлению излучения и уменьшает спектральную плотность. Это вызвано влиянием поляризации среды на распространение электромагнитных волн, которое изменяет закон их дисперсии и уменьшает когерентную длину (см. формулу (15.60)). Аналогичный эффект имеет место и при магнитотормозном излучении релятивистских электронов. Впервые роль среды при магнитотормозном излучении отметил В. Н. Цытович (1951), хотя самый интересный вопрос о влиянии среды на излучение в высокочастотной области он не рассмотрел. В. А. Разин (1960) подробно исследовал роль плазменной среды для космических источников синхротронного радиоизлучения и впервые объяснил влиянием фоновой плазмы важный наблюдательный факт - завал спектров радиоисточников при низких частотах. В настоящее время эффект Разина-Цытовича общепризнан и часто привлекается при интерпретации радиоастрономических данных.

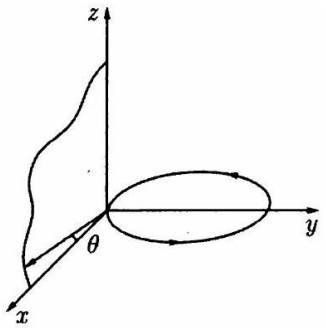


Рис. 15.4

Пример 15.12. Релятивистский электрон движется по окружности в магнитном поле с $\boldsymbol{B} = \text{const}$ в плазменной среде с концентрачией фоновых электронов n_e. Вычислить спектрально-угловое и спектральное распределение мощности излучения при частотах $\omega \gg \omega_p = \sqrt{4\pi n_e e^2/m}, \omega \gg \omega_B = eB/mc$. Проанализировать частные случаи, сравнить результаты с магнитотормозным излучением в вакууме (задачи 5.83, 5.84).

Решение. Поскольку диэлектрическая проницаемость $\varepsilon(\omega) = 1 - \omega_p^2/\omega^2$ при указанных частотах изотропна и близка к единице, достаточно учесть ее только в экспоненте формулы (5.77). Совмещаем плоскость xy координатной системы
с плоскостью орбиты, а луч зрения помещаем в плоскости xz под углом $\theta \ll 1$ к оси Ox (рис. 15.4).

Имеем

$$s(\tau) = a\boldsymbol{e}_x \sin(v\tau/a) + ae_y[1 - \cos(v\tau/a)]$$
$$v = \dot{s} \tag{1}$$

где $a = cp/$ e B - радиус орбиты. Далее, как в задаче 5.83, учитываем релятивистский эффект излучения вперед и разлагаем все величины по малым параметрам $\theta, \omega_p^2/\omega^2, 1/\gamma$ и $(v\tau/a)$. Получаем

$$\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{v}(\tau) \approx c\theta \boldsymbol{e}^{(1)} + \frac{c^2\tau}{a}\boldsymbol{e}^{(2)} \tag{2}$$
$$\omega\tau - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{s}(\tau) \approx \frac{1}{2}\omega\tau\left(\theta^2 + \frac{1}{\gamma^2} + \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right) + \frac{\omega\tau}{3}\left(\frac{c\tau}{a}\right)^2 = \frac{3}{2}\xi\left(x + \frac{1}{3}x^3\right).$$

Здесь единичные векторы $\boldsymbol{e}^{(1)} = \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}^{(2)} = \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{n}$ взаимно ортогональны,

$$x = \frac{c\tau}{\left(\theta^2 + \gamma^{-2} + \omega_p^2/\omega^2\right)^{1/2}}, \quad \xi = \frac{\omega a}{3c}\left(\theta^2 + \gamma^{-2} + \omega_p^2/\omega^2\right)^{3/2} \tag{3}$$

После этого выполняем интегрирование по переменной x с помощью формул, приведенных в условии задачи 5.83,[3] и получаем спектрально-угловое распределение излучения, обобщающее формулу (3) задачи 5.83:

$$\frac{d^2 I'_\omega}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2}{3\pi^2 c}\left(\frac{a\omega}{c}\right)^2\left(\theta^2 + \frac{1}{\gamma^2} + \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)^2\left[K_{2/3}^2(\xi) + \frac{\theta^2}{\theta^2 + \gamma^{-2} + \omega_p^2/\omega^2}K_{1/3}^2(\xi)\right] \tag{4}$$

Поделив обе части на период обращения частицы $T = 2\pi\gamma/\omega_B$, находим спектрально-угловую мощность:

(5)

$\frac{d^2 I_\omega}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2\omega_B}{6\pi^3 c\gamma}\left(\frac{a\omega}{c}\right)^2\left(\theta^2 + \frac{1}{\gamma^2} + \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)^2\left[K_{2/3}^2(\xi) + \frac{\theta^2}{\theta^2+\gamma^{-2}+\omega_p^2/\omega^2}K_{1/3}^2(\xi)\right]$.

Сравнивая последнее выражение с формулой (5) задачи 5.83, мы видим, что наличие плазмы существенно меняет распределение излучения

по частотам и по углам при $\omega < \gamma\omega_p$. В этом диапазоне частот угловое распределение расширяется, характерный угол $\theta_0 \approx \omega_p/\omega > \gamma^{-1}$, а параметр ξ уменьшается с ростом частоты. Форму спектра удобно исследовать, проинтегрировав (5) по телесному углу. Угловое распределение обладает аксиальной симметрией, а угол θ отсчитывается от плоскости xy. Поэтому $d\Omega = 2\pi\cos\theta d\theta, -\pi/2 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$ и в малоугловом приближении $d\Omega = 2\pi d\theta, -\infty < \theta < \infty$. Интегрирование по углу можно выполнить с помощью формул, приведенных в условии задачи 5.84. Оно дает:

(6) $\frac{dI_\omega}{d\omega} = \frac{e^2\omega}{\sqrt{3}\pi c}\left(\frac{1}{\gamma^2} + \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)\int\limits_\eta^\infty K_{5/3}(x)dx, \quad \eta = \frac{2\omega\gamma}{3\omega_B}\left(\frac{1}{\gamma^2} + \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)^{3/2}$

Параметр $\eta(\omega)$ немонотонно зависит от частоты: он достигает минимума, $\eta_{\min} = \sqrt{3}\omega_p/\gamma\omega_B$, при $\omega = \sqrt{2}\gamma\omega_p$ и возрастает по обе стороны от этого значения. Форма спектра и полная интенсивность излучения существенно зависят от минимального значения этого параметра. Если $\eta_{\min} \gg 1$, то, используя формулу (1.170), находим

$$\frac{dI_\omega}{d\omega} = \frac{e^2\omega}{\sqrt{6\pi}c}\left(\frac{1}{\gamma^2} + \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)\frac{e^{-\eta(\omega)}}{\sqrt{\eta(\omega)}} \tag{7}$$

[3] В указанных формулах имеется опечатка: дробь 2/3 в аргументах синуса и косинуса следует заменить на 3/2.

излучение подавлено эффектом плотности и экспоненциально мало. Это возможно при умеренном релятивизме частицы и большом отношении плазменной и циклотронной частот:

$$1 \ll \gamma \ll \frac{\sqrt{3}\omega_p}{\omega_B} \tag{8}$$

Более интересен противоположный случай, $\eta_{\min} \ll 1$. С помощью (1.68) находим

$$\frac{dI_\omega}{d\omega} = 3^{1/6}\Gamma(2/3)\frac{e^2}{\pi c}\left(\frac{\omega_B^2\omega}{\gamma^2}\right)^{1/3}, \quad \eta \ll 1 \tag{9}$$

Этот результат совпадает с тем, который был получен для магнитотормозного излучения в вакууме при $\omega \ll \omega_c = 3\omega_B\gamma^2$ (см. ответ к задаче 5.84). При частотах $\omega \gg \omega_p\gamma/\eta_{\min}$ происходит экспоненциальное уменьшение излучения:

$$\frac{dI_\omega}{d\omega} = \frac{\sqrt{3}e^2\omega_B}{2\sqrt{\pi}c}\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{1/2} e^{-2\omega/\omega_c} \tag{10}$$

В этом случае наличие плазменной среды не сказывается. Но такой же эффект экспоненциального уменьшения имеет место и при низких частотах, $\omega \ll \omega_p\gamma\sqrt{\eta_{\min}}$:

$$\frac{dI_\omega}{d\omega} = \frac{e^2}{2\sqrt{2\pi}c}\left(\frac{\omega_p\omega_B}{\gamma}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{2\gamma\omega_p^3}{3\omega_B\omega^2}\right) \tag{11}$$

Здесь спектр резко отличается от вакуумного. Последний в рассматриваемом диапазоне частот описывается формулой (9). Дальнейший анализ влияния среды на магнитотормозное излучение см. в задачах 15.32, 15.33.

Существует множество других процессов излучения заряженных частиц в средах. В частности, с изящной теорией дифракционного излучения, возникающего при пролете частиц через отверстия в экранах, можно познакомиться по обзору Болотовского и Галстьяна (2000).

Рекомендуемая литература: [Тамм и Франк (1937); Гинзбург и Франк (1946); Франк (1988); Гинзбург (1987); Гинзбург (2002); Базылев и Жеваго (1987); Гинзбург и Цытович (1984); Батыгин и Топтыгин, Современная электродинамика, ч. 1; Платонов и Флейшман (2002); Тер-Микаелян (1969); Амусья и др. (1987); Амусья (1990); Король и др. (2004)].

Задачи

15.13*. Частица с зарядом e движется со скоростью $v = \text{const}$ в однородной и изотропной среде. Диэлектрическая проницаемость среды $\varepsilon(\omega)$, магнитная проницаемость $\mu = 1$. Определить составляющие электромагнитного поля, создаваемого движущейся частицей.

15.14*. Частица движется в непоглощающем диэлектрике с постоянной скоростью $v = \beta c$. Используя результаты предыдущей задачи, исследовать создаваемое частицей поле на больших расстояниях от ее траектории. Показать, что достаточно быстрая частица будет излучать поперечные электромагнитные волны (эффект Вавилова-Черенкова). Найти условия возникновения этого излучения и полную величину черенковских потерь w на единице пути.

15.15. Частица с зарядом e движется с постоянной скоростью через вещество, диэлектрическую проницаемость которого можно приближенно описать формулой

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Определить энергию излучения w Вавилова-Черенкова на единице пути, если скорость частицы удовлетворяет условию $v^2\varepsilon_0 > c^2$, где ε_0 - статическое значение диэлектрической проницаемости. В каком интервале углов сконцентрировано излучение? Сделать численную оценку, положив $\omega_0 = 6 \cdot 10^{15} c^{-1}, \varepsilon_0 = 2, v = c$.

15.16. Получить условие $\cos\theta = 1/\beta n$, определяющее направление излучения Вавилова-Черенкова, из рассмотрения интерференции отдельных волн, испускаемых частицей в разных точках ее траектории.

15.17. Черенковское излучение частицы можно рассматривать как следствие резонанса между собственными колебаниями среды и вынуждающей силой, связанной с движущейся частицей. Получить условие возникновения эффекта Вавилова-Черенкова из сравнения частот собственных колебаний среды и вынуждающей силы.

15.18. Релятивистская частица, имеющая скорость v, проходит через диэлектрическую пластинку толщиной l перпендикулярно ее плоскости. Показатель преломления пластинки n, дисперсию не учитывать. Найти длительность τ вспышки черенковского излучения, которую зарегистрирует неподвижный относительно пластинки наблюдатель. Определить поток энергии I черенковского излучения через поверхность пластинки во время вспышки. Краевым эффектом пренебречь.

15.19. Показать, что минимальная скорость движения частицы $v_{\min}$, при которой возникает излучение Вавилова-Черенкова в данном направлении, удовлетворяет условию

$$v_{\min} \cos\theta = v_g(\omega_m)$$

где v_g - групповая скорость электромагнитных волн в диэлектрике, ω_m - частота, при которой показатель преломления имеет максимум, θ - угол между направлениями излучения и скорости частицы. Диэлектрик считается непоглощающим.

15.20*. Частица движется с постоянной скоростью $v = \beta c$ в недиспергирующей среде с проницаемостями ε, μ. Найти электромагнитные потенциалы φ и A. Рассмотреть два случая, $v < v_{ph}$ и $v > v_{ph}$, где v_{ph} - фазовая скорость электромагнитных волн в рассматриваемой среде.

15.21. Прямолинейный провод, параллельный оси Ox, перемещается вдоль оси Oy со скоростью $v = \text{const}$ в непоглощающей среде с проницаемостями $\varepsilon(\omega), \mu(\omega)$. В лабораторной системе отсчета провод электронейтрален, по нему течет ток $\mathscr{I}$ в направлении оси Ox.[4] Найти условие, при котором возникает излучение Вавилова-Черенкова. Определить полную энергию излучения w с единицы длины провода на единице пути. Подсчитать тормозящую силу $\mathbf{f}$, действующую на единицу длины провода со стороны созданного им поля.

Указание. Векторный потенциал имеет одну компоненту $A_x(y, z, t)$. При выполнении обратного преобразования Фурье использовать правило обхода полюсов, сформулированное в предыдущей задаче.

15.22. Два точечных заряда e_1 и e_2 движутся с одинаковыми постоянными скоростями v вдоль одной прямой на расстоянии l друг от друга в среде с проницаемостями $\varepsilon(\omega), \mu = 1$ (l измерено в лабораторной системе отсчета). Найти энергию излучения Вавилова-Черенкова w на единице пути. Рассмотреть два случая: а) $e_1 = e_2 = e$; б) $e_1 = -e_2 = e$. Путем предельного перехода получить черенковские потери энергии точечного электрического диполя, ориентированного вдоль направления движения.

15.23*. Два точечных заряда $+e$ и $-e$ движутся с одинаковыми постоянными скоростями v на расстоянии l друг от друга в среде с проницаемостями $\varepsilon(\omega), \mu = 1$. Линия, соединяющая заряды, составляет угол α с направлением скорости (l и α измерены в лабораторной системе). Методом, использованным в предыдущей задаче, найти энергию излучения Вавилова-Черенкова w на единице пути, считая l малым по сравнению с длиной волны.

15.24*. Магнитный диполь [5] движется с постоянной скоростью $v = \beta c$ в непоглощающей среде, проницаемости которой $\varepsilon(\omega)$ и $\mu(\omega)$. Магнитный момент, измеренный в лабораторной системе, имеет величину $\boldsymbol{m}$ и ориентирован вдоль скорости. Определить потери энергии на излучение ВавиловаЧеренкова w на единице пути.

Указание. С помощью преобразования Фурье проинтегрировать уравнения для потенциалов. Движущийся магнитный момент создает ток $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}, t) = c \operatorname{rot} \boldsymbol{m}\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{v}t)$.

15.25*. Быстрая частица с зарядом e движется через непоглощающий диэлектрик с проницаемостью

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

где $\omega_p^2 = 4\pi e^2 N/m, m$ - масса электрона. Вычислить потери энергии $(-d\mathscr{E}/dl)$ в расчете на единицу пути на расстояниях от траектории частицы, превышающих межатомные расстояния a (параметр a должен быть выбран так, чтобы в области $r > a$ было справедливо макроскопическое рассмотрение). Выяснить физический смысл отдельных членов в выражении потерь энергии.

15.26*. Заряженная частица движется со скоростью $v = \beta c$ через плазму, диэлектрическая проницаемость которой

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$$

где $\omega_p = \sqrt{4\pi e^2 N/m}$ - электронная плазменная частота. Найти потери энергии $-d\mathscr{E}/dl$ на единице пути за счет «далеких» столкновений. Под далекими нужно понимать столкновения с параметром удара $r > a$, где a - расстояние, на котором становится справедливым макроскопическое рассмотрение.

15.27*. Точечная частица с зарядом e движется в вакууме нормально к границе идеального проводника. Определить спектральное и угловое распределение излучения, возникающего при переходе заряда из вакуума в проводник, пренебрегая ускорением заряда под действием силы электрического изображения. Скорость заряда $v = \beta c$.

Указание. Поле в вакууме создается зарядом и его изображением, движущимися навстречу друг другу с равными постоянными скоростями. Когда частица пересекает границу проводника, ее заряд мгновенно экранируется свободными электронами проводника, что эквивалентно внезапной остановке заряда и его изображения в одной и той же точке на границе проводника.

15.28*. Точечная частица с зарядом e имеет скорость $v = \beta c$ и движется в вакууме нормально к границе непоглощающего диэлектрика с проницаемостью $\varepsilon(\omega)(\mu = 1)$. При переходе заряда из вакуума в диэлектрик возникает излучение. Пренебрегая ускорением заряда под действием силы электрического изображения, определить спектральное и угловое распределение излучения в вакуум (т. е. в область $z > 0$, см. рис. 15.16).

Указание. Плотности заряда и тока, создаваемые движущейся частицей, заменить эквивалентным набором гармонических осцилляторов. Для определения поля в волновой зоне использовать теорему взаимности (см. пример 5.7): $\boldsymbol{p}_B \cdot \boldsymbol{E}_{\boldsymbol{A}}(B) = \boldsymbol{p}_{\boldsymbol{A}} \cdot \boldsymbol{E}_B(A)$. Здесь $\boldsymbol{E}_B(A)$ - поле, создаваемое в точке A дипольным гармоническим осциллятором p_B, находящимся
в точке B; $\boldsymbol{E}_A(B)$ - поле, создаваемое в точке B осциллятором $\boldsymbol{p}_A$, находящимся в точке A. Так как точка наблюдения A находится на большом расстоянии от точки встречи

[04] Быстро перемещающиеся токонесущие пучки частиц могут существовать в ускорителях и при некоторых видах разряда.

[5] Нейтральная система (сгусток) частиц, имеющая магнитный момент, излучает как магнитный диполь, если длина волны в среде много больше размеров сгустка.

заряда с диэлектриком (в волновой зоне), то при вычислении $\boldsymbol{E}_A(B)$ можно воспользоваться формулами Френеля.

15.29. Записать спектрально-угловые распределения (15.92), (15.93) переходного излучения для нерелятивистской частицы, $v/c = \beta \ll 1$. Сравнить полученные выражения с результатами двух предыдущих задач.

15.30*. Записать спектрально-угловые распределения (15.92), (15.93) переходного излучения для ультрарелятивистской частицы, $\gamma = \mathscr{E}/mc^2 \gg 1$. Показать, что излучение в некотором спектральном интервале сконцентрировано в направлении вперед и оценить раствор конуса излучения. Оценить также частотный диапазон излучения.

15.31*. Получить на основе формул (15.92), (15.93) спектральное распределение жесткого (с частотами много больше атомных частот среды) переходного излучения при влете ультрарелятивистской частицы из вакуума в среду либо при вылете из среды в вакуум. Проанализировать предельные случаи. Вычислить полную энергию переходного излучения.

15.32ˆ. Обобщить результаты примера 15.12 на случай, когда ультрарелятивистский электрон движется по спирали в однородном магнитном поле в плазменной среде. Угол между направлением скорости электрона и магнитным полем (питч-угол по англоязычной терминологии) равен Θ. Вычислить спектрально-угловое распределение мощности излучения.

15.33*. Найти спектр синхротронного излучения от облака моноэнергичных ультрарелятивистских электронов, имеющих изотропную функцию распределения и находящихся в плазменной среде. Число электронов N_0. Магнитное поле $\boldsymbol{B}$ однородно, и его направление составляет угол Θ с направлением наблюдения $\boldsymbol{n}$. Сравнить найденный спектр с тем, который можно ожидать в отсутствие среды (задача 5.86).

13.4.3 15.3. Channeling and Emission of Fast Particles in Crystals

При движении быстрых частиц в правильных монокристаллах существенную роль играют ориентационные и интерференционные эффекты. Например, при движении в некоторых направлениях (вдоль атомных цепочек или в кристаллических плоскостях) пробеги частиц возрастают в несколько раз по сравнению с пробегами в веществах с неупорядоченным расположением атомов. Благодаря большим значениям длины формирования тормозного излучения ультрарелятивистских частиц они излучают когерентно с больших участков своих траекторий. Интерференционные явления в кристаллах уже рассматривались в разделе 12.4 на примере рассеяния рентгеновых лучей. Ниже в этом разделе будет рассмотрено движение быстрых частиц и их излучение в кристаллах.

Интерференционные эффекты при рассеянии быстрых частиц.

Пример 15.13. Пользуясь борновским приближением, вычислить дифференциальное сечение упругого рассеяния релятивистским электроном на двухатомной системе, выразив его через сечение рассеяния на одном атоме. Относительное расположение атомов характеризуется вектором a, атомы одинаковы и каждый из них создает создает кулоновское поле, радиус экспонениальной экранировки которого R (см. задачу 15.2). Рассмотреть разные ориентации начального импульса электрона относительно оси системы a, оценить длины когерентности для рассеяния при продольной и поперечной ориентациях.

Решение. Рассеивающий потенциал имеет вид

$$U(\boldsymbol{r}) = -Ze^2\left(\frac{e^{-r/R}}{r} + \frac{e^{-|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a}|}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a}|}\right) \tag{1}$$

Дифференциальное сечение рассеяния пропорционально компоненте Фурье рассеивающего потенциала

$$U_{\boldsymbol{q}} = \int U(\boldsymbol{r})e^{-i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}} = u(\boldsymbol{q})\left(1 + e^{-i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{a}}\right) \tag{2}$$

где $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{p}' - \boldsymbol{p}$ - переданный рассеивателю волновой вектор, $u(\boldsymbol{q})$ - фурьеобраз потенциала отдельного атома. С помощью последнего выражения находим дифференциальное сечение

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_C (2 + 2\cos\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{a}) \tag{3}$$

где первый сомножитель представляет собой сечение рассеяния на экранированном кулоновском центре, найденное в задаче 15.2. Первое слагаемое в скобках дает удвоенное сечение одного атома, т. е. сумму сечений рассеяния на двух атомах. Слагаемое с косинусом описывает интерференционный эффект.

Условием интерференции является неравенство $|\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{a}| \lesssim 1$, так как при $|\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{a}| \gg 1$ косинус будет сильно осциллировать и интерференционный эффект ненаблюдаем. При $|\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{a}| \ll 1$ сечение увеличивается в 4 раза по сравнению с сечением на отдельном атоме, т. е. оно пропорционально квадрату числа атомов. Учтем, что кулоновское рассеяние происходит преимущественно на малые углы $\theta \lesssim 1/rR$ (см. сечение, найденное в задаче 15.2). При продольной ориентации $\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{a} \approx ka\theta^2/2$, и продольная корреляционная длина

$$l_\parallel \approx \frac{2pR^2}{\hbar} \tag{4}$$

Поперечная корреляционная длина

$$l_\perp \approx \frac{1}{k\theta} \approx R. \tag{5}$$

Продольная корреляционная длина для рассеяния пропорциональна импульсу частицы и у ультрарелятивистских частиц может достичь макроскопических размеров. Поперечная длина при всех энергиях остается микроскопической величиной. Если имеется линейная цепочка атомов с межатомными расстояниями a, то частицы с начальными импульсами, параллельными цепочке, будут взаимодействовать когерентно с $N_c = l_\parallel/a$ атомами, и сечение рассеяния возрастет в N_c раз по сравнению с сечением на отдельном атоме (в рамках борновского приближения, т. е. при условии, что оно применимо). При поперечной ориентации сечение пропорционально числу атомов.

Пример 15.14. Релятивистская частица рассеивается на линейной цепочке, состоящей из N атомов, которые находятся на взаимном расстоянии a. Пользуясь борновским приближением, вычислить дифференциальное и полное сечения упругого рассеяния при $N \gg 1$. Указать критерий применимости приближения в зависимости от ориентации начального импульса частицы относительно линии расположения атомов.

Решение. Произведя вычисления, как в предыдущем примере, получим дифференциальное сечение

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_C \frac{\sin^2(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{a}N/2)}{\sin^2(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{a}/2)} \tag{1}$$

где при падении рассеивающихся частиц вдоль цепочки

$$\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{a}=\frac{1}{2}ak\theta^2. \tag{1}$$

Здесь использовано приближение малых углов для рассеяния релятивистских частиц на экранированном кулоновском потенциале. При $ak\vartheta^2N/4\ll 1$ из (1) следует

$$\frac{d\sigma_\parallel}{d\Omega}=N^2\left(\frac{d\dot\sigma}{d\Omega}\right)_C=4\left(\frac{NZe^2}{pv}\right)^2\frac{1}{(\theta^2+\theta_0^2)^2} \tag{3}$$

N атомов цепочки действуют когерентно, как одно целое. Это приводит к эффективному заряду ядра NZe и позволяет использовать известный (см. [Ландау и Лифшиц, Квантовая механика]) критерий применимости борновского приближения:

$$\frac{NZe^2}{\hbar v}\ll 1 \tag{4}$$

Поскольку $e^2/\hbar c\approx 1/137$, то борновское прибли-

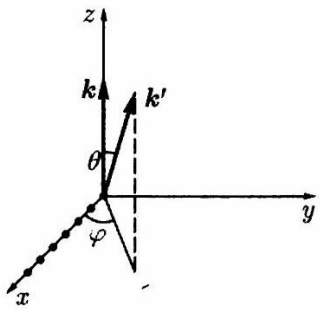


Рис. 15.5 жение применимо при $N\gg 1$ лишь для достаточно легких элементов, $Z<10$. Интегрируя (3) по телесному углу, находим полное сечение

$$\sigma_\parallel=N^2\sigma_C=4\left(\frac{NZe^2}{\hbar v}\right)^2\pi R^2 \tag{5}$$

где R - радиус экранировки. В условиях применимости (4) борновского приближения сечение рассеяния на цепочке мало по сравнению с геометрическим сечением атома πR^2. Это означает, что взаимное затенение атомов от падающей волны мало.
При перпендикулярном падении частиц на цепочку (рис. 15.5) имеем

$$\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{a}=ak\theta\cos\varphi \tag{6}$$

В приближении $N\gg 1$ используем представление дельта-функции (1.217) как приближенное равенство и преобразуем интерференционный множитель в (1):

$$\frac{\sin^2(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{a}N/2)}{\sin^2(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{a}/2)}=\frac{\sin^2(ak\theta\cos\varphi N/2)}{\sin^2(ak\theta\cos\varphi/2)}\xrightarrow[N\gg1]{} \tag{7}$$

$\xrightarrow[N\gg1]{} N\frac{\pi(ak\theta\cos\varphi/2)^2}{\sin^2(ak\theta\cos\varphi/2)}\delta(ak\theta\cos\varphi/2)=\frac{2\pi N}{ak}\delta(\theta\cos\varphi).$

Интерференционный множитель имеет острые максимумы при $\theta\to 0$ и при $\varphi\to\pi/2$. Их реальная угловая ширина порядка $1/Nak\ll 1$. Вычислив полное сечение путем интегрирования (1) по $d\Omega=\theta d\theta d\varphi$ с учетом (7), получим

$$\sigma_\perp=N\sigma_C\frac{\pi R}{a} \tag{8}$$

В этом случае рассеяние некогерентно, сечение пропорционально числу атомов, множитель $\pi R/a$ близок к единице, так как в конденсированных средах расстояние между атомами порядка их размеров. Условие применимости борновского приближения такое же, как для отдельного атома: $Ze^2/\hbar v \ll 1$.

Осевое и плоскостное каналирование. При выполнении условия, противоположного борновскому критерию (4), т. е. при $NZe^2/\hbar v \gg 1$, применимо квазиклассическое приближение. Полностью пренебрегая дифракционными эффектами, рассмотрим классическую картину движения релятивистской частицы в поле длинной атомной цепочки. Если начальный импульс параллелен цепочке или направлен под малым углом к ней, то при однократном соударении с прицельным параметром $\rho \lesssim R$, где R - радиус экранировки, частица приобретет добавочный поперечный импульс порядка $\Delta p_\perp \approx Ze^2\tau/\rho^2$, где Ze^2/ρ - сила, $\tau \approx \rho/v$ - время соударения. Частица отклонится на угол порядка $\theta \approx \Delta p_\perp/p \approx Ze^2/\rho\beta^2\mathscr{E} \ll 1$, где $\mathscr{E} = mc^2\gamma$ - ее релятивистская энергия. Приращение прицельного параметра $\Delta\rho$ при соударении будет порядка $\Delta\rho \approx a\theta$, где a - расстояние между атомами цепочки. Для достаточно энергичных частиц (не обязательно релятивистских) $\Delta\rho \ll \rho$ и, таким образом, траектория частицы будет представлять собой плавную кривую, почти прямолинейную на расстояниях порядка межатомного расстояния (рис. 15.6).

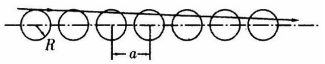


Рис. 15.6

Такой же характер будет иметь траектория и при влете частицы не параллельно, но под достаточно малым углом ϑ к оси цепочки. При этом частицы с отрицательным зарядов (электроны) будут притягиваться к осевой линии и могут двигаться преимущественно внутри цепочки на расстоянии $\rho \leqslant R$ от ее оси (осевое каналирование), а положительно заряженные ча-

стицы (позитроны, протоны, положительные ионы) будут концентрироваться в пространстве между соседними параллельными плотно упакованными цепочками. Точный расчет траекторий с использованием реалистических атомных потенциалов весьма трудоемок, но сам характер движения частиц подсказывает рациональное упрощение задачи - замену реального потенциала цепочки осесимметричным потенциалом, усредненным по координате вдоль цепочки:

$$U(\rho) = \frac{1}{L}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\sum_n u\left(\rho, z - a_n\right) dz \tag{15.98}$$

где u - потенциальная энергия одного атома, a_n - его координата на оси цепочки, L - длина цепочки.

В том случае, когда в кристалле можно выделить плотно упакованные параллельные атомные плоскости, а начальная скорость частицы составляет с ними малый угол, тоже можно ввести потенциал, усредненный по положениям атомов в плоскости:

$$U(x) = \frac{1}{S}\int\sum_{n,m} u\left(x, y + b_m, z + a_n\right) dydz \tag{15.99}$$

где S - площадь плоскости, (b_m, a_n) - координаты атома в плоскости (y, z). При такой аппроксимации потенциальной энергии задача становится одномерной. Частицы могут длительное время удерживаться либо вблизи плоскости (электроны) либо между соседними плоскостями (частицы с положительным зарядом), в состоянии плоскостного

каналирования. Описание движения быстрых частиц в кристаллах на основе усредненных потенциалов было введено Линдхардом (см. обзор [Линдхард (1969)]). Более корректный подход предполагает усреднение также и по тепловым колебаниям атомов в узлах кристаллической решетки.

Основные закономерности движения частиц при каналировании можно установить на основе известных из классической механики интегралов движения, не обращаясь к уравнениям движения.

В одномерном статическом потенциальном поле $U(x)$ сохраняется полная энергия частицы $\mathscr{E}$ и ее импульс $p_\parallel$, параллельный плотно упакованной плоскости,
$\frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta_\parallel^2-\dot{x}^2/c^2}}+U(x)=\mathscr{E}=\text{const}, \quad \frac{mc\beta_\parallel}{\sqrt{1-\beta_\parallel^2-\dot{x}^2/c^2}}=p_\parallel=\text{const},$
где $\beta_\parallel = v_\parallel/c$. Выразим из второго равенства продольную скорость

$$\beta_\parallel^2=\frac{c^2p_\parallel^2}{\mathscr{E}_\parallel^2}\left(1-\frac{\dot{x}^2}{c^2}\right) \tag{15.101}$$

и подставим в первое уравнение. Это позволит найти поперечную скорость:

$$\dot{x}^2=c^2\frac{(\mathscr{E}-U(x))^2-\mathscr{E}_\parallel^2}{(\mathscr{E}-U(x))^2}, \quad \text{где} \quad \mathscr{E}_\parallel=\sqrt{m^2c^4+c^2p_\parallel^2}=\text{ const} \tag{15.102}$$

Далее примем во внимание, что метод усредненного потенциала применим лишь при условии движения частицы под малым углом к плоскостям, а энергия, связанная с поперечным движением, $\mathscr{E}_\perp = \mathscr{E} - \mathscr{E}_\parallel$, мала по сравнению с полной энергией $\mathscr{E}$ и продольной энергией $\mathscr{E}_\parallel$. По порядку величины она сравнима с потенциальной энергией U. Это позволяет упростить (15.102) и записать в простой форме закон сохранения энергии для поперечного движения:

$$\frac{\mathscr{E}_\parallel}{c^2}\frac{\dot{x}^2}{2}+U(x)=\mathscr{E}_\perp \tag{15.103}$$

Такая запись соответствует движению в заданном потенциальном поле $U(x)$ нерелятивистской частицы с релятивистской эффективной массой $m_{ef}=\mathscr{E}_\parallel/c^2$.

Характер движения частицы в кристалле (финитный или инфинитный в направлении оси Ox) зависит от начальных условий влета частицы в кристалл. Электроны притягиваются к плотно упакованным плоскостям, и для них потенциальный рельеф имеет вид, схематически изображенный на рис. 15.7.

Если релятивистский электрон влетает в кристалл в точке x_0 и его импульс составляет с плоскостью (yz) угол $\theta \ll 1$, то $\mathscr{E}_\perp = \mathscr{E}_\parallel\theta^2/2+U(x_0)$, причем $U(x_0) \leqslant 0$. Для того, чтобы частица совершала финитное движение, т.е. была захвачена в одну из потенциальных ям, требуется условие $\mathscr{E}_\perp < 0$, т.е. $\theta < \sqrt{2\left|U(x_0)\right|/\mathscr{E}_\parallel} = \theta_c$. Такие электроны называются каналированными. При $\theta > \theta_c$ движение электрона будет инфинитным (надбарьерным), он сможет преодолевать потенциальные барьеры. Для позитронов и положительных ионов на месте потенциальных ям (рис. 15.7) окажутся горбы, а ямы переместятся в промежутки между горбами. В этом случае каналированными будут частицы с поперечной энергией $\mathscr{E}_\perp = \mathscr{E}_\parallel\theta^2/2+ +U(x_0) < U_{\max}$, где $U_{\max} > 0$ - высота горбов, т. е. с углами влета

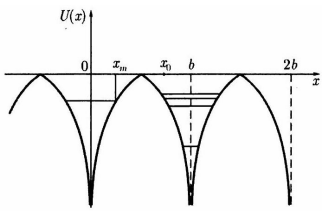


Рис. 15.7

$\theta < \sqrt{2\left(U_{\max} - U\left(x_0\right)\right)/\mathscr{E}_{\parallel}} = \theta_c$. Частицы с $\theta > \theta_c$ окажутся надбарьерными.

Поперечные скорость и ускорение надбарьерной частицы испытывают колебания с периодом

$$T = \int_0^b \frac{dx}{|\dot{x}|}, \quad \dot{x} = \sqrt{\frac{2c^2}{\mathscr{E}_{\parallel}}\left(\mathscr{E}_{\perp} - U(x)\right)} \tag{15.104}$$

где b - расстояние между плоскостями. Период колебаний каналированной частицы

$$T = 4\int_0^{x_m} \frac{dx}{|\dot{x}|}, \quad \text{где} \quad U\left(x_m\right) = \mathscr{E}_{\perp} \tag{15.105}$$

(см. рис. 15.7). Здесь всюду поперечная энергия $\mathscr{E}_{\perp}$ зависит от угла θ и точки x_0 влета частицы в кристалл. Продольная скорость частицы испытывает периодические колебания малой амплитуды в соответствии с формулой (15.101). Таким образом, у надбарьерной частицы координата за каждый период нарастает на величину b, а движение параллельно плоскостям почти равномерное со скоростью $v_{\parallel} \approx v \approx \text{const}$. У каналированных частиц продольное движение носит такой же характер, а поперечная координата x, как и скорость $\dot{x}$, испытывают колебания с периодом (15.105).

Обсуждение движения частиц в модели осевого каналирования см. в задачах 15.34, 15.36*.

Приведенные выше краткие сведения о движении быстрых частиц в кристаллах весьма схематичны и не претендуют на полноту. В частности,
мы не обсудили следующие важные явления, анализ которых можно найти в литературе к данному разделу.

а) Влияние теплового движения атомов (их колебаний в узлах кристаллической решетки) на движение быстрых частиц. Этот вопрос будет затронут ниже в связи с радиационными процессами.

б) Потери энергии быстрых частиц в кристаллах и влияние каналирования на этот процесс, а также на взаимодействия каналированных частиц с ядрами кристалла. Уже в первых экспериментах было отмечено увеличение прозрачности кристалла в несколько раз для каналированных протонов (см. [Томпсон (1969)]).

в) При определенных условиях колебания каналированных и надбарьерных частиц приобретают стохастический характер («динамический хаос», см. [Ахиезер и Шульга (1993)]). Стохастичность может вызываться также многократным рассеянием каналированных частиц.

г) Ограниченность движения каналированных частиц в поперечном направлении приводит к дискретности уровней поперечной энергии и требует в некоторых случаях квантового описания с использованием уравнения Шредингера (см., например, [Калашников (1981); Базылев и Жеваго (1987)]).

Излучение релятивистских частиц в кристаллах. Как и в средах с неупорядоченным расположением атомов, в кристаллах действуют разные механизмы излучения. Начнем с рассмотрения тормозного излучения при взаимодействии релятивистской частицы с экранированными полями атомных ядер. Будем рассматривать в качестве объекта, создающего внешнее поле, весь кристалл в целом. Вычислим сечение тормозного излучения методом эквивалентных фотонов, который уже применялся в примерах 6.19 и 15.4. В системе покоя кристалла его электромагнитные потенциалы

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \int \frac{4\pi Ze}{q^2+\kappa^2} e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}} \sum_n e^{-i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}_n} \frac{d^3q}{(2\pi)^3}, \quad \kappa = \frac{1}{R}, \quad \boldsymbol{A} = 0 \tag{15.106}$$

где сумма берется по всем атомам кристалла, которые одинаковы и расположены в точках $\boldsymbol{r}_n$. Используется модель экспоненциальной экранировки. В системе покоя электрона потенциалы имеют вид

$$\varphi'(\boldsymbol{r}', t') = \frac{Ze\gamma}{2\pi^2} \int \frac{d^3q}{q^2+\kappa^2} e^{i\boldsymbol{q}_\perp\cdot\boldsymbol{r}_\perp + iq_\parallel\gamma(z'+vt')} \sum_n e^{-i\boldsymbol{q}_\perp\cdot\boldsymbol{r}_{n\perp} - iq_\parallel\gamma z'_n} \tag{15.107}$$

$$\boldsymbol{A} = -\frac{\boldsymbol{v}}{c}\varphi'(\boldsymbol{r}', t')$$

т.е. отличаются от тех, которые использовались в примере 15.4, только интерференционным множителем.

После вычисления напряженностей поля получаем соотношение, определяющее спектральную плотность эквивалентных фотонов (аналог формулы (6) из примера 15.4):

$$\frac{Z^2e^2\gamma}{2\pi^2} 2 \int_0^\infty dq'_\parallel \int \frac{q_\perp d^2q_\perp}{\left(q^2+\kappa^2\right)^2} \left|\sum_n e^{-i\boldsymbol{q}\cdot r_n}\right|^2 = \int_0^\infty \hbar\omega' n(\omega')\, d\omega'$$

где $q'_\parallel = \gamma q_\parallel \approx \omega'/c, \boldsymbol{r}_n = (\boldsymbol{r}_{n\perp}, \gamma z'_n) = (\boldsymbol{r}_{n\perp}, z_n)$ - координаты атома в системе кристалла. Из полученного соотношения находим спектральную плотность фотонов $n(\omega')$:

$$n(\omega') = \frac{Z^2e^2\gamma}{\pi^2\hbar c}\frac{1}{\omega'} \int \frac{q_\perp^2 d^2q_\perp}{\left(q^2+\kappa^2\right)^2} \left|\sum_n e^{-i\boldsymbol{q}\cdot r_n}\right|^2, \text{ где } \omega' = c\gamma q_\parallel \tag{15.108}$$

Сечение тормозного излучения электрона на кристалле вычислим по очевидной формуле

$$d\sigma_r(\omega) = \int_{\omega'_{\min}}^{\omega'_{\max}} d\omega' n(\omega')\, d\sigma_C(\omega', \omega'') \tag{15.109}$$

(см. формулу (1) из решения задачи 6.81). Здесь $d\sigma_C(\omega', \omega'')$ - сечение комптоновского рассеяния, ω', ω'' - частоты первичного и рассеянного квантов в системе электрона. Конечную частоту и пределы интегрирования $\omega'_{\min}, \omega'_{\max}$ следует еще преобразовать в лабораторную систему (кристалла). Сечение комптоновского рассеяния было найдено в задаче 6.80:

$$\frac{d\sigma_C}{d(\hbar\omega'')} = \pi r_0^2 \frac{mc^2}{(\hbar\omega')^2} \left[\frac{\omega'}{\omega''} + \frac{\omega''}{\omega'} + \left(\frac{mc^2}{\hbar\omega''} - \frac{mc^2}{\hbar\omega'}\right)^2 - 2\left(\frac{mc^2}{\hbar\omega''} - \frac{mc^2}{\hbar\omega'}\right)\right] \tag{15.110}$$

Преобразуем это сечение с помощью соотношений, найденных в задаче 6.82 из преобразования Лоренца $\omega = \omega''\gamma(1-\cos\theta')$ для частоты рассеянного кванта в двух системах отсчета и законов сохранения

$$1 - \cos\theta' = \frac{mc^2}{\hbar\omega''} - \frac{mc^2}{\hbar\omega'}$$

в системе электрона. Находим

$$d\omega'' = \left|\frac{d\omega''}{d\omega}\right|_{\omega'} d\omega = \frac{\hbar\omega'}{\mathscr{E}} d\omega, \cdot\omega'' = \omega'\frac{\mathscr{E}'}{\mathscr{E}} \tag{15.111}$$
$$\omega'_{\min} = \omega\frac{mc^2}{2\mathscr{E}'}, \quad \omega'_{\max} = \omega\frac{2\gamma\mathscr{E}}{\mathscr{E}'}$$

где $\mathscr{E}, \mathscr{E}'$ - энергии электрона в системе кристалла до и после испускания кванта, а $\omega'_{\min}, \omega'_{\max}$ устанавливают пределы интегрирования по $d\omega'$ при заданной частоте ω испущенного кванта в лабораторной системе, а также заданных $\mathscr{E}$ и $\mathscr{E}' = \mathscr{E} - \hbar\omega$. С помощью двух первых формул записываем сечение комптоновского рассеяния в виде

$$d\sigma_C(\omega', \omega) = \pi r_0^2 \frac{mc^2}{\mathscr{E}\omega'}\left[\frac{\mathscr{E}}{\mathscr{E}'} + \frac{\mathscr{E}'}{\mathscr{E}} + \left(\frac{mc^2}{\mathscr{E}'}\right)^2\left(\frac{\omega}{\omega'}\right)^2 - 2\frac{mc^2}{\mathscr{E}'}\frac{\omega}{\omega'}\right] d\omega \tag{15.112}$$

В итоге сечение тормозного излучения на кристалле примет вид трехкратного интеграла

$$d\sigma_r(\omega) = \frac{1}{\pi} r_0^2 Z^2 \frac{e^2}{\hbar c}\frac{mc^2}{\mathscr{E}}\int\limits_{\omega'_{\min}}^{\omega'_{\max}} \frac{d\omega'}{\omega'^2}\int \frac{q_\perp^2 d^2 q_\perp}{\left(q^2+\kappa^2\right)^2}\times \tag{15.113}$$
$$\times\left[\frac{\mathscr{E}}{\mathscr{E}'} + \frac{\mathscr{E}'}{\mathscr{E}} + \left(\frac{mc^2}{\mathscr{E}'}\right)^2\left(\frac{\omega}{\omega'}\right)^2 - 2\frac{mc^2}{\mathscr{E}'}\frac{\omega}{\omega'}\right]\left|\sum_n e^{-i\boldsymbol{q}\cdot r_n}\right|^2 d\omega$$

Напомним, что $\omega' = c\gamma q_\parallel$. Поэтому подынтегральное выражение в (15.113) можно рассматривать как дифференциальное сечение $d\sigma_r(\boldsymbol{q}, \omega)$ тормозного излучения кванта с частотой ω, сопровождающееся передачей среде фиксированного волнового вектора $\boldsymbol{q} = \left(\boldsymbol{q}_\perp, q_\parallel\right)$. Оно отличается от сечения тормозного излучения на отдельном атоме $d\sigma_{BH}(\boldsymbol{q}, \omega)$ структурным фактором среды:

$$d\sigma_r(\boldsymbol{q}, \omega) = d\sigma_{BH}(\boldsymbol{q}, \omega)\left|\sum_n e^{-i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}_n}\right|^2 \tag{15.114}$$

Такая связь между сечениями совершенно естественна, так как вероятность радиационного перехода в борновском приближении пропорциональна квадрату модуля $|U_q|^2$ потенциала внешнего поля, который выражается
через потенциал u_q отдельного атома в виде

$$|U_{\boldsymbol{q}}|^2 = |u_{\boldsymbol{q}}|^2\left|\sum_n e^{-i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}_n}\right|^2$$

Метод эквивалентных фотонов, как мы видели на примерах 6.19, 15.4, для ультрарелятивистских частиц эквивалентен первому борновскому приближению.

Переход от (15.114) к сечению тормозного излучения на макроскопическом теле с неупорядоченным расположением атомов можно произвести путем представления структурного фактора в виде

$$\left|\sum_n e^{-i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}_n}\right|^2 = \sum_{m,n} e^{i\boldsymbol{q}\cdot(\boldsymbol{r}_m - \boldsymbol{r}_n)} = N + \sum_{m\neq n} e^{i\boldsymbol{q}\cdot(\boldsymbol{r}_m - \boldsymbol{r}_n)} \tag{15.115}$$

где N - полное число атомов. При случайном расположении атомов нужно усреднить (15.115) по всем $\boldsymbol{r}_m$, считая все положения атомов внутри тела равновероятными:

$$\left\langle e^{-i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}_n}\right\rangle = \frac{1}{V}\int\limits_V e^{-i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}_n}dV_n = 0$$

если размер тела L велик по сравнению с q^{-1}. В результате последняя сумма в (15.115) обратится в нуль, и мы получим

$$\left\langle\left|\sum_n e^{-i\boldsymbol{q}\cdot r_n}\right|^2\right\rangle = N, \quad d\sigma_r(\boldsymbol{q},\omega) = N d\sigma_{BG}(\boldsymbol{q},\omega)$$

что соответствует некогерентному излучению на N атомах.
Но если атомы совершают лишь малые колебания в узлах кристаллической решетки, то структурный фактор будет существенно и немонотонно зависеть от переданного волнового вектора $\boldsymbol{q}$, приводя к интерференционным максимумам и минимумам, подобно диффузии рентгеновых лучей в кристаллах. В этом случае усреднение нужно производить методами физики твердого тела (см. [Займан (1966), Тер-Микаелян (1969)]), учитывая квантовый характер колебаний атомов в кристаллах. Результат усреднения имеет вид

$$\left\langle\left|\sum_n e^{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}_n}\right|^2\right\rangle = N\left(1-e^{-q^2\overline{u^2}}\right) + e^{-q^2\overline{u^2}}\left|\sum_n e^{i\boldsymbol{q}\cdot r_n^0}\right|^2 \tag{15.116}$$

где

$$\overline{u^2} = \frac{3\hbar^2}{4MT_D}\left[1+4\left(\frac{T}{T_D}\right)^2\int\limits_0^{T_D/T}\frac{tdt}{e^t-1}\right]$$

- средний квадрат отклонения атома от равновесного положения, $\boldsymbol{r}_n^0$ радиусы-векторы узлов кристаллической решетки, причем все атомы считаются одинаковыми, M - масса атома, T/T_D - отношение температуры кристалла к его температуре Дебая. Величина $\sqrt{\overline{u^2}}$ при комнатных температурах порядка или несколько меньше радиуса экранирования R, поэтому интерференционные эффекты в тормозном излучении проявятся при достаточно малых переданных волновых векторах, $qR \lesssim 1$.

С учетом (15.116) сечение тормозного излучения на кристалле складывается из двух частей, $d\sigma_r(\boldsymbol{q},\omega) = d\sigma_{nc}(\boldsymbol{q},\omega) + d\sigma_c(\boldsymbol{q},\omega)$, где некогерентная часть сечения,

$$d\sigma_{nc}(\boldsymbol{q},\omega) = N\left(1-e^{-q^2\overline{u^2}}\right)d\sigma_{BH}(\boldsymbol{q},\omega) \tag{15.117}$$

не зависит от направления влета электрона в кристалл относительно его кристаллографических осей, а когерентная часть

$$d\sigma_c(\boldsymbol{q},\omega) = d\sigma_{BH}(\boldsymbol{q},\omega)e^{-q^2\overline{u^2}}\left|\sum_n e^{i\boldsymbol{q}\cdot r_n^0}\right|^2 \tag{15.118}$$

зависит от этого направления. Анализ интерференционных явлений, содержащихся в (15.118), можно произвести по аналогии с анализом дифракции рентгеновых лучей (см. раздел 12.4, а также пример 15.15).

Пример 15.15. Тяжелая релятивистская частица (мюон, протон) взаимодействует с кристаллическим телом объема V, находящимся в воздухе ($\varepsilon(\omega) \approx 1$). Найти

интенсивность излучения при частотах много больше атомных, вызванного рассеянием поля быстрой частицы на электронной подсистеме кристалла. Использовать подход, развитый в кинематической теории дифракции рентгеновых лучей (раздел 12.4). Обсудить свойства исследуемого излучения (дифрагированное рентгеновское излучение).

Решение. У тяжелых частиц мала интенсивность собственно тормозного излучения в полях атомных ядер, поэтому главный вклад в излучение
дадут электроны среды, возбуждаемые полем быстрой частицы. Рассматриваем область частот, в которой диэлектрическая проницаемость дается формулой (12.66) и удовлетворяет условию малости (12.67). Уравнение (12.69) применим для вычисления поля рассеянной волны на большом расстоянии от тела, где $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{E}$. В правую часть уравнения (12.69) подставляем гармонику невозмущенного поля частицы, движущейся равномерно в вакууме (см. задачу 4.34)

$$\boldsymbol{E}_\omega^0(\boldsymbol{r}) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) e^{i\omega t} dt \tag{1}$$

Используемое приближение предполагает, что падающая волна мало ослабляется, проходя через кристалл (борновское приближение). Записав решение уравнения (12.69), получим рассеянное поле

$$\boldsymbol{E}_\omega(\boldsymbol{r}) = -\frac{e^2}{m\omega^2} \int\limits_V G_\omega^R(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') \nabla' \times \left[\nabla' \times \boldsymbol{E}_\omega^0(\boldsymbol{r}') n(\boldsymbol{r}')\right] dV' \tag{2}$$

где $G_\omega^R(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}')$ - функция Грина (5.14) на большом расстоянии от тела ($r \gg r'$), имеющая вид

$$G_\omega^R(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{r}') = \frac{1}{r} e^{ikr - i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}'}, \quad \text{где} \quad \boldsymbol{k} = \frac{\omega}{c}\frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

- волновой вектор рассеянной волны. Здесь интеграл в правой части (2) берется не по всему безграничному пространству, а только по объему тела V.

Выполнив в (2) интегрирование по частям, как при выводе формулы (12.70), и подставив разложение (12.75) электронной плотности, приведем рассеянное поле к представлению, в которое входит сумма по векторам b обратной решетки:

(4) $\boldsymbol{E}_\omega(\boldsymbol{r}) = \frac{e^2}{m\omega^2} \sum\limits_{\boldsymbol{b}} n_{\boldsymbol{b}} \boldsymbol{k} \times \left[\boldsymbol{k} \times \int\limits_V \boldsymbol{E}_\omega^0(\boldsymbol{r}') \exp\left(-i(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{r}'\right) dV'\right] \frac{e^{ikr}}{r}$.

Если бы интегрирование производилось в бесконечных пределах, то интеграл содержал бы сингулярный множитель - дельта-функцию $\delta(\omega - \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v})$ (см. ответ к задаче 5.144 либо пример 15.1). Но при интегрировании по ограниченному объему кристалла все интегралы конечны:

$$\int\limits_V e^{i(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}')\cdot r} dV = V\delta_{k,\boldsymbol{k}'} \tag{5}$$

где большой, но конечный множитель V выделен, а $\delta_{k,k'}$ представляет собой символ Кронекера, имеющий конечную ширину порядка $|\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}'| \sim 1/L$ по каждому направлению, L - размер области интегрирования по соответствующей оси. В максимуме при $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}'$ символ Кронекера близок к единице. В итоге мы имеем

(6)

$$\int\limits_V \boldsymbol{E}_\omega^0(\boldsymbol{r}') \exp\left(-i(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{r}'\right) dV' = -i\frac{4\pi e' L}{v\left[(\boldsymbol{k} - b)^2 - \omega^2/c^2\right]} \left(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{b} - \frac{\omega\boldsymbol{v}}{c^2}\right)$$

причем $(\boldsymbol{k}-b)\cdot\boldsymbol{v}=\omega$. Здесь L - размер кристалла в направлении скорости частицы, L/v - время его пролета, а условие $(\boldsymbol{k}-b)\cdot\boldsymbol{v}=\omega$ возникло из ненаписанного символа Кронекера. После подстановки последнего результата в (4) получаем поле излучения (рассеянное поле частицы)

(7) $\boldsymbol{E}_\omega(\boldsymbol{r})=-i\frac{4\pi e'e^2L}{mv\omega^2}\sum\limits_{\boldsymbol{b}}\frac{n_{\boldsymbol{b}}}{(\boldsymbol{k}-b)^2-\omega^2/c^2}\boldsymbol{k}\times\left[\boldsymbol{k}\times\left(\boldsymbol{b}+\frac{\omega\boldsymbol{v}}{c^2}\right)\right]\frac{e^{i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r}}}{r}$

где $(\boldsymbol{k}-b)\cdot\boldsymbol{v}=\omega$.

Метод, которым было вычислено это поле, родственен методу эквивалентных фотонов. Но в данном случае быстрая частица не обязана быть ультрарелятивистской, так как электронная система реагирует на любое переменное поле частоты ω через посредство $\varepsilon(\omega)$. Механизм рассмотренного излучения уместно назвать поляризационным (см. пример 15.10), поскольку оно вызвано поляризацией электронной системы кристалла полем частицы. В случае тяжелых частиц тормозное излучение самой частицы подавлено ее большой массой. В случае электронов и позитронов к рассматриваемому излучению следует добавить когерентное тормозное излучение легкой частицы. По-видимому, возможна и интерференция обоих механизмов излучения.

Частота и направление распространения квантов связаны соотношением, вытекающим из последнего равенства (7):

$$\cos\theta=\frac{c}{v}-\frac{c(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{v})}{v\omega} \tag{8}$$

где θ - угол между направлениями движения излученного кванта и быстрой частицы. Спектрально-угловое распределение излучения находим по формуле (5.22):

$$\frac{d^2I_\omega}{d\omega d\Omega}=\frac{4e'^2e^4L^2}{m^2v^2c^3}\left|\sum_{\boldsymbol{b}}\frac{n_b}{(\boldsymbol{k}-b)^2-\omega^2/c^2}\boldsymbol{n}\times\left(\boldsymbol{b}+\frac{\omega\boldsymbol{v}}{c^2}\right)\right|^2 \tag{9}$$

Направление вылета кванта $\boldsymbol{n}$ и его частота связаны с вектором обратной решетки и друг с другом соотношением (8). При заданных $\boldsymbol{b},\boldsymbol{v}$ и $\cos\theta$ частотный диапазон излучаемых квантов весьма узок - например, порядка нескольких эВ при энергии квантов $5\div8$ кэВ. Обзор сведений об экспериментальном исследовании дифрагированного рентгеновского излучения и о его возможных практических применениях см. в обзоре Тер-Микаэляна (2001).

Излучение каналированных и надбарьерных частиц. При каналировании борновское приближение неприменимо, и характер излучения существенно изменяется по сравнению с рассмотренными выше в этом разделе случаями. Вычислим с помощью классической теории излучения полную радиационную потерю энергии каналированной частицы на единице пути. В обоих случаях осевого или плоскостного каналирования импульс частицы вдоль некоторой оси (Oz) сохраняется, и усредненная потенциальная энергия зависит только от одной или двух поперечных координат. Дифференцируя полную энергию частицы

$$\mathscr{E}=\sqrt{c^2p^2+m^2c^4}+U(\boldsymbol{\rho}) \tag{15.119}$$

по времени, находим

$$\frac{d\mathscr{E}}{dt}=\boldsymbol{v}\cdot\left(\frac{d\boldsymbol{p}}{dt}+\frac{\partial U}{\partial\boldsymbol{\rho}}\right) \tag{15.120}$$

Далее воспользуемся уравнением движения частицы с учетом силы $\boldsymbol{F}$ радиационного трения (5.118):

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{\rho}} + \boldsymbol{F} \tag{15.121}$$

Подстановка этого результата в (15.120) дает $\dot{\mathscr{E}} = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{F}$ и показывает, что потеря энергии частицы равна работе силы радиационного трения. Учитывая, что в (5.118) $\boldsymbol{H} = 0, e\boldsymbol{E} = -\partial U/\partial \boldsymbol{\rho}$ и что $v \approx c$, находим радиационные потери частицы на единице пути:

$$\frac{d\mathscr{E}}{dz} = -\frac{2e^2\gamma^2}{3m^2c^4}\left(\frac{\partial U}{\partial \rho}\right)^2 \tag{15.122}$$

Полученная формула сохраняет силу и для надбарьерных частиц при условии, что они движутся под малым углом к атомным цепочкам или атомным плоскостям и возможно их описание на основе усредненного потенциала.

Если потенциальная энергия периодична, то следует усреднить радиационные потери энергии (15.122) по периоду.

Сравним этот результат с синхротронными потерями релятивистского электрона в однородном магнитном поле (см. задачу 5.75):

$$\left.\frac{d\mathscr{E}}{dz}\right|_m = -\frac{2e^4\gamma^2H^2}{3m^2c^4} \tag{15.123}$$

Величине e^2H^2 соответствует квадрат производной $(\partial U/\partial\rho)^2$, который можно записать через напряженность атомного поля $e^2E_{at}^2$. Для атомов с атомным номером Z по порядку величины $E_{at} = Ze/R^2 \approx Z^{5/3}e/a_B^2 \approx \approx 4\times10^{10}$CGSE $\approx 10^{13}$ В/ см для тяжелых элементов ($Z = 64$). Эквивалентное магнитное поле имеет величину 4×10^{10} Гс.

При движении электрона в среде со случайным расположением атомов радиационные потери даются формулой (15.58). Отношение потерь в аморфной и кристаллической средах можно представить в виде

$$\frac{d\mathscr{E}/\,dz|_{am}}{d\mathscr{E}/\,dz|_{cr}} \approx \frac{30}{\gamma Z^{4/3}}\left(\frac{n_a\Lambda_C^3}{\alpha^4}\right) \tag{15.124}$$

n_a - концентрация атомов, $\Lambda_C = \hbar/mc$ и $\alpha \approx 1/137$. Для конденсированных сред множитель в скобках порядка единицы, поэтому излучение каналированных релятивистских электронов и позитронов существенно превышает их излучение в аморфных средах. На возможность интенсивного излучения релятивистских частиц в кристаллах впервые обратил внимание Кумахов (см. его монографию [Кумахов (1986)]).

Спектр излучения каналированных частиц. Воспользуемся формулой (5.58) для поля произвольным образом движущейся частицы в волновой зоне:

$$\boldsymbol{E} = \left.\frac{e\boldsymbol{n}\times[(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{v}/c)\times\dot{\boldsymbol{v}}]}{c^2R(1-\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}/c)^3}\right|_{t'=t-R(t')/c} \tag{15.125}$$

У каналированной релятивистской частицы считаем $\boldsymbol{v} = \text{const}$, а ускорение $\dot{v}$ - периодической функцией времени (см. формулы (15.104), (15.105) при плоскостном каналировании и задачу 15.36* при осевом каналировании). Считаем также векторы $\boldsymbol{v}$ и $\dot{v}$ взаимно перпендикулярными, пренебрегая тем самым членами порядка γ^{-2}. Для вычисления спектра нужно найти компоненту Фурье поля (15.125):

$$\boldsymbol{E}_\omega = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{E}(t)e^{i\omega t}dt \tag{15.126}$$

Поле (15.125) выражено через запаздывающее время t', поэтому следует перейти к интегрированию по dt', учитывая постоянство скорости частицы:

$$t = t' - \frac{R\left(t'\right)}{c} \approx \frac{R_0}{c} + \left(1 - \frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}}{c}\right) t' \tag{15.127}$$

После подстановки (15.125) и (15.127) в формулу (15.126) получим

$$\boldsymbol{E}_\omega = \frac{e}{c^2(1-\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}/c)^2}\frac{e^{i\omega R_0/c}}{R_0}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{n}\times\left[(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{v}/c)\times\dot{\boldsymbol{v}}\left(t'\right)\right]\exp\left\{i\omega\left(1-\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}}{c}\right)t'\right\}dt'. \tag{15.128}$$

Теперь роль частоты играет величина $\omega' = \omega(1 - \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}/c)$, которая для ультрарелятивистской каналированной частицы принимает вид

$$\omega' \approx \omega\left(1-\frac{v}{c}\cos\theta\right) \approx \frac{\omega}{2}\left(\gamma^{-2}+\theta^2\right) \tag{15.129}$$

Здесь θ - угол между направлением излучения и осью канала. Таким образом, компонента Фурье поля выразилась через компоненту Фурье ускорения на частоте ω':

$$\boldsymbol{E}_\omega = \frac{e}{c^2}\left(\frac{\omega}{\omega'}\right)^2\frac{e^{i\omega R_0/c}}{R_0}\boldsymbol{n}\times\left[(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{v}/c)\times\dot{\boldsymbol{v}}_{\omega'}\right] \tag{15.130}$$

Спектрально-угловое распределение излучения можно вычислить по формуле (5.22), имея в виду, что при высоких частотах в веществе $|\boldsymbol{H}_\omega|^2 = |\boldsymbol{E}_\omega|^2$:

$$\frac{d^2I_\omega}{d\omega d\Omega} = \frac{cR_0^2}{4\pi^2}\left|\boldsymbol{E}_\omega\left(R_0\right)\right|^2 \tag{15.131}$$

Раскрывая квадрат двойного векторного произведения в (15.131), получим

$$\boldsymbol{n}\times\left[|\boldsymbol{n}-\boldsymbol{v}/c)\times\dot{\boldsymbol{v}}_{\omega'}\right]|^2 = |\dot{\boldsymbol{v}}_{\omega'}|^2\left(1-\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}}{c}\right)^2 - |\boldsymbol{n}\cdot\dot{\boldsymbol{v}}_{\omega'}|^2\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)$$

Проинтегрируем (15.131) по телесному углу $d\Omega = \theta d\theta d\varphi = d\varphi d\omega'/\omega$, где мы воспользовались формулой (15.129) и перешли к интегрированию по частоте ω'. Азимут φ отсчитываем от направления вектора $\dot{v}_{\omega'}$ и записываем $|\boldsymbol{n}\cdot\dot{\boldsymbol{\omega}}_{\boldsymbol{\omega}'}|^2 = |\dot{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{\omega}'}|^2\theta^2\cos^2\varphi$, где угол θ нужно выразить через ω'. В результате получаем

$$\frac{dI_\omega}{d\omega} = \frac{e^2\omega}{2\pi c^3}\int\limits_{\omega/2\gamma^2}^{\infty}|\dot{v}_{\omega'}|^2\left[1-\frac{\omega}{\gamma^2\omega'}+\frac{\omega^2}{2\gamma^4\omega'^2}\right]\frac{d\omega'}{\omega'^2} \tag{15.132}$$

Это выражение может быть использовано для различных случаев движения каналированных и надбарьерных частиц, для которых применимо приближение усредненного потенциала. Рассмотрим простейший («модельный») случай, когда происходит плоскостное каналирование и электрон совершает между плоскостями гармонические колебания с частотой Ω и амплитудой x_m : $x(t) = x_m\cos\Omega t$. Для оценки круговой частоты Ω учтем, что каналированная релятивистская частица имеет эффективную массу $m_{ef} \approx \mathscr{E}/c^2 = \gamma m$ (см. формулу (15.103)). Поэтому $\Omega = \omega_0/\gamma^{1/2}$, где ω_0 - частота колебаний нерелятивистского электрона в потенциальном поле U, которая при плоскостном каналировании имеет порядок величины $\omega_0 = \sqrt{E_{at}R/mb^2}$, где b - расстояние между плоскостями кристалла. В этом случае

$$\dot{v}_{\omega'} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \ddot{x}(t) e^{i\omega' t} dt = -\pi \Omega^2 x_m \delta\left(\omega' - \Omega\right) \quad \text{при} \quad \Omega > 0, \omega' > 0$$

При возведении этой величины в квадрат возникнет расходящееся выражение, что соответствует бесконечному времени движения электрона через кристалл:

$$\left|\dot{\omega}_{\omega'}\right|^2 = \frac{1}{2}\pi \Omega^4 x_m^2 \delta\left(\omega' - \Omega\right) \Delta t \Big|_{\Delta t \to \infty}$$

Поэтому следует вычислять потерю энергии на излучение в расчете на единицу пути, т. е. поделить (15.132) на $v\Delta t \approx c\Delta t$ и поменять знак:

$$\frac{d^2\mathscr{E}_\omega}{dz d\omega} = -\frac{e^2 \left(\Omega x_m\right)^2 \omega}{4c^4} \left[1 - \frac{\omega}{\gamma^2 \Omega} + \frac{\omega^2}{2\gamma^4 \Omega^2}\right] \Theta\left(2\gamma^2 \Omega - \omega\right) \tag{15.133}$$

Такой прием уже применялся при переходе от (15.71) к (15.72).
Наличие ступенчатой функции означает, что спектр обрывается на частоте

$$\omega = 2\gamma^2 \Omega = 2\gamma^{3/2} \omega_0 \tag{15.134}$$

На частоты такого порядка приходится основное излучение каналированной частицы. При интегрировании (15.133) по всем частотам получаем

$$\frac{d\mathscr{E}}{dz} = -\frac{e^2 \omega_0^4 x_m^2}{3c^4} \gamma^2 \tag{15.135}$$

что согласуется с общим выражением (15.122). При негармонических колебаниях или более сложном вращательном движении в канале поперечное
ускорение частицы и спектр излучения будут содержать большое число гармоник Фурье. Анализ многочисленных конкретных случаев каналирования и квазиканалирования (т. е. надбарьерных движений), а также подробное сравнение теории с экспериментальными данными можно найти в литературе к данному разделу.

Рекомендуемая литература: [Линдхарт (1969); Томпсон (1969); ТерМикаелян (1969); Кумахов и Ширмер (1980); Ландау и Лифшиц, Теория поля; Ахиезер и Шульга (1993); Кумахов (1986); Калашников (1981); Базылев и Жеваго (1987); Барышевский (1982); ТерМикаелян (2001); Кумахов и Комаров (1985)].

Задачи

15.34. Вычислить усредненную потенциальную энергию атомной цепочки, если для отдельного атома она имеет вид кулоновского потенциала с экспоненциальной экранировкой (см. условие задачи 15.2), расстояние между атомами b.
15.35. Вычислить усредненную потенциальную энергию атомной плоскости, если для отдельного атома она имеет вид кулоновского потенциала с экспоненциальной экранировкой (см. условие задачи 15.2), расстояние между атомами на плоскости a, расстояние между плоскостями b.
15.36*. Записать интегралы движения и проанализировать характер движения релятивистского электрона в поле одной атомной цепочки в приближении усредненного потенциала. Обсудить картину движения частиц в кристалле под малыми углами к направлению атомных цепочек.

13.4.4 15.4. Particle Acceleration in Turbulent Plasma Media

Свойства космических неравновесных сред.

Мы видели в разделе 15.1, что в обычном равновесном веществе энергичные частицы быстро теряют свою энергию и в конечном счете приходят в состояние статистического равновесия со средой. Но в природе происходят и такие процессы, которые приводят к ускорению заряженных частиц до чрезвычайно высоких энергий при их взаимодействии с естественными, т. е. имеющимися в природе, средами. Убедительное подтверждение этому дает факт существования космических лучей - частиц высоких энергий, приходящих из глубин

Вселенной и пронизывающих атмосферу Земли. Такие частицы регистрируются уже много десятилетий как наземными установками, так и приборами на космических аппаратах в межпланетном пространстве за пределами магнитосферы Земли. Наибольшая измеренная энергия таких частиц составляет величину около 3×10^{20} эВ, т. е. на 8 порядков превышает энергию, достигнутую на современных ускорителях элементарных частиц. Энергией такого порядка обладает макроскопическая частица массой в 1 г, летящая со скоростью звука в воздухе (~ 330 m/c).

Большую часть ускоренных частиц естественного происхождения при умеренных энергиях ($\mathscr{E} < 10^{12}$ эВ) составляют протоны, около 10% приходится на α-частицы (ядра гелия), и менее 1% - на более тяжелые ядра. Электроны также составляют около 1% от общего потока космических лучей.

Вопрос о происхождении частиц столь высоких энергий представляет собой одну из самых интересных и до конца не решенных загадок природы. Путь ее решения подсказывает изучение сильно неравновесных состояний вещества. В разделе 13.3 мы рассматривали примеры неравновесных сред и выяснили, в частности, что плазма с пучками частиц неустойчива, в ней нарастают электрические колебания. Значительная часть вещества в звездах, а также в межпланетном и межзвездном пространстве находится в виде плазмы, в которой существуют всевозможные макроскопические движения и магнитные поля. Вещество вне звезд по земным меркам чрезвычайно разрежено - плотность числа частиц n составляет величину порядка $10 \gtrsim n \gtrsim 10^{-3}$ cm^{-3} и находится в сильно неравновесном состоянии.

Такое состояние поддерживается механическими движениями небесных тел и их конгломератов, но главным образом внутренней эволюцией звезд, которые способны взрываться и извергать из своих недр струи и сгустки плазмы, движущиеся со скоростями в десятки тысяч км/с. За пределами нашей звездной системы (Галактики) известно много плазменных струй, движущихся с релятивистскими скоростями, о происхождении которых можно лишь строить гипотезы. Но все эти данные говорят о том, что в космическом пространстве существуют сильно возмущенные области, заполненные регулярно или хаотически движущимися облаками плазмы с магнитным полем. В таких областях возможно появление также регулярных или хаотических электрических полей. Эти поля способны ускорять частицы до высоких энергий. Условием ускорения является неравновесность среды и большой запас в ней свободной энергии, способной превращаться в энергию ускоренных частиц.

Заряженная частица, двигаясь в электрическом поле по некоторой траектории из точки 1 в точку 2, приобретает энергию $\Delta\mathscr{E} = e\int\limits_{(1)}^{(2)} \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{v}dt$.

Если при усреднении по траекториям разных частиц в области ускорения $\langle\boldsymbol{E}\rangle \neq 0$, то ускорение называют регулярным. Если же $\langle\boldsymbol{E}\rangle = 0$, это означает, что электрическое поле на траектории частицы многократно меняет направление. Но и в этом случае возможно

ускорение, так как величина $\left\langle \int\limits_{(1)}^{(2)} \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{v}dt \right\rangle \neq 0$ из-за того, что скорость частицы $\boldsymbol{v}[\boldsymbol{E}]$ представляет собой функционал от электрического поля и при усреднении будут возникать величины типа $\langle E^2\rangle$, отличные от нуля. Ускорение в этом случае называют стохастическим.

Если среда имеет высокую электропроводность, то электрическое поле можно выразить через магнитное поле и макроскопическую скорость среды (см. формулу (10.34))

$$\boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B} \tag{15.136}$$

В этом случае ускорение частиц можно интерпретировать как результат их столкновений с движущимися «магнитными неоднородностями», которые передают частицам часть своей энергии. Мы в настоящем разделе рассмотрим некоторые наиболее изученные процессы ускорения частиц в неравновесных плазменных средах, способные обеспечить достаточно высокие энергии.

Движение быстрых частиц в случайном магнитном поле. В разделе 4.2 были рассмотрены различные случаи движения частиц в регулярном магнитном поле. Такое поле можно задать как вполне определенную функцию координат и времени. Но в естественных плазменных средах в межпланетном и межзвездном пространстве кроме крупномасштабного регулярного магнитного поля присутствуют случайные магнитные неоднородности. Они обусловлены случайными макроскопическими движениями плазмы, ее неустойчивостями и различными колебаниями, которые могут раскачиваться в неравновесной плазме. Случайное магнитное поле допускает множество реализаций, и оно, как мы видели в разделе 10.3 и Дополнении 4, может быть задано своим средним значением и корреляционными тензорами различных рангов.

Траектория отдельной частицы, движущейся в случайном электромагнитном поле, тоже допускает множество реализаций, и она в общем случае не может быть вычислена как некоторый функционал случайного поля. Систему частиц, движущихся в случайных полях, следует описывать функциями распределения, усредненными по возможным значениям этих полей. В разреженной среде часто можно пренебречь столкновениями быстрых частиц с частицами фоновой плазмы, так как макроскопическое поле оказывает на их движение несравненно более существенное воздействие.

Выведем кинетическое уравнение для функции распределения быстрых частиц, движущихся в магнитном поле со случайной составляющей. Электрическое поле движущихся магнитных неоднородностей (слабых МГД волн с фазовой скоростью v_{ph}, см. раздел 10.3) в v_{ph}/c раз меньше их магнитного поля, и электрическим полем мы в рассматриваемой задаче пренебрежем. Пусть полное магнитное поле состоит из двух частей, регулярного поля $\boldsymbol{B}_0 = \text{const}$ и случайного поля $\boldsymbol{b}(\boldsymbol{r},t)$, причем при усреднении по ансамблю случайных полей $\langle\boldsymbol{b}\rangle = 0$. Будем считать случайное поле статистически однородным и изотропным и характеризовать его в системе отсчета, в которой плазма локально неподвижна, корреляционным тензором

$$T_{\alpha\beta}\left(\boldsymbol{r}_1'-\boldsymbol{r}_2',t_1-t_2\right) = \left\langle b_\alpha\left(\boldsymbol{r}_1',t_1\right)b_\beta\left(\boldsymbol{r}_2',t_2\right)\right\rangle \tag{15.137}$$

В космических условиях плазма как правило перемещается, участвуя в крупномасштабном движении с некоторой скоростью u, которую мы здесь будем считать нерелятивистской постоянной величиной, $\boldsymbol{u} = \text{const}$. В этом важном случае радиусы-векторы в лабораторной и сопутствующей плазме системах связаны соотношением $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}' + \boldsymbol{u}$. Скорость v рассматриваемых быстрых частиц мы будем считать большой по сравнению со всеми скоростями плазмы:

$$v \gg u, \quad v \gg v_{ph} \quad (v \gg c_s, v_A) \tag{15.138}$$

поскольку скорость v_{ph} движения неоднородностей в неподвижной плазме определяется звуковой c_s и альвеновской v_A скоростями. В этих предположениях магнитные неоднородности в системе среды можно считать статическими и записать корреляционный тензор в лабораторной системе, в которой плазма движется, в виде

$$\langle b_\alpha(\boldsymbol{r}_1, t_1)\, b_\beta(\boldsymbol{r}_2, t_2)\rangle = T_{\alpha\beta}(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{u}(t_1 - t_2)) \tag{15.139}$$

Таким образом, мы пренебрегли фазовыми скоростями МГД волн и их магнитными полями. Но скорость $\boldsymbol{u}$ (газодинамическая скорость плазмы) может быть весьма значительной (солнечный и звездный ветры, $u \approx 300 \div 1000$ км / с, вспышка сверхновой, $u \approx 3000 \div 30000$ км / с), и эту скорость мы в дальнейшем будем учитывать. Наличие этой скорости порождает в лабораторной системе отсчета электрическое поле согласно формуле (15.136).

Обозначим через $f(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}, t)$ функцию распределения быстрых частиц, не усредненную по случайным полям. Она удовлетворяет бесстолкновительному кинетическому уравнению

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{r}} + \mathscr{F}\cdot\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{p}} = 0 \tag{15.140}$$

Сила

$$\mathscr{F} = e\boldsymbol{E} + \frac{e}{c}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B} = \frac{e}{c}(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u})\times\boldsymbol{B} \tag{15.141}$$

содержит электрическую и магнитную составляющие. Запишем уравнение (15.140) в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{r}} + \boldsymbol{B}\cdot\widehat{\boldsymbol{D}} f = 0 \tag{15.142}$$

где

$$\widehat{\boldsymbol{D}} = \frac{e}{c}(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u})\times\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}} \tag{15.143}$$

- оператор, изменяющий величину и направление импульса частицы. На данном этапе мы будем считать скорость плазмы $\boldsymbol{u}$ регулярной величиной, поэтому оператор $\widehat{\boldsymbol{D}}$ регулярен.

Случай мелкомасштабных неоднородностей. На опыте измеряются потоки, создаваемые многими частицами, движущимися каждая по своей случайной траектории, в результате чего происходит усреднение по траекториям. Такие потоки можно вычислять с помощью функции распределения, усредненной по всем возможным реализациям случайных полей:

$$F(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}, t) = \langle f(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}, t)\rangle \tag{15.144}$$

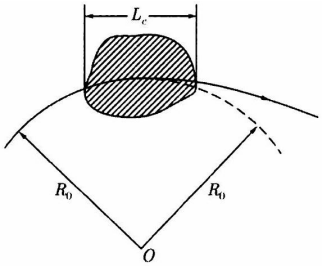


Рис. 15.8

Получим из точного бесстолкновительного уравнения (15.140) уравнение для усредненной функции F. Рассмотрим сначала наиболее простой случай, когда

$$b \leqslant B_0, \quad R_0 = \frac{cp}{eB_0} \gg L_c \tag{15.145}$$

где R_0 - ларморов радиус частицы в регулярном поле, L_c - корреляционная длина случайного поля. Это - случай мелкомасштабных неоднородностей, когда в пределах одной случайной неоднородности траектория частицы слабо искривлена и поле одной неоднородности отклоняет частицу на малый угол (см. рис. 15.8). Кроме того, мы будем искать функцию распределения F для частиц, которые уже провзаимодействовали со многими неоднородностями.

Выделив из функции распределения ее усредненную часть,

$$f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p},t) = F(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p},t) + \widetilde{f}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p},t), \quad F(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p},t) = \langle f(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p},t)\rangle, \quad \langle\widetilde{f}\rangle = 0 \tag{15.146}$$

получим из (15.142) равенство

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{f}}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{r}} + \boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \boldsymbol{r}} = \boldsymbol{B}_0\cdot\widehat{\boldsymbol{D}}F + \boldsymbol{B}_0\cdot\widehat{\boldsymbol{D}}\tilde{f} + \boldsymbol{b}\cdot\widehat{\boldsymbol{D}}F + \boldsymbol{b}\cdot\widehat{\boldsymbol{D}}\tilde{f} \tag{15.147}$$

Усредним левую и правую часть (15.147) по реализациям случайного поля. Используя условия $\langle\boldsymbol{b}\rangle = \langle\widetilde{f}\rangle = 0$, получим точное уравнение

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{r}} - \boldsymbol{B}_0\cdot\widehat{\boldsymbol{D}}F = \langle\boldsymbol{b}(\boldsymbol{r})\cdot\widehat{\boldsymbol{D}}\tilde{f}\rangle \tag{15.148}$$

В этом уравнении содержится неизвестное среднее от произведения случайных величин $\langle\boldsymbol{b}\widetilde{f}\rangle$ (оператор $\widehat{D}$ регулярен). Чтобы уравнение (15.148) стало замкнутым, нужно выразить $\langle\boldsymbol{b}\cdot\widehat{\boldsymbol{D}}\tilde{f}\rangle$ через усредненную функцию F. Выполним этот этап расчета приближенно, предполагая неравенство

$$|\widetilde{f}| \ll F \tag{15.149}$$

т. е. считая случайную добавку к функции распределения малой по сравнению с ее средним значением. Мы увидим ниже, что неравенство (15.149) следует из (15.145).

Вычтем почленно из (15.147) равенство (15.148). Будем иметь

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \boldsymbol{r}} - \boldsymbol{B}_0\cdot\widehat{\boldsymbol{D}}\tilde{f} = \boldsymbol{b}\cdot\widehat{\boldsymbol{D}}F + \boldsymbol{b}\cdot\widehat{\boldsymbol{D}}\tilde{f} - \langle\boldsymbol{b}\cdot\widehat{\boldsymbol{D}}\tilde{f}\rangle$$

Пользуясь условием (15.149), опустим в правой части последнего уравнения два слагаемых, содержащих малую величину $\widetilde{f}$, и получим приближенное неоднородное уравнение для случайной добавки:

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial \boldsymbol{r}} - \boldsymbol{B}_0\cdot\widehat{\boldsymbol{D}}\tilde{f} = \boldsymbol{b}\cdot\widehat{\boldsymbol{D}}F \equiv Q(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p},t) \tag{15.150}$$

Мы обозначили через Q правую часть уравнения, играющую роль источника для случайной величины $\widetilde{f}$. Ее нужно вычислить для расстояний порядка корреляционной длины L_c и времен порядка времени L_c/v движения частицы через область корреляции, так как среднее $\langle\boldsymbol{b}\widetilde{f}\rangle$ пропорционально корреляционному тензору случайного поля.

Решение уравнения (15.150) можно записать через функцию Грина оператора $\widehat{L} = \frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}} - \boldsymbol{B}_0 \cdot \widehat{\boldsymbol{D}} : \widehat{L} G\left(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}, t; \boldsymbol{r}', \boldsymbol{p}', t'\right) = \delta\left(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'\right) \delta\left(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}'\right) \delta\left(t - t'\right)$.
На длине корреляции можно в силу условия $u \ll v$ пренебречь переносной скоростью u. Кроме того, при выполнении неравенств (10) траектория частицы в пределах одной области корреляции близка к прямолинейной, а изменением импульса можно пренебречь. Поэтому приближенно функция Грина представляет собой пропагатор свободного движения:

$$G\left(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}, t; \boldsymbol{r}', \boldsymbol{p}', t'\right) = \delta\left(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}' - \boldsymbol{v}\left(t - t'\right)\right) \delta\left(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}'\right) \Theta\left(t - t'\right) \tag{15.152}$$

Добавка к функции распределения примет вид

$$\widetilde{f} = \int\limits_{-\infty}^{t} Q\left(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{v}\left(t - t'\right), \boldsymbol{p}, t'\right) dt' = \int\limits_{-\infty}^{t} \boldsymbol{b}\left(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{v}\left(t - t'\right) - \boldsymbol{u}t'\right) \cdot \widehat{\boldsymbol{D}} F\left(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{v}\left(t - t'\right), \boldsymbol{p}, t'\right) dt'. \tag{15.153}$$

Оценим ее по порядку величины: интервал интегрирования по t' порядка L_c/v, оператор $\widehat{\boldsymbol{D}} \sim ev/cp, \tilde{f} \sim \left(ebL_c/cp\right) F \approx \left(L_c/r_g\right) F$, где $r_g \approx cp/eb$ - ларморов радиус частицы в случайном поле. В силу равенств (15.145) имеем $L_c \ll r_g$ и $|\widetilde{f}| \ll F$.

Слагаемое в правой части (15.148) теперь выразится через усредненную функцию распределения F и корреляционный тензор:

$$\langle \boldsymbol{b}(\boldsymbol{r}) \cdot \widehat{\boldsymbol{D}} \tilde{f} \rangle = \widehat{D}_\alpha \int\limits_{-\infty}^{t} T_{\alpha\beta}\left(\left(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}\right)\left(t - t'\right)\right) \widehat{D}_\beta F\left(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{v}\left(t - t'\right), \boldsymbol{p}, t'\right) dt' \tag{15.154}$$

Поскольку тензор $T_{\alpha\beta}$ пренебрежимо мал при аргументе, превышающем L_c, то по порядку величины $v\left(t - t'\right) \approx L_c$. Усредненная функция F слабо меняется на корреляционной длине, если частица уже прошла несколько областей корреляции. Она также слабо меняется за время $t - t' \approx L_c/v$ прохождения одной области корреляции. Поэтому в уравнении (15.154) в функции F можно заменить $\boldsymbol{r}'$ на $\boldsymbol{r}, t'$ на t и вынести эту функцию из-под
знака интеграла. Интегрирование после этого будет относиться только к корреляционному тензору:

$$\langle \boldsymbol{b}(\boldsymbol{r}) \cdot \widehat{\boldsymbol{D}} \tilde{f} \rangle = \widehat{D}_\alpha \left(\int\limits_{0}^{\infty} T_{\alpha\beta}((\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u})\tau) d\tau \right) \widehat{D}_\beta F(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}, t) \tag{15.155}$$

В случае статистически однородного и изотропного случайного поля наиболее общий вид корреляционного тензора

$$T_{\alpha\beta}((\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u})\tau) = T((\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u})\tau)\delta_{\alpha\beta} + P((\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u})\tau) \frac{(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u})_\alpha (\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u})_\beta}{(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u})^2} \tag{15.156}$$

где $T(r), P(r)$ - скалярные функции,удовлетворяющие условиям

$$T(0) = \frac{1}{3} \left\langle b^2 \right\rangle, \quad P(0) = 0 \tag{15.157}$$

$\langle b^2 \rangle$ - средний квадрат случайного поля. Второе слагаемое в (15.156) не дает вклада в правую часть (15.155), так как $(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u})_\beta \widehat{\boldsymbol{D}}_\beta = 0$. Определим корреляционную длину условием

$$\int_0^\infty T(r)dr = \frac{1}{3}\left\langle b^2\right\rangle L_c \tag{15.158}$$

Тогда

$$\int_0^\infty T(|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}|\tau)d\tau = \frac{\langle b^2\rangle L_c}{3|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}|}$$

и кинетическое уравнение (15.148) после подстановки в него (15.155) и (15.158) станет замкнутым:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{r}} - \boldsymbol{B}_0\cdot\widehat{\boldsymbol{D}}F = \frac{1}{3}\left\langle b^2\right\rangle L_c\widehat{\boldsymbol{D}}\frac{1}{|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}|}\widehat{\boldsymbol{D}}F \tag{15.159}$$

Правая часть этого уравнения играет роль столкновительного члена и описывает взаимодействие быстрых частиц с движущимися случайными неоднородностями. Величины $\boldsymbol{B}_0, \boldsymbol{u}, \langle b^2\rangle$ могут быть медленными функциями координат, лишь бы их можно было считать постоянными на корреляционной длине. Притом $u \ll v$, так что разность $|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}|$ не обращается в нуль.

В неподвижной среде $\boldsymbol{u}=0$ и оператор $\widehat{\boldsymbol{D}}$ принимает вид

$$\widehat{\boldsymbol{D}} = \frac{ec}{\mathscr{E}}\widehat{\boldsymbol{\mathcal{O}}}, \quad \text{где} \quad \widehat{\mathcal{O}} = \boldsymbol{p}\times\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{p}} \tag{15.160}$$

- оператор поворота импульса частицы. Абсолютная величина импульса и энергия частиц в этом случае не меняются, происходит только упругое рассеяние. Кинетическое уравнение (15.159) упрощается:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{r}} - \frac{ec}{\mathscr{E}}\boldsymbol{B}_0\cdot\widehat{\boldsymbol{\mathcal{O}}}F = \frac{v}{2\Lambda(p)}\widehat{\mathcal{O}}^2F \tag{15.161}$$

$$\Lambda(p) = \frac{3r_g^2}{2L_c}, \quad r_g^2 = \frac{c^2p^2}{e^2\left\langle b^2\right\rangle} \tag{15.162}$$

Величина $\Lambda(p)$ - транспортный пробег частицы, т. е. расстояние, на котором происходит ее рассеяние на угол порядка единицы. Через r_g^2 обозначен квадрат ларморовского радиуса в случайном поле. Мы рассмотрели случай $r_g \gg L_c$, при этом $\Lambda(p) \gg r_g \gg L_c$ и $\Lambda(p) \propto p^2$. Соотношение между r_g и Λ может быть произвольным. Оператор $\widehat{\mathcal{O}}^2$ в правой части (15.161) представляет собой угловую часть оператора Лапласа в пространстве импульсов. Отметим, что в рассмотренном случае транспортный пробег зависит только от квадрата случайного поля и не зависит от спектра магнитных неоднородностей.

Пример 15.16. Преобразовать и упростить кинетическое уравнение (15.161) для случая, когда распределение частиц по импульсам близко к изотропному. Такая ситуация реализуется на расстояниях $\Delta r \gg \Lambda$ от любого анизотропного источника. Представить функцию распределения в виде

$$F(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p},t) = \frac{1}{4\pi}\left[N(\boldsymbol{r},p,t) + \frac{3}{v^2}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},p,t)\right] \tag{15.163}$$

где

$$N(\boldsymbol{r},p,t)=\int F(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p},t)d\Omega_p,\quad \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},p,t)=\int \boldsymbol{v}F(\boldsymbol{r},\boldsymbol{p},t)d\Omega_p \tag{15.164}$$

соответственно изотропная часть функции распределения и плотность потока частич с заданной энергией, причем $J \ll vN$. Получить замкнутое уравнение для $N(\boldsymbol{r},p,t)$.

Решение. Подставим (15.163) в уравнение (15.161) и выделим члены, не зависящие от углов импульса и члены, пропорциональные $\boldsymbol{p}/p$. Это даст два уравнения:

$$\frac{\partial N}{\partial t}+\nabla\cdot\boldsymbol{J}=0 \tag{15.165}$$

$$\frac{\Lambda}{v}\frac{\partial \boldsymbol{J}}{\partial t}+\boldsymbol{J}+\frac{\Lambda}{R_0}\boldsymbol{b}_0\times\boldsymbol{J}=-\frac{v\Lambda}{3}\nabla N,\quad \boldsymbol{b}_0=\frac{\boldsymbol{B}_0}{B_0} \tag{15.166}$$

Первое слагаемое в уравнении (15.166) можно оценить как $(\Lambda/v)(J/t)\approx\approx(\tau_s/t)\,J$, где $\Lambda/v=\tau_s$ - время изотропизации частиц. Анизотропия функции распределения будет малым эффектом на временах $t\gg\tau_s$, когда рассмотренное слагаемое можно опустить. Из оставшегося уравнения находим связь между плотностью потока и градиентом концентрации:

$$J_\alpha=-\kappa_{\alpha\beta}\nabla_\beta N,\quad \text{где}\quad \kappa_{11}=\kappa_{22}=\kappa_\perp=\frac{\kappa_\parallel R_0^2}{R_0^2+\Lambda^2}$$
$$\kappa_{33}=\frac{v\Lambda}{3}=\kappa_\parallel,\quad \kappa_{12}=-\kappa_{21}=\kappa_H=\frac{\kappa_\parallel\Lambda R_0}{R_0^2+\Lambda^2} \tag{15.167}$$

Здесь ось с номером 3 направлена вдоль поля $\boldsymbol{B}_0$.
Тензор диффузии анизотропен из-за присутствия крупномасштабного магнитного поля. Структура его такая же, как у тензора электропроводности плазмы во внешнем магнитном поле (см. задачу 7.30). Недиагональные компоненты κ_H описывают эффект закручивания частиц внешним магнитным полем (эффект Холла). При $B_0\to 0\,(R_0\to\infty)$ диффузия становится изотропной: $\kappa_{\alpha\beta}=\kappa\delta_{\alpha\beta},\kappa=\kappa_\perp=\kappa_\parallel=v\Lambda/3,\kappa_H=0$. При $R_0\ll\Lambda$ тензор становится сильно анизотропным:

$$\kappa_\perp\approx\kappa_\parallel\left(\frac{R_0}{\Lambda}\right)^2,\quad \kappa_H\approx\kappa_\parallel\frac{R_0}{L},\quad \kappa_\perp\ll\kappa_H\ll\kappa_\parallel \tag{15.168}$$

При подстановке плотности тока (15.167) в уравнение непрерывности (15.165) получаем в общем случае уравнение анизотропной диффузии:

$$\frac{\partial N}{\partial t}=\nabla_\alpha\kappa_{\alpha\beta}\nabla_\beta N \tag{15.169}$$

Пример 15.17. Для случая изотропной диффузии, $\kappa_{\alpha\beta}=\kappa\delta_{\alpha\beta}$, $\kappa=\text{const}$, получить уравнение диффузии с учетом слагаемого $(\Lambda/v)\partial J/\partial t$ в уравнении (15.166).

Решение. Дифференцируем равенство (15.165) по времени и подставляем в него производную

$$\frac{\partial \boldsymbol{J}}{\partial t}=-\frac{v}{\Lambda}(\boldsymbol{J}+\kappa\nabla N) \tag{1}$$

Затем для исключения $\nabla\cdot\boldsymbol{J}$ используем снова (15.165) и получаем уравнение диффузии со второй производной по времени:

$$\frac{\partial N}{\partial t}+\frac{\Lambda}{v}\frac{\partial^2 N}{\partial t^2}=\kappa\Delta N \tag{15.170}$$

Обсуждение эффектов, которые описывает уточненное уравнение диффузии (15.170), см. в задаче 15.39*.

Диффузия частиц в сильном магнитном поле. В естественных условиях турбулентное магнитное поле как правило характеризуется очень широким спектром масштабов. Например, в Галактике установлено существование турбулентности, максимальный масштаб которой имеет порядок величины 3×10^{20} см $= 100$ пк, а минимальный по крайней мере на 10 порядков меньше. Поэтому во многих случаях условие $R_0 \gg L_c$, которое мы использовали выше, не выполняется. Более реалистичным является условие

$$L_c \gg R_0 \gg l_m \tag{15.171}$$

где l_m - минимальный масштаб турбулентности, $R_0 = cp/eB_0$ - ларморов радиус частицы в квазиоднородном магнитном поле. Мы произведем для этого случая порядковые оценки компонент тензора диффузии. Более строгое рассмотрение на основе усреднения кинетического уравнения можно найти в книге Топтыгина (1983).

Если имеется непрерывный спектр масштабов турбулентных пульсаций в указанном интервале (рис. 15.9), то мелкомасштабные ($l < R_0$) и крупномасштабные ($l > R_0$) магнитные неоднородности будут действовать на частицу различным образом. Мелкомасштабные неоднородности будут вызывать рассеяние частицы и формировать ее транспортный пробег вдоль регулярного поля $\boldsymbol{B}_0$. Порядковую оценку этого пробега, $\Lambda_\parallel$, можно произвести по формуле (15.162), понимая в ней под L_c величину R_0, а под $\langle b^2 \rangle$ - турбулентное поле, которое создается мелкомасштабной ($R_0 \geqslant l \geqslant l_m$) частью спектра. Будем считать, что турбулентный спектр можно аппроксимировать степенной зависимостью от волнового числа с показателем ν:

$$\left\langle b^2 \right\rangle_k = (\nu - 1) \left\langle B_t^2 \right\rangle \frac{k_c^{\nu-1} dk}{k^\nu}, \quad \nu > 1 \tag{15.172}$$

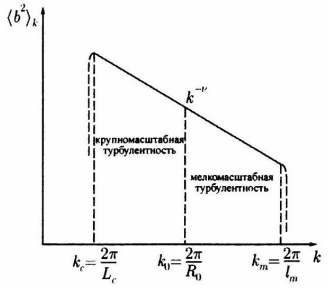


Рис. 15.9

где $\langle B_t^2 \rangle$ - полное турбулентное поле. Интегрируя (15.172) в пределах от k_0 до k_m ($k_0 \ll k_m$), находим

$$\left\langle b^2 \right\rangle = \int_{k_0}^{k_m} \left\langle b^2 \right\rangle_k dk = \left\langle B_t^2 \right\rangle \left(\frac{R_0}{L_c} \right)^{\nu-1}$$

и по формуле (15.162), заменяя в ней L_c на R_0, получаем

$$\Lambda_\parallel \approx \frac{B_0^2}{\langle B_t^2 \rangle} \left(\frac{R_0}{L_c} \right)^{2-\nu} L_c \tag{15.173}$$

Мы оценили пробег с точностью до неизвестного безразмерного множителя порядка единицы. Более точное выражение и другие модели турбулентности можно найти в [Топтыгин (1983)].

Качественное отличие (15.173) от (15.162) состоит в том, что в данном случае пробег частиц зависит от формы спектра неоднородностей. Зависимость от импульса вида $\Lambda_\parallel \dot{\sim} p^{2-\nu}$, полученная выше, означает увеличение пробега с ростом энергии при $\nu < 2$, постоянство пробега при $\nu = 2$ и уменьшение пробега с ростом энергии частицы при $\nu > 2$. Последний случай, по-видимому, мало реалистичен из-за отсутствия турбулентности с таким спектром. Продольный коэффициент диффузии выражается обычной формулой $\kappa_\parallel = v\Lambda_\parallel/3$. Напомним, что турбулентности Колмогорова-

Обухова соответствует $\nu = 5/3$, слабой МГД турбулентности $\nu = 3/2$. Значение $\nu = 2$ реализуется, если турбулентность создается ударными волнами и другими разрывами.

Поперечная диффузия в случайном крупномасштабном поле. Обратимся теперь к выяснению роли крупномасштабных магнитных неоднородностей. Поля с масштабами $l > R_0$ частица воспринимает как адиабатические и движется в таком поле с сохранением поперечного адиабатического инварианта $p_\perp^2/B = \text{const}$ (см. раздел 4.2). Ведущий центр частицы движется в основном вдоль силовой линии с небольшими поперечными дрейфами. Но силовая линия принадлежит результирующему крупномасштабному поля, которое складывается из поля $\boldsymbol{B}_0$ и крупномасштабного турбулентного поля (обозначим его через $\widetilde{\boldsymbol{B}}$). Силовые линии из-за наличия случайной составляющей поля будут иметь весьма сложную и запутанную форму. В частности, две близкие силовые линии, выходящие из одной области корреляции поля, через несколько длин корреляции могут существенно разойтись (рис. 15:10). Этот эффект носит название «блуждание магнитных силовых линий». При $\widetilde{B} \ll B_0$ он слабо сказывается на продольном (относительно $\boldsymbol{B}_0$) движении частиц, но может существенно увеличить их поперечную диффузию.

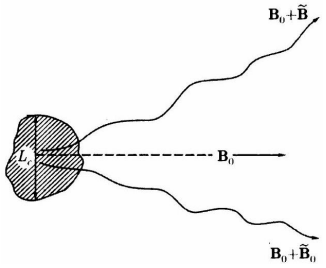


Рис. 15.10

Оценим по порядку величины коэффициент поперечной диффузии частиц за счет блуждания силовых линий. Рассмотрим два случая.

а) Пусть $\Lambda_\parallel \gg L_c$, частицы проходят область корреляции случайного поля, почти не рассеиваясь. Поперечный путь в пределах области корреляции (длина одного шага) $l_\perp \approx B_t L_c/B_0$, где $B_t \ll B_0$ - среднее значение случайного поля (почти вся энергия случайного поля принадлежит крупномасштабным гармоникам). За время t частица сделает $N = \left|v_\parallel\right| t/L_c$ шагов. При случайном блуждании путь $\Delta L_\perp$, пройденный частицей в поперечном направлении за время t, пропорционален корню квадратному из числа шагов: $\Delta L_\perp \approx l_\perp N^{1/2}$. Отсюда находим $(\Delta L_\perp)^2 \approx \left(\langle B_t^2\rangle / B_0^2\right) L_c \left|v_\parallel\right| t$. Сравнивая это выражение с $\overline{x^2} = 4\kappa_\perp t$ (см. задачу 15.38), находим $\kappa_\perp \approx \left(\langle B_t^2\rangle / B_0^2\right) L_c \left|v_\parallel\right|$. Это выражение еще следует усреднить по питч-углу. Более точный расчет на основе кинетического уравнения дает

$$\kappa_\perp = \frac{1}{3} v\Lambda_\perp, \quad \Lambda_\perp = \frac{\pi^{1/2}\Gamma(\nu/2)\,\langle B_t^2\rangle}{2\Gamma(\nu/2 - 1/2) B_0^2} L_c \tag{15.174}$$

Во втором случае, $\Lambda_\parallel \ll L_c$, частицы диффундируют через область корреляции. К сожалению, простую оценку поперечной диффузии, аналогичную вышеприведенной, для

этого случая произвести не удается, имеется несколько возможностей. Поэтому приведем здесь только результаты (см. [Быков и Топтыгин (1993)]). Если имеется слабая альвеновская турбулентность ($\epsilon = \left\langle \widetilde{B}^2 \right\rangle / B_0^2 \ll 1$), причем $v_A L_c \gg v\Lambda_\parallel$, то для поперечного коэффициента диффузии имеет место оценка

$$\kappa_\perp \approx \epsilon \kappa_\parallel \tag{15.175}$$

В интервале $v_A L_c \ll \kappa_\parallel \ll v_A L_c \epsilon^{-1}$ оценка меняется:

$$\kappa_\perp \approx \epsilon v_A L_c \tag{15.176}$$

Наконец, при $\kappa_\parallel \gg v_A L_c \epsilon^{-1}$ флуктуации можно считать квазистатическими, и коэффициент поперечной диффузии становится пропорциональным четвертой степени отношения случайного и регулярного полей:

$$\kappa_\perp \approx \epsilon^2 \kappa_\parallel \tag{15.177}$$

Коэффициенты поперечной диффузии, вызванные блужданием силовых линий, во многих случаях значительно превосходят коэффициент $\kappa_\perp \approx \kappa_\parallel \left(R_0/\Lambda_\parallel\right)^2$, обязанный эффекту рассеяния частиц мелкомасштабными неоднородностями. Если крупномасштабное случайное поле имеет тот же порядок величины, что и регулярное поле, то поперечный и продольный коэффициенты диффузии тоже становятся величинами одного порядка и диффузия приближается к изотропной.

Кинетическое уравнение в сильном магнитном поле. Если регулярное магнитное поле настолько сильное, что период ларморовского вращения быстрых частиц $T = 2\pi\mathscr{E}/ecB_0$ много меньше времени свободного пробега $\tau_s = \Lambda_\parallel / v$, то кинетическое уравнение записывают в приближении ведущего центра (см. подраздел «Приближенные методы» раздела 4.2). Такие частицы иногда называют «замагниченными». Функцию распределения частиц нужно усреднить по вращению вокруг силовых линий магнитного поля, в результате чего число ее аргументов уменьшится до шести: $F\left(p_\perp, p_\parallel, \boldsymbol{r}, t\right) p_\parallel = p\cos\vartheta, p_\perp = p\sin\vartheta, \vartheta$ - угол между импульсом и направлением магнитного поля (питч-угол). Приведем вид кинетического уравнения для этого случая:

$$\frac{\partial F}{\partial t} + v_\parallel \frac{\partial F}{\partial s} + \dot{p}_\perp \frac{\partial F}{\partial p_\perp} + \dot{p}_\parallel \frac{\partial F}{\partial p_\parallel} = \frac{1}{\sin\vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} b_s(\vartheta) \sin\vartheta \frac{\partial F}{\partial \vartheta} + \kappa_\perp \Delta_\perp F \tag{15.178}$$

Здесь s - координата, отсчитываемая вдоль магнитной силовой линии; слагаемые, содержащие $\dot{p}_\perp, \dot{p}_\parallel$, описывают изменение компонент импульса, вызванные медленным изменением крупномасштабного поля в пространстве и во времени; оператор с производными по углу отражает рассеяние частиц мелкомасштабными неоднородностями. Он представляет собой обобщение оператора $\widehat{\mathcal{O}}^2$, входящего в уравнение (15.161), причем $b_s(\vartheta)$ - коэффициент диффузии по питч-углу. Наконец, последнее слагаемое в (15.178) описывает поперечную диффузию, вызванную блужданием магнитных силовых линий.

Если магнитное поле можно считать статическим, то энергия частиц сохраняется, и производные по компонентам импульса в (15.178) можно преобразовать путем использования адиабатического инварианта $p_\perp^2 / B(s) = \text{const}$ (см. формулу (4.89)). Уравнение несколько упрощается и принимает вид

$$\frac{\partial F}{\partial t} + v\cos\vartheta \frac{\partial F}{\partial s} + \frac{v}{2B}\frac{\partial B}{\partial s} \sin\vartheta \frac{\partial F}{\partial \vartheta} = \frac{1}{\sin\vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} b_s(\vartheta) \sin\vartheta \frac{\partial F}{\partial \vartheta} + \kappa_\perp \Delta_\perp F \tag{15.179}$$

Переход от этого уравнения к диффузионному приближению дает уравнение анизотропной диффузии.

Учет электрического поля и изменение энергии частиц. В предыдущем рассмотрении мы в большинстве случаев учитывали только магнитное поле, считая среду неподвижной ($\boldsymbol{u} = 0$). Учет электрических полей, вызванных движением среды, приводит к изменению энергии частиц - их ускорению или замедлению.

Пример 15.18. Получить уравнение диффузионного типа из кинетического уравнения (15.159) с учетом движения среды. Считать скорость $\boldsymbol{u}$ медленной функцией координат ($\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})$ слабо изменяется на масштабах порядка L_c). Использовать представление функции распределения в виде (15.163) и учесть малый параметр $u/v \ll 1$ с точностью до членов второго порядка.

Решение. Повторяем вычисления примера 15.16, но учитываем скорость $\boldsymbol{u}$ во втором порядке:

$$\frac{1}{|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u}|} \approx \frac{1}{v}\left[1 + \frac{\boldsymbol{u}\cdot\dot{\boldsymbol{v}}}{v^2} + \frac{3(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v})^2}{2v^4} - \frac{u^2}{2v^2}\right] \tag{1}$$

Получаем два уравнения:

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \nabla\cdot\boldsymbol{J} = \frac{u^2}{9\kappa}\left[p^2\frac{\partial^2 N}{\partial p^2} + \left(1+\frac{v^2}{c^2}\right)p\frac{\partial N}{\partial p}\right] + \tag{2}$$
$$+ \frac{1}{3\kappa}\boldsymbol{u}\cdot\left(p\frac{\partial \boldsymbol{J}}{\partial p} + \frac{v^2}{c^2}\boldsymbol{J}\right) + \frac{1}{R_0 v}\left[\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{b}_0\right]\cdot\left[p\frac{\partial \boldsymbol{J}}{\partial p} + \left(1+\frac{v^2}{c^2}\right)\boldsymbol{J}\right]$$
$$\frac{\Lambda}{v}\frac{\partial \boldsymbol{J}}{\partial t} + \boldsymbol{J} + \frac{\Lambda}{R_0}\boldsymbol{b}_0\times\boldsymbol{J} = -\kappa\nabla N - \frac{p}{3}\frac{\partial N}{\partial p}\left(\boldsymbol{u} + \frac{\Lambda}{R_0}\boldsymbol{b}_0\times\boldsymbol{u}\right) \tag{3}$$

По сравнению с уравнениями (15.165), (15.166) добавилось значительное число новых членов. В частности, уравнение неразрывности (2) приобрело источник - правую часть. Это связано с изменением энергии частиц, которое вызвано действием электрического поля. Поэтому число частиц с заданной энергией теперь не остается постоянным.

Опустив снова первое слагаемое в уравнении (3), разрешаем это уравнение относительно J и получаем плотность потока частиц с заданным импульсом p:

$$J_\alpha = -\kappa_{\alpha\beta}\nabla_\beta N - \frac{p}{3}\frac{\partial N}{\partial p}u_\alpha \tag{15.180}$$

Кроме диффузионного слагаемого, в токе присутствует конвекционный член, пропорциональный $\boldsymbol{u}$ и возникающий из-за увлечения изотропизованных частиц движущимися магнитными неоднородностями. Другой вывод конвекционного слагаемого см. в задаче 15.40 .

При подстановке (15.180) в уравнение (2) все слагаемые, пропорциональные u^2, сокращаются, и остается относительно простое уравнение переноса:

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \nabla_\alpha\kappa_{\alpha\beta}\nabla_\beta N - \boldsymbol{u}\cdot\nabla N + \frac{p}{3}\frac{\partial N}{\partial p}\nabla\cdot\boldsymbol{u} \tag{15.181}$$

Дополнительные (по сравнению с (15.169)) члены, содержащие $\boldsymbol{u}$, описывают конвективный перенос частиц и изменение их энергии.

Ускорение частиц мелкомасштабными электрическими полями. Прежде, чем обсуждать физический смысл и свойства уравнения (15.181), произведем еще некоторое обобщение. Мы рассматривали до сих пор величину $\boldsymbol{u}$ как регулярную скорость среды, которая может быть функцией координат и времени, слабо изменяющейся на масштабах

L_c и на временах L_c/v. В действительности наряду с переносом магнитных неоднородностей общим крупномасштабным движением среды нередко происходит их относительное движение. Оно может быть вызвано флуктуациями общей скорости (солнечный или звездный ветры), либо законами эволюции самого магнитного образования (МГД волны малой амплитуды, вращательные разрывы, солитоны, слабые ударные волны и др.). Пространственные масштабы флуктуаций скорости будем считать не превышающими транспортного пробега частиц Λ.

Разброс скоростей магнитных неоднородностей эквивалентен появлению хаотических мелкомасштабных электрических полей, изменяющих энергию частиц (в уравнении (15.181) учтено только крупномасштабное электрическое поле). Поскольку скорости магнитных образований $v_{ph} < u \ll v$, то на длине корреляции энергия частицы изменяется на малую величину и эффект от ускорения проявляется на больших временах, когда частицы уже изотропизованы. Чтобы последовательно учесть эффект ускорения мелкомасштабными электрическими полями, нужно включить эти поля в схему усреднения, которая привела к уравнению (15.159). Чтобы избежать громоздких выкладок (их можно найти в книге Топтыгина (1983)), произведем здесь полуколичественную порядковую оценку эффекта.

Общий вид уравнения, учитывающего эффект ускорения хаотическими электрическими полями, можно установить на основе общефизических соображений. Случайные изменения импульсов частиц под действием слабых электрических полей приводят к диффузии частиц в импульсном пространстве. Этот эффект можно описать оператором такого же вида, каким в уравнении (15.181) описывается диффузия в обычном пространстве. Но ввиду изотропизации частиц достаточно оставить только производные, действующие на абсолютную величину импульса:

$$\nabla_\alpha \kappa_{\alpha\beta} \nabla_\beta N \to \frac{1}{p^2} \frac{\partial}{\partial p} D(p) \frac{\partial N}{\partial p} \tag{15.182}$$

Здесь через $D(p)$ обозначен коэффициент диффузии в пространстве импульсов. Его можно оценить следующим образом.

Оценка времени ускорения. Отвлечемся на время от регулярного движения среды и будем считать скорость $\boldsymbol{u}$ случайной величиной: $\langle \boldsymbol{u} \rangle = 0$. Частота столкновений частицы с магнитными неоднородностями (обратное время рассеяния) $\nu_s = 1/\tau_s = v/\Lambda$. Эта величина обусловлена случайной магнитной силой $\mathscr{F}_m = (e/c)[\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{b}]$ и пропорциональна ее квадрату, $\nu_s \propto \langle \mathscr{F}_m^2 \rangle$, так как первая степень силы обращается в нуль при усреднении: $\langle \mathscr{F}_m \rangle = 0$.

Случайная электрическая сила $\boldsymbol{F_e} = -(e/c)\,[\boldsymbol{u} \times (\boldsymbol{B}_0 + \boldsymbol{b})]$ тоже обращается в нуль при усреднении, $\langle \mathcal{F}_e \rangle = 0$. Это объясняется тем, что в неподвижной в целом плазменной среде не может быть крупномасштабного электрического поля. Поэтому частота ускорения частиц будет пропорциональна квадрату $\mathscr{F}_e$: $\nu_a \propto \langle \mathscr{F}_e^2 \rangle$. Соответственно, время ускорения $\tau_a = 1/\nu_a$ обратно пропорционально среднему квадрату силы. В итоге можно записать по порядку величины

$$\nu_a \approx \nu_s \frac{\langle \mathscr{F}_e^2 \rangle}{\langle \mathscr{F}_m^2 \rangle} \approx \frac{v}{\Lambda} \frac{\langle u^2 \rangle}{v^2} \frac{B_0^2 + b^2}{b^2} \tag{15.183}$$

При наличии общего регулярного движения вместо $\langle u^2 \rangle$ в формулу войдет случайная составляющая скорости, $\langle \Delta u^2 \rangle = \langle u^2 \rangle - \langle \boldsymbol{u} \rangle^2$. Коэффициент диффузии связан с частотой ускорения ν_a соотношением $\nu_a \approx D/p^2$, что приводит к оценке

$$D(p) \approx \frac{\langle \Delta u^2 \rangle\, p^2}{v \Lambda(p)} \frac{B_0^2 + b^2}{b^2} \tag{15.184}$$

Если среда представляет собой плазменные «облака», движущиеся в более разреженной плазме, так что $B_0 < b$, то $D(p) \approx \langle \Delta u^2 \rangle \, p^2/v\Lambda(p)$. В случае МГД волн малой амплитуды $b \ll B_0$, а скорость плазмы $u \approx v_{ph} b/B_0$, что дает $D(p) \approx v_{ph}^2 p^2/v\Lambda$. Здесь скорость возмущения v_{ph} определяется скоростью Альвена v_A и скоростью звука c_s. Особого рассмотрения требует случай, когда возмущение создается сильной ударной волной (см. ниже).

Уравнение переноса, учитывающее эффект ускорения частиц слабыми хаотическими электрическими полями, получается путем добавления в правую часть (15.181) слагаемого (15.182):

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \nabla_\alpha \kappa_{\alpha\beta} \nabla_\beta N - \boldsymbol{u}_0 \cdot \dot{\nabla} N + \frac{p}{3} \frac{\partial N}{\partial p} \nabla \cdot \boldsymbol{u}_0 + \frac{1}{p^2} \frac{\partial}{\partial p} D(p) \frac{\partial N}{\partial p} \tag{15.185}$$

где мы обозначили регулярную скорость среды через $\boldsymbol{u}_0$. Это уравнение позволяет описать диффузию частиц в пространстве, их конвективный перенос, а также изменение их энергии за счет регулярного движения среды и вследствие действия мелкомасштабных электрических полей.

Общие свойства уравнения переноса. Источник энергии. Для анализа общих свойств удобно переписать уравнение (15.185) в такой форме, чтобы в него входила дивергенция плотности потока частиц в шестимерном фазовом пространстве:

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \nabla \cdot \boldsymbol{J} + \frac{1}{p^2} \frac{\partial}{\partial p} p^2 S_p = 0 \tag{15.186}$$

Здесь $\boldsymbol{J}$ - плотность потока частиц с заданной энергией в координатном пространстве, определенная формулой (15.180), а

$$S_p = \frac{p}{3} \boldsymbol{u}_0 \cdot \nabla N \tag{15.187}$$

- проекция плотности потока частиц в импульсном пространстве на направление $\boldsymbol{p}$. Проекции этого потока на другие оси отсутствуют, так как частицы изотропизованы. Последнее слагаемое в левой части (15.186) представляет собой дивергенцию плотности потока S.

Проинтегрировав (15.186) по $p^2 dp$, получим уравнение неразрывности в координатном пространстве:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot \boldsymbol{j} = 0 \tag{15.188}$$

где $n(\boldsymbol{r}, t) = \int\limits_0^\infty N(\boldsymbol{r}, p, t) p^2 dp$ - концентрация частиц со всеми энергиями, $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}, t) = \int\limits_0^\infty \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}, p, t) p^2 dp$ - полная плотность потока частиц.

Проинтегрировав (15.186) по $\mathscr{E} p^2 dp$, получим уравнение баланса энергии:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \nabla \cdot \boldsymbol{q} = Q(\boldsymbol{r}, t) \tag{15.189}$$

Здесь

$$w(\boldsymbol{r}, t) = \int\limits_0^\infty \mathscr{E}(p) N(\boldsymbol{r}, p, t) p^2 dp = \overline{\mathscr{E}} n(\boldsymbol{r}, t) \tag{15.190}$$

- плотность энергии релятивистских частиц,

$$\boldsymbol{q}(\boldsymbol{r},t)=\int \boldsymbol{v}\mathscr{E}(p)F(\boldsymbol{r},p,t)d^3p=\int\limits_0^\infty \mathscr{E}(p)\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},p,t)p^2dp \tag{15.191}$$

- плотность потока энергии. Последняя состоит из плотности диффузионного потока

$$q_\alpha^{(d)}=-\int\limits_0^\infty \mathscr{E}(p)\kappa_{\alpha\beta}\nabla_\beta N(\boldsymbol{r},p,t)p^2dp \tag{15.192}$$

и плотности конвекционного потока

$$\boldsymbol{q}^{(c)}=(w+P)\boldsymbol{u}_0 \tag{15.193}$$

Величина

$$P(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{3}\int\limits_0^\infty pvN(\boldsymbol{r},p,t)p^2dp \tag{15.194}$$

представляет собой давление газа быстрых (возможно, релятивистских) частиц. В нерелятивистском случае $v=p/m$, и (15.194) можно выразить через среднее значение кинетической энергии $K=p^2/2m$ частиц: $P=(2/3)\bar{K}n$. В частности, если газ частиц находится в состоянии статистического равновесия, то $\bar{K}=(3/2)T$, где T - температура, и получаем известное выражение $P=nT$. В сильно релятивистском случае $pv\approx pc\approx\mathscr{E}$ и давление $P=\overline{\mathscr{E}}n/3$, что совпадает с давлением газа фотонов, если под $\overline{\mathscr{E}}$ понимать энергию фотона (см. задачу 6.27). Плотность конвекционного потока (15.193) можно записать в виде

$$\boldsymbol{q}^{(c)}=h(\boldsymbol{r},t)\boldsymbol{u}_0,\qquad \text{где}\qquad h=w+P \tag{15.195}$$

- плотность энтальпии газа быстрых частиц. Это согласуется с общим выражением для потока энергии в механике сплошных сред (см. [Ландау и Лифшиц, Гидродинамика]). Мы предполагаем, разумеется, что функция распределения энергичных частиц достаточно быстро убывает при больших импульсах, так что все интегралы сходятся и все энергетические величины конечны.

Величина $Q(\boldsymbol{r},t)$ в правой части (15.189) имеет смысл плотности источника энергии. Она состоит из двух слагаемых, которые интегрированием по частям можно привести к следующему виду:

$$Q(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{u}_0\cdot\nabla P+\int\limits_0^\infty N(\boldsymbol{r},p,t)\frac{d}{dp}\left(vp^2D(p)\right)dp \tag{15.196}$$

Первое слагаемое знакопеременно, оно зависит от угла между скоростью крупномасштабного движения и градиентом давления быстрых частиц. Второе слагаемое всегда неотрицательно, так как $N\geqslant 0$ и $d\left(vp^2D(p)\right)/dp>0$.

Последнее неравенство следует из формулы (15.184): $D(p)\sim p^2/v\Lambda(p)$, а $\Lambda(p)$ нарастает не быстрее, чем p^2 (см. (15.162)). Поэтому произведение $vp^2D(p)\sim p^\alpha$, где $\alpha\geqslant 2$, и интересующая нас производная положительна.

Пример 15.19. Некоторое облако быстрых частиц в начальный момент времени занимало ограниченный объем. Получить и интерпретировать изменение dE/dt полной

энергии частич. В среде имеются мелкомасштабные электрические поля и происходит крупномаситабное движение с неоднородной скоростью $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})$.

Решение. Интегрируем обе части уравнения (15.189) по всему пространству и находим соотношение

$$\frac{dE}{dt} = -\int P(\boldsymbol{r},t)\nabla\cdot\boldsymbol{u}d^3r + \int d^3r \int\limits_0^\infty N(\boldsymbol{r},p,t)\frac{d}{dp}\left(vp^2D(p)\right)dp \qquad (15.197)$$

Первое слагаемое в правой части содержит под интегралом дивергенцию крупномасштабной скорости, которая характеризует локальное расширение или сжатие среды: $\operatorname{div}\boldsymbol{u} > 0$ - расширение, $\operatorname{div}\boldsymbol{u} < 0$ - сжатие. В этом можно убедиться, проследив за малым макроскопическим элементом массы $M = \rho V$ движущейся среды. В процессе движения $M = \text{const}$, $dM/dt = 0$, откуда следует $(1/V)dV/dt = -(1/\rho)d\rho/dt$. Далее используем уравнение непрерывности для среды и получим $d\rho/dt = \partial\rho/\partial t + \boldsymbol{u}\cdot\nabla\rho = -\rho\nabla\cdot\boldsymbol{u}$, $(1/V)dV/dt = \nabla\cdot\boldsymbol{u}$.

Таким образом, первое слагаемое в (15.197) описывает увеличение энергии частиц (ускорение) при сжатии среды и замедление частиц при расширении среды. Эффект имеет ту же природу, что и изменение температуры идеального газа при адиабатическом изменении объема сосуда: газ охлаждается при расширении сосуда и нагревается при сжатии. В рассматриваемом случае адиабатическое изменение энергии частиц происходит за счет их взаимодействия с макроскопическими возбуждениями среды (магнитными неоднородностями).

Второе слагаемое в уравнении (15.197) описывает ускорение частиц за счет хаотических электрических полей (на другом языке - за счет столкновений с беспорядочно движущимися магнитными неоднородностями). Последние, будучи макроскопическими объектами, даже при малых скоростях из-за своей большой массы имеют энергию, намного превышающую энергию быстрой частицы. В процессе взаимодействия двух подсистем (частиц и неоднородностей) происходит выравнивание их температур, т. е. увеличение энергии частиц. Впервые модель ускорения частиц при их столкновениях с намагниченными облаками космической плазмы использовал для объяснения высокой энергии космических лучей выдающийся итальянский физик Э. Ферми (1949).

Подчеркнем еще раз, что все уравнения, которые были выведены выше, описывают распространение и ускорение только быстрых частиц, т.е. тех частиц среды, энергия которых в силу случайных неравновесных процессов оказалась в несколько раз больше средней энергии, приходящейся на одну частицу. Доля таких частиц весьма мала. В равновесных средах, в которых частицы подчиняются распределению Максвелла, доля частиц с энергиями заметно выше средней экспоненциально мала, и в таких средах ускоренные частицы не возникают. Но в неравновесных средах доля надтепловых частиц становится заметной, и эти частицы могут инжектироваться в ускорительный процесс.

Нужно отметить, что вопрос об инжекции частиц в тот или иной ускорительный механизм очень сложен и до сих пор не решен. Поэтому в большинстве случаев невозможно теоретически определить, какая доля частиц ускоряется в той или иной ситуации, и мы не будем заниматься здесь этим вопросом. В разных диапазонах энергии частиц могут действовать различные ускорительные механизмы, и результирующий процесс ускорения может быть многоступенчатым.

Ускорение частиц вблизи ударно

го фронта. Мы рассмотрим здесь процесс ускорения частиц вблизи МГД ударного фронта, который в настоящее время рассматривается большинством исследователей как

наиболее перспективный для объяснения происхождения основного количества релятивистских ускоренных частиц в нашей звездной системе - Галактике. Увеличение энергии частиц вблизи фронта вызвано двумя необходимыми условиями: наличием турбулентных магнитных полей (магнитных неоднородностей), которые вызывают случайные блуждания частиц, и наличием потока рассеивающих центров, скорость которого испытывает скачок (замедление) на ударном

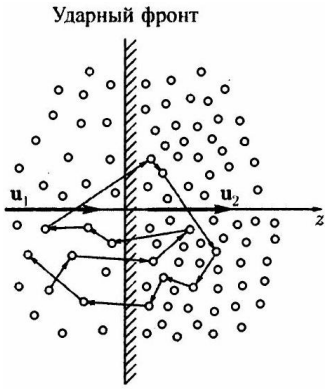


Рис. 15.11 фронте (рис. 15.11). В результате действия этих двух факторов частицы в окрестности фронта оказываются между двумя сближающимися стенками. Стенки реализуются потоками магнитных
неоднородностей и имеют эффективную толщину порядка Λ - транспортного пробега частиц. Чем большее число раз частица пересечет фронт, тем большую энергию она наберет в столкновениях с магнитными неоднородностями. Но рано или поздно любая частица сносится потоком вещества за фронт. Источником для увеличения энергии частиц служит газодинамическая энергия вещества, в котором возбуждена ударная волна.

Сделаем количественную оценку. Применим уравнение (15.197) к плоскому ударному фронту, пренебрегая турбулентным ускорением (т. е. вторым слагаемым). В одномерном случае на ударном фронте

$$\nabla \cdot \boldsymbol{u} = \frac{\partial u}{\partial z} = -\left(u_1 - u_2\right)\delta(z) = -\Delta u \delta(z) \tag{15.198}$$

поэтому из (15.197) получаем прирост энергии частиц вблизи фронта

$$\frac{dE}{dt} = \Delta u P(0,t) > 0 \tag{15.199}$$

Однако, ситуация становится более сложной в трехмерном случае, так как за ударным фронтом, на котором всегда происходит сжатие вещества, может следовать волна разрежения, в которой $\nabla \cdot \boldsymbol{u} > 0$. Баланс энергии принимает вид

$$\frac{dE}{dt} = \Delta u_n P(\boldsymbol{r},t)|_S - \int P(\boldsymbol{r},t)\nabla \cdot \boldsymbol{u} d^3 r \tag{15.200}$$

где первое положительное слагаемое соответствует ускорению на фронте, а второе слагаемое - адиабатическому замедлению частиц в волне разрежения. Результирующий эффект будет определяться суммарным действием обоих процессов.

Пример 15.20. На плоском стачионарном ударном фронте реализуется источник $Q = Q_0 \delta(z)\delta\left(p - p_0\right)/p_0^2$, инжектируюший частицы в режим ускорения ударной волной. Среда в окрестности фронта однородна. Вычислить энергетический спектр ускоренных частиц и их распределение в пространстве, пренебрегая турбулентным ускорением. Рассмотреть случаи релятивистских и нерелятивистских частич.

Решение. Пишем единое уравнение (15.185) для областей перед и за фронтом:

$$\frac{\partial}{\partial z}\kappa\frac{\partial N}{\partial z} - u\frac{\partial N}{\partial z} + \frac{p}{3}\frac{\partial N}{\partial p}\frac{du}{dz} + \frac{Q_0}{p_0^2}\delta(z)\delta\left(p-p_0\right) = 0 \tag{15.201}$$

Здесь функция распределения N должна быть непрерывна на фронте,

$$N_1 = N_2, \quad z = 0 \tag{15.202}$$

а производные $\partial N/\partial z$ всюду конечны. Но вторые производные имеют дельтаобразную особенность. Чтобы найти второе граничное условие, проинтегрируем обе части уравнения по малому интервалу Δz в окрестности фронта. Получим

$$\kappa_2\frac{\partial N_2}{\partial z} - \kappa_1\frac{\partial N_1}{\partial z} - \frac{p}{3}\frac{\partial N}{\partial p}\Delta u + \frac{Q_0}{p_0^2}\delta\left(p-p_0\right) = 0, \quad z = 0 \tag{15.203}$$

где через N обозначено общее значение функции распределения на фронте. В отсутствие источника полученное равенство выражает непрерывность потока частиц (15.180) на фронте. При наличии источника поток испытывает скачок.

Вне фронта уравнение (15.201) принимает вид

$$\kappa_{1,2}\frac{\partial^2 N_{1,2}}{\partial z^2} - u_{1,2}\frac{\partial N_{1,2}}{\partial z} = 0 \tag{15.204}$$

и имеет решение

$$N_{1,2}(z,p) = A_{1,2}(p)\exp\left(\frac{u_{1,2}z}{\kappa_{1,2}}\right) + D_{1,2}(p) \tag{15.205}$$

Для определения величин A, D используем граничные условия (15:202), (15.203) на фронте и граничные условия на бесконечности: при $z \to \infty$ функция распределения ограничена, а при $z \to -\infty$ она должна обращаться в нуль, так как все частицы сносятся потоком магнитных неоднородностей за фронт. Из условий на бесконечности находим

$$N_1(z,p) = A_1(p)\exp\left(\frac{u_1 z}{\kappa_1}\right), \quad N_2(p) = D_2(p) \tag{15.206}$$

а из условия на фронте, учитывая, что $A_1(p) = D_2(p)$ и решая простое дифференциальное уравнение первого порядка, получаем

$$N_2(p) = \frac{3Q_0}{\Delta u p_0^2}\left(\frac{p_0}{p}\right)^{3u_1/\Delta u}\Theta\left(p-p_0\right), \quad N_1(z,p) = N_2(p)e^{u_1 z/\kappa_1} \tag{15.207}$$

Переход к интенсивности $I(T)$ потока частиц, приходящегося на единицу площади, на один стерадиан и на единичный интервал кинетической энергии $T = \mathscr{E} - mc^2$ осуществляется по формуле

$$I(T)dT = vNp^2dp = Np^2dT \tag{15.208}$$

В области за фронтом получаем

$$I(T) = \frac{3Q_0}{\Delta u}\left(\frac{T_0^2 + 2mc^2T_0}{T^2 + 2mc^2T}\right)^{\gamma/2}, \quad \text{где} \quad \gamma = \frac{\sigma+2}{\sigma-1}, \quad \sigma = \frac{u_1}{u_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1} \tag{15.209}$$

Последняя величина - относительное сжатие вещества в ударной волне.
Если частицы ультрарелятивистские ($T \gg mc^2, T_0 \gg mc^2$), то спектр принимает простой вид

$$I(\mathscr{E})_1 = \frac{3Q_0}{\Delta u}\left(\frac{\mathscr{E}_0}{\mathscr{E}}\right)^{\gamma}, \quad \mathscr{E} \geqslant \mathscr{E}_0 \tag{15.210}$$

Для нерелятивистских частиц ($T, T_0 \ll mc^2$)

$$I(T) = \frac{3Q_0}{\Delta u}\left(\frac{T_0}{T}\right)^{\gamma/2}, \quad T \geqslant T_0 \tag{15.211}$$

Если же начальная энергия нерелятивистская ($T_0 \ll mc^2$), а конечная релятивистская ($T \gg mc^2$), то спектр принимает вид

$$I(\mathscr{E}) = \frac{3Q_0}{\Delta u}\frac{(2mc^2T_0)^{\gamma/2}}{\mathscr{E}^{\gamma}} \tag{15.212}$$

Отметим характерные особенности ускорения частиц ударной волной.

1. Спектр в рассмотренном одномерном случае при релятивистских энергиях имеет степенную форму с показателем γ, зависящим только от силы ударной волны, которая определяется относительным сжатием σ вещества на фронте. При $\sigma = 4$ (предельно сильная адиабатическая волна) $\gamma = 2$. Наблюдаемому у галактических космических лучей в широком диапазоне энергий $10 \leqslant \mathscr{E} \leqslant 10^6$ ГэВ значению $\gamma \approx 2.7$ соответствует $\sigma \approx 2.8$. При нерелятивистских энергиях показатель спектра вдвое меньше. Показатель спектра не зависит от свойств турбулентности в окрестности фронта.

2. Пространственная неоднородность в распределении быстрых частиц характеризуется масштабом

$$L = \frac{\kappa_1}{u_1} = \frac{v\Lambda_1}{3u_1} \tag{15.213}$$

где Λ - транспортный пробег частиц в направлении нормали к фронту. Этот масштаб для быстрых частиц, $v \gg u_1$, намного превосходит транспортный пробег Λ. Масштаб L задает то расстояние, на которое частицы,
побывавшие на фронте, могут возвращаться обратно вверх по потоку. Частицы из слоя толщиной L многократно пересекают фронт. Среднее число пересечений порядка v/u_1.
3. Реальные ударные фронты имеют конечную протяженность и существуют конечное время. Интервал энергий, для которого успевает установиться степенной спектр, зависит от времени существования ударной волны, размера фронта, рассеивающих свойств среды (коэффициентов диффузии κ_1, κ_2). В частности, ускорение выключается для частиц достаточно высоких энергий, для которых транспортный пробег Λ_1 приближается к характерному размеру фронта. По оценкам разных авторов, одиночный ударный фронт от взрыва сверхновой может ускорить протоны до энергий порядка $10^4 - 10^6$ ГэВ.
4. В случае предельно сильной ударной волны, $\sigma = 4$, показатель спектра ускоренных частиц $\gamma = 2$, и плотность энергии ускоренных частиц, $w = \int\limits_{\mathscr{E}_0}^{\delta_{\max}} \mathscr{E} I(\mathscr{E}) d\mathscr{E} \sim \ln \mathscr{E}_{\max}$ расходится логарифмически на верхнем пределе. Это свидетельствует о том, что переданная ускоренным частицам энергия может составить значительную долю от полной механической энергии ударной волны. В этом случае задачу об ускорении частиц следует решать самосогласованно, учитывая отбор энергии частицами от ударной волны и его влияние на структуру ударного фронта.

Ускорение при крупномасштабном стохастическом движении среды. Вернемся к уравнению переноса (15.185). Последнее слагаемое в нем описывает эффект ускорения частиц стохастическими движениями среды в масштабах, не превышающих транспортного пробега Λ. Но случайные движения могут иметь намного большие масштабы, $L_0 \gg \Lambda$. Как правило, крупномасштабные движения обладают большей энергией. Поэтому следует обобщить уравнение (15.185) на случай крупномасштабных стохастических движений. Для простоты дальнейшее рассмотрение произведем в предположении изотропии ($\kappa_{\alpha\beta} = \kappa\delta_{\alpha\beta}$) и статистической однородности среды.

Перепишем уравнение (15.185) в виде

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \kappa\Delta F - \boldsymbol{u}\cdot\nabla F + \frac{p}{3}\frac{\partial F}{\partial p}\nabla\cdot\boldsymbol{u} \tag{15.214}$$

где мы переобозначили функцию распределения через F и опустили за малостью эффект ускорения мелкомасштабными движениями. Считаем здесь
$\boldsymbol{u}$ крупномасштабной стохастической величиной:

$$\langle\boldsymbol{u}\rangle = 0, \quad \text{но} \quad \langle u_\alpha(\boldsymbol{r}_1,t_1)\,u_\beta(\boldsymbol{r}_2,t_2)\rangle = \tag{15.215}$$
$$= \int K_{\alpha\beta}(\boldsymbol{k},\tau)\exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})d^3k \neq 0, \quad \boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2, \quad \tau = t_1 - t_2$$

В статистически однородной и изотропной среде спектральный тензор скоростей $K_{\alpha\beta}$ имеет вид

$$K_{\alpha\beta}(\boldsymbol{k},\tau) = A(k,\tau)\delta_{\alpha\beta} + B(k,\tau)k_\alpha k_\beta/k^2 \tag{15.216}$$

Если среда сжимаема, то $\nabla\cdot\boldsymbol{u} \neq 0$ и

$$A(k,\tau) + B(k,\tau) \neq 0 \tag{15.217}$$

в противном случае эффект ускорения будет отсутствовать в рассматриваем приближении.

При усреднении уравнения (15.214) нужно различать два случая: $\tau_d \ll \tau_c$ и $\tau_d \gg \tau_c$, где $\tau_d \approx L_0^2/\kappa$ - время диффузионного распространения частиц на расстояние порядка основного масштаба турбулентности, $\tau_c \approx L_0/u$ - время их конвективного переноса на то же расстояние.

Случай

$$\tau_d/\tau_c \approx L_0 u/\Lambda v \ll 1 \tag{15.218}$$

Метод усреднения такой же, как при получении уравнения (15.159). Записываем

$$F = N + f, \quad N = \langle F\rangle, \quad |f| \ll N, \quad \langle f\rangle = 0 \tag{15.219}$$

где f - малая случайно-неоднородная добавка к усредненной функции распределения N. Из (15.214) получаем два уравнения:

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \kappa\Delta N - \langle\boldsymbol{u}\cdot\nabla f\rangle + \frac{p}{3}\frac{\partial}{\partial p}\langle f\nabla\cdot\boldsymbol{u}\rangle \tag{15.220}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} - \kappa\Delta f = \frac{p}{3}\frac{\partial N}{\partial p}\nabla\cdot\boldsymbol{u} \tag{15.221}$$

В последнем уравнении оставлены только первые порядки малых членов. Записываем его решение через функцию Грина:

$f = \int G(q,q')\,\nabla\cdot\boldsymbol{u}(q')\,dq'\frac{p}{3}\frac{\partial N}{\partial p}, \quad G(q,q') = \frac{1}{(4\pi\kappa\tau)^{3/2}}\exp\left[-\frac{(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')^2}{4\kappa\tau}\right],$

(15.222)

где $q=(\boldsymbol{r},t), \tau = t-t'$. Величину $\partial N/\partial p$ пишем вне интеграла, так как после усреднения ее изменение на длине L_0 мало. По порядку величины $f \approx NL_0u/v\Lambda$, и условие $|f| \ll N$ выполнено.

Слагаемое $\langle \boldsymbol{u}\cdot\nabla f\rangle$ в (15.220) преобразуем путем интегрирования по частям, пользуясь тем, что величины $G(q,q')$ и $\langle u_\alpha u'_\beta\rangle$ зависят от разностей $\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}', t-t'$

$$\langle \boldsymbol{u}\cdot\nabla f\rangle = -\int G(q,q')\,\langle(\nabla\cdot\dot{\boldsymbol{u}})\,(\nabla'\cdot\boldsymbol{u}')\rangle\,dq'\frac{p}{3}\frac{\partial N}{\partial p}$$

В результате последние два слагаемых в (15.220) приводятся к виду

$$-\langle \boldsymbol{u}\cdot\nabla f\rangle + \frac{p}{3}\frac{\partial}{\partial p}\langle f\nabla\cdot\boldsymbol{u}\rangle = \frac{1}{p^2}\frac{\partial}{\partial p}p^2D(p)\frac{\partial N}{\partial p}$$

где коэффициент диффузии по импульсам

$$D(p) = \frac{p^2}{9}\int\langle\nabla\cdot\boldsymbol{u}(q)\nabla'\cdot\boldsymbol{u}(q')\rangle\,G(q,q')\,dq' \tag{15.223}$$

Уравнение (15.220) принимает окончательный вид уравнения диффузии в пространстве координат и в пространстве импульсов:

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \kappa\Delta N + \frac{1}{p^2}\frac{\partial}{\partial p}p^2D(p)\frac{\partial N}{\partial p} \tag{15.224}$$

коэффициент диффузии по импульсам с помощью формул (15.216)-(15.217) может быть представлен в виде интеграла по турбулентному спектру

$$D = \frac{p^2}{9}\int k^2d^3k\int_0^\infty[A(k,\tau)+B(k,\tau)]e^{-k^2\kappa\tau}d\tau \tag{15.225}$$

Время корреляции скоростей в масштабе k^{-1} можно оценить как $\tau_k \approx (u_kk)^{-1}$, где u_k - значение скорости в масштабе k^{-1}. При степенном спектре $u_k \approx u\,(k_0/k)^{(\nu-1)/2}$, где ν - показатель спектра, u - скорость в основном масштабе $L_0 \sim k_0^{-1}$. При выполнении условия (15.218) корреляционное время τ_k велико по сравнению с временем распространения частиц $(k^2\kappa)^{-1}$ для всех масштабов вплоть до L_0. Поэтому в интеграле (15.225) в функциях $A(k,\tau), B(k,\tau)$ можно положить $\tau = 0$. В итоге интеграл по $d\tau$ легко вычисляется, и коэффициент диффузии приводится к виду

$$D(p) = \frac{p^2}{9\kappa}\int[A(k,0)+B(k,0)]d^3k = \frac{\langle u_{ef}^2\rangle\,p^2}{9\kappa} \tag{15.226}$$

где через $\langle u_{ef}^2\rangle$ обозначен интеграл, по порядку величины равный $\langle u^2\rangle$. Как видно, общая структура коэффициента диффузии близка к той, что дается формулой (15.184). Но в данном случае эффект ускорения значительно больше, так как крупномасштабная скорость $\langle u_{ef}^2\rangle$ намного превосходит мелкомасштабную величину $\langle\Delta u^2\rangle$.

Случай $\tau_d/\tau_c \approx L_0u/\Lambda v \gg 1$. Основную роль в пространственной диффузии частиц и их ускорении играет стохастическая конвекция. Расчет несколько усложняется (его можно найти в [Быков и Топтыгин (1993)]), но окончательное уравнение имеет прежнюю форму (15.224), если прирост энергии частицы на корреляционной длине составляет

малую долю ее кинетической энергии. Коэффициенты диффузии по порядку величины имеют значения

$$\kappa \approx uL_0, \quad D(p) \approx \frac{\langle u^2 \rangle p^2}{9L_0^2}\tau_c \approx \frac{up^2}{9L_0}$$

где $\tau_c \approx L_0/u$ - время конвекции.

Кроме изложенных выше, имеется большое число других процессов ускорения частиц в плазменных средах. Здесь были рассмотрены лишь те из них, которые, по-видимому, могут обеспечить наиболее высокие энергии ускоренных частиц и объяснить происхождение большей части энергичных частиц (космических лучей), наблюдаемых в Галактике.

Рекомендуемая литература: [Гинзбург и Сыроватский (1963); Топтыгин (1983); Березинский и др. (1990); Антонова и др. (1988); Бережко и др. (1988); Тверской (2004].

Задачи

15.37. Быстрые частицы распределены однородно в пространстве с однородным магнитным полем $\boldsymbol{B}_0$ и случайными магнитными неоднородностями. Их функция распределения в начальный момент $t = 0$ известна: $F(\theta, \phi, 0) = F_0(\theta, \phi)$, где θ, ϕ - углы, определяющие направление импульса в сферической системе координат. Пользуясь уравнением (15.161), вычислить функцию распределения при $t > 0$. Найти время изотропизации τ_s, за которое анизотропная часть функции распределения уменьшится в e раз.

15.38. Найти решение уравнения анизотропной диффузии (15.169) для мгновенного точечного источника частиц, $Q(\boldsymbol{r}, t) = \delta(\boldsymbol{r})\delta(t)$. Вычислить средние размеры облака частиц в трех направлениях для моментов времени $t > 0$.

15.39*. Построить функцию Грина уравнения диффузии (15.170) со второй производной по времени для безграничного трехмерного пространства. Проанализировать физический смысл полученного решения, сравнить его с решением для обычного уравнения диффузии, содержащего лишь первую производную по времени.

15.40. Пусть среда с магнитными неоднородностями движется со скоростью $\boldsymbol{u}$. Быстрые частицы в системе покоя среды описываются изотропной функцией распределения $F_0 = N(p_0)/4\pi$. Вычислить плотность потока частиц с заданным p в лабораторной системе.

15.41. Замагниченные частицы распространяются от точечного стационарного источника вдоль магнитной силовой линии в сторону убывания крупномасштабного поля, испытывая при этом рассеяние магнитными неоднородностями. Используя кинетическое уравнение (15.179), исследовать их функцию распределения в зависимости от питч-угла ϑ и расстояния s вдоль силовой линии. Ограничиться случаем малоуглового приближения. Сравнить результат с рассеянием частиц в однородной среде (задача 15.7$^\bullet$).

15.42. Релятивистские частицы ($v \approx c$) инжектированы в режим ускорения мелкомасштабными случайными электрическими полями. Использовав уравнение (15.181) для пространственно однородного случая ($\nabla_\beta N = 0, u_0 = 0$), вычислить функцию распределения при произвольных t. Найти среднее значение импульса $p(t)$. Начальное условие: $N(p, 0) = N_0\delta(p - p_0)/p_0^2, p_0$ - импульс инжекции. Транспортный пробег дается формулой (15.162).

15.43*. Сделать то же самое для случая, когда $\Lambda(p) = \text{const}$. Решение искать в виде

$$N(p,t) = N_0 \left(pp_0\right)^{-3/2} e^{-9\tau/4} f(x,\tau), \quad \text{где}$$
$$x = \ln \frac{p}{p_0}, \tau = \frac{t}{\tau_a}, \tau_a = \frac{p^2}{D(p)} = \text{ const.}$$

15.44. Пусть в случае, рассмотренном в предыдущей задаче, электрические поля выключаются через конечное время из-за затухания турбулентности. Этот процесс можно описать, предположив, что коэффициент диффузии $D(p,t)$ зависит от времени, причем $D \to 0$ при $t \to \infty$. Найти спектр ускоренных частиц после затухания турбулентности.

15.45. Релятивистские частицы ускоряются в области конечных размеров, в которой существует стационарная турбулентность, обеспечивающая транспортный пробег частиц $\Lambda = \text{const}$. Инжекция в режим ускорения происходит однородно по всей области, источник ускоряемых частиц
$Q(p) = Q_0 \delta\left(p - p_0\right)/p_0^2$. Вычислить стационарный спектр ускоренных частиц. Уход частиц из области ускорения учесть в приближении времени релаксации, добавив в уравнение слагаемое вида N/τ_d с нужным знаком, где τ_d - среднее время пребывания частицы в области ускорения (порядка времени диффузии через эту область).

15.46. Решить предыдущую задачу для сферической области радиуса a. Вычислить время релаксации τ_d из граничных условий. Искать сферически симметричное решение, зависящее от r и p. Во внешней области ускорение отсутствует, а коэффициент диффузии $\kappa = \text{const}$ в обычном пространстве такой же, как и в области ускорения.

15.47*. В однородной среде происходит турбулентное ускорение частиц с коэффициентом диффузии по импульсам вида $D(p,t) = (p/p_0)^\alpha D_0(t), \alpha \neq 2$, где $D_0(t) \to 0$ при $t \to \infty$. Частицы инжектируются в режим ускорения с импульсом p_0. Вычислить энергетический спектр ускоренных частиц после затухания турбулентности.

15.48. На плоском стационарном ударном фронте (см. пример 15.20) отсутствует инжекция частиц, но в набегающем на фронт потоке вещества имеются быстрые частицы с функцией распределения по импульсам $N_0(q)$. Вычислить спектр ускоренных частиц в окрестности фронта.

15.49*. Рассмотреть ускорение частиц стационарным сферически симметричным ударным фронтом, на котором происходит переход от сверхзвукового к дозвуковому звездному ветру. Принять следующую модель звездного ветра:

$$\kappa = \kappa_1 = \text{ const }, \quad u = u_1 = \text{ const} \quad \text{при} \quad r < r_0$$
$$\kappa = \kappa_2(r), \quad u = u_2 \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 \quad \text{при} \quad r > r_0$$

Фронт ударной волны расположен при $r = r_0$ и характеризуется скачком скорости $\Delta u = u_1 - u_2 > 0$. В дозвуковой области $r > r_0$ скорость среды убывает пропорционально r^{-2}, что соответствует расширению с постоянной плотностью. Источники частиц, инжектируемых в режим ускорения, задать в виде $Q(r,p) = (Q_0/4\pi r_0^2 p_0^2)\, \delta(p-p)\delta\left(r - r_0\right)$. Вычислить спектр ускоренных частиц по импульсам и их распределение в пространстве [6].

13.4.5 15.5. Answers and Solutions

15.1.

[06] Звездными ветрами обладает большинство наиболее активных звезд, у которых $u_1 \approx \approx (2 \div 3) \times 10^8$ cm/c, $r_0 \approx 3 \div 10$nk $\approx 10^{19} \div 3 \times 10^{20}$ cm. В солнечном ветре эти параметры намного скромнее: $u_1 \approx 4 \times 10^7$ cm/c, $r_0 \approx 10^{15}$ см (последняя величина еще окончательно не установлена).

$$\frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} = \left(\frac{Ze^2}{2pv}\right)^2 \frac{\left(1-\beta^2\cdot\sin^2\theta/2\right)}{\sin^4\theta/2}$$

Это выражение без множителя $\left(1-\beta^2\sin^2\theta/2\right)$ совпадает с формулой Резерфорда (см. задачу 4.67). Множитель дает релятивистскую спиновую поправку.
15.2.

$$\frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} = \left(\frac{Ze^2}{2pv}\right)^2 \frac{\left(1-\beta^2\sin^2(\theta/2)\right)}{\left(\sin^2\theta/2+\hbar^2/4p^2R^2\right)^2}$$

В приближении малых углов

$$\frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega} = \left(\frac{2Ze^2}{pv}\right)^2 \frac{1}{\left(\theta^2+\theta_0^2\right)^2}, \quad \theta_0 = \hbar/pR$$

15.3.

$$d\sigma = \frac{2\pi e^4}{m_e^2c^2v^2}\frac{d\gamma_e}{(\gamma_e-1)^2}\left[1-\beta^2\frac{\gamma_e-1}{\gamma_m-1}+\frac{m_e^2c^4}{2\mathscr{E}^2}(\gamma_e-1)^2\right]$$

Здесь γ_e - релятивистский фактор электрона отдачи, γ_m - его максимальное значение, v и $\mathscr{E}$ - скорость и полная релятивистская энергия налетающей частицы.
15.4.

$$d\sigma = \frac{2\pi e^4}{m_e^2c^4}\frac{d\gamma_e}{\gamma^2-1}\left\{\frac{(\gamma-1)^2\gamma^2}{(\gamma_e-1)^2(\gamma-\gamma_e)^2}-\frac{2\gamma^2+2\gamma-1}{(\gamma-1)(\gamma-\gamma_e)}+1\right\}$$

Здесь γ - релятивистский фактор быстрого электрона, γ_e и $\gamma-\gamma_e+1$ - релятивистские факторы двух неразличимых электронов после столкновения. Процесс описывается двумя диаграммами Фейнмана (рис. 15.12).
15.5.

$$\left.\frac{d\mathscr{E}}{dz}\right|_{\gamma_e>\gamma_0} = -n_e\int\limits_{\gamma_0}^{\gamma/2}(\gamma_e-1)\,m_ec^2d\sigma = -\frac{2\pi e^4n_e}{m_ev^2}\left[\ln\frac{\gamma}{4(\gamma_0-1)}+\frac{9}{8}\right]$$

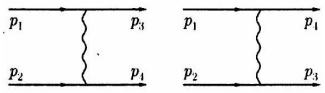


Рис. 15.12
15.6.

$$dI(\omega) = \frac{e^2}{c^2v}\left(1-\frac{c^2}{n^2(\omega)v^2}\right)\omega d\omega, \quad d\theta = \frac{c}{n^2(\omega)v\sin\theta}\frac{dn}{d\omega}d\omega$$

15.7. Функция распределения удовлетворяет уравнению диффузии по углам

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{q}{4}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial\vartheta_x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial\vartheta_y^2}\right) \tag{1}$$

и граничному условию $f(\vartheta_x,\vartheta_y,z)|_{z=0} = \delta(\vartheta_x)\,\delta(\vartheta_y)$ (нормировка на единицу). Уравнение диффузии рассматривалось в примере 10.6, и его решение можно записать по аналогии:

$$f\left(\vartheta_x, \vartheta_y, z\right) = \frac{1}{\pi q z} \exp\left\{-\frac{\vartheta_x^2 + \vartheta_y^2}{qz}\right\} \tag{2}$$

откуда

$$\overline{\vartheta^2}(z) = qz \tag{3}$$

(интегрируем в бесконечных пределах ввиду быстрой сходимости интеграла). Из условия $\overline{\vartheta^2}(l) \approx 1$ находим длину изотропизации: $l \approx q^{-1}$. Длина замедления L оценивается из формул (15.17), (15.18) как

$$L \approx \frac{T}{dT/dz}, \quad \text{где} \quad T = \mathscr{E} - mc^2 \tag{4}$$

• кинетическая энергия, причем $d\mathscr{E}/dz = dT/dz$. Отношение длин

$$\frac{l}{L} \approx \frac{dT/dz}{qT} \approx \frac{(pv)^2}{ZTm_e v^2} \tag{5}$$

если опустить отношение логарифмических множителей, считая их порядка единицы. В нерелятивистском случае имеем $l/L \approx T/Zm_e v^2 \approx m/Zm_e$, где m - масса быстрой частицы. Тяжелые частицы замедляются, почти не
рассеиваясь, даже в веществе с большим Z. У нерелятивистского электрона длина изотропизации в Z раз меньше, чем длина замедления. В ультрарелятивистском случае имеем $l/L \approx T/Zm_e c^2$, т. е. тяжелые частицы опять замедляются почти не рассеиваясь.
15.8.

$$f = \frac{12}{\pi^2 q^2 z^4} \exp\left\{-\frac{4}{qz}\left(\vartheta^2 + \frac{3\rho^2}{z^2} - \frac{3\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{\vartheta}}{z}\right)\right\}, \quad \overline{\rho^2}(z) = \frac{qz^3}{3} = \frac{1}{3} z^2 \overline{\vartheta^2}(z)$$

15.9. Пусть ультрарелятивистский электрон испускает тормозной квант во внешнем статическом поле, которое характеризуется потенциальной энергией $U(\boldsymbol{r})$. Будем учитывать по теории возмущений как взаимодействие электрона с внешним полем, так и его взаимодействие с квантованным полем излучения. Вероятность процесса должна вычисляться по теории возмущений второго порядка с промежуточными состояниями (см. пример 6.18).

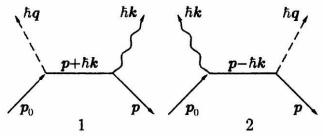


Рис. 15.13

Фейнмановские диаграммы тормозного излучения отличаются от диаграмм эффекта Комптона заменой линии начального кванта на линию внешнего поля (штриховая линия на рис. 15.13 ; импульс $\hbar\boldsymbol{q}$ передается внешнему полю). Производим вычисления по той же схеме, которая использовалась при рассмотрении комптон-эффекта. Вероятность перехода в единицу времени, соответствующая диаграммам рис. 15.13, дается выражением (ср. с формулой (1) из примера 6.18)

$$dw_{fi} = \frac{2\pi}{\hbar}\left|\sum_l \left\{\frac{\langle f|\widehat{V}|l\rangle\langle l|\widehat{U}|i\rangle}{\epsilon_i - \epsilon_l'} + \frac{\langle f|\widehat{U}|l\rangle\langle l|\widehat{V}|i\rangle}{\epsilon_i - \epsilon_l''}\right\}\right|^2 \times \tag{1}$$
$$\times\, \delta\left(\epsilon_i - \epsilon_f\right) \frac{\mathcal{V} k^2 dk d\Omega_k}{(2\pi)^3} p^2 dp d\Omega_p$$

Здесь $\widehat{V}$ - оператор (6.126) взаимодействия релятивистского электрона с квантованным электромагнитным полем, $\widehat{U} = U(\boldsymbol{r})$ - потенциальная энергия электрона во внешнем поле. В вершине с испусканием фотона импульс сохраняется, так как все частицы описываются плоскими волнами. В вершине с внешним полем импульс электрона не сохраняется, внешнему полю передается импгульс $\hbar\boldsymbol{q}$. Энергия начального состояния - это энергия электрона, кванты отсутствуют:

$$\epsilon_i = \mathscr{E}\left(p_0\right) = \sqrt{c^2 p_0^2 + m_e c^4} \tag{2}$$

В конечном состоянии имеется электрон с положительной энергией и испущенный фотон:

$$\epsilon_f = \mathscr{E}(p) + \hbar\omega = \sqrt{c^2 p^2 + m_e c^4} + \hbar\omega \tag{3}$$

Энергия промежуточного состояния ϵ_l' соответствует диаграмме 1. В этом состоянии имеется только электрон с неопределенным знаком энергии:

$$\epsilon_l' = \mathscr{E}_\lambda\left(p'\right) = \pm\sqrt{c^2 p^2 + m_e c^4}, \quad \boldsymbol{p}' = \boldsymbol{p} + \hbar\boldsymbol{k}, \quad \epsilon_i - \epsilon_l' = \mathscr{E}\left(p_0\right) - \mathscr{E}_\lambda\left(p'\right) \tag{4}$$

где индекс λ, как и в примере 6.18, нумерует два знака энергии и два спиновых состояния для каждого биспинора, описывающего промежуточные состояния электрона.

Диаграмме 2 соответствует энергия промежуточного состояния ϵ_l'', в котором имеются электрон и испущенный фотон:

$$\begin{gathered}\epsilon_l'' = \hbar\omega + \mathscr{E}_\lambda\left(p''\right) = \hbar\omega \pm \sqrt{c^2 p''^2 + m_e c^4}, \quad \boldsymbol{p}'' = \boldsymbol{p}_0 - \hbar\boldsymbol{k} \\ \epsilon_i - \epsilon_l'' = \mathscr{E}(p) - \mathscr{E}_\lambda\left(p''\right) - \hbar\omega\end{gathered} \tag{5}$$

Число квантовых состояний в формуле (1) записано как произведение величин, относящихся к фотону и к электрону, причем биспиноры нормированы на дельта-функцию от импульса.

Матричные элементы в (1) имеют вид

$$\langle l|\widehat{U}|i\rangle = \frac{U_{\boldsymbol{q}}}{(2\pi\hbar)^3}\left\langle u_\lambda'|u_0\right\rangle, \quad \langle f|\widehat{U}|l\rangle = \frac{U_{\boldsymbol{q}}}{(2\pi\hbar)^3}\left\langle u|u_\lambda''\right\rangle \tag{6}$$

$$\text{где} \quad U_{\boldsymbol{q}} = \int U(\boldsymbol{r})\exp(i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r})d^3r \tag{7}$$

$$\begin{gathered}\langle f|\widehat{V}|l\rangle = -e\sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{\mathcal{V}\omega}}\langle u|\widehat{\alpha}\cdot\boldsymbol{e}^*\left|u_\lambda'\right\rangle\delta\left(\boldsymbol{p}' - \boldsymbol{p} - \hbar\boldsymbol{k}\right) \\ \langle l|\widehat{V}|i\rangle = -e\sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{\mathcal{V}\omega}}\left\langle u_\lambda''\right|\widehat{\alpha}\cdot\boldsymbol{e}^*\left|u_0\right\rangle\delta\left(\boldsymbol{p}'' - \boldsymbol{p}_0 + \hbar\boldsymbol{k}\right)\end{gathered} \tag{8}$$

При такой записи матричных элементов сумма по l в (1) должна включать суммирование по четырем значениям λ и интегрирование по промежуточным импульсам $\boldsymbol{p}', \boldsymbol{p}''$ электрона.

Дальнейший расчет, включающий также суммирование по поляризациям частиц в конечном состоянии и усреднение по начальным состояниям электрона, производится так же, как в примере 6.18. Алгебраические выкладки достаточно трудоемки, но каждый читатель получит полезный навык вычислений, если произведет их. Подробности вычислений можно найти в книге Гайтлера (1956) и особенно у Мак-Коннела (1962).

Приведем значение сечения, проинтегрированного по углам вылета кванта и вторичного электрона, для неэкранированного кулоновского поля ядра $U(r) = -Ze^2/r$:

$$d\sigma_r(\omega) = Z^2\alpha r_0^2 \frac{d\omega}{\omega}\frac{p}{p_0}\left\{\frac{4}{3} - 2\mathscr{E}_0\mathscr{E}\frac{p^2+p_0^2}{c^2p^2p_0^2} + m_e^2c\left(\frac{l_0\mathscr{E}}{p_0^3} + \frac{i\mathscr{E}_0}{p^3} - \frac{cl_0l}{p_0p}\right) + \right.$$
$$+\left[\frac{8\mathscr{E}_0\mathscr{E}}{3c^2p_0p} + \frac{(\hbar\omega)^2\left(\mathscr{E}_0^2\mathscr{E}^2 + c^4p_0^2p^2\right)}{c^6p_0^3p^3} + \right. \tag{9}$$
$$\left.\left.+\frac{m_e^2c^2\hbar\omega}{2p_0p}\left(\frac{\mathscr{E}_0\mathscr{E}+c^2p_0^2}{c^3p_0^3}l_0 - \frac{\mathscr{E}_0\mathscr{E}+c^2p^2}{c^3p^3}l + \frac{2\hbar\omega\mathscr{E}_0\mathscr{E}}{c^4p_0^2p^2}\right)\right]L\right\}$$

где

$$L = 2\ln\frac{\mathscr{E}_0\mathscr{E} + c^2p_0p - m_e^2c^4}{m_ec^2\hbar\omega}, \quad l_0 = 2\ln\frac{\mathscr{E}_0 + cp_0}{m_ec^2}, \quad l = 2\ln\frac{\mathscr{E}+cp}{m_ec^2} \tag{10}$$

Это выражение для сечения справедливо при любых значениях энергий электрона и кванта, допускаемых законом сохранения.

15.11. Определим из уравнений Максвелла монохроматические компоненты электромагнитного поля частицы, движущейся с постоянной скоростью $v = \text{const}$, в цилиндрической системе координат:

$$E_{\omega z}(\boldsymbol{r}, t) = \frac{iq\omega}{\pi c^2}\left(1 - \frac{1}{\beta^2\varepsilon}\right)K_0(s\rho)e^{i\omega(z/v-t)} \tag{1}$$

$$B_{\omega\alpha}(\boldsymbol{r}, t) = \frac{iq\omega}{\pi c^2}K_1(s\rho)e^{i\omega(z/v-t)}, \quad s^2 = \frac{\omega^2}{v^2} - \frac{\omega^2}{c^2\varepsilon(\omega)}, \operatorname{Re} s > 0$$

где $\varepsilon(\omega)$ дается формулой (4) примера 15.6 (детали вычислений можно найти в задаче 15.13*). С помощью этих формул вычисляем потери энергии частицей на единицу пути:

$$-\frac{d\mathscr{E}}{dz} = 2\pi b\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{c}{4\pi}[\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}]_\rho dt = -2\pi cb\operatorname{Re}\int\limits_0^\infty B_{\omega\alpha}^* E_{\omega z}d\omega \tag{2}$$

Радиус b, как следует из соотношений неопределенностей, должен быть порядка комптоновской длины Λ_C; при этом $|bs| \ll 1$. Подставив в (2) компоненты (1), получим спектральную мощность потерь на единицу длины:

$$-\frac{d\mathscr{E}_\omega}{dzd(\hbar\omega)} = \hbar\omega n(\omega)\frac{\Gamma(\omega)}{c} \tag{3}$$

где

$$n(\omega) = \frac{2}{\pi}\frac{q^2}{\hbar c}\frac{1}{\omega}\ln\frac{m_ec^2}{\hbar\omega\left[\Gamma^2/\omega^2 + \left(\omega_p^2/\omega^2 + \gamma^{-2}\right)^2\right]^{1/4}} \tag{4}$$

- спектральная плотность фотонов, эквивалентных собственному полю частицы. При получении этой формулы предполагалось, что входящий в нее логарифм много больше единицы; величина под знаком логарифма определена с точностью до множителя порядка единицы. В отсутствие среды ($\omega_p = \Gamma = 0$) величина (4) переходит в спектральную плотность (6.129) эквивалентных фотонов релятивистской частицы в вакууме.

Результат (3) имеет простой смысл: произведение $\Gamma_p n(\omega)d\omega$ представляет собой число квантов, поглощаемых в единицу времени из собственного поля частицы за счет образования пар, или, что то же самое, число пар с суммарной энергией частиц $\hbar\omega$, образуемых полем частицы. Подробнее эта тема освещена в работе Терновского (1960).

Произведение $\Gamma_p n(\omega)d\omega$ дает число квантов, поглощаемых за счет комптон-эффекта. При этом образуются другие кванты меньшей энергии, т. е. происходит тормозное излучение квантов электронами среды.

15.12. Излучение электронов среды можно найти по методу задачи 6.81. При $\hbar\omega \gg m_e c^2$, когда имеют место эффекты Комптона и рождения пар, в качестве спектральной плотности эквивалентных фотонов следует использовать формулу (4) предыдущей задачи. Произведя вычисления, получим

(1) $-\left.\frac{d\mathscr{E}_\omega}{dzd(\hbar\omega)}\right|_e = \frac{8}{3}Zn_a\frac{q^2}{\hbar c}\frac{m_e c^2}{\hbar\omega}\ln\frac{m_e c^2}{\hbar\omega\left[\Gamma^2/\omega^2+\left(\omega_p^2/\omega^2+\gamma^{-2}\right)^2\right]^{1/4}}$.

В области спектра, где $\Gamma_C \gg \Gamma_p$, выражение под знаком логарифма упрощается. Если к тому же $\omega \ll \gamma\omega_p$, то, вычислив спектральную плотность с использованием комптоновского сечения из задачи 6.80, получим

$$-\left.\frac{d^2\mathscr{E}_\omega}{dzd(\hbar\omega)}\right|_e = -\frac{16}{3}Z\alpha n_a r_0^2\left\{1-\frac{\hbar\omega}{m_e c^2}+\left(\frac{\hbar\omega}{m_e c^2}\right)^2\right\}\ln\frac{m_e c^2}{\hbar\omega_p}, \quad \hbar\omega < \frac{1}{2}m_e c^2 \tag{2}$$

(3)

$-\left.\frac{d^2\mathscr{E}_\omega}{dzd(\hbar\omega)}\right|_e = -\frac{8}{3}Z\alpha n_a r_0^2\frac{m_e c^2}{\hbar\omega}\left\{1-\frac{m_e c^2}{4\hbar\omega}+\left(\frac{m_e c^2}{4\hbar\omega}\right)^2\right\}\ln\frac{m_e c^2}{\hbar\omega_p}, \hbar\omega > \frac{1}{2}m_e c^2$.

В случае тяжелой частицы ее собственное излучение сильно подавлено большой массой, и излучают только электроны среды. Излучение первичного электрона или позитрона при $\omega \gg \gamma\omega_{0e}$ в отсутствие эффекта Ландау-Померанчука дается формулой Бете-Гайтлера (15.83), а при $\omega \ll \gamma\omega_{0e}$ - формулой Тер-Микаэляна (15.91). Сравнивая указанные величины с (1), находим, что при $\omega \gg \gamma\omega_{0e}$ излучение первичного электрона превышает излучение электронов среды по меньшей мере в $\approx Z$ раз. Но при $\omega \ll \gamma\omega_{0e}$ отношение первичного и вторичного излучений меняется и имеет порядок величины $Z\left(\omega/\gamma\omega_{0e}\right)^2$. Оно может быть значительно меньше единицы, и главный вклад будут давать электроны среды. Это связано с подавлением первичного тормозного излучения поляризацией среды. Рассмотрение этих вопросов совместно с эффектом Ландау-Померанчука см. в [Топтыгин (1964)].

15.13. Разложив векторы поля в интеграл Фурье по координатам и времени:

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{R},t) = \int \mathscr{E}(\boldsymbol{k},\omega)e^{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{R}-\omega t)}\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{d\omega}{2\pi}\cdots$$

получим из уравнений Максвелла систему алгебраических уравнений относительно амплитуд Фурье:

$$\begin{cases} \kappa\boldsymbol{n}\times\mathscr{E}(\boldsymbol{k},\omega) = \mathscr{H}(\boldsymbol{k},\omega), \\ \kappa\boldsymbol{n}\times\mathscr{H}(\boldsymbol{k},\omega) = -\varepsilon(\omega)\boldsymbol{E}(\boldsymbol{k},\omega) - i\dfrac{8\pi^2 e\boldsymbol{v}}{\omega^2}\delta\left(\dfrac{\kappa}{c}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}-1\right), \\ \kappa\varepsilon(\omega)\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{k},\omega) = -i\dfrac{8\pi^2 ec}{\omega^2}\delta\left(\dfrac{\kappa}{c}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}-1\right) \\ \kappa\boldsymbol{n}\cdot\mathscr{H}(\boldsymbol{k},\omega) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Здесь $\mathscr{H}(\boldsymbol{k},\omega)$ - амплитуда Фурье магнитного поля, $\boldsymbol{k} = \omega\kappa\boldsymbol{n}/c, \kappa$ - параметр, выражающийся через ω и $\mathbf{k},\mathbf{n}$ - единичный вектор. При выводе (1) нужно учесть, что

амплитуда Фурье функции $\delta(\boldsymbol{R}-\boldsymbol{v}t)$ равна $2\pi\delta(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}-\omega)$ и что $\delta(\alpha x)=(1/|\alpha|)\delta(x)$. Из системы (1) определяются $\mathscr{E}$ и $\mathscr{H}$:

$$\left\{\begin{array}{l}\mathscr{E}(\boldsymbol{k},\omega)=-i\frac{8\pi^2 ec}{\omega^2}\cdot\frac{\kappa\boldsymbol{n}-(\boldsymbol{v}/c)\varepsilon}{\varepsilon(\kappa^2-\varepsilon)}\delta\left(\frac{\kappa}{c}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}-1\right)\\ \mathscr{H}(\boldsymbol{k},\omega)=i\frac{8\pi^2 e\kappa}{\omega^2}\cdot\frac{\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{v}}{\kappa^2-\varepsilon}\delta\left(\frac{\kappa}{c}\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}-1\right)\end{array}\right. \tag{2}$$

Для определения полей нужно произвести обратное преобразование Фурье. Начнем с вычисления $E_z(\boldsymbol{R},t)$. Как следует из (2):

$$\mathscr{E}_z(\boldsymbol{k},\omega)=-i\frac{8\pi^2 ec}{\omega^2}\cdot\frac{\kappa\cos\theta-\beta\varepsilon}{\varepsilon\left(\kappa^2-\varepsilon\right)}\delta(\beta\kappa\cos\theta-1)$$

поэтому

$$E_z(\boldsymbol{R},t)=-\frac{ie}{2\pi^2c^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\omega d\omega e^{-i\omega t}\int\limits_0^{\infty}\kappa^2 d\kappa\int\frac{\kappa\cos\theta-\beta\varepsilon}{\varepsilon\left(\kappa^2-\varepsilon\right)}\times \tag{3}$$

$\times\exp\left\{i\frac{\omega}{c}\kappa[r\sin\theta\cos(\Phi-\varphi)-z\cos\theta]\right\}\delta(\beta\kappa\cos\theta-1)\sin\theta d\theta d\Phi$.
Здесь через $\boldsymbol{r}$ обозначена составляющая $\boldsymbol{R}$ в плоскости xy, φ - угол между $\boldsymbol{r}$ и осью Ox, $\beta=v/c$, θ и Φ - полярные углы $\boldsymbol{n}$.

Интеграл по Φ выражается через функцию Бесселя J_0 от аргумента $(\omega/c)\kappa r\sin\theta$. Интеграл по θ имеет вид:

$$\int\limits_0^{\pi}f(\theta)\delta(\beta\kappa\cos\theta-1)\sin\theta d\theta=\frac{1}{\beta\kappa}\int\limits_{-\beta\kappa}^{\beta\kappa}\varphi(y)\delta(y-1)dy \tag{4}$$

Он отличен от нуля только в случае, если $\beta\kappa\geqslant 1$, поэтому нижний предел изменения κ равен $1/\beta$. В формуле (3) это учитывается автоматически, вследствие наличия дельта-функции, но после интегрирования по dy дельтафункция исчезнет, и нужно будет учесть нижний предел интегрирования в явном виде.

Интегрируя (4) по dy, получим

$$\frac{1}{\beta\kappa}\varphi(1)=\left.\frac{1}{\beta\kappa}f(\theta)\right|_{\cos\theta=1/\beta\kappa} \tag{5}$$

Подставим (5) в (3) и введем вместо κ переменную $x=\sqrt{\kappa^2-1/\beta^2}$; поскольку κ меняется в пределах от $1/\beta$ до ∞, x будет меняться от 0 до ∞. Тогда $E_z(\boldsymbol{R},t)$ запишется в виде:

$$E_z(\boldsymbol{R},t)=\frac{ie}{\pi c^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\omega d\omega\exp\left[i\omega\left(\frac{z}{v}-t\right)\right]\left(1-\frac{1}{\beta^2\varepsilon}\right)\int\limits_0^{\infty}\frac{J_0(\omega rx/c)xdx}{x^2+1/\beta^2-\varepsilon}$$

Произведя интегрирование по x с помощью формулы

$$\int\limits_0^{\infty}\frac{J_0(xr)xdx}{x^2+k^2}=K_0(kr) \tag{6}$$

находим

$$E_z(\boldsymbol{R},t)=\frac{ie}{\pi c^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(1-\frac{1}{\beta^2\varepsilon}\right)K_0(sr)\exp\left[i\omega\left(\frac{z}{v}-t\right)\right]\omega d\omega \tag{7}$$

где обозначено $s^2 = \omega^2/v^2 - (\omega^2/c^2)\,\varepsilon(\omega)$. Знак s нужно выбирать так, чтобы было $\mathrm{Re}\, s > 0$, в противном случае интегралт по ω оказывается расходящимся. Интегрирование по ω в (6) можно провести, только задавшись конкретным видом функции $\varepsilon(\omega)$.

При вычислении $E_x(\boldsymbol{R}, t)$ также начинаем с интегрирования по Ф. Интегрирование по θ выполняется с помощью дельта-функции. При последующем интегрировании по $x = \sqrt{\kappa^2 - 1/\beta^2}$ нужно воспользоваться формулой

$$\int\limits_0^\infty \frac{J_1(xr)x^2 dx}{x^2 + k^2} = kK_1(kr)$$

которая получается из (6) дифференцированием по r, если учесть, что $J_0' = -J_1, K_0' = -K_1$.

В результате находим

$$E_x(\boldsymbol{R}, t) = \cos\varphi \frac{e}{\pi v} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{s}{\varepsilon} K_1(sr) \exp\left[i\omega\left(\frac{z}{v} - t\right)\right] d\omega$$

Компоненты $E_y(\boldsymbol{R}, t)$ и $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{R}, t)$ определяются таким же путем. E_y отличается от E_x заменой $\cos\varphi$ на $\sin\varphi$; поэтому в цилиндрических координатах
имеем

$$E_r(\boldsymbol{R}, t) = \frac{e}{\pi v} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{s}{\varepsilon} K_1(sr) \exp\left[i\omega\left(\frac{z}{v} - t\right)\right] d\omega, \quad E_\varphi = 0 \tag{8}$$

Для $\boldsymbol{H}$ получим

$$H_\varphi(\boldsymbol{R}, t) = \frac{e}{\pi c} \int\limits_{-\infty}^{\infty} sK_1(sr) \exp\left[i\omega\left(\frac{z}{v} - t\right)\right] d\omega, \quad H_z = H_r = 0 \tag{9}$$

Как следует из формул (7)-(9), электромагнитное поле обладает аксиальной симметрией.

Полученные формулы справедливы только в области $r \gg a$, где a - величина порядка межатомных расстояний. В области $r \leqslant a$ необходимо учитывать пространственную дисперсию диэлектрической проницаемости.

15.14. Как следует из формул (7)-(9) предыдущей задачи, монохроматические компоненты полей $\boldsymbol{E}_\omega(\boldsymbol{R}, t)$ и $\boldsymbol{H}_\omega(\boldsymbol{R}, t)$ имеют вид:

$$E_{\omega z}(\boldsymbol{R}, t) = \frac{ie\omega}{\pi c^2}\left(1 - \frac{1}{\beta^2\varepsilon}\right) K_0(sr) \exp\left[i\omega\left(\frac{z}{v} - t\right)\right] \ldots \tag{1}$$

где

$$s^2 = \frac{\omega^2}{v^2} - \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon(\omega), \quad \mathrm{Re}\, s > 0 \tag{2}$$

а K_n - модифицированные функции Бесселя.

В волновой зоне $|sr| \gg 1$, вследствие чего можно использовать асимптотическое выражение (1.170) для функций K_n:

$$K_n(sr) = \sqrt{\frac{\pi}{2sr}} e^{-sr} \tag{3.}$$

Из (2) следует, что при вещественном $\varepsilon(\omega)s$ будет вещественным, если $1/\beta^2 > \varepsilon(\omega)$ или $\beta n(\omega) < 1(n(\omega)$ - показатель преломления для волн с частотой $\omega)$. При $\beta n(\omega) > 1$ параметр s будет чисто мнимым.

Если s - вещественная величина (в силу (2), при этом $s > 0$), то в волновой зоне поле будет затухать экспоненциально, излучения не происходит. При чисто мнимом s амплитуда полей в волновой зоне будет меняться
как $1/\sqrt{r}$, что соответствует цилиндрическим волнам. Покажем, что эти волны будут расходящимися, т. е. в этом случае действительно будет происходить излучение.

Запишем s в виде

$$s = \pm\frac{\omega}{c}\sqrt{\frac{1}{\beta^2} - \varepsilon(\omega)} = \pm i\frac{\omega}{c}n\sqrt{\beta^2 n^2 - 1} \tag{4}$$

и выясним, какой знак нужно выбрать перед корнем. Для этого нужно принять во внимание, что рассматриваемый диэлектрик без потерь является предельным случаем слабо поглощающего диэлектрика с комплексным показателем преломления $n = n' + in''$. Чтобы мнимая часть показателя преломления n'' действительно описывала поглощение энергии (т. е. чтобы амплитуда соответствующей волны затухала, а не возрастала), требуется выполнение условий $n'' > 0$ при $\omega > 0$ и $n'' < 0$ при $\omega < 0$. Считая n'' весьма малым, можем записать

$$\sqrt{\beta^2\left(n' + in''\right)^2 - 1} \approx \sqrt{\beta^2 n'^2 - 1}\left(1 + i\frac{\beta n' n''}{\beta^2 n'^2 - 1}\right)$$

Отсюда следует, что условие $\operatorname{Re} s > 0$ будет выполняться, если выбрать в (4) знак минус. Устремив после этого n'' к нулю, получим

$$s = -i\frac{\omega n}{c}\sqrt{\beta^2 n^2 - 1} \tag{5}$$

Но такой знак как раз соответствует расходящимся волнам, так как экспоненциальный множитель в выражениях (1) примет вид

$$\exp i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{R} - \omega t) = \exp i[k(z\cos\theta + r\sin\theta) - \omega t] \tag{6}$$

где $k = \omega n/c, \cos\theta = 1/\beta n, \sin\theta = \sqrt{1 - 1/\beta^2 n^2}, k\cos\theta = k_z = k_\parallel$ и $k\sin\theta = k_\perp$ - компоненты волнового вектора.

Таким образом, при выполнении условия $\beta n(\omega) > 1$ частица, движущаяся в диэлектрике с постоянной скоростью $v = \beta c$, излучает электромагнитные волны с частотой ω (излучение Вавилова-Черенкова). Условие $\beta n > 1$ означает, что скорость частицы должна превосходить фазовую скорость волны с частотой ω в данной среде. Как следует из выражения для волнового вектора $\mathbf{k}$, излучение направлено под углом θ к скорости частицы, причем

$$\cos\theta = \frac{1}{\beta n(\omega)} \tag{7}$$

Эта характерная направленность излучения является следствием когерентности волн, испускаемых частицей в разных точках ее траектории (см. задачу 15.15).

Фазовая скорость волн Вавилова-Черенкова

$$v_{ph} = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{n}$$

- такая же, как у всех поперечных электромагнитных волн. Поляризацию излучения легко определить из формул (1): вектор $\boldsymbol{H}$ направлен перпендикулярно плоскости,

проходящей через траекторию частицы и волновой вектор $\boldsymbol{k}$, а вектор $\boldsymbol{E}$ лежит в указанной плоскости (и перпендикулярен k в волновой зоне). В перпендикулярности $\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{E}$ можно убедиться, вычислив скалярное произведение $\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{E}_\omega$.

Полная энергия черенковского излучения w на единице пути равна интегралу по времени от потока вектора Пойнтинга через бесконечно удаленную цилиндрическую поверхность единичной длины, окружающую траекторию частицы:

$$w = 2\pi r \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{c}{4\pi} (\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H})_r dt = -\frac{cr}{2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} H_\varphi E_z dt \tag{8}$$

Переходя к компонентам Фурье, можно представить (8) в виде

$$w = -2\pi cr \operatorname{Re} \int\limits_{\beta n(\omega)>1} H^*_{\omega\varphi} E_{\omega z} d\omega, \tag{9}$$

где монохроматические компоненты $H_{\omega\varphi}, E_{\omega z}$ должны быть взяты в волновой зоне, а интегрирование ведется по области частот, в которой выполняется условие излучения $\beta n(\omega) > 1$. С помощью формул (1)-(3) находим окончательно:

$$w = \frac{e^2}{c^2} \int\limits_{\beta(\omega)>1} \left(1 - \frac{c^2}{v^2 n^2}\right) \omega d\omega \tag{10}$$

15.15.

$$w = \frac{e^2\omega_0^2}{2v^2} \left(\beta^2 - 1\right) + \frac{e^2\omega_0^2}{2v^2} \left(\varepsilon_0 - 1\right) \ln \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_0 - 1}$$

При указанных в условии задачи значениях параметров $w \approx 5000$ эВ/см. Излучение сконцентрировано в интервале углов $\theta_0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$, где $\beta^2 \varepsilon_0 \cos^2 \theta_0 = 1$

15.16. Каждую точку траектории можно рассматривать как источник элементарного возбуждения, распространяющегося в виде сферической волны со скоростью $v_{ph} = \frac{c}{n}$ (рис. 15.14). Фронт результирующей волны представляет собой огибающую элементарных сферических волн. Нормаль к фронту составляет с траекторией угол θ, причем, как следует из рисунка, $\cos\theta = 1/\beta n$.

15.17. Поле равномерно движущейся заряженной частицы представля-

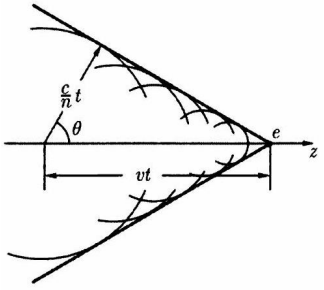


Рис. 15.14 ет собой суперпозицию плоских волн с частотами $\omega = k \cdot v$, где $\boldsymbol{v}$ - скорость частицы, k - волновой вектор. В неограниченном диэлектрике возможны колебания с частотами $\omega = kc/n$, где n - показатель преломления среды (собственные колебания среды). Из условия резонанса

$$\frac{kc}{n} = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{v} = kv \cos\theta$$

следует, что $\cos\theta = c/vn$. Так как $\cos\theta \leqslant 1$, то $vn/c \geqslant 1$, а это и есть условие существования излучения Вавилова-Черенкова.

15.18. $\tau = (l/v)\,\mathrm{tg}^2\,\theta, I = wv\,\mathrm{ctg}^2\,\theta$, где $\cos\theta = c/nv, w$ - энергия черенковского излучения на единице длины, вычисленная в задаче 15.14.

15.20. При $\beta n < 1$ (т. е. при $v < v_{ph}$)

$$\varphi = \frac{e}{\varepsilon\sqrt{(z-vt)^2 + r^2\,(1-\beta^2 n^2)}} \tag{1}$$

Это решение можно получить, вычислив гармонику Фурье потенциала из неоднородного волнового уравнения и выполнив обратное преобразование Фурье.

При $\beta n > 1$ подынтегральное выражение будет иметь полюс при $k^2 = \varepsilon\mu(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v})^2/c^2$. Введя в пространстве $\boldsymbol{k}$ цилиндрические координаты, запишем φ в виде

$$\varphi(\boldsymbol{R},t) = \frac{e}{2\pi^2\varepsilon}\int \frac{\exp\left[ik_z(z-vt) + ik_\perp r\cos\alpha\right]}{k_\perp^2 - k_z^2\,(\beta^2 n^2 - 1)} k_\perp dk_\perp dk_z d\alpha$$

Для вычисления интеграла по k_z воспользуемся теоремой о вычетах. Знаменатель имеет нули в точках $k_z = \pm k_\perp/\sqrt{\beta^2 n^2 - 1}$; чтобы выяснить правило обхода этих полюсов, допустим, что n имеет малую мнимую часть $n'' > 0$ при $k_z > 0, n'' < 0$ при $k_z < 0$ (см. аналогичный анализ в задаче 15.2 ; в данном случае знак ω совпадает со знаком k_z, так как $\omega = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}$). Поэтому оба нуля будут смещены в нижнюю полуплоскость комплексной переменной k_z. При $z > vt$ нужно замкнуть контур интегрирования дугой бесконечно большого радиуса в верхней полуплоскости (на этой дуге подынтегральная функция обращается в нуль). Так как знаменатель не имеет нулей в верхней полуплоскости, интеграл по k_z в этом случае будет равен нулю. При $z < vt$ замыкаем контур интегрирования в нижней полуплоскости. Вклад в интеграл дают оба полюса, в результате интегрирования получим:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\left[ik_z(z-vt)\right]}{k_\perp^2 - k_z^2\,(\beta^2 n^2 - 1)} dk_z = -\frac{2\pi}{k_\perp\sqrt{\beta^2 n^2 - 1}}\sin\frac{k_\perp(z-vt)}{\sqrt{\beta^2 n^2 - 1}}$$

Интеграл по α выражается через функцию Бесселя $J_0\,(k_\perp r)$ (см. (1.150)). Последний интеграл по $k_\perp$ вычислим с помощью формулы (6.671, 7), приведенной в справочнике Градштейна и Рыжика (1971). Таким образом, при $\beta n > 1$ имеем:

$$\varphi(\boldsymbol{R},t) = \begin{cases} \frac{2e}{\varepsilon\sqrt{(z-vt)^2 - r^2(\beta^2 n^2 - 1)}} & \text{при} \quad z < vt - r\sqrt{\beta^2 n^2 - 1} \\ 0 & \text{в остальном пространстве} \end{cases} \tag{2}$$

Векторный потенциал $\boldsymbol{A}$ получается умножением φ на $\varepsilon\mu\boldsymbol{v}/c$.

Формула (2) показывает, что при выполнении условия ВавиловаЧеренкова $\beta n > 1$ поле является разрывным. Оно существует только внутри конуса, поверхность которого описывается уравнением

$$z - vt + r\sqrt{\beta^2 n^2 - 1} = 0 \tag{3}$$

Нормаль к поверхности конуса составляет с направлением движения частицы угол $\theta = \arccos(1/\beta n)$. Как следует из (3), коническая волна распространяется вдоль оси Oz со скоростью частицы.

Рассмотренную структуру могут иметь не только электромагнитные волны, но и волны другой природы. Например, разрывные акустические волны указанного типа возбуждаются снарядом, движущимся в воздухе со скоростью, большей скорости звука (ударная баллистическая волна). Тот

же характер имеют волны, образованные на поверхности воды достаточно быстро движущимся судном.

15.21. Излучение Вавилова-Черенкова происходит при условии $\beta n > 1$, где $n(\omega) = \sqrt{\varepsilon(\omega)\mu(\omega)}$; векторный потенциал имеет вид:

$$A_x = \frac{i\mathscr{I}}{c} \int \frac{\exp\left[(i\omega/v)\left(y - vt + \sqrt{\beta^2 n^2 - 1}|z|\right)\right.}{\sqrt{\beta^2 n^2 - 1}} \cdot \frac{\mu(\omega)d\omega}{\omega}$$

$$w = \frac{2\mathscr{I}^2}{c^2 v} \int\limits_{\beta n>1} \frac{\mu(\omega)d\omega}{\sqrt{\beta^2 n^2 - 1}}$$

Тормозящая сила вычисляется по формуле $= (\boldsymbol{j} \times \boldsymbol{B})/c$, где $\boldsymbol{B}$ должно быть взято в точке $z = 0, y = vt$. Сила приложена в направлении, обратном оси Oy, и по абсолютной величине равна потере энергии на единице пути: $F_y = -w$. Этот результат прямо вытекает из закона сохранения энергии.

15.22.

$$w = \frac{2e^2}{c^2} \int\limits_{\beta n>1} \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2}\right) \left(1 \pm \cos\frac{\omega l}{v}\right) \omega d\omega$$

Знак плюс соответствует случаю а), минус - случаю б). Спектральная плотность излучения двух одинаковых зарядов отличается от спектральной плотности излучения одного заряда множителем $2(1+\cos(\omega l/v))$. Поэтому интенсивность гармоник с частотами

$$\omega = \frac{2\pi v}{l} n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

возрастает в 4 раза, а гармоники с частотами

$$\omega = \frac{\pi v}{l}(2n + 1)$$

исчезнут. При различных по знаку зарядах картина станет обратной. Для перехода к случаю точечного диполя, ориентированного по направлению движения, нужно разложить $1 - \cos(\omega l/v)$ в ряд, считая аргумент косинуса малым. Это даст

$$w = \frac{p^2}{c^2 v^2} \int\limits_{\beta n>1} \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2}\right) \omega^3 d\omega$$

где p - электрический момент диполя, измеренный в лабораторной системе.

15.23.

$$w = \frac{p^2}{c^2 v^2} \int\limits_{\beta n>1} \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2}\right) \left[\cos^2\alpha + \frac{1}{2}\sin^2\alpha\left(\beta^2 n^2 - 1\right)\right] \omega^3 d\omega$$

где $n = \sqrt{\varepsilon}, p$ - электрический дипольный момент в лабораторной системе отсчета.

15.24.

$$w = \frac{m^2}{c^2 v^2} \int\limits_{\beta n>1} \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2}\right) n^2 \omega^3 d\omega$$

15.25. Потери энергии на единицу пути выражаются интегралом по времени от потока энергии через цилиндрическую поверхность единичной длины и радиуса a, окружающую траекторию частицы. Для вычисления потерь можно воспользоваться формулой (9),

полученной при решении задачи 15.14, если в этой формуле взять значения полей при $r = a$ и вести интегрирование по всем частотам от 0 до ∞. Используя выражения компонент поля, найденные в задаче 15.13, и указанный в условии данной задачи конкретный вид функции $\varepsilon(\omega)$, получим

$$-\frac{d\mathscr{E}}{dl} = \frac{2e^2\omega_0^2}{\pi v^2}\,\mathrm{Re}\, i\int\limits_0^\infty \left(\frac{1-x^2}{\varepsilon_0 - x^2} - \beta^2\right) s^* a K_1(s^* a)\, K_0(sa) x dx \tag{1}$$

где $x = \omega/\omega_0, \varepsilon(0) = \varepsilon_0 = 1 + \omega_p^2/\omega_0^2$ - статическое значение диэлектрической проницаемости,

$$s^2 = \frac{\omega_0^2}{c^2}\left(\frac{1}{\beta^2} - 1\right)\frac{b - x^2}{1 - x^2}x^2, \quad b = \frac{c^2 - \varepsilon_0 v^2}{c^2 - v^2} \tag{2}$$

Как следует из формулы (1), в потери вносит вклад только мнимая часть интеграла. Функции K_0 и K_1 - вещественны при вещественном аргументе, поэтому интересующая нас мнимая часть интеграла будет определяться только той областью изменения x, в которой s будет комплексным. Эта область, как видно из (2), зависит от знака и величины параметра b. Если $b > 0$ (это означает, что $v < c/\sqrt{\varepsilon_0}$), то s будет чисто мнимым при значениях x в интервале $(\sqrt{b}, 1)$ и вещественным вне этого интервала. Если $b < 0$ (этому соответствует $v > c/\sqrt{\varepsilon_0}$), то s будет мнимым при $0 \leqslant x \leqslant 1$ и вещественным при $x > 1$.

Кроме указанных интервалов изменения x, вклад в мнимую часть интеграла будут давать отдельные точки, в которых знаменатель подынтегрального выражения $\varepsilon_0 - x^2$ обращается в нуль: $x = \pm\sqrt{\varepsilon_0}$. Поскольку
интегрирование в (1) ведется по значениям $x > 0$, нужно рассмотреть один полюс $x = \sqrt{\varepsilon_0} > 1$. Если пренебречь потерями, то этот полюс окажется на вещественной оси. При учете потерь, как легко видеть из явного выражения $\varepsilon(\omega)$ (см. задачу 11.13), он переместится в нижнюю полуплоскость комплексной переменной ω)[7]. Чтобы получить правильное значение интеграла, нужно или ввести параметр затухания и после вычисления интеграла устремить этот параметр к нулю, или слегка деформировать путь интегрирования, произведя обход вокруг полюса по окружности бесконечно малого радиуса в верхней полуплоскости. Используем второй способ. Обозначив интегрирование по указанной полуокружности значком $\frown$, получим

$$\begin{aligned} &\cdot\int\limits_{\frown} \frac{1-x^2}{\varepsilon_0 - x^2} s^* a K_1(s^* a)\, K_0(sa) x dx = \\ &= i\frac{1-\varepsilon_0}{2}\cdot\frac{\omega_0 a\sqrt{\varepsilon_0}}{v} K_0\left(\frac{\omega_0 a\sqrt{\varepsilon_0}}{v}\right) K_1\left(\frac{\omega_0 a\sqrt{\varepsilon_0}}{v}\right) \end{aligned} \tag{3}$$

Теперь вычислим интеграл по области, в которой s чисто мнимо. Для этого заметим, что при чисто мнимом аргументе цилиндрические функции K_0 и K_1 связаны зависимостью

$$s^* a K_1(s^* a)\, K_0(sa) - s a K_1(sa) K_0(s^* a) = i\frac{\pi}{2}$$

которая следует из свойств вронскиана системы решений уравнения Бесселя. Поэтому $\mathrm{Re}\, i\int\limits_{s^2<0}\left(\frac{1-x^2}{\varepsilon_0 - x^2} - \beta^2\right) s^* a K_1(s^* a)\, K_0(sa) x dx = -\frac{\pi}{2}\int\limits_{s^2<0}\left(\frac{1-x^2}{\varepsilon_0 - \dot{x}^2} - \beta^2\right) x dx$.
Последний интеграл вычисляется элементарными методами. Пределы интегрирования выбираются так, как указано выше.

Подставляя (3) и (4) в (1), получим при $v < c/\sqrt{\varepsilon_0}$

$$-\frac{d\mathscr{E}}{dl}=\frac{2\pi e^4N}{mv^2}\left[\frac{2a\omega_0\sqrt{\varepsilon_0}}{v}K_0\left(\frac{a\omega_0\sqrt{\varepsilon_0}}{v}\right)K_1\left(\frac{a\omega_0\sqrt{\varepsilon_0}}{v}\right)-\beta^2-\ln\left(1-\beta^2\right)\right] \tag{5}$$

и при $v>c/\sqrt{\varepsilon_0}$:

$$-\frac{d\mathscr{E}}{dl}=\frac{2\pi e^4N}{mv^2}\left[\frac{2a\omega_0\sqrt{\varepsilon_0}}{v}K_0\left(\frac{a\omega_0\sqrt{\varepsilon_0}}{v}\right)K_1\left(\frac{a\omega_0\sqrt{\varepsilon_0}}{v^*}\right)-\frac{1-\beta^2}{\varepsilon_0-1}+\ln\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_0-1}\right] \tag{6}$$

Та часть полных потерь, которая не исчезает при $a\to\infty$ (члены, не содержащие a в (5) и (6)), представляет собой потери энергии на излучение поперечных волн (эффект Вавилова-Черенкова):

(7) $\quad-\left(\frac{d\mathscr{E}}{dl}\right)_{V-Ch}\equiv w=\frac{e^2\omega_p^2}{2v^2}\left[-\beta^2-\ln\left(1-\beta^2\right)\right]\quad$ при $\quad v<\frac{c}{\sqrt{\varepsilon_0}}$,

(8) $-\left(\frac{d\mathscr{E}}{dl}\right)_{V-Ch}\equiv w=\frac{e^2\omega_p^2}{2v^2}\left(-\frac{1-\beta^2}{\varepsilon_0-1}+\ln\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_0-1}\right)\quad$ при $\quad v>\frac{c}{\sqrt{\varepsilon_0}}$.

Выражение (8) было получено в задаче 15.15 .

Члены с K_0, K_1 в (5) и (6), зависящие от a, возникли в результате обхода полюса в точке $\omega\equiv\Omega=\sqrt{\omega_0^2+\omega_p^2}$, в которой ε обращается в нуль. Но при таких частотах возбуждаются продольные колебания (см. задачи 11.45, 11.46), поэтому выражение

$$-\left(\frac{d\mathscr{E}}{dl}\right)_{pol}=\frac{e^2\omega_p^2\Omega a}{v^3}K_0\left(\frac{\Omega a}{v}\right)K_1\left(\frac{\Omega a}{v}\right) \tag{9}$$

описывает потери на возбуждение продольных колебаний (поляризационные потери). При $\Omega a/v\ll 1$ формула (9) принимает простой вид (см. (1.168)) :

$$-\left(\frac{d\mathscr{E}}{dl}\right)_{pol}=\frac{e^2\omega_p^2}{v^2}\ln\frac{v}{\Omega a} \tag{10}$$

При $\Omega a/v\gg 1$ величина $-(d\mathscr{E}/dl)_{pol}$ становится очень малой (она пропорциональна $\exp(-\Omega a/v)$). Это показывает, что влияние поляризации среды при мальх скоростях мало.

Изложенный в этой задаче макроскопический метод расчета потерь принадлежит Ферми (1940).

15.26.

$$-\frac{d\mathscr{E}}{dl}=\frac{e^2\omega_p^3a}{v^3}K_0\left(\frac{\omega_pa}{v}\right)K_1\left(\frac{\omega_pa}{v}\right) \tag{1}$$

Если параметр $\omega_pa/v\ll 1$, что имеет место при достаточно большой скорости частицы, то можно использовать приближенные формулы (1.168) для модифицированных функций Бесселя. При этом (1) переходит в

$$-\frac{d\mathscr{E}}{dl}=\frac{e^2\omega_p^2}{v^2}\ln\frac{2v}{\gamma\omega_pa} \tag{2}$$

Как следует из формул (1), (2), потери частицы существенно зависят от величины ω_p. Она представляет собою частоту продольных плазменных колебаний. □

Излучения Вавилова-Черенкова в плазме не возникает, так как при всех частотах $\varepsilon(\omega)<1$ и условие излучения $\beta^2\varepsilon\geqslant 1$ не выполняется (но черенковское излучение становится возможным, если плазма находится в магнитном поле).

[07] Это находится в соответствии с общей теоремой о том, что $\varepsilon(\omega)$ не имеет нулей в верхней полуплоскости (см. раздел 11.2).

При квантовомеханическом рассмотрении возбуждение плазменных колебаний эквивалентно возникновению некоторых дискретных элементарных возбуждений (квазичастиц - «плазмонов»). Энергия каждого плазмона равна $\hbar\omega_p$, где $\hbar = 1,05 \cdot 10^{-27}$ эрг $\cdot$ сек - постоянная Планка. Для металлов величина $\hbar\omega_p$ лежит в пределах от 5 до 30 эВ. Таким образом, при возбуждении плазменных колебаний частица теряет энергию дискретными порциями. Как уже отмечалось, изучение этих дискретных (или характеристических) потерь энергии позволяет получать ценные сведения о свойствах твердых тел.

15.27. Разложим плотность тока (рис. 15.15)

$$j = j_z = \begin{cases} -ev\delta(z - vt)\delta(x)\delta(y) \text{ при } z \geqslant 0 \\ -ev\delta(z + vt)\delta(x)\delta(y) \text{ при } z \leqslant 0, -\infty < t \leqslant 0 \end{cases} \tag{1}$$

в интеграл Фурье по времени:

$$j = \int j\omega e^{-i\omega t} dt, \quad j\omega = \begin{cases} -\frac{e}{2\pi} \exp(-i\omega z/v)\delta(x)\delta(y) & \text{при } z \geqslant 0, \\ -\frac{e}{2\pi} \exp(i\omega z/v)\delta(x)\delta(y) & \text{при } z \leqslant 0. \end{cases} \tag{2}$$

Введем вектор поляризации согласно (5.41):

$$P_\omega = -\frac{j_\omega}{i\omega}. \tag{3}$$

Вектор $\boldsymbol{P}_\omega$ направлен по оси Oz.

Формулы (2) и (3) показывают, что плотность заряда и плотность тока, создаваемые движущейся частицей, эквивалентны набору гармонических осцилляторов, распределенных в пространстве по закону

$$P_\omega = \begin{cases} -\frac{ie}{2\pi\omega} \exp(-i\omega z/v)\delta(x)\delta(y) & \text{при } z \geqslant 0, \\ -\frac{ie}{2\pi\omega} \exp(i\omega z/v)\delta(x)\delta(y) & \text{при } z \leqslant 0 \end{cases} \tag{4}$$

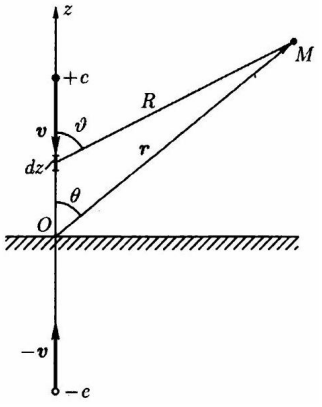


Рис. 15.15

Наличие $\delta(x)\delta(y)$ в (4) означает, что фактически осцилляторы находятся только на линии движения заряда.

Осцилляторы, находящиеся на отрезке dz, создадут в точке M волновой зоны магнитное поле (см. рис. 15.15):

$$d\boldsymbol{H}_\omega = -\frac{\omega^2 e^{ikR}}{c^2 R^2} (\boldsymbol{P}_\omega \times \boldsymbol{R})\, dz = -\frac{\omega^2 e^{ikR}}{c^2 R} P_\omega \sin\vartheta \boldsymbol{e}_\alpha dz \tag{5}$$

Интегрируя (5) по dz, получiим полное поле:

$$H_{\omega\alpha} = \frac{ie\omega}{2\pi c^2}\left[\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{e^{(i\omega z/v)+ikR}\sin\vartheta}{R}dz + \int\limits_{0}^{\infty} \frac{e^{-(i\omega z/v)+ikR}\sin\vartheta}{R}dz\right]$$

В последнем выражении интегралы берутся от произведения убывающей и осциллирующей функций, поэтому основной вклад в них даст область вблизи $z = 0$. С точки зрения физики это объясняется тем, что излучение имеет место при переходе из вакуума в металл. Вычислим интегралы приближенно, для чего положим в показателях экспонент $R = r - z\cos\theta$.

Выражая $\sin\vartheta$ через R, получим

$$H_{\omega\alpha} = \frac{ie\omega e^{ikr} r\sin\theta}{2\pi c^2}\left[\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{\exp[i(\omega/v)(1-\beta\cos\theta)z]}{R^2}dz + \right.$$
$$\left. + \int\limits_{0}^{\infty} \frac{\exp[-i(\omega/v)(1+\dot\beta\cos\theta)z]}{R^2}dz\right]$$

Интегрированием по частям можно представить эти интегралы в виде рядов по степеням $1/R$; оставляя только члены, линейные по этому параметру, получим

(6) $H_\alpha = E_\theta = \frac{e\omega}{2\pi c^2}\left[\frac{1}{(\omega/v)(1-\beta\cos\theta)} + \frac{1}{(\omega/v)(1+\beta\cos\theta)}\right]\frac{\sin\theta e^{ikr}}{r}$.

Второй член в этом выражении описывает поле излучения, возникающего при внезапной остановке заряда, а первый член - излучение, создаваемое изображением. Интенсивность излучения с частотой ω в телесный угол $d\Omega$ определяем по формуле

$$dI(\omega,\theta) = c|E(\omega,\theta)|^2 r^2 d\Omega = \frac{e^2v^2}{\pi^2c^3}\cdot\frac{\sin^2\theta d\Omega}{(1-\beta^2\cos^2\theta)^2} \tag{7}$$

В нерелятивистском пределе ($\beta \ll 1$) формула (7) дает дипольное излучение:

$$dI(\omega,\theta) = \frac{e^2v^2}{\pi^2c^3}\sin^2\theta d\Omega \tag{8}$$

интенсивность которого пропорциональна квадрату скорости частицы. Отметим, что интенсивность излучения не зависит от массы частицы.

Интегралы от (7) и (8) по ω, дающие угловое распределение полного излучения (со всеми частотами), будут расходящимися. Это обусловлено тем, что металл считался идеально проводящим. В действительности, уже в инфракрасной области спектра металл нельзя считать идеально проводящим, так что при высоких частотах результаты (7) и (8) неверны.

Спектральное распределение полного излучения получится интегрированием (7) по верхней полусфере:

$$I(\omega) = \frac{4e^2v^2}{3\pi c^3}\left(\frac{3\,(\beta^2+1)}{8\beta^3}\ln\frac{1+\beta}{1-\beta} - \frac{3}{4\beta^2}\right) \tag{9}$$

В ультрарелятивистском пределе, когда полная энергия частицы $\mathscr{E}$ много больше энергии покоя mc^2, формула (9) дает

$$I(\omega) = \frac{2e^2}{\pi c}\ln\frac{\mathscr{E}}{mc^2} \tag{10}$$

Интенсивность излучения растет логарифмически с ростом энергии.

В нерелятивистском пределе выражение в скобках обращается в единицу:

$$I(\omega) = \frac{4e^2v^2}{3\pi c^3} \tag{11}$$

15.28. Компонента Фурье вектора поляризации имеет вид

$$P_\omega = -\frac{ie}{2\pi\omega} e^{-i\omega z/v}\delta(x)\delta(y) \tag{1}$$

Определим сначала поле в точке A от осцилляторов, находящихся в области $z > 0$ (рис. 15.16). Достаточно рассмотреть осцилляторы, лежащие вблизи точки $z = 0$, так как только они создают поле излучения (см. предыдущую задачу).

При использовании теоремы взаимности выберем осциллятор $\boldsymbol{p}_B$ на оси Oz вблизи $z = 0$ (точка B), а осциллятор $\boldsymbol{p}_A$ в точке A, поле в которой мы должны определить. Пусть оба они одинаковы по абсолютной величине и направлены вдоль Oz, а расстояние между ними велико по сравнению с длиной волны. Осциллятор $\boldsymbol{p}_B$ создает в точке A поле, амплитуда $\boldsymbol{E}_+$ которого составляет с осью Oz угол, приближенно равный $\pi/2-\theta$ (см. рис. 15.16). Волны из A в B приходят двумя путями: непосредственно и после отражения от границы диэлектрика. Соответствующие амплитуды обозначены на рисунке через $\boldsymbol{E}'$ и $\boldsymbol{E}''$. Они составляют с Oz такие же углы $\pi/2-\vartheta' \approx \pi/2-\theta$. Поэтому по теореме взаимности имеем $\boldsymbol{E}_+ = \boldsymbol{E}'+\boldsymbol{E}''$ или, учитывая, что в волновой зоне осциллятора $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{n}\times\boldsymbol{E}$, получаем $\boldsymbol{H}_+ = -\boldsymbol{H}' - \boldsymbol{H}''$ (все три вектора $\boldsymbol{H}_+, \boldsymbol{H}', \boldsymbol{H}''$ перпендикулярны плоскости AOz).

Волна, приходящая из A в B непосредственно, создает поле

$$dH' = \frac{\omega^2 e^{ikR}}{c^2 R} P_\omega \sin\theta dz \tag{2}$$

Амплитуду отраженной волны можно определить с помощью формул Френеля, так как расстояние AC велико и волна, испускаемая из точки A, может

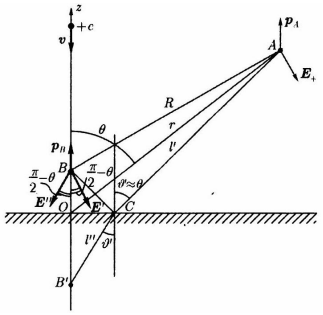


Рис. 15.16

рассматриваться вблизи точки C как плоская. С помощью формул (12.11), учитывая изменение фазы волны и то, что $\vartheta' \approx \theta$, получим

$$dH'' = \frac{\omega^2 f e^{ikR'}}{c^2 R'} P_\omega \sin\theta dz \tag{3}$$

где

$$f = \frac{\varepsilon\cos\theta - \sqrt{\varepsilon - \sin^2\theta}}{\varepsilon\cos\theta + \sqrt{\varepsilon - \sin^2\theta}}, \quad R' = ACB$$

То поле $\boldsymbol{H}_+$, которое создается в точке A всеми осцилляторами, находящимися в области $z > 0$, получится интегрированием суммы $-(dH' + dH'')$ по dz от 0 до ∞. Интегрирование проводится точно так же, как в предыдущей задаче. Результат имеет вид

$$H_+ = \frac{ev}{2\pi c^2}\left(\frac{1}{1+\beta\cos\theta}+\frac{f}{1-\beta\cos\theta}\right)\frac{\sin\theta e^{ikr}}{r} \tag{4}$$

Эту формулу легко понять путем сравнения с аналогичной формулой (6) предыдущей задачи. Первый член описывает поле частицы, движущейся
в вакууме и внезапно останавливающейся в точке $z=0$; второй - поле изображения $(-ef)$, движущегося в диэлектрике навстречу частице и также останавливающегося в точке $z=0$. В отличие от случая идеального проводника, изображение слабее в f раз, его величина зависит от частоты ω рассматриваемой гармоники (через $\varepsilon(\omega)$) и от положения точки наблюдения (через угол θ).

Поле $\boldsymbol{H}_-$от диполей, лежащих при $z<0$, определяем таким же путем. Волна придет из A в B, преломившись на границе раздела. Используя снова формулы Френеля, получим

$$dH_- = -\frac{\omega^2}{\varepsilon c^2 R''}(1+f)P_\omega \sin\vartheta' e^{i\varphi}dz \tag{5}$$

Здесь $R''=l'+l''$ - длина ломаной линии ACB' (см. рис. 15.16). Фаза φ учитывает запаздывание:

$$\varphi = \frac{\omega}{c}l' + \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon}l''$$

При $|z| \ll r (z<0)$ имеем $l' = r + z\,\mathrm{tg}\,\vartheta''\sin\theta, l'' = -z/\cos\vartheta''$. Учитывая закон преломления $\sin\vartheta'' = \sin\vartheta'/\sqrt{\varepsilon}$ и заменяя ϑ' на θ, находим

$$\varphi = \frac{\omega}{c}r - \frac{\omega}{c}z\sqrt{\varepsilon-\sin^2\theta}$$

Проинтегрировав (5) от $-\infty$ до 0, получим поле от диполей, лежащих в области $z<0$:

$$H_- = -\frac{ev}{2\pi\varepsilon c^2}(1+f)\frac{1}{1-\beta\sqrt{\varepsilon-\sin^2\theta}}\cdot\frac{\sin\theta e^{ikr}}{r} \tag{6}$$

Полное поле в точке A равно сумме $H_+ + H_-$. Интенсивность излучения с частотой ω в телесный угол $d\Omega$:

$$dI(\omega,\theta) = \frac{e^2v^2}{4\pi^2c^3}A^2(\omega,\theta)\sin^2\theta d\Omega \tag{7}$$

$$A(\omega,\theta) = \frac{2\beta\cos\theta}{1-\beta\cos^2\theta} + (1+f)\left[\frac{1}{\varepsilon\left(1-\beta\sqrt{\varepsilon-\sin^2\theta}\right)} - \frac{1}{1-\beta\cos\theta}\right]$$

Величина A зависит от частоты через $\varepsilon(\omega)$.

В нерелятивистском пределе $\beta \ll 1$ получаем

$$dI(\omega,\theta) = \frac{e^2v^2}{\pi^2c^3}\cdot\frac{(\varepsilon-1)^2\sin^2\theta\cos^2\theta}{\left(\varepsilon\cos\theta+\sqrt{\varepsilon-\sin^2\theta}\right)^2}d\Omega \tag{8}$$

15.29.

$$\frac{d^2I_\omega^{(1)}}{d\omega d\Omega_1} = \frac{e^2\beta^2\sqrt{\varepsilon_1}\,(\varepsilon_2-\varepsilon_1)^2\sin^2\theta_1\cos^2\theta_1}{\pi^2c\left|\varepsilon_2\cos\theta_1+\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2-\varepsilon_1^2\sin^2\theta_1}\right|^2}$$

$$\frac{d^2I_\omega^{(2)}}{d\omega d\Omega_2} = \frac{e^2\beta^2\sqrt{\varepsilon_2}\,(\varepsilon_2-\varepsilon_1)^2\sin^2\theta_2\cos^2\theta_2}{\pi^2c\left|\varepsilon_1\cos\theta_2+\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_2-\varepsilon_2^2\sin^2\theta_2}\right|^2}$$

При $\varepsilon_1 = 1, \varepsilon_2 = \varepsilon$ первая формула совпадает с нерелятивистским пределом в задаче (15.28*). При $\varepsilon_1 = 1, \varepsilon_2 \to \infty$ она переходит в нерелятивистский случай задачи (15.27*).
15.30. Из вида знаменателей формулы (15.92) следует, что максимум излучения при малых углах $\theta_2 = \theta$ возможен лишь при выполнении условия $|\varepsilon_{1,2} - 1| \ll 1$. Это имеет место при частотах $\omega \gg \omega_{p1,2}$, где $\omega_{p1,2}$ - плазменные частоты двух сред. При этом $\varepsilon_{1,2} = 1 - \omega_{p1,2}^2/\omega^2$. Запишем (15.92) в приближении малых углов, воспользовавшись разложениями $1 - \beta^2\varepsilon_2 \cos^2\theta \approx \gamma^{-2} + \frac{\omega_{p1}^2}{\omega^2} + \frac{\theta^2}{2}, \beta\sqrt{\varepsilon_1 - \varepsilon_2 \sin^2\theta} - 1 \approx \frac{1}{2}\left(\gamma^{-2} + \frac{\omega_{p1}^2}{\omega^2} + \theta^2\right)$.
Получим

$$\frac{d^2 I_\omega^{(2)}}{d\omega d\Omega_2} = \frac{e^2}{\pi^2 c}\left(\frac{\Delta\omega_p^2}{\omega^2}\right)^2 \frac{\theta^2}{\left(\gamma^{-2} + \omega_{p2}^2/\omega^2 + \theta^2/2\right)^2\left(\gamma^{-2} + \omega_{p1}^2/\omega^2 + \theta^2\right)^2}, \qquad (2)$$
$$\Delta\omega_p^2 = \omega_{p2}^2 - \omega_{p1}^2.$$

Отсюда следует, что характерный угол излучения по порядку величины определяется условием

$$\theta_0^2 \approx \gamma^{-2} + \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \qquad (3)$$

где ω_p - большая из двух плазменных частот. Порядковую оценку для спектра можно получить, взяв (2) при $\theta \approx \theta_0$ и умножив его эту величину на θ_0^2:

$$\frac{dI_\omega^{(2)}}{d\omega} \approx \frac{e^2}{\pi^2 c}\left(\frac{\Delta\omega_p^2}{\omega^2}\right)^2 \frac{\theta_0^4}{\left(\gamma^{-2} + \omega_{p2}^2/\omega^2 + \theta_0^2/2\right)^2\left(\gamma^{-2} + \omega_{p1}^2/\omega^2 + \theta_0^2\right)^2} \qquad (4)$$

При частотах, удовлетворяющих условию $\omega_p/\omega \geqslant \gamma^{-1}$, зависимость спектра (4) от частоты слабая, так как характерный угол с уменьшением частоты растет, числитель и знаменатель в (4) нарастают приблизительно одинаково. При $\omega \gg \gamma\omega_p$ характерный угол определяется фактором γ, поэтому спектр убывает с ростом частоты как ω^{-4}. Таким образом, основное излучение идет на частотах меньше и порядка $\gamma\omega_p$, хотя в принципе спектр ограничен лишь частотой $\omega_{\max} =` (\gamma - 1)mc^2/\hbar$. Приведенные соображения позволяют дать оценку также полной энергии $\Delta\mathscr{E} = \int_0^{\omega_{\max}} \left(dI_\omega^{(2)}/d\omega\right) d\omega$ переходного излучения. Подставляем в (4) характерную частоту $\gamma\omega_p$ и умножаем правую часть на эту же частоту:

$$\Delta\mathscr{E} \approx \frac{e^2\omega_p\gamma}{c} = \frac{e^2\omega_p}{c}\frac{\mathscr{E}}{mc^2}$$

Излученная энергия пропорциональна энергии релятивистской частицы.
Излучение назад не обладает острой направленностью, а генерируемые частоты значительно меньше $\gamma\omega_p$. Поэтому вперед излучается основная энергия.
15.31.

$$\frac{dI_\omega^{(2)}}{d\omega} = \frac{2e^2}{\pi c}\left\{\left(\frac{1}{2} + \frac{\omega^2}{\gamma^2\dot{\omega}_p^2}\right)\ln\left(1 + \frac{\gamma^2\omega_p^2}{\omega^2}\right) - 1\right\}$$
$$\Delta\mathscr{E} = \int_0^{\omega_{\max}} \frac{dI_\omega^{(2)}}{d\omega} d\omega = \frac{e^2\omega_p\gamma}{3c} = \frac{e^2\omega_p}{3c}\frac{\mathscr{E}}{mc^2}$$

15.32. Задача решается по аналогии с 5.85 .

$$\frac{d^2I_\omega}{d\omega d\Omega} = \frac{1}{T}\frac{d^2I'_\omega}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2\omega_B}{6\pi^3 c\gamma}\left(\frac{a\omega}{c\sin\Theta}\right)^2\left(\theta^2+\frac{1}{\gamma^2}+\frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)^2 \times \\ \times\left[K_{2/3}^2(\xi)+\frac{\theta^2}{\theta^2+\gamma^{-2}+\omega_p^2/\omega^2}K_{1/3}^2(\xi)\right] \tag{1}$$

Здесь

$$\xi = \frac{\omega a}{3c\sin\Theta}\left(\theta^2+\gamma^{-2}+\omega_p^2/\omega^2\right)^{3/2}, \quad T = \frac{2\pi\gamma}{\omega_B}\sin^2\Theta \tag{2}$$

- период между импульсами излучения, которые измерит удаленный наблюдатель, θ - угол между направлением наблюдения и образующей конуса излучения, причем приведенный результат применим при питч-углах $\Theta \gg \theta$.

Модифицированные функции Бесселя в (1) убывают экспоненциально при больших значениях аргумента (см. формулу (1.170)). Поэтому граничную частоту ω_c спектра можно оценить, приравняв единице величину $\xi(\omega,\theta)$, взятую при $\theta = 0$:

$$\omega_c = \frac{3c\gamma^3\sin\Theta}{a} = 3\omega_B\gamma^2\sin\Theta \tag{3}$$

15.33. Интегрируя полученный выше результат по углу θ, как это было сделано в задаче 5.86, найдем

$$\frac{dP_\omega}{d\omega} = \frac{N_0}{4\sqrt{3}\pi^2}\frac{e^2\omega}{c\sin^3\Theta}\left(\frac{1}{\gamma^2}+\frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)\int\limits_\eta^\infty K_{5/3}(x)dx \tag{1}$$

$$\eta = \frac{2\omega\gamma}{3\omega_B\sin\Theta}\left(\frac{1}{\gamma^2}+\frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)^{3/2}$$

Анализ этого общего результата аналогичен произведенному в примере 15.12. Найдем наименьшее возможное значение параметра $\eta(\omega)$:

$$\eta_{\min} = \frac{\sqrt{3}\omega_p}{\gamma\omega_B\sin\Theta} = \frac{3^{3/2}\gamma\omega_p}{\omega_c} \quad \text{при} \quad \omega = \sqrt{2}\gamma\omega_p \tag{2}$$

Если параметры таковы, что $\eta_{\min} \gg 1$, то излучение экспоненциально мало при всех частотах, оно подавлено эффектом плотности среды. В вакууме такое подавление отсутствует (см. задачу 5.86). При $\eta_{\min} \ll 1$ имеем значительный диапазон частот, в котором влияние плазменной среды мало. Если выполнено условие $\eta < 1$ $\left(\omega_c > \omega > \gamma\omega_p\eta_{\min}^{1/2}\right)$, то с помощью формулы (1.168) находим

$$\frac{dP_\omega}{d\omega} = \frac{\sqrt{3}\Gamma(2/3)N_0}{4\pi^2}\frac{e^2\omega_B}{c\sin^2\Theta}\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{1/3} \tag{3}$$

В вакууме такой спектр формируется при всех частотах $\omega < \omega_c$. При более высоких частотах, $\omega > \omega_c$, влияние среды тоже не сказывается, но спектральная плотность эксноненциально убывает с ростом частоты:

$$\frac{dP_\omega}{d\omega} = \frac{\sqrt{3}N_0}{8\pi^{3/2}}\frac{e^2\omega_B}{c\sin^2\Theta}\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^{1/2}e^{-2\omega/\omega_c} \tag{4}$$

Но в области низких частот, $\omega < \gamma\omega_p\eta_{\min}^{1/2}$, излучение сильно подавлено и практически отсутствует:

$$\frac{dP_\omega}{d\omega} = \frac{3^{1/4}N_0}{24\pi^{3/2}}\frac{e^2\omega_B}{c\sin^2\Theta}\eta_{\min}^{1/2}\ \exp\left(-\frac{2\gamma^3\omega_p^3}{\omega_c\omega^2}\right) \tag{5}$$

Подавление излучения при низких частотах происходит и в том случае, когда релятивистские электроны распределены по энергиям по степенному закону. Подробный анализ спектров радиоисточников и более подробную теорию см. в статьях Разина (1960), Гундырева и Разина (1995).

15.34. Для одной цепочки

$$U(\rho) = \pm\frac{2Ze^2}{b}K_0\left(\frac{\rho}{R}\right)$$

для многих цепочек

$$U(y,z) = \pm\frac{2Ze^2}{b}\sum_n K_0\left(\frac{|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}_n|}{R}\right)$$

где ρ_n - координаты цепочек на плоскости $x = \text{const}$.

15.35. $U(x) = \pm\left(2\pi Ze^2R/a^2\right)e^{-|x|/R}$ - для одной плоскости, $U(x) = \pm\left(2\pi Ze^2R/a^2\right)\sum\limits_n e^{-|x-nb|/R}$ - для системы плоскостей.

15.36. Если можно выделить отдельную цепочку атомов, потенциал которой аксиально симметричен, то в поле цепочки интегралами движения будут продольный импульс частицы $p_\parallel$ =const, момент импульса относительно оси $M = \gamma m\rho^2\dot\varphi$ и полная энергия поперечного движения

$$\mathscr{E}_\perp = \frac{\gamma m}{2}\left(\dot\rho^2 + \rho^2\dot\varphi^2\right) + U(\rho) = \frac{\gamma m}{2}\dot\rho^2 + \frac{M^2}{2\gamma m\rho^2} + U(\rho) \tag{1}$$

где ρ, φ - цилиндрические координаты частицы. Значения всех трех интегралов движения определяются начальными условиями. Потенциальная энергия $U(\rho)$ электрона в поле цепочки отрицательна и убывает экспоненциально при больших ρ. Для финитности движения в поперечном направлении (каналирования) требуется условие

$$\frac{\gamma m}{2}\dot\rho_0^2 + \frac{M^2}{2\gamma m\rho_0^2} < |U(\rho_0)| \tag{2}$$

где ноликом отмечены значения величин в точке влета частицы в кристалл. Это условие означает, что полная поперечная энергия электрона отрицательна.

Из закона сохранения энергии (1) определяется в неявной форме зависимость $\rho(t)$:
(3) $\pm\int \frac{d\rho}{\sqrt{(2/\gamma m)\left[\mathscr{E}_\perp - U_{ef}(\rho)\right]}} = t$, где $U_{ef}(\rho) = U(\rho) + \frac{M^2}{2\gamma m\rho^2}$

- эффективная потенциальная энергия. При $M \neq 0$ движение частицы ограничено пределами $\rho_1 \leqslant \rho \leqslant \rho_2$, которые определяются из уравнения $U(\rho_{1,2}) = \mathscr{E}_\perp$. Период радиальных колебаний

$$T = 2\int\limits_{\rho_1}^{\rho_2}\frac{d\rho}{\sqrt{(2/\gamma m)\left[\mathscr{E}_\perp - U_{ef}(\rho)\right]}} \tag{4}$$

За это время азимутальный угол получит приращение

$$\Delta\varphi = \frac{2M}{\gamma m}\int\limits_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{d\rho}{\rho^2\sqrt{(2/\gamma m)\left[\mathscr{E}_\perp - U_{ef}(\rho)\right]}} \tag{5}$$

и релятивистская частица пролетит вдоль цепочки расстояние $\Delta z \approx cT$.
Если условие (2) не выполняется, но угол влета мал, то частица будет совершать надбарьерное движение по сложной траектории, переходя от одной цепочки к другой и попадая в области, где их поля перекрываются.
15.37.

$$F(\theta,\phi,t) = \sum_{l,m} C^0_{lm} Y_{lm}(\theta,\varphi)\exp\left\{im\Omega t - \frac{v}{2\Lambda}l(l+1)t\right\}$$

$$C^0_{lm} = \int F_0(\theta,\phi)Y^*_{lm}(\theta,\phi)d\Omega_p, \quad \Omega = \frac{ec}{\mathscr{E}}B_0, \quad \tau_s = \frac{\Lambda}{v}$$

Значение τ_s показывает, что Λ имеет смысл длины изотропизации.
15.38.

$$N(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{(4\pi t)^{3/2}\kappa_\perp\sqrt{\kappa_\parallel}}\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{4\kappa_\perp t} - \frac{z^2}{4\kappa_\parallel t}\right)$$
$$\overline{x^2} = \overline{y^2} = 4\kappa_\perp t, \quad \overline{z^2} = 4\kappa_\parallel t.$$

15.39. Искомая функция Грина удовлетворяет уравнению

$$\frac{\Lambda}{v}\frac{\partial^2 G}{\partial t^2} + \frac{\partial G}{\partial t} - \kappa\Delta G = \delta\left(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right)\delta\left(t-t'\right) \tag{1}$$

Для более ясной интерпретации смысла этого уравнения и его решения перепишем (1) в другой форме, введя обозначения

$$u = \frac{v}{\sqrt{3}}, \quad \varrho = \frac{1}{\kappa} = \frac{3}{v\Lambda}, \quad u^2\varrho = \frac{v}{\Lambda}, \quad \boldsymbol{R} = \boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}', \quad \tau = t-t': \tag{2}$$

$$\Delta_R G - \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 G}{\partial\tau^2} - \varrho\frac{\partial G}{\partial\tau} = -\varrho\delta(\boldsymbol{R})\delta(\tau) \tag{3}$$

Это уравнение можно интерпретировать как волновое уравнение в среде с потерями: первые два слагаемых в левой части содержат оператор Даламбера, а третье, с первой производной по времени, описывает диссипативный процесс. Скорость u имеет смысл скорости распространения возмущений.

Решение уравнения (3) можно найти тем же способом, каким решалось более простое уравнение (3) в примере 10.6. Усложнение возникает лишь при выполнении обратного преобразования Фурье, когда необходимо обойти разрез в комплексной плоскости. В результате получим функцию Грина

$$G(R,\tau) = \frac{u\varrho}{4\pi R}e^{-u^2 e\tau/2}\{\delta(u\tau - R) +$$

$$+\frac{u\varrho R}{2\sqrt{R^2-u^2\tau^2}}J_1\left[\frac{1}{2}\varrho u\sqrt{R^2-u^2\tau^2}\right]\Theta(u\tau-R)\Bigg\} \tag{4}$$

(подробности вычислений можно найти у Морса и Фешбаха (1958) гл. 7).
Первое слагаемое с дельта-функцией сходно с функцией Грина (5.9) волнового уравнения и выражает собой распространение волны с конечной скоростью u от

точечного источника. Ее ослабление происходит не только за счет геометрического фактора $1/R$, но и вследствие диссипации в среде $\exp\left(-u^2\varrho\tau/2\right)$. Слагаемое с функцией Бесселя отражает чисто диссипативный эффект. Но присутствие ступенчатой функции обеспечивает конечную скорость распространения и этого возмущения. Для перехода к приближению обычной диффузии следует рассмотреть случай $u\tau \gg R, \varrho u^2\tau \gg 1$,
т. е. $v\tau \gg \Lambda$. Используя равенство (1.162) и асимптотическое представление (1.169), без затруднений получим известную функцию Грина уравнения диффузии

$$G(R,\tau) = \frac{1}{(4\pi\kappa\tau)^{3/2}} \exp\left(-\frac{R^2}{4\kappa\tau}\right) \tag{5}$$

Этот закон реализуется по истечении времени, за которое частицы пройдут много длин свободного пробега.

15.40. При переходе из системы среды в лабораторную импульс преобразуется по формулам релятивистской кинематике (см. главу 3):

$$\boldsymbol{p}_0 = \frac{\boldsymbol{p} - \boldsymbol{u}\mathscr{E}/c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \approx \boldsymbol{p} - \frac{\boldsymbol{u}\mathscr{E}}{c^2} \tag{1}$$

Функция распределения в лабораторной системе

$$F(\boldsymbol{p}) = \frac{1}{4\pi} N\left(\left|\boldsymbol{p} - \boldsymbol{u}\mathscr{E}/c^2\right|\right) \approx \frac{1}{4\pi}\left[N(p) - \frac{\mathscr{E}\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{p}}{c^2 p}\frac{\partial N}{\partial p}\right] \tag{2}$$

Плотность тока

$$\boldsymbol{J} = \frac{1}{4\pi}\int \boldsymbol{v} F(\boldsymbol{p}) d\Omega_p = -\frac{p}{3}\frac{\partial N}{\partial p}\boldsymbol{u} \tag{3}$$

15.41. Проинтегрируем обе части уравнения (15.179) по поперечным координатам с учетом малости поперечной диффузии при малых питчуглах. Тогда в стационарном случае и в приближении малого питч-угла уравнение примет вид

$$\frac{\partial F}{\partial s} + \frac{1}{2B}\frac{\partial B}{\partial s}\vartheta\frac{\partial F}{\partial \vartheta} = \frac{1}{l(s)}\frac{1}{\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\vartheta\frac{\partial F}{\partial\vartheta} + \frac{1}{2\pi\vartheta}\delta(\vartheta)\delta\left(s-s_0\right) \tag{1}$$

Здесь в правую часть включен точечный источник, $l(s) = v/b_s(0)$ - продольный пробег частиц. Далее проводим решение аналогично задаче 15.7$^\bullet$ и находим функцию распределения

$$F(s,\vartheta) = \frac{B(s)}{\pi B\left(s_0\right)\overline{\vartheta^2}(s)} \exp\left(-\frac{\vartheta^2}{\overline{\vartheta^2}(s)}\right), \quad \overline{\vartheta^2}(s) = 4\int\limits_{s_0}^{s} \frac{B(s)dz}{B(z)l(z)} \tag{2}$$

Если величины B, l не зависят от s (однородная среда), то квадрат угла рассеяния нарастает пропорционально пройденному пути $s - s_0$. Но в неоднородной среде частицы могут не только изотропизоваться, но и фокусироваться регулярным магнитным полем. Пусть, например, $B \propto s^{-2}$. Такая зависимость приближенно имеет место в солнечном ветре на расстояниях, не превышающих радиуса орбиты Земли. Если по такому же закону меняется и случайное поле, то $l(z) \approx l_0\left(z/s_0\right)^{2(2-\nu)}$ (мы использовали зависимость (15.173) $l \propto R_0^{2-\nu}$ для транспортного пробега). В этом случае из (2) находим $\overline{\vartheta^2}(s) \propto s^{2\nu-3}$ при $s \gg s_0$. При показателе спектра турбулентности $\nu = 3/2$ (слабая МГД турбулентность) имеем $2\nu - 3 = 0$, т.е. пучок частиц распространяется, не увеличивая свой угловой размер. Рассеяние компенсируется фокусировкой в убывающем регулярном магнитном поле.

15.42.

$N(p,t) = \frac{N_0}{(4\pi Dt)^{1/2} p p_0} \left\{ \exp\left[\frac{(p-p_0)^2}{4Dt}\right] - \exp\left[\frac{(p+p_0)^2}{4Dt}\right] \right\}$,
$\bar{p}(t) = 4(Dt/\pi)^{1/2}$ при $\bar{p}(t) \gg p_0$.
Спектр спадает как гауссова экспонента при $p \gg \bar{p}(t)$.
15.43.

$$f(x,t) = \frac{1}{(4\pi\tau)^{1/2}} \exp\left(-\frac{x^2}{4\tau}\right), \quad \bar{p}(t) = p_0 e^{4\tau/\tau_a}.$$

В рассмотренном режиме спектр оказывается очень жестким (много частиц с высокой энергией), а энергия отдельной частицы растет экспоненциально со временем. Но с ростом энергии частицы на некотором этапе ее пробег начинает расти, что снижает темп ускорения. Кроме того, область ускорения имеет конечные размеры, и частица проводит в ней конечное время. Поэтому ускорение всегда происходит до конечной энергии.
15.44. Задача сводится к уже рассмотренной путем введения безразмерного времени $\tau = \int\limits_0^t dt'/\tau_a(t')$. Искомый спектр дается выражениями, полученными в предыдущей задаче, если безразмерное время τ заменить конечной величиной $\tau_0 = \int\limits_0^\infty dt/\tau_a(t)$, где $\tau_a(t) = p^2/D(p,t)$. Коэффициент диффузии должен убывать при $t \to \infty$ быстрее, чем t^{-1}.
15.45. Решаем стационарное уравнение

$$\frac{1}{p^2}\frac{d}{dp}\frac{p^4}{\tau_a}\frac{dN}{dp} - \frac{N}{\tau_d} + \frac{Q_0}{p_0^2}\delta(p-p_0) = 0 \tag{1}$$

где $D(p) = p^2/\tau_a$ - коэффициент диффузии в импульсном пространстве, $\tau_a = \text{const}$. Сингулярный источник частиц заменяем граничными условиями. При $p = p_0$ функция распределения должна быть непрерывна,

$$N|_{p=p_0+0} = N|_{p=p_0-0} \tag{2}$$

Второе граничное условие получим, проинтегрировав обе части уравнения (1) по узкому интервалу импульсов, включающему $p = p_0$, и учтя ограниченность N:

$$\frac{p_0^4}{\tau_a}\left(\left.\frac{dN}{dp}\right|_{p=p_0+0} - \left.\frac{dN}{dp}\right|_{p=p_0-0}\right) = -Q_0 \tag{3}$$

После этого решаем однородное уравнение (1) ($p \neq p_0$). Решение имеет вид

$$N(p) = Ap^{-s_1} \quad \text{при} \quad p > p_0, \quad N(p) = Bp^{s_2} \quad \text{при} \quad p < p_0$$
$$\text{где} \quad s_1 = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{\tau_a}{\tau_d}} + \frac{3}{2}, \quad s_2 = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{\tau_a}{\tau_d}} - \frac{3}{2} \tag{4}$$

Из граничных условий получим

$$N(p) = \frac{N_0}{p_0^3}\left(\frac{p_0}{p}\right)^{s_1}, \quad p > p_0, \quad N_0 = \frac{Q_0\tau_a}{s_1+s_2} \tag{5}$$

Формируется степенной спектр, показатель которого зависит от отношения τ_a/τ_d. Сравним полученный спектр с наблюдаемым спектром космических лучей. Обычно измеряют поток частиц $I(\mathscr{E})$, приходящихся на единицу площади, на один стерадиан и на единичный интервал энергии. С плотностью числа частиц N в фазовом пространстве эта величина связана соотношением

$$I(\mathscr{E})d\mathscr{E} = vNp^2dp = Np^2d\mathscr{E} \tag{6}$$

Наблюдаемый спектр аппроксимируется степенным законом, $I(\mathscr{E}) \propto \mathscr{E}^{-\gamma}$, причем показатель в области энергий протонов $10 \lesssim \mathscr{E} \lesssim 10^6$ ГэВ имеет значение $\gamma \approx 2,7$. Для ультрарелятивистских частиц $\mathscr{E} \approx cp$ и согласно (6) показатель $\gamma = s_1 - 2$. Отсюда находим требуемый параметр: $\tau_a/\tau_d \approx 8$. Следует, однако, иметь в виду, что использованное выше условие трудно обеспечить в конкретных астрофизических условиях в широком интервале энергий. Поэтому полученный степенной спектр с ростом энергии сменится более крутым спадом типа того, который был получен в задаче 15.42 .

15.46. В уравнении (1) предыдущей задачи нужно заменить слагаемое $-N/\tau_d$ величиной

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\kappa\frac{\partial N}{\partial r}$$

описывающей диффузию в обычном пространстве. Переменные в уравнении разделяются, $N(r,p) = R(r)P(p)$, радиальная функция удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial N}{\partial r} = -\frac{\lambda}{\kappa}R \tag{1}$$

где λ - параметр разделения, и во внутренней области имеет вид $R(r) = (A/r)\sin kr$, где $k = \sqrt{\lambda/\kappa}$.

Во внешней области радиальная функция имеет вид $R(r) = B/r$. Сшивание радиальных функций R и потоков частиц $\kappa dR/dr$ при $r = a$ позволяет найти значения $k : k_n a = (\pi/2)(2n+1), n = 0, 1, \ldots$ Таким образом, найден бесконечный набор времен релаксации

$$\tau_{dn} = \frac{1}{\lambda_n} = \frac{\tau_{d0}}{(2n+1)^2}, \qquad \text{где} \qquad \tau_{d0} = \frac{4a^2}{\pi^2\kappa} \tag{2}$$

- наименьшее время релаксации, обозначенное в предыдущей задаче через τ_d.

Функция $P_n(p)$, зависящая от импульса, определяется тем же способом, что и в предыдущей задаче, и имеет тот же вид. Но каждому значению n теперь соответствует свой показатель спектра s_{1n}, растущий с ростом n. Функция распределения имеет вид суммы

$$N(r,t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n R_n(r) P_n(p) \tag{3}$$

При импульсах $p \gg p_0$ главную роль играет слагаемое с $n = 0$. Коэффициенты A_n определяются путем разложения в ряд по ортогональной системе функций $R_n(r)$ с весом r^2 радиальной зависимости источника, которая в нашем случае дается ступенчатой функцией $\Theta(a - r)$. Решая задачу приближенно, с одним временем релаксации, мы потеряли слагаемые с большими показателями спектра (что несущественно, если мы интересуемся высокими энергиями) и неправильно определили пространственное распределение частиц в области ускорения.

15.47. Вводим безразмерные переменные

$$\tau = \frac{1}{p_0^2}\int_0^t D_0(t')\,dt', \quad q = \frac{p}{p_0} \tag{1}$$

и записываем уравнение в виде

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \frac{1}{q^2}\frac{\partial}{\partial q} q^{2+\alpha}\frac{\partial N}{\partial q} \tag{2}$$

Уравнение (2) имеет частное решение вида

$$N_\lambda(q,\tau) = f_\lambda(q) e^{-\lambda^2\tau} \tag{3}$$

причем подстановка $f_\lambda(q) = q^{-(1+\alpha)/2} F_\lambda(\xi)$, где $\xi = q^{1-\alpha/2} (\alpha \neq 2)$ позволяет получить для $F_\lambda(\xi)$ уравнение Бесселя

$$\xi^2 F_\lambda'' + \xi F_\lambda' + \left[\frac{\lambda^2\xi^2}{(1-\alpha/2)^2} - \frac{(1+\alpha)^2}{(2-\alpha)^2}\right] F_\lambda = 0 \tag{4}$$

Ограниченное решение этого уравнения

$$F_\lambda(\xi) = J_\beta\left(\frac{2\lambda\xi}{|2-\alpha|}\right) \tag{5}$$

где индекс функции Бесселя $\beta = (1+\alpha)/|2-\alpha|$.
Общее решение исходного уравнения (2) можно записать в виде интеграла

$$N(q,\tau) = q^{-(1+\alpha)/2} \int\limits_0^t \psi(\lambda) e^{-\lambda^2\tau} J_\beta\left(\frac{2\lambda}{|2-\alpha|} q^{1-\alpha/2}\right) \lambda d\lambda \tag{6}$$

Коэффициент разложения $\psi(\lambda)$ определяется по начальному условию $N(p,0) = N_0\delta(p-p_0)/p_0^2 = N_0 p_0^{-3}\delta(q-1)$ с помощью теоремы ФурьеБесселя:

$$\begin{aligned}\psi(\lambda) &= \frac{2}{|2-\alpha|}\int\limits_0^\infty N_0 p_0^{-3}\delta(q-1) J_\beta\left(\frac{2\lambda}{|2-\alpha|} q^{1-\alpha/2}\right) dq = \\ &= \frac{2N_0}{|2-\alpha| p_0^3} J_\beta\left(\frac{2\lambda}{|2-\alpha|}\right)\end{aligned} \tag{7}$$

Подстановка этого выражения в (6) и интегрирование по λ позволяет получить решение при произвольном $\alpha \neq 2$:

$$N(q,\tau) = \frac{N_0}{|2-\alpha| p_0^3 q^{(1+\alpha)/2}\tau} I_\beta\left(\frac{2q^{1-\alpha/2}}{(2-\alpha)^2\tau}\right) \exp\left\{-\frac{1+q^{2-\alpha}}{(2-\alpha)^2\tau}\right\} \tag{8}$$

где I_β - модифицированная функция Бесселя. Решение описывает эволюцию спектра со временем. После затухания турбулентности спектр имеет форму (8), где надо положить $\tau = \tau_0 = p_0^{-2}\int\limits_0^\infty D_0(t)dt$.

Если произошло сильное ускорение частиц, так что преобладающие импульсы много больше начального $\left(q \sim \tau^{1/(2-\alpha)} \gg 1, \alpha < 2\right)$, то аргумент функции Бесселя мал, и (8) приобретает более простой вид

$$N(q,\tau) = \frac{N_0}{|2-\alpha|^{1+2\beta}\Gamma(1+\beta)\tau_0^{1+\beta}} \exp\left(-\frac{q^{2-\alpha}}{(2-\alpha)^2\tau_0}\right) \tag{9}$$

15.48.

$$z<0, \quad N_1(z,p)=\alpha\int\limits_{q_{\min}}^{p} N_0(q)\left(\frac{q}{p}\right)^{\alpha}\cdot e^{u_1 z/\kappa_1}\frac{dq}{q}+N_0(p)\left(1-e^{u_1 z/\kappa_1}\right)$$

$$z>0, \quad N_2(z,p)=\alpha\int\limits_{q_{\min}}^{p} N_0(q)\left(\frac{q}{p}\right)^{\alpha}\frac{dq}{q}, \quad \alpha=\frac{3u_1}{\Delta u}$$

Здесь через $q_{\min}$ обозначен наименьший импульс доускоряемых частиц. Они инжектируются извне («из бесконечности»). Второе слагаемое перед фронтом описывает частицы, не провзаимодействовавшие с ударным фронтом. Функция $N_0(q)$ обрезается при $q>q_{\max}$, где $q_{\max}$ - наибольший импульс исходной популяции частиц. Поэтому при $p>q_{\max}$ второе слагаемое обращается в нуль, а распределение за фронтом принимает вид $N_2(z,p)\sim p^{-\alpha}$.

15.49. Граничные условия имеют вид

$$N_2(r,p)\to 0 \quad \text{при} \quad r\to\infty; \quad N_1=N_2$$

$$\kappa_2\frac{\partial N_2}{\partial r}-\kappa_1\frac{\partial N_1}{\partial r}=\frac{p}{3}\frac{\partial N_1}{\partial p}\Delta u-\frac{Q_0}{4\pi r_0^2 p_0^2}\delta\left(p-p_0\right) \quad \text{при} \quad r=r_0 \tag{1}$$

Кроме того, обе функции должны быть всюду ограничены.

Задачу удобно решать с помощью преобразования Меллина по переменной p:

$$\bar{N}(r,s)=\int\limits_0^{\infty} N(r,p)p^{s-1}dp \tag{2}$$

Уравнение переноса для образа Меллина во внутренней области принимает вид

$$r\frac{d^2\bar{N}_1}{dr^2}+\left(2-\frac{u}{\kappa}r\right)\frac{d\bar{N}_1}{dr}-\frac{2us}{3\kappa}\bar{N}_1=0 \tag{3}$$

Его решение выражается через вырожденную гипергеометрическую функцию (см. Абрамовиц и Стиган, 1979):

$$\bar{N}_1(r,s)=A(s)\Phi\left(\frac{2s}{3},2,\frac{ur}{\kappa}\right) \tag{4}$$

Во внешней области уравнение записывается в виде

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}r^2\kappa_2'(r)\frac{d\bar{N}_2}{dr}-u_2\frac{r_0^2}{r^2}\frac{d\bar{N}_2}{dr}=0 \tag{5}$$

и имеет решение

$$\bar{N}_2(r,s)=B(s)\left\{1-\exp\left[-\int\limits_r^{\infty}\frac{u_2 r_0^2}{\kappa_2(r)r^2}dr\right]\right\} \tag{6}$$

Сшив решения с помощью граничных условий, получим

$$\bar{N}_1(r,s)=\frac{Q_0 p_0^{s-3}\left(e^{k_2}-1\right)}{4\pi r_0^2 u_2}\frac{\Phi\left(2s/3,2,u_1 r/\kappa_1\right)}{\Psi\left(s,\Delta u,k_1,k_2\right)}$$

$$k_1=\frac{u_1 r_0}{\kappa_1}, \quad k_2=\int\limits_{r_0}^{\infty}\frac{u_2 r_0^2}{\kappa_2(r)r^2}dr \tag{7}$$

(8) $\Psi = \left[1 - \left(e^{k_2} - 1\right) \frac{s\Delta u}{3u_2}\right] \Phi\left(2s/3, 2, k_1\right) + \frac{u_1}{u_2}\left(e^{k_2} - 1\right) \Phi'\left(2s/3, 2, k_1\right)$,

где штрихом обозначена производная от вырожденной гипергеометрической функции по последнему аргументу.

Чтобы выполнить обратное преобразование Меллина, нужно проинтегрировать меллинов образ по контуру, представляющему собой прямую, параллельную мнимой оси на плоскости комплексного s:

$$N(r,p) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\beta - i\infty}^{\beta + i\infty} \bar{N}(r,s) p^{-s} ds \tag{9}$$

Для этого надо найти нули функции Ψ по переменной s. Пользуясь рекуррентными формулами для вырожденной гипергеометрической функции, приведем уравнение $\Psi = 0$ к виду

$$s = \frac{3u_1}{\Delta u}\left\{1 - \frac{1}{k_1} + \frac{\Phi\left(2s/3 - 1, 1, k_1\right)}{k_1 \Phi\left(2s/3, 2, k_1\right)}\right\} + \frac{3u_2}{\Delta u\left(e^{k_2} - 1\right)} \tag{10}$$

Будем интересоваться наименьшим по абсолютной величине положительным корнем уравнения (10), который даст наиболее существенный вклад при $p \gg p_0$. При $k_1 \to \infty, k_2 \to \infty$ получим из (10) $s_0 = 3u_1/\Delta u$, что соответствует ускорению частиц плоским ударным фронтом (см. пример 15.20). При конечных, но больших значениях k_1, k_2 используем асимптотику функции Φ и получим большее значение корня

$$s_0 = \frac{3u_1}{\Delta u}\left[1 + \frac{2u_2}{k_1 \Delta u}\right] + \frac{3u_2}{\Delta u\left(e^{k_2} - 1\right)} > \frac{3u_1}{\Delta u} \tag{11}$$

Выполнив обратное преобразование Меллина, получим

$$N_1(r,p) = \frac{3Q_0}{4\pi r_0^2 \Delta u p_0^3} \frac{\Phi\left(2s_0/3, 2, u_1 r/\kappa_1\right)}{\Phi\left(2s_0/3, 2, k_1\right)} \left(\frac{p_0}{p}\right)^{s_0} \tag{12}$$

$$N_2(r,p) = \frac{3Q_0}{4\pi r_0^2 \Delta u p_0^3 \left(1 - e^{-k_2}\right)} \left\{1 - \exp\left[-\int\limits_r^\infty \frac{u_2 r_0^2}{\kappa_2(r) r^2} dr\right]\right\} \left(\frac{p_0}{p}\right)^{s_0} \tag{13}$$

По сравнению с плоским фронтом спектр оказался более крутым, т. е. энергичных частиц в нем меньше. Это связано как с более быстрым уходом частиц от фронта конечной протяженности, так и с адиабатическим замедлением частиц в сверхзвуковой области (при $r < r_0, \operatorname{div} \boldsymbol{u}_1 = 2u_1/r > 0$, среда расширяется).

13.4.6 Appendix 4. Turbulence and Its Description Using Correlation Tensors

Физическая картина турбулентного движения. Движение жидкости или газа при достаточно высоких скоростях может потерять устойчивость. Примеры неустойчивых состояний МГД систем рассмотрены в задачах 10.77 – 10.80. В неустойчивой среде случайные малые возмущения скорости, поля и других параметров будут нарастать со временем, пока нелинейные и диссипативные процессы не стабилизируют их на некотором равновесном в данных условиях уровне. В неустойчивой системе скорость и другие параметры приобретают нерегулярный характер, их значения в фиксированной точке пространства испытывают хаотические флуктуации (пульсации) по величине и направлению, причем величина флуктуаций скорости не мала по сравнению со средней

скоростью потока. Такое движение приобретает запутанный и нерегулярный характер и называется турбулентным в отличие от регулярного (ламинарного) движения, при котором изменения скорости в пространстве и во времени носят закономерный характер.

Переход к турбулентному движению происходит при достаточно большом значении безразмерного параметра $R = ul/\nu$ - числа Рейнольдса. Здесь u - характерная скорость среды, l - характерный масштаб ее изменения, ν - кинематическая вязкость. Число Рейнольдса представляет собой отношение нелинейного инерционного члена в уравнении движения к диссипативному слагаемому. Записав уравнения движения для несжимаемой нейтральной среды в форме (10.34) (без магнитной силы),

$$\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} = -\frac{1}{\tau}\nabla p + \nu\Delta\boldsymbol{u}, \quad \nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0 \tag{Д4.1}$$

находим

$$R \approx \frac{|(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}|}{|\nu\Delta\boldsymbol{u}|} \approx \frac{ul}{\nu} \tag{Д4.2}$$

если пространственные производные заменить делением на характерный масштаб. Критическое значение R_c числа Рейнольдса, при котором теряется устойчивость ламинарного движения и возникает турбулентность, весьма велико. Так, при течении воды по трубам круглого сечения $R_c \approx 10^3 \div 10^4$
в зависимости от качества обработки поверхности и однородности течения на входе.

Мы будем рассматривать лишь развитую турбулентность, когда в системе возбуждено много макроскопических степеней свободы и существуют движения (вихри, волны, неоднородности и т.п.) разных масштабов в широком диапазоне. Для этого требуется, чтобы число Рейнольдса значительно превышало то пороговое значение R_c, при котором происходит переход от ламинарного к турбулентному течению. Весьма большие числа Рейнольдса характерны для турбулентности в геофизических и астрофизических объектах ввиду значительных характерных масштабов. Так, в атмосфере Земли в городе с крупными зданиями ($l \approx 100$ м) при скорости ветра $u \approx 20$ m/c и кинематической вязкости воздуха $\nu \approx 0.15$ cm^2/ с получаем $R = ul/\nu \approx 10^8$. В гигантских водородных молекулярных облаках галактического диска по наблюдательным данным (Рузмайкин и др., 1988; Вайнштейн и др., 1989) $u \approx 10^6$ cm/c, $l \approx 10$ пк $\approx 3 \times 10^{19}$c, температура порядка 100 K и концентрация молекул достигает 100 частиц/см ^{3}. Это дает $\nu \approx 3 \times 10^{15}$ cm^2/c и $R \approx 10^{10}$.

Если вещество не ионизовано, то в дозвуковой области скоростей ($u \ll c_s$) основными элементами турбулентности выступают вихревые движения разных масштабов. При скоростях $u \gtrsim c_s$ становятся существенными звуковые волны и ударные фронты. В проводящей жидкости и в плазме турбулентные пульсации могут создаваться разными типами волн, возможными в соответствующих средах, в том числе МГД линейными и нелинейными модами.

Усреднение турбулентных величин. Для задания случайного поля турбулентных скоростей нужно указать некоторые усредненные величины, характеризующие такое поле. Для статистически равновесных систем усреднение как правило производят по статистическому ансамблю равновесных состояний (ансамблю Гиббса, см. Дополнение 3). Но все турбулентные системы сильно неравновесны, и вероятности распределения макроскопических скоростей в них неизвестны. Поэтому способ усреднения в таких системах должен быть тесно связан со способом измерения соответствующих величин. Чаще всего измерительные приборы производят усреднение по времени. Промежуток усреднения Δt должен выбираться так, чтобы он превышал периоды всех основных гармонических составляющих турбулентных пульсаций. При таком усреднении пульсации сглаживаются,

$$\langle \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r},t)\rangle \equiv \frac{1}{\Delta t}\int\limits_{\Delta t/2}^{\Delta t/2} \boldsymbol{u}\left(\boldsymbol{r},t+t'\right)dt' = \boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{r},t) \tag{Д4.3}$$

и средняя скорость $\boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{r},t)$ становится регулярной функцией координат и времени, медленно меняющейся на временах Δt. Разность

$$\boldsymbol{u}'(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r},t) - \boldsymbol{u}_0(\boldsymbol{r},t) \tag{Д4.4}$$

называется скоростью пульсаций. Ее среднее значение равно нулю, $\langle \boldsymbol{u}'\rangle = 0$, но двухточечный корреляционный тензор отличен от нуля:

$$U_{\alpha\beta}\left(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2\right) = \frac{1}{\Delta t}\int\limits_{-\Delta t/2}^{\Delta t/2} u'_\alpha\left(\boldsymbol{r}_1,t_1+t'\right)u'_\beta\left(\boldsymbol{r}_2,t_2+t'\right)dt' \tag{Д4.5}$$

Для полного описания случайного поля турбулентных скоростей нужно иметь также и бесконечную совокупность многоточечных корреляционных тензоров более высоких рангов. Через такие тензоры можно выразить среднее значение любого функционала $\langle F\left[\boldsymbol{u}'(\boldsymbol{r},t)\right]\rangle$, который разлагается в степенной ряд по компонентам $\boldsymbol{u}'(\boldsymbol{r},t)$. Но для приближенного решения многих задач достаточно знания средней скорости и корреляционного тензора второго ранга. Например, плотность кинетической энергии несжимаемой турбулентной среды запишется в виде

$$w_k(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{2}\tau\left\{u_0^2 + U_{\alpha\alpha}(\boldsymbol{r},t;\boldsymbol{r},t)\right\} \tag{Д4.6}$$

где τ - плотность массы.

Мы в дальнейшем будем интересоваться только стационарной турбулентностью, усредненные характеристики которой не изменяются со временем. Это означает, что $U_{\alpha\beta}$ будет зависеть только от разности времен $t = t_1 - t_2$ но не от начала их отсчета. Если случайное поле скоростей однородно также и в пространстве, т. е. его средние (но не мгновенные) характеристики не зависят от координат, то радиусы-векторы $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2$ войдут в $U_{\alpha\beta}$ только в виде разности $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2$. Корреляционные тензоры стационарной и однородной турбулентности зависят только от разностей координат и времен каждой пары точек:

$$U_{\alpha\beta}\left(\boldsymbol{r}_1,t_1;\boldsymbol{r}_2,t_2\right) = U_{\alpha\beta}(\boldsymbol{r},t) \tag{Д4.7}$$

При $\boldsymbol{r} = t = 0$ свертка $U_{\alpha\alpha}(0,0) = \langle u'^2\rangle > 0$ дает средний квадрат пульсационной скорости. Но при $t \to \infty$ имеем

$$U_{\alpha\beta}(0,t) = \left\langle u'_\alpha\left(\boldsymbol{r},t_1\right)u'_\beta\left(\boldsymbol{r},t_2\right)\right\rangle \approx \left\langle u'_\alpha\left(\boldsymbol{r},t_1\right)\right\rangle\left\langle u'_\beta\left(\boldsymbol{r},t_2\right)\right\rangle = 0 \tag{Д4.8}$$

так как по истечении длительного промежутка времени всякая взаимозависимость компонент пульсационной скорости ослабляется, и их можно усреднять по отдельности. Время τ_c, в течение которого тензор $U_{\alpha\beta}$ заметно отличен от нуля, называется временем корреляции или временем когерентности компонент скорости. Можно дать и формальное определение времени корреляции для любой пары случайных величин:

$$\tau_c = \frac{1}{U_{\alpha\beta}(0,0)}\int\limits_0^\infty U_{\alpha\beta}(0,t)dt \tag{Д4.9}$$

Аналогичным образом определяется корреляционная длина, или длина когерентности L_c:

$$U_{\alpha\beta}\left(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2,0\right)\to 0 \quad \text{при} \quad |\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2|\gg L_c \tag{Д4.10}$$

Здесь использовано предположение, что турбулентность статистически изотропна и корреляционные длины в разных направлениях одинаковы.

Хотя для неравновесных турбулентных систем распределение вероятностей скоростей и других макроскопических параметров неизвестно, формальное усреднение по ансамблю возможно и в этом случае. Представим себе большое (в пределе - бесконечное) число невзаимодействующих систем, тождественных исходной. Такая совокупность макроскопически тождественных физических систем называется ансамблем. Из-за случайного характера скорости ее значения $u'_\alpha, u''_\alpha, \ldots$ в эквивалентных точках пространства в один и тот же момент времени у разных систем будут, вообще говоря, различными: $u'_\alpha(\boldsymbol{r},t) \neq u''_\alpha(\boldsymbol{r},t) \neq u'''_\alpha(\boldsymbol{r},t) \neq \ldots$ Среднее по ансамблю (или статистическое среднее) - это среднее арифметическое

$$\left\langle u\left(\boldsymbol{r}_1,t_1\right)u\left(\boldsymbol{r}_2,t_2\right)\right\rangle=\lim_{N\to\infty}\frac{u'\left(\boldsymbol{r}_1,t_1\right)u'\left(\boldsymbol{r}_2,t_2\right)+u''\left(\boldsymbol{r}_1,t_1\right)u''\left(\boldsymbol{r}_2,t_2\right)+\ldots}{N} \tag{Д4.11}$$

где N - полное число систем ансамбля. Для многих турбулентных систем средние по ансамблю и по времени (при достаточно большом времени усреднения) совпадают. Такие системы называются эргодическими.

Условие эргодичности [8] для стационарных случайных полей требует достаточно быстрого ослабления корреляции со временем:

$$\lim_{\Delta t\to\infty}\frac{1}{\Delta t}\int\limits_0^{\Delta t}U_{\alpha\beta}(0,t)dt=0$$

При теоретическом анализе случайных полей, как правило, пользуются статистическим усреднением.

Спектральные свойства корреляционных тензоров однородной турбулентности. Одна из главных характеристик турбулентного состояния - распределение энергии турбулентных пульсаций по масштабам λ (или обратным величинам - волновым числам $k=2\pi/\lambda$). В случае нейтральной среды без магнитного поля такое распределение задается фурьеобразом корреляционного тензора второго ранга в совпадающие моменты времени:

$$U_{\alpha\beta}\left(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2,0\right)=\int\widetilde{U}_{\alpha\beta}e^{i\boldsymbol{k}\cdot(r_1-\boldsymbol{r}_2)}\frac{d^3k}{(2\pi)^3} \tag{Д4.12}$$

Энергия E турбулентности на единиду массы определяется сверткой

$$E=\frac{1}{2}U_{\alpha\alpha}(0,0)=\frac{1}{16\pi^3}\int\tilde{U}_{\alpha\beta}(\boldsymbol{k})d^3k \tag{Д4.13}$$

Если турбулентность можно считать не только однородной, но и изотропной, т. е. в среде отсутствуют выделенные направления, то спектральный тензор $\widetilde{U}_{\alpha\beta}(\boldsymbol{k})$ может быть составлен только из компонент вектора k_α и инвариантных единичных тензоров $\delta_{\alpha\beta}, e_{\alpha\beta\gamma}$. Построим сначала спектральный тензор на основе симметричных тензоров $\delta_{\alpha\beta}$ и $k_\alpha k_\beta/k^2$. Он будет определяться двумя скалярными функциями $A(k), B(k)$:

[08] См. Монин и Яглом. 1965.

$$\tilde{U}_{\alpha\beta}(\boldsymbol{k}) = A(k)\delta_{\alpha\beta} + B(k)\frac{k_\alpha k_\beta}{k^2} \qquad (Д4.14)$$

В случае несжимаемой среды условие $\operatorname{div}\boldsymbol{u} = 0$ в фурье-представлении позволяет найти $B(k) = -A(k)$ и записать (Д4.14) в простой форме

$$\widetilde{U}_{\alpha\beta}(\boldsymbol{k}) = A(k)\left(\delta_{\alpha\beta} - \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2}\right) \qquad (Д4.15)$$

Спектральные тензоры (Д4.14) и (Д4.15) легко проинтегрировать по углам и записать энергию (Д4.13) в виде однократного интеграла по абсолютной величине волнового вектора:

$$E = \int_0^\infty \frac{dE}{dk}dk, \quad \text{где} \quad \frac{dE}{dk} = \frac{k^2}{4\pi^2}(3A(k) + B(k)) \qquad (Д4.16)$$

- спектральная плотность энергии турбулентности (в расчете на единицу массы и единичный интервал волновых чисел). Если характерные скорости турбулентных пульсаций u дозвуковые, то эффекты, связанные со сжимаемостью среды, малы, порядка $u/c_s \ll 1$, и спектральная плотность определяется одной скалярной функцией, которая получается из (Д4.16) при $B = -A$:

$$\frac{dE}{dk} = \frac{k^2}{2\pi^2}A(k) \qquad (Д4.17)$$

Последовательная количественная теория, которая позволяла бы вычислять корреляционные тензоры турбулентности и распределение энергии по масштабам, в настоящее время еще не создана. Но существуют приближенные полуколичественные модели, доказавшие свою адекватность для многих относительно простых ситуаций. Наиболее наглядная и апробированная модель такого рода предложена Колмогоровым (1941) и Обуховым (1941) для развитой однородной, изотропной и стационарной турбулентности несжимаемой нейтральной (неионизованной) среды. Она базируется на следующих основных положениях:

а) Энергия, поддерживающая турбулентность, создает движения с пространственными масштабами, которые определяются свойствами конкретных источников энергии (характерное значение этих масштабов обозначим через L - внешний масштаб турбулентности, близкий к введенной выше корреляционной длине L_c). В этой области наиболее крупных масштабов турбулентность может быть неоднородной и анизотропной. В единицу времени в среду поступает средняя энергия порядка ε на единицу массы, которая в стационарном случае должна в конечном счете диссипироваться и переходить в тепло. Величина ε также определяет интенсивность турбулентных пульсаций (см. формулу (Д4.20)).

б) Основная часть энергии турбулентности принадлежит вихревым движениям с масштабами порядка L, которые образуют энергосодержащую область масштабов (и соответствующих волновых чисел в окрестности $k_0 = 2\pi/L$, см. рис. Д4.1). В случае развитой турбулентности $L \gg \nu/u$, поэтому диссипация механической энергии в энергосодержащей области играет малую роль. Основной отток энергии из этой области обусловлен нелинейным дроблением крупных вихрей на более мелкие. Такая возможность заложена в нелинейной структуре уравнений сплошной среды. Каскадное дробление вихрей происходит в широкой области масштабов вплоть до некоторого масштаба l (внутренний масштаб турбулентности), начиная с которого становится

существенной диссипация энергии механического движения. В диапазоне масштабов от L до l основным процессом является

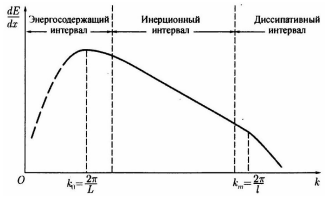


Рис. 15.17

нелинейная передача по спектру всей энергии ε, получаемой от источника, от крупномасштабных к мелкомасштабным движениям. Поскольку основной нелинейный член $(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}$, ответственный за этот процесс, обусловлен силой инерции $d\boldsymbol{u}/dt$, диапазон масштабов $L \gtrsim \lambda \gtrsim l$ называется инерционным. Нелинейный процесс дробления вихрей изотропизует турбулентность, поэтому на масштабах $\lambda \ll L$ она становится локально однородной и изотропной даже в том случае, когда крупномасштабное движение этим свойством не обладает.

в) В инерционном интервале зависимость скорости движения u_λ от масштаба λ можно найти на основе следующих соображений. Пусть время жизни вихря с масштабом λ порядка времени его оборота $\tau_\lambda \approx \lambda/u_\lambda$ («сильная» турбулентность). За время τ_λ энергия этого вихря ($u_\lambda^2/2$ на единицу массы) будет передана более мелкомасштабным движениям. За единицу времени должна быть передана энергия ε, определяемая источниками:

$$\varepsilon \approx \frac{u_\lambda^2}{2\tau_\lambda} \approx \frac{u_\lambda^3}{\lambda} \tag{Д4.18}$$

Отсюда имеем по порядку величины

$$u_\lambda \approx (\varepsilon\lambda)^{1/3} \sim \lambda^{1/3} \tag{Д4.19}$$

(закон Колмогорова-Обухова зависимости скорости от масштаба). Зависимость (Д4.18) по порядку величины сохраняет силу и на масштабе L,
поэтому

$$\varepsilon \approx \frac{u^3}{L} \tag{Д4.20}$$

где u - среднее значение скорости пульсаций, близкое к их максимальной скорости. Но в эту оценку, разумеется, не должна входить средняя скорость потока, если она имеется. В приведенных выше формулах величину u_λ следует понимать как $u_\lambda = \langle \boldsymbol{u}_\lambda^2 \rangle^{1/2}$, поскольку для изотропной турбулентности $\langle \boldsymbol{u}_\lambda \rangle = 0$

г) Диссипативный масштаб l определяется условием приблизительного равенства инерционного и диссипативного членов в этом масштабе: $l^{-1}u_l^2 \approx \nu u_l l^{-2}$, что дает $l \approx \nu/u_l$. С помощью (Д4.19) получаем

$$l \approx \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon}\right)^{1/4} \tag{Д4.21}$$

Масштабы $\lambda < l$ образуют диссипативный диапазон, в котором турбулентность затухает.

Получим с помощью (Д4.19) спектральную плотность энергии (Д4.17). Имеем

$$\lambda = 2\pi/k, \quad u_\lambda^2 = \int_k^\infty \left\langle u_k^2 \right\rangle 4\pi k^2 dk \approx 4\pi \left\langle u_k^2 \right\rangle k^3$$

откуда получаем для инерционного интервала

$$\left\langle u_k^2 \right\rangle = \frac{u_\lambda^2}{4\pi k^3} = \left(\frac{2\pi\varepsilon}{k}\right)^{2/3} \frac{1}{4\pi k^3}$$

Это позволяет записать распределение энергии по спектру:

$$\frac{dE}{dk} = \frac{\langle u_k^2 \rangle}{2} 4\pi k^2 = C\varepsilon^{2/3} k^{-5/3} \tag{Д4.22}$$

(закон Колмогорова-Обухова для спектральной плотности энергии в инерционном интервале волновых чисел). Разумеется, весь приведенный расчет имел характер порядковых оценок. Поэтому безразмерная постоянная C должна определяться из эксперимента. Несмотря на простоту модели, закон Колмогорова-Обухова находит подтверждение в измеряемых характеристиках атмосферной и морской турбулентности, а также турбулентности молекулярных облаков галактического диска.

В более сложном случае, когда корреляционный тензор скоростей содержит единичный антисимметричный псевдотензор $e_{\lambda\mu\nu}$, наиболее простая форма спектрального тензора имеет вид

$$\widetilde{U}_{\mu\nu}(\boldsymbol{k}, t) = A(k, t)\left(\delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right) - iP(k, t) e_{\mu\nu\lambda} k_\lambda \tag{Д4.23}$$

Существенно, что функция $P(k, t)$ здесь должна быть псевдоскаляром, т. е. изменять знак при инверсии пространственных осей. Турбулентность с $P(k, t) \neq 0$ носит название гиротропной (или отражательно неинвариантной). Она может возникнуть, например, во вращающемся теле под действием сил Кориолиса (подробнее см. Вайнштейн и др., 1980). Покажем, что гиротропию турбулентности можно характеризовать интегральным параметром

$$\alpha = -\frac{1}{3}\int_0^\infty \langle \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}, t+\tau) \cdot \operatorname{rot} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}, t)\rangle d\tau = -\frac{\tau_c}{3}\langle \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}, 0) \cdot \operatorname{rot} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}, 0)\rangle \tag{Д4.24}$$

Последнее равенство здесь можно рассматривать как определение корреляционного времени τ_c. Запишем

$$\begin{aligned}\langle \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}, 0) \cdot \operatorname{rot} \boldsymbol{u}(\boldsymbol{r}, 0)\rangle &= e_{\lambda\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_{2\mu}} \left\langle u_\lambda(\boldsymbol{r}_1, 0)\, u_\nu(\boldsymbol{r}_2, 0)\right\rangle \Big|_{\boldsymbol{r}_1 \to r_2} = \\ &= ie_{\lambda\mu\nu} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} k_\mu \widetilde{U}_{\lambda\nu}(\boldsymbol{k}, t)\end{aligned}$$

Подставив сюда (Д4.24) и использовав (Д4.23), получим связь псевдоскадяра α с псевдоскалярной функцией $P(k, 0)$:

$$\alpha = \frac{\tau_c}{3\pi^2}\int_0^\infty k^4 P(k, 0) dk \tag{Д4.25}$$

Интерес к гиротропной турбулентности возрос после того, как было установлена ее способность усиливать крупномасштабное магнитное поле в проводящей среде. Этот вопрос рассмотрен в задачах 10.82-10.84.

Слабая МГД турбулентность в несжимаемой проводящей среде с магнитным полем. Пусть на турбулентную среду с энергосодержащим
масштабом L и скоростью u в этом масштабе наложено внешнее магнитное поле B, плотность энергии которого по порядку величины

$$\frac{B^2}{8\pi} \approx \frac{\tau u^2}{2} \tag{Д4.26}$$

Это означает, что альвеновская скорость порядка скорости в основном масштабе: $u \approx u_A = B/\sqrt{4\pi\tau}$. Даже если первоначально магнитное поле было однородным, со временем из-за вмороженности оно приобретет хаотический характер с наибольшим масштабом неоднородности порядка L. В несжимаемой среде собственные моды - это альвеновские волны, причем в. простой альвеновской волне или в альвеновской волне малой амплитуды магнитная и кинетическая энергии одинаковы в любом масштабе λ (см. формулу (19) из примера 10.9):

$$\frac{B_\lambda^2}{8\pi} = \frac{\tau u_\lambda^2}{2} \tag{Д4.26}$$

Поток энергии по спектру в сторону меньших масштабов возникает вследствие нелинейной генерации мелкомасштабных мод. Обобщение модели Колмогорова-Обухова на рассматриваемый случай можно получить, учитывая, что в масштабах $l \ll \lambda \ll L$ диссипация энергии играет малую роль, а скорости пульсаций малы по сравнению со скоростью в основном масштабе ($u_\lambda^2 \ll u \approx u_A^2$). Запишем поток энергии по спектру ϵ в виде разложения по малому отношению $\langle u_\lambda^2 \rangle / u_A^2$:

$$\epsilon \approx a \left\langle u_\lambda^2 \right\rangle / u_A^2 + b \left(\left\langle u_\lambda^2 \right\rangle / u_A^2 \right)^2 + \ldots \tag{Д4.27}$$

Первое слагаемое, пропорциональное квадрату скорости, может описывать только поток диссипируемой энергии. В пренебрежении диссипацией $a = 0$. Во втором слагаемом b - коэффициент, имеющий размерность ϵ. Его можно составить из масштаба λ и альвеновской скорости u_A, одинаковой для движений всех масштабов: $b = u_A^3/\beta\lambda, \beta$ - безразмерный коэффициент. В итоге получим из (Д4.27) соотношения

$$\epsilon \approx \frac{\left\langle u_\lambda^2 \right\rangle^2}{\beta u_A \lambda}, \quad \left\langle u_\lambda^2 \right\rangle \approx (\beta \epsilon u_A \lambda)^{1/2} \tag{Д4.28}$$

определяющие зависимость турбулентной скорости от масштаба. Переходя к распределению турбулентной энергии по спектру волновых чисел, как это делалось при выводе формулы (Д4.22), находим

$$\frac{dE}{dk} \approx C \left(\varepsilon u_A\right)^{1/2} k^{3/2} \tag{Д4.29}$$

Здесь C - безразмерная постоянная. В силу (Д4.26) спектр энергии турбулентного магнитного поля повторяет спектр кинетической энергии (Д4.29).

На диссипативном масштабе l главную роль начинает играть переход механической и магнитной энергий в тепло, который описывается первым слагаемым в разложении (Д4.27). Это слагаемое с учетом размерного множителя можно записать в виде $\epsilon \approx u_A \left\langle u_l^2 \right\rangle / l$. С другой стороны, диссипируемая энергия складывается из поглощенной механической энергии на единицу массы $\nu \left\langle u_l^2 \right\rangle / l^2$ и аналогичной величины, связанной с магнитным полем: $\nu_m \left\langle B_l^2 \right\rangle / 4\pi\tau l^2 \approx \nu_m \left\langle u_l^2 \right\rangle / l^2$. В итоге имеем $\epsilon \approx (\nu + \nu_m) \left\langle u_l^2 \right\rangle / l^2$ и, сравнивая два полученных выше выражения для ϵ, получаем

$$l \approx \frac{\nu + \nu_m}{u_A} \tag{Д4.30}$$

В последнее время наряду с кратко изложенным выше подходом к теории турбулентности, основанном на ее описании с помощью корреляционных тензоров, получает все большее развитие анализ турбулентного состояния как результата самоорганизации сильно неравновесной и нелинейной открытой системы. С этим кругом идей и методов читатель может познакомиться по обзору Зеленого и Милованова (2004) и цитированной в этом обзоре литературе.

Рекомендуемая литература: [Монин и Яглом (1965); Монин и Яглом (1967); Фриш (1998); Фрик (2003); Фрост и Моулден (1980); Рытов (1978); Лихтенберг и Либерман (1984); Вайнштейн и др. (1989)].

Part VI
Problems in Electrodynamics

14 Typical Problems

14.1 Basic Laws and Models

14.1.1 Introductory Problems about Maxwell's equations

O2-12.1

Считая известным закон Био и Савара $\mathbf{B} = \frac{1}{c}\int \frac{[\mathrm{jR}]}{R^3}dV$ (в пустоте) и формулу векторного анализа $\mathrm{rot}(f\mathbf{a}) = f\ \mathrm{rot}\ \mathbf{a}+ +[\mathrm{grad}\, f\mathbf{a}]$, показать, что $\mathbf{B} = \mathrm{rot}\,\mathbf{A}$, где $\mathbf{A} = \frac{1}{c}\int \frac{\mathbf{j}}{R}dV$. Вектор $\mathbf{A}$ называют вектор-потенциалом.

O2-12.2

Обкладки плоского конденсатора имеют форму дисков радиусом R. Пространство между обкладками заполнено однородным диэлектриком с диэлектрической и магнитной проницаемостями ε и μ. Конденсатор включен в цепь переменного тока $\mathfrak{g} = \mathscr{J}_0 \cos\omega t$. Пренебрегая краевыми эффектами, вычислить электрическую и магнитную энергии, локализованные в конденсаторе. Найти отношение максимальной магнитной к максимальной электрической энергии. Расстояние между обкладками конденсатора d. Провести числовой расчет для $R = 10$ см, частоты $v = 100$Г и $\varepsilon = \mu = 1$.

12.2

$* \frac{W_{\mathrm{M}}^{\max}}{W_{\mathrm{B}}^{\max}} \approx 0,5 \cdot 10^{-14}$.

Решение. Электрическая энергия (в гауссовой системе)

$$W_{\ni} = \frac{q^2}{2C} = \frac{2d\mathscr{I}_0^2 \sin^2\omega t}{\varepsilon\omega^2 R^2}.$$

Магнитное поле внутри конденсатора создается током смещения. На расстоянии r от оси конденсатора оно найдется из соотношения

$$H \cdot 2\pi r = \frac{4\pi}{c}\mathscr{I}_{\mathrm{CM}} = \frac{4\pi}{c}\left(\frac{r}{R}\right)^2 \mathscr{G},$$

откуда

$$H = \frac{2r}{cR^2}\mathscr{G} = \frac{2r}{cR^2}\mathscr{G}_0 \cos\omega t$$

Магнитная энергия, локализованная в конденсаторе:

$$W_{\mathrm{M}} = \frac{\mu}{8\pi}\int H^2 dV = \frac{\mu d\mathscr{I}_0^2 \cos^2\omega t}{4C^2}.$$

Отношение максимальных энергий:

$$\frac{W_M^{\max}}{W_{\ni}^{\max}} = \frac{\varepsilon\mu}{2}\left(\frac{\omega R}{2c}\right)^2 \approx 0,5 \cdot 10^{-14}$$

O2-12.3

Пространство внутри длинного соленоида, состоящего из N витков проволоки, заполнено однородным веществом с диэлектрической проницаемостью ε и магнитной проницаемостью μ. Длина соленоида равна l, радиус R. По обмотке соленоида течет переменный ток $= {}_0 \cos\omega t$. Пренебрегая краевыми эффектами, вычислить магнитную и электрическую энергии, локализованные внутри соленоида, и найти отношение максимальных значений этих энер$\nu = 100$Г.

12.3

$W_{\text{M}} = \frac{2\pi^2\mu R^2 N^2}{c^2 l}\mathscr{O}_0^2\cos^2\omega t; \quad W_3 = \frac{\varepsilon\mu^2\pi^2\omega^2 R^4 N^2}{4c^4 l}\frac{2}{0}\sin^2\omega t;$

$$\frac{W_3^{\max}}{W_M^{\max}} = \frac{\varepsilon\mu}{2}\left(\frac{\omega R}{2c}\right)^2 \approx 1,3\cdot 10^{-15}$$

O2-12.4*

Заряженный и отключенный от источника электричества плоский конденсатор медленно разряжается объемными токами проводимости, возникающими в диэлектрике между обкладками из-за наличия слабой проводимости. Пренебрегая краевыми эффектами, вычислить напряженность магнитного поля внутри конденсатора.

12.4

* $H = 0$.

Решение. Если σ - поверхностная плотность электричества на положительной обкладке, то $D = 4\pi\sigma$ и, следовательно, $j_{\text{см}} = \frac{1}{4\pi}\dot{D} = \dot{\sigma}$. По закону сохранения электрического заряда $j = \dot{\sigma}$. Следовательно, $j_{\text{полн}} = j + j_{\text{см}} = 0$. Магнитное поле в конденсаторе равно нулю.

O2-12.5

Заряженный и отключенный от источника электричества плоский конденсатор, состоящий из двух одинаковых дисков радиусом R, пробивается электрической искрой вдоль своей оси. Считая разряд квазистационарным и пренебрегая краевыми эффектами, вычислить мгновенное значение напряженности магнитного поля H внутри конденсатора (в зависимости от расстояния r до его оси), если сила тока в электрической искре в рассматриваемый момент вре

12.5

$H = \frac{2\mathscr{J}}{cr}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$.

Решение. В силу симметрии магнитные силовые линии будут коаксиальными окружностями с общей осью, совпадающей с осью конденсатора. Поле H найдется по формуле

$$\oint(\mathbf{H}d\mathbf{l}) = 2\pi r H = \frac{4\pi}{c}(\ + {}_{\text{см}})$$

где ${}_c = \mathscr{C}r^2/R^2$ - ток смещения, пронизывающий круг радиусом r. В результате получим ответ.

O2-12.6

Плоский конденсатор состоит из двух одинаковых металлических дисков, пространство между которыми заполнено однородным диэлектриком с диэлектрической проницаемостью ϵ. Расстояние между внутренними поверхностями дисков равно d. Между обкладками конденсатора поддерживается переменное напряжение $V = V_0\sin\omega t$. Пренебрегая краевыми эффектами, найти магнитное поле H в пространстве между обкладками конденсатора.

12.6

$H = \frac{\varepsilon\omega r}{2cd}V_0\cos\omega t$, где r - расстояние от оси конденсатора. Магнитные силовые линии имеют форму коаксиальных окружностей с общей осью, совпадающей с осью конденсатора.

O2-12.7

К плоскому воздушному конденсатору, обкладки которого имеют форму дисков с зазором $d = 1$ см между ними, приложено переменное напряжение $V = V_0\cos\omega tc$ амплитудой $V_0 = 300$ В и круговой частотой $\omega = 3\cdot 10^6\text{с}^{-1}$. Найти амплитуды полей H_0 и B_0 на расстоянии $r = 1$ см от оси конденсатора, если это расстояние меньше радиуса обкладок конденсатора. Как изменятся эти амплитуды, если зазор между обкладками заполнить однородным диэлектриком с $\varepsilon = 10$ и $\mu = 100$?

12.7

$H_0 = \frac{\omega}{c}\frac{V_0 r}{2d} = 5 \cdot 10^{-5}$; $\quad B_0 = H_0 = 5 \cdot 10^{-5}$Гс;

$$H_1 = \varepsilon H_0 = 5 \cdot 10^{-4}; \quad B_1 = \mu H_1 = 5 \cdot 10^{-2}\text{Гс}$$

О2-12.8

Плоский воздушный конденсатор, обкладками которого являются два одинаковых диска, заряжен до высокой разности потенциалов и затем отключен от источника напряжения. В центре конденсатора происходит пробой (проскакивает электрическая искра), в результате чего конденсатор разряжается. Считая разряд квазистационарным и пренебрегая неоднородностью поля на краях конденсатора, определить полный поток электромагнитной энергии, вытекающий из пространства между обкладками. Обсудить явление с точки зрения сохранения и ггревращения энергии.

12.8

Поток энергии равен нулю (см задачу 12.5).

О2-12.9

Плоскому конденсатору емкостью C, обкладками которого являются два одинаковых диска, сообщен заряд Q. Затем конденсатор отключают от источника электричества. После этого пластины соединяют длинным цилиндрическим проводом, проходящим вне конденсатора, и конденсатор разряжается. Пренебрегая неоднородностью поля на краях конденсатора, показать непосредственным расчетом, что полный поток электромагнитной энергии из конденсатора равен полному потоку электромагнитной энергии, втекающему внутрь провода. Проанализировать явление с точки зрения представления о движении, превращении и сохранении энергии.

12.9

Поток электрической энергии вытекает из конденсатора через его края, втекает внутрь провода и там превращается во внутреннюю (тепловую) энергию.

О2-12.10

Найти плотность тока смещения $j_{\text{см}}^{\text{в плоском конденса-}}$ торе, пластины которого раздвигаются со скоростью u, оставаясь параллельным друг другу, если: 1) заряды на пластинах конденсатора остаются постоянными; 2) разность потенциалов V между пластинами остается постоянной. Расстояние d между пластинами конденсатора остается все время малым по сравнению с линейными размерами пластин. 3) Что изменится, если пластины конденсатора будут сближаться, а не раздвигаться?

12.10

1) $j_{\text{СМ}} = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial D}{\partial t} = 0$; 2) $j_{\text{СМ}} = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial D}{\partial t} = -\frac{1}{4\pi}\frac{Vu}{d^2}$.
3) Изменится знак тока смещения.

14.1.2 Problems about different special phenomena and devices 1

ТУЙМ-77. Два кольца (1995)

Два одинаковых тонких кольца радиусами $R = 50$ мм имеют общую ось и расположены в параллельных плоскостях на расстоянии $d = 12$ см друг от друга. По одному кольцу распределён заряд $q_1 = 0,60$ мкКл, а по второму - заряд $q_2 = 0,82$ мкКл. Найдите работу A электростатических сил при перемещении точечного заряда $q = 3,0$ нКл из центра первого кольца в центр второго.

ТУЙМ-77. Два кольца (1995)

We have just two fields from two charges, co we sum Coulomb's laws. One should just to mathematics carefully.

Сначала выведем формулу для потенциала электростатического поля, создаваемого заряженным кольцом. Для этого рассмотрим тонкое кольцо радиусом R с зарядом Q и точку P на оси кольца на расстоянии x от его центра O (рис. 141).

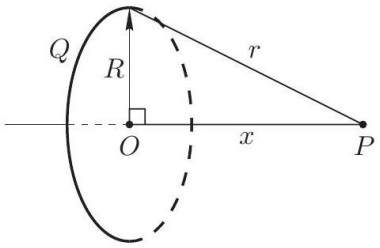


Рис. 141

Мысленно разобьём кольцо на множество точечных зарядов: $Q = Q_1 + \ldots + Q_n$. Согласно теореме Пифагора каждый такой заряд находится на расстоянии $r = \sqrt{R^2 + x^2}$ от точки P. С помощью формулы для потенциала точечного заряда и принципа суперпозиции выразим потенциал φ, создаваемый всем кольцом в точке P:

$$\varphi = \frac{kQ_1}{r} + \ldots + \frac{kQ_n}{r} = \frac{kQ}{r} = \frac{kQ}{\sqrt{R^2 + x^2}}$$

Отметим, что в силу общности вывода полученная формула справедлива для любого распределения заряда по кольцу.

Искомая работа находится по формуле $A = qU$, где $U = \varphi_1 - \varphi_2$ - напряжение, или разность потенциалов φ_1 и φ_2 между центрами колец. С помощью формулы (189) и принципа суперпозиции находим

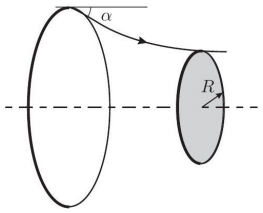
$$\varphi_1 = \frac{kq_1}{\sqrt{R^2 + 0^2}} + \frac{kq_2}{\sqrt{R^2 + d^2}} \quad \text{и} \quad \varphi_2 = \frac{kq_1}{\sqrt{R^2 + d^2}} + \frac{kq_2}{\sqrt{R^2 + 0^2}}.$$

После подстановки φ_1 и φ_2 окончательно получим

$$A = kq\,(q_1 - q_2)\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{\sqrt{R^2 + d^2}}\right) \approx -73{,}1 \text{ мкДж}.$$

ТУЙМ-79. Заряженное кольцо (2001)

Тонкий диск радиусом R и кольцо, изготовленное из проволоки малого диаметра, расположены соосно (рис. ниже).



По кольцу равномерно распределён такой заряд q, что силовые линии, выходящие из кольца под углом $\alpha = 45^\circ$ к оси симметрии системы, как раз касаются края диска, который не заряжен (плотность зарядов на диске везде равна 0). С какой силой будут взаимодействовать кольцо и диск, если диск также зарядить зарядом q, равномерно распределённым по поверхности диска?

ТУЙМ-79. Заряженное кольцо (2001)

Из соображений симметрии следует, что искомая сила направлена перпендикулярно плоскости диска. Поэтому для её нахождения следует сложить лишь те составляющие сил, приложенных к каждому элементу диска, которые направлены перпендикулярно плоскости диска:

$$F = \sigma \sum E_i \Delta S_i = \sigma \Phi$$

где σ - поверхностная плотность зарядов диска, ΔS_i-площадь элементарного участка диска, E_i - модуль составляющей напряжённости поля на этом участке, которая перпендикулярна диску, Ф - поток напряжённости электрического поля через диск [2].

Из теоремы Гаусса следует, что поток поля остаётся постоянным внутри выделенной в пространстве трубки, образующими которой являются силовые

[2] Имеется в виду поток той составляющей электрического поля, которая создана зарядами, расположенными на проволочном кольце.

Диск при вычислении потока рассматривается в этой ситуации исключительно как геометрический объект (не содержащий каких-либо зарядов).

Мы не рассматриваем тонкостей определения и вычисления потока электростатического поля через заряженную поверхность, которых в этой ситуации много. Например, казалось бы, заряд на плоскости не может повлиять на поток в месте своего расположения (так как из него выходит «поровну» силовых линий как по одну, так и по другую сторону плоскости диска). Но эти силовые линии затем могут «развернуться»и пересечь диск в другом месте, создав там дополнительный поток. Однако все подобные эффекты соответствуют только внутренним силам взаимодействия между частями диска и не влияют на силу взаимодействия диска с кольцом. линии. В самом деле, в объёме такой трубки, ограниченной двумя сечениями, нет электрических зарядов, и, в соответствии с теоремой Гаусса, поток через границу этого объёма равен нулю. Поток через боковую поверхность трубки равен нулю по определению силовых линий. Следовательно, потоки через сечения трубки равны по модулю.

Применим свойство постоянства потока к данной задаче. С этой целью найдём поток Ф, создаваемый зарядами кольца внутри трубки, ограниченной силовыми линиями, которые проходят через кольцо и край диска. Поток, создаваемый всем кольцом, в соответствии с принципом суперпозиции складывается из потоков, создаваемых элементами кольца. Электрическое поле элемента кольца в непосредственной близости от него почти не отличается от поля равномерно заряженной прямолинейной нити (рис. 144). Силовые линии этого поля изображены на рис. 144. Так как $\alpha = 45°$, через диск проходят лишь те

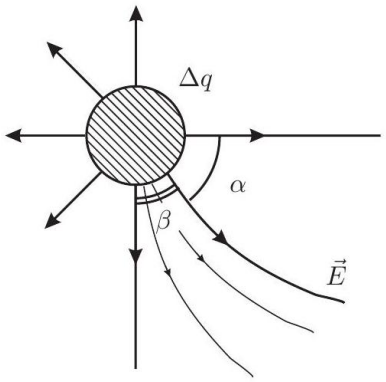


Рис. 144 силовые линии, которые выходят из кольца под углом β,

$$0° \leqslant \beta \leqslant \frac{\pi}{2} - \alpha = 45°.$$

Вследствие симметрии поля вокруг прямолинейной заряженной нити этим углам β соответствует лишь $1/8$ полного потока поля нити, равного

$$\Delta\Phi = \frac{\Delta q}{\varepsilon_0}$$

где Δq - заряд элемента нити, а ε_0 - электрическая постоянная. В результате

$$\Phi = \frac{q}{8\varepsilon_0}$$

и из формулы (193) получаем

$$F = \frac{\sigma q}{8\varepsilon_0} = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 R^2}$$

ТУЙМ-82. Дрейф (2002)

Вблизи длинного прямолинейного провода, по которому течёт ток I, поместили частицу с зарядом q и массой m на расстоянии r_0 от провода и сообщили ей скорость v_0, направленную против тока.

• Найдите минимальное $r_{\min}$ и максимальное $r_{\max}$ расстояния от частицы до провода в процессе движения. На каком расстоянии от провода скорость частицы направлена перпендикулярно к нему?

Найдите скорость $\vec{u}$ дрейфа частицы, то есть скорость смещения вдоль провода максимально и минимально удалённых от него точек траектории при условии

$$\alpha = 2\pi\frac{mv_0}{\mu_0 qI} \ll 1$$

где μ_0 - магнитная постоянная.

ТУЙМ-82. Дрейф (2002)

На движущуюся заряженную частицу вблизи провода с током действует сила Лоренца. Силовые линии магнитного поля тока представляют собой перпендикулярные к току окружности, центры которых лежат на проводе. Модуль индукции магнитного поля находится по формуле

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

где r - расстояние от точки поля до провода.

На рис. 151 показаны соответствующие первому пункту задачи направления тока, текущего в проводнике, начальная скорость частицы $\vec{v}_0$, скорость $\vec{v}$ в произвольный момент времени, направление индукции магнитного поля $\vec{B}$, а также сила Лоренца $\vec{F}$.

Поскольку векторы $\vec{v}$ и $\vec{F}$ лежат в одной плоскости, траектория движения лежит в плоскости xy декартовой системы координат, указанной на рис. 151.

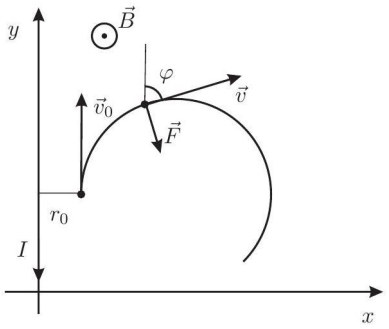


Рис. 151

Запишем уравнение движения частицы в проекции на ось y. При этом учтём, что проекция силы Лоренца $F_y = -q\dot{x}B$, где точка над символом обозначает производную по времени t. Уравнение движения принимает вид

$$m\ddot{y} = -q\dot{x}B, \quad \text{или} \quad m\ddot{y} + \frac{\mu_0 q I \dot{r}}{2\pi r} = 0.$$

Интегрируем это уравнение с учётом того, что при $t = 0$ имеем $\dot{y} = v_0$, а $r = r_0$:

$$\dot{y} = v_0 - \frac{\mu_0 q I}{2\pi m} \ln \frac{r}{r_0}$$

Поскольку сила Лоренца не меняет модуль скорости, при минимальном расстоянии $r = r_{\min}$ имеем $\dot{y} = v_0$, а при максимальном расстоянии $r = r_{\max}$ имеем $\dot{y} = -v_0$ (рис. 151). Поэтому из уравнения (203) получаем

$$r_{\min} = r_0, \quad r_{\max} = r_0 \exp\left(\frac{4\pi m v_0}{\mu_0 q I}\right).$$

Если скорость частицы перпендикулярна проводу, то $\dot{y} = 0$. В этом случае из формулы (203) находим

$$r = R = r_0 \exp\left(\frac{2\pi m v_0}{\mu_0 q I}\right).$$

Во втором пункте требуется найти скорость дрейфа. Какой смысл вкладывается в этот термин? Если

$$\frac{r_{\max} - r_{\min}}{r_{\min}} \ll 1$$

то есть $\alpha \ll 1$, то приближённо можно пренебречь неоднородностью магнитного поля. Поэтому в этих условиях движение частицы мало отличается от движения по окружности радиусом

$$R_0 = \frac{r_{\max} - r_{\min}}{2}$$

с угловой скоростью

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{qB}{m} = \frac{q}{m} \cdot \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{v_0}{\alpha r}$$

Величину R_0 называют циклотронным радиусом, а ω - циклотронной частотой. Центр орбиты частицы всё время находится на расстоянии R, определяемом формулой (204), от провода. Неоднородность магнитного поля искажает движение по круговой орбите: циклотронный кружок как

бы медленно смещается вдоль оси y, дрейфует. Скорость этого дрейфа и требуется определить в задаче. Для этого нужно поделить смещение частицы вдоль оси y за период на это время:

$$u_y = \frac{1}{T}\int\limits_0^T \dot{y}dt = \frac{1}{T}\int\limits_0^T v_0\cos\varphi dt$$

где φ - угол, который образует скорость $\vec{v}$ с осью y. Для нахождения зависимости этого угла от времени обратимся к уравнению (203), переписав его следующим образом:

$$r = r_0\exp(\alpha(1-\cos\varphi))$$

Продифференцируем это уравнение по времени:

$$\dot{r} = v_0\sin\varphi = (\alpha r_0\exp(\alpha(1-\cos\varphi))\sin\varphi)\,\dot{\varphi}.$$

Подставим выраженную отсюда величину dt в формулу (205) и учтём малость α:

$$u_y = \frac{1}{T}\int\limits_0^{2\pi} v_0\frac{\alpha r_0\exp(\alpha(1-\cos\varphi))\sin\varphi\cos\varphi d\varphi}{v_0\sin\varphi} \approx$$

$$\approx \frac{1}{T}\int\limits_0^{2\pi}\alpha r_0\cos\varphi(1+\alpha(1-\cos\varphi))d\varphi = -\frac{\pi m v_0^2}{\mu_0 q I}$$

Итак, скорость дрейфа составляет

$$u = \frac{\pi m v_0^2}{\mu_0 q I}$$

и направлена вдоль тока.

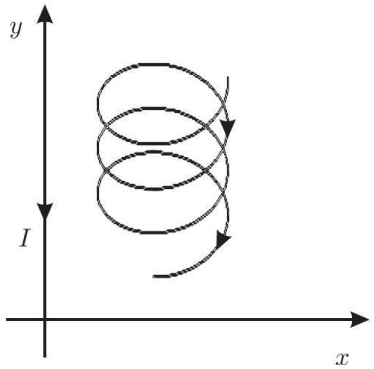


Рис. 152

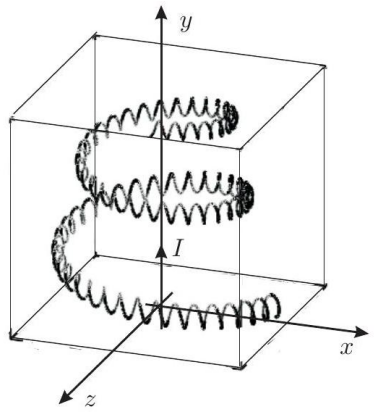


Рис. 153

На рис. 152 показана построенная с помощью системы компьютерной математики MathCAD траектория частицы в условиях данной задачи. На рис. 153 приведена полученная аналогичным образом траектория движения частицы вблизи провода при условии, что её начальная скорость не лежит в одной плоскости с током и что ток монотонно меняется со временем. Видно, что модель дрейфа циклотронных кружков даёт наглядное представление о характере движения. Эта модель широко используется в физике плазмы, и не только для наглядности, но и для получения количественных результатов.

ТУЙМ-84. Конечная цепочка (2003)

В электрической цепи, изображённой на рис. 39, ЭДС источника $\mathscr{E} = 10$ В. Звено $R_2 - R_3$ повторяется 17 раз.

• Найдите ток, текущий через резистор R_4, если $R_1 = R_3 = R_4 = 3$ Ом, $R_2 = 6$ Ом

Анализ сложных электрических цепей можно упростить, если участок цепи, содержащий несколько источников и резисторов, заменить одним эквивалентным источником с ЭДС $\mathscr{E}_e$ и внутренним сопротивлением R_e. Каким эквивалентным источником (укажите $\mathscr{E}_e$ и R_e) можно заменить участок $A - \mathscr{E} - B$ цепи, изображённой на рис. 39?

В цепи, изображённой на рис. 39, $R_1 = 3$ Ом, $R_2 = 6$ Ом, $R_3 = 1$ Ом, $R_4 = 17$ Ом. Найдите ток через резистор R_4.

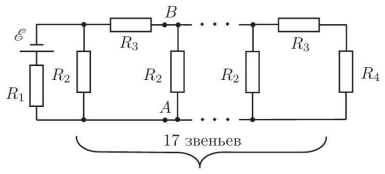


Рис. 39

ТУЙМ-84. Конечная цепочка (2003)

Пусть I - искомый ток через резистор R_4, а I_0 - ток, текущий через источник $\mathscr{E}$ (рис. 156). Так как $R_4 + R_3 = R_2$, токи на параллельно соединённых участках $C - R_4 - D$ и $C - R_2 - D$ одинаковы. Вследствие этого ток, покидающий узел D, равен $2I$.

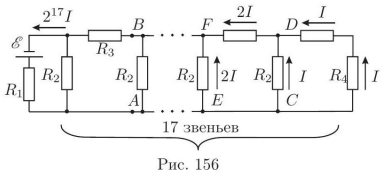


Рис. 156

Сопротивления участков $E - R_2 - F$ и $E - C - D - F$ также одинаковы, поэтому ток, покидающий узел F, вдвое больше тока $2I$, текущего по участку $D - F$. Аналогичная ситуация повторяется и далее: при приближении от R_4 к источнику $\mathscr{E}$ ток удваивается после каждого из 17 звеньев цепочки. Таким образом,

$$I_0 = 2^{17} I$$

Сопротивление всей цепи, подключённой последовательно к R_1, равно $R_2/2$. По закону Ома

$$I_0 = \frac{\mathscr{E}}{R_1 + \frac{R_2}{2}}$$

Из формул (206) и (207) получаем

$$I = \frac{I_0}{2^{17}} = \frac{\mathscr{E}}{2^{17}\left(R_1 + \frac{R_2}{2}\right)} = 1{,}3 \cdot 10^{-5} \text{ А}.$$

Во втором пункте обозначим через R сопротивление всего правого участка цепи, подключённого к точкам A и B (рис. 156). Для эквивалентного источника это сопротивление нагрузки. По закону Ома ток I нагрузки вычисляется по формуле

$$I = \frac{\mathscr{E}_e}{R + R_e}$$

Получим формулу для тока нагрузки без модели эквивалентного источника. К реальному источнику $\mathscr{E}$ последовательно подсоединены резистор R_1 и параллельно соединённые участки, сопротивления которых равны R_2 и $R_3 + R$. По правилам Киргофа

$$\mathscr{E} = I_0 R_1 + I\left(R_3 + R\right),$$
$$\mathscr{E} = I_0 R_1 + \left(I_0 - I\right) R_2.$$

Исключим из этой пары уравнений ток источника I_0:

$$I = \frac{\frac{\mathscr{E} R_2}{R_1 + R_2}}{R + R_3 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}.$$

Сравнивая формулы (208) и (209), видим, что параметры эквивалентного источника таковы:

$$\mathscr{E}_e = \frac{\mathscr{E} R_2}{R_1 + R_2}, \quad R_e = R_3 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

Решение третьей части задачи существенно упрощается использованием рассмотренной в предыдущем пункте модели эквивалентного источника. Участок цепи, включающий источник $\mathscr{E}$, резистор R_1 и первое из 17 звеньев $R_2 - R_3$, заменяем эквивалентным источником. Параметры его находим по формулам (210):

$$\mathscr{E}_e = \frac{2}{3}\mathscr{E}, \quad R_e = R_1$$

Введение рассмотренного эквивалентного источника приводит к следующим изменениям анализируемой цепи: ЭДС источника умножается на $2/3$, резистор R_1 можно считать его внутренним сопротивлением. Зато подключённая к источнику цепочка резисторов уменьшается на одно звено. После 17 таких процедур получаем простую схему: источник, ЭДС которого $(2/3)^{17}\mathscr{E}$, последовательно соединён с резисторами R_1 и R_4. По закону Ома ток I_4 через резистор R_4 равен

$$I_4 = \frac{(2/3)^{17}\mathscr{E}}{R_1 + R_4} = 5,1 \cdot 10^{-4} \text{ А}$$

ТУЙМ-85. Счётчик Гейгера (2003)

В задаче исследуются физические явления, имеющие место в счётчике Гейгера. Счётчиком Гейгера называют прибор, предназначенный для регистрации элементарных частиц посредством измерения тока в газе, вызванного этими частицами. Он представляет собой камеру, заполненную газом, например аргоном.

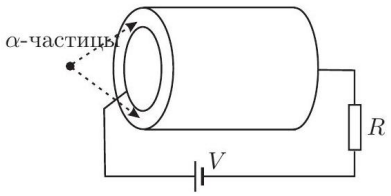


Рис. 40 В камере имеется два электрода, чаще всего в виде коаксиальных (соосных) цилиндров (рис. 40), к которым через резистор R подаётся электрическое напряжение V. Образовавшиеся при ионизации ионы и электроны движутся к противоположным электродам. Появляющийся в результате этого ток создаёт на резисторе R напряжение, которое регистрируется и даёт информацию о прошедших через камеру элементарных частицах.

Иеследуйте процессы, происходящие в счётчике Гейгера при регистрации α-частиц (ядер атомов гелия). Рекомбинацией ионов, а также возникновением лавины ионов пренебречь.

• Электроёмкость конденсатора, образованного электродами счётчика, $C = 45$ пФ, сопротивление резистора $R = 10$ МОм. Счётчик регистрирует α-частицы с энергией $E = 5,3$ МэВ. Длина их свободного пробега в газе, заполняющем счётчик, меньше размеров камеры. Энергия, необходимая для образования пары ионов, заряд каждого из которых равен одному элементарному заряду, $E_i = 35$ эВ. Как с течением времени будет изменяться напряжение на резисторе после попадания в камеру одной α-частицы? Произведение RC много больше времени движения образующихся ионов и электронов в межэлектродном пространстве.

Радиус внутреннего цилиндрического электрода (анода) счётчика равен $R_a = 3,0$ мм, а внешнего $R_c = 10,0$ мм. В результате пролёта ионизирующих частиц на электродах осели ионы, заряд которых, приходящийся на единицу длины цилиндров, равен λ. Получите выражение для напряжённости поля $E(r)$ и потенциала $\varphi(r)$, отсчитываемого от катода, в зависимости от расстояния r до оси цилиндров ($R_a \leqslant r \leqslant R_c$). При какой разности потенциалов между электродами произойдёт пробой газа, если он наступает при напряжённости $E_b = 3$МВ/м?

На счётчик, описанный в предыдущем пункте, падает пучок α-частиц, ионизирующий ежесекундно Γ молекул. Скорость движения v возникающих в результате ионизации положительных ионов пропорциональна напряжённости поля ($v = \mu E$, где μ - подвижность ионов). Найдите установившееся распределение плотности положительных зарядов в зависимости от расстояния до оси. Рекомбинацией ионов и полем объёмных зарядов пренебречь. Считать, что в установившемся режиме заряд единицы длины цилиндров равен λ.

ТУЙМ-85. Счётчик Гейгера (2003)

Попадающие в камеру α-частицы ионизируют молекулы газа. Возникшие ионы оседают на электродах, меняя их первоначальный заряд. Затем заряд осевших ионов стекает через резистор R, и снова устанавливается равновесие. Предположим, что время оседания зарядов на электродах много меньше времени, в течение которого из-

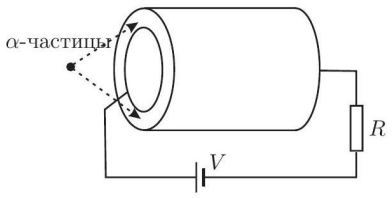


Рис. 157

быточный заряд рассасывается. Тогда задача сводится, во-первых, к нахождению заряда Q, обусловленного осевшими ионами, и, во-вторых, к определению напряжения на резисторе R как функции времени $U = U(t)$. Число пар ионов, генерированных попавшей в камеру частицей, равно $N = E/E_i$. Тогда возникший на электродах вследствие ионизации избыточный заряд определяется формулой

$$Q_0 = e \cdot N = e\frac{E}{E_i}$$

где e - элементарный заряд. Восстановление равновесия при протекании через резистор R тока I описывается соотношениями

$$I = -\frac{dQ}{dt}, \quad V = -IR + \frac{Q_e + Q}{C}, \quad U = IR$$

Здесь V - напряжение источника (рис. 157), $Q_e = CV$ - равновесный заряд конденсатора, Q - избыточный заряд в момент времени t, U - напряжение на резисторе. Из этих соотношений следует, что

$$\frac{dU}{U} = -\frac{dt}{RC}$$

При интегрировании полученного уравнения нужно учесть, что в начальный момент времени $Q = Q_0 = eE/E_i$. Поэтому в этот момент

$$U = \frac{Q_0}{C} = \frac{eE}{CE_i} = 5,4 \cdot 10^{-4} \text{ В}$$

С учётом этого после интегрирования получаем

$$U = \frac{eE}{CE_i} e^{-\frac{t}{RC}}$$

Видно, что напряжение на конденсаторе существенно убывает в течение времени RC. Поскольку в условии сказано, что RC много больше времени оседания ионов на электродах, сделанное в процессе решения предположение справедливо.

Счётчики Гейгера, в которых регистрируются импульсы, вызванные отдельными частицами, называют импульсными ионизационными камерами. Величина импульса, как видно из формулы (211), позволяет измерить энергию частицы E. Параметр RC характеризует разрешающую способность метода, то есть возможность регистрировать каждую частицу в отдельности. Как следует из решения, RC должно быть много больше времени, в течение которого ионы достигают электродов. Это и ограничивает разрешающую способность импульсной ионизационной камеры. Недостатком метода является его малая чувствительность, обусловленная малостью величины U. В данной задаче оказалось, что $U \lesssim 10^{-4}$ В. Можно существенно увеличить чувствительность метода, если повысить напряжение источника V до такой величины, при которой возникает вторичная ионизация, вызванная столкновением ионов и электронов с молекулами газа. Эта идея реализуется в так называемых счётчиках Гейгера-Мюллера. В них на электроды подаётся напряжение, близкое к пробивному. Ионизирующие элементарные частицы инициируют образование лавины ионов. Возникает самостоятельный разряд, который гасится специальными радиотехническими средствами. Счётчики Гейгера-Мюллера обладают большой чувствительностью, но не позволяют измерять энергии регистрируемых частиц. Какое напряжение следует подавать на счётчик Гейгера-Мюллера? Ответы на этот и другие вопросы содержатся в пункте два задачи.

В этом пункте требуется найти распределение напряжённости и потенциала электрического поля внутри камеры счётчика Гейгера. Подобные задачи электростатики удобно решать с помощью теоремы Гаусса. В качестве замкнутой поверхности, через которую следует вычислять поток напряжённости поля, возьмём поверхность соосного с электродами цилиндра радиусом r, расположенного между катодом и анодом. Длина цилиндра равна l. Напряжённость поля направлена в каждой точке от оси цилиндра. Заряд, заключённый внутри выбранной поверхности, равен λl. На основании теоремы Гаусса запишем

$$E(r)2\pi rl = \frac{\lambda l}{\varepsilon_0}$$

где ε_0 - электрическая постоянная, $E(r)$ - модуль напряжённости поля в точках, удалённых от оси на расстояние r. Эту величину и требуется найти:

$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

Для нахождения $\varphi(r)$ воспользуемся формулой, связывающей потенциал с напряжённостью поля:

$$-\frac{d\varphi}{dr} = E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

Проинтегрируем это уравнение, положив потенциал катода равным нулю:

$$\varphi = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{R_c}{r}$$

Это ещё одно искомое в задаче соотношение.

Для нахождения пробивного напряжения заметим, что пробой может произойти там, где напряжённость поля достигает критического значения E_b. Из формулы (212) видно, что поле максимально вблизи анода, то есть при $r = R_a$. При $\lambda = \lambda_b$ оно достигает пробивного значения, для которого

$$E_b = \frac{\lambda_b}{2\pi\varepsilon_0 R_a}$$

Подставляя величины, соответствующие наступлению пробоя, в формулу (213), получим

$$\varphi_b = \frac{\lambda_b}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{R_c}{R_a} = E_b R_a \ln \frac{R_c}{R_a} \approx 11 \text{ кВ}.$$

Таким образом, выясняется, что зарождение ионной лавины, ведущей к пробою, возможно вблизи анода. Чтобы напряжённость поля здесь была близка к пробивному значению, напряжение на счётчике должно быть тем меньше, чем меньше радиус анода. Вот почему анод в счётчиках Гейгера-Мюллера делают в виде тонкой нити.

В отличие от предыдущих пунктов, в пункте 3 анализируется стационарное состояние счётчика, при котором число частиц, генерируемых в любом объёме внутри камеры, равно потоку этих частиц, покидающих данный объём. Счётчики, в которых реализуется такой режим, называют ионизационной камерой непрерывного действия.

Ввиду осевой симметрии конструкции счётчика удобно рассмотреть объём, заключённый между анодом и соосной с ним цилиндрической поверхностью радиусом $r \leqslant R_c$. Число положительных ионов, генерируемых в этом объёме в единицу времени, равно

$$N = \Gamma\pi \left(r^2 - R_a^2\right) l$$

где l - длина выбранной цилиндрической поверхности. Поток ионов, вытекающих из этого объёма в единицу времени, определяется по формуле $\Phi(r) = n(r)v(r)2\pi rl$, где $n(r)$ - число положительных ионов в единице объёма на расстоянии r от оси цилиндра, $v(r)$ - скорость их движения в этом месте. В соответствии с условием $v(r) = \mu E(r)$, а напряжённость $E(r)$ определяется формулой (212). После подстановки этих значений получим

$$\Phi(r) = n(r) \cdot \mu \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \cdot 2\pi rl = n(r) \frac{\lambda\mu}{\varepsilon_0} l.$$

Именно эта величина в стационарном состоянии должна быть равна числу генерируемых ежесекундно в выделенном объёме частиц (215). Поэтому

$$n(r) \frac{\lambda\mu}{\varepsilon_0} l = \Gamma\pi \left(r^2 - R_a^2\right) l, \quad \text{или} \quad n(r) = \frac{\pi\varepsilon_0\Gamma}{\mu\lambda} \left(r^2 - R_a^2\right)$$

Таким образом, концентрация положительных ионов стремится к нулю вблизи анода и достигает наибольшего значения вблизи катода.

ТУЙМ-87. Эффект Холла (2004)

Введём в однородное магнитное поле с индукцией $\vec{B}$ полупроводниковую пластинку толщиной a (рис. 42), по которой течёт ток I. Между поверхностями A и B возникает напряжение U, пропорциональное току I:

$$U = R\frac{BI}{a}.$$

Описанное явление называют эффектом Холла. Величина R - коэффициент Холла. Определите коэффициент Холла в электронно-дырочном полупроводнике.

Ток в таком проводнике обусловлен как электронами, концентрация которых n, подвижность μ_n, так и дырками, концентрация которых p, а подвижность μ_p. Напомним, что подвижностью называют отношение скорости направленного движения частиц к вызывающей это движение силе, приходящейся на их единичный заряд.

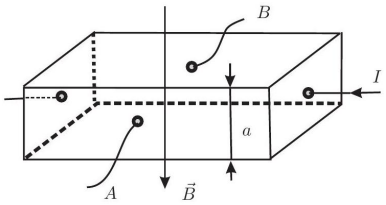


Рис. 42

ТУЙМ-87. Эффект Холла (2004)

Вначале выясним, почему возникает холловская разность потенциалов. На рис. 160 показаны направление магнитного поля $\vec{B}$, направление тока I и соответствующие ему направления движения положительных (дырок) и отрицательных (электронов) носителей зарядов. Магнитное поле искривляет траекторию движения носителей зарядов, как это показано на рис. 160.

Из-за различия потоков электронов и дырок на поверхности A собираются положительные заряды, а на поверхности B отрицательные. Возникает напряжение $\varphi_A - \varphi_B = U$, создающее поперечную напряжённость электрического поля $E_\perp = U/b$, препятствующую дальнейшему оседанию зарядов на поверхностях (рис. 160). В стацио-

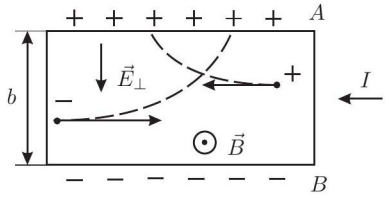


Рис. 160

нарном состоянии поток электронов к пластине должен быть равен потоку дырок:

$$n \cdot v_\perp^n = p \cdot v_\perp^p$$

где $v_\perp^n$ и $v_\perp^p$ - перпендикулярные к граням A и B составляющие скорости электронов и дырок. Эти составляющие обусловлены как силой Лоренца, так и поперечной к пластинам напряжённостью электрического поля $E_\perp$, создаваемого зарядами пластин:

$$v_\perp^n = \mu_n \left(v_n B + E_\perp\right) = \mu_n^2 EB + E_\perp \mu_n,$$
$$v_\perp^p = \mu_p \left(v_p B - E_\perp\right) = \mu_p^2 EB - E_\perp \mu_p.$$

Здесь E - составляющая напряжённости электрического поля вдоль тока I. Она определяет скорость движения носителей вдоль пластин:

$$v_n = \mu_n E, \quad v_p = \mu_p E$$

Эти скорости обеспечивают ток I:

$$I = e\left(n v_n + p v_p\right) ab = eE\left(n\mu_n + p\mu_p\right) ab$$

где e - элементарный заряд, b - ширина пластины. Подставляем выражения (217) и (218) в формулу (216):

$$EB\left(\mu_p^2 p - \mu_n^2 n\right) = E_\perp \left(\mu_n n + \mu_p p\right)$$

Имеем $E_\perp = U/b$, а E определяется равенством (219). Учитывая это, получим

$$U = \frac{BI}{a} \cdot \frac{\mu_p^2 p - \mu_n^2 n}{e\left(\mu_n n + \mu_p p\right)^2},$$

откуда

$$R = \frac{\mu_p^2 p - \mu_n^2 n}{e\left(\mu_n n + \mu_p p\right)^2}$$

Знак коэффициента Холла определяет тип проводимости полупроводника: для полупроводника с дырочной проводимостью $R > 0$, для электронного $R < 0$.

ТУЙМ-89. Молекулярные кристаллы (2005)

В молекулярных кристаллах упорядоченно расположены сравнительно слабо связанные друг с другом структурные единицы, представляющие собой отдельные атомы (или группы сильно связанных между собой атомов). Простейшие молекулярные кристаллы могут образовывать атомы инертных газов, например аргона Ar. Кристалл аргона и изучается в данной задаче.

На сравнительно больших расстояниях друг от друга атомы инертных газов притягиваются слабыми силами, называемыми силами Ван-дер-Ваальса.

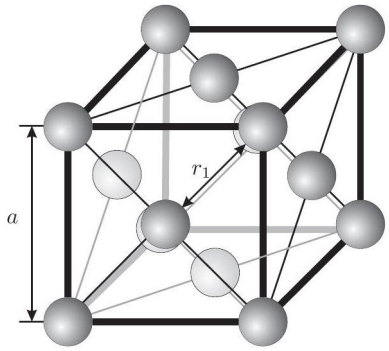


Рис. 43

При значительном сближении атомов проявляется их интенсивное отталкивание. Такое взаимодействие неплохо описывается так называемым потенциалом Леннарда-Джонса:

$$U(r) = 4\varepsilon\left(\left(\frac{\sigma}{r}\right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{r}\right)^{6}\right)$$

Здесь $U(r)$ - потенциальная энергия двух атомов, находящихся на расстоянии r друг от друга; ε и σ - постоянные величины, которые для атомов аргона имеют следующие значения: $\varepsilon = 0,0104$ эВ, $\sigma = 3,40$ Å.

• Изобразите схематично вид зависимости $U(r)$.

Определите равновесное расстояние r_0, на котором находились бы два атома аргона в отсутствие других атомов.

Элементарная ячейка кристалла аргона (рис. 43) представляет собой гранецентрированный куб. Атомы, которые можно считать классическими части- цами, движутся вблизи узлов решётки, совпадающих с вершинами куба и центрами его граней. Кинетическая энергия атомов мала по сравнению с потенциальной энергией. В этом приближении приемлема показанная на рис. 43 модель элементарной ячейки, состоящей из неподвижных шаров, расположенных в узлах решётки.

• Покажите, что энергия взаимодействия атома аргона с кристаллом E (энергия связи) может быть представлена в виде

$$E = 4\varepsilon\left(A\left(\frac{\sigma}{r_1}\right)^{12} - B\left(\frac{\sigma}{r_1}\right)^{6}\right)$$

где r_1 - расстояние между ближайшими соседями. Найдите численные значения коэффициентов A и B, учитывая только вклад от шести групп ближайших атомов (в каждую группу входят атомы, находящиеся на равном расстоянии от рассматриваемого атома).

• Определите постоянную решётки a (рис. 43) для кристалла аргона.

• Найдите модуль всестороннего сжатия кристалла аргона, то есть величину $K := -V\frac{dp}{dV}$, характеризующую изменение его объёма dV при изменении внешнего давления на dp.

ТУЙМ-89. Молекулярные кристаллы (2005)

Для схематического изображения графика потенциала Леннарда-Джонса обратим внимание на поведение функции $U(r)$ при достаточно больших и до- статочно малых r. В первом случае

$$\left(\frac{\sigma}{r}\right)^{12} \ll \left(\frac{\sigma}{r}\right)^{6} \text{ и } U(r) \approx -4\varepsilon\left(\frac{\sigma}{r}\right)^{6}.$$

График такой функции имеет вид кривой 1 на рис. 164. При малых r определяющую роль играет, напротив, слагаемое, пропорциональное r^{-12}. График $U(r)$ в этом приближении имеет вид 2 (рис. 165). Таким образом, функция $U(r)$ при изменении r от 0 до ∞ вначале резко убывает, а затем возрастает, так что её график имеет вид сплошной линии на рис. 165. Равновесному состоянию соответствует расстояние r_0, при котором $U(r)$ имеет минимальное значение (рис. 165).

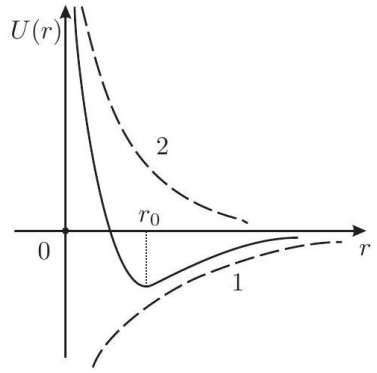


Рис. 164

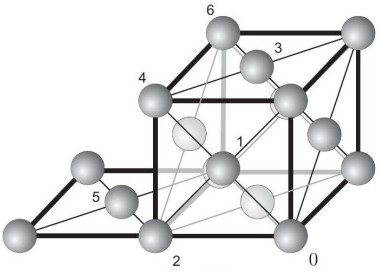


Рис. 165

Для нахождения равновесного расстояния r_0 воспользуемся стандартным приёмом определения экстремума функции, то есть приравняем к нулю производную функции $U(r)$:

$$\frac{dU}{dr} = 4\varepsilon\left(-12\frac{\sigma^{12}}{r^{13}} + 6\frac{\sigma^6}{r^7}\right) = 0.$$

Корнем этого уравнения является искомая величина:

$$r_0 = \sqrt[6]{2}\cdot\sigma \approx 3,82 \text{ Å}$$

Для нахождения потенциальной энергии взаимодействия атома со всей решёткой E нужно сложить энергии взаимодействия рассматриваемого атома с каждым из остальных атомов кристалла:

$$E = \sum_i 4\varepsilon\left(\left(\frac{\sigma}{r_i}\right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{r_i}\right)^6\right)$$

где r_i - расстояние между рассматриваемым атомом и i-м атомом кристалла. Суммирование в формуле (226) предполагается по всем атомам, число которых огромно. Задача нахождения суммы такого числа слагаемых на первый взгляд кажется практически неразрешимой. Тем не менее можно «подобрать ключик» к приближённому решению задачи. Учтём то обстоятельство, что слагаемые приблизительно пропорциональны r_i^{-6}, то есть существенный вклад в сумму вносят главным образом атомы решётки, не очень удалённые от рассматриваемого атома. К тому же вклад в сумму от равноудалённых атомов одинаков. Поступим следующим образом. Вначале учтём в формуле (226) вклад ближайших соседей. Из рис. 165 видно, что расстояние от атома 0 до ближайших соседей $r_1 = a/\sqrt{2}$. Подсчитаем число ближайших к атому 0 соседей. В изображённой на рисунке ячейке это три атома типа 1. К атому 0 примыкают восемь таких ячеек, однако атомы типа 1 одновременно принадлежат двум из рассматриваемых восьми ячеек, так что число ближайших соседей атома 0 равно $3\cdot 8/2 = 12$. Их вклад в сумму (226) составляет

$$E_1 = 12\cdot 4\varepsilon\left(\left(\frac{\sigma}{r_1}\right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{r_1}\right)^6\right)$$

Несколько дальше находятся атомы типа 2 (рис. 165), удалённые на расстояние $r_1\sqrt{2}$. Число таких соседей равно $3\cdot 8/4 = 6$. Каждый из атомов типа 2 одновременно принадлежит четырём из восьми примыкающих к атому 0 ячеек. Вклад этих соседей в формулу (226) составляет

$$E_2 = 6\cdot 4\varepsilon\left(\left(\frac{\sigma}{\sqrt{2}r_1}\right)^{12} - \left(\frac{\sigma}{\sqrt{2}r_1}\right)^6\right)$$

Мы рассмотрели две группы равноудалённых соседей. Аналогично можно выделить группы соседей типа 3, 4, 5, 6 (рис. 165). В приведённой ниже таблице указаны типы соседей атома 0, их числа и расстояния до них.

Типы соседей	1	2	3	4	5	6
Число соседей	12	6	24	12	24	8
Расстояние до соседей	r_1	$\sqrt{2}r_1$	$\sqrt{3}r_1$	$2r_1$	$\sqrt{5}r_1$	$\sqrt{6}r_1$

Запишем вклады в сумму (226) от всех указанных групп аналогично (227) и (228) и сложим полученные равенства. Получим

$$E = 4\varepsilon\left(A\left(\frac{\sigma}{r_1}\right)^{12} - B\left(\frac{\sigma}{r_1}\right)^{6}\right)$$

где

$$A = 12 + 6\frac{1}{(\sqrt{2})^{12}} + 24\frac{1}{(\sqrt{3})^{12}} + 12\frac{1}{2^{12}} + 24\frac{1}{(\sqrt{5})^{12}} + 8\frac{1}{(\sqrt{6})^{12}} \approx$$
$$\approx 12 + 0,094 + 0,033 + 2,930 \cdot 10^{-3} + 1,536 \cdot 10^{-3} + 1,715 \cdot 10^{-4} \approx 12,132,$$
$$B = 12 + 6\frac{1}{(\sqrt{2})^{6}} + 24\frac{1}{(\sqrt{3})^{6}} + 12\frac{1}{2^{6}} + 24\frac{1}{(\sqrt{5})^{6}} + 8\frac{1}{(\sqrt{6})^{6}} \approx$$
$$\approx 12 + 0,75 + 0,889 + 0,188 + 0,192 + 0,037 \approx 14,055.$$

Видно, что каждое следующее слагаемое в выражениях для A и B существенно меньше предыдущего. Поэтому достаточно ограничиться рассмотрением небольшого числа групп соседей. Результаты, полученные для шести таких групп, особенно число A, мало отличаются от табличных значений, найденных при учёте большего числа соседей: $A \approx 12,13$ и $B \approx 14,45$.

Равновесное расстояние r_1 между ближайшими атомами находится приравниванием к нулю производной функции $E = E(r_1)$:

$$\frac{dE}{dr_1} = 4\varepsilon\left(-12A\frac{\sigma^{12}}{r_1^{13}} + 6B\frac{\sigma^6}{r_1^7}\right) = 0.$$

Значение r_1 является корнем этого уравнения:

$$r_1 = \sqrt[6]{2\frac{A}{B}} \cdot \sigma \approx 3,72 \text{ Å}$$

Искомая постоянная решётки кристалла аргона: $a = \sqrt{2}r_1 \approx 5,27$ Å, что мало отличается от значения $a = 5,30$ Å, получаемого в эксперименте.

Модуль всестороннего сжатия

Теперь найдём модуль всестороннего сжатия $K = -Vdp/dV$. Для этого применим к кристаллу закон изменения энергии:

$$pdV = -du$$

где u - энергия кристалла. Получим

$$K = V\frac{d^2u}{dV^2}$$

Энергия кристалла u равна половине произведения найденной выше величины E на число атомов N, поскольку в произведении NE дважды учитывается взаимодействие каждого атома. Входящее в E равновесное расстояние между ближайшими атомами r_1 определяет объём ячейки a^3, от которого зависит V. Объём V равен

$$V = \frac{N}{4}a^3 = \frac{Nr_1^3}{\sqrt{2}}$$

Множитель $1/4$ учитывает, что на одну элементарную ячейку приходится два атома. Используя выражение для V, найдём

$$u(V) = 2N\varepsilon\left(A\frac{N^4\sigma^{12}}{4V^4} - B\frac{N^2\sigma^6}{2V^2}\right).$$

После дифференцирования получим

$$\frac{d^2u}{dV^2} = 2N\varepsilon\left(5A\frac{N^4\sigma^{12}}{V^6} - 3B\frac{N^2\sigma^6}{V^4}\right) = 2N\varepsilon\left(40A\frac{\sigma^{12}}{N^2r_1^{18}} - 12B\frac{\sigma^6}{N^2r_1^{12}}\right).$$

Для получения окончательного результата остаётся подставить выражение (229) для r_1. Тогда

$$K = V\frac{d^2u}{dV^2} = \frac{4\varepsilon}{\sigma^3}\frac{B^{5/2}}{A^{3/2}} \approx 2,89 \cdot 10^9 \text{П}.$$

(?? нужно пересчитать, чтобы узнать, какие единицы тут?)

ТУЙМ-90. Колебания в цепи с диодами (2005)

Цепь состоит из двух конденсаторов ёмкостями C_1 и C_2, двух катушек индуктивностями L_1 и L_2, двух идеальных диодов D_1 и D_2 и ключа K (рис. 44). В момент замыкания ключа (время $t = 0$) ток в цепи не тёк, конденсатор C_1 был не заряжен, а конденсатор C_2 имел начальное напряжение U_0.

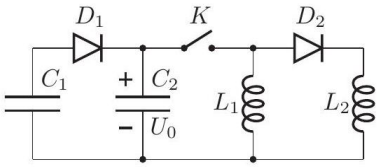


Рис. 44

• Найдите длительность τ переходного процесса, то есть момент времени τ, начиная с которого процесс станет периодическим.

Определите период T колебаний в установившемся режиме после завершения переходного процесса.

Найдите напряжения U_1 и U_2 на конденсаторе C_2 и укажите его положительно заряженную обкладку в моменты времени, когда соответственно в первый и второй раз после замыкания ключа тока через него не будет. 4. Определите амплитуду A колебаний напряжения на конденсаторе C_2 в установившемся режиме после завершения переходного процесса.

Подытожьте ответы на предыдущие вопросы, качественно изобразив график зависимости напряжения U на конденсаторе C_2 от времени t в промежутке от 0 до $\tau + T$. Отметьте на графике координаты характерных точек (максимумов, минимумов, точек пересечения с осями).

ТУЙМ-90. Колебания в цепи с диодами (2005)

Будем рассматривать процесс поэтапно, вычисляя промежутки времени с помощью формулы Томсона $T = 2\pi\sqrt{LC}$ для периода колебаний T в контуре, содержащем катушку индуктивностью L и конденсатор ёмкостью C. Заранее введём обозначение $L_0 = L_1L_2/(L_1 + L_2)$ для индуктивности параллельно соединённых катушек.

• Первый этап. Сразу после замыкания ключа (рис. 166) конденсатор C_2 начинает разряжаться через параллельно соединённые катушки L_1 и L_2 без участия конденсатора C_1, так как на этом этапе диод D_2 открыт, а D_1 - закрыт. Указанный первый этап завершается в момент полной разрядки конденсатора C_2, то есть через время τ_1, равное четверти периода T_1 колебаний в контуре, содержащем катушку индуктивностью L_0 и конденсатор ёмкостью C_2:

$$\tau_1 = \frac{T_1}{4} = \frac{\pi}{2}\sqrt{L_0C_2} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{L_1L_2}{L_1 + L_2}\cdot C_2}$$

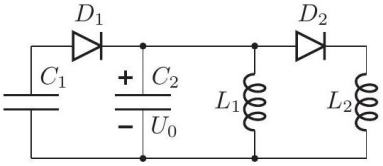


Рис. 166

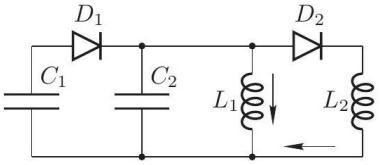


Рис. 167

• Второй этап. Сразу после полной разрядки конденсатора C_2 (рис. 167) параллельно соединённые катушки начинают заряжать параллельно соединённые конденсаторы, так как на этом этапе оба диода открыты. Указанный второй этап завершается в момент прекращения тока в цепи, то есть через время τ_2, равное четверти периода T_2 колебаний в контуре, содержащем катушку индуктивностью L_0 и конденсатор ёмкостью $C_1 + C_2$:

$$\tau_2 = \frac{T_2}{4} = \frac{\pi}{2}\sqrt{L_0\,(C_1 + C_2)} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{L_1L_2}{L_1 + L_2}\cdot(C_1 + C_2)}$$

В конце второго этапа (рис. 168) ток через ключ не течёт в первый раз после его замыкания, поэтому для определения искомого напряжения U_1 применим закон сохранения энергии в течение первых двух этапов:

$$\frac{C_2U_0^2}{2} = \frac{(C_1+C_2)\,U_1^2}{2}$$

откуда

$$U_1 = U_0\sqrt{\frac{C_2}{C_1+C_2}}$$

В дальнейшем из-за наличия диода D_1 напряжение на конденсаторе C_1 не может стать меньше U_1, значит, по закону сохранения энергии напряжение на конденсаторе C_2 не может стать больше U_1, следовательно, с этого момента диод D_1 будет всё время закрыт, а заряд на конденсаторе C_1 не изменится.

• Третий этап. Сразу после прекращения тока в цепи (рис. 168) конденсатор C_2 начинает разряжаться через катушку L_1 без участия конденсатора C_1 и катушки L_2, так как на этом этапе оба диода закрыты. Указанный третий этап завершается в момент полной разрядки конденсатора C_2, то есть через время τ_3, равное четверти периода T_3 колебаний в контуре, содержащем катушку индуктивностью L_1 и конденсатор ёмкостью C_2:

$$\tau_3 = \frac{T_3}{4} = \frac{\pi}{2}\sqrt{L_1C_2}$$

Для определения искомого напряжения U_2 потребуется сила тока I_1 в конце третьего этапа (рис. 169), поэтому найдём её сейчас, применив закон сохранения энергии в течение данного этапа:

$$\frac{C_2U_1^2}{2} = \frac{L_1I_1^2}{2}, \quad \text{откуда} \quad I_1 = U_1\sqrt{\frac{C_2}{L_1}} = \frac{C_2U_0}{\sqrt{L_1\,(C_1+C_2)}}.$$

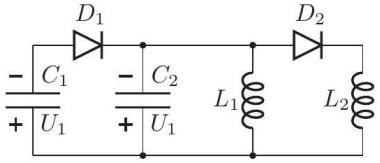


Рис. 168

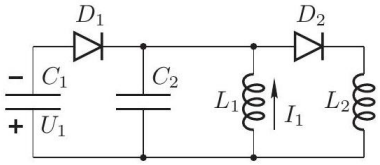


Рис. 169

• Граничный момент. Сразу после полной разрядки конденсатора C_2 (рис. 169) начинаются его перезарядка и перераспределение токов в катушках без участия конденсатора C_1, так как теперь диод D_2 открыт, а D_1 по-прежнему закрыт. Мысленно заменим диод D_2 на проводник, тогда в ходе дальнейших колебаний сила тока в каждой катушке будет изменяться по синусоидальному закону, причём граничных значений она будет достигать в моменты полной разрядки конденсатора C_2. В один из этих моментов ток в катушке L_2 отсутствует (рис. 169), а в другой - направлен вниз на той же схеме, значит, и ни в какой иной момент времени ток не идёт вверх на схеме, то есть против направления пропускания диода D_2, который был мысленно заменён на проводник. Это означает, что диод D_2 больше не влияет на процессы в цепи. Поскольку последнее изменение состояния диодов произошло в конце третьего этапа, искомая длительность переходного процесса составляет

$$\tau = \tau_1+\tau_2+\tau_3 = \frac{\pi}{2}\left(\sqrt{\frac{L_1L_2C_2}{L_1+L_2}} + \sqrt{\frac{L_1L_2\,(C_1+C_2)}{L_1+L_2}} + \sqrt{L_1C_2}\right).$$

Описанные в этом пункте колебания происходят уже после завершения переходного процесса, то есть в установившемся режиме, а их период составляет

$$T = T_1 = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{L_1L_2C_2}{L_1+L_2}}$$

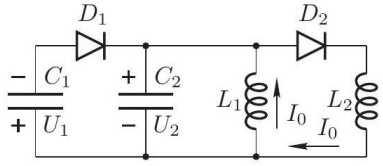


Рис. 170

• Установившийся режим. В момент завершения переходного процесса (рис. 169) сила тока I_1 через катушку L_1 даётся формулой (230), а ток через катушку L_2 отсутствует, то есть $I_2 = 0$. Параллельно соединённые катушки (диод D_2 открыт) можно заменить на одну катушку индуктивностью L_0, через которую в данный момент течёт ток силой $I = I_1 + I_2$. Дальнейшие колебания происходят в контуре, содержащем эквивалентную катушку и конденсатор C_2.

Когда ток через ключ не течёт во второй раз после его замыкания, тока нет и через эквивалентную катушку, но в реальных катушках остаётся кольцевой ток (рис. 170), силу I_0 которого можно при желании найти из закона сохранения магнитного потока или из второго правила Кирхгофа. Однако мы не будем искать эту интересную саму по себе величину I_0, а просто применим закон сохранения энергии для колебаний в эквивалентном контуре:

$$\frac{L_0 I^2}{2} = \frac{C_2 U_2^2}{2}, \qquad \text{откуда} \qquad U_2 = I\sqrt{\frac{L_0}{C_2}} = U_0\sqrt{\frac{C_2}{C_1+C_2}}\sqrt{\frac{L_2}{L_1+L_2}}.$$

После завершения переходного процесса амплитудное напряжение A на конденсаторе C_2 достигается, когда через эквивалентную катушку не течёт ток. На основе предыдущих рассуждений сразу получаем

$$A = U_2 = U_0\sqrt{\frac{C_2}{C_1+C_2}}\sqrt{\frac{L_2}{L_1+L_2}}$$

Итоговый качественный график зависимости $U(t)$ показан на рис. 171.

Примечание. Заметим, что $U_2 < U_1$, так как часть энергии остаётся в катушках из-за кольцевого тока, что даёт ещё один способ расчёта его силы I_0. Рекомендуем читателям самостоятельно вычислить I_0 и подумать о причинах сходства полученного результата с выражением для скорости совместного движения брусков после их неупругого столкновения, если изначально один брусок двигался, а другой - покоился. Объяснение этого феномена можно найти в литературе по ключевым словам «электромеханические аналогии». Кроме того, стоит обратить внимание на использованный приём замены параллельно соединённых катушек при наличии текущих через них произвольных токов.

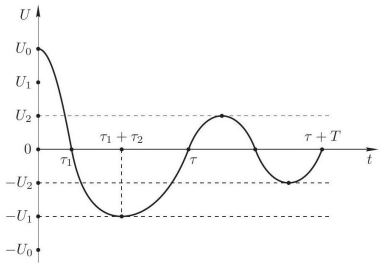


Рис. 171

ТУЙМ-91. Миниатюрный кипятильник (2006)

В теплоизолированной пробирке с пренебрежимо малой теплоёмкостью находится $m_1 = 1,0$ г воды и $m_2 = 1,5$ г льда в состоянии термодинамического равновесия. В пробирку помещают миниатюрный кипятильник, который подключён к источнику постоянного напряжения с ЭДС $\mathscr{E} = 10$ В и внутренним сопротивлением $r = 10$ Ом. Вольт-амперная характеристика (ВАХ) кипятильника приведена на графике (рис. 45). Определите, через какое время t вода в пробирке закипит. Удельная теплоёмкость воды $c = 4200$ Дж / (кг ·°C), удельная теплота плавления льда $\lambda = 335$ кДж/кг.

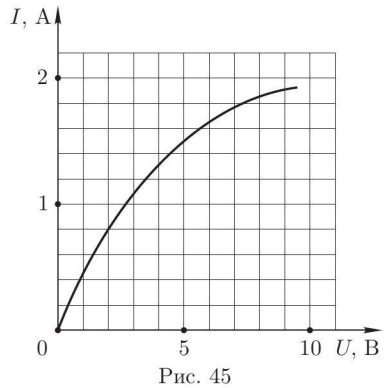


Рис. 45

ТУЙМ-91. Миниатюрный кипятильник (2006)

Для плавления льда и доведения воды до кипения нужно подвести количество теплоты

$$Q = \lambda m_2 + c\,(m_1 + m_2)\,(100^\circ\text{C} - 0^\circ\text{C}) \approx 1,55 \text{ кДж}.$$

Пусть U - напряжение на кипятильнике, I - сила тока в цепи (рис. 172), тогда по второму правилу Кирхгофа $\mathscr{E} = U + Ir$, откуда

$$I = \frac{\mathscr{E} - U}{r}.$$

Ещё одним уравнением, связывающим U и I, является приведённая в условии ВАХ кипятильника. Значения U и I найдём как координаты точки пересечения графиков двух рассматриваемых зависимостей (рис. 173): $U = 2,0$ В, $I = 0,8$ А.

Следовательно, мощность кипятильника $P = UI = 1,6$ Вт, а искомое время составляет

$$t = \frac{Q}{P} = \frac{\lambda m_2 + c\,(m_1 + m_2)\,(100^\circ\text{C} - 0^\circ\text{C})}{IU} \approx 970\text{с} \approx 16 \text{ мин}$$

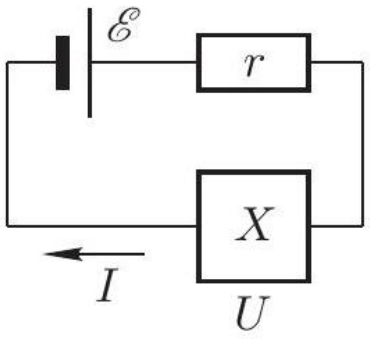


Рис. 172

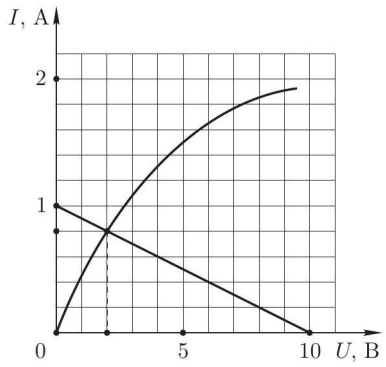


Рис. 173

ТУЙМ-95. Диск Корбино (2007)

В качестве датчика магнитного поля можно использовать устройство, изображённое на рис. 51 и 52 и называемое диском Корбино. Образец в форме диска радиусом r_2 с концентрическим отверстием радиусом r_1 изготовлен из полупроводника, а к его цилиндрическим поверхностям прилегают кольца из хорошего проводника.

• Кольца подключают к источнику постоянного напряжения U. Определите распределение напряжённости E электрического поля в образце, пренебрегая зависимостью E от координаты вдоль оси диска.

Образец целиком вносят в область однородного магнитного поля так, что плоскость диска оказывается перпендикулярна индукции B магнитного поля. Найдите сопротивление R образца, измеренное между кольцами, если в отсутствие магнитного поля оно было равно R_0. Именно наличие зависимости $R(B)$ позволяет использовать данное устройство в качестве измерителя поля. Считайте, что сопротивление образца обусловлено только электронами с по- Движностью μ, концентрация которых не изменяется под действием внешних электрических и магнитных полей.

Примечание. Подвижность равна отношению скорости v дрейфа носителей заряда под действием внешнего электрического поля к напряжённости E этого поля: $\mu = v/E$.

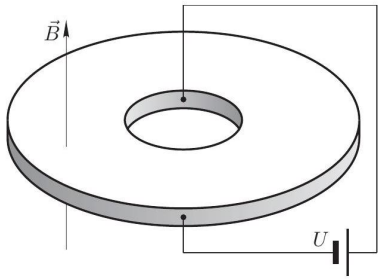


Рис. 51

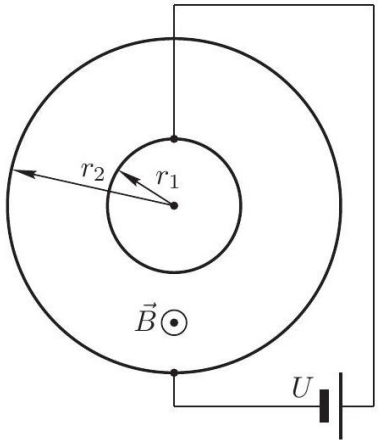


Рис. 52

Задача 95. Диск Корбино (2007)

• Кольца являются хорошими проводниками, а потому задают две эквипотенциальные поверхности вне зависимости от места подключения к ним проводов от источника. Следовательно, в силу симметрии достаточно найти зависимость E от расстояния r до центра диска. Пусть e - заряд электрона, n - концентрация электронов, участвующих в создании тока, v - средняя скорость установившегося движения электронов, тогда плотность тока вычисляется по формуле

$$j = env = en\mu E$$

причём вектор напряжённости направлен вдоль радиуса, как и ток. В стационарном режиме в образце толщиной h сила тока $I = j \cdot 2\pi rh = 2\pi hen\mu \cdot Er$ не зависит от r, поэтому $E = A/r$, где A - константа, определяемая из условия, что разность потенциалов между кольцами равна U:

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} Edr = A \ln \frac{r_2}{r_1} = U,$$

откуда

$$E = \frac{U}{\ln (r_2/r_1)} \cdot \frac{1}{r}$$

• Изменение сопротивления между кольцами при приложении внешнего магнитного поля обусловлено отличием радиальной компоненты плотности тока $j_\parallel$от определяемой выражением (231) величины j в отсутствие поля. Из-за силы Лоренца электроны начнут двигаться по искривлённым траекториям, имея ненулевые радиальную $v_\parallel$и тангенциальную $v_\perp$ составляющие скорости (рис. 188). Средняя скорость установившегося движения электрона в образце $\vec{v} = \mu\vec{F}/e$, где $\vec{F}$ - суммарная внешняя сила, действующая на электрон. В частном случае, когда есть только электрическое поле, это вы-

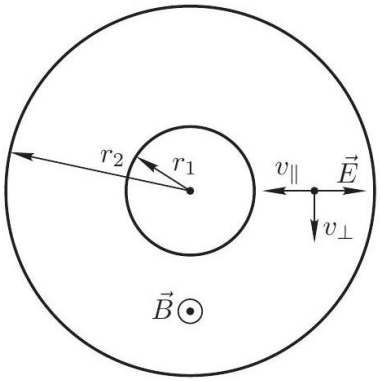


Рис. 188 ражение сводится к формуле, приведённой в условии. Учитывая это, найдём проекции скорости:

$$v_\parallel = \mu\left(E - v_\perp B\right), \quad v_\perp = \mu v_\parallel B$$

откуда

$$v_\parallel = \frac{\mu E}{1+\mu^2 B^2}, \quad \text{а} \quad j_\parallel = env_\parallel = \frac{en\mu E}{1+\mu^2 B^2}$$

Сравнивая $j_\parallel$с j в отсутствие поля, видим, что при неизменном напряжении U ток уменьшился в $\left(1+\mu^2 B^2\right)$ раз, следовательно, сопротивление возросло в то же число раз:

$$R = R_0\left(1+\mu^2 B^2\right)$$

ТУЙМ-96. Олимпийская эмблема (2008)

Из пяти кусков проволоки сопротивлением r каждый сделали пять одинаковых колец, которые затем соединили подобно олимпийской эмблеме (рис. 53). Точка A и пять точек соединения делят центральное кольцо на шесть равных дуг. Определите сопротивление R между точками A и B цепи. Сопротивлением в точках контакта можно пренебречь. Контактами являются не все пересечения колец, а только те, которые помечены жирными точками.

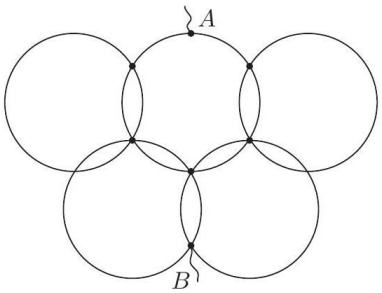


Рис. 53

ТУЙМ-96. Олимпийская эмблема (2008)

В силу симметрии схемы относительно оси AB узел C можно разделить на два (рис. 189). Изобразим эквивалентную схему (рис. 190), на которой буквами обозначены соответствующие узлы, а численные значения сопротивлений указаны в единицах r. Пользуясь свойствами последовательного и параллельного соединений, найдём сопротивления участков цепи:

$$R_{AE_1} = R_{AE_2} = \frac{1}{6}r, \quad R_{E_1D_1} = R_{E_2D_2} = \frac{5}{66}r, \quad R_{D_1B} = R_{D_2B} = \frac{2}{11}r.$$

Находим искомое общее сопротивление:

$$R = \frac{1}{2}\left(R_{AE_1} + R_{E_1D_1} + R_{D_1B}\right) = \frac{7}{33}r$$

ТУЙМ-97. Заземлённый контур (2008)

Колебательный контур, состоящий из катушки индуктивностью L и конденсатора ёмкостью C, заземлили через резистор малым сопротивлением R (рис. 54). Ко второму выводу контура подключили проводящую сферу радиусом r. Конденсатор зарядили до напряжения U_0 и замкнули ключ. Непосредственно перед замыканием ключа колебаний в цепи не было. Конденсатор и сфера находятся далеко друг от друга.

• Определите период T колебаний в цепи.

Найдите максимальную силу тока $I_{\max}$ в катушке в процессе колебаний.

Вычислите добротность Q колебательной системы.

Можно пренебречь сопротивлением катушки, проводов и сферы, а также считать, что количество теплоты, выделяющейся на резисторе за период колебаний, много меньше энергии, запасённой в контуре.

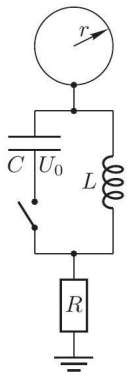


Рис. 54

Примечание. Добротность определяется формулой $Q = 2\pi W/\Delta W_T$, где W - полная энергия, запасённая в системе, ΔW_T - потери этой энергии за период.

ТУЙМ-97. Заземлённый контур (2008)

Рассмотрим проводящую сферу и Землю как две обкладки конденсатора некоторой ёмкостью C_0 и перерисуем схему (рис. 191). Для нахождения C_0 мысленно поместим на сферу заряд q, тогда разность потенциалов сферы и бесконечно удалённой точки будет $U = q/(4\pi\varepsilon_0 r)$, откуда

$$C_0 = \frac{q}{U} = 4\pi\varepsilon_0 r$$

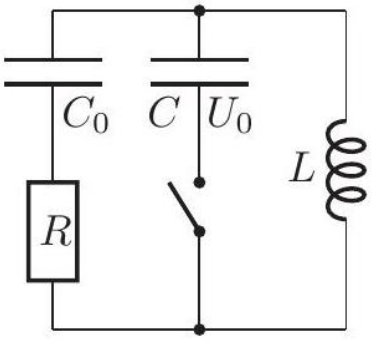


Рис. 191

Непосредственно перед замыканием ключа напряжение на конденсаторе C_0 было равно нулю, так как колебаний в цепи не было.

• Поскольку сопротивление R мало, можно считать конденсаторы соединёнными параллельно, тогда

$$T = 2\pi\sqrt{L\,(C + C_0)} = 2\pi\sqrt{L\,(C + 4\pi\varepsilon_0 r)}.$$

• Сразу после замыкания ключа начальный заряд $q_0 = CU_0$ конденсатора C распределится по обоим конденсаторам, поэтому напряжение на них будет

$$U_1 = \frac{q_0}{C + C_0}$$

Поскольку R мало, это произойдёт за время, много меньшее периода колебаний, и можно считать, что колебания начнутся уже после перераспределения зарядов. Отметим, что за счёт большой силы тока

через резистор в течение этого малого времени выделится существенное количество теплоты, поэтому ошибочно считать начальную энергию колебаний равной $CU_0^2/2$.

А вот выделением тепла на резисторе в течение первой четверти периода можно пренебречь, поэтому из закона сохранения энергии

$$\frac{(C+C_0)\,U_1^2}{2} = \frac{LI_{\max}^2}{2}$$

находим

$$I_{\max} = U_1\sqrt{\frac{C+C_0}{L}} = \frac{CU_0}{\sqrt{L\,(C+4\pi\varepsilon_0 r)}}.$$

В дальнейшем сила тока будет убывать из-за потерь энергии на резисторе.

• Пусть I_0 - сила тока через катушку в какой-то из моментов времени, когда конденсаторы разряжены, тогда запасённая в цепи энергия $W = LI_0^2/2$, а действующее значение силы тока в течение рассматриваемого периода $I_e = I_0/\sqrt{2}$. Силы токов через каждый из конденсаторов пропорциональны их амплитудным зарядам, которые в свою очередь пропорциональны ёмкостям, так как сопротивление R мало и можно пренебречь различием напряжений на конденсаторах. Отсюда найдём действующее значение силы тока через резистор в течение рассматриваемого периода:

$$I = I_e \cdot \frac{C_0}{C+C_0}$$

и потери энергии:

$$\Delta W_T = I^2RT = \frac{C_0^2 I_0^2}{2\,(C+C_0)^2} \cdot R \cdot 2\pi\sqrt{L\,(C+C_0)}$$

Найдём добротность:

$$Q = \frac{2\pi W}{\Delta W_T} = \frac{L\,(C+C_0)^2}{C_0^2 R\sqrt{L\,(C+C_0)}} = \frac{1}{R}\left(\frac{C}{4\pi\varepsilon_0 r}+1\right)^2\sqrt{\frac{L}{C+4\pi\varepsilon_0 r}}.$$

ТУЙМ-98. Заряженный ртутный пузырь (2009)

Экспериментатор Глюк, нарушая технику безопасности на космической станции, выдул с помощью тонкой пластмассовой трубочки ртутный пузырь и подал на него высокое напряжение U (относительно бесконечно удалённой точки). Через некоторое время система пришла в равновесие, при этом трубочка оставалась в пузыре и была открытой с обоих концов (рис. 55). Найдите установившийся радиус r ртутного пузыря. Коэффициент поверхностного натяжения ртути σ известен.

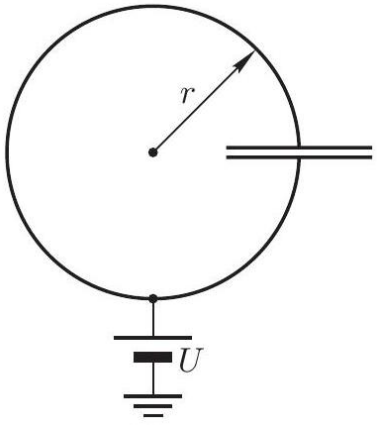


Рис. 55

Туймаада Решения задач. Электричество

ТУЙМ-98. Заряженный ртутный пузырь (2009)

Поскольку трубочка оставалась открытой с обоих концов, давление воздуха внутри и снаружи пузыря одинаковое. Значит, силы поверхностного натяжения должны уравновешиваться силами электростатического отталкивания. Границ раздела у оболочки пузыря две, а внутренний и внешний радиусы можно считать одинаковыми, поэтому можем найти давление за счёт поверхностного натяжения:

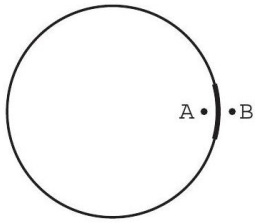


Рис. 192

$$P_1 = 2 \cdot \frac{2\sigma}{r} = \frac{4\sigma}{r}$$

Из формулы для потенциала $U = q/(4\pi\varepsilon_0 r)$ выразим общий заряд пузыря $q = 4\pi\varepsilon_0 rU$, который будет равномерно распределён по его внешней поверхности (влиянием тонкой трубочки пренебрегаем). Рассмотрим маленький кусочек внешней поверхности пузыря. Напряжённости электрических полей E_A и E_B в точках A и B вблизи кусочка внутри и снаружи от внешней поверхности пузыря (рис. 192) можно представить в виде векторной суммы напряжённости E_0, создаваемой в месте расположения кусочка всем пузырём за вычетом кусочка, и напряжённости E, создаваемой только кусочком:

$$E_0 - E = E_A = 0, \quad E_0 + E = E_B = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{U}{r}, \quad \text{откуда} \quad E_0 = \frac{U}{2r}.$$

Пусть ΔS - площадь рассматриваемого кусочка, тогда можно найти его заряд:

$$\Delta q = \frac{q\Delta S}{4\pi r^2} = \frac{\varepsilon_0 U \Delta S}{r}$$

и силу, действующую на него со стороны пузыря за вычетом кусочка:

$$\Delta F = E_0 \Delta q = \frac{\varepsilon_0 U^2 \Delta S}{2r^2}$$

Можно определить электростатическое давление

$$P_2 = \frac{\Delta F}{\Delta S} = \frac{\varepsilon_0 U^2}{2r^2}$$

В состоянии равновесия должно выполняться равенство $P_1 = P_2$, откуда

$$r = \frac{\varepsilon_0 U^2}{8\sigma}$$

14.1.3 Problems about different special phenomena and devices 2

ТУЙМ-99. Электрогаз (2010)

На проводящий шар, покрытый тонким слоем изолятора и находящийся в гелиевой среде, подают напряжение U в течение достаточно большого времени, из-за чего на него «налипают» однозарядные ионы. Затем этот шар переносят в большой пустой сосуд и быстро снимают напряжение. Найдите температуру T ионного газа в сосуде.

ТУЙМ-99. Электрогаз (2010)

В первом опыте ионы «налипали» до тех пор, пока их суммарный потенциал не стал нулевым, то есть пока сами они не создали на поверхности шара потенциал U противоположного знака. Поэтому, когда во втором опыте напряжение сняли, каждый ион остался только в поле остальных ионов, создающих потенциал U. Найдём полную энергию взаимодействия ионов:

$$W = \frac{1}{2} \cdot Ne \cdot U$$

где N - количество «налипших»ионов, e - элементарный заряд. Типичной ошибкой является потеря коэффициента 1/2, который учитывает, что энергия взаимодействия пары зарядов в равной степени относится к каждому из них.

Поскольку сосуд большой, после разлёта ионов можно пренебречь их взаимодействием и учитывать только их кинетическую энергию (как для одноатомного идеального газа):

$$W = \frac{3}{2} kT \cdot N$$

где k - постоянная Больцмана. Из сравнения формул (232) и (233) получаем

$$T = \frac{eU}{3k}$$

ТУЙМ-101. Алмазный детектор (2010)

В современных лабораториях для регистрации элементарных частиц широко используются алмазные детекторы ионизирующего излучения. Рассматриваемый детектор представляет собой пластину из монокристалла алмаза типа $2A$ (такие алмазы добывают в Якутии) толщиной $d = 300$ мкм с напылёнными на боковые поверхности электродами и подключается к цепи, как показано на рис. 57. Взаимодействие падающего на детектор потока α-частиц с алмазом приводит к образованию электронно-дырочных пар (свободных электронов в зоне проводимости и дырок в валентной зоне).

Характерная длина пробега α-частицы в детекторе $\lambda = 13$ мкм. Средняя энергия образования электронно-дырочной пары $\delta = 13$ эВ. Подвижности электронов и дырок в алмазе можно считать одинаковыми и равными $\mu = 0,2$ м $^2/(\text{В} \cdot \text{с})$. Время жизни электронно-дырочных пар $\tau = 10$ нс.

• При какой минимальной ЭДС $\mathscr{E}_{\min}$ источника детектор будет работать в режиме спектрометра (то есть через измерительную цепь будет протекать весь образовавшийся в детекторе заряд, пропорциональный энергии α-частицы)? Источник считайте идеальным, а сопротивление R - достаточно малым.

Определите кинетическую энергию W одной α-частицы, от которой осциллограф зарегистрировал при $R = 50$ Ом прямоугольный импульс напряжением $U = 0,65$ мВ и длительностью $T = 5$ нс.

Найдите ЭДС $\mathscr{E}$ источника в предыдущем опыте.

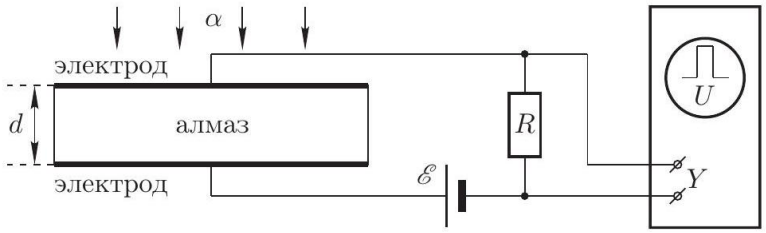


Рис. 57

Примечание. Подвижность равна отношению скорости v дрейфа носителей заряда под действием внешнего электрического поля к напряжённости E этого поля: $\mu = v/E$. Элементарный заряд $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл, массы протона и нейтрона $m_p \approx m_n \approx m = 1,7 \cdot 10^{-27}$ кг, скорость света в вакууме $c = 3 \cdot 10^8$ м/с.

ТУЙМ-101. Алмазный детектор (2010)

• Поскольку $\lambda \ll d$, α-частица теряет в детекторе всю свою кинетическую энергию на образование электронно-дырочных пар в тонком слое вблизи верхнего электрода. В силу малости R напряжение на детекторе равно ЭДС источника. Напряжённость электрического поля между электродами $E = \mathscr{E}/d$. Дрейфовая скорость носителей заряда в алмазе $v = \mu E = \mu\mathscr{E}/d$. Время прохождения заряда между электродами $t = d/v = d^2/(\mu\mathscr{E})$. Весь образовавшийся заряд пройдёт по измерительной цепи, если электронно-дырочные пары не успеют рекомбинировать, то есть $t < \tau$, откуда

$$\mathscr{E} > \mathscr{E}_{\min} = \frac{d^2}{\mu\tau} = 45 \text{ В}$$

•

Протёкший через измерительную цепь заряд q можно найти двумя способами. Во-первых, одна α-частица создала в алмазе $N = W/\delta$ электроннодырочных пар, откуда $q = eN = eW/\delta$. Во-вторых, через резистор R в течение времени T протекал ток силой $I = U/R$, откуда $q = TI = TU/R$. Приравняв эти выражения для q, находим

$$W = \frac{\delta UT}{eR} = 8,45 \cdot 10^{-13} \text{ Дж } \approx 5,3 \text{МэВ}$$

Примечание. Частицы с такой энергией образуются, например, в результате α-распада ядер урана $^{232}_{92}$U.

• Поскольку $W \ll 4mc^2$, для оценок можно использовать нерелятивистские формулы. Время торможения α-частицы в алмазе составляет

$$t_\alpha \sim \frac{d}{v_\alpha} = \frac{d}{\sqrt{2W/(4m)}} = d\sqrt{\frac{2m}{W}} \approx 0,02\text{нс} \ll T,$$

то есть длительность импульса определяется именно временем дрейфа зарядов между электродами, а не временем рождения электронно-дырочных пар. Повторив рассуждения из пункта 1, находим

$$\mathscr{E} = \frac{d^2}{\mu T} = 90 \text{ В}$$

ТУЙМ-102. Неизвестная цепь (2011)

Некоторая электрическая цепь имеет два вывода и состоит только из источников постоянного напряжения и резисторов. Когда к выводам цепи подключили идеальный вольтметр, он показал напряжение U_0. После подключения к выводам цепи резистора сопротивлением R_1 вольтметр стал показывать напряжение U_1. Какое напряжение U_2 покажет вольтметр, если к выводам цепи подключить дополнительно (не отключая первый резистор) резистор сопротивлением R_2?

ТУЙМ-102. Неизвестная цепь (2011)

Любая цепь, имеющая два вывода и состоящая только из источников постоянного напряжения и резисторов, эквивалентна одному неидеальному источнику постоянного напряжения с ЭДС $\mathscr{E}$ и внутренним сопротивлением r.

При подключении к цепи только идеального вольтметра ток через эквивалетный источник не течёт, поэтому $\mathscr{E} = U_0$. Применим закон Ома и свойства последовательного и параллельного соединений резисторов к случаям подключения к цепи:

• одного резистора -

$$U_1 = I_1 \cdot R_1 = \frac{\mathscr{E}}{R_1 + r} \cdot R_1 = \frac{U_0 R_1}{R_1 + r}, \quad \text{откуда} \quad r = \frac{U_0 - U_1}{U_1} \cdot R_1$$

• двух резисторов -

$$U_2 = I_2 \cdot \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{\mathscr{E}}{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + r} \cdot \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} =$$
$$= \frac{U_0}{\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{U_0 - U_1}{U_1} \cdot R_1} \cdot \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{U_0 U_1 R_2}{U_0 (R_1 + R_2) - U_1 R_1}.$$

ТУЙМ-103. Подвижность носителей в графене (2011)

В 2010 году А. Гейм и К. Новосёлов получили Нобелевскую премию за открытие графена, который представляет собой моноатомный слой графита толщиной $h = 0,335$ нм. Графен обладает уникальными электронными свойствами, в частности, высокая подвижность носителей тока делает его перспективным материалом для широкого использования в наноэлектронике взамен традиционных кремниевых элементов. Данные к предлагаемой ниже задаче взяты из статьи «Электронный транспорт в графене» (Морозов С. В., Новосёлов К. С., Гейм А. К.), опубликованной в журнале «Успехи физических наук» (номер 7 за 2008).

Электропроводность графена исследуется следующим образом (рис. 58).

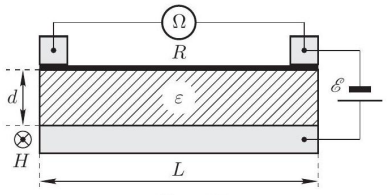


Рис. 58

Графеновая плёнка длиной L и шириной $H = L/2$ (размер в направлении, перпендикулярном плоскости рисунка) находится на хорошо проводящей кремниевой подложке, покрытой слоем окиси кремния толщиной $d = 300$ нм с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 4,5$. Концентрация собственных свободных носителей тока в графене очень мала, однако если между графеновой плёнкой и кремниевой подложкой приложить напряжение $\mathscr{E}$, то можно значительно увеличить концентрацию электронов (как говорят, допировать электронами), управляя таким образом сопротивлением R графеновой плёнки (именно так устроен полевой транзистор). Измеряемое омметром сопротивление плёнки оказалось обратно пропорционально напряжению $\mathscr{E}$, причём $R = 0,8$ кОм при $\mathscr{E} = 10$ В. Рассчитайте по этим данным подвижность μ носителей заряда.

Примечание. Подвижность равна отношению скорости v дрейфа носителей заряда под действием внешнего электрического поля к напряжённости E этого поля: $\mu = v/E$.

ТУЙМ-103. Подвижность носителей в графене (2011)

Пусть S - площадь графеновой плёнки, тогда ёмкость образованного плёнкой и подложкой плоского конденсатора $C = \varepsilon\varepsilon_0 S/d$, модуль заряда обкладки $q = C\mathscr{E} = \varepsilon\varepsilon_0 S\mathscr{E}/d$, поверхностная плотность этого заряда $\sigma = q/S = \varepsilon\varepsilon_0\mathscr{E}/d$.

Пусть U - напряжение между выводами омметра, тогда напряжённость поля вдоль плёнки $E = U/L$, скорость электронов $v = \mu E = \mu U/L$, сила тока

$$I = \sigma H v = \frac{\varepsilon\varepsilon_0\mathscr{E}}{d} \cdot H \cdot \frac{\mu U}{L} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0\mathscr{E}\mu U}{2d}.$$

Из сравнения полученной формулы с законом Ома $I = U/R$ получаем

$$\frac{1}{R} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0\mathscr{E}\mu}{2d}$$

откуда

$$\mu = \frac{2d}{\varepsilon\varepsilon_0\mathscr{E}R} \approx 1,9\text{м}^2/(\text{В}\cdot\text{с}).$$

Найденное значение превосходит подвижность электронов в кремнии более чем на порядок. При напряжённости электрического поля в проводнике порядка 100 В/м электроны будут двигаться в графене со скоростью около 200 м/с, что в миллион раз больше аналогичной скорости для металлов.

ТУЙМ-105. Микроэлектромеханическое устройство (2012)

Микроэлектромеханические системы (МЭМС) - это устройства, сочетающие одновременно электрические и механические функции. Они нашли широкое применение за счёт миниатюрности и технологий производства, полностью совместимых со стандартными полупроводниковыми циклами. Данная задача посвящена одному из самых распространённых электромеханических преобразователей - электростатическому. В качестве модели рассмотрим плоский конденсатор, имеющий пластины площадью S, одна из которых неподвижна, а другая прикреплена к пружине с жёсткостью k и может перемещаться в вертикальном направлении (рис. 60). Обкладки конденсатора подключены к источнику регулируемого постоянного напряжения. В начальном состоянии напряжение источника равно нулю, а верхняя пластина покоится на расстоянии d от нижней. Электрическим сопротивлением цепи можно пренебречь во всех случаях.

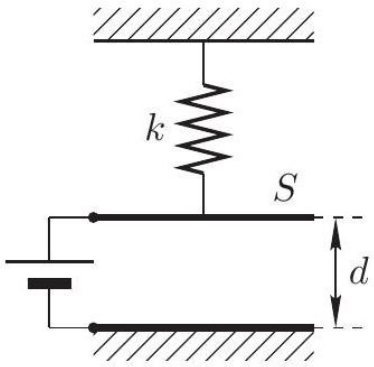


Рис. 60

• Определите электростатическую силу F_1, действующую на верхнюю пластину конденсатора со стороны нижней сразу после резкой подачи на конденсатор напряжения U_1.

Напряжение на конденсаторе плавно и медленно увеличивают от нулевого значения. При каком напряжении U_2 пластины схлопнутся?

Какое минимальное напряжение U_3 нужно резко подать на конденсатор, чтобы его пластины схлопнулись, если сразу после зарядки конденсатора цепь будет разомкнута?

Какое минимальное напряжение U_4 нужно резко подать на конденсатор, чтобы его пластины схлопнулись, если поданное напряжение далее будет поддерживаться постоянным?

105. Микроэлектромеханическое устройство (2012)

Малое сопротивление цепи позволяет считать, что все процессы перезарядки конденсатора происходят очень быстро, так что смещением верхней пластины за это время можно пренебречь.

• Ёмкость плоского конденсатора $C = \varepsilon_0 S/d$. Заряд верхней пластины $q = CU_1 = \varepsilon_0 SU_1/d$. Напряжённость однородного электрического поля между обкладками конденсатора $E = U_1/d$, причём каждая из пластин обеспечивает половину этой величины. Найдём искомую силу:

$$F_1 = q \cdot \frac{E}{2} = \frac{\varepsilon_0 S U_1^2}{2d^2}$$

В следующих пунктах будем считать, что пружина изначально не растянута и сила тяжести на верхнюю пластину не действует. Это упрощение не повлияет на результаты, так как силу упругости пружины можно представить в виде суммы её начального значения и её изменения, а поскольку согласно условию равновесия начальная сила упругости равна силе тяжести, они взаимно уничтожатся во всех уравнениях, в том числе при расчёте работы.

• Поскольку напряжение U увеличивают медленно, расстояние x между пластинами уменьшается тоже медленно и можно считать, что электрическая сила в каждый момент времени уравновешивается силой упругости:

$$\frac{\varepsilon_0 S U^2}{2x^2} = k(d - x)$$

Данное уравнение является кубическим относительно x, поэтому для его анализа применим графический метод. Графиком правой части уравнения является прямая, а левой - семейство квадратичных гипербол, зависящих от параметра U. На рис. 197 показаны прямая и три характерные гиперболы для значений U, равных V_1, V_2, V_3 и удовлетворяющих условию $V_1 < V_2 < V_3$.

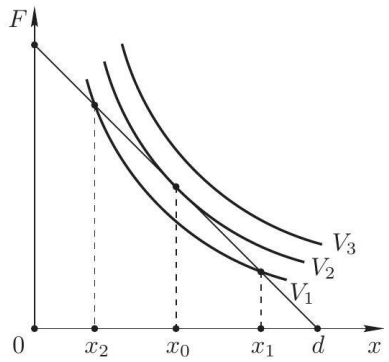


Рис. 197

При $U = V_1$ уравнение имеет два корня (графики пересекаются при x_1 и x_2), причём x_1 соответствует устойчивому положению равновесия, а x_2 - неустойчивому, что определяется по направлению результирующей силы, возникающей при небольшом отклонении от положения равновесия. Отсюда следует, что при плавном уменьшении x от значения d система окажется в состоянии x_1 и уже не попадёт в состояние x_2. По мере увеличения U от V_1 до V_2 точки x_1 и x_2 приближаются друг к другу и сходятся в точке x_0, соответствующей случаю касания гиперболы и прямой. Положение равновесия x_0 является устойчивым при увеличении x и неустойчивым при уменьшении x, поэтому при $U = V_2$ подвижная пластина конденсатора начнёт двигаться ускоренно и пластины схлопнутся. Таким образом, искомое напряжение $U_2 = V_2$. Отметим, что при $U = V_3$ положений равновесия уже нет, так что пластины начнут схлопываться ускоренно при любом x.

Для упрощения преобразований перепишем уравнение (237) в виде

$$\frac{a}{2x^2} = d - x, \quad \text{где} \quad a = \frac{\varepsilon_0 S U^2}{k}$$

В точке касания графиков функций должны быть равны не только значения функций, но и значения их производных, то есть

$$\frac{a_0}{2x_0^2} = d - x_0, \quad -\frac{a_0}{x_0^2} = -x_0, \quad \text{где} \quad a_0 = \frac{\varepsilon_0 S U_2^2}{k}.$$

Решая систему из этих двух уравнений, находим

$$x_0 = \frac{2}{3}d = \sqrt[3]{a_0}$$

откуда

$$U_2 = \sqrt{\frac{8kd^3}{27\varepsilon_0 S}}.$$

Возможны и другие способы рассуждений, например нахождение U_2 как максимального значения функции $U(x)$ с аналогичным анализом устойчивости положений равновесия.

• После размыкания цепи заряд на конденсаторе будет сохраняться, а потому напряжённость поля и электрическая сила, действующая на подвижную пластину, изменяться не будут. Пользуясь результатом первого пункта, находим

$$F_3 = \frac{\varepsilon_0 S U_3^2}{2d^2} = \text{ const}$$

При минимальном значении U_3 пластина сначала будет ускоряться, а затем замедляться из-за постепенного растяжения пружины, так что пластины схлопнутся с пренебрежимо малой скоростью. Из закона сохранения энергии $F_3 d = kd^2/2$ получаем

$$U_3 = \sqrt{\frac{kd^3}{\varepsilon_0 S}}.$$

Отметим, что в данном случае потребовалось большее напряжение, чем во втором пункте, что вполне логично, так как в предыдущем случае по мере сближения пластин их заряд, напряжённость поля и сила взаимодействия существенно возрастали за счёт действия источника. 4. В этом пункте мы наоборот ожидаем получить меньшее напряжение, чем во втором случае, так как пластина может преодолеть участок между положениями равновесия x_1 и x_2 за счёт кинетической энергии, накопленной при разгоне на участке от d до x_1.

Аналогично первому пункту находим электрическую силу, действующую на подвижную пластину, находящуюся на расстоянии x от неподвижной:

$$F_4 = \frac{\varepsilon_0 S U_4^2}{2x^2}$$

Работа этой силы на участке от d до x:

$$A = \int\limits_d^x \left(-\frac{\varepsilon_0 S U_4^2}{2x^2}\right) dx = \frac{\varepsilon_0 S U_4^2}{2}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{d}\right).$$

С помощью закона сохранения энергии выразим кинетическую энергию:

$$W = A - \frac{k(d-x)^2}{2} = \frac{\varepsilon_0 S U_4^2 (d-x)}{2xd} - \frac{k(d-x)^2}{2}$$

Пластина не остановится, если в каждой точке $x \in (0; d)$ будет выполнено условие $W \geqslant 0$, откуда после упрощения получаем неравенство

$$x^2 - d \cdot x + \frac{\varepsilon_0 S U_4^2}{kd} \geqslant 0$$

Графиком левой части является парабола с вершиной $x_4 = d/2$, лежащей в рассматриваемом промежутке, поэтому для нахождения минимального U_4 достаточно наложить условие на дискриминант:

$$D = d^2 - \frac{4\varepsilon_0 S U_4^2}{kd} = 0$$

откуда

$$U_4 = \sqrt{\frac{kd^3}{4\varepsilon_0 S}}$$

Примечание. Обратите внимание на упрощение рассуждений за счёт исключения из рассмотрения силы тяжести и начального растяжения пружины: это стандартный приём, полезный во многих подобных задачах.

ТУЙМ-106. Униполярный электродвигатель (2012)

На рис. 61 показана схема реально работающего униполярного электродвигателя. Ротором двигателя является насаженный на проводящую ось O_1O_2 сильный постоянный магнит из непроводящего материала в форме однородного диска, покрытого тонким слоем металла. При подключении к магниту источника постоянного напряжения с помощью скользящего контакта K магнит начинает быстро вращаться.

Радиус ротора $r = 2$ см, сила трения между скользящим контактом и ротором $F_0 = 9$мН (трением в оси можно пренебречь), ЭДС источника $\mathscr{E} = 1,5$ В, полное сопротивление электрической цепи $R = 1,5$ Ом. Считайте, что магнитное поле

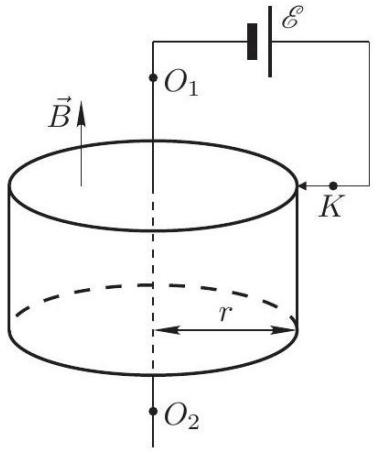


Рис. 61 вблизи оснований диска однородно, направлено вдоль оси диска и имеет индукцию $B = 1$ Тл.
• Укажите направление вращения ротора.
Найдите установившуюся частоту $\nu_{\max}$ вращения ротора без учёта трения.
Найдите установившуюся частоту ν вращения ротора с учётом трения.

ТУЙМ-106. Униполярный электродвигатель (2012)

Ротор разгоняется механическим моментом силы Ампера, возникающим в результате взаимодействия радиального тока с магнитным полем диска. С учётом полярности подключения источника и направления магнитного поля, отмеченного на рисунке в условии, отсюда сразу следует ответ на первый вопрос: вращение будет происходить против часовой стрелки, если смотреть сверху. По мере разгона ротора увеличивается ЭДС индукции, направленная в соответствии с правилом Ленца против ЭДС источника, что приводит к уменьшению тока в цепи и момента силы Ампера. Когда момент силы Ампера сравняется с моментом силы трения, разгон ротора прекратится и он продолжит вращение с установившейся частотой ν.

Для расчёта ЭДС индукции рассмотрим движение пробного заряда q вдоль радиуса AC при вращении ротора с угловой скоростью ω (рис. 198). Пусть x - расстояние от заряда до оси вращения в рассматриваемый момент времени, тогда тангенциальная проекция скорости заряда $v_y = \omega x$, радиальная проекция силы Лоренца $F_x = qv_yB = qB\omega x$, работа сторонних сил против силы Лоренца

$$A = \int_0^r F_x(x)dx = \frac{1}{2}qB\omega r^2,$$

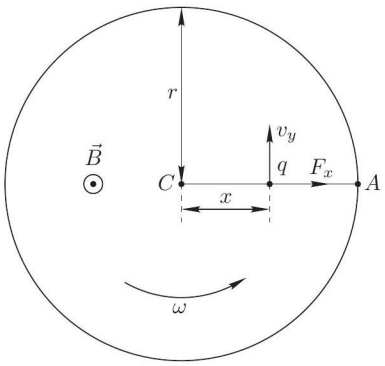


Рис. 198

ЭДС индукции

$$\mathscr{E}_i = \frac{A}{q} = \frac{1}{2}B\omega r^2$$

В отсутствие трения ротор будет вращаться с такой установившейся угловой скоростью $\omega_{\max}$, при которой ток в цепи прекратится из-за равенства ЭДС источника и ЭДС индукции:

$$\mathscr{E} = \frac{1}{2}B\omega_{\max}r^2, \quad \text{откуда} \quad \omega_{\max} = \frac{2\mathscr{E}}{Br^2}$$

Таким образом,

$$\nu_{\max} = \frac{\omega_{\max}}{2\pi} = \frac{\mathscr{E}}{\pi B r^2} \approx 1200\text{Гц}.$$

Рассмотрим теперь случай с трением. По закону Ома находим силу тока в цепи:

$$I = \frac{\mathscr{E} - \mathscr{E}_i}{R} = \frac{2\mathscr{E} - B\omega r^2}{2R}$$

Расстояние x от оси ротора до элемента тока Idx является плечом соответствующей силы Ампера, поэтому можем найти суммарный момент силы Ампера:

$$M = \int_0^r x \cdot Idx \cdot B = \frac{Br^2}{4R}\left(2\mathscr{E} - B\omega r^2\right).$$

В процессе установившегося вращения моменты сил Ампера и трения компенсируют друг друга:

$$\frac{Br^2}{4R}\left(2\mathscr{E} - B\omega r^2\right) = F_0 r$$

откуда

$$\omega = \frac{2Br\mathscr{E} - 4F_0 R}{B^2 r^3}$$

Окончательно находим

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{Br\mathscr{E} - 2F_0 R}{\pi B^2 r^3} \approx 120 \text{ Гц}.$$

Отметим, что выражение для ν тождественно равно $\nu_{\max}$ при $F_0 = 0$, что может использоваться как проверка общего ответа для предельных случаев или как альтернативный способ нахождения $\nu_{\max}$.

Примечание. Может показаться, что рассмотренный двигатель не должен работать: в отличие от традиционного устройства, в предлагаемой модели ротор совмещён со статором! Это напоминает барона Мюнхгаузена, вытаскивающего себя из болота за собственные волосы: механический момент возникает в результате взаимодействия магнитного поля ротора с током, текущим в нём самом! Однако эксперимент полностью подтверждает теоретическое решение и наглядно иллюстрирует выполнение закона сохранения момента импульса: если всю конструкцию подвесить на нитке, то источник тока с подводящими проводами будет крутиться в сторону, противоположную вращению ротора.

14.1.4 Problems about Simple Electrostatics

1-5

1.1

$\frac{F_e}{F_g} = \frac{e^2}{\gamma m^2} = 1{,}24 \cdot 10^{36}$ для протонов, $4,17 \cdot 10^{42}$ для электронов, где γ - гравитационная постоянная.

1.2

$Q = \frac{2\sqrt{2}+1}{4} q$.

1.3

$\mathbf{E} = \frac{3(\mathbf{pr})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\mathbf{p}}{r^3}$.

1.4

Решение. Разложим вектор $\mathbf{p}$ (рис. 383) на составляющую $\mathbf{p}_\parallel$ вдоль радиуса $\mathbf{r}$ и составляющую $\mathbf{p}_\perp$, к нему перпендикулярную. Соответствующие им поля в точке наблюдения A:

$$E_\parallel = \frac{2p_\parallel}{r^3}, \quad E_\perp = -\frac{p_\perp}{r^3}.$$

Угол β между радиусом г и электрической силовой линией определяется формулой

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{E_\perp}{E_\parallel} = \frac{p_\perp}{2p_\parallel} = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\theta.$$

Проекция бесконечно малого участка силовой линии на направление вектора $\mathbf{p}_\perp$ может быть, с одной стороны, представлена как $dr\operatorname{tg}\beta = (dr\operatorname{tg}\theta)/2$; с другой стороны - как $r\operatorname{tg}\theta$. Поэтому $(dr\operatorname{tg}\theta)\ /2 = rd\theta$. Интегрируя это уравнсние, получаем искомое уравнение электрической силовой линии: $r = r_0\sin^2\theta$. Постоянная r_0 имеет смысл длины радиус-вектора $\boldsymbol{r}$ в экваториальной плоскости, т. е. при $\theta = \pi/2$.

1.5

а) $W = -(\mathbf{pE})$; б) $W = -\frac{(\mathbf{pE})}{2} = -\frac{\alpha E^2}{2}$.

O2-1.6 Заряды в квадрате

Элсктрический квадруполь состоит из двух положительных и двух отрицательных одинаковых по величине точечных зарядов q, +, - расположенных в вершинах квадрата со стороной a, как показано на рис. 1

Найти электрическое поле такого квадруполя в точке A, находящейся на расстоянии $r \gg a$ от его центра O, если линия OA параллельна одной из сторон квадрата.

1.6

$E = \frac{3qa^2}{r^4}$.

O2-1.7

Найти силу взаимодействия F между точечным зарядом q и точечным диполем, если расстояние между зарядом и диполем равно d, а дипольный момент p направлен вдоль соединяющей их прямой.

1.7

$F = \frac{2qp}{d^3}$. Диполь будет притягиваться к заряду, если он обращен к нему противоположно заряженным концом, а отталкиваться в противном случае.

O2-1.8

Возможны ли круговые движения с постоянной скоростью точечного электрического заряда вокруг неподвижного точечного электрического диполя?

1.8

Возможны, и притом на любом расстоянии от диполя. Плоскость круговой орбиты заряда перпендикулярна к оси диполя. Угол α между направлением дипольного момента и радиус-вектором, проведенным от диполя к движущемуся заряду, определяется выражением $\cos\alpha = \mp\sqrt{1/3}$, где знак «минус» относится к положительному заряду, а «плюс» - к отрицательному.

O2-1.9 Взаимодействие диполей (???)

Найти силу взаимодействия F двух точечных диполей, если их дипольные моменты $\mathbf{p}_1$ и $\mathbf{p}_2$ направлены вдоль соединяющей их прямой, а расстояние между диполями равно d (рис. 2).

1.9

$F = \frac{6p_1p_2}{d^4}$. Диполи притягиваются, если они обращены друг к другу противоположно заряженными концами, и отталкиваются в противном случае.

O2-1.10

Диск радиусом R заряжен равномерно с поверхностной плотностью σ. Определить напряженность поля E в точке, находящейся на расстоянии d от диска, на перпендикуляре, проходящем через центр диска.

1.10

$E = \sigma\Omega$, где $\Omega = 2\pi\left(1 - \frac{d}{\sqrt{d^2+R^2}}\right)$ - телесный угол, под которым виден диск из данной точки.

O2-1.11

Из трех концентрических бесконечно тонких металлических сфер с радиусами $R_1 < R_2 < R_3$ крайние заземлены, а средней сфере сообщен электрический заряд Q. Найти напряженность электрического поля во всех точках пространства. Сферы находятся в вакууме.

1.11

$$E = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 < r < R_1 \text{ или } R_3 < r < \infty; \\ -\frac{Q}{r^2}\frac{1-R_3/R_2}{1-R_3/R_1}, & \text{если } R_1 < r < R_2; \\ +\frac{Q}{r^2}\frac{1-R_1/R_2}{1-R_1/R_3}, & \text{если } R_2 < r < R_3. \end{cases}$$

O2-1.12 Отверстие в сфере

В равномерно заряженной сфере вырезано малое отверстие. Какова напряженность поля в центре отверстия?

Solution

Такое же, какое и на границе, сразу после нее, $E = q^2/r$. (???? да???? обосную потом)
1.12* $E = 2\pi\sigma$.
Решение. Пусть σ - поверхностная плотность заряда на сфере. Тогда поле вблизи наружной ее поверхности $E = 4\pi\sigma$; внутри сферы $E = 0$. То же самое поле может быть представлено как сумма поля малого диска с поверхностной плотностью σ, вырезанного из сферы, и поля остальной части поверхности. Поле вблизи центра диска, как известно, равно $E = \pm 2\pi\sigma$ (знак зависит от стороны диска). Следовательно, поле остальной части сферы составляет $2\pi\sigma$.

O2-1.13

Две бесконечные плоскопараллельные металлические пластинки помещены в вакууме параллельно друг другу (рис. 3). Полный заряд на единицу площади (т. е. сумма зарядов на обеих поверхностях пластинки) равен q_1 для первой пластинки и q_2 - для второй. Определить поверхностные плотности электрических зарядов на пластинках, а также напряженность электрического поля между ними и во внешнем пространстве.

1.13

$$\sigma_1 = -\sigma_2 = \frac{1}{2}(q_1 - q_2),$$
$$\sigma_1' = \sigma_2' = \frac{1}{2}(q_1 + q_2);$$
$$E = 2\pi(q_1 - q_2),$$
$$E' = 2\pi(q_1 + q_2).$$

O2-1.14

Два длинных провода, расположенных параллельно на расстоянии d друг от друга, равномерно заряжены разноименными зарядами с линейной плотностью $+x$ и $-x$. Определить напряженность поля E на расстоянии h от плоскости, в которой лежат провода, в точке, лежащей в плоскости симметрии. Y к аз ан ие. Пользуясь теоремой Гаусса, найти напряженность поля, создаваемого каждым из проводов, а затем геометрическую сумму этих полей.

1.14

$E = \frac{8xd}{d^2+4h^2}$.

O2-1.15

Определить напряженность поля E внутри и вне безграничного плоского слоя толщиной d, в котором равномерно распределен положительный заряд с объемной плотностью .
Указание. Воспользоваться симметрией системы зарядов и применить теорему Гаусса.

1.15

Поле перпендикулярно к поверхности слоя и направлено, как ука-

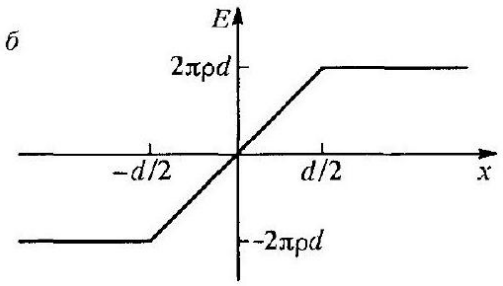


Рис. 384 зано на рис. 384 а. Вне слоя $E = \pm 2\pi\rho d$, внутри слоя $E = 4\pi\rho x$. Ось X перпендикулярна к поверхности слоя, $x = 0$ в середине слоя. Изменение напряженности поля E в зависимости от x изображено на рис. 384б.

O2-1.16

В безграничном плоском слое толщиной $2d$ объемная плотность заряда ρ изменяется по закону $\rho = \rho_0 x/d (-d \leqslant x \leqslant d)$, где x - ось, перпендикулярная плоскости слоя. В слое имеется тонкий канал вдоль оси x, в котором помещен точечный диполь с массой m и дипольным моментом p. Вычислить период малых продольных колебаний диполя.

1.16

$T = \sqrt{\frac{\pi m d}{\rho_0 D}}$.

O2-1.17

В модели атома Томсона предполагалось, что положительный заряд e распределен внутри шара радиусом $R = 10^{-8}$ см. Как должна зависеть от радиуса плотность положительного заряда, чтобы электрон (точечная частица с зарядом - e), помещенный внутри шара, совершал гармонические колебания? Заряды механически друг на друга не действуют. Магнитным полем движущегося заряда пренебречь. Найти частоту колебаний электрона.

1.17

$\rho(r) = \text{const} = \frac{3e}{4\pi R^3}$; $\quad v = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{e^2}{mR^3}} = 2,5 \cdot 10^{15}\Gamma$, где m - масса электрона.

O2-1.18

Один из опытов Кулона, с помощью которого он убедился, что сила притяжения между двумя разноименными точечными зарядами обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними, состоял в следующем. В окрестности маленького заряженного шарика подвешивалась на нити небольшая горизонтальная шеллаковая стрелка, на одном конце которой был прикреплен небольшой электрически заряженный кружок из золотой фольги. Измерялся период малых колебаний стрелки T в зависимости от ее расстояния d до зарsженного шарика. Предполагая справедливым закон Кулона, найти зависимость периода колебаний стрелки от указанного расла по сравнению с расстоянием d.

1.18

$T = 2\pi d\sqrt{\frac{2J}{q_1 q_2 l}}$, где q_1 и q_2 - заряды шарика и кружка, а J - момент инерции стрелки.

O2-1.19

Пользуясь теоремой Гаусса в дифференциальной форме, вычистить напряженность электрического поля равномерно заряженных 1) шара радиусом R и 2) бесконечной пластины толщиной $2h$. Объемная плотность электричества в обоих случаях равна ρ.

O2-1.20

Подсчитать среднюю объемную плотность ρ электрических зарядов в атмосфере, если известно, что напряженность электрического поляя на поверхности Земли равна 100 В/m, а на высоте $h = 1,5$ км эта напряженность падает до 25 В/м.

O2-1.21

С какой объемной плотностью $\rho(r)$ следует распределить электрический заряд в шаре, чтобы поле E_0 внутри него было направлено вдоль радиуса и всюду имело одинаковую величину?

O2-1.22 Полость в боку шара (???)

В шаре, равномерно заряженном электричеством с объемной плотностью ρ, сделана сферическая полость, центр которой O' смещен относительно центра шара O на расстояние r. Определить электрическое поле внутри полости.

Указание. Заполнить мысленно полость электричествами противоположных знаков с плотностями $+\rho$ и $-\rho$. Тогда поле в полости можно рассматривать как суперпозицию полей двух равномерно и противоположно заряженных шаров.

O2-1.23

С какой поверхностной плотностью $\sigma(\theta)$ следует распределить заряд по поверхности сферы радиусом R (рис. 4), чтобы поле внутри нее было однородным и равным E_0? Каково при этом будет электрическое поле вне сферы?

O2-1.24

Длинная медная проволока помещена в однородное электрическое поле E_0, перпендикулярное оси проволоки. Найти распределение поверхностных зарядов на проволоке $\sigma(\theta)$.

O2-1.25

В однородное электрическое поле E_0 вносится незаряженный проводящий шар. Указать на его поверхности точки, в которых: а) поле по абсолютной величине остается прежним; б) поле по абсолютной величине удваивается.

O2-1.26

Во внешнее однородное электрическое поле **E** (рис. 5) внесен металлический шарик. Как в результате этого изменится 10 напряженность электрического поля вблизи поверхности шарика в точках A и B, C и D?

O2-1.27

Металлическая незаряженная сфера радиусом R вносится в однородное электрическое поле $\mathbf{E}_0$. Найти точки пространства, в которых а) поле стало равно $2\mathbf{E}_0$; б) поле стало равно $\mathbf{E}_0/3$.

O2-1.28 Полусферический бугорок в конденсаторе (??????)

На внутренней поверхности одной из пластин плоского заряженного конденсатора имеется полусферический бугорок. Вдали от бугорка электрическое поле в конденсаторе равно E_0'. Используя принцип суперпозиции полей, найти поле на вершине и у основания бугорка. Будет ли происходить разряд с бугорка радиусом 1мКм, если $E_0 = 1$кВ/см, а пробивная напряженность в воздухе 30кВ/ см?

O2-? Заряженный и незаряженный шарик

Два одинаковых незаряженных металлических шарика радиуса r поместили в однородное электрическое поле напряжённостью E, направленное перпендикулярно линии, соединяющей центры шариков. Определите силу, с которой шарики отталкиваются друг от друга.

Solution

Расстояние между центрами шариков равно R, причём R $\gg$ r.
Дипольный момент (почему его еще d называют???) у шарика есть

$$\vec{p} = \vec{E}r^3$$

эту формулу важно знать!!
поэтому у нас два взаимодействующих диполя, они будут отталкиваться, потому что можно посмотреть на заряды, одноименные их ближе.
Энергия диполя во внешнем поле

$$\mathcal{E} = -\vec{p} \cdot E$$

а сила есть градиент энергии по расстоянию R одного диполя в поле второго и начального напряжения E:

$$F = \nabla)\vec{p} \cdot E)$$

а так как поле от второго диполя в точке вычисляется по

$$E = \frac{3(\vec{p}\vec{R})\vec{R}}{R^5} - \frac{\vec{p}}{R^3}$$

в котором первый член ноль, потому что перпендикулярен радиус вектор величине диполя.
то для второго шарика напряженность будет

$$E = -\frac{\vec{E}r^3}{R^3}$$

теперь сила:

$$F = \nabla)\frac{E^2r^3}{R^3}) = \frac{3E^2r^3}{R^4}$$

O2-Равновесные положения шарика на оси кольца

2.37 и я хз

O2-Угол силовой линии из заряда

2.50 и это очень тупой бесполезный вопрос, хотя и интересный.
забью скорее всего.

1. SOLUTIONS Электрический заряд и напряженность электрического поля. Диполь. Теорема Гаусса

1.19

*: Решение. 1) Вычислим поле внутри шара. Ввиду сферической симметрии

$$\mathrm{E} = E(r)\frac{\mathbf{r}}{r}$$

или в координатной форме,

$$E_x = E(r)\frac{x}{r}, \quad E_y = E(r)\frac{y}{r}, \quad E_z = E(r)\frac{z}{r}.$$

Дифференцируя E_x и учитывая, что $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}$ (последнее получается дифференцированием равенства $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$), находим

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{dE}{dr}\frac{x^2}{r^2} - \frac{E}{r^3}x^2 + \frac{E}{r}$$

Написав аналогичные соотношения для производных $\frac{\partial E_y}{\partial y}$, $\frac{\partial E_z}{\partial z}$ и сложив, получим

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = \frac{dE}{dr} + \frac{2E}{r} = \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2E\right)$$

Внутри шара

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2E\right) = 4\pi\rho$$

откуда

$$E = \frac{4\pi}{3}\rho r + \frac{C}{r^2}$$

Постоянная C должна равняться нулю, так как напряженность поля E в центре шара конечна, как это ясно из физических соображений.
Вне шара на расстоянии r от центра

$$E = \frac{4\pi}{3}\frac{R^3\rho}{r^2}$$

2. Аналогично вычисляется поле внутри пластины:

$$E = \begin{cases} 4\pi\rho x & \text{внутри пластины} \\ 4\pi\rho h = 2\pi\sigma & \text{вне пластины .} \end{cases}$$

1.20

$\rho = 1,3 \cdot 10^{-3}$ ед. СГСЭ.

1.21

$\rho(r) = \frac{E_0}{2\pi r}$.

1.22

$\mathrm{E} = \frac{4}{3}\pi\rho$, где $\mathrm{r} = \overrightarrow{OO'}$. Поле однородно.

1.23

$\sigma = \frac{3E_0}{4\pi}\cos\theta$; вне сферы - поле точечного диполя с дипольным моментом $\mathbf{p} = R^3\mathbf{E}$.

1.24

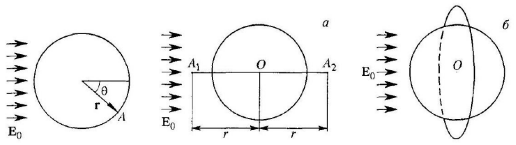
$\sigma(\theta) = \frac{E_0}{2\pi}\cos\theta$.

1.25

Поле на поверхности шара (рис. 385) $\mathbf{E}_A = 3E_0\cos\theta\frac{\mathbf{r}}{r}$.
а) $|E_A| = |E_0|$ при $\cos\theta = \pm\frac{1}{3}$; б) $|\cos\theta| = \frac{2}{3}$.

1.26

В точках A и B напряженность поля возрастет в три раза, в точках и D обратится в ноль.



1.27

а) См. рис. 386а. Поле удваивается в точках A_1 и A_2, лежащих на расстоянии $r = \sqrt[3]{2}R$ от центра O шара.
б) Поле уменьшается втрое в точках окружности радиусом $r = \sqrt[3]{\frac{3}{2}}R$ с центром, совпадающим с центром шара O (рис. 386б). Плоскость этого круга перпендикулярна вектору $\mathbf{E}_0$.

1.28

У вершины $E_1 = 3E_0$, у основания $E_2 = 0$. Пробоя не будет.

1.29

$F = -\frac{6E_0^2a^6}{r^4}$ - сферы притягиваются.

1.30

$F = \frac{3E_0^2a^6}{r^4}$ - сферы отталкиваются.

14.1.5 Problems about Specific Theoretical Electrostatics 1

Жукарев-16.1. Charged spheroid

Найти распределение заряда на уединенном проводнике в форме сжатого сфероида.

Solution

Введем сфероидальную систему координат. Для того чтобы ввести эту систему координат, рассмотрим эллипс с полуосями $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a} > \boldsymbol{b})$ и расстоянием между фокусами $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. Поверхность, получающаяся в результате вращения этого эллипса вокруг малой оси, является сжатым вдоль оси симметрии сфероидом. Введем безразмерную величину $\xi = a/c \quad (\xi \geqslant 1)$. При этом уравнение сжатого сфероида запишется в виде

$$\frac{x^2 + y^2}{\xi^2} + \frac{z^2}{\xi^2 - 1} = c^2.$$

Наряду со сфероидом рассмотрим софокусный однополостный гиперболоид вращения, описываемый уравнением

$$\frac{x^2 + y^2}{\eta^2} - \frac{z^2}{1 - \eta^2} = c^2$$

Расстояние между вершинами гиперболы, которая при вращении вокруг оси z образует этот гиперболоид, равно $2c\eta$, а расстояние между фокусами гиперболы равно $2c$.

Если положить $y = 0$, то из уравнений (16.1) и (16.2) получим систему эллипсов и гипербол, которую можно рассматривать как криволинейную ортогональную систему координат в плоскости $y = 0$. Эллипсу, задаваемому параметром ξ, и гиперболе, задаваемой параметром η, соответствуют четыре точки пересечения, отличающиеся лишь знаками координат x и z. Если указать эти знаки, то определится одна точка плоскости $y = 0$. Различным точкам этой плоскости будут соответствовать различные значения параметров ξ, η и различный выбор знаков x, z.

В пространстве пересечение сфероида и гиперболоида происходит по двум окружностям в верхней $(z > 0)$ и нижней $(z < 0)$ частях сфероида. Для выбора одной из этих двух окружностей следует указать знак $z(\operatorname{sign} z)$.

Чтобы на указанной окружности определить точку, нужно задать азимутальный угол ψ:

$$\psi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$$

Таким образом, три величины ξ, η, ψ и $\operatorname{sign} z$ однозначно определяют точку в пространстве. Эта система координат называется сжатой сферондальной системой координат.

Из уравнений (16.1)-(16.3) найдем соотношения, выражающие декартовы координаты через ξ, η, ψ, $\operatorname{sign} z$:

$$x = c\xi\eta\cos\psi, \quad y = c\xi\eta\sin\psi, \quad z = \pm c\sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)}.$$

Если ввести расстояния от фокусов эллипса (находящегося в плоскости, проходящей через ось Oz и точку с координатами x, y, z), равные $r_\pm = \sqrt{\left(\sqrt{x^2 + y^2} \mp c\right)^2 + z^2}$, то обратное по отношению k(16.4) преобразование можно будет записать в виде

$$\xi = \frac{r_+ + r_-}{2c}, \quad \eta = \frac{r_- - r_+}{2c}, \quad \psi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}.$$

В нашем случае коэффициенты Ламе удобнее всего определить исходя из (16.4). При этом получим

$$h_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \xi}\right)^2} = c\sqrt{\frac{\xi^2 - \eta^2}{\xi^2 - 1}}$$

$$h_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \eta}\right)^2} = c\sqrt{\frac{\xi^2 - \eta^2}{1 - \eta^2}}$$

$$h_3 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \psi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \psi}\right)^2} = c\xi\eta.$$

В рассматриваемой системе координат уравнение Лапласа запишется в виде

$$\frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left\{\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{h_2 h_3}{h_1}\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}\right) + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{h_1 h_3}{h_2}\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\right) + \frac{h_1 h_2}{h_3}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \psi^2}\right\} = 0.$$

Множитель, стоящий перед фигурной скобкой, можно сократить.

Очень важным обстоятельством является то, что уравнение (16.9) допускает, в частности, решения в виде функции от одной переменной, например в виде $\varphi = \varphi(\xi)$. Это связано с тем, что в сфероидальной системе координат уравнение Лапласа допускает разделение переменных, что подробно будет рассмотрено в следуюшем параграфе.

Предположив решение (16.9) в виде $\varphi = \varphi(\xi)$ и учитывая (16.6)(16.8), получим из (16.9)

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\xi\sqrt{\xi^2-1}\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right)=0.$$

Решение в виде функции от одной переменной означает, что эквипотенциальные поверхности вне проводящего сфероида также являются сфероидами. Интегрируя (16.10), получим

$$\frac{\partial\varphi(\xi)}{\partial\xi}=-\frac{A}{\xi\sqrt{\xi^2-1}}$$

где $\boldsymbol{A}$ - константа интегрирования. Производя второе интегрирование, получим

$$\varphi(\xi)=A\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{\sqrt{\xi^2-1}}+B\quad(\xi>\xi_0)\,,$$

где $\boldsymbol{B}$ - вторая константа интегрирования.

Определение аддитивной константы B связано с нормировкой потенциала на бесконенности ($\xi\to\infty$); поэтому положим $B=0$. Константа $\boldsymbol{A}$ связана с зарядом проводника, который по условию задачи равен $\boldsymbol{Q}$. Связь между константой $\boldsymbol{A}$ и зарядом проще всего найти из асимптотической ($\xi\to\infty$) формы (16.12). Согласно (16.5), имеем $c\xi=(r_++r_-)/2\approx r(\xi\to\infty)$, поэтому

$$\varphi_{\text{ac}}=\frac{\boldsymbol{A}}{\xi}\approx\frac{\boldsymbol{cA}}{r}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r},$$

откуда

$$A=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 c}.$$

Таким образом, потенциал в случае заряженного проводящего сжатого сфероида равен

$$\varphi(\xi)=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 c}\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{\sqrt{\xi^2-1}}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 c}\,\mathrm{arctg}\,\frac{c}{b}.$$

Если вместо заряда Q задан потенциал проводника φ_0, то потенциал в остальных точхах вне проводника равен

$$\varphi(\xi)=\varphi_0\frac{\mathrm{arctg}\left(1/\sqrt{\xi^2-1}\right)}{\mathrm{arctg}\left(1/\sqrt{\xi_0^2-1}\right)}.$$

Из формулы (16.15) можно получить выражение для емкости сжатого сфероида:

$$C=4\pi\varepsilon_0 c\frac{1}{\mathrm{arctg}\,(c/b_0)}.$$

В пределе $\xi_0\to1$ сфероид переходит в диск. При этом для емкости диска получим

$$C_{\text{диск}}=4\pi\varepsilon_0 c\frac{2}{\pi}$$

Для определения напряженности поля нужно вычислить градиент, отличная от нуля компонента которого равна

$$(\mathrm{grad}\,\varphi(\xi))_\xi=\frac{1}{h_1}\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}=-\frac{1}{c}\frac{\sqrt{\xi^2-1}}{\sqrt{\xi^2-\eta^2}}\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 c}\frac{1}{\xi\sqrt{\xi^2-1}}.$$

Следовательно, напряженность поля равна

$$E(\xi,\eta)=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\frac{1}{\xi\sqrt{\xi^2-\eta^2}}.$$

Из (16.20) видно, что, в отличие от потенциала, поле в различных точках одного и того же сфероида различно. Наибольшая напряженность в случае сжатого сфероида «на экваторе», где $\eta=1$, наименьшая «на полюсах», где $\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{0}$.

Плотность заряда равна

$$\sigma=\varepsilon_0 E\,(\xi_0,\eta)=\frac{Q}{4\pi c^2}\frac{1}{\xi_0\sqrt{\xi_0^2-\eta^2}}.$$

В целях проверки можно убедиться в том, что интегрирование по поверхности проводящего сфероида выражения (16.21) дает заряд проводника Q. Учитывая, что $dS=h_2h_3d\eta d\psi$, получим

$$\iint_S \sigma dS = 2\int_0^1\int_0^{2\pi} \frac{Q}{4\pi c^2}\frac{1}{\xi_0\sqrt{\xi_0^2-\eta^2}} c^2 \frac{\sqrt{\xi_0^2-\eta^2}}{\sqrt{1-\eta^2}}\xi_0\eta d\eta d\psi = Q.$$

Выражение (16.21) для плотности заряда можно преобразовать к более удобному для анализа виду. Учитывая, что

$$\xi_0^2-\eta^2 = \frac{a_0^2b_0^2}{c^2}\left(\frac{x^2+y^2}{a_0^4}+\frac{z^2}{b_0^4}\right),$$

получим

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi a_0^2 b_0}\frac{1}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)/a_0^4 + z^2/b_0^4}}$$

В пределе $b_0 \to 0, c \to a = R$, из (16.24) получим распределение заряда на проводящем диске. При этом следует учесть, что $\left(x^2+y^2\right)/a_0^4 \ll z^2/b_0^4$, и воспользоваться уравнением эллипсоида $z^2/b_0^2 = 1 - \left(x^2+y^2\right)/a_0^2$. В результате получим для диска

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2}\frac{1}{\sqrt{1+\left(x^2+y^2\right)/R^2}},$$

где R - радиус диска.

В центре диска плотность заряда в два раза меньше средней плотности, равной $Q/\left(2\pi R^2\right)$. На краях диска плотность обращается в бесконечность, что связано с предположением о бесконечно малой толщине диска.

Таким образом, распределение заряда на поверхности диска существенно неравномерное. Это связано с тем, что при равномерном распределении заряда по поверхности диска возникает тангенциальная составляющая поля вблизи поверхности диска, которая обращается в нуль лишь для центральной точки диска. Однако если рассмотреть плоский конденсатор, составленный из двух дисков, то (в случае одинаковых по абсолютной величине и противоположных по знаку зарядов на обкладках) распределение зарядов на внутренней поверхности обкладок будет почти равномерным (если не учитывать краевой эффект), а снаружи зарядов практически не будет. В этом случае тангенциальные составляющие, возникающие от зарядов разных знаков, взаимно компенсируются. Если на одну обкладку добавить заряд $2Q$, то половина этого заряда распределится равномерно по внутренней стороне обкладки, а другая половина распределится неравномерно по внешней стороне по закону (16.25). На второй обкладке при этом на внешней стороне появится такое же распределение заряда Q, а на внутренней стороне появится дополнительное равномерное распределение такого же по величине заряда, но противоположного знака.

Жукарев-16.2. Charged spheroid

Найти распределение заряда на уединенном проводнике в форме вытянутого сфероида с полуосями a_0 и b_0 $(a_0 > b_0)$. Определить емкость такого проводника.

Solution

Решение. Задача решается аналогично предыдущему случаю. Введем вытянутую сфероидальную систему координат, задаваемую поверхностями вытянутого сфероида и двухполостного гиперболоида вращения. Эти поверхности получаются вращением эллипса вокруг большой оси и гиперболы вокруг оси, проходящей через фокусы. Уравнения поверхностей будут иметь вид

$$\frac{x^2+y^2}{\xi^2-1}+\frac{z^2}{\xi^2} = c^2.(\xi \geqslant 1),$$

$$\frac{z^2}{\eta^2}-\frac{x^2+y^2}{1-\eta^2} = c^2 \quad (0 \leqslant \eta \leqslant 1).$$

При этом получим

$$x = c\sqrt{\left(\xi^2-1\right)\left(1-\eta^2\right)}\cos\psi, \quad y = c\sqrt{\left(\xi^2-1\right)\left(1-\eta^2\right)}\sin\psi,$$
$$z = \pm c\xi\eta$$

Обратное преобразование имеет тот же вид, что и (16.5), но теперь $r_\pm = \sqrt{x^2+y^2+(z\mp c)^2}$.

Коэффициенты Ламе для вытянутой сфероидальной системы координат равны

$$h_1 = c\sqrt{\frac{\xi^2-\eta^2}{\xi^2-1}}, \quad h_2 = c\sqrt{\frac{\xi^2-\eta^2}{1-\eta^2}}$$
$$h_3 = c\sqrt{(\xi^2-1)(1-\eta^2)}$$

Откуда

$$\frac{h_2 h_3}{h_1} = c\left(\xi^2-1\right)$$

В вытянутой сфероидальной системе координат уравнение также имеет решение, зависяшее от одной переменной ξ. Соответствуюшее уравнение, следующее из уравнения Лапласа, при этом имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\left(\xi^2-1\right)\frac{\partial}{\partial\xi}\varphi(\xi)\right) = 0.$$

Первое интегрирование дает

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} = -\frac{A}{\xi^2-1}$$

Второе интегрирование дает

$$\varphi(\xi) = A\frac{1}{2}\ln\frac{\xi+1}{\xi-1} + B.$$

Учитывая нормировку потенциала на бесконечности, константу B следует положить равной нулю. Первая константа интегрирования $\boldsymbol{A}$ определяется зарядом проводника Q или его потенциалом φ_0. Для того чтобы выразить константу $\boldsymbol{A}$ через заряд, рассмотрим асимптотическую форму (16.33) при $\xi \to \infty$ и учтем, что $c\xi = (r_+ + r_-)/2 \approx r$. При этом получим

$$\varphi_{\text{ac}}(\xi) = A\frac{1}{\xi} \approx A\frac{c}{r}$$

Откуда следует, что

$$\boldsymbol{A} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 c}.$$

Окончательно для потенциала получаем

$$\varphi(\xi) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 2c}\ln\frac{\xi+1}{\xi-1} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 c}\ln\frac{a+c}{b}.$$

Заметим, что переход от вытянутого эллипсоида сжатому эллипсоиду можно осуществить заменой в формуле (16.36) $a \rightleftarrows b (a > b)$. При этом $c \to \sqrt{b^2-a^2} = i\sqrt{a^2-b^2} = ic$. Выражение (16.36) в результате замены $a \rightleftarrows b, c \to ic$ станет равным

$$\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 2ic}\ln\frac{b+ic}{b-ic} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 c}\operatorname{arctg}\frac{b}{c},$$

т. е. перейдет в выражение для потенциала сжатого сфероида. Из (16.36) видно, что эквипотенциальные поверхности суть вытянутые сфероиды. При этом напряженность поля в разных точках сфероида будет разной, таК каК

$$E = -(\operatorname{grad}\varphi)_\xi = -\frac{1}{h_1}\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\frac{1}{\sqrt{\xi^2-\eta^2}\sqrt{\xi^2-1}}$$

Поверхностная плотность заряда будет равна

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi c^2}\frac{1}{\sqrt{\xi_0^2-\eta^2}\sqrt{\xi_0^2-1}}.$$

Для проверки можно вычислить суммарный заряд, исходя из выражения (16.39). Учитывая, что

$$dS = h_2 h_3 d\eta d\psi = c^2\sqrt{\xi_0^2-\eta^2}\sqrt{\xi_0^2-1}d\eta d\psi$$

получим

$$\iint\sigma dS = \frac{Q}{4\pi c^2}2\int_0^1\int_0^{2\pi}\frac{c^2\sqrt{\xi_0^2-\eta^2}\sqrt{\xi_0^2-1}}{\sqrt{\xi_0^2-\eta^2}\sqrt{\xi_0^2-1}}d\eta d\psi = Q$$

как и должно быть. Выражение (16.39) можно преобразовать к более удобному виду, аналогичному (16.24). Для этого заметим, что в случае вытянутого сфероида

$$\xi^2 - \eta^2 = \frac{a^2 b^2}{c^2}\left(\frac{x^2+y^2}{b^4} + \frac{z^2}{a^4}\right).$$

Учитывая (16.41), получим из (16.39)

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi}\frac{1}{a_0 b_0^2}\frac{1}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)/b_0^4 + z^2/a^4}}.$$

Для очень вытянутого сфероида ($a_0 \gg b_0$) можно считать, что первый член под корнем в (16.42) много больше второго. Эти члены соизмеримы лишь вблизи самых концов сфероида, для которых $x^2 + y^2 \sim b_0^4/a_0^2$. Если не рассматривать эти области, которые содержат малую долю заряда (порядка $Q\left(b_0/a_0\right)^2\Big)$, то для остальной части очень вытянутого сфероида можно положить

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi a}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Из (16.43) видно, что поверхностная плотность заряда даже для очень вытянутого сфероида в разных частях различна, так как меняется толщина сфероида $2\sqrt{x^2+y^2}$. Однако для линейной плотности заряда получается постоянное для всей длины сфероида значение

$$\gamma = \sigma 2\pi\sqrt{x^2+y^2} = \frac{Q}{2a_0} \quad (a_0 \approx c).$$

Из этого обстоятельства следует, что эквипотенциальные поверхности равномерно заряженной нити длиной $2c$ - вытянутые сфероиды, потенциал для которых будет определяться формулой (16.36).

Из формулы (16.36) можно найти емкость вытянутого сфероида:

$$C = \frac{4\pi\dot{\varepsilon}_0 2c}{\ln\left(\left(a_0+c\right)/\left(a_0-c\right)\right)} = \frac{4\pi\varepsilon_0 c}{\ln\left(\left(a_0+c\right)/b_0\right)}.$$

Для очень вытянутого сфероида остается зависимость от b_0 ($c \to a_0$):

$$C_{b\to 0} = 4\pi\varepsilon_0\frac{a_0}{\ln\left(2a_0/b_0\right)}.$$

Если задан не заряд, а потенциал проводника φ_0, то вне проводника потенциал будет равен

$$\varphi = \varphi_0\frac{\ln((a+c)/(a-c))}{\ln\left(\left(a_0+c\right)/\left(a_0-c\right)\right)}.$$

Жукр-17.1. Charged spheroid in field

Найти распределение заряда на поверхности незаряженного сфероида, внесенного в однородное электростатическое поле. Рассмотреть случаи, в которых поле параллельно и перпендикулярно оси сфероида для двух типов сфероидов.

Solution

Эту задачу удобно решать в соответствуюшей сфероидальной системе координат. В отличие от предыдушей задачи решение теперь нельзя искать в виде функции, зависящей от одной переменной, так как эквипотенциальные поверхности уже не будут являться сфероидами, за исключением лишь поверхности самого проводника. Однако решение уравнения Лапласа можно искать в виде произведения:

$$\varphi(\xi,\eta,\psi) = G(\xi)F(\eta)K(\psi).$$

Априори существование решений такого типа не очевидно. Оно обусловлено тем, что уравнение Лапласа допускает разделение переменных в сфероидальной системе координат.

Подставив искомое решение в форме (17.1) и разделив обе части уравнения Лапласа на произведение GFK, получим

$$\frac{1}{GFK}h_1h_2h_3\Delta(GFK) = 0.$$

В развернутой форме уравнение (17.2) имеет вид

$$\frac{1}{G}\cdot\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial G}{\partial\xi}\right) + \frac{1}{F}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{h_1h_3}{h_2}\frac{\partial F}{\partial\eta}\right) + \frac{h_1h_2}{h_3K}\frac{\partial^2 K}{\partial\psi^2} = 0.$$

Коэффициенты Ламе не зависят от ψ (аксиальная симметрия), поэтому должно выполняться уравнение

$$\frac{1}{K(\psi)}\frac{\partial^2 K(\psi)}{\partial\psi^2} = -C_1,$$

где C_1 - константа. Уравнение (17.3) приводится к виду

$$,\frac{1}{G}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\cdot\frac{\partial G}{\partial\xi}\right)+\frac{1}{F}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{h_1h_3}{h_2}\cdot\frac{\partial F}{\partial\eta}\right)-\frac{h_1h_2}{h_3}C_1=0.$$

Для дальнейшего преобразования уравнения (17.5) учтем конкретный вид коэффициентов Ламе. В сжатой сфероидальной системе координат

$$\frac{h_2h_3}{h_1}=c\xi\eta\frac{\sqrt{\xi^2-1}}{\sqrt{1-\eta^2}};\quad \frac{h_1h_3}{h_2}=c\xi\eta\frac{\sqrt{1-\eta^2}}{\sqrt{\xi^2-1}}$$
$$\frac{h_1h_2}{h_3}=c\left(\frac{1}{\eta^2}-\frac{1}{\xi^2}\right)\frac{\xi\eta}{\sqrt{\xi^2-1}\sqrt{\eta^2-1}}$$

и уравнение (17.5) принимает вид

$$\frac{\sqrt{\xi^2-1}}{\xi}\frac{1}{G}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\xi\sqrt{\xi^2-1}\frac{\partial G}{\partial\xi}\right)+C_1\frac{1}{\xi^2}=$$
$$=-\frac{\sqrt{1-\eta^2}}{\eta}\frac{1}{F}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\eta\sqrt{1-\eta^2}\frac{\partial F}{\partial\eta}\right)+C_1\frac{1}{\eta^2}$$

В уравнении (17.7) левая часть зависит от ξ, а правая - от η. Это означает, что и правая и левая части равны константе, которую мы обозначим $-C_2$. При этом получим два уравнения:

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\xi\sqrt{\xi^2-1}\frac{\partial G}{\partial\xi}\right)+\frac{\xi}{\sqrt{\xi^2-1}}\left(\frac{1}{\xi^2}C_1+C_2\right)G=0$$
$$\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\eta\sqrt{1-\eta^2}\frac{\partial F}{\partial\eta}\right)-\frac{\eta}{\sqrt{1-\eta^2}}\left(\frac{1}{\eta^2}C_1+C_2\right)\bar{F}=0.$$

Таким образом, вместо одного уравнения для функции, зависяшей от трех переменных, получено три уравнения для трех функций, каждая из которых зависит от одной переменной, т. е. уравнения (17.4), (17.8) и (17.9).

Аналогичным образом для вытянутой сфероидальной системы координат

$$\frac{h_2h_3}{h_1}=c\left(\xi^2-1\right),\quad \frac{h_1h_3}{h_2}=c\left(1-\eta^2\right),$$
$$\frac{h_1h_2}{h_3}=\frac{c}{\xi^2-1}+\frac{c}{1-\eta^2}.$$

С учетом (17.10) из уравнения (17.5) получим

$$\frac{1}{G}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\left(\xi^2-1\right)\frac{\partial G}{\partial\xi}\right)-C_1\frac{1}{\xi^2-1}=$$
$$=-\frac{1}{F}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\left(1-\eta^2\right)\frac{\partial F}{\partial\eta}\right)+C_1\frac{1}{1-\eta^2}.$$

Так как левая и правая части уравнения (17.11) опять зависят от разных переменных, то оно эквивалентно двум уравнениям:

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\left(\xi^2-1\right)\frac{\partial G}{\partial\xi}\right)+\left(C_2-C_1\frac{1}{\xi^2-1}\right)G=0$$
$$\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\left(1-\eta^2\right)\frac{\partial F}{\partial\eta}\right)-\left(C_2+C_1\frac{1}{1-\eta^2}\right)F=0.$$

Уравнения (17.4), (17.8), (17.9) или (17.4), (17.12), (17.13) не являются полностью независимыми, так как они связаны константами C_1 и C_2. Например, выбор решения уравнения (17.4) определяет константу C_1, а выбор решения уравнения (17.9) определяет вторую константу C_2. Эти две константы входят в уравнение (17.8), т. е. конкретный вид уравнения (17.8) зависит от выбранных решений уравнений (17.4) и (17.9).

Уравнения (17.8) и (17.12) можно записать в стандартном виде:

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left(R(\xi)\frac{\partial G}{\partial\xi}\right)+Q(\xi)G(\xi)=0.$$

При этом для сжатой сфероидальной системы координат

$$R(\xi) = \xi\sqrt{\xi^2-1}, \quad Q(\xi) = \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2-1}}\left(\frac{1}{\xi^2}C_1 + C_2\right).$$

Для вытянутой сфероидальной системы координат

$$R(\xi) = \xi^2 - 1, \quad Q(\xi) = C_2 - C_1\frac{1}{\xi^2-1}$$

Уравнение (17.14) имеет два независимых решения. Пусть одно известно и равно $G_0(\xi)$, тогда второе решение можно найти с помощью интегрирования. Обозначим второе решение через $G(\xi)$ и покажем, что

$$G(\xi) = G_0(\xi)\int\limits_{\xi}^{\infty}\frac{ds}{G_0^2(s)R(s)}$$

Дифференцируя (17.17) по ξ, получим

$$\frac{\partial G}{\partial \xi} = \frac{\partial G_0(\xi)}{\partial \xi}\int\limits_{\xi}^{\infty}\frac{ds}{G_0^2(s)R(s)} - \frac{1}{G_0(\xi)R(\xi)}.$$

Второе дифференцирование дает

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(R(\xi)\frac{\partial G(\xi)}{\partial \xi}\right) = -Q(\xi)G_0(\xi)\int\limits_{\xi}^{\infty}\frac{ds}{G_0^2(s)R(s)} = -Q(\xi)G(\xi)$$

Из (17.19) следует, что (17.17) удовлетворяет уравнению (17.14). В дальнейшем второе решение будем обозначать

$$G(\xi) = G_0(\xi)A(\xi)$$

где

$$A(\xi) = \int\limits_{\xi}^{\infty}\frac{ds}{G_0^2(s)R(s)}$$

Вернемся к поставленной задаче. Пусть напряженность невозмущенного однородного поля равна E_0, а проводник имеет форму сфероида (сжатого или вытянутого) с полуосями $a_0 = c\xi_0, b_0 = c\sqrt{\xi_0^2-1}$. Потенциал в точке O, куда попадает центр сфероида и которую выберем за начало координат, для простоты положим равным нулю. Задачу будем решать в соответствующей (сжатой или вытянутой) сфероидальной системе координат. Рассмотрим два случая, в которых внешнее невозмущенное поле направлено параллельно ($\parallel$) или перпендикулярно ($\perp$) оси симметрии сфероида, Потенциал невозмущенного поля будет

$$\varphi_0 = -E_0 z \quad \text{(II) или } \varphi_0 = -E_0 x \quad (\perp).$$

В сфероидальной системе координат z и $\boldsymbol{x}$ можно представить в едином виде:

$$z = cG_{0\parallel}(\xi)F_{\parallel}(\eta)K_{\parallel}(\psi)T_{\parallel}, \quad x = cG_{0\perp}(\xi)F_{\perp}(\eta)K_{\perp}(\psi)T_{\perp}.$$

При этом потенциал невозмущенного поля будет записываться в виде

$$\varphi_0 = -E_0 cG_0(\xi)F(\eta)K(\psi)T,$$

где G_0, F, K, T для каждого из четырех случаев будут иметь свой вид.

14.1.6 Problems about Basic, Easy Electrostatics 1

O2-2.1.

Две одинаковые и одинаково заряженные капли несжимаемой проводящей жидкости находятся на большом (бесконечном) расстоянии друг от друга. Заряд, радиус и масса каждой капли равны соответственно q, r и m. Какую минимальную скорость v вдоль прямой, соединяющей их центры, надо сообщить каждой капле, чтобы они стали двигаться навстречу друг другу и при столкновении соединились в одну каплю? Поверхностное натяжение и колебания формы капли не учитывать.

2.1

$v = \sqrt{(\sqrt[3]{4} - 1)\frac{q^2}{mr}}$.

O2-2.2

Заряжснный проводник находится внутри замкнутой металлической оболочки. 1) Изменится ли электрическое поле внутри оболочки, если извне поднести к ней еще один заряженный проводник? 2) Будет ли изменяться поле внутри и вне оболочки, если перемещать внутренний проводник?

2.2

1) Нет.
2) Внутри будет, снаружи нет.

O2-2.3

Металлически шар радиусом R_1, несущий заряд Q, окружен расположенным концентрически полым металлическим незарьженным шаром с внутренним радиусом R_2 и внешним R_3. Построить графики зависимости напряженности поля E от расстояния r до центра шаров. Найти потенциалы шаров, если в бесконечности потенциал равен нулю. Изменятся ли потенциалы шаров, если внешний шар заземлить?

2.3

Поле будет иметь вид, показанный на рис. 387. Потенциал внешнего шара Q/R_3, а потенциал внутреннего $Q\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)$. Если внешний шар заземлить, то его потенциал будет равен нулю, а потенциал внутреннего шара будет равен $Q\left(R_2 - R_1\right)/\left(R_1 R_2\right)$.

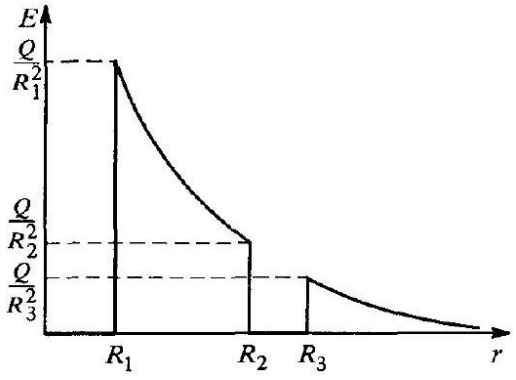


Рис. 387

O2-2.4

Три концентрические тонкие металлические сферы радиусами $R_1 < R_2 < R_3$, находящиеся в вакууме, заряжены соответственно зарядами Q_1, Q_2, Q_3. В некоторой точке A между первой и второй сферами измеряют потенциал. Найти изменение потенциала в этой точке, если вторую и третью сферы замкнуть между собой.

2.4

$\varphi_A(1) = \frac{Q_1}{r} + \frac{Q_2}{R_2} + \frac{Q_3}{R_3}$, где r - расстояние от центра системы до точки A;

$$\varphi_A(2) = \frac{Q_1}{r} - \frac{Q_2}{R_2} + \frac{Q_1 + Q_2 + Q_3}{R_3}$$

$$\Delta\varphi = \varphi_A(2) - \varphi_A(1) = (Q_1 + Q_2)\left(\frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_2}\right)$$

O2-2.5

Вычислить распределение потенциала в плоском конденсаторе толщиной d, если одна обкладка заземлена, другая находится при потенциале φ_0, а в пространстве между ними распределен заряд с постоянной объемной плотностью ρ.

2.5

$\varphi(x) = \left(\frac{\varphi_0}{d} + 2\pi\rho d\right) x - 2\pi\rho x^2$, где координата x отсчитывается от заземленной пластины.

O2-2.6

В пространстве между пластинами плоского конденсатора имеется однородный поток электронов, который создает равномерный объемный заряд. Расстояние между пластинами равно d. Потенциал одной из пластин равен φ_0. При каком значении объемной плотности заряда ρ потенциал и напряженность поля у другой пластины равны нулю?

2.6

$\rho = -\frac{\varphi_0}{2\pi d^2}$.

Решение. Если x - расстояние от пластины с потенциалом $\varphi 0$, то напряженность поля по теореме Гаусса определяется уравнением

$$\frac{\partial E}{\partial x} = 4\pi\rho.$$

Так как потенциал φ связан с напряженностью поля E равенством

$$E = -\frac{d\varphi}{dx}, \quad \text{то} \quad \frac{d^2\varphi}{dx^2} = -4\pi\rho$$

Общее решение последнего уравнения

$$\varphi = -2\pi\rho x^2 + Cx + C_1$$

Учитывая условия задачи, находим константы C и C_1 и ответ.

O2-2.7

*: Внутренняя обкладка цилиндрического конденсатора радиусом R_2 имеет потенциал φ_0. Внешняя обкладка радиусом R_1 заземлена. Между обкладками конденсатора имеется заряд с постоянной объемной плотностью ρ. Найти распределение потенциала φ между обкладками конденсатора.

2.7

* В точке на расстоянии r от оси цилиндров потенциал

$$\varphi = \frac{\varphi_0 + \pi\rho\left(R_2^2 - R_1^2\right)}{\ln\left(R_2/R_1\right)} \ln\left(r/R_1\right) - \pi\rho\left(r^2 - R_1^2\right)$$

Решение. По теореме Гаусса для кольцевого слоя радиусом r толщиной dr

$$E \cdot 2\pi r - \left(E - \frac{dE}{dr}dr\right) 2\pi(r - dr) = 4\pi\rho \cdot 2\pi r dr$$

где E - напряженность поля. Отсюда

$$\frac{dE}{dr} + \frac{1}{r}E = 4\pi\rho$$

или для потенциала

$$\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dr} = -4\pi\rho$$

Частное решение этого уравнения $\varphi_1 = -\pi\rho r^2$. Решение соответствующего однородного уравнения $\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dr} = 0$ имеет вид $\varphi_2 = C\ln r + C_1$. Таким образом, общее решение неоднородного уравнения

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = C \ln r + C_1 - \pi \rho r^2$$

Подставляя сюда заданные в условии задачи значения потенциала, находим и C_1 и получаем ответ.

O2-2.8

Оценить разность потенциалов V между головной и хвостовой частями стального керна бронебойного снаряда, возникающую вследствие его торможения в прегра де. Принять, что керн длиной $L = 25$ см потерял скорость, пробив броню толщиной $H = 5$ см. Скорость снаряда в момент соприкосновения с броней $v_0 = 1000$ m/c.

2.8

$V = \frac{mv_0^2}{2e}\frac{L}{H} = 14$ мкВ, где m и e - масса и заряд электрона.

O2-2.9

Для инжекции в термоядерную установку используется цилиндрический пучок дейтронов с энергией $W = 500$ кэВ. Диаметр пучка $D = 1$ см. Найти напряженность E электрического поля на поверхности пучка и разность потенциалов V между границей пучка и его центром, если ток в пучке составляет $\mathscr{O} = 1$ А и равномерно распределен по его сечению.

2.9

$E = \frac{49}{D}\sqrt{\frac{m_p}{W}} = 1,7$ ед. СГСЭ $= 5,1\kappa$В/с; $V = g\sqrt{\frac{m_p}{W}} = 4,3$ ед. СГСЭ $= 1,3\kappa$ В, где m_p - масса протона.

O2-2.10

На расстоянии h от проводящей бесконечной плоскости находится точечный заряд $+q$. Определить напряженность поля E в точке A (рис. 6), отстоящей от плоскости и от заряда на расстояние h.

2.10

$E = \frac{q}{5h^2}\sqrt{26 - 2\sqrt{5}}$.

O2-2.11

Найти поверхностную плотность зарядов, индуцированных зарядом q на поверхности бесконечной металлической плоскости. Заряд находится на расстоянии R от плоскости.

2.11

$\sigma(r) = \frac{qR}{2\pi(R^2+r^2)^{3/2}}$, где r - расстояние от перпендикуляра, опущенного из заряда на плоскость.

O2-2.12

Точечные заряды Q_1 и Q_2 находятся на расстоянии R друг от друга. Определить величины и направления сил, которые будут действовать на эти заряды после того, как посередине между ними будет введена бесконечная металлическая пластина толщиной $R/2$.

2.12

$F_1 = \frac{4Q_1^2}{R^2}$; $\quad F_2 = \frac{4Q_2^2}{R^2}$.

14.1.7 Problems about Basic, Easy Electrostatics 2

O2-2.13

На двух нитях AB и $A'B'$ на одинаковой высоте подвешены шарики, связанные между собой нитью BB' длиной l (рис. 7). На шарики нанесены одинаковые заряды Q. Под шариками на расстоянии h расположена горизонтальная заземленная металлическая плита, размеры которой велики по сравнению с l и h. Считая, что радиус шариков мал по сравнению с l и h, определить натяжения горизонтальной и вертикальных нитей.

2.13

$F_{\text{гор}} = -\frac{Q^2}{l^2} + \frac{Q^2}{4h^2+l^2}\left(1+4\frac{h^2}{l^2}\right)^{-1/2}$;

$$F_{\text{верг}} = mg + \frac{Q^2}{4h^2}\left[1+\left(1+\frac{l^2}{4h^2}\right)^{-3/2}\right].$$

O2-2.14

Найти силу, действующую на точечный заряд q, помещенный на биссектрисе прямого двугранного угла между двумя проводящими плоскостями (рис. 8). Расстояние между зарядом q и вершиной двугранного угла O равно d.

2.14

$F = \frac{q}{2d^2}\left(\sqrt{2}-\frac{1}{2}\right)$. Сила F направлена к вершине двугранного угла O.

15

2.15

$F = \frac{3}{4}\frac{p^2}{L_0^4} \approx 0,54$ дин; $A = \frac{p^2}{4L_0^3}\left(1-\frac{L_0^3}{L^3}\right) \approx 0,16$ эрг.

O2-2.16

Две взаимно перпендикулярные проводящие плоскости образуют двугранный угол. На биссектрисе этого угла на расстоянии a от вершины помещен электрический диполь с моментом p. Ось диполя направлена к вершине угла. Найти силу, действующую на диполь.

2.16

$F = \frac{3}{4}(3\sqrt{2}-1)\frac{p^2}{a^4}$.

O2-2.17

Над горизонтальным листом металла вертикально расположен равномерно заряженный тонкий стержень длиной $l = 1$ смс полным зарядом $Q = 10^{-8}$ Кл. Нижняя точка стержня удалена от листа на расстояние $H = 1$ см. Найти плотность σ индуцированного заряда в точке, расположенной на поверхности листа непосредственно под стержнем.

O2-2.18

На высоте $H = 1$ см над плоскостью горизонтально лежащего металлического листа расположен равномерно заряженный диск радиусом $R = 1$ см с полным зарядом $Q = 10^{-9}$ Кл. Плоскость диска параллельна плоскости листа. Найти плотность σ индуцированного заряда в точке, расположенной на поверхности листа непосредственно под центром диска.

O2-2.19 Нулевой потенциал от двух разноименных частиц (????)

Две разноименных частицы, отношение величин заряда которых равно n, расположены на расстоянии d друг от друга. Доказать, что поверхность нулевого потенциала есть сферическая поверхность. Определить радиус R этой сферы и расстояние H от ее центра до меньшего заряда.

Solution

O2-2.24

На бесконечной плоской поверхности проводника AB имеется сферический бугор CMD, центр O которого лежит в той же плоскости (рис. 12). На оси симметрии системы вне проводника расположен точечный заряд q. Найти электрическое поле во всем пространстве.

O2-2.25

Полый шар радиусом R имеет заряд Q; в шаре имеется малое отверстие. Как будет меняться потенциал шара, если точечный заряд q перемещать из бесконечности через это отверстие внутрь шара?

O2-2.26

Точечный заряд q находится на расстоянии d от центра незаряженного проводящего шара радиусом r. Какой заряд протечет по проводнику, если заземлить шар?

14.1.8 Problems about Basic, Easy Electrostatics 3

O2-2.27

В поле точечного заряда q внесли проводящую сферу радиусом r (рис. 13). Во сколько раз изменилась при этом напряженность поля в точках A и B, если расстояние между центром сферы и зарядом $R = 10r$? Рассмотреть два случая: 1) сфера заземлена; 2) сфера не заземлена.

O2-2.29

Два одинаковых по абсолютной величине точечных заряда q и $-q$ расположены на расстоянии $2a$ друг от друга. Посередине между ними расположена незаряженная проводящая сфера радиусом R. Полагая $a \gg R$, определить, какой системе зарядов-изображений 14 эквивалентна сфера. Найти изменение силы, действующей на каждый заряд, обусловленное взаимодействием со сферой.

O2-2.30

Точечный заряд q помещен на расстоянии $R/2$ от центра полой тонкостенной металлической изолированной сферы радиусом R. Заряд сферы равен Q. Определить силу, действующую на заряд q, а также поверхностную плотность зарядов на внутренней и внешней поверхностях сферы в точках, ближайших к этому заряду.

O2-2.31

Точечный заряд q помещен на расстоянии $R/2$ от центра полой тонкостенной металлической сферы радиусом R, на которой размещен заряд $-2q$. Определить поверхностную плотность зарядов на внутренней и внешней поверхностях сферы в точках, наиболее удаленных от этого заряда. Как изменится результат, если сферу заземлить?

O2-2.32

На расстоянии $a = 10R$ от незаряженной проводящей сферы радиусом R расположен точечный электрический диполь с моментом p, причем ось диполя перпендикулярна прямой, соединяющей центр сферы с серединой оси диполя (рис. 14). Найти силу взаимодействия F между диполем и сферой.

O2-2.35

Внутри проводящей полой сферы радиусом R на расстоянии $a = R/2$ от центра помещен точечный диполь с дипольным моментом p, ориентированным по радиусу (рис. 17). Найти величину и направление силы, действующей на диполь.

O2-2.36

Как меняется с расстоянием d сила взаимодействия F между двумя маленькими металлическими шариками, из которых один заряжен, а другой не заряжен?

O2-2.37

Небольшой незаряженный металлический шарик может свободно перемещаться вдоль оси тонкого однородно заряженного кольца радиусом R. Найти равновесные положения шарика и рассмотреть их устойчивость по отношению к осевым смещениям.

O2-2.38

Заземленный металлический шар радиусом R лежит на тонком равномерно заряженном диэлектрическом диске того же радиуса. Найти заряд шара, если заряд диска равен Q.

O2-2.39

Заземленная проводящая плоскость имеет выпуклость в форме полусферы с радиусом R. Центр сферы лежит на плоскости (рис. 18). На оси симметрии системы на расстоянии $2R$ от плоскости находится точечный заряд q. Найти силу, действующую на заряд.

O2-2.42* Шар вблизи заряда (???????????)

Заземленный шар радиусом R находится вблизи точечного заряда q. Расстояние между центром шара и зарядом равно d. Определить максимальную и минимальную поверхностные плотности наведенного на шаре заряда.

Solution

(хз, я пока все забыл. мб в задачнике есть ответ?)

14.1.9 Problems about Basic, Easy Electrostatics 4

O2-2.43

Потенциал металлического шара радиусом R медленно повышается. На тонкой непроводящей нити длиной L к шару подвешен нейтральный металлический шарик радиусом r и массой m. При каком потенциале φ шарик будет притянут шаром R? Считать, что $R \gg r$ и $L \gg r$. Вычислить φ, если $R = L = 10$ см, $m = 10^{-3}$ г, $r = 1$ см.

O2-2.44

Металлический шар радиусом R несет заряд Q. На расстоянии L от его поверхности расположен незаряженный металлический шарик массой m и радиусом r. Шарику сообщают начальную скорость v_0 в направлении от центра шара. Найти минимальное значение скорости, при которой шарик может удалиться на бесконечность. Считать $R \gg r, L \gg r$. Вычислить v_0, если $Q = 10^{-6}$Кл, $L = R = 100$м, $r = 1$ см, $m = 10^{-3}$ г.

O2-2.45 Проволочка возле цилиндра

Длинная тонкая проволочка расположена параллельно оси длинного металлического цилиндра радиусом r на расстоянии $R > r$ от его оси. Вдали от краев на единицу длины приходится заряд $\varkappa$ на проволочке и $-\varkappa$ на цилиндре. Найти силу взаимодействия между проводниками, приходящуюся на единицу длины.

O2-2.46

Три одинаковых изолированных металлических шарика расположены в вершинах равностороннего треугольника. Проволочкой, подключенной к удаленному заряженному проводнику, потенциал которого неизвестен, но поддерживается постоянным, по очереди касаются каждого из шаров. Заряды на первых двух шарах оказались после этого равными q_1 и q_2. Найти заряд q_3 на третьем шаре.

O2-2.24

На бесконечной плоской поверхности проводника AB имеется сферический бугор CMD, центр O которого лежит в той же плоскости (рис. 12).

На оси симметрии системы вне проводника расположен точечный заряд q. Найти электрическое поле во всем пространстве.

O2-2.25

Полый шар радиусом R имеет заряд Q; в шаре имеется малое отверстие. Как будет меняться потенциал шара, если точечный заряд q перемещать из бесконечности через это отверстие внутрь шара?

O2-2.26

Точечный заряд q находится на расстоянии d от центра незаряженного проводящего шара радиусом r. Какой заряд протечет по проводнику, если заземлить шар?

O2-2.27

В поле точечного заряда q внесли проводящую сферу радиусом r (рис. 13). Во сколько раз изменилась при этом напряженность поля в точках A и B, если расстояние между центром сферы и зарядом $R = 10r$? Рассмотреть два случая: 1) сфера заземлена; 2) сфера не заземлена.

O2-2.48

Найти, какую максимальную разность потенциалов можно поддерживать между проводами бесконечной двухпроводной линии, если напряженность пробоя воздуха $E_{\max} = 30\text{кВ/см}$, диаметр проводов $d = 1$ см, а расстояние между проводами $b = 5$ м.

O2-2.49

Между заземленными пластинами (посередине) плоского конденсатора помещен заряд q (рис. 20). Определить плотность зарядов, наведенных в точках A и A', Краевыми эффектами пренебречь.

O2-2.50

На высоте H над поверхностью бесконечной металлической пластины находится точечный заряд. Одна из силовых линий этого заряда оканчивается на поверхности пластины на расстоянии $H\sqrt{3}$ от точки, над которой находится заряд. Определить, под каким углом к горизонту эта силовая линия выходит из заряда.

2. SOLUTIONS Потенциал. Метод электрических изображений

2.17

$\sigma = -\frac{Q}{2\pi H(l+H)} = -8 \cdot 10^{-10}\text{К/см}^2$.

2.18

$\sigma = -\frac{Q}{4\pi R^2}\left(1 - \frac{H}{\sqrt{H^2+R^2}}\right) \approx -2,6 \cdot 10^{-11}$ К//см^2.

2.19

$R = \frac{dn}{n^2-1}$; $\quad H = \frac{d}{n^2-1}$.

Указание. Взять за начало координат точку, в которой находится меньший заряд, направить ось X в сторону большего заряда и записать потенциал в точке (x, y) плоскости, проходящей через линию соединения зарядов, а затем приравнять его нулю.

2.20

1) $F = \frac{dr}{(d^2-r^2)^2} q^2$; 2) $F = \left[\frac{dr}{(d^2-r^2)^2} - \frac{r}{d^3}\right] q^2$.

2.21

1) $A = \frac{rq^2}{2(d^2-r^2)}$; 2) $A = \frac{r^3 q^2}{2d^2(d^2-r^2)}$.

2.22

1) $\sigma = \frac{q}{4\pi R^2}$; 2) $\varphi = \frac{q}{R}$;

3) $$\sigma_B = \frac{q}{4\pi(r-d)^2}\left(1+\frac{d}{r}\right), \quad \sigma_C = \frac{q}{4\pi(r+d)^2}\left(1-\frac{d}{r}\right).$$

2.23

* $\varphi = \frac{q}{d} + \frac{Q}{r}$.
Решение. Потенциал точки O равен

$$\varphi = \frac{q}{d} + \sum \frac{\Delta Q_i}{R_i} = \frac{q}{d} + \frac{Q}{R}.$$

Потенциал шара будет иметь то же значение.

2.24

: Решение. Введем электрические изображения в сфере и плоскости, как указано на рис. 388. Сгруппируем заряды попарно 1) qс $-q$, 2) q' с $-q'$. Каждая пара в плоскости $ACDB$ создает нулевой потенциал. Сгруппируем теперь те же заряды по-другому: 1) q с q'; 2) $-q$с $-q'$. При такой группировке каждая пара будет создавать нулевой потенциал на сфере CMDN. Ясно

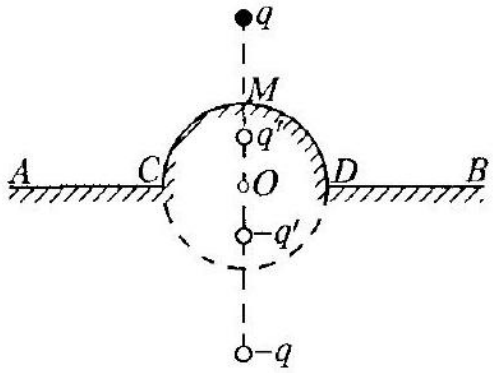


Рис. 388

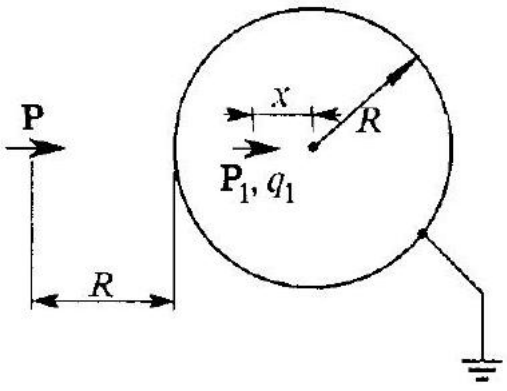


Рис. 389

поэтому, что потенциал четырех зарядов $q, -q, q', -q'$ обращается в ноль на поверхности $ACMDB$. Следовательно, поле этих зарядов в верхнем полупространстве будет тождественно с полем, которое требуется рассчитать.

2.25

$\varphi = \begin{cases} \frac{Q}{R} + \frac{q}{d}, & \text{если } d > R, \\ \frac{Q}{R} + \frac{q}{R}, & \text{если } d \leqslant R, \end{cases}$ (см. решение задачи 2.23).

2.26

$q^* = -q\frac{r}{d}$.

2.27

1) Для заземленной сферы:

точка A (рис. 13): $\frac{E_1}{E_0} = 1 + \frac{R}{r} = 11$; точка B : $\frac{E_1}{E_0} = 1 - \frac{R}{r} = 9$.

2) Для незаземленной сферы:

точка A : $\frac{E_1}{E_0} = 3 - \frac{r}{R} = 2,9$; точка B : $\frac{E_1}{E_0} = 3 + \frac{r}{R} = 3,1$.

2.28

Заряд-изображение состоит из диполя $\mathbf{p}_1 = \frac{\mathbf{p}}{8}$ и заряда $q_1 = -\frac{p}{4R}$, расположенных на расстоянии $x = \frac{R}{2}$ от центра сферы (рис. 389).

$$F = \frac{8}{27}\frac{p^2}{R^4}.$$

2.29

При $a \gg R$ в центре сферы диполь-изображение с моментом $p = \frac{2R^3q}{a^2}$; $\frac{\Delta F}{F} = 16\left(\frac{R}{a}\right)^3$, где $\Delta F = \frac{q^2}{4a^2}16\left(\frac{R}{a}\right)^3$ - добавочная сила притяжения, возникающая из-за наличия сферы.

Без сферы $F = \frac{q^2}{4a^2}$.

2.30

$F = \frac{8q^2}{9R^2}$; $\sigma_{\text{внутр}} = -\frac{3q}{2\pi R^2}$; $\sigma_{\text{внеш}} = \frac{q+Q}{4\pi R^2}$.

2.31

$\sigma_{\text{внутр}} = \frac{q}{18\pi R^2}$; $\sigma_{\text{внеш}} = -\frac{q}{4\pi R^2}$.

После заземления $\sigma'_{\text{внутр}} = \sigma_{\text{внутр}}$; $\sigma'_{\text{внеш}} = 0$.

2.32

: $F \approx -\frac{3p^2R^3}{a^7}$ (сила притяжения).

Решение. Приведем два решения: оценочное и точное.

а) Оценочное решение. Из условия видно, что $a \gg R$. Таким образом, можно считать, что сфера

находится (приближенно, конечно) в однородном поле E. Дипольный момент сферы $p' = R^3 E = \left(-\frac{p}{a^3}\right) R^3$. Теперь, когда получена оценка дипольного момента сферы, считаем, что этот дипольный момент $\mathbf{p}'$ находится в неоднородном поле диполя p. Поле диполя в перпендикулярном к его оси направлении $E = -\frac{p}{r^3}$. Сила взаимодействия $F = p' \left(\frac{\partial E}{\partial r}\right)\Big|_{r=a} = -\frac{3p^2R^3}{a^7}$. Это сила притяжения.

б) Точное решение. Известно, что для расчета взаимодействия точечного заряда с незаряженной сферой пользуются методом изображений (см. задачу 2.20 или Д. В. Сивухин, т. 3, 23). Заряд-изображение q^* помещается на отрезке прямой, соединяющей

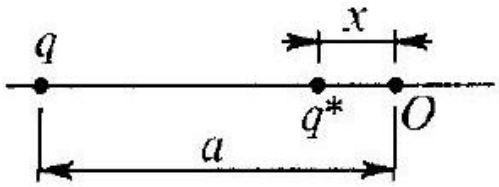


Рис. 390 заряд q и центр O сферы (рис. 390). Смещение заряда q^* относительно центра сферы $x = \frac{R^2}{a}$. Сам же заряд $q^* = -\frac{R}{a}q = -\frac{x}{R}q$. Таким образом:

$$q \xrightarrow{\text{отобразится}} -\frac{x}{R}q.$$

Малое смещение da заряда q приведет к малому смещению dx заряда-изображения

$$|dx| = \frac{R^2}{a^2}|da| = \frac{x}{a}|da| = \frac{x^2}{R^2}|da|.$$

Применительно к плечу диполя обозначим $da = l, dx = l'$. Таким образом,

$$l \xrightarrow{\text{отобразится}} \frac{x^2}{R^2}l.$$

Нетрудно понять, что и в нашем случае, когда диполь перпендикулярен оси, также справедливо полученное отображенис. Поскольку $\mathbf{p} = q1$, то

$$\mathrm{p} \xrightarrow{\text{отобразится}} \mathbf{p}' = -\left(\frac{x}{R}\right)^3 \mathbf{p}.$$

Используя известное соотношение для силы взаимодействия двух параллельных диполей (задача 1.30), получим

$$F = \frac{3pp'}{\left(a - R^2/a\right)^4} = -\frac{3p^2aR^3}{\left(a^2 - R^2\right)^4} \approx -\frac{3p^2R^3}{a^7}.$$

Заметим, что приближенный результат получен при допущении $a \gg R$, и он совпадает с оценочным решением.

2.33

$E(A) = \frac{3p}{R^3}$; $\quad E(B) = 0$.

2.34

$F = \frac{128}{27}\frac{p^2}{R^4}$ - сила притяжения.

2.35

$F = \frac{64}{9}\frac{p^2}{R^4}$ - сила отталкивания.

Указание. Следует учесть не только диполь-изображение, но и компенсационный заряд в точке размещения диполя-изображения.

2.36

$F \propto \frac{1}{d^5}$.

2.37

На оси кольца на расстояниях $x = \pm\frac{R}{\sqrt{2}}$ равновесие устойчиво. В центре кольца - неустойчиво.

2.38

$q = -2(\sqrt{2}-1)Q$.

2.39

$F = 0,2\frac{q^2}{R^2}$.

2.40

$F = \frac{Q^2}{R^2}\left[1 - \frac{r}{R} + \frac{r/R}{(1-r^2/R^2)^2}\right]$.

2.41

* $Q = q\alpha\frac{1-\left(1-\alpha^2\right)^2}{(1-\alpha^2)^2}$, где $\alpha = \frac{R}{d}$.

Решение. Поляризованный шар в условиях задачи (рис. 391) может быть заменен парой зарядов: $q' = -qR/d$ на расстоянии $b = R^2/d$ от цент-

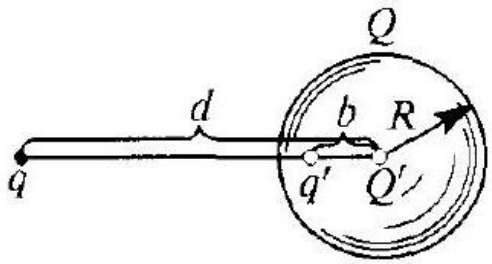


Рис. 391

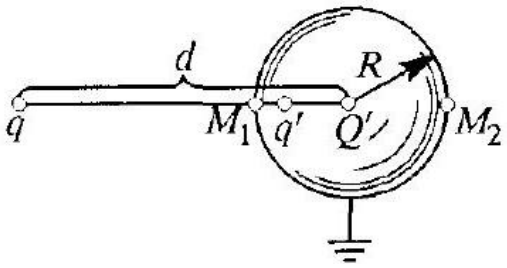


Рис. 392

ра и $Q' = Q - q'$ в центре (Q - полный заряд шара). Сила взаимодействия

$$F = \frac{qq'}{(d-b)^2} + \frac{qQ'}{d^2} = -q^2\frac{dR}{\left(d^2-R^2\right)^2} + q^2\frac{R}{d^3} + qQ\frac{1}{d^2}.$$

Из условия $F = 0$ имеем

$$Q = q\frac{R}{d}\frac{d^4 - \left(d^2 - R^2\right)^2}{\left(d^2 - R^2\right)d} = q\alpha\frac{1 - \left(1 - \alpha^2\right)^2}{\left(1 - \alpha^2\right)^2},$$

где $\alpha = R/d$.

2.42

* $\sigma_1 = -\frac{q}{4\pi(d+R)^2}\left(\frac{d}{R} - 1\right), \sigma_2 = -\frac{q}{4\pi(d-R)^2}\left(\frac{d}{R} + 1\right)$.

Решение. Поле снаружи шара совпадает с полем пары зарядов q и q' (рис. 392). С другой стороны, поверхностная плотность заряда на шаре

связана с полем вблизи его поверхности: $\sigma = \frac{1}{4\pi}E$. В окрестности точки M_2 имеем

$$E_2 = \frac{q}{(d+R)^2} + \frac{q'}{(b+R)^2}, \quad \text{где} \quad q' = -q\frac{R}{d}, \quad b = \frac{R^2}{d}$$

отсюда

$$E_2 = -\frac{q}{(d+R)^2}\left(\frac{d}{R} - 1\right)$$

Аналогично, в окрестности точки M_1

$$E_1 = -\frac{q}{(d-R)^2}\left(\frac{d}{R} + 1\right)$$

2.43

$\varphi = \left(1 + \frac{L}{R}\right)^{5/2}\left(\frac{R}{r}\right)^{3/2}\left(\frac{mg}{2}\right)^{1/2} = 130$ ед. СГСЭ.

2.44

$v_0 = \frac{Qr}{(L+R)^2}\sqrt{\frac{r}{m}} = 240$ см/с.

2.45

$F = \frac{2x^2}{R(1-r^2/R^2)}$.

2.46

* $q_3 = \frac{q_2^2}{q_1}$.

Решение. Потенциалы проводников являются линейными однородными функциями их зарядов: $\varphi_i = \sum_k A_{ik}q_k$. В силу симметрии все коэффициенты A_{ik} с одинаковыми индексами равны между собой. Точно также равны все коэффициенты с разными индексами. Обозначая эти коэффициенты через A и B соответственно, можем записать $\varphi_1 = Aq_1 + B(q_2 + q_3)$ и аналогично для остальных проводников. При зарядке первого шара он получает потенциал $\varphi_1 = Aq_1$. При зарядке остальных двух шаров потенциал первого шара меняется, но его значения для решения не нужны. При зарядке второго шара его потенциал становится равным также $\varphi_1 = Aq_2 + Bq_1$. Аналогично, для третьего шара $\varphi_1 = Aq_3 + B(q_1 + q_2)$. Таким образом, $Aq_1 = Aq_2 + Bq_1 = Aq_3 + B(q_1 + q_2)$. Отсюда получаем ответ.

2.47

* $E_x = \frac{Vy}{hd}$; $E_y = \frac{Vx}{hd}$.

Решение. Введем прямоугольную систему координат, как указано на рис. 19 (ось Z перпендикулярна к плоскости рисунка и параллельна длинным сторонам пластин). Искомое поле потенциально и удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0$$

На проводнике BD (т. е. при $y = 0$) потенциал должен обращаться в постоянную, которую мы примем равной нулю. Искомое решение есть $\varphi = \alpha xy + \beta y$, где α и β - постоянные. В силу симметрии потенциал φ не должен меняться

при замене y на $-y$, а потому $\beta = 0$. Для напряженности поля получаем

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\alpha y, \quad E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\alpha x.$$

Постоянная α найдется по разности потенциалов между точками B и A (или между точками D и C). Потенциалы точек A и D равны соответственно $\varphi_A = +V/2, \varphi_D = -V/2$. Напряженность поля E_y на поверхности пластины AB (т. е. при $x = -d/2$) равна $E_y = -V/(2h) = \alpha d/2$, откуда $\alpha = -V/(hd)$. Окончательно

$$E_x = \frac{Vy}{hd}, \quad E_y = \frac{Vx}{hd}.$$

У равнение силовой линии $\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y}$ имеет вид

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{x},$$

откуда $y^2 - x^2 = C$, т. е. силовыми линиями являются равносторонние гиперболы. При $C > 0$ оси гипербол совпадают с осью Y, при $C < 0$ - с осью X. Для выяснения смысла постоянной C обозначим через a расстояние от вер-

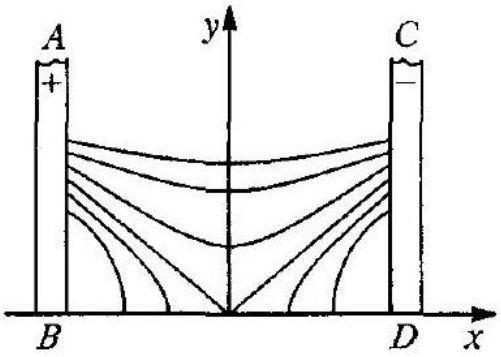


Рис. 393 шины гиперболы до начала координат. При $C > 0$ координатами вершины гиперболы будут $(0; a)$. Они должны удовлетворять уравнению $a^2 - 0^2 = C$, откуда $C = a^2$. Аналогично, для второго случая ($C < 0$) $C = -a^2$. Таким образом, получаются два семейства гипербол: $y^2 - x^2 = a^2$ и $x^2 - y^2 = a^2$, асимптотами которых являются биссектрисы соответствующих координатных углов (рис. 393). Гиперболические силовые линии первого семейства легко воспроизводятся экспериментально обычным демонстрационным методом. Силовые линии второго семейства экспериментально получить трудно из-за малости составляющей поля E_x.

2.48

$\Delta\varphi_{\max} = E_{\max} d\left(1 - \frac{d}{2b}\right)\ln\left(\frac{2b}{d} - 1\right) \approx E_{\max} d \ln\left(\frac{2b}{d}\right) \approx 207$ кВ, где $E_{\max}$ - поле пробоя воздуха.

2.49

$\sigma_A = \sigma_{A'} = -\frac{1}{4\pi}E_A$, где E_A - электрическое поле в точке A.

$$E_A = \frac{2q}{a^2}\left(1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \ldots\right) \approx 1,82\frac{q}{a^2}.$$

С точностью 1% отбрасываем все члены, начиная с $\frac{1}{13^2}$; $\sigma_A = -0,145\frac{q}{a^2}$.

2.50

* $\alpha = 0$. Решение. На рис. 394 изображено электрическое поле точечного заряда, размещенного над металлической плоскостью на высоте H. Для ответа на вопрос задачи предлагается вычислить поток через замкнутую поверхность, ограниченную поверхностями: I - часть сферической поверхности, окружающей точечный заряд $+q$ в малой окрестности этого заряда (рис. 275);

II - силовыми линиями, заканчивающимися на плоскости на расстоянии $x = H\sqrt{3}$; III - плоскостью, проведенной вблизи металлического листа. Таким образом, внутри поверхности I-II-III нет электрических зарядов, а значит поток вектора E через эту замкнутую поверхность $\Phi_E = \oint(\mathbf{E}d\mathbf{S}) = 0$. Рассмотрим составляющие этого потока по поверхностям I, II, III. Сразу очевидно, что поток $\int_{\text{II}}(\mathbf{E}d\mathbf{S}) = 0$. Поток вектора $\mathbf{E}$ через поверхность I $\int_1(\mathbf{E}d\mathbf{S}) = -q\Omega$, где Ω - телесный угол, охватывающий часть сферы I. Для того, что-

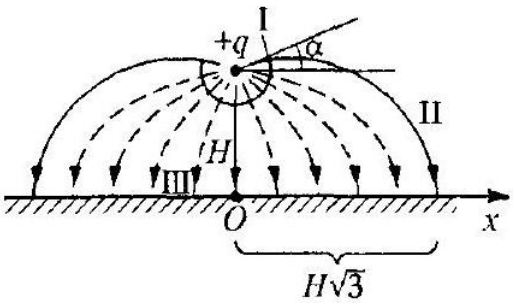


Рис. 394 бы вычислить поток вектора $\mathbf{E}$ через поверхность III, следует предварительно вычислить поле $E(x)$ вблизи металлического листа. Используя зеркальное изображение заряда $+q$, легко найти

$$E(x) = \frac{2qH}{(x^2 + H^2)^{3/2}}.$$

Таким образом,

$$\int_{\text{III}}(\mathbf{E}d\mathbf{S}) = 2qH\int_0^{H\sqrt{3}}\frac{2\pi x dx}{(x^2 + H^2)^{3/2}} = 2\pi q.$$

Итак $\Phi_E = \oint(\mathbf{E}d\mathbf{S}) = -q\Omega + 2\pi q = 0$, откуда $\Omega = 2\pi$, а значит искомый угол $\alpha = 0$.

2.51

$D = 2H$.

14.1.10 Problems about Electric Field in the Media 1

(sloutions are below)

O2-3.1

На сколько отличается от единицы диэлектрическая постоянная ε «идеального газа», состоящего из большого количества проводящих шариков радиусом r. Плотность (концентрация) шариков n мала, так что $r^3 n \ll 1$.

3.1

$\varepsilon = 1 + 4\pi r^3 n$.

O2-3.2

Для газообразного аргона при нормальных условиях $\varepsilon - 1 = 6 \cdot 10^{-4}$. Пользуясь этим, вычислить смещение «центра масс» электронной оболочки атома аргона относительно ядра в статическом электрическом поле с напряженностью $E = 300$ В/cm. Атомный номер аргона $z = 18$. (В отсутствие внешнего поля электроны распределены вокруг ядра сферически симметрично.)

3.2

$x = \frac{\varepsilon-1}{4\pi n_0 ze} E = 2 \cdot 10^{-16}$ см, где, n_0 - число Лошмидта.

O2-3.3

Плотность электронного облака в атоме водорода описывается функцией $\rho(r) = -\frac{e}{\pi a^3} \exp\left(-\frac{2r}{a}\right)$, где $a = 0,53 \cdot 10^{-8}$ см – ра - диус первой боровской орбиты. Вычислить коэффициент поляризуемости β атома в слабом внешнем электрическом поле, пренебрегая деформацией электронного облака.

3.3

$\beta = \frac{3}{4} a^3 = 0,11 \cdot 10^{-24}$ см^3.

Указание. Учитывая, что $r \ll a$ и используя распределение электрона в атоме, по теореме Гаусса вычислить $E(r) = -\frac{4}{3}\frac{er}{a^3}$. Далее следует определить смещение r_0 электронного облака при наложении внешнего поля E_0. Записав дипольный момент атома $p = er_0$, найти коэффициент β при поле E_0.

O2-3.4

Оценить коэффициент поляризуемости β атома водорода в слабом внешнем поле, предполагая, что электронное облако сосредоточено внутри сферы радиусом a, где $a = 0,53 \cdot 10^{-8}$ см (радиус первой боровской орбиты) и имеет постоянную плотность. Деформацией электронного облака пренебречь.

3.4

$\beta = a^3 = 0,15 \cdot 10^{-24}$ см^3.

O2-3.5

Диэлектрик с жесткими диполями (дипольный момент молекулы $\mathbf{d}_0$, момент инерции J) помещен в постоянное электрическое поле $\mathbf{E}_0$, превосходящее по величине поле насыщения. Перпендикулярно k $\mathbf{E}_0$ действует переменное поле $\mathbf{E}$, причем $E = E_\text{a} \sin \omega t, E \ll E_0$. Определить резонансную частоту. Тепловым движением пренебречь.

3.5

$\omega_0 = \sqrt{\frac{d_0 E_0}{J}}$. В отсутствие переменного поля, пренебрегая тепловым движением, можно полагать все диполи выстроенными по полю $\mathbf{E}_0$.

6-8

3.6

$\frac{\Delta n}{n_0} = \frac{\beta E^2}{2kT} = 1,2 \cdot 10^{-7}$.

3.7

$\mathbf{E}_A = 2\pi \mathbf{P}_0; \quad \frac{E_A}{E_B} = \left(\frac{l}{r}\right)^2$.

3.8

$E_C = E_A \frac{2/h}{D} = 12$ В/см.

O2-3.9

Имеется бесконечная полоса диэлектрика толщиной l и шириной L (рис. 22). Материал пластины поляризован. Вектор поляризации P постоянен и перпендикулярен меньшей грани. Считая $l \ll L$, найти поле $\mathbf{E}$ и индукцию $\mathbf{D}$ на средней линии OO'.

3.9

$\mathbf{E} = -8\frac{l}{L}\mathbf{P}; \quad \mathbf{D} = 4\left(\pi - 2\frac{l}{L}\right)\mathbf{P}.$

O2-3.10

Диэлектрический образец с замороженной поляризацией P имеет форму полого цилиндра с разрезом. На рис. 23 показано сечение этого цилиндра и направление вектора поляризации. Толщина стенки цилиндра $h \ll R$(R - радиус цилиндра), ширина разреза $l \ll R$. Найти электрическое поле $\mathbf{E}$ и индукцию $\mathbf{D}$ в точке A.

3.10

$\mathbf{E}_A = -\frac{hl}{2R^2}\mathbf{P}; \quad \mathbf{D}_A = \left(4\pi - \frac{hl}{2R^2}\right)\mathbf{P}.$

O2-3.11

Поляризованный диэлектрик имеет форму бесконечного желоба («полуцилиндр»), поперечный разрез которого показан на рис. 24. Вектор поляризации $\mathbf{P}$ постоянен по величине, лежит в плоскости, перпендикулярной оси цилиндра, и всюду перпендикулярен радиусу. Считая желоб тонким ($a/R \ll 1$), найти электрическое поле $\mathbf{E}$ и индукцию D в точке A.

3.11

$\mathbf{E}_A = -\frac{2a}{R}\mathbf{P}; \quad \mathbf{D}_A = 2\left(2\pi - \frac{a}{R}\right)\mathbf{P}.$

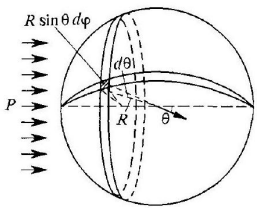


Рис. 395

O2-3.12

В тонком круглом диске радиусом R из диэлектрика создана однородная «замороженная» поляризация, так что вектор поляризации P параллелен поверхности диска (рис. 25). Определить напряженность электрического поля в центре O круглого отверстия радиусом r, вырезанного в таком диске. Толщина диска $h \ll r$.

3.12

$\mathrm{E}_O = \frac{\pi h}{R}\left(\frac{R}{r} - 1\right)\mathbf{P}.$

14.1.11 Problems about Electric Field in the Media 2

13-14

3.13

Поле в пластине $E_1 = 4\pi P_0 \left(\frac{x^2}{d^2} - 1\right)$; вне пластины $E_2 = 0.V = \frac{16\pi}{3} P_0 d$.

O2-3.15

В диэлектрической среде с диэлектрической проницаемостью ε имеется однородное поле напряженностью **E**. Внутри среды находится сферическая полость. Найти в центре сферы напряженность **E** поля, созданного поляризационными зарядами, индуцированными на поверхности сферы, считая, что вектор поляризации **P** всюду (за исключением полости) имеет постоянное значение.

У к а з а н и е. Поверхностная плотность поляризационных зарядов σ на границе диэлектрика равна величине поляризации P, умноженной на $\cos\theta$, где θ - угол между нормалью **n** к поверхности и вектором P (рис. 28). Найти напряженность поля в центре сферы, создаваемую поляриность поля в центре сферы, создаваемую поляриры, и проинтегрировать ее затем по всей сфере.

O2-3.16 Вывод формулы Лоренц-Лорентца (???)

Используя результат задачи 3.15, получить формулу Лоренц-Лорентца для плотного диэлектрика $\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+2} = \frac{4\pi}{3} n\beta$, где β поляризуемость изолированной молекулы во внешнем поле, а n - концентрация молекул.

O2-3.17 Два пузырька, параллельные плоскости конденсатора с диэлектриком (??)

Пространство между обкладками плоского конденсатора заполнено диэлектриком с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 4$. Разность потенциалов между обкладками $V = 300$ В, расстояние между ними $d = 1$ см. В диэлектрике имеются два воздушных пузырька радиусом $r = 1$ мм, расстояние между ними $l =$ 1 см, и они расположены в плоскости, параллельной обкладкам. Оценить величину и направление силы электростатического взаимодействия между пузырьками, полагая, что наличие пузырьков не изменяет однородной поляризации диэлектрика и равномерного распределения заряда на обкладках.

Solution

(заново нужно думать!)

Дипольные моменты пузырьков $\mathbf{p}_\text{п}$ противоположны дипольным моментам, которые получились бы при заполнении их данным диэлектриком. Поэтому (3.21) и (3.8) дают

$$\mathbf{p}_\pi = \frac{4}{3}\pi R^3 \mathbf{P} = \frac{(\varepsilon-1)R^3 E}{3}.$$

Для диполей из (1.8) и (1.11) находим силу отталкивания

$$F = \frac{3p_n^2}{l^4} = \frac{(\varepsilon-1)^2 U^2 r^6}{3h^2 l^4}.$$

(?????)

3.17

$F \approx \frac{3p^2}{l^4} = \frac{(\varepsilon-1)^2}{3}\frac{V^2}{d^2}\frac{r^6}{l^4} \approx 3\cdot 10^{-6}$ дин (отталкивание).

O2-3.18 Два пузырька, перпендикулярные плоскости конденсаторе с диэлектриком (??)

Пространство между обкладками плоского конденсатора заполнено диэлектриком с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 4$. Разность потенциалов между обкладками $V = 1200$ В, расстояние между ними $d = 4$ см. В диэлектрике имеются два воздушных пузырька радиусом $r = 1$ мм, расстояние между ними $l = 1$ cm, и они расположены вдоль прямой, перпендикулярной обкладкам. Оценить величину и направление силы электростатического взаимодействия между пузырьками, полагая, что наличие пузырыков не изменяет однородной поляризации диэлектрика и равномерного распределения заряда на обкладках.

Solution

(заново нужно думать!)
Сила притяжения:

$$F = -\frac{6p_{\text{П}}^2}{l^4} = \frac{2(\varepsilon-1)^2U^2r^6}{3h^2l^4}$$

3.18

$F \approx \frac{2}{3}(\varepsilon-1)^2\frac{V^2}{d^2}\frac{r^6}{l^4} \approx 6\cdot10^{-6}$ дин (притяжение).

19

3.19

$E_1 = D_1 = 4\pi P\frac{h}{d}$ - в зазоре;

$$E_2 = -4\pi P\left(1-\frac{h}{d}\right) - \text{ в пластине;} \quad D_2 = D_1$$

O2-3.20

В пространство, первоначально занятое однородным электрическим полем $\mathbf{E}_0$, вносят длинный диэлектрический цилиндр так, что его ось перпендикулярна начальному полю $\mathbf{E}_0$. При каких условиях диэлектрик поляризуется однородно? Найти напряженность поля $\mathbf{E}$ внутри цилиндра и вектор поляризации $\mathbf{P}$ диэлектрика. Проницаемость диэлектрика .

3.20

$\mathbf{E} = \frac{2\mathbf{E}_0}{\varepsilon+1}; \mathbf{P} = \frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}\frac{\mathbf{E}_0}{2\pi}$.

O2-3.21

Заряженный шарик помещен в газ, молекулы которого представляют собой упругие диполи с молекулярной поляризуемостью β_0. Средняя концентрация частиц газа n_0, температура T, заряд шарика Q. Найти поле $E(r)$ вне шарика. Считать, что возмущение концентрации полем $\delta n \ll n_0$.

3.21

$E \approx \frac{D}{1+4\pi n_0\beta_0}\left[1-\frac{D^2}{(1+4\pi n_0\beta_0)^3}\frac{4\pi n_0\beta_0^2}{kT}\right]$.

Угловая скорость в поле диполя

Свободная частица с зарядом q массой m совершает равномерное круговое движение в поле неподвижного точечного электрического диполя с дипольным моментом P. Расстояние от диполя до частицы при этом равно r. Найдите угловую скорость вращения частицы ω.

Solution

равномерное круговое движение может быть только вокруг оси симметрии.
такая окружность получается.
и силы направлены к центру симметрии, получаем круговое движение.
Вспоминая, что поле от диполя имеет две составляющие, вдоль r и вдоль p, пониманием, что проекции их двух на вертикальную ось должны быть противоположны, чтобы поля вдоль вертикальной оси не было. Получаем условие вида:

$$\frac{3p}{r^3}\cos^2\alpha - \frac{p}{r^3} = 0$$

получем косинус $\cos\alpha = \frac{1}{3}$, так что можно найти величину радиуса окружности.
дальше второй закон Ньютона дает

$$m\omega^2 R = \frac{3ep}{r^3}\cos\alpha\sin\alpha$$

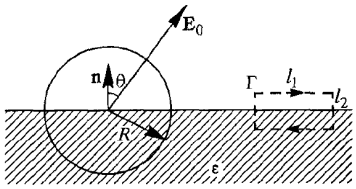
в итоге ответ получаем.
(?? кст, а что там с устойчивостью колебаний таких? хз и я тупой, чтобы на это ответить)

O2-3.22

В центре диэлектрического шара радиусом R с проницаемостью ε_1 помещен точечный заряд q. Шар окружен безграничным диэлектриком с проницаемостью ε_2. Определить поверхностную плотность поляризационных зарядов на границе раздела диэлектриков.

O2-3.23! Поток и циркуляция вблизи диэлектрика (!?!?!)

У плоской поверхности однородного изотропного диэлектрика с проницаемостью ε напряженность электрического поля в вакууме равна E_0, причем вектор $\mathbf{E}_0$ составляет угол θ с нормалью к поверхности диэлектрика (рис. 30).



Считая поле внутри и вне диэлектрика однородным, найти: 1) поток Φ_E вектора $\mathbf{E}$ через сферу радиусом R с центром на поверхности диэлектрика; 2) циркуляцию вектора $\mathbf{D}$ по прямоугольному контуру Γ со сторонами длиной l_1 и l_2, плоскость которого перпендикулярна к поверхности диэлектрика и параллельна вектору $\mathbf{E}_0$.

Solution

Из (3.18) касательная к поверхности диэлектрика компонента поля $E_0\sin\theta$ непрерывна на границе. Вследствие симметрии входящий в сферу поток ее равен выходящему потоку. Нормальная компонента поля $E_0\cos\theta$ дает поток через поверхность сферы такой же, как через ее диаметральное сечение. Из (3.7) следует сохранение нормальной компоненты вектора электрической индукции

$$D_n = E_{0n} = \varepsilon E_{\text{дп}} \ = E_0\cos\theta.$$

Отсюда для нормальной компоненты напряженности электрического поля в диэлектрике имеем

$$E_{\text{an}} \ = E_0\frac{\cos\theta}{\varepsilon}.$$

Поэтому поток вектора напряженности электрического поля

$$\Phi_E = \pi R^2 E_0\cos\theta\left(1-\frac{1}{\varepsilon}\right).$$

Касательная компонента вектора индукции в вакууме равна касательной компоненте напряженности поля $E_0\sin\theta$. В диэлектрике $D_\tau = \varepsilon E_0\sin\theta$. Поэтому циркуляция вектора электрической индукции (по контуру Γ из l_1 и l_2) равна

$$\oint_\Gamma Ddl = l_1 E_0\sin\theta(1-\varepsilon)$$

14.1.12 Problems about Electric Field in the Media 3

O2-3.24 Шар - диэлектрик - сфера

Металлический шар радиусом 5 см окружен шаровым слоем диэлектрика ($\varepsilon = 7$) толщиной 1 см и помещен концентрично в металлической сфере с внутренним радиусом 7 см. Чему равна емкость C такого конденсатора?

Solution

О2-3.25

В плоский конденсатор введена пластина из оптического стекла ($\varepsilon = 9$) так, что остался воздушный зазор $d_1 = 1$ мм. Расстояние между обкладками конденсатора $d = 1$ см. К конденсатору приложена разность потенциалов $V = 100$ В. Какой будет разность потенциалов U, если после отключения конденсатора от источника напряжения убрать стеклянную пластинку?

О2-3.26

Пространство между пластинами плоского конденсатора заполнено диэлектриком, диэлектрическая проницаемость которого линейно меняется от значения ε_1у одной пластины до значения $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$ у другой. Расстояние между пластинами d, площадь каждой из них равна S. Найти емкость C конденсатора.

О2-3.32

В пространстве между обкладками цилиндрического конденсатора, заряженного до величины $\pm q$ на единицу длины, помещен нелинейный пространственно неоднородный диэлектрик. Его поляризуемость $\alpha = \beta|\mathbf{E}|r$. Радиусы обкладок соответственно R_1, R_2. Найти «нелинейную емкость» конденсатора (на единицу длины), т. е. отношение заряда к разности потенциалов при заданном значении q.

Заполнение конденсатора диэлектрической проницаемостью

Пустой конденсатор сложной формы подсоединили к идеальной катушке. Резонансная частота колебательного контура оказалась равной $\mathrm{f}_0 = 3,6$ МГц.

Потом конденсатор заполнили однородной слабопроводящей диэлектрической средой. При последовательном подключения изменённого таким образом колебательного контура кисточнику переменного напряжения амплитудой 1 В оказалось, что максимальная амплитуда напряжения на конденсаторе равна 200 В, причём достигается она при частоте источника $\mathrm{f} = 1,8$МГ ц.

Считая, что потери энергии происходят только в диэлектрике, определите удельную проводимость σ и диэлектрическую проницаемость ε среды в конденсаторе.

если бы конденсатор был простой, то расчитать было бы всё было просто, ибо его геометрия простая.

решим задачу в случае произвольной формы.

запишем снова две формулы добротности.

$$Q = 2\pi \frac{W_3}{W_\mathrm{T}}$$

таким образом, можно поискать связь добротности и диэлектрической проницаемости.

после ввода диэлектрика, емкость увеличилась в ε раз, так что зная отношение частот $\omega = (LC)^{-1/2}$, можем найти величину $\varepsilon = 4$.

нужно найти запасенную энергию

(прописать нужно, как она ищется?)

типа как средняя по периоду (???)

$$W_3 = 2 \cdot \frac{1}{T} \int\limits_0^T dt \oint_V \frac{\varepsilon E^2}{8\pi} dV$$

потом за потерянную период находим энергию (???)

там получаются Джоулевы потери.

тут вылазит нужная нам проводимость.

???? тут какие-то методы избавления от интегралов просто, потому что как-то так получается и всё. вроде дело в том, что просто константы выносятся, а интегрируется одна и та же величина.

(про это подумаю потом)

то есть короче посчитали энергию, потом и через добротность перешли к напряжениям.

ну и там

$$Q = \frac{\varepsilon}{2T\sigma}$$

и период находим с помощью корня из двойки и T_0, а последний из частоты.

(мутновато, но потом разберусь)

и в итоге получаем проводимость.

(тут перерешать нужно, я устал просто, так что не до этой задачи)

О2-3.33

В пространстве между обкладками сферического конденсатора (радиусы R_1 и R_2) с зарядами $\pm q$, находится нелинейный пространственно неоднородный диэлектрик. Его поляризуемость $\alpha = \beta|\mathbf{E}|r^2$. Найти «нелинейную емкость» конденсатора, т. е. отношение заряда к разности потенциалов при заданном значении q.

О2-3.34 Сферический конденсатор с переменным диэлектриком (????)

Сферический конденсатор заполнен диэлектриком, проницаемость которого изменяется по закону $\varepsilon = \varepsilon_1 R_1^2/r^2$, где R_1 - радиус внутренней сферы, r - переменный радиус. Найти объемное распределение связанных зарядов в диэлектрике, если к обкладкам приложена разность потенциалов V_0. Радиус внешней сферы $R_2 = 1,25R_1$.

Solution

Из (3.7) и (3.8) имеем

$$D = \frac{q}{r^2} = E\varepsilon = E\varepsilon_1 \frac{R_1^2}{r^2}.$$

Откуда следует постоянство напряженности поля при изменении расстояния от центра сфер

$$E = \frac{q}{\varepsilon_1 R_1^2}$$

Из (3.8)

$$P = \frac{(\varepsilon - 1)E}{4\pi} = \frac{q\left(\varepsilon_1 R_1^2/r - 1\right)}{4\pi\varepsilon_1 R_1^2}.$$

Используя (3.4) и выражение для дивергенции в сферических координатах в случае сферической симметрии (1.22), получаем

$$\rho_{\text{связ}} = -\operatorname{div}\mathbf{P} = -\frac{1}{r^2}\frac{d\left[r^2 q\frac{\left(\varepsilon_1 R_1^2/r^2 - 1\right)}{4\pi\varepsilon_1 R_1^2}\right]}{dr} = \frac{2q}{4\pi\varepsilon_1 R_1^2 r}.$$

Если задан не заряд, а разность потенциалов (U), то

$$U = E\left(R_2 - R_1\right) = q\frac{R_2 - R_1}{\varepsilon_1 R_1^2}$$

МФТИ-маг-вступ-2023.3 Сферический конденсатор с диэлектриком

Найти ёмкость сферического конденсатора, радиусы обкладок которого равны R_1 и $R_2\,(R_1 < R_2)$. Пространство между обкладками заполнено диэлектриком с диэлектрической проницаемостью $\epsilon = a/r$, где a - постоянная, r - расстояние от центра конденсатора.

Solution

О2-3.35 Цилиндрический конденсатор с переменным диэлектриком

Длинный цилиндрический конденсатор заполнен диэлектриком, проницаемость которого изменяется по закону $\varepsilon = \varepsilon_1 R_1/r$, где R_1 - радиус внутреннего цилиндра, r - переменный радиус. Пренебрегая краевыми эффектами, найти объемное распределение связанных зарядов в диэлектрике, если к обкладкам приложена разность потенциалов V_0. Радиус внешнего цилиндра $R_2 = 1,25R_1$.

14.1.13 Problems about Electric Field in the Media 4

О2-3.36 Диэлектрический вращающийся диск

Диэлектрический диск радиусом $R = 10$ см и высотой $H = 10$ см с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 5$ равномерно вращается вокруг своей оси, делая $n = 100$ об/с. Определить объемную плотность заряда ρ внутри цилиндра, возникающую из-за вращения, а также полный заряд q на поверхности цилиндра. Масса электрона $m = 9,1 \cdot 10^{-28}$ г.

О2-3.41! Сила между заряженного диэлектрического шара и металлического незаряженного

Определить, как будет меняться с расстоянием сила взаимодействия между двумя шариками, один из которых заряжен и состоит из диэлектрика, а другой металлический и не заряжен. Расстояние между шариками велико по сравнению с их размерами.

Solution

(диполями мб рассмотреть их, так или иначе, Корявова буду смотреть!)

О2-3.42

Вычислить электростатическую энергию заряда на шаре радиусом R в вакууме, если заряд шара q равномерно распределен по его поверхности.

О2-3.43

Вычислить электростатическую энергию для шара, заряд которого равномерно распределен по его объему.

О2-3.44

Считая, что масса электрона определяется из соотношения $W = mc^2$, где W - электростатическая энергия заряда электрона, найти значение радиуса электрона при следующих предположениях: 1) заряд электрона распределен по всему его объему с постоянной плотностью; 2) весь заряд электрона распределен по его поверхности.

О2-3.45

Определить толщину H равномерно заряженного плоского слоя, если объемная плотность заряда $\rho = 0,5$ ед. СГСЭ, а при перемещении заряда $q = 1$ ед. СГСЭ от поверхности слоя наружу на расстояние $d = 5$ см совершается работа $A = 20$ эрг.

О2-3.46

В результате импульсного разряда конденсатора через разреженный водород происходит нагревание газа до температуры T. Предполагая, что вся энергия разряда пошла на нагревание газа, оценить величину T. Напряжение на конденсаторе $U = 30$кВ, емкость $C = 18$ мкФ. До разряда газ занимал объем $V_0 = 10$ л при давлении $P_0 = 10^{-2}$ мм рт. ст. и температуре $T_0 = 300$ К.

О2-3.47

В центры двух удаленных друг от друга металлических сфер с внешними радиусами $R_1 = R, R_2 = 3R$ и толщиной стенки $\Delta = R/3$ помещены заряды $q_1 = q, q_2 = 2q$. Найти работу, необходимую для того, чтобы поменять эти заряды местами.

О2-3.53

Незаряженный проводящий шар радиусом $R = 4$ см, разрезанный пополам, находится во внешнем однородном поле $E_0 = 300$ В/cm, перпендикулярном к плоскости разреза. Определить силу, с которой оба полушария отталкиваются друг от друга.

О2-3.54

Длинный проводящий цилиндр радиусом R составлен из двух половин. Определить силу отталкивания F, действующую на единицу длины каждого полуцилиндра, если на единицу длины цилиндра приходится заряд x.

3. SOLUTIONS Электрическое поле в веществе. Энергия электрического поля. Энергетический метод вычисления пондеромоторных сил

3.14

$\mathbf{E} = \frac{4H}{R}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{R}{l}\right)\mathbf{P}$.

3.15

$E' = (\varepsilon - 1)E/3$. Если поляризация диэлектрической среды P, то $(\varepsilon - 1)E = 4\pi P$. Напряженность поля в центре сферической полости $E' = 4\pi P/3$. В самом деле (рис. 395),
$E' = \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} \frac{P\cos\theta R^2 \sin\theta d\varphi}{R^2}\cos\theta = 2\pi P \int_0^\pi \sin\theta\cos^2\theta d\theta = \frac{4\pi}{3}P$.

3.22

$\alpha = \frac{q}{4\pi R^2}\left(\frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\varepsilon_1}\right)$.

3.23

1) $\Phi_E = \pi R^2 E_0 \cos\theta\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}$; 2) $\oint_\Gamma Ddl = -(\varepsilon - 1)E_0 l_1 \sin\theta$. Заметим, что поток вектора D, как и положено, равен нулю.

3.24

$C = 35$ cm.

3.25

$U = \frac{\varepsilon V}{1+(\varepsilon-1)d_1/d} = 500$ В.

3.26

$C = \frac{S(\varepsilon_1-\varepsilon_2)}{4\pi d\ln(\varepsilon_1/\varepsilon_2)}$.
Указание. Так как диэлектрическая проницаемость между обкладками меняется по закону $\hat{\varepsilon} = \varepsilon_1 + \frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{d}x$, где x - расстояние от первой пластины, то разность потенциалов между обкладками можно записать так: $V = \int_0^d Edx = Dd\int_0^d \frac{dx}{\varepsilon_1 d+(\varepsilon_2-\varepsilon_1)x}$, где E - напряженность поля, $D = 4\pi\sigma$ - электрическая индукция.

3.27

$$E(x) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon}\left(3\pi\sigma + \frac{2\pi\sigma}{d^2}x^2\right) & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant d, \\ -\pi\sigma & \text{при } x < 0, \\ +\pi\sigma & \text{при } x > d. \end{cases}$$

3.28

$E = \frac{4\pi Q}{\varepsilon_1\Omega_1+\varepsilon_2\Omega_2}\frac{1}{r^2}$, где r - расстояние от центра шара.

$$C = \frac{\Omega_1\varepsilon_1 + \Omega_2\varepsilon_2}{4\pi}\frac{R_1R_2}{R_2 - R_1}$$

3.29

$E = \frac{4\pi}{\varepsilon_1\varphi_1+\varepsilon_2\varphi_2}\frac{Q}{lr}$, где r - расстояние от центра конденсатора.

$$C = \frac{\varphi_1\varepsilon_1 + \varphi_2\varepsilon_2}{4\pi\ln(R_2/R_1)}l$$

3.30

$S_2 = \frac{\varepsilon-n}{\varepsilon-1}\frac{S_1}{n} = 200$ см^2, где $n = 40$.

3.31

$h = \frac{\varepsilon-n}{\varepsilon-1}\frac{d}{n} = 0,2$ мм, где $n = 50$.

3.32

$C = \frac{8\pi\beta q}{\sqrt{1+32\pi\beta q}-1}\left(\ln\frac{R_2}{R_1}\right)^{-1}$.

3.33

$C = \frac{8\pi\beta q}{\sqrt{1+16\pi\beta q}-1}\frac{R_1R_2}{R_2-R_1}$.

3.34

$\rho_{CB} = \frac{2V_0}{\pi R_1 r}$.

3.35

$\rho_{\text{СВ}} = \frac{V_0}{\pi R_1 r}$.

3.36

$\rho = \frac{2\pi(\varepsilon-1)n^2}{(e/m)} \approx 4,8\cdot10^{-13}$ ед. СГСЭ;

$$q = -\frac{m}{e}2\pi^2(\varepsilon-1)n^2R^2H \approx -0,15\cdot10^{-8} \text{ ед. СГСЭ}.$$

3.37

$\varphi = \frac{q}{\varepsilon R}$.

3.38

$\sigma_1 = \frac{q}{2\pi r^2(1+\varepsilon/\varepsilon_1)}$; $\sigma_2 = \frac{q}{2\pi r^2(1+\varepsilon/\varepsilon_2)}$.

3.39

$F = \frac{2}{3}\left(\frac{q}{R}\right)^2\left(\frac{r_0}{R}\right)^3(\varepsilon - 1)$.

3.40

$F = \frac{q^2}{4L^2}\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}$; $\sigma = \frac{1}{2\pi}\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}\frac{qL}{(r^2+L^2)^{3/2}}$,
где r - расстояние от перпендикуляра, опущенного из заряда на плоскость.

3.41

$F \propto \frac{1}{r^5}$.

3.42

$W = \frac{q^2}{2R}$.

3.43

$W = \frac{3q^2}{5R}$.

3.44

1) $R = \frac{3}{5}\frac{e^2}{mc^2} \approx 1,7 \cdot 10^{-13}$ cm; 2) $R = \frac{e^2}{2mc^2} \approx 1,4 \cdot 10^{-13}$ cm.

3.45

$H = \frac{A}{2\pi\rho q d} = 1,3$ cm.

3.46

$T = T_0\frac{CU^2}{12P_0V_0} \approx 3 \cdot 10^7$ K.

3.47

$A = \frac{11}{16}\frac{q^2}{R}$.

3.48

$A = \frac{11}{8}\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon}\frac{q^2}{R}$.

3.49

$W = \frac{2}{3}\pi^2\rho^2R^2l^3$.

3.50

$P = 2\pi\sigma^2 = \frac{2\pi Q^2}{(4\pi R^2)^2} = \frac{Q^2}{8\pi R^4}$.

Указание. Пусть σ - поверхностная плотность зарядов на сфере. Напряженность поля снаружи у поверхности сферы равна $4\pi\sigma$, а внутри равна нулю. Выделим мысленно элемент поверхности dS. Поле у поверхности можно рассматривать как результат наложения двух полей: во-первых, поля зарядов, находящихся на элементе dS и создающих напряженность $2\pi\sigma$ снаружи и внутри, и во-вторых, поля всех остальных зарядов. Следовательно, поле остальных зарядов равно $2\pi\sigma$ и направлено наружу. Отсюда сила, действующая изнутри на элемент dS, равна $2\pi\sigma\sigma\ dS$. Поэтому давление будет $2\pi\sigma^2$.

3.51

* $F = \frac{Q^2}{8R^2}$.

Решение. На единицу поверхности сферы действует выталкивающая сила $\mathbf{f} = Q^2\mathbf{n}/\left(8\pi R^2\right)$. Отсюда интегрированием легко получить ответ.

3.52

$F = \frac{Q(Q+2q)}{8R^2}$.

3.53

$F = \frac{9}{16}E_0^2R^2 = 9$ дин.

Указание. Учитывая, что проводящий шар в однородном поле $\mathbf{E}_0$ поляризуется, следует найти поле на поверхности шара как функцию угла θ между направлением вектора E_0 и точкой на поверхности шара: $E_{\text{ш}} = 3E_0\cos\theta$.

Проекция (на ось симметрии) сил давления, оказываемых полем на половинки шара, $f_{\parallel} = \frac{E^2}{8\pi}\cos\theta$. Далее интегрированием по углу θ получается полная сила отталкивания, действующая на каждую из половинок шара.

3.54

$F = \frac{x^2}{\pi R}$.

O2-Ток с поверхности шара в воздух

Уединённый металлический заряженный шар находится в воздухе, удельное сопротивление которого $\rho = 2\cdot10^{16}$ Ом $\cdot$ см, а диэлектрическая проницаемость $\varepsilon = 1,00025$. Во сколько раз изменится заряд шара через час?

типа ток у нас в неограниченную среду уходит.

Мы просто знаем закон Ома (который тут почему-то можно использовать), и все, находим плотность тока j:

$$j = \frac{E}{\rho}$$

$$I = \oint \vec{j}\overrightarrow{ds} = \frac{1}{\rho}\oint \vec{E}d\vec{s} = \frac{q}{\varepsilon\varepsilon_0\rho}$$

и по теореме гаусса далее можно выразить всё через изначальный заряд.

$$I = \frac{q}{\varepsilon\varepsilon_0\rho}$$

Далее определение тока, что $I = \dot{q}$ дает нам экспоненциальное спадание заряда.

МФТИ-маг-вступ-2021.-dem(2 мин) Внесение шара в поле

В статическое электрическое поле с потенциалом $\varphi(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z}) = 5\mathrm{x} + 10\mathrm{y}^2 - 10\mathrm{z}^2$ В, координаты в см, внесли металлический шар радиусом 5 см так, что его центр оказался в точке с координатами (1,1,1). Найти потенциал $\varphi'(1,2,2)$ после внесения шара.

Solution (???)

Искомая точка находится внутри шара. Нужно определить потенциал внутри шара, потому он там везде одинаков. Заряды находятся только на поверхности.

посмотрим на вклад поверхностных зарядов в потенциале в центре. Изначально потенциал по формуле был $\varphi(1,1,1)$ =5В

Посчитаем потенциал в центре, это начальный потенциал + потенциал от поверхности, который равен

$$\phi_{\text{пов}} = \oint \frac{dq}{R} = 0$$

в итоге у центральной точки такой же потенциал, какой и был.

добавка от поверхностных зарядов равна 0, я хз.

!!! тут (пока так думаю) от геометрии многое зависит потому что уже R так бы не вынеслось, так что при другой фигуре нужно искать какую-то другую точку, где потенциал не изменится.

14.1.14 Problems about Constant Current 1

O2-4.1

В схему включены два одинаковых гальванических элемента с ЭДС 1,5 В и внутренним сопротивлением 2 Ом так, как показано на рис. 40. Какой ток проходит через элементы? Что покажет вольтметр? Сопротивлением соединительных проводов пренебречь.

4.1

$g = 0,75$ А. Вольтметр покажет ноль, так как падение напряжения внутри каждого элемента равно ЭДС элемента.

O2-4.2

По ошибке в цепь были включены параллельно два гальванических элемента с разными ЭДС $\mathscr{E}_1 = 1,9$ В и $\mathscr{E}_2 = 1,1$ В и с внутренними сопротивлениями $r_1 = 0,1$ Ом и $r_2 = 0,8$ О. Элементы замкнуты на внешнее сопротивление $R = 10$ Ом (рис. 41). Чему равны токи $\mathscr{J}_1$ и $\mathscr{J}_2$ через элементы, как они направлены и как велико напряжение V на сопротивлении R внешней цепи? сопротивлениями r_1, r_2, r_3 соединены по схеме, указанной на рис. 42. Сопротивления соединяющих проводов пренебрежимо малы. 1) Какое напряжение V будет показывать вольтметр, включенный так, как показано на рисунке? 2) Чему будет равно показание вольтметра, если величины $\mathscr{E}_i$ и r_i связаны соотношением $\mathscr{E}_1/r_1 = \mathscr{E}_2/r_2 = \mathscr{E}_3/r_3$?

4.2

$_1 \approx 1,05$ А (по направлению); $_2 \approx 0,87$ А (против направления ЭДС); $V \approx 1,8$ В.

O2-4.3

(????)

4.3

1) $V = r_1 \frac{\mathscr{C}_1+\mathscr{E}_2+\mathscr{E}_3}{r_1+r_2+r_3} - \mathscr{E}_1; 2\Big)\, V = 0.$

O2-4.4

Сопротивления R_1 и R_2 (рис. 43) подобраны так, что ток чети ЭДС $\mathscr{E}$. Внутренними сопротивлениями батарей по сравнению с R_1 и R_2 пренебречь.

4.4

$\mathscr{E} = \frac{\mathscr{C}_1 R_2+\mathscr{C}_2 R_1}{R_1+R_2}.$

O2-4.5

Найти ток, проходящий через резистор сопротивлением R_0 в схеме, изображенной на рис. 44, считая все параметры заданными.

4.5

$\mathscr{J} = \frac{\mathscr{C}_0(1+R_3/R_2)-\mathscr{C}}{1} R_0(1+R_3/R_2)+R_3 \cdot$

O2-4.6

В схеме, изображенной на рис. 45, заданы сопротивления R_1 и R_2. Определить сопротивление R, при котором рассеиваемая на нем мощность максимальна. Каково условие того, что ток, проходящий через сопротивление R, равен нулю?

4.6

$R = \frac{R_1 R_2}{R_1+R_2}; \quad \mathscr{J}_R = 0$ при условии $\frac{\mathscr{C}_1}{\mathscr{C}_2} = \frac{R_1}{R_2}.$

O2-4.7

Электрическая цепь составлена из двух батарей с ЭДС $\mathscr{E}_1$ и (рис. 46). Какая мощность рассеивается на этих резисторах?

4.7

$N_1 = N_4 = \frac{(\mathscr{C}_1-\mathscr{C}_2)^2}{4R}; \quad N_2 = N_3 = \frac{(\mathscr{C}_1+\mathscr{E}_2)^2}{4R}.$

O2-4.8

Сопротивления R_1, R_2, R_3 подобраны так, что ток через гальванометр G (рис. 47) равен нулю. Электродвижущие силы $\mathscr{E}_1$ и $\mathscr{E}_3$ известны. Считая известными сопротивления R_1, R_2, R_3 и пренебрегая внутренними сопротивлениями батарей, найти электродвижущую си-

4.8

$\mathscr{E}_2 = \mathscr{E}_3 \left(1 + \frac{R_2}{R_3}\right); \quad = \frac{\mathscr{E}_1}{R_1} - \frac{\mathscr{C}_3}{R_1}\left(1 + \frac{R_2}{R_3}\right).$

O2-4.9

Сопротивления R_1 и R_2 подобраны так, что ток через гальванометр G (рис. 48) равен нулю. Считая известными ЭДС $\mathscr{E}_1$ и $\mathscr{E}_2$, найти электродвижущую силу $\mathscr{E}$. Внутренними сопротивлениями батарей пренебречь по сравнению с R_1 и R_2.

4.9

$\mathscr{E} = \frac{\mathscr{E}_1 + \frac{R_1}{R_2}\mathscr{E}_2}{1+\frac{R_1}{R_2}}$.

10,11

4.10

$V_i = \frac{VR_i}{R_1+R_2+R_3}$, где $i = 1, 2, 3$.

4.11

$_1 = \frac{\mathscr{L}R_2R_3}{R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3}$; $\mathscr{A}2 = \frac{\mathscr{A}R_1R_3}{R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3}$;

$$\mathscr{J}_3 = \frac{\mathscr{I}R_2R_1}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}.$$

O2-4.15

Две плоские прямоугольные пластины образуют конденсатор. Между пластинами без трения может двигаться пластина твердого диэлектрика (рис. 52). Найти мощность, развиваемую батарей, 30 включенной в цепь конденсатора. Как распределяется эта мощность между электрической и механической энергиями при втягивании диэлектрика? Считать известными ЭДС батареи $\mathscr{E}$, диэлектрическую проницаемость ε, высоту пластины h и ее ширину b (на рисунке не изображена).

O2-4.16

*: К большому металлическому листу толщиной приварены на расстоянии b друг от друга два цилиндрических проводника радиусом r_0 (рис. 53). Найти сопротивление R между проводниками, если $a \ll r_0 \ll b$. Считать, что удельная проводимость λ_1 проводников значительно больше удельной проводимости λ материала листа.

14.1.15 Problems about Constant Current 2

O2-4.18

К центрам противополож- Рис. 54 ных торцов тонкостенной цилиндри- ческой банки диаметром D и высотой l припаяны провода диаметром d (рис. 55). Определить сопротивление R банки, если она сделана из фольги толщиной $\delta \ll d$ с удельной проводимостью λ.

O2-4.19

Фигура, изображенная на рис. 56, сделана из проволоки постоянного сечения. Число вписанных друг в друга правильных треугольников очень велико. Сторона самого большого треугольника $a_1 = 1$ м. Сопротивление одного метра проволоки равно 1 Ом. Найти сопротивление между клеммами A и B.

O2-4.20

К диаметрально противоположным точкам A и B слабо проводящей однородной полой сферы подведены цилиндрические провода, между концами A и B которых поддерживается постоянная разность потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$. Найти распределение потенциала φ как функции угла θ (рис. 57). Угол, под которым из центра сферы O виден диаметр основания каждого из проводов, равен $2\theta_0$.

Рис. 58 роны поглощаются на внешней сфере. В отключенной батарее устанавливается равновесие между потоком заряда, переносимым быстрыми электронами, и током проводимости в ионизированном воздухе. Найти напряженность электрического поля E в пространстве между сферами, если ЭДС элемента равна $\mathscr{E}$, радиусы сфер равны r_1 и r_2.

O2-4.23

Пространство между пластинами слоистого плоского конденсатора заполнено многослойным диэлектриком, обладающим слабой электропроводностью. Диэлектрическая проницаемость и удельная проводимость изменяются от $\varepsilon_1 = 4, \lambda_1 = 10^{-9}$ ОМ$^{-1} \cdot$ cm^{-1} на одной поверхности диэлектрика до $\varepsilon_2 = 3, \lambda_2 = 10^{-12}$ ОМ$^{-1} \cdot$ cm^{-1} на другой его поверхности. Конденсатор включен в цепь батареи постоянной ЭДС. Определить величину и знак суммарного свободного заряда q, который возникает в диэлектрике, когда в цепи установится постоянный электрический ток $\mathscr{O} = 10^{-7}$ А, текущий через диэлектрик от стороны 1 к стороне 2.

O2-4.24

На цилиндрический конденсатор с радиусами обкладок R_1 и R_2 подано напряжение V_0. Конденсатор заполнен слабопроводящей средой $\left(\varepsilon = 1, \lambda = k/r^2\right.$, где k - некоторая постоянная). Найти распределение заряда и поля внутри конденсатора. Какова будет емкость такого конденсатора (на единицу длины)?

O2-4.25

Пространство между пластинами плоского конденсатора заполнено двумя однородными слабо проводящими слоями диэлектрика с толщинами d_1 и d_2. Диэлектрическая проницаемость и удельная проводимость первого диэлектрика равны соответственно ε_1 и λ_1, а второго $-\varepsilon_2$ и λ_2. Найти плотность поверхностных сво- бодных зарядов σ на границе между диэлектриками, которая уст новится при наложении на конденсатор постоянного напряжения

O2-4.26

Определить проводимость Λ изоляции в сферическом кон денсаторе, заполненном слабопроводящим диэлектриком. Удельна проводимость диэлектрика равна λ, диэлектрическая проницаемость 32

O2-4.27 Сферы с диэлектриком между ними

Пространство между двумя концентрическими сферами заполнено диэлектриком, проводимость которого зависит только от расстояния до сфер. Найти закон изменения удельной проводимости $\lambda(r)$, если объемная плотность джоулевых потерь при прохождении тока одинакова во всех точках.

O2-4.28

Пространство между двумя коаксиальными цилиндрами заполнено диэлектриком, обладающим некоторой проводимостью. Найти закон изменения удельной проводимости $\lambda(r)$, если при наличии некоторой разности потенциалов поле между цилиндрами везде одинаково.

O2-4.29

По цилиндрическому стержню течет ток плотности j. Удельная проводимость λ на участке AB длиной l изменяется по линейному закону от λ_1 до λ_2. Найти объемную плотность зарядов проводимости ρ на участке AB.

14.1.16 Problems about Constant Current 3

O2-4.30

Имеется n идеально проводящих тел в вакууме. Известно, что при зарядах $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n$ их потенциалы равны $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n$. Какое количество тепла Q будет выделяться сжесекундно, когда пространство между рассматриваемыми телами будет заполнено однородной проводящей жидкостью с электропроводностью λ и диэлектрической проницаемостью в, если потенциалы тел поддерживаются при прежних значениях $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n$?

O2-4.31

По сети длиной 5 km необходимо передать энергию от источника с напряжением 110 В, имеющего мощность 5 кВт. Какого минимального диаметра D должен быть медный провод, чтобы потери энергии в сети не превышали 10% от мощности источника?

Удельное сопротивление меди $\rho = 0,017 \cdot 10^{-4}$ Ом $\cdot$ cm.

O2-4.32

Заземление концов телеграфной линии осуществлено посредством очень глубоко зарытых в землю металличсских шаров радиусами r_1 и r_2. Удельная проводимость почвы вблизи них равна λ_1 и λ_2. Найти сопротивление R земли между шарами. Считать почву в окрестности каждого шара однородной на расстояниях, больших по сравнению с радиусами шаров.

O2-4.33

Показать, что сопротивление однородной проводящей среды, заполняющей все пространство мсжду двумя идеально проводящими оболочками произвольной формы, равно $\rho/(4\pi C)$, где ρ - удельное сопротивление среды, а C - взаимная емкость этой системы электродов-оболочек в вакууме.

O2-4.34

Два металлических шара одинакового радиуса r погружены в однородную среду с удельным сопротивлением ρ. Чему равно сопротивление R среды между шарами? Считать, что расстояние между шарами очень велико по сравнению с их радиусами.

O2-4.35 Сопротивление земли между зарытыми электродами (????)

Два электрода A_1 и A_2 произвольной формы глубоко зарыты в землю и соединены между собой воздушным проводом (телеграфная линия). Электроды находятся далеко друг от друга. Емкости электродов (в вакууме) равны соответственно C_1 и C_2. Почву в окрестности каждого электрода можно считать однородной. Найти сопротивление земли R между электродами, если удельные сопротивления почвы в окрестности электродов равны соответственно ρ_1 и ρ_2.

4. SOLUTIONS Постоянный ток. Токи в неограниченной среде

4.12

1) Если диаметр вращается по часовой стрелке (рис. 396), то лампа вспыхнет при $\alpha = \frac{\pi}{2}\frac{V_{\text{заж}}}{V}$, погаснет при $\beta = \frac{\pi}{2}\frac{V_{\text{таш}}}{V}$.

2) $V_{\min} = V_{\text{закк}}$, лампа загорится при $\alpha = \pm\dfrac{\pi}{2}$.

4.13

$V = \frac{ESRn}{2\pi} = 6,67 \cdot 10^{-4}$ ед. $= 0,2$ В.

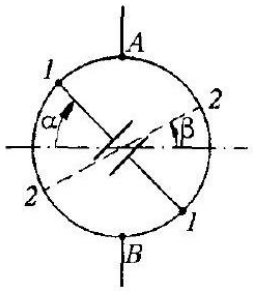


Рис. 396

4.14

*: $= \frac{\varepsilon-1}{4\pi}\frac{\mathscr{E}}{h}$ ив, где b - ширина пластины.

Решение. Заряд, приходящий на пластины за время dt:

$$dq = \alpha v b dt$$

где поверхностная плотность поляризационных зарядов на диэлектрике

$$\sigma = P = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi}\frac{\mathscr{C}}{h}.$$

Отсюда

$$= \frac{dq}{dt} = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi}\frac{\mathscr{E}}{h}vt[\text{ ед. СГСЭ}].$$

4.15

* $N = \mathscr{B}\mathscr{C} = \frac{\varepsilon-1}{4\pi}\frac{bv_{\mathscr{C}}{}^2}{h}$[эрг /с], где v - мгновенная скорость диэлектрика, b - ширина пластин. Работа батареи расходуется на увеличение электрической энергии конденсатора и кинетической энергии диэлектрика поровну.

Решение.

$$Ndt = \mathscr{C}dq = dW + \delta A,$$

$$dW = d\left(\frac{C_{\mathscr{G}}}{2}\right) = \frac{\mathscr{C}^2}{2}dC, \quad \delta A = \frac{\mathscr{C}^2}{2}dC, \quad dW = \delta A, \quad C = C_0 + \frac{\varepsilon - 1}{4\pi}\frac{b}{h}x,$$

$$Ndt = 2dW = 2\frac{\mathscr{C}^2}{2}dC = \mathscr{E}^2\frac{\varepsilon - 1}{4\pi}\frac{b}{h}vdt.$$

4.16

$R = \frac{v}{} \approx \frac{1}{\pi\lambda a}\ln\frac{b}{r_0}$.

Решение. Поскольку $\lambda_1 \gg \lambda$, то можно считать, что цилиндрические проводники по всей своей длине имеют постоянные потенциалы. Поэтому для определения поля следует рассматривать электростатическую задачу. Пусть линейная плотность зарядов на проводниках есть $\pm$. По теореме Гаусса поле E вокруг цилиндрического стержня на расстоянии r от его оси равно

$$E = \pm\frac{2x}{r}$$

Разность потенциалов между стержнями получим путем интегрирования поля E

$$V = 2x\int_{r_0}^{b-r_0}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{b-r}\right)dr = 4x\ln\frac{b-r_0}{r_0} \approx 4x\ln\frac{b}{r_0}.$$

Полный ток найдем, принимая во внимание, что вблизи каждого из стержней поле практически не зависит от заряда другого стержня ($b \gg r_0$). Полагая, что плотность тока постоянна по толщине листа, получим для полного тока, вытекающего из цилиндрического проводника

$$= 2\pi r_0 aj = 2\pi r_0 a\lambda E = 4\pi\kappa\lambda a.$$

Следовательно, искомое сопротивление

$$R = \frac{V}{} \approx \frac{1}{\pi\lambda a}\ln\frac{b}{r_0}.$$

4.17

$R = \frac{2l}{\pi\lambda\delta(D-d)}\ln\frac{D}{d}$.

4.18

$R = \frac{1}{\pi\lambda\delta}\left(\frac{l}{D} + \ln\frac{D}{d}\right)$.

4.19

$R_{AB} = \frac{\sqrt{7}-1}{3}a_1\rho \approx 0,55a_1\rho = 0,55\text{ОМ}$.

4.20

$\varphi(\theta) = (\varphi_1 - \varphi_2)\left\{\frac{\ln[\lg(\theta/2)]}{2\ln[\mathrm{tg}(\theta_0/2)]} + 1\right\}$.

4.21

$\varphi_{\max} = RE_{\text{пр}} = 4,5 \cdot 10^6$ В; $\mathcal{S}_{\max} = \frac{lvE_{\text{p}}}{2\pi} = 1$ mA.

4.22

$E = \frac{\mathscr{C}}{r_2 - r_1}$.

4.23

$q = \frac{}{4\pi}\left(\frac{\varepsilon_2}{\lambda_2} - \frac{\varepsilon_1}{\lambda_1}\right) = 78$ ед. СГСЭ $\approx 2,6 \cdot 10^{-8}$ Кл.

4.24

$C = \frac{R_2^2}{R_2^2 - R_1^2}$ (на единицу длины); $\mathbf{E} = \frac{2V_0}{R_2^2 - R_1^2}\mathbf{r}$; $\rho = \frac{V_0}{\pi\left(R_2^2 - R_1^2\right)}$.

4.25

$\sigma = \frac{V}{4\pi}\frac{\varepsilon_2\lambda_1 - \varepsilon_1\lambda_2}{d_1\lambda_2 + d_2\lambda_1}$.

4.26

$\Lambda = \frac{4\pi\lambda}{\varepsilon}\frac{R_1R_2}{R_2 - R_1}$, где R_1 и R_2 - радиусы сферических обкладок конденсатора.

4.27

$\lambda(r) \propto \frac{1}{r^4}$.

4.28

$\lambda(r) \propto \frac{1}{r}$.

4.29

$\rho = \frac{lj}{4\pi}\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{[\lambda_1 l + (\lambda_2 - \lambda_1)x]^2}$, где x - текущая координата, отсчитанная от точки A по направлению к точке B. Заметим, что если λ и ε - константы, не зависящие ни от координат, ни от времени, то объемная плотность ρ свободных зарядов в проводнике, по которому течет постоянный ток, равна нулю.

4.30

$Q \approx \frac{4\pi\lambda}{\varepsilon} \sum_{k=1}^{n} q_k \varphi k.$

4.31

$D = 3,3$ см.

4.32

$R = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r_1\lambda_1} + \frac{1}{r_2\lambda_2}\right).$

4.33

Р ешение. Представим себе электростатическое поле между проводниками A и B, находящимися под определенной разностью потенциалов V, причем пространство между ними ничем не заполнено. Сравним это поле с полем электрических сил, когда пространство между этими проводниками заполнено однородной проводящей средой (удельное сопротивление ρ) и к ним приложена та же разность потенциалов V. Так как среда однородна и поверхности проводников являются эквипотенциальными поверхностями, то напряженность поля E в обоих случаях одинакова. В случае электростатического поля $CV = Q = \int \sigma dS$, где σ - поверхностная плотность заряда на элементе dS поверхности и интеграл берется по поверхности одного из проводников. Так как $E = 4\pi\sigma$, то

$$CV = \frac{1}{4\pi}\int E dS \tag{1}$$

В случае постоянного тока

$$\frac{V}{R} = g = \int j dS$$

где j - плотность тока и интеграл берется по поверхности того же проводника. Для всех точек пространства закон Ома дает $E = j\rho$.

Следовательно

$$\frac{V}{R} = \frac{1}{\rho}\int E dS \tag{2}$$

Сравнивая (1) и (2), получаем $R = \rho/(4\pi C)$.

4.34

$R = \rho/(2\pi r)$.

Указание. Для решения нужно применить результаты предыдущей задачи.

4.35

$R = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\rho_1}{C_1} + \frac{\rho_2}{C_2}\right).$

4.36

$Q_1 = \frac{\mathscr{E} r_2}{\frac{r_2}{r_1} + \frac{\lambda_1}{\lambda_2}}; \quad Q_2 = \frac{\mathscr{C} r_1}{\frac{r_1}{r_2} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1}}.$

4.37

$q = |e|$. Поскольку подвижности ионов постоянны, то постоянны скорости ионов v_1 и v_2 и ток, меняясь скачком в момент времени t_1 прихода одного из ионов на пластину. Обозначив через x путь первого иона, а $(d - x)$ - путь второго, получаем

$$\begin{aligned} &= _1 = \tfrac{|e|}{d}(v_1 + v_2), && 0 < t < t_1 = \tfrac{x}{v_1} \\ &= _2 = \tfrac{|e|}{d} v_2, && t_1 \leqslant t < t_2 = \tfrac{d-x}{v_2}. \end{aligned}$$

14.1.17 Problems about Magnetic Field in Conductors, Inductance 1

О2-5.1 Ток в эллипсе

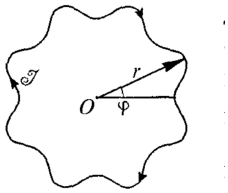
По проводнику, имеющему форму эллипса, течет постоянный ток $\mathfrak{I} = 10$ А. Большая и малая полуоси эллипса равны соответственно $a = 50$ см, $b = 30$ см. Определить индукцию B магнитного поля в вакууме в фокусе эллипса. Уравнение эллипса в полярной системе координат: $r = \frac{p}{1+e\cos\varphi}$, где $p = b^2/a$ - параметр, а $e < 1$ - эксцентриситет.

5.1

$B = \frac{2\pi a}{cb^2} = \frac{\pi}{9}$Гс $\approx 0,349$Гс.

О2-5.2 Поле в гофрированной окружности

Определить магнитном поле B в вакууме в центре O проводника в виде «гофрированной окружности», уравнение которой в полярной системе координат имеет вид $\frac{1}{r} = \frac{1}{a} + b\cos m\varphi$, где $a = 50$ см, m целое число, b - постоянная. По проводнику течет ток $\mathcal{I} = 10$А.



5.2

$B = \frac{2\pi\mathscr{A}}{ca} = \frac{\pi}{25}$Гс $\approx 0,126$Гс.

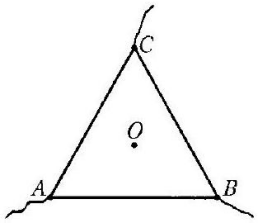
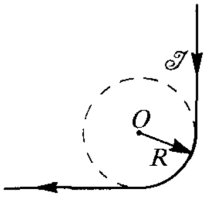


Рис. 397

О2-5.3

Электрический ток $\mathcal{J}$ протекает по проводу, изогнутому по дуге 1/4 окружности. Найти значение магнитной индукции B в вакууме в центре окружности радиусом R.

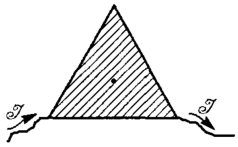


5.3

$B = \frac{e^g}{CR}\left(\frac{\pi}{2} + 2\right)$.

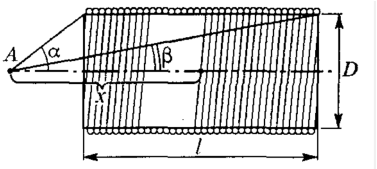
O2-5.4 Поле внутри проводящего треугольника

Определить магнитное поле B в центре однородной тонкой металлической пластинки, имеющей форму равностороннего треугольника со стороной a, если через пластинку пропускают ток $\mathcal{J}$ (рис. 62). Магнитным полем подводящих проводов пренебречь.



O2-5.5 Типичное поле соленоида

Найти индукцию B магнитного поля на оси соленоида в точке A, из которой диаметры торцов видны под углами 2α и 2β. Соленоид состоит из N витков, равномерно намотанных на длине l, и по нему течет ток $\mathscr{J}$



5.4

$B = 0$.
Указание. Рассмотреть более общий случай - три подводящих провода (рис. 397) к вершинам треугольной пластины. Пустить ток f от A к B, такой же ток от B к C и ток ∘ от вершины C к A.

5.5

$B = \frac{2\pi N \mathscr{J}}{l}(\cos\beta - \cos\alpha)$.

O2-5.6

При производстве полиэтиленовой пленки широкая полоса протягивается по роликам со скоростью $v = 15$ m/c (рис. 64). 34 В процессе обработки (главным образом из-за трения) поверхность пленки приобретает равномерно распределенный заряд с поверхностной плотностью σ. Оценить максимальное значение σ и магнитного поля B вблизи поверхности пленки, принимая во внимание, что при напряженности электрического поля $E = 30$ кВ/см в воздухе возникает электрический разряд (пробой).

5.6

$\sigma = \frac{E}{2\pi} = 15,9$ ед. СГСЭ $= 5,3 \cdot 10^{-5}$ К//m^2; $\quad B = \frac{v}{c}E = 5 \cdot 10^{-6}$ Гс.

О2-5.7

Вдоль длинной тонкостенной цилиндрической трубки радиусом $R = 25$ мм течет постоянный ток $= 20$ А. В стенке трубки имеется тонкая прорезь шириной $d = 1$ мм, парал- лельная оси трубки. Найти магнитное поле B внутри трубки и вне ее на расстоянии $r \gg R$.

5.7

$B = \frac{2}{cr}\frac{1}{\frac{2\pi R}{d}-1}$ при $r < R$ и $r \gg d$; на оси трубы $(r = R)B \approx 0,1$ Гс, $B \approx \frac{2}{cr}\frac{1}{1-\frac{d}{2\pi R}}$ при $r \gg R$, где r - расстояние от середины щели.

8-11

5.8

$$B = \begin{cases} \frac{2r}{cR_2^2}\frac{1}{\frac{\rho_1}{\rho_2}\left(1-\frac{R_1^2}{R_2^2}\right)+1} & \text{при } r \leqslant R_1, \\ \frac{2\mathscr{G}}{cr}\frac{\rho_1}{\rho_2}\left(\frac{r^2}{R_1^2}-1\right)+1 & \\ \frac{\rho_1}{\rho_2}\left(\frac{R_2^2}{R_1^2}-1\right)+1 & \text{при } R_1 < r < R_2, \\ \frac{2\mathscr{J}}{cr} & \text{при } r \geqslant R_2. \end{cases}$$

5.9

В цилиндрической системе координат, ось которой совпадает с осью витка, следует проанализировать поведение составляющих магнитного поля $B_z(r)$ и $B_r(r)$. Ответ на вопрос задачи определяется знаком производной $B_0''(0)$ на оси витка. Поле в плоскости витка минималвно в его центре.

5.10

Внутри сферы поле соответствует полю прямого бесконечно длинного проводника с током $\mathscr{G}$, а вне сферы поле $B = 0$.

5.11

$B = \frac{\pi\mathscr{G}(N+1)}{R}$.
Указание. $\sum_{n=1}^{N}\sin^2\frac{\pi n}{2N} = \frac{1}{2}(N+1)$.

О2-5.12

Длинный тонкий многовитковый соленоид с поверхностной плотностью тока i и площадью поперечного сечения $S = \pi r^2$ согнут так, что его ось образует половину окружности радиусом R. Найти величину магнитного поля B в центре этой окружности.

5.12

$B = \frac{2\pi i}{c}\left(\frac{r}{R}\right)^2$.

О2-5.13

На немагнитную сферу радиусом R намотан соленоид. Линейная плотность поверхностного тока в нем постоянна и равна i. Найти величину магнитного поля B в центре сферы.

5.13

$B = \frac{\pi^2 i}{c}$.

14.1.18 Problems about Magnetic Field in Conductors, Inductance 2

O2-5.14 Нить в центре вращающегося цилиндра (!?!?!??!?!?)

По оси полого цилиндра натянута заряженная нить, на единицу длины которой приходится заряд $\kappa = 1$ ед. СГСЭ. Цилиндр вращается вокруг своей оси с угловой скоростью $\Omega = 1000$ рад/с (рис. 68). (!?!???!??!)

Определить магнитное поле B в материале цилиндра вдали от его торцов, пренебрегая пьезоэффектом и всеми эффектами, вызываемыми центробежной силой. Определить также магнитное поле в полости цилиндра и во внешнем пространстве в случаях, если цилиндр: 1) металлический немагнитный; 2) диэлектрический ($\varepsilon = 3$).

5.14

1) $B = \frac{2\chi\Omega}{c} \approx 0,67 \cdot 10^{-7}$ Гс в металле; $B = 0$ в воздухе.
2) $B = \frac{2\chi\Omega}{c}\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon} \approx 0,44 \cdot 10^{-7}$ Гс в диэлектрике; $B = 0$ в воздухе.

O2-5.15*

Длинный сплошной цилиндр из диэлектрика статически поляризован, причем вектор поляризации во всех точках цилиндра направлен радиально, а его величина пропорциональна расстоянию от продольной оси цилиндра, т. е. $\mathbf{P} = k\mathbf{r}(k = \text{const}$, $\mathbf{r}$ - радиусвектор, проведенный от оси перпендикулярно к ней). Цилиндр вращается в угловой скоростью ш вокруг своей оси. Найти индукцию магнитного поля внутри цилиндра вдали от его концов, если радиус цилиинра равен R.

5.15

$B = \frac{4\pi\mathscr{K}}{c} = \frac{4\pi}{c}k\omega r^2$.
Решение. Объемная пнотность связанных зарядов

$$\rho_{\text{свя3}} = -\operatorname{div}\mathbf{P} = -k\operatorname{div}\mathbf{r} = -k\left(\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y}\right) = -2k,$$

т. е. постоянна во всем объеме цилиндра. Вращаясь с угловой скоростью ω, связанные заряды создают токи с объемной плотностью

$$j = \omega r\rho_{\text{свя}} = -2k\omega r$$

Магнитное поле в точке r создают только внешние кольцевые токи, т. е. такие токи, которые текут на расстояниях больше, чем r. Сила таких токов, приходящаяся на единицу длины цилиндра,

$$\int_r^R j dr = -2k\omega\int_r^R r dr = k\omega\left(r^2 - R^2\right)$$

На поверхности поляризованного цилиндра возникают связанные заряды с поверхностной плотностью $\sigma_{\text{связ}} = P = kR$. Кольцевой ток, создаваемый на единице длины цилиндра этими поверхностными зарядами, равен $k\omega R^2$. Сложив его с кольцевым током объемных зарядов, найдем полный внешний кольцевой ток, приходящийся на единицу длины цилиндра: $= k\omega r^2$. Такой ток создает внутри цилиндра магнитное поле

$$B = \frac{4\pi\mathscr{T}}{c} = \frac{4\pi}{c}k\omega r^2$$

направленное параллельно оси цилиндра.

O2-5.16

Тонкостенная длинная дюралевая трубка заряжается электрически и приводится в быстрое вращение. Какова будет конфигурация создавшегося магнитного поля? Предел скорости вращения 36 трубки обусловлен механической прочностью дюраля $\sigma = 6 \cdot 10^8 \text{Н/м}^2$. Какое наибольшее отношение магнитного поля внутри трубки к электрическому полю на внешней поверхности трубки можно получить? Плотность дюраля $\rho = 2,7 \text{г/см}^3$.

5.16

$\left(\frac{B}{E}\right)_{\max} = \frac{1}{c}\sqrt{\frac{\sigma}{\rho}} \approx 1,6 \cdot 10^{-6}$.

O2-5.17

Заряженный шарик радиусом R равномерно вращается вокруг своего диаметра с угловой скоростью ω. Общий заряд шарика равен q. Найти магнитное поле шарика на расстояниях r, больших по сравнению с R, если заряд равномерно распределен 1) по поверхности шарика, 2) по объему шарика.

5.17

* 1) $\mathbf{B} = \frac{qR^2}{3c}\left[\frac{3(\omega \text{r})\mathbf{r}}{r^5} - \frac{\omega}{r^3}\right]$;
2) $\mathbf{B} = \frac{qR^2}{5c}\left[\frac{3(\omega r)\text{r}}{r^5} - \frac{\omega}{r^3}\right]$.
(Вектор $\mathbf{r}$ проведен из центра шарика.)

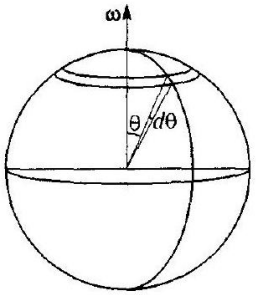


Рис. 398

Решение. Рассмотрим, например, случай 1).
Возьмем на поверхности шарика бесконечно узкий поясок, заключенный между углами θ и $\theta + d\theta$ (рис. 398). Вращаясь с угловой скоростью ω, такой поясок эквивалентен круговому току $d\mathscr{I} = \omega q \sin\theta d\theta/(4\pi)$ с магнитным
моментом

$$d\mathscr{M} = S\frac{d\mathscr{I}}{c} = \pi R^2 \frac{q\omega \sin\theta}{4\pi c}.$$

Интегрируя по θ, находим магнитный момент всего шарика: $\mathfrak{M} = qR^2\omega/(3c)$. Отсюда и получается результат, приведенный в ответе.

O2-5.18

Равномерно заряженная с линейной плотностью q квадратная рамка со стороной l вращается с угловой скоростью ω вокруг одной из сторон. Вычислить магнитный момент $\mathfrak{M}$ рамки.

5.18

$\mathfrak{m} = \frac{5}{6}\frac{ql^3}{c}\omega$.

O2-5.19

Равномерно заряженный тонкий диск радиусом R вращается с угловой скоростью ω вокруг своего неподвижного диаметра. Полный заряд диска Q. Найти магнитный момент $\mathfrak{gM}$ вращающегося диска.

5.19

$\mathfrak{M} = \frac{QR^2}{8c}\omega$.

O2-5.20

Согласно современным данным, допустимое из опытов различие абсолютных величин зарядов электрона q_e и протона q_p таково, что $\left|\frac{q_p - q_e}{q_p}\right| < 10^{-21}$. Нс может ли это различис объяснить существование наблюдаемого магнитного поля Земли? Магнитное поле Земли $B_3 \approx 3 \cdot 10^{-5}$ Т, плотность $\rho_3 \approx 5\text{r/cm}^3$. Считать, что для атомов, составляющих Землю, отношение относительной атомной массы A к атомному номеру Z порядка 2.

5.20

* Нет. Не может.

Решение. Магнитный момент равномерно заряженного по объему шара радиусом R, вращакщегося с угловой скоростью ω, равен (см. решение задачи 5.17)

$$\mathfrak{M} = \frac{qR^2\omega}{5c}$$

где q - полный заряд шара, т. е. в условиях задачи - Земли. Введем величину $x = \frac{q_p - q_e}{q_p}$ и запишем заряд одного атома в виде

$$Z(q_p - q_e) = Zxq_p$$

Если Земля состоит из атомов с атомным номером Z и относительной атомной массой A, то отношение ее полного заряда q к массе M_3 равно

$$\frac{q}{M_3} = \frac{Zxq_p}{m_\text{H} A}$$

где m_H - масса нуклона. С помощью этого соотношения выражение для магнитного момента Земли можно представить в виде

$$\mathfrak{M} = x\frac{Z}{A}\frac{q_p}{m_\text{H}}\frac{4\pi}{15c}\rho_3\omega_3 R_3^5.$$

Если бы Земля обладала таким магнитным моментом, то индукцию магнитного поля B на полюсе можно было бы определить из выражения $B = 2\mathfrak{M}/R_3^3$ (это максимальное значение). Отсюда

$$x = \frac{A}{Z}\frac{m_\text{H}}{q_p}\frac{15c}{16\pi^2}\frac{B_3 T_3}{\rho_3 R_3^2} \approx 2,6 \cdot 10^{-19}.$$

Однако данные опытов (условие задачи) свидетельствуют о том, что эта величина еще меньше ($x < 10^{-21}$). Таким образом, гипотеза о том, что источником магнитного поля Земли являются нескомпенсированные заряды протонов и электронов, вращающихся вместе с Землей не подтверждаются опытами.

O2-5.21

Вдоль плазменного цилиндра радиусом a с параболическим распределением проводимости $\lambda = \lambda_0\left(1 - r^2/a^2\right)$ течет постоянный ток Я. Найти магнитное полс $\mathscr{B}$)) внутри и вне цилиндра в зависимости от расстояния r от оси цилиндра.

5.21

$B(r) = \frac{4\mathscr{A}r}{ca^2}\left(1 - \frac{r^2}{2a^2}\right)$ при $r \leqslant a$ (внутри цилиндра);

$$B(r) = \frac{2\mathscr{E}}{cr} \quad \text{при } r \geqslant a \text{ (вне цилиндра).}$$

O2-5.22 Кольцо с проволокой

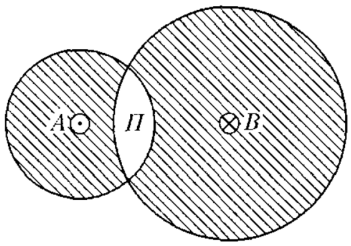
На тонкий латунный прут, свернутый в кольцо, намотано равномерно $N = 10^4$ витков провода. Во сколько раз магнитное поле B_0 на оси прута больше, чем $B_{\text{ц}}$ в центре кольца?

5.22

$\frac{B_{\text{о}}}{B_{\text{ц}}} = \frac{N}{\pi} \approx 3 \cdot 10^3$.

O2-5.23 Два провода с полостью в их пересечении

По двум бесконечно длинным прямолинейным проводникам, сделанным из немагнитного материала и изолированным друг от друга, текут в противоположных направлениях токи с одной и той же плотностью $j = 1000$ А/см^2. Проводники ограничены цилиндрическими поверхностями.



(На рис. 69 поперечные сечения проводников заштрихованы.)
Найти величину и направление магнитного поля в полости . Ток в левом проводнике направлен к решателю задачи, а в правом - от решателя. Расстояние между осями цилиндров $AB = d = 5$ см.

5.23

$B = 2\pi jd = 3140$ Гс. Поле B перпендикулярно к линии AB и направлено вверх, оставаясь в плоскости рис. 69.

O2-5.24 Поле внутри соленоида (????)

Определить магнитное поле внутри бесконечной цилиндрической полости, сделанной в бесконечном цилиндрическом проводе, вдоль которого течет постоянный ток плотности j, равномерно распределенный по сечению провода. Расстояние между осями провода и полости равно d.

5.24

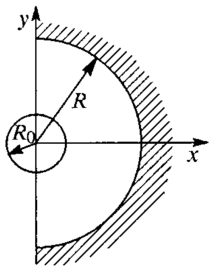
$\mathbf{B} = \frac{2\pi}{c} j[\mathbf{sd}]$, где $\mathbf{s}$ - единичный вектор, направленный вдоль тока, а вектор $\mathbf{d}$ проведен от оси провода к оси цилиндрической полости.

O2-5.25 Конденсатор-диск с диэлектриком (!!!)

Плоский конденсатор, пластинами которого являются диски радиусом R, подключен к источнику постоянного напряжения V. Объем между пластинами заполнен слабо проводящим диэлектриком, диэлектрическая проницаемость которого $\varepsilon(z) = \varepsilon_0 + z^2/d^2$, а проводимость $\lambda(r) = \lambda_0\sqrt{R/r}$, где d - расстояние между пластинами, а z отсчитывается от нижней пластины, r - расстояние от оси. Определить объемную плотность заряда $\rho(r, z)$, а также полный свободный заряд Q, сосредоточенный в диэлектрике. Чему равно магнитное поле $B(r)$? Краевые эффекты не учитывать.

O2-5.26 Поток через полость вдали от витка (!?!)

В плоскости xy расположен круглый виток радиусом R_0, по которому течет ток $\mathscr{J}$. Найти поток магнитной индукции через за штрихованную часть плоскости xy, если $R = 10R_0$ (рис. 70).



14.1.19 Problems about Magnetic Field in Conductors, Inductance 3

O2-5.27

Коаксиальный кабель состоит из толстого внутреннего провода радиусом r и тонкой внешней оболочки радиусом R. Найти индуктивность кабеля на единицу длины.

O2-5.28

Определить индуктивность L проводника, показанного на рис. 71. Ток течет по проволоке диаметром 1 mm, расположенной по оси достаточно тонкой металлической трубки, переходит на дно трубки, к центру которого припаяна проволока, и возвращается обратно по поверхности трубки. Размеры трубки даны на рисунке.

O2-5.29

Один и тот же ток течет по двум длинным параллельным проводам в противоположные стороны. Провода имеют круглые сечения радиусом $r = 2$ мм, а расстояние между ними $d = 2$ см. Найти индуктивность L_y единицы длины Этой системы, учитывая магнитное поле только вне проводов.

O2-5.30

На один сердечник намотаны две катушки. Индуктивности катушек в отдельности соответственно равны $L_1 = 0,5$Г и $L_2 = 0,7$Г. Чему равна взаимная индуктивность M? Рассеяния магнитного поля нет.

O2-5.31

Внутрь тонкого воздушного соленоида вставлена маленькая плоская катушечка с числом витков $n = 40$ и площадью витка 38 $S = 10$ см^2, по обмотке которой течет ток $= 1$ А. Длина соленоида $l = 50$ см, число витков $N = 10000$. Определить магнитный поток, который посылает поле катушечки через обмотку соленоида.

Указание. Использовать теорему о равенстве взаимных индуктивностей (теорему взаимности).

O2-5.32

Найти поток индукции магнитного поля, создаваемого квадратной рамкой со стороной a, по которой течет ток , через полуплоскость, граница которой расположена на расстоянии b от одной из сторон рамки (рис. 72).

O2-5.33

Вычислить коэффициент взаимоиндукции M между катушкой, намотанной на тор прямоугольного сечения, и бесконечным прямолинейным проводом, идущим по оси тора. Длина стороны поперечного сечения тора, параллельной проводу - a, перпендикулярной к нему - b, радиус внутренней поверхности тора R, число витков катушки N.

O2-5.34

В длинном соленоиде с плотностью намотки n [витков/см] вдали от его концов расположен намагниченный стержень, имеющий магнитный момент $\boldsymbol{M}$, ориентированный вдоль оси соленоида. Размер стержня мал по сравнению с диаметром обмотки соленоида. Найти магнитный поток, пронизывающий соленоид.

O2-5.35

На поверхность кругового тора прямоугольного поперечного сечения с размерами $a = 17,2$ см и $b = 5$ см навита обмотка тонкой проволоки, содержащая $N = 1000$ витков. (На рис. 73 обмотка не показана.) На тор надета кольцевая катушка с числом витков $n = 100$, по обмотке которой течет ток $f = 1$ А. Внутренний радиус тора равен $R = 10$ см. Определить магнитный поток, который посылает магнитное поле катушки через обмотку тора.

O2-5.36

Внутри длинной катушки-соленоида длиной l, площадью сечения S и плотностью намотки n расположена небольшая катушка с площадью витков σ и полным числом витков N (рис. 74). Обе катушки соединены последовательно. Как изменяется индуктивность L такой системы в зависимости от угла θ между осями катушек? Индуктивность меньшей катушки равна L_0.

O2-5.37

Внутри длинной катушки-соленоида индуктивностью L_0 расположен соосно другой соленоид меньших размеров, все линейные размеры которого в β раз меньше линейных размеров большого соленоида (подобные катушки). Катушки соединены последовательно. Найти индуктивность такой системы. Число витков обоих соленоидов одинаково.

5. SOLUTIONS Магнитное поле. Закон Био-Савара-Лапласа. Теорема о циркуляции в вакууме. Индуктивность проводников. Теорема взаимности

5.25

$\rho(r,z) = \frac{V}{2\pi d^3} z$; $\quad Q = \frac{VR^2}{4d}$; $\quad B(r) = \frac{8\pi}{3c}\frac{V}{d}\lambda_0\sqrt{Rr}$.

5.26

$\Phi = \frac{\pi^2 R_0^2}{cR} = \frac{\pi^2 R_0}{10c}$.

5.27

$L = \frac{1}{2}\left(1 + 4\ln\frac{R}{r}\right)$ (СГСЭ); $L = \frac{\mu_0}{8\pi}\left(1 + 4\ln\frac{R}{r}\right)$ (СИ).

5.28

$L = 0,24 \cdot 10^{-6}$Г.

Указание. Индукция магнитного поля B внутри трубки на расстоянии r от оси $B = 2\mathscr{I}/(cr)$ (краевыми эффектами пренебрегаем). Вне трубки магнитного поля нет. Поэтому поток через радиальную перегородку $\Phi = \frac{2\mathscr{I}l}{c}\int_{r_0}^{r_1}\frac{dr}{r}$, где l - длина трубки, r_0 - радиус провода, r_1 - внутренний радиус трубки. На единицу длины имеем $L/l = 2\ln(r_1/r_0) \approx 6$, откуда $L = 240$ cm.

5.29

$L \approx 4l\ln\left(\frac{d}{r} - 1\right) \approx 8,79l[\text{ cm}]$; $\quad L_\text{у} \approx 8,79 = 8,79 \cdot 10^{-7}$Г/m.

5.30

$M = \sqrt{L_1 L_2} = 0,6$Г.

5.31

$\Phi_{21} = \frac{4\pi N n S \mathscr{E}}{lc} = 10^5 \text{М}\kappa\text{с} = 10^{-3}$ Вσ.

5.32

$\Phi = \frac{2a\mathscr{E}}{c} \ln\left(1 + \frac{a}{b}\right)$.

5.33

$M = 2aN \ln\left(1 + \frac{b}{R}\right)$.

5.34

$\Phi = 4\pi n \not\asymp$.

5.35

$\Phi_{21} = \frac{2Nnb}{c} \ln\left(1 + \frac{a}{R}\right) \approx 10^5 \text{М}\kappa\text{с} = 10^{-3}$ Вσ.

5.36

$L = L_0 + L_1 + 2M = L_0 + 4\pi n^2 lS + 8\pi n\sigma N \cos\theta$.

5.37

$L = L_0 \left(1 + \frac{1}{\beta} + \frac{2}{\beta^2}\right)$.

14.1.20 Problems about Magnetic Field in Matter

O2-6.1.(1 min) Ток в соленоиде по нужной индукции

Какой ток J нужно пустить по длинному и тонкому однослойному соленоиду с плотностью намотки n [витков/см], чтобы индукция B была равна индукции постоянного магнита тех же размеров? Намагниченность I постоянна и направлена по оси.

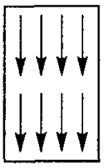
(??? заготовил бы формулы для соленоида - сделал бы сразу задачу. а так не готов, и тормоза.)

6.1

$g = \frac{cI}{n}$.

O2-6.2 Плотность зарядов в бруске с параллельной полю намагниченностью

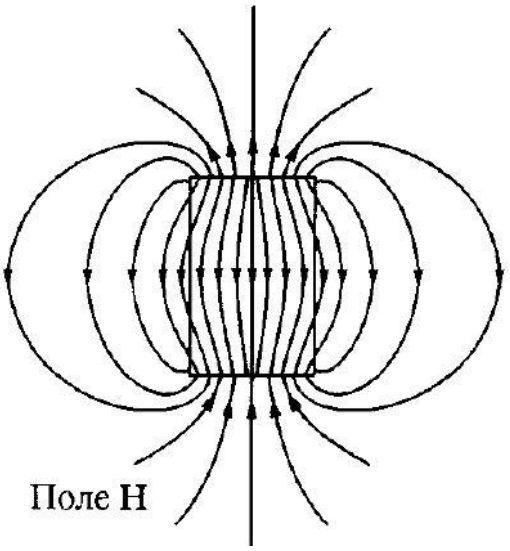
Намагниченность I прямоугольного бруска одинакова во всех точках бруска и направлена вдоль его оси.



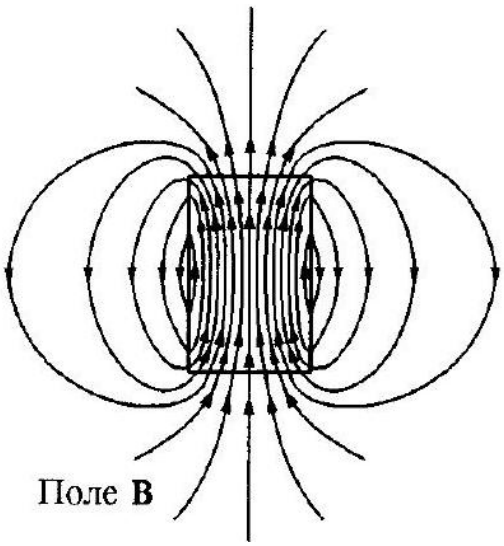
Найти поверхностную плотность σ «магнитных зарядов» на торцах бруска и соотношение между B и H внутри бруска. Начертите картину полей B и H внутри и вне бруска (качественно).

6.2

Внешние поля $\mathbf{B}$ и $\mathbf{H}$ совпадают. Поле $\mathbf{B}$ непрерывно на границах, а поле $\mathbf{H}$ внутри определяется соотношением $\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{I}$ (рис. 399). Если по



a



6

Рис. 399

аналогии с электрическим полем ввести связанные «магнитные заряды», поверхностная плотность которых на торцах бруска равна σ, то после построения этой модели получится аналогичное электростатике соотношение $\sigma = I$.

О2-6.3 Поля от ферромагнитной пластины при перпендикулярной плоскости намагниченности

Бесконечная плоская пластина изготовлена из однородного намагниченного ферромагнетика, причем вектор намагниченности I перпендикулярен плоскости пластины. Найти поля B и H внутри и вне пластины.

6.3

Внутри пластины $\mathbf{B} = \mathbf{0}; \mathbf{H} = -4\pi\mathbf{I}$. Вне пластины $\mathbf{B} = \mathbf{H} = \mathbf{0}$.

O2-6.4 Поля от ферромагнитной пластины при намагниченности в плоскости пластины

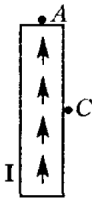
Бесконечная плоская пластина изготовлена из однородного намагниченного ферромагнетика, причем вектор намагниченности I параллелен плоскости пластины. Найти поля B и H внутри и вне пластины.

6.4

Внутри пластины $\mathbf{B} = 4\pi\mathbf{I}; \mathbf{H} = \mathbf{0}$. Вне пластины $\mathbf{B} = \mathbf{H} = \mathbf{0}$.

O2-6.5.(2 min) Магнитное поле в простейшем магните (??)

Имеется тонкий длинный постоянный магнит длиной $2l$ и радиусом r, намагниченность которого I=const.



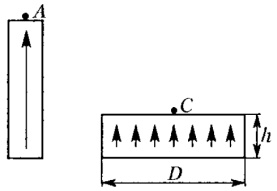
Начертить качественную картину линий $\mathbf{H}$ и $\mathbf{B}$. Найти индукцию в точке A. Во сколько раз она больше, чем в точке C?

6.5

$B_A = 2\pi I, \frac{B_A}{B_C} = \left(\frac{l}{r}\right)^2$. Картина полей B и H представлена в решении задачи 6.2.

O2-6.6. Индукция в точке по индукции похожего магнита в известной точке

Длинный цилиндр изготовлен из материала с замороженной однородной намагниченностью, направленной по его оси.



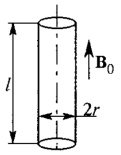
Индукция в точке A оказалась равной $B_A = 10^3$ Гс. Найти (приближенно) индукцию B_C вблизи конца короткого цилиндра, изготовленного из того же материала, если $h = 5 \cdot 10^{-2} D$.

6.6

$B_C = B_A \frac{2h}{D} = 100$Гс.

О2-6.7. Сравнение индукции от бесконечного и конечного стержней

Стержень из магнитного материала ($\mu \gg 1$), имеющий форму цилиндра радиусом r, помещен во внешнее однородное магнитное поле B_0, направленное вдоль его оси.



В бесконечно длинном цилиндре индукция B, как известно, была бы равна μB_0. Оценить, при какой минимальной длине l индукция в центре цилиндра отличается от этого значения не более, чем на 1%.

6.7

$l \geqslant 14,1r\sqrt{\frac{\mu-1}{\mu}} \approx 14r.$

8-14

6.8

$l \leqslant 10^{-2}\,\frac{2\mu r}{\mu-1} \approx 0,02r.$

6.9

1) $\Phi_H = \oint_s (\mathbf{H}d\mathbf{s}) = \frac{\mu-1}{\mu}\pi R^2 B_0 \cos\theta$. Поток вектора $\mathbf{B}$ через поверхность сферы, конечно, равен нулю.
2) $\oint_l (\mathbf{B}d\mathbf{l}) = (1-\mu) l B_0 \sin\theta$.

6.10

$\Phi = \frac{4Na^2\mu\mathscr{F}}{cD} = 32000\text{М}.$

6.11

$\Phi = \frac{4\pi Na^2\mu\mathscr{I}}{c(\pi D+(\mu-1)d)} \approx 24300\text{Мгс}.$

6.12

$B = \frac{\pi\mu^9 N}{cl\left[1+\frac{3}{8}\frac{d}{l}(\mu-1)\right]}.$

6.13

$B = \frac{4\pi N\mu_1\mu_2}{c\left[2d\mu_1\mu_2+\left(\frac{L}{2}-d\right)(\mu_1+\mu_2)\right]}.$

6.14

$B = I_0\frac{\left(4\pi-\frac{2d}{R}\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{2d}{R}\right)^2}} \approx 5390$ Гс, где $R = \frac{r_1+r_2}{2} = 2\text{с}.$

О2-6.15 Минимальный ток для насыщения намагниченности тороидальной обмотки

Тонкий сердечник тороидальной катушки длиной l сделан из ферромагнитного материала. Минимальная напряженность магнитного поля, при которой намагниченность материала достигает насыщения ($I = I_{\text{нас}}$), равна $H = H_{\text{нас}}$. Число витков обмотки равно N.

Определить минимальный ток $\mathcal{I}_0$, который должен течь по обмотке, чтобы намагниченность сердечника достигла насыщения. Какой толщины d должен быть сделан воздушный зазор в сердечнике, чтобы нс возникало насыщения намагниченности, если по обмотке течет ток $J > J_0$?

6.15

$\mathscr{G} = \frac{cl}{4\pi N} H_{\text{нас}}$; $\quad d \geqslant \frac{N}{cI_{\text{нас}}}(-\mathscr{G}0)$.

МФТИ-маг-вступ-2021-dem.? Согнутый разрезанный стержень с магнитом внутри

Тонкий стержень согнут в кольцо радиуса R. Магнитная проницаемость стержня меняется вдоль его длины по закону $\mu(x) = \mu_s/(1 + a\cos(x/R)), \alpha < 1, \mu_s \ll 1$ Кольцо разрезано по диаметру, половинки раздвинуты на расстояние L, в один из зазоров вставлен постоянный магнит с намагниченностью J. Поперечные сечения магнита и стержня одинаковы. Найдите поле во втором зазоре.

Solution (??)

все силовые линии пойдут внутри (???) так как проницаемость большая.
Есть теорема о циркуляции МП:
(чуть что - её просто используем и всё)
(черт, какая там связь с уравнениями Максвелла??)

$$0 = \oint \vec{H}\vec{d} = (B - 4\pi J) \cdot L + BL + \int\limits_0^{2\pi R} \frac{Bdx}{\mu(x)}$$

помним, что тут именно H, которая находится вычитанием из B намагниченности, а именно:

$$H = B - 4\pi J$$

слева ноль, потому что нет токов.
и подставляя $\mu(x)$, интегрируя, получим, что косинус удалится, так что останется простое соотношение:

$$0 = 2BL - 4\pi JL + 2\pi R\frac{B}{\mu_s}$$

от сюда выражаем B, вот и нашли поле в зазоре.

16-19

6.16

1) $\mathscr{J}_0 = \frac{c}{4\pi NL}\left(H_{\text{нас}} + 4\pi I_{\text{нас}}\ \frac{l}{L}\right)$;
2) $B = \frac{4\pi N}{cL} + 4\pi I_{\text{нас}}\ \left(1 - \frac{l}{L}\right)$.

6.17

$B \approx 15\text{Г}$.

6.18

$B = \frac{2\pi 1L}{L + \frac{\pi R}{\mu}}$.

6.19

$B_2 = B_1 \frac{\left(l+\frac{\pi R}{\mu}\right)r^2}{16R^3}$.

О2-6.20* Разрезанный сердечник с вставленным веществом (????)

Тороидальный сердечник с магнитной проницаемостью $\mu \gg 1$ разрезан по диаметру и раздвинут на расстояние $l \ll r$. Радиус тора R, радиус сердечника $r(r \ll R)$. Один из зазоров тора замкнут постоянным магнитом, вектор намагниченности которого перпендикулярен плоскости разреза (рис. 88). Во сколько раз изменится индукция магнитного поля в центре O тора после того, как второй зазор заполнят веществом с той же магнитной проницаемостью μ?

6.20

: $\frac{B_1}{B_2} = 1 + \frac{l\mu}{2\pi R+l} \approx 1 + \frac{l\mu}{2\pi R}$.

Решение. 1) Пусть магнитик с намагниченностью I вставлен в левый зазор, а правый зазор пуст. Запишем теорему о циркуляции для вектора $\mathbf{H}$:

$$\oint(\mathbf{H}d\mathbf{l}) = (B - 4\pi I)l + \frac{B}{\mu}\cdot 2\pi R + Bl = 0$$

откуда поле в зазоре или металле сердечника

$$B = \frac{2\pi Il}{l + \frac{\pi R}{\mu}}$$

Правый зазор пуст. Поэтому на этом зазоре и рассеивается магнитный поток (рис. 400). Зазор является источником магнитного поля. И левый зазор тоже

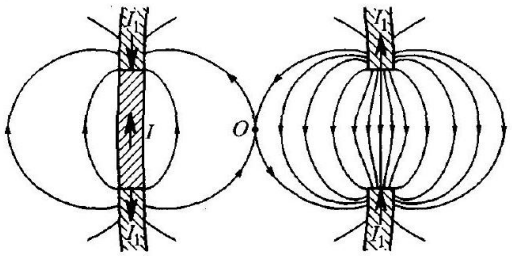


Рис. 400

есть источник магнитного поля (рис. 400). Однако левый зазор заполнен магнитом с намагниченностью I. Намагниченность материала в сердечнике $\mathbf{I_1}$. Поэтому поле в центре O обусловлено магнитным диполем с намагниченностью $\mathbf{I_1}$ (правый зазор) и магнитным диполем с намагниченностью $(\mathbf{I} - \mathbf{I_1})$ (левый зазор). В конечном счете поле B_1 в точке O определяется магнитным моментом $\mathfrak{M}$ магнитика $\mathfrak{M} = IV$, где V - объем магнитика. Поле магнитного диполя в вакууме в перпендикулярном направлении равно

$$B_1 = \frac{m}{R^3} = \frac{IV}{R^3}.$$

2) Рассмотрим второй случай. Правый зазор заполнен материалом сердечника, т. е. теперь один из источников поля для точки O отсутствует (нет правого зазора). С помощью теоремы о циркуляции вычислим поле в сердечнике

$$B' = \frac{4\pi Il}{l + \frac{2\pi R+l}{\mu}}.$$

Найдем намагниченность I_1' материала сердечника

$$I_1' = \frac{B' - H'}{4\pi} = \frac{B' - B'/\mu}{4\pi} \approx \frac{B'}{4\pi}, \quad (\mu \gg 1).$$

Поле B_2 в точке O определяется рассеянием на левом зазоре, т. е. разностью намагниченностей

$$I - I' = I - \frac{4\pi Il}{4\pi\left(l + \frac{2\pi R+l}{\mu}\right)} = I\frac{2\pi R + l}{l\mu + 2\pi R + l}$$

Найдем это поле: $B_2 = \frac{m'}{R^3} = \frac{(I-I_1')V}{R^3}$. Искомое отношение полей

$$\frac{B_1}{B_2} = \frac{I}{I - I_1'} = \frac{l\mu + 2\pi R + l}{2\pi R + l} \approx 1 + \frac{l\mu}{2\pi R}.$$

О2-6.21. Создание электромагнита намотками

Требуется построить электромагнит, который создает в зазоре магнитную индукцию $B = 10^4$ Гс. Длина железного сердечника $l = 140$ см, ширина воздушного зазора $a = 1$ см, диаметр сердечника $d = 6$ см. Какое наименьшее число витков должна иметь обмотка, если используется медный провод сечением $S = 1$ мм ^{2}, по которому можно пропустить ток, не превышающий $g_{\max} = 3$ А? Оценить напряжение V, которое нужно подавать на обмотку для получения максимального поля. Магнитную проницаемость железа принять равной $\mu = 10^3$. Удельном сопротивление меди $\rho = 1,7 \cdot 10^{-8}$ Ом $\cdot$ м.

6.21

$N = \frac{cB(l+\mu a)}{4\pi\mu\mathscr{I}_{\max}} \approx 3000$ витков; $V = \frac{\mathscr{G}_{\max} N\pi d\rho}{S} = 25$ В.

О2-6.22.

Стальной шарик намагничивается до насыщения во внешнем поле, после чего поле выключается. Оценить остаточную намагниченность I шарика, если B и H связаны уравнением $B = B_0\,(1 + H/H_{\text{К}})$, для данного сорта стали $B_0 = 10^4$ Гс, $H_{\text{К}} = 4 \cdot 10^3$ А/м. Коэффициент размагничивания шара (размагничивающий фактор) $\beta = 4\pi/3$.

6.22

$I = \frac{B_0 H_{\text{к}}}{\beta B_0 + (4\pi - \beta) H_{\text{К}}} \approx 11,9$ Гс. Под коэффициентом размагничивания β понимают (см. Д. В. Сивухин, т. III, 61) коэффициент в соотношении $H_0 - H = \beta I$, где H_0 - внешнее поле, которое в

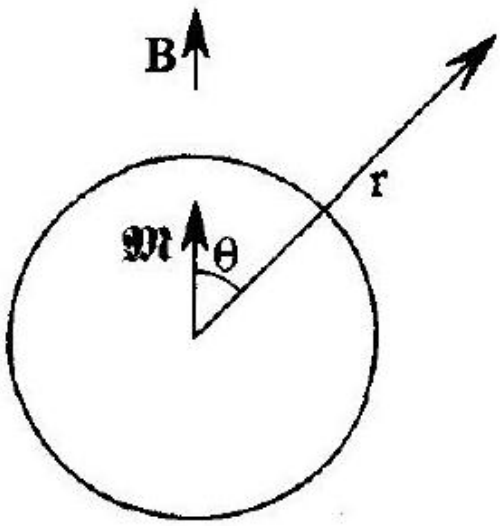


Рис. 401 нашем случае выключено, т. е. равно нулю.

14.1.21 Problems about Magnetism of Typical Substances

(это же в конд средах будет и в записи про магнетизм, пока тут)

Spaldin.2.1(5 min) Units and magnetic moment

A cylindrical bar magnet 10 inches long and 1 inch in diameter has a magnetic moment of 10000 erg/ Oe.
(a) What is its magnetic moment in SI units?
(b) What is its magnetization in both cgs and SI units?
(c) What current would have to be passed through a 100-turn solenoid of the same dimensions to give it the same magnetic moment?

Solution

The solution is obvious, one just needs to be careful. Still, it is a nice practice, to do it at least once.

2.1(a)

$$1 \text{ erg} = 10^{-7} \text{ J}, \qquad 1 \text{ Oe} = 10^{-4} \text{ T},$$

$$10000\text{erg/ Oe} = 10000 \cdot 10^{-7} \text{ J/ Oe} = \frac{10000 \cdot 10^{-7}}{10^{-4}} \text{ J/T} = 10 \text{ J/T}$$

2.1(b) $1 \text{ in} = 2.54 \text{ cm} = 2.54{\cdot}10^{-2}$ m. The volume of the cylinder is $\pi r^2 l = 128.704 \text{ cm}^3 = 1.28704{\cdot}10^{-4} \text{ m}^3$.

$$M_{\text{cgs}} := \frac{\boldsymbol{m}}{V} = \frac{10000\text{erg/ Oe}}{128.704 \text{ cm}^3} = 77.70\text{emu/cm}^3$$

since 1erg/ Oe = 1 emu.

$$M_{\text{SI}} = \frac{m}{V} = \frac{10 \text{ J T}^{-1}}{1.28704 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3} = 77.7 \cdot 10^3 \frac{\text{kgm}^2 \text{ s}^{-2}}{\text{m}^3 \text{ kg s}^{-2} \text{ A}^{-1}} = 77.7 \cdot 10^3 \text{ A/m}$$

2.1(c) For a current loop, the magnetic moment $\boldsymbol{m} = IA$. For a solenoid with N loops, the magnetic moment is NIA. In SI units, $10 \text{ J/T} = 100 \cdot I \cdot \pi \cdot (0.0127)^2 \text{ m}^2$, so

$$I = 197.3 \text{ J/} \left(\text{Tm}^2\right) = 197.3 \text{ A}$$

(??? а что насчет того, что там расстояние разное от точки в центре до разного витка с током??? пренебрегаем? я пока забыл точную формулу, когда-то мб додумаю это)

Spaldin.3.1(2 min) Magnetic moment

Calculate the allowed values of the magnetic moment along the field axis of an atom which has $J = 1$ and $g = 2$.

Solution

The solution is obvious, one just needs to be careful. Still, it is a nice practice, to do it at least once.

$$\mu_{\text{atom}} = g\sqrt{J(J+1)}\mu_{\text{B}},$$
$$\mu_{\text{z}} = gM_J\mu_{\text{B}}.$$

For $J = 1$, $\sqrt{J(J+1)} = \sqrt{2}$ and $M_J = -1, 0$, or 1, so

$$\mu_{\text{atom}} = 2\sqrt{2}\mu_{\text{B}},$$

$$\mu_{\text{z}} \in \{-2\mu_{\text{B}}, 0, +2\mu_{\text{B}}\}.$$

Spaldin.3.2(5 min) Magnetism of iron

Calculate the electronic structure and magnetic properties of a transition-metal ion: Fe^{2+}.

(a) What is the electronic configuration of an Fe^{2+} ion? (Note that the transition metals give up their 4 s electrons before their 3 d electrons on ionization.)

(b) Use Hund's rules to determine the values of S, L, and J in the ground state of an Fe^{2+} ion.

(c) Calculate the Landé g-factor.

(d) Calculate the total magnetic moment of an Fe^{2+} ion and the magnetic moment along the field direction.

(e) Try calculating the total magnetic moment using the value of S determined in (b), but assuming that $L = 0$ (so $J = S$). In fact the measured value is $5.4\mu_{\text{B}}$.

Solution to (a)

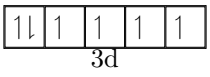
$$\text{Fe}: \qquad (1\text{ s})^2(2\text{ s})^2(2\text{p})^6(3\text{ s})^2(3\text{p})^6(4\text{ s})^2(3\text{ d})^6.$$

Because the transition elements give up their 4 s electrons before their 3 d electrons on ionization:

$$\text{Fe}^{2+}: \qquad (1\text{ s})^2(2\text{ s})^2(2\text{p})^6(3\text{ s})^2(3\text{p})^6(3\text{ d})^6$$

Solution to (b)

Using Hund's first rule we maximize S and L:



The total spin $S = 4 \cdot \frac{1}{2} = 2$.

m_l has values of $-2, -1, 0, 1$, and 2. Since $M_L \equiv -L, -L+1, \ldots, 0, \ldots, L-1, L$, the total orbital quantum number, L=2.

(! note that me don't have $L = \frac{1}{2} \cdot 2$ or $L = \sqrt{L(L+1)}$! because we need to use the logic above.)

Finally, from Hund's third rule, because the shell is more than half full, $J = L + S = 4$

Solution to (c)

$$g = 1 + \frac{J(J+1) + S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)} = 1 + \frac{20 + 6 - 6}{40} = 1.5.$$

Note that, since $S = 2$ and $L = 2$, the g value is exactly halfway between that for the $S = 0$ case ($g = 1$) and the spin-only case ($g = 2$).

Solution to (d)

$$\mu = g\sqrt{J(J+1)}\mu_{\mathrm{B}} = 1.5\sqrt{4 \cdot 5} = 6.7\mu_{\mathrm{B}}.$$

Since $J = 4, M_J = -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4$, the $\mu_z \equiv gM_J\mu_{\mathrm{B}}$ can take the values $6\mu_{\mathrm{B}}$, $4.5\mu_{\mathrm{B}}, 3\mu_{\mathrm{B}}, 1.5\mu_{\mathrm{B}}, 0, -1.5\mu_{\mathrm{B}}, -3\mu_{\mathrm{B}}, -4.5\mu_{\mathrm{B}}$, or $-6\mu_{\mathrm{B}}$.

Solution to (e)

If $L = 0$, then $J = S = 2$, $g = 2$ and

$$\mu = 2\sqrt{6}\mu_{\mathrm{B}} = 4.9\mu_{\mathrm{B}}.$$

This is in good agreement with the measured value of $5.4\mu_{\mathrm{B}}$, whereas the moment we calculated using the total angular momentum ($6.7\mu_{\mathrm{B}}$) does not agree well with the experimental value. This is a manifestation of a phenomenon known as quenching of the orbital angular momentum (???).

Spaldin.4.1(5 min) Susceptibility of a carbon

The value of $\sqrt{\langle r^2 \rangle_{\mathrm{av}}}$ for carbon is known from X-ray diffraction measurements to be around 0.7 Å. The density is 2220 kg/m^3. Calculate the value of susceptibility, give your answer in SI and cgs units.

The measured value of susceptibility is $\xi_{\mathrm{exper}} = -13.82 \cdot 10^{-6}$ per unit volume. The agreement for carbon is better than that for most diamagnets. Comment on possible sources of error in the derivation.

Solution

The solution is obvious, one just needs to be careful. Still, it is a nice practice, to do it at least once.

$$\chi_{\mathrm{SI}} = -\frac{N\mu_0 Ze^2}{6m_{\mathrm{e}}} \left\langle r^2 \right\rangle_{\mathrm{av}}.$$

Here $N = N_{\mathrm{A}}\rho/A$, where N_{A} is Avogadro's number (the number of atoms per mole), ρ is the density, and A is the molar mass, μ_0 is the permeability of free space, Z is the number of electrons per atom, e is the electronic charge, m_{e} is the mass of the electron, and $\left\langle r^2 \right\rangle_{\mathrm{av}}$ is the average distance squared of the electrons from the nucleus. For carbon, $Z = 6$ and $A = 12$ g/mol, so

$$\chi = -\frac{6.022 \cdot 10^{23}\ \mathrm{mol}^{-1} \cdot 2220\ \mathrm{kg\ m}^{-3}}{12 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg\ mol}^{-1}} \cdot \frac{1.256 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{H\ A}^{-2} \cdot 6\left(1.60 \cdot 10^{-19}\right)^2 \mathrm{C}^2 \cdot \left(0.7 \cdot 10^{-10}\right)^2\ \mathrm{m}^2}{6 \cdot 9.109 \cdot 10^{-31}\ \mathrm{kg}}$$
$$= -19.33 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{m}^{-3}\mathrm{HA}^{-2}\ \mathrm{C}^2\ \mathrm{m}^2\ \mathrm{kg}^{-1} = -19.33 \cdot 10^{-6}.$$

This is reasonably close to the experimental value of $-13.82 \cdot 10^{-6}$.

Now, in cgs units

$$\chi_{\text{cgs}} = -\frac{NZe^2}{6m_e c^2}\left\langle r^2\right\rangle_{\text{av}} = -\frac{6.022\cdot 10^{23}\ \text{mol}^{-1}\cdot 2.22\ \text{g cm}^{-3}}{12\ \text{g mol}^{-1}}\frac{6\cdot\left(4.8\cdot 10^{-10}\right)^2\ \text{esu}^2\cdot\left(0.7\cdot 10^{-8}\right)^2\ \text{cm}^2}{6\cdot 9.109\cdot 10^{-28}\ \text{g}\cdot\left(3\cdot 10^{10}\right)^2\ \text{cm s}^{-2}}$$
$$= -1.5\cdot 10^{-6}\text{emu}/\left(\text{cm}^3\ \text{Oe}\right).$$

(??? don't know, how to get here "Oe" at the end, not so interesting)

In general,

$$\chi_{\text{cgs}} = \frac{\chi_{\text{SI}}}{4\pi}$$

For most materials, the value calculated using the classical Langevin model only shows order-of-magnitude agreement with experiment. Possible sources of the discrepancies between theory and experiment include the following:

- application of Lenz's law (which was determined for electrical circuits) on the atomic scale (???)
- difficulty in calculating or measuring $\left\langle r^2\right\rangle_{\text{av}}$; in particular, χ depends on the choice of origin for computing $\left\langle r^2\right\rangle_{\text{av}}$
- our assumption that the electrons are orbiting their nucleus; therefore, we expect a poor description of itinerant conduction electrons
- our assumption that the system is spherically symmetric.

(??? how can we know, that Carbon is a diamagnet? 1) from example in the problem statement, 2) from remembering magnetic periodic table, 3) maybe we can calculate by hunds rule its ground state(???? I'll think about it later maybe). What if we try to calculate paramagnetic contribution????)

Spaldin.5.1 Brillouin approaches Langevin

Show that the Brillouin function $B_J(\alpha)$ approaches the Langevin function as $J\to\infty$. What are the limits of the Brillouin function if (a) $J\to\frac{1}{2}$ and if (b) $\alpha\to 0$?

Solution

The solution is obvious, one just needs to be careful. Still, it is a nice practice, to do it at least once.

$$B_J(\alpha) := \frac{2J+1}{2J}\coth\left(\frac{2J+1}{2J}\alpha\right) - \frac{1}{2J}\coth\left(\frac{\alpha}{2J}\right)$$

As $J\to\infty$, $2J+1\to 2J$, $(2J+1)/2J\to 1$. with $\coth(x)\approx\frac{1}{x}+\frac{x}{3}-\cdots$, we have

$$-\frac{1}{2J}\coth\left(\frac{\alpha}{2J}\right)\approx -\frac{1}{2J}\frac{2J}{\alpha} - \frac{1}{2J}\frac{\alpha}{6J}\to -\frac{1}{\alpha}$$

$$B_J(\alpha)\overset{J\to\infty}{\to}\coth(\alpha)-\frac{1}{\alpha} = L(\alpha)$$

If $J\to\frac{1}{2}$, we have $(2J+1)/2J\to 2$, and $2J\to 1$. So, at $J=\frac{1}{2}$,

$$B_J(\alpha) = 2\coth(2\alpha)-\coth(\alpha) = 2\frac{e^{2\alpha}+e^{-2\alpha}}{e^{2\alpha}-e^{-2\alpha}} - \frac{e^{\alpha}+e^{-\alpha}}{e^{\alpha}-e^{-\alpha}} = \frac{e^{2\alpha}+e^{-2\alpha}-2}{\left(e^{\alpha}+e^{-\alpha}\right)\left(e^{\alpha}-e^{-\alpha}\right)} = \tanh(\alpha).$$

And if $\alpha\to 0$, second terms will give a result: $\coth[\frac{(2J+1)\alpha}{2J}]\to\frac{2J}{(2J+1)\alpha}+\frac{(2J+1)\alpha}{3\cdot 2J}$ and $\coth(\alpha/2J)\to\frac{2J}{\alpha}+\frac{\alpha}{3\cdot 2J}$, so

$$B_J(\alpha)\to\frac{2J+1}{2J}\cdot\frac{2J}{\alpha(2J+1)} - \frac{1}{2J}\cdot\frac{2J}{\alpha} + \left(\frac{2J+1}{2J}\right)^2\frac{\alpha}{3} - \left(\frac{1}{2J}\right)^2\frac{\alpha}{3} = \frac{\left[(2J+1)^2-1\right]\alpha}{12J^2} = \alpha\frac{(J+1)}{3J}.$$

Spaldin.5.2(5 min) Ideal gas susceptibility

Calculate the room-temperature paramagnetic susceptibility of an ideal gas, in which each atom has $J=1$ and $g=2$. (These are in fact the values of J and g for molecular oxygen. Remember the ideal gas law: $PV=nRT$.)

Solution

The solution is obvious, one just needs to understand correctly basic the formulas.

$$\chi = \frac{Ng^2 J(J+1)\mu_0 \mu_{\rm B}^2}{3k_{\rm B}T}.$$

Here N is a number atoms per m^3 and other values are known: $J = 1, g = 2, \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$H/m, $\mu_{\rm B} = 9.274 \cdot 10^{-24}$ J/T, $k_{\rm B} = 1.380662 \cdot 10^{-23}$ J/K, and $T = 273$ K:

$$\chi = \frac{N \cdot 8 \cdot 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot \left(9.274 \cdot 10^{-24}\right)^2}{3 \cdot 1.380662 \cdot 10^{-23} \cdot 273} \frac{\mathrm{Hm^{-1}\ J^2\ T^{-2}}}{\mathrm{J\ K^{-1}\ K}} = 7.6465 \cdot 10^{-32} N \frac{\mathrm{HJ}}{\mathrm{mT^2}} = 7.6465 \cdot 10^{-32}\ \mathrm{N\ m^3}.$$

Now, from $PV = nRT = NkT$, (n is the number of moles of atoms), with $P = 1$ atm $= 10^5$ N m^{-2}, $T = 273$ K, and the volume $V = 1$ m^3 we get the number of atoms per m^3:

$$N = \frac{PV \cdot N_{\rm A}}{RT} = \frac{10^5}{1.38 \cdot 10^{-23} \cdot 273} \frac{\mathrm{Nm^{-2}\ m^3\ mol^{-1}}}{\mathrm{J\ mol^{-1}\ K^{-1}\ K}} = 2.688 \cdot 10^{25}.$$

Finally,

$$\chi = 2.056 \cdot 10^{-6}.$$

(???? why can't we use $N = N_A \rho / A$ (????? maybe because we are not sure about A???))

Spaldin.5.3 Basic lattice spins

In this problem we will explore the properties of a model three-dimensional lattice of spins, each with spin $S = \frac{1}{2}$.

(a) What is the magnetic moment of each spin? What are the allowed values of the projection of the magnetic moment, $\boldsymbol{m}_i$, onto some chosen axis, say z?

(b) What are the possible values of the magnetic energy of each spin?

(c) Assuming that the spins are non-interacting, calculate the magnetization of the lattice of spins when a magnetic field, $\boldsymbol{H}$, is applied along the z axis.

(d) For a given value of field, $\boldsymbol{H}$, how does the magnetization, $\boldsymbol{M}$, depend on temperature? Explain the behavior of $\boldsymbol{M}$ for $T \to 0$. Taking the number of spins per unit volume to be $3.7 \cdot 10^{28}$ m^{-3}, calculate the numerical value of the saturation magnetization, $\boldsymbol{M}_{\rm s}$, at $T = 0$. Explain the behavior of $\boldsymbol{M}$ for $T \to \infty$.

(e) What does the relationship between $\boldsymbol{M}$ and $\boldsymbol{H}$ reduce to for weak fields ($\boldsymbol{H} \to 0$)? What is the expression for the susceptibility, χ, in this case, and how does it depend on temperature? Calculate the numerical value of χ at room temperature.

(f) Comment on the results which you have obtained for this spin system. What kind of magnetic behavior (antiferromagnetic, paramagnetic, diamagnetic, etc.) is displayed by this model system? Justify your conclusion. How would we need to modify the model in order to describe ferromagnetic behavior?

Solution to (a)

$$\mu = g_{\rm e}\mu_{\rm B}\sqrt{S(S+1)}$$
$$\mu_z = g_{\rm e}\mu_{\rm B} m_s$$

When $S = 1/2$ and $g = 2$, we have $\mu = \sqrt{3}\mu_{\rm B}$ and $\mu_z = \pm\mu_{\rm B}$.

Solution to (b)

$$E = -\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{H},$$

the allowed magnetic energies are $\mp\mu_{\rm B}H$, $H = |\boldsymbol{H}|$.

Solution to (c)

$$Z = \Sigma_i e^{-E_i/k_{\rm B}T} = e^{\mu_{\rm B}H/k_{\rm B}T} + e^{-\mu_{\rm B}H/k_{\rm B}T} = 2\cosh\left(\mu_{\rm B}H/k_{\rm B}T\right).$$
$$\langle \boldsymbol{M} \rangle = \frac{1}{Z}\Sigma_i \boldsymbol{m}_i e^{-E_i/k_{\rm B}T} = \frac{\mu_{\rm B}}{Z}\left(e^{\mu_{\rm B}H/k_{\rm B}T} - e^{-\mu_{\rm B}H/k_{\rm B}T}\right) = \mu_{\rm B}\tanh\left(\frac{\mu_{\rm B}H}{k_{\rm B}T}\right).$$

The total magnetization:

$$\boldsymbol{M} = n\mu_{\rm B}\tanh\left(\frac{\mu_{\rm B}H}{k_{\rm B}T}\right),$$

where n is the number of spins per unit volume.

Solution to (d)

For a given field, the magnetization decreases from $\mu(T=0) = n\mu_\mathrm{B}$ to $\mu(T\to\infty) = 0$. For $n = 3.7\cdot 10^{28}$ m^{-3}:

$$\boldsymbol{M}_\mathrm{s}(T=0) = 3.7\cdot 10^{28}\ \mathrm{m}^{-3}\cdot 9.274\cdot 10^{-24}\ \mathrm{J\ T}^{-1} = 3.43\cdot 10^{5}\ \mathrm{A/m}.$$

At zero temperature the spins are perfectly aligned by an external field because there is no thermal energy available to randomize the spin directions. At infinitely high temperature there is enough thermal energy to randomize the spin directions (giving a net magnetization of zero) even in the presence of an external magnetic field.

Solution to (e)

As $x\to 0, \tanh(x)\to x$; so as $\boldsymbol{H}\to 0, \tanh\left(\mu_\mathrm{B}H/k_\mathrm{B}T\right)\to \mu_\mathrm{B}H/k_\mathrm{B}T$, $M\to n\mu_\mathrm{B}^2 H/k_\mathrm{B}T$.

$$\chi = \frac{\boldsymbol{M}}{\boldsymbol{H}} = \frac{n\mu_\mathrm{B}^2}{k_\mathrm{B}}\frac{1}{T},$$

i.e. the susceptibility is $\sim 1/T$, and diverges only as $T\to 0$. This is Curie's law. At room temperature $T = 300$ K,

$$\chi = \frac{3.7\cdot 10^{28}\ \mathrm{m}^{-3}\cdot\left(9.274\cdot 10^{-24}\right)^2\ \mathrm{J^2\ T^{-2}}}{1.381\cdot 10^{-23}\ \mathrm{J\ K^{-1}}\cdot 300\ \mathrm{K}} = 768.11\frac{\mathrm{J^3\ T^{-2}}}{\mathrm{m^3}}$$

or, multiplying by μ_0 to convert to dimensionless units, $\chi = 9.65\cdot 10^{-4}$.

Solution to (f)

The behavior described by this non-interacting spin system is paramagnetic. The system shows Curie-law behavior, and there is no phase transition to a magnetically ordered state. In order to describe ferromagnetic behavior we would have to add interactions to our model. The interactions would have to be such that the energy of the system was lower when neighboring spins were aligned parallel to each other, compared to when they were not aligned at all, or had some other (for example, antiparallel) alignment.

(??? maybe later I'll add a better answer)

Spaldin.6.1(3 min) Molecular field for nickel

The Curie temperature of nickel, $T_\mathrm{C} = 628.3$ K, and the saturation magnetization is $0.6\mu_\mathrm{B}$ per atom. Calculate the molecular field according to the Weiss theory.

Solution

The solution is obvious, one just needs to understand Curie-Wiess therory.

(???? я что-то устал уже, не особо въезжаю, почему так???)

Equating, at the origin, the slope of the magnetization described by the Langevin function (which is $\frac{1}{3}\cdot \mathrm{Nm}$) with the slope of the straight line representing magnetization by the molecular field, gives

$$\frac{k_\mathrm{B}T_\mathrm{C}}{\boldsymbol{m}\gamma} = \frac{1}{3}\cdot N\boldsymbol{m}.$$

So, if the Curie temperature is known, then the molecular field constant can be extracted:

$$\gamma = \frac{3k_\mathrm{B}T_\mathrm{C}}{Nm^2}.$$

Similarly the Weiss molecular field $\boldsymbol{H}_\mathrm{W} = \gamma\boldsymbol{M} = \gamma N\boldsymbol{m} = 3k_\mathrm{B}T_\mathrm{C}/\boldsymbol{m}$. For Ni, the magnetic moment per atom $\boldsymbol{m} = 0.6\mu_\mathrm{B}$, and the Curie temperature $T_\mathrm{C} = 628.3$ K. Therefore

$$\boldsymbol{H}_\mathrm{W} = \frac{3k_\mathrm{B}T_\mathrm{C}}{\boldsymbol{m}} = \frac{3\cdot 1.380662\cdot 10^{-23}\ \mathrm{J\ K^{-1}}\cdot 628.3\ \mathrm{K}}{0.6\cdot 9.274\cdot 10^{-24}\ \mathrm{J\ T^{-1}}} = 4676.89\ \mathrm{T}.$$

This is a very large field!

Spaldin.1.3

A classical electron is moving in a circular orbit of radius 1Å $\left(1\text{Å} = 10^{-10}\text{ m}\right)$ with angular momentum $\hbar$Js.

(a) Calculate the field generated by the electron, at a distance of 3 Åfrom the center of the orbit, and along its axis.

(b) Calculate the magnetic dipole moment of the electron, giving your answer in SI and cgs units.

(c) Calculate the magnetic dipolar energy of the circulating electron when it is in the field generated by a second identical circulating electron at a distance of 3 Åaway along its axis. Assume that the magnetic moment of the first electron is aligned parallel to the field from the second electron.

Solution

1.3(a) We use the expression which we derived in Solution 1.2(a) above:

$$\boldsymbol{H}_{\text{axial}} = \frac{Ia^2}{2\left(a^2+x^2\right)^{3/2}},$$

with $a = 1\text{Å} = 10^{-10}$ m and $x = 3\text{Å} = 3\times10^{-10}$ m. To calculate the current, I, we use the fact that the angular momentum (which in general is given by $m_e va$) is $\hbar$Js. So

$$v = \frac{\hbar}{m_e a}\frac{\text{Js}}{\text{kgm}} = \frac{\hbar}{m_e a}\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

and the current is

$$\begin{aligned} I &= \frac{\text{charge}}{\text{time}} = \frac{e}{\text{distance / speed}} = e\frac{v}{2\pi a} = \frac{e}{2\pi a}\frac{\hbar}{m_e a} \\ &= 2.952\times10^{-4}\text{ A}. \end{aligned}$$

Then

$$\boldsymbol{H} = \frac{2.952\times10^{-4}\times\left(10^{-10}\right)^2}{2\left[\left(10^{-10}\right)^2+\left(3\times10^{-10}\right)^2\right]^{3/2}}\frac{\text{Am}^2}{\text{m}^3} = 46675.7\text{ A/m} = 586\text{Oe}.$$

1.3(b)

The magnetic dipole moment, m, is given by

$$\begin{aligned} \boldsymbol{m} = IA &= \frac{ev}{2\pi a}\pi a^2 = \frac{eva}{2} = \frac{a}{2}\frac{e\hbar}{m_e a} = \frac{e\hbar}{2m_e} \\ &= 9.274\times10^{-24}\text{ A m}^2\text{ or J/T}. \end{aligned}$$

This number is the Bohr magneton, μ_B, and is the natural unit of magnetic moment. In cgs units, the Bohr magneton is equal to $e\hbar/2m_e c = 0.927\times10^{-20}$erg/Oe. (Remember that the value of the elementary charge, e, in cgs units is 4.80×10^{-10}esu, and the value of h is 6.62×10^{-27}ergs.)

1.3(c)

The magnetic dipolar energy is

$$\begin{aligned} E &= -\mu_0\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{H} \\ &= 1.256\times10^{-6}\text{ weber /(Am)}\times-9.274\times10^{-24}\text{Am}^2\times46675.7\text{ A/m} \\ &= -5.44\times10^{-25}\text{ J}. \end{aligned}$$

Note that this number is very small, so it is unlikely that the parallel alignment of magnetic dipole moments in ferromagnetic materials results from a magnetic dipolar interaction.

Spaldin.6.2

For an circulating electron in a 1Åradius orbit, at a distance of 3Åfrom the center of the orbit we can calculate its field and magnetic moment. These values are typical for an atom in a transition-metal crystal.

(a) To what Curie temperature would this field correspond?

(b) We can also calculate the dipole moment of the electron. To what extent would your calculated magnetic moment be affected by an external field of, say, 50Oe?

(Use $E = -\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{H}$ and compare the result with the thermal energy, $k_B T$, at room temperature.)

Solution

6.2(a) In Chapter 1, we calculated that the field generated by such an electron was 46675.7 A/m, and that the magnetic moment was μ_B. Assuming a "classical" electron, so that $T_C = Nm^2\gamma/3k_B$, and taking $\gamma = \boldsymbol{H}/\boldsymbol{M} = \boldsymbol{H}/N\boldsymbol{m}$,

$$\begin{aligned} T_C &= \frac{mH}{3k_B} \\ &= \frac{9.274 \cdot 10^{-24}\ \text{J T}^{-1} \cdot 46675.7\ \text{A m}^{-1}}{3 \cdot 1.380662 \cdot 10^{-23}\ \text{J K}^{-1}} \\ &= 10450.794\ \text{A K/(Tm)} \\ &= 0.0131\ \text{K} \end{aligned}$$

(multiplying by $\mu_0 = 1.25 \cdot 10^{-6}\text{Hm}^{-1}$, to convert to kelvin). Note that this is a very small number!

6.2(b) In a field of 50 Oe the magnetic dipole energy would be

$$\begin{aligned} E &= -\mu_0 \boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{H} \\ &= -9.274 \cdot 10^{-24}\ \text{J T}^{-1} \cdot \left(50 \cdot \frac{1000}{4\pi}\right) \text{Am}^{-1} \cdot 1.25 \cdot 10^{-6}\text{Hm}^{-1} \\ &= -4.637 \cdot 10^{-26}\ \text{J}. \end{aligned}$$

At 298 K the thermal energy $k_BT = 4.11 \cdot 10^{-21}$ J, which is five orders of magnitude larger than the magnetic energy! Therefore a field of around 50 Oe would have no effect on aligning electronic magnetic moments at room temperature. We can conclude that the effective internal "field" which aligns the magnetic moments of ferromagnets spontaneously is much larger than 50 Oe.

Spaldin.6.3 Review question

(a) Using Ampère's circuital law or the Biot-Savart law, make an order-of-magnitude estimate of the size of the magnetic field generated by the valence electrons in a Ni atom at a distance corresponding to the Ni − Ni spacing in a solid sample of Ni. (Assume that the field arises from the current generated by the circulation of unpaired electrons around the nucleus.)

(b) Use Hund's rules to determine the values of S, L, and J for an isolated Ni atom with electronic structure $(4\text{ s})^2(3\text{ d})^8$. What are the allowed values of the magnetic moment along the field axis for a Ni atom?

(c) Use your answers to parts (a) and (b) to estimate the difference in magnetic dipole energy between Ni atoms aligned parallel and antiparallel to each other.

(d) Given that the Curie temperature of Ni is 358°C, how does the magnetic dipole energy which you calculated in (c) compare with the actual strength of the ferromagnetic coupling between Ni atoms?

(e) Explain briefly (a few sentences) what the true origin of the ferromagnetic coupling is in Ni.

(f) The actual value of the magnetic dipole moment in metallic Ni is $0.54\mu_B$. Why does this number not correspond to an integer number of electrons? (You'll probably need a diagram to explain this one!)

Solution to (a)

(a) For this problem it's much easier to use the Biot-Savart law, as we did in Solution 1.2(a). This gives us the following expression for the magnetic field at a distance x from a current-carrying circular loop, on the axis of the loop:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{H} &= \frac{I}{2a}\sin^3\alpha \\ &= \frac{Ia^2}{2\left(a^2+x^2\right)^{3/2}}. \end{aligned}$$

To estimate the field generated by a Ni atom at its neighbor in a solid, let's pretend that the electrons in the Ni atom are orbiting around the nucleus with a radius $a = 1$Å, and that the neighboring Ni atom is a distance $x = 3$Åfrom the first Ni atom.

To estimate the current I, we use the fact that the angular momentum of an electron (which in general is given by m_eva) is of the order of $\hbar$J. So

$$v = \frac{\hbar}{m_e a}\frac{\text{Js}}{\text{kgm}} = \frac{\hbar}{m_e a}\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

and the current is

$$\begin{aligned} I &= \frac{\text{charge}}{\text{time}} \\ &= \frac{e}{\text{distance}/\text{speed}} \\ &= e\frac{v}{2\pi a} \\ &= \frac{e}{2\pi a}\frac{\hbar}{m_e a} \\ &= 2.952 \cdot 10^{-4}\ \text{A}. \end{aligned}$$

Since there are two unpaired electrons in Ni we can double that number if we like, but since we're just looking for an order-of-magnitude estimate it doesn't really matter either way.

Solution to (b)

Solution to (c)

Solution to (d)

Solution to (e)

Solution to (f)

Spaldin.8.1 Parallel susceptibility

Show that Eq. $\chi_\parallel = \frac{2Nm^2B'(J,\alpha)}{2k_\mathrm{B}T+Nm^2\gamma B'(J,\alpha)}$, describing the susceptibility when the field is applied parallel to the magnetization direction, reduces to the Curie-Weiss expression (Eq. $\chi = \frac{\boldsymbol{M}}{\boldsymbol{H}} = \frac{C}{T+\theta}$) at high temperatures, and to zero at 0 K.

Solution

The susceptibility of an antiferromagnetic material in which the field is applied parallel to the magnetization direction is given by

$$\chi_\parallel = \frac{2Nm^2B'(J,\alpha)}{2k_\mathrm{B}T + Nm^2\gamma B'(J,\alpha)}.$$

Here $B'(J,\alpha)$ is the derivative with respect to α of the Brillouin function,

$$B_J(\alpha) = \frac{2J+1}{2J}\coth\left(\frac{2J+1}{2J}\alpha\right) - \frac{1}{2J}\coth\left(\frac{\alpha}{2J}\right),$$

and $\alpha = Jg\mu_\mathrm{B}H/k_\mathrm{B}T$.

At high temperature, α is very small; therefore we can expand the Brillouin function in a Taylor series about the origin to obtain

$$B_J(\alpha) = \frac{J+1}{3J}\alpha - \frac{\left[(J+1)^2+J^2\right](J+1)}{90J^3}\alpha^3 + \cdots.$$

So, at small $\alpha, B'(J,\alpha) = (J+1)/3J$, which is a constant for a given J. Then

$$\begin{aligned} \chi_\parallel &= \frac{2Nm^2(J+1)/3J}{2k_\mathrm{B}T + Nm^2\gamma(J+1)/3J} \\ &= \frac{C}{T+\theta} \end{aligned}$$

- the Curie-Weiss law!

At low temperature, α is large and we cannot use the expansion of the Brillouin function given above. Instead, using the fact that $d(\coth\alpha)/d\alpha = -\operatorname{cosech}^2\alpha$, we differentiate the Brillouin function explicitly to obtain

$$B'(J,\alpha) = -\left(\frac{2J+1}{2J}\right)^2\operatorname{cosech}^2\left(\frac{2J+1}{2J}\alpha\right) + \left(\frac{1}{2J}\right)^2\operatorname{cosech}^2\left(\frac{\alpha}{2J}\right).$$

As $\alpha \to \infty, \operatorname{cosech}(\alpha) \to 0$, and $B'(J,\alpha) \to 0$. Therefore $\chi_\parallel$also tends to zero at low temperature.

Spaldin.8.2

Consider an antiferromagnetic material which has a susceptibility, χ_0, at its Néel temperature, T_N. Assuming that the exchange interactions between nearest-neighbor A and B ions are much larger than those between $A-A$ and $B-B$ pairs, calculate the values of the susceptibilities which would be measured under the application of fields perpendicular to the magnetization direction at $T=0, T=T_\mathrm{N}/2$, and $T=2T_\mathrm{N}$.

Solution

8.2 Since the $A-B$ interaction is much stronger than the $A-A$ and $B-B$ interactions, we can use the results which we derived in the notes using the Langevin-Weiss theory. We know that the expression for the susceptibility at and above the Néel temperature is

$$\chi = \frac{C}{T+\theta} = \frac{C}{T+T_\mathrm{N}}.$$

14.2 Well-known Phenomena

14.2.1 Problems of advanced electrodynamics of continuous media

(see LL8 for now)

ЛЛ-12.1 Диэлектрический эллипсоид реагирует на поле

Определить изменение объема и электрокалорический эффект для диэлектрического эллипсоида в однородном электрическом поле, параллельном одной из его осей.

Р е ш е н и е.

Согласно формулам

$$\Phi = \Phi_0 - \frac{1}{2}\mathscr{C}\mathscr{P}$$

и

$$\mathscr{P}_x = VP_x = \frac{1}{4\pi}\left(\varepsilon^{(i)}-1\right)VE_x^{(i)} = \frac{abc}{3}\frac{\varepsilon^{(i)}-1}{1+\left(\varepsilon^{(i)}-1\right)n^{(x)}}\mathfrak{C}_x$$

имеем

$$\Phi = \Phi_0 - \frac{V}{8\pi}\frac{\varepsilon-1}{n\varepsilon+1-n}\mathfrak{C}^2$$

Для изменения объема находим:

$$\frac{V-V_0}{V} = \frac{\mathfrak{C}^2}{8\pi}\left[\frac{\varepsilon-1}{(n\varepsilon+1-n)K} - \frac{1}{(n\varepsilon+1-n)^2}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial P}\right)_T\right]$$

а для электрокалорического зффекта:

$$Q = \frac{TV\mathfrak{C}^2}{8\pi}\left[\frac{\alpha(\varepsilon-1)}{n\varepsilon+1-n} + \frac{1}{(n\varepsilon+1-n)^2}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial T}\right)_P\right]$$

где $\frac{1}{K} = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T$ - коэффициент сжимаемости тела, а $\alpha = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$ - козффициент теплового расширения.

В частности, для плоскопараллельной пластинки в перпендикулярном к ней поле $n=1$, так что

$$\frac{V-V_0}{V} = \frac{\mathfrak{C}^2}{8\pi}\left[\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon K} - \frac{1}{\varepsilon^2}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial P}\right)_T\right]$$
$$Q = \frac{TV\mathfrak{C}^2}{8\pi}\left[\frac{\alpha(\varepsilon-1)}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon^2}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial T}\right)_P\right]$$

Для такой же пластинки (или любого цилиндрического тела) в продольном поле $n=0$ и

$$\frac{V-V_0}{V} = \frac{\mathfrak{C}^2}{8\pi}\left[\frac{\varepsilon-1}{K} - \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial P}\right)_T\right], \quad Q = \frac{TV\mathfrak{C}^2}{8\pi}\left[\alpha(\varepsilon-1) + \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial T}\right)_P\right]$$

ЛШ-10. среда как сетка

(???.)

Solution

Рассмотрим модель проводящей среды, представляющую собой n-мерную сетку из одинаковых сопротивлений. Сетка образует n-мерную кубическую решетку, сопротивление каждого ребра которой равно R. Обозначим через R_{x} полное сопротивление решетки между узлами 0 и x. Покажите, что

$$R_{\mathrm{x}} = \frac{R}{n} \int \left(1 - e^{i\mathbf{qx}}\right) G(1, \mathbf{q}) \frac{d^n q}{(2\pi)^n},$$

где $G(z, \mathbf{q})$ - функция Грина, введенная в задаче 9. исследуйте поведение R_{x} при $|\mathbf{x}| \gg 1$ в зависимости от размерности n.

В теории вероятностей рассматривают производящую функцию

$$G(z, \mathbf{q}) = \sum_{\mathbf{x},t} z^t e^{i\mathbf{qx}} p(t, \mathbf{x}) \quad (t \geqslant 0, |z| < 1).$$

Свойства этой величины во многом аналогичны свойствам функции Грина. Покажите, что

$$G(z, \mathbf{q}) = \frac{1}{1 - zW(\mathbf{q})}, \quad W(\mathbf{q}) = \frac{1}{n} \left(\cos q_1 + \ldots + \cos q_n\right)$$

Для того чтобы найти сопротивление сетки между двумя произвольными узлами, сначала рассмотрим более простую ситуацию. Допустим, что ток I втекает в узел x $= 0$ и растекается на бесконечность. Найдем распределение потенциала $\varphi(\mathbf{x})$ на узлах. Условие сохранения тока (закон Кирхгофа) гласит:

$$\sum_{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}| = 1} \left(\varphi(\mathbf{x}) - \varphi\left(\mathbf{x}'\right)\right) / R = \begin{cases} 0, & \mathbf{x} \neq 0, \\ I, & \mathbf{x} = 0, \end{cases}$$

где сумма, как и в задаче 9, берется по ближайшим соседям $\mathbf{x}'$ узла x. Обратим внимание, что выражение (2.98), по существу, определяет функцию Грина оператора Лапласа на решетке.

При переходе к фурье-образу уравнение (2.98) принимает вид

$$\varphi(\mathbf{q}) \left[2n - 2\left(\cos q_1 + \ldots + \cos q_n\right)\right] / R = I,$$

или, что то же самое,

$$\varphi(\mathbf{q}) = \frac{IR}{2n} G(1, \mathbf{q}).$$

То, что функция Грина уравнения Лапласа оказалась связана со случайными блужданиями, совершенно не удивительно, поскольку распределение вероятности для блужданий подчиняется уравнению диффузии, записывающемуся через n-мерный оператор Лапласа (в данном случае решеточный).

Теперь рассмотрим более сложное распределение токов и потенциалов, которое возникает, когда ток I втекает в узел 0, и такой же ток вытекает через узел a. Потенциал в этом случае можно выразить через $\varphi(\mathbf{x})$, пользуясь линейностью закона Кирхгофа (т. е. принципом суперпозиции). Находим

$$\varphi'(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x} - \mathbf{a}).$$

Для определения сопротивления между узлами 0 и a найдем разность потенциалов между этими узлами:

$$\Delta\varphi = \varphi'(0) - \varphi'(\mathbf{a}) = 2\varphi(0) - \varphi(\mathbf{a}) - \varphi(-\mathbf{a}).$$

Искомое сопротивление есть $\Delta\varphi / I$. С помощью обратного преобразования Фурье выражаем $\varphi(0)$ и $\varphi(\pm a)$ через фурье-образ (2.100), и получаем

$$R_{\mathrm{a}} = \frac{R}{n} \int \left(1 - e^{\mathrm{iqa}}\right) G(1, \mathbf{q}) \frac{d^n q}{(2\pi)^n},$$

где интеграл, как и в задаче 9, берется по зоне Бриллюэна $-\pi < q_i \leqslant \pi, i = 1, \ldots, n$. Методом задачи 9 можно показать, что сопротивление между узами решетки имеее простую вероятностную интерпретацио. А именно, R_{a} есть $\frac{1}{n} R$, деленное на вероятность того, что при случайном блуждании, начинающемся в точке 0, частица попадает в точку a до того, как возвращается в точку 0.

Рассмотрим сопротивление между двумя удаленными точками. В интеграле (2.103) при $|a| \gg 1$ вклад быстро осциллирующей экспоненты e^{qq} мал. Пренебрегая им, получаем такое же выражение, как для вероятности (2.97) в задаче 9, и находим соотношение между $R_{a\to\infty}$ и P:

$$R_{a\to\infty} = \frac{R}{nP} \quad (n > 2).$$

Этот результат справедлив только при $n > 2$, поскольку при $n \leqslant 2$ вероятность P обращается в нуль (интеграл в (2.97) расходится). Обратим внимание, что в этой задаче «критическая размерность $n_c = 2$ оказывается такой же, как в задаче 9 о случайных блужданиях. Это не случайно, поскольку, как уже отмечалось, и в том и в другом случае речь идет о функции Грина n-мерного уравнения Лапласа.

При $n = 2$ интеграл (2.103) для $R_{a\gg1}$ определяется малыми q. Разлагая $\cos q_i = 1 - q_i^2/2 + \ldots$, находим с логарифмической точностью

$$R_{a\gg1} = \frac{R}{2\pi} \ln|a| \quad (n = 2).$$

К такому же ответу приводит рассмотрение в приближении непрерывной среды, справедливом при $|a| \gg 1$, в котором (2.105) есть просто решение двумерного уравнения Лапласа.

Для двумерной сетки интересно найти сопротивления между близкими узлами. Это нетрудно сделать, вычисляя интеграл (2.103). Так, например,

$$R_{mm} = \frac{R}{2} \int\limits_{-\pi}^{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - e^{im(\theta_1+\theta_2)}}{1 - \frac{1}{2}(\cos\theta_1 + \cos\theta_2)} \frac{d\theta_1 d\theta_2}{(2\pi)^2} = \frac{R}{2\pi} \int\limits_0^{\pi} \frac{1 - e^{2im\theta_+}}{\sin\theta_+} d\theta_+ = (2.106)$$

$$= \frac{R}{\pi} \int\limits_{-1}^{1} \frac{u^{2m} - 1}{u^2 - 1} du = \frac{2}{\pi} R \left(1 + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2m-1}\right)$$

При вычислении интеграла (2.106) была сделана замена переменных $\theta_\pm = \frac{1}{2}(\theta_1 \pm \theta_2)$ и использован известный интеграл $\int\limits_0^{2\pi} (a + b\cos w)^{-1} dw = 2\pi \left(a^2 - b^2\right)^{-1/2}$. Приведем также ответы и для некоторых других узлов:

$$R_{10} = (1/2)R, \quad R_{11} = (2/\pi)R, \quad R_{20} = (2 - 4/\pi)R,$$
$$R_{21} = (4/\pi - 1/2)R, \quad R_{30} = (17/2 - 24/\pi)R.$$

Обратим внимание на то, что все приведенные в (2.108) значения сопротивления равны $a + b/\pi$, где a и b - рациональные числа. Нетрудно показать, что это верно и для других узлов двумерной решетки.

14.2.2 Problems about magnetic fields

O2-6.27 The field inside the toroidal coil (?)

A thin toroidal coil wound on a hollow non-magnetic frame (fig. 89) with a radius of R has N turns through which current flows $\mathscr{J}$. What is the magnetic field B in the center of the torus (point O)? How will the magnetic field at point O change if a small superconducting ball with a radius of $r_0 \ll r$ is placed inside the coil?

6.27

Без шарика поле $B_0 = \frac{2\pi\mathscr{C}\mathscr{L}}{cR}$ перпендикулярно плоскости тора. С шариком появится дополнительная составляющая, лежащая в плоскости тора $B_1 = \frac{N}{cR}\left(\frac{r_0}{R}\right)^3$.

(вроде типичная задача, нужно повторить катушки, по ним плохо готов сейчас!!)

14.2.3 Problems about superconductors in a magnetic field

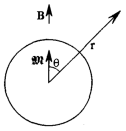
O2-6.23* A superconducting ball in an external field

A ball of radius R made of a superconductor of the first kind is introduced into a constant homogeneous magnetic field with induction $\mathbf{B}_0$. Determine the magnetic field $\mathbf{B}$ outside the ball if the field $\mathbf{B}_0$ does not destroy the superconductivity in the ball yet. Also find the surface density of the superconducting current i.

Solution

Магнитное поле шара можно найти, заменив его magnetic dipole ($\frac{3(\mathfrak{M}\mathbf{r})}{r^5}\mathbf{r}-\frac{\mathfrak{M}}{r^3}$) и использовав отсутствие нормальной компоненты к поверхности шара. Current is obtained from boundary conditions.

Введем предположение, оправдываемое последующим расчетом, что вне шара на однородное поле B_0 накладывается поле точечного диполя с магнитным моментом $\mathfrak{M}$, который помещен в центре шара.



Тогда

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \frac{3(\mathfrak{M}\mathbf{r})}{r^5}\mathbf{r} - \frac{\mathfrak{M}}{r^3}.$$

Момент $\mathfrak{M}$ определится из условия, чтобы нормальная составляющая вектора $\mathbf{B}$ на поверхности шара обращалась в ноль:

$$B|_{r=R} = \mathbf{B}_0\cos\theta + \frac{2\mathfrak{M}}{R^3}\cos\theta \equiv 0.$$

$$\mathfrak{M} = -\frac{R^3}{2}\mathbf{B}_0$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0\left(1+\frac{R^3}{2r^3}\right) - \frac{3R^3\,(\mathbf{B}_0\mathbf{r})}{2r^5}\mathbf{r}$$

На экваторе, т. е. при $r = R, \theta = 90^\circ$, получаем $\mathbf{B} = 3\mathbf{B}_0/2$.

Поверхностный ток сверхпроводимости течет вдоль параллелей θ =const. Из граничных условий на тангенциальную компоненту вектора $\mathbf{H}$ следует

$$(\mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_{\text{дип}})_\tau\big|_{r=R} = \frac{4\pi}{c}i(\theta).$$

Откуда

$$i(\theta) = \frac{3c}{8\pi}B_0\sin\theta$$

Учтено, что $\mathbf{H} = \mathbf{B}$ поскольку $\mu = 1$.

O2-6.25 Superconducting circle wire in a field

A long superconducting circle wire with a radius of R is placed in a uniform magnetic field B_0 perpendicular to the wire axis. Find the distribution of surface currents on the wire $i_{\text{surf}}(\theta)$, if the field B_0 does not destroy the superconductivity in the wire. What is the B field outside the wire?

6.25

$i_{\text{пов}}(\theta) = \frac{cB_0}{2\pi}\sin\theta$. Ток течет параллельно оси проволоки (рис. 401).
$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0\left(1+\frac{R^2}{r^2}\right) - \frac{2R^2(\mathbf{B}_0\mathbf{r})}{r^4}\mathbf{r}$, где $\mathbf{r}$ -радиус-вектор, перпендикулярный к оси проволоки, проведенный от оси к точке наблюдения. Поле на поверхности проволоки максимально при $\theta = 90^\circ$ и равно $2\mathbf{B}_0$.

O2-6.26 Gas from superconducting balls (!??!?!?)

How different is the magnetic constant μ of an "ideal gas" consisting of a large number of superconducting balls with a radius of r from unity? The concentration of n balls is small, so $nr^3 \ll 1$.

6.26

$\mu = 1 - 2\pi r^3 n$.

(вообще хз честно говоря, что делать? отдельно нужно развиться для такой задачи.)

28,29

6.28

$\Delta L = -\left(\frac{4\pi N}{l}\right)^2 \frac{r^3}{2} = -200 \text{ cm} = -2 \cdot 10^{-7}\Gamma.$

6.29

Максимальным будет поле у поверхности шарика в экваториальной плоскости $\mathbf{B}_{\max} = \mathbf{B}_0 - \frac{\mathfrak{M}}{r^3} = \frac{3}{2}\mathbf{B}_0; B_{\max} = \frac{6\pi}{c} n \mathscr{I}$.

O2-6.30 Athin coil parallel to the superconducting plane (??)

How much will the inductance of a thin coil with a radius of $R = 1$cm change if it is positioned at a distance of $h = 10$cm from an infinite superconducting plane? The plane of the coil is parallel to the superconductor.

6.30

$\Delta L = -\frac{\pi^2}{4}\frac{R^4}{h^3} = -2,5 \cdot 10^{-3} \text{ cm} = -2,5 \cdot 10^{-12}\Gamma.$

O2-6.31 A thin coil perpendicular to the superconducting plane (??)

How much will the inductance of a thin coil with a radius of $R = 1$cm change if it is positioned at a distance of $h = 10$cm from an infinite superconducting plane? The plane of the coil is perpendicular to the superconductor.

6.31

$\Delta L = -\frac{\pi^2}{8}\frac{R^4}{h^3} = -1,2 \cdot 10^{-3} \text{ cm} = -1,2 \cdot 10^{-12}\Gamma.$

O2-6.32 Cooling a wire in a field

A ring of thin wire is placed in a uniform magnetic field with induction $B = 10$ Gs, perpendicular to the plane of the ring, and cooled into a superconducting state. Find the current strength in the ring after the magnetic field is turned off, if the radius of the ring is $R = 5$cm, and the radius of the wire is $r = 1$ mm.

Note. The inductance of a thin wire ring (if current flows along its surface) in a Gaussian system is given by the expression $L = 4\pi R[\ln(8R/r) - 2]$.

6.32

(!! this is a good question!)

$\mathscr{I} = \frac{c\pi R^2 B}{L} = 9,4 \cdot 10^{10}$ ед. СГСЭ $= 31$ А.

O2-6.33

Above the flat surface of a type I superconductor, a thin rectilinear wire is suspended parallel to this surface at a distance of h from the plane. A constant current flows through the wire $\mathscr{J}$. Find the linear density of the superconducting current i, flowing along the surface of the superconductor.

Note. Apply the mirror image method.

6.33

$i = \frac{\mathscr{L}}{\pi r^2}$, где r - расстояние между проводом и точкой на поверхности в сечении, перпендикулярном проводу. Сверхпроводящий ток параллелен току и течет в противоположном направлении.

O2-6.34 Магнит над сверхпроводником (!!!!)

Постоянный магнитик с массой $m = 4,8$ г парит в горизонтальном положении на высоте $h = 4$ см над плоской поверхностью сверхпроводника. Применяя метод зеркальных изображений, вычислить напряженность магнитного поля H у поверхности сверхпроводника под магнитиком. При расчетах магнитик считать точечным магнитным диполем.

6.34

$H = \frac{8}{h}\sqrt{\frac{mg}{3}} \approx 80$ Э.

O2-6.35 Superconducting ring above the superconductor (!!!)

Above the flat surface of a type I superconductor, on an insulating layer with a thickness of $h = 5$ mm, lies a thin superconducting ring with a radius of $R = 10$cm, through which a direct current flows $\mathscr{I}$. At what current $\mathscr{I}$ will the ring begin to hover over the superconductor if the ring mass is $m = 1$?

6.35

$\geqslant c\sqrt{\frac{mgh}{2\pi R}} = 8,4 \cdot 10^{10}$ ед. СГСЭ $= 25$ А.

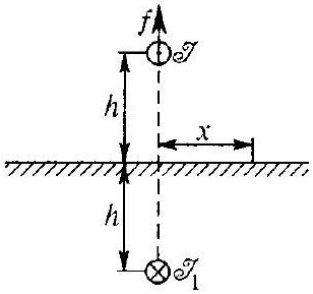


Рис. 402

O2-6.36 Парение провода над сверхпроводником

Над сверхпроводящей плоскостью расположен тонкий прямой проводник, по которому течет постоянный ток. Полагая линейную плотность проводника $\rho_l = 2$ г/м, найти, на какой высоте h над плоскостью будет свободно висеть проводник, по которому течет ток $\mathscr{I} = 20$ А.

6.36

$h = \frac{^2}{c^2\rho_l g} \approx 0,2$ cm.

O2-6.37 Ток и сила от провода на сверхпроводник

Найти распределение поверхностных токов i для плоской поверхности сверхпроводника, если на расстоянии $h = 1$ см от нее расположен прямолинейный достаточно длинный параллельный плоскости сверхпроводника тонкий провод, по которому течет ток $\mathscr{I} = 10$ А. Найти также силу f, действующую на единицу длины провода.

6.37

$i(x) = \frac{\mathscr{I}h}{\pi(h^2+x^2)}$ (см. рис. 402),

$$f = \frac{\mathfrak{g}^{g^2}}{c^2 h} = 1 \text{ дин } /\mathbf{c}$$

О2-6.38 Сверхпроводящий соленоид с сердечником в переменном токе

В момент $t = 0$ сверхпроводящий соленоид индуктивностью $L = 0,5\Gamma$ подключается к переменной ЭДС $\mathscr{E} = \mathscr{E}_0 \sin \omega t$ ($\mathscr{E}_0 = 20$ В, $\omega(/2\pi) = 50$ Гц). Внутри соленоида находится сердечник с магнитной проницаемостью $\mu = 100$. Найти среднюю за период колебаний ЭДС намагниченность I сердечника, если плотность намотки соленоида $n = 10$ витков/см. Внутренним сопротивлением ЭДС и явлением гистерезиса в сердечнике пренебречь.

6.38

$\bar{I} = \frac{(\mu-1)cn}{\omega L}\mathscr{E}_0 \approx 12,7$Гс.

О2-6.39

Определить коэффициент самоиндукции L коаксиала, образованного соосно расположенными железным стержнем ($\mu = 1000$) и медной ($\mu = 1$) трубкой, замкнутыми на одном из концов проводящим диском. Длина стержня и трубки $\Lambda = 10$ см, диаметр стержня $2r_1 = 2$ мм, внутренний диаметр трубки $2r_2 = 9$ мм, наружный $2r_3 = 10$ мм. Считать, что в стержне и трубке токи равномерно распределяются по сечениям.

6.39

$L = 2\Lambda\left(\frac{\mu-1}{2} + \ln\frac{r_3}{r_1} + \frac{r_2^2}{r_3^2-r_2^2}\ln\frac{r_3}{r_2}\right) \approx 10^4$см.

О2-6.40

Определить коэффициент самоиндукции L коаксила, образованного соосно расположенными проводящими стержнем и трубкой, замкнутыми на одном из концов проводящим диском. Длина стержня и трубки $\Lambda = 10$ см, диаметр стержня $2r_1 = 8$ мм, внутренний диаметр трубки $2r_2 = 9$ мм, наружный $-2r_3 = 10$ мм. Пространство между стержнем и трубкой заполнено диэлектрическим ферромагнетиком с магнитной проницаемостью $\mu = 20$. Считать, что в стержне и трубке токи равномерно распределяются по сечениям.

6.40

$L = 2\Lambda\left(\mu\ln\frac{r_2}{r_1} + \frac{r_3^2}{r_3^2-r_2^2}\ln\frac{r_3}{r_2}\right) \approx 58$ cm.

О2-6.41

Железный цилиндр радиусом $a = 1$ см и длиной $L = 10$ см помещен внутрь соленоида, по которому пропускается переменный ток частоты 50 Гц. Ток перемагничивает цилиндр от $B_{\text{нас}}$ до $-B_{\text{нас}}$ и от $-B_{\text{нас}}$ до $B_{\text{нас.}}$. Оси соленоида и железного цилиндра параллельны. Подсчитать тепло гистерезиса Q, выделяющееся в цилиндре за время $t = 1$ мин. Петлю гистерезиса железного цилиндра можно идеализировать кривой прямоугольной формы, изображенной на рис. 90.

6.41

$Q = \frac{B\Delta H}{2}La^2\frac{t}{T} = 120$ Дж.

О2-6.43

Уборщице института неосторожно поручили намотку провода с помощью челнока на тороидальные ферритовые сердечники. Проделав в среднем десять «стежков» челноком, тетя Маша удерживаст уже имеющиеся витки пальцами, перехватывает и слегка поворачивает сердечник и продолжает намотку, однако, поскольку существо задачи ей объяснили недостаточно подробно, каждый последующий десяток витков она укладывает с равной вероятностью либо в прежнем, либо в противоположном направлении. Рассмотреть следующие возможные в этой связи задачи (в порядке сложности):

1) Найти среднее значение индуктивности в серии намотанных таким образом катушек. Полное число витков равно 100, а индуктивность правильно намотанной катушки - 1 мГ. Магнитная проницаемость сердечника весьма велика.

2) Найти среднюю индуктивность катушек, для которых достоверно установлено, что изменение направления намотки произошло с одинаковой вероятностью лишь в одной точке обмотки из всех возможныХ.

3), 4) Для катушек соответственно пунктов 2) и 1) найти дисперсию индуктивностей.

П р и м е ч а н и е. Описанная история реально имела место в ИФП (Институте физических проблем им. П. Л. Капицы) весной 1960 г. К вящему изумлению ученых заказчиков оказалось также, что обрывы проводов наша героиня ликвидировала с помощью нехитрых узлов, так что у некоторых катушек обнаружилась не только пониженная индуктивность, но и вообще нулевая проводимость!

6.43

: В предложенной постановке наша проблема эквивалентна задаче о среднем значении и дисперсии квадрата удаления x от исходной точки после десяти шагов по десять единиц в случайном направлении по одной оси. Средний квадрат удаления - 1000 , т. е. 0,1 максимального, а, соответственно, индуктивность немедленно оказывается равной 100 мкГ. Для нахождения дисперсии индуктивности можно аппроксимировать распределение удалений функцией Гаусса с дисперсией $\sigma_x = 10\sqrt{10}$.

$$\Delta L = \sqrt{\overline{(L-\bar{L})^2}} = \sqrt{\left(x^2 - \overline{x^2}\right)^2} = \sqrt{\overline{x^4} - \bar{x}^2}$$

$$\overline{x^4} = \frac{\int x^4 \exp\left[-x^2/\left(2\sigma^2\right)\right] dx}{\int \exp\left[-x^2/\left(2\sigma^2\right)\right] dx} = 3\sigma^4; \quad \Delta L = \sqrt{3\sigma^4 - \sigma^4} = \sqrt{2}\sigma^2$$

$$L = 100^{+140}_{-100}\text{mКГ}$$

В пункте 2 проще всего непосредственно подсчитать требуемые величины для 9 возможных здесь значений индуктивности.

$$\bar{L} = \frac{2L_0}{9}(0,64 + 0,36 + 0,16 + 0,04) = 267\text{mКГ};$$

$$\Delta L = \sqrt{\frac{1}{9}\sum_i \left(L_i - \bar{L}\right)^2} = 234\text{mkГ};$$

$$L_2 = 267 \pm 234\text{mkГ}.$$

Если же принять, что поворот равновероятен после намотки доли x полного числа витков, то

$$\frac{\bar{L}}{L_0} = \overline{[x-(1-x)]^2} = \overline{(2x-1)^2} = 4\overline{x^2} - 4\bar{x} + 1 = 4\int_0^1 x^2 dx - 1 = \frac{1}{3}$$

$$\frac{\overline{L^2}}{\overline{L_0^2}} = \overline{(2x-1)^4} = 16\overline{x^4} - 32\overline{x^3} + 24\overline{x^2} - 8\bar{x} + 1 = 0,2;$$

$$\Delta L = \sqrt{L^2 - \bar{L}^2} = L_0\sqrt{0,2 - 0,111} \approx 298\text{mКГ}.$$

$$L_2' = 333 \pm 298\text{mКГ}.$$

6.42

6.42

$\mathscr{G} = \frac{0}{1-\frac{v^2t^2}{\mu R^2}(\mu-1)}$ при $0 \leqslant t \leqslant \frac{R}{v}$;

$$_{\max} = \mu\mathscr{C}_0 = 50\text{ А}; \quad t_{\max} = \frac{R}{v} = 3,3 \cdot 10^{-6}\text{с}$$

О2-7.20

Сверхпроводящий шарик летит по направлению к соленоиду вдоль его оси. Индукция поля в центре соленоида $B = 1000\Гamma c$. Какова должна быть начальная скорость v шарика, чтобы он смог пролететь через соленоид насквозь? Диаметр соленоида много больше диаметра шарика. Плотность материала шарика $\rho = 8\text{г}/\text{см}^3$.

7.20

$v \geqslant B\sqrt{\frac{3}{8\pi\rho}} \approx 120$ cm/c.

O2-7.25

Внутри тороидальной короткозамкнутой катушки из сверхпроводящей проволоки с плотностью намотки n [витков/см] имеется сверхпроводящее кольцо (рис. 102), сечение которого в два раза меньше сечения витков катушки. В катушке течет ток $_0$. Нагреванием сверхпроводник переводится в нормальное состояние. Определить джоулево тепло, которое выделится в катушке, если: 1) в нормальное состояние переводится только катушка; 2) в нормальное состояние переходит сначала внутреннее кольцо (из немагнитного материала), а затем катушка. Объем тороидальной катушки V. Считать, что радиус тора значительно превышает радиус витков.

7.25

1) $Q_1 = \frac{\pi n^2 \mathscr{Q}_0^2}{c^2} V$; 2) $Q_2 = \frac{1}{2} Q_1$.

O2-7.26

Соленоид длиной l с числом витков N и сечением S подключен к батарее с ЭДС $\mathscr{E}$ через сопротивление R (рис. 103). В соленоид вставлен сердечник из сверхпроводника такой же длины, но с площадью сечения $S/2$. Сердечник быстро вынимают из соленоида. Определить ток (t) в цепи.

7.26

$\mathscr{G}(t) = _0 \left(1 - \frac{1}{2} e^{-t/\tau}\right)$, где $\tau = \frac{4\pi N^2 S}{clR}$.

O2-7.27

Сверхпроводящее плоское кольцо, по которому течет ток $= 1$ А, переносится из удаленной области в область однородного магнитного поля $B_0 = 100$ Гс. Площадь кольца $S = 10$ см^2, нормаль к плоскости кольца составляет с направлением магнитного поля 52 угол $\theta_0 = 60°$. Чему равен коэффициент самоиндукции кольца, если в результате переноса ток в кольце обратился в ноль?

7.27

$L = \frac{cB_0 S \cos\theta}{} = 5 \cdot 10^{-6}$Г.

O2-7.28

В экваториальной плоскости шара радиусом a находится тонкое металлическое кольцо радиусом $\rho > a$ с электрическим сопротивлением R. Внешнее однородное магнитное поле B_0 перпендикулярно плоскости кольца. Охлаждением шар переводится в сверхпроводящее состояние. Найти заряд, протекший по кольцу. Индуктивностью кольца пренебречь.

7.28

$q = \frac{\pi B_0 a^3}{cR\rho}$.

29

7.29

$\frac{\text{петли}}{\text{сол}} = \frac{L}{L - L_0/N^2}$.

O2-7.30

В замкнутой сверхпроводящей обмотке электромагнита возбужден ток $\oint_0$. В стальном магнитопроводе длиной L с магнитной проницаемостью μ имеется неболь- Рис. 104 шой зазор l, так что рассеянием магнитного поля можно пренебречь (рис. 104). Как изменится ток в обмотке, если путем деформации сердечника зазор уменьшится в два раза?

7.30

$\frac{\mathscr{I}_1}{\mathscr{I}_0} = \frac{1+l\mu/(2L)}{1+l\mu/L}$.

O2-7.31

В опытах А. Д. Сахарова сверхсильные магнитные поля получались взрывным сжатием отрезка проводящей цилиндрической трубы, внутри которой создано начальное магнитное поле с индукцией B_0. Определить индукцию поля B в трубе в момент максимального сжатия, если $B_0 = 5 \cdot 10^4$ Гс, начальный внутренний радиус трубы $R = 5$ см, радиус в момент максимального сжатия $r = 0,5$ см. Оболочку, окружающую магнитное полс, считать идеально проводящей. Определить также давление P, необходимое для получения такого сжатия.

7.31

$B = B_0 \left(\frac{R}{r}\right)^2 = 5 \cdot 10^6$Гс; $\quad P = \frac{B^2}{8\pi} \approx 10^{12}$ дин $/\text{см}^2 = 10^6$а.

O2-7.30

В замкнутой сверхпроводящей обмотке электромагнита возбужден ток $\oint_0$. В стальном магнитопроводе длиной L с магнитной проницаемостью μ имеется неболь- Рис. 104 шой зазор l, так что рассеянием магнитного поля можно пренебречь (рис. 104). Как изменится ток в обмотке, если путем деформации сердечника зазор уменьшится в два раза?

7.32

$_0 = \frac{\mathscr{I}}{1+(\mu-1)l/L}$.

O2-7.31

В опытах А. Д. Сахарова сверхсильные магнитные поля получались взрывным сжатием отрезка проводящей цилиндрической трубы, внутри которой создано начальное магнитное поле с индукцией B_0. Определить индукцию поля B в трубе в момент максимального сжатия, если $B_0 = 5 \cdot 10^4$ Гс, начальный внутренний радиус трубы $R = 5$ см, радиус в момент максимального сжатия $r = 0,5$ см. Оболочку, окружающую магнитное полс, считать идеально проводящей. Определить также давление P, необходимое для получения такого сжатия.

7.33

$= \mathscr{I}_0 \left(1 + \frac{a}{l_0} \cos \omega t\right)$.

O2-7.32

В замкнутой сверхпроводящей обмотке электромагнита возбужден постоянный ток воде из мягкого железа с магнитной проницаемостью μ имеется нсбольшой зазор толщиной l, так что рассеянием магнит- Рис. 105 ного поля в зазоре можно пренебречь. Длина магнитопровода (вместе с зазором) равна L. Чему будет равен ток ϑ_0 в обмотке электромагнита, если в зазор вставить пластину толщиной l из того же железа?

О2-7.36 Магнитное давление в цилиндрических сверхпроводниках

Два параллельных цилиндрических провода из сверхпроводника находятся в однородном постоянном магнитном поле с индукцией B, направленной вдоль проводов. Найти магнитное давление $P_{\text{м}}$ на боковую поверхность проводников, а также силу f, действующую на единицу длины каждого провода.

7.36

$P_{\text{M}} = \frac{B^2}{8\pi}; \quad f = 0.$

О2-7.82

Длинный сверхпроводящий цилиндр (из сверхпроводника I рода) внесен в постоянное однородное магнитное поле с индукцией B, направленное параллельно оси цилиндра. Определить силу f, действующую на единицу площади боковой поверхности цилиндра.

О2-7.83

На какой высоте h постоянный магнитик с магнитным моментом $\text{M} = 10^3 \Гс \cdot \text{см}^3$ и массой $m = 10$ г будет парить в горизонтальном положении над плоской горизонтальной поверхностью сверхпроводника I рода? Магнитик считать точечным диполем.

У к а з а н и е. Применить метод зеркальных изображений. Восггользоваться выражением для взаимной потенциальной энергии двух точечных диполей.

О2-7.84

Кольцо из сверхпроводника надевают на длинный однородно намагниченный стержень, индукция на полюсе которого (в точке A) равна B_0 (рис. 127). При Рис. 127 если площадь сечения магнита равна S?

О2-7.85

Дипольное магнитное поле нейтронной звезды $B_0 \sim 10^{12}$Гс, масса $M \sim 1,5 \cdot 10^{30}$кг, радиус $R_0 \sim 10$КМ. Определить с помощью числовых оценок, как поведет себя вблизи поверхности звезды сверхпроводящая капля с плотностью $\rho \sim 10\text{г}/\text{см}^3$, полагая, что магнитное поле не разрушает сверхпроводимость.

О2-7.68

Длинный короткозамкнутый сверхпроводящий соленоид выполнен из проволоки диаметром $d = 0,2$ мм, плотно намотанной в один слой. Диаметр соленоида $D = 2$ см. Известно, что сверхпроводимость разрушается во внешнем магнитном поле $B_{\text{кр}} = 15$кГс. Какой максимальный ток можно возбудить в сверхпроводящей обмотке, если прочность проволоки на разрыв $F_{\text{р}} = 5$Н?

О2-7.69

Сверхпроводящая сфера с радиусом $R = 8$ см, состоящая из двух одинаковых полусфер, помещена в однородное магнитное поле $B_0 = 10^3 \Гс$, перпендикулярное плоскости разреза. Найти силу, необходимую для отрыва одной полусферы от другой.

О2-7.78

С помощью чувствительных весов измеряется сила, втягивающая парамагнитный образец в сверхпроводящую короткозамкнутую катушку в зависимости от положения образца (рис. 125). Известно, что при $x = 0$ индуктивность катушки равна L_0 но, что при $x = 0$ индуктивность катушки равна L_0, а по ее виткам течет некоторый ток J. $_1$. В первом а по ее виткам течет некоторый ток Є. . В первом эксперименте была получена зависимость $F_1(x)$. Во втором эксперименте катушка была переведена в 125 нормальное состояние и по ее виткам пропущен ток g_2 от внешнего источника. Предполагалось вновь измерить зависимость силы, действующей на образец, от координаты. Какую зависимость $F_2(x)$ следует ожидать в этом случае?

О2-7.81

Небольшой сверхпроводящий шарик может свободно перемещаться вдоль оси тонкого кольца радиусом R, по которому течет ток. При каком расстоянии между шариком и плоскостью кольца сила, действующая на шарик, принимает максимальное значение? Как направлена эта сила?

O2-7.57

Две небольшие одинаковые катушки расположены так, что их оси лежат на одной прямой (рис. 116). Расстояние между катушками $l = 10$ см значительно превышает их линейные размеры. Число витков каждой катушки $N = 100$, площадь витков $S = 1$ см^2. С какой силой взаимодействуют катушки, когда по их обмоткам текут одинаковые токи ororon-c.-roono

O2-7.58 Втягивание соленоида (???)

С какой силой втягивается в соленоид с полем B длинный цилиндрический стержень с магнитной проницаемостью μ и площадью поперечного сечения S? Стержень расположен на оси соленоида таким образом, что один его конец находится внутри, а другой - вне соленоида. Магнитное поле соленоида вблизи первого конца можно считать однородным, вблизи второго конца (вне соленоида) - равным нулю.

Solution (????)

(???? не знаю, энергию что ли там найти, на расстояние поделить???? порешать еще нужно!!)

O2-7.59

Длинный сердечник из материала с $\mu = 100$ втягивается с силой $F = 10$Н в длинный соленоид, по которому течет ток $= 10$ А. Сердечник занимает все сечение соленоида и вставлен на глубину, значительно превышающую его диаметр (рис. 117). Найти коэффициент самоиндукции L соленоида (без сердечника), если его длина $l = 50$ см.

O2-7.60

Длинный соленоид, намотанный на тонкостенный капилляр, погружен одним концом в парамагнитную жидкость с плотностью ρ и магнитной проницаемостью μ. Насколько изменится уровень жидкости в капилляре, если по соленоиду пропустить ток ? Число витков на единицу длины соленоида равно n.

O2-7.61

В сердечнике электромагнита имеется малый зазор l, в который помещена пластинка из того же материала (рис. 118). Какую работу нужно совершить против магнитных сил, чтобы удалить Рис. 118 Рис. 119 Рис. 117 пластину из зазора? Длина сердечника равна L, сечение всюду одинаково и равно S, магнитная проницаемость $\mu \gg 1$. Обмотка электромагнита имеет N витков, по которым течет ток $\mathscr{J}$. Рассеянием магнитного потока пренебречь.

O2-7.64

Электромагнит из железного бруса квадратного сечения в форме подковы имеет размеры в сантиметрах, указанные на рис. 121. Число витков обмотки $N = 200$. Сила тока $= 2$ А. Как велика подъемная сила F электромагнита, если $\mu = 200$?

O2-7.65

К компасу на расстояние $L = 1$ м подносят магнитный 6 русок сечением $S = 1$ см^2 и длиной $l = 10$ см. С какой стороны надо подносить магнит и как его ориентировать, чтобы отклонение компаса φ было наибольшим? Найти величину φ, если остаточная индукция материала бруска $B_1 = 10^4$ Гс, горизонтальная составляющая земного поля $B_0 = 0,2$ Гс.

O2-7.66

Найти относительное изменение частоты регулярной прецессии намагниченного тяжелого гироскопа в поле тяжести, если приложить магнитное поле с индукцией $B = 1,0$ кГс, направленное вертикально вверх. Намагниченность I считать постоянной, однородной и направленной по оси гироскопа, причем величина $4\pi I = 2$кГс, плотность материала гироскопа $\rho = 8$Гс/см^3 и расстояние от точки опоры до центра масс гироскопа $l = 2$ см.

O2-7.67

Длина цилиндрического однослойного соленоида много больше его радиусом R. Провод обмотки соленоида имеет квадратное сечение со стороной $a \ll R$. Витки плотно прилегают друг к другу. При прохождении тока через соленоид возникает сила, стремящаяся разорвать обмотку. Определить предельную силу тока $\mathscr{J}_0$, при которой наступит разрыв проволоки обмотки в центральном сечении соленоида, если проволока выдерживает нагрузку на растяжение, не превышающую F.

O2-7.76

Для определения магнитной восприимчивости диамагнитного материала измеряют с помощью весов силу, выталкивающую маленький образец из зазора между полюсами электромагнита (рис. 124). Пусть магнитное поле в зазоре изменяется в радиальном направлении по закону $B = B_0 e^{-\alpha r^2}$, где r - расстояние от оси симметрии (в сантиметрах), $B_0 = 10^3$ Гс - поле на оси, $\alpha = 10^{-2}$ см$^{-2}$ - константа. На каком расстоянии от оси нужно расположить диамагнитный образец, чтобы выталкивающая сила была максимальной, и чему равна эта максимальная сила для образца в виде небольшого тонкого диска объемом $V = 0,1$ см^3? Магнитную восприимчивость материала принять равной $x = -1,4 \cdot 10^{-5}$ (висмут). Диск Рис. 124 ориентирован перпендикулярно магнитному полю.

O2-7.77

В длинный соленоид с плотностью намотки витков $n = 20$ см$^{-1}$ вставлен тонкий стержень из магнитного материала, кривую намагничивания которого можно аппроксимировать выражением $I = I_{\text{нас}} \left(1 - e^{-H/H_0}\right)$. Один конец стержня находится в середине соленоида, а другой вне соленоида вдали от его конца. Найти силу, втягивающую стержень в соленоид при токе $J = 10$ А. Сечение стержня $S = 0,8$ см^2, $H_0 = 2507$, $I_{\text{нас}} = 1,6 \cdot 10^3$ Гс

O2-7.79

Внутри длинной катушки-соленоида с плотностью намотки витков n расположена небольшая катушка с площадью витков S и полным числом витков N. Ось малой катушки ориентирована под углом θ по отношению к оси соленоида. Катушки включены последовательно, и по ним течет ток Я. Какой момент сил действует на малую катушку?

14.2.4 Problems about electromagnetic induction

O2-7.1 Ток от вращающегося диска (!??!)

Медный диск радиусом $a = 10$ см вращается в однородном магнитном поле, делая 100 оборотов в секунду. Индукция магнитного поля направлена перпендикулярно к плоскости диска и равна $B = 10^4$ Гс. Две щетки, одна на оси диска, другая на окружности, соединяют диск с внешней цепью, в которую включены реостат с сопротивлением $R = 10$ Ом и амперметр, сопротивлением которого можно пренебречь. Что показывает амперметр?

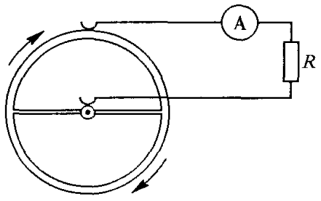
7.1

. $\mathscr{G} = 0,314$ А.

(думаю, это идейно важная задача, а я слишком тупой еще для нее.)

O2-7.2 Ток от вращающегося колеса

Что будет показывать амперметр в условиях предыдущей задачи, если диск заменить колесом с двумя спицами того же радиуса, что и диск, как показано на рис. 92? Электрическим сопротивлением материала колеса пренебречь.

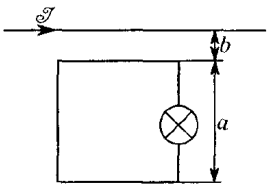


7.2

$= 0,314$ А (сравните с предыдущей задачей).

О2-7.3

По длинному прямому проводу течет синусоидальный ток J высокой частоты $v = 10^8$ Гц. К проводу подносится квадратный проволочный контур со стороной $a = 17,2$ см, в который включена лампочка.



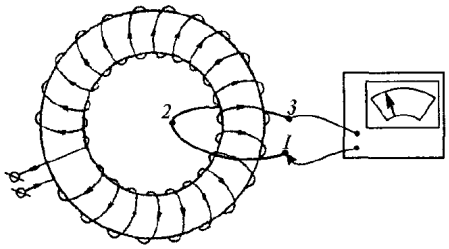
Когда контур поднесен на расстояние $b = 10$ см, лампочка горит нормальным накалом. Определить эффективное (действующее) значение силы тока в проводе I, если для нормального накала лампочки требуется напряжение $V = 6$ В. Сопротивлением контура пренебречь.

7.3

$I = \frac{c^2 V}{4\pi a v \ln(1+a/b)} = 9 \cdot 10^8$ ед. СГСЭ $= 0,3$ А.

О2-7.4

В соленоиде, имеющем форму тонкого тора, ток линейно возрастает со временем: $\mathfrak{I} = \ell_0 t/\tau, \tau = 10^{-2}$с, $\mathscr{J}_0 = 10$ А. Вокруг тора имеется один незамкнутый виток. Один из входов милливольтметра жестко присоединен к концу 3, а другой перемещается, проходя последовательно положения $1-2-3-1$. Что покажет при этом милливольтметр? Площадь витков соленоида $S = 10$ см^2, плотность намотки витков $n = 100$ см$^{-1}$.



7.4

$V = \frac{4\pi S n}{c^2} \frac{\mathscr{J}_0}{\mathrm{t}} = 4 \cdot 10^{-5}$ ед. СГСЭ $= 12$mВ, когда движок находится в положениях $I, 2, 3. V = 24$mВ, когда движок вернется в точку I.

О2-7.5

В длинном воздушном соленоиде с радиусом намотки $r_0 = 1$ см и плотностью витков $n = 10$ см$^{-1}$ течет ток, нарастающий с постоянной скоростью $d_\varrho/dt = 100$ А/с. Какова будет форма силовых линий соответствующего ему вихревого электрического поля $\mathbf{E}$? Найти величину E на расстоянии $2r_0$ от оси соленоида. Как изменятся поле E и индукция D, если соленоид погрузить в однородный немагнитный диэлектрик с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 2$?

7.5

В воздухе $E = \frac{2\pi r_0^2 n^{\,2}}{rc^2} = \frac{\pi}{3} \cdot 10^{-8}$ ед. СГСЭ $\approx 3 \cdot 10^{-4}$ В/m.

В диэлектрике $E' = E; \quad D' = 2D.$

O2-7.6

На железный цилиндрический сердечник, через который проходит однородный магнитный поток $= \Phi_0 \cos \omega t$, надет тор из диэлектрика с диэлектрической проницаемостью ε (рис. 95). В торе имеется бесконечно узкий воздушный зазор, образованный двумя бесконечно близкими разрезами вдоль меридиональных плоскостей. Найти напряженность электрического поля E в зазоре в зависимости от расстояния r до оси цилиндра.

7.6

$E = \frac{\varepsilon\omega}{2\pi cr} \Phi_0 \sin \omega t.$

O2-7.7

Два диска с радиусами R_1 и R_2 вращаются с угловой скоростью в однородном магнитном поле с индукцией **B**, перпендикулярной их плоскости (рис. 96). Центры дисков присоединены к обкладкам конденсатора C_1, ободы - через скользящие контакты к обкладкам конденсатора C_2. Найти разности потенциалов на конденсаторах.

7.7

$V_1 = \frac{\omega B R_1^2}{2c} \frac{(1-R_2/R_1)^2}{1+C_1/C_2}; \quad V_2 = \frac{\omega B R_1^2}{2c} \frac{(1-R_2/R_1)^2}{1+C_2/C_1}.$

O2-7.8

По двум вертикальным рейкам, соединенным внизу сопротивлением $R = 2$ Ом, а вверху батареей с ЭДС $\mathscr{E} = 1$ В и внутренним сопротивлением $r = 2$ Om, без трения скользит проводник, длина которого $l = 10$ см, масса $m = 10$ г (рис. 97). Система находится в однородном магнитном поле, индукция которого $B = 10^4$Г, перпендикулярна плоскости рисунка и направлена к читателю. Найти установившуюся скорость проводника в поле силы тяжести, пренебрегая сопротивлением реек и проводника. При каком соотношении между параметрами задачи установившаяся скорость направлена вниз и при каком вверх?

7.8

$v = \frac{c^2 mgr - c\&lB}{B^2 l^2 (1+r/R)} \approx 5$ m/c. Если вес проводника $mg > \frac{\mathscr{G}|B}{cr}$, то он движется вниз, в противном случае - вверх.

9

7.9

$v = \frac{3mgRc^2}{2B^2 l^2} \approx 1,5$ cm/c.

O2-7.10

Простейшая динамо-машина состоит из прямоугольной рамки S с числом витков n и внутренним сопротивлением r, вращающейся со скоростью ш в однородном магнитном поле B. Определить средний момент M, приложенный к рамке, и среднюю мощность N, идущую на вращение динамо-машины. Машина работает на нагрузку R.

7.10

$\bar{M} = \frac{(BSn)^2\omega}{2(R+r)}$; $\bar{N} = \bar{M}\omega(CW)$.

O2-7.11

В длинном тонком соленоиде с плотностью витков n находится небольшая плоская катушка (сечение катушки - S, число витков - N), по которой течет постоянный ток $\mathscr{K}_{\mathrm{K}}$. Угол a между осью катушки и осью соленоида меняется по закону $\alpha(t) = \alpha_0 \cos\omega t$, где a_0 - малая величина. Определить амплитуду и частоту переменного напряжения на концах соленоида.

7.11

$\mathscr{E}_{\mathrm{c}} = \frac{2\pi}{c^2} SNn\alpha_0^2\omega_{\mathcal{C}}\mathscr{F}_{\mathrm{k}} \sin 2\omega t$.

O2-7.12

Внутри тонкого длинного солсноида, ось которого горизонтальна, находится небольшая магнитная стрслка, уравновсшенная на острие, вокруг оси которого может свободно вращаться. Вдоль оси соленоида приложено внешнее однородное магнитное поле с индукцией B_0. В начальный момент стрелка горизонтальна, отклонена на малый угол α_0 от направления B_0 и покоится. Затем стрелку отпускают. Опрсделить амплитуду и частоту перемснной ЭДС, возникающсй на концах обмотки соленоида. Плотность намотки соленоида n[в и т к о в / с м], момент инерции стрелω ки относительно оси вращения - J, ее магнитный момент - М.

7.12

$\mathscr{E}_{\mathrm{c}0} = \frac{2\pi}{c} n\mathscr{M}\alpha_0^2\sqrt{\frac{B_0\mathfrak{M}}{J}}$; $\omega_{\mathrm{c}} = 2\sqrt{\frac{B_0 M}{J}}$.

Решение. Магнитная стрелка с магнитным моментом $\mathfrak{m}$ эквивалентна маленькой катушечке (или просто витку с током) с таким же магнитным моментом $\mathfrak{M}$. Магнитный момент витка с током $\mathfrak{M} = \frac{}{c}\mathbf{S}$.

Для определения потока, посылаемого стрелкой через соленоид, воспользуемся теоремой взаимности. Этот поток равен потоку, посылаемому соленоидом (рис. 403) через эквивалентный стрелке виток

$$\Phi = \frac{4\pi}{c} n\mathscr{C} S\cos\alpha = 4\pi n\mathfrak{W}\mathfrak{t}\cos\alpha$$

Если магнитную стрелку поместить во внешнее поле B_0, отклонить ее от положения равновесия на угол α_0 и отпустить, то стрелка начнет колебаться: $J\ddot{\alpha} = -B_0\mathfrak{M}\alpha$, где в правой части момент сил, действующих на стрелку

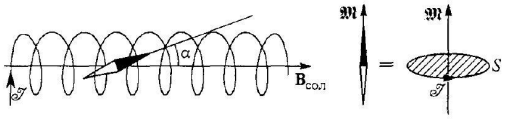


Рис. 403

$\mathbf{M} = [\mathfrak{m}\mathbf{B}_0]$. Откуда следует, что частота этих колебаний равна $\omega = \sqrt{\frac{B_0\mathfrak{m}\mathfrak{t}}{J}}$, а закон колебаний стрелки $\alpha(t) = \alpha_0\cos\omega t$. В соленоиде при таких колебаниях возникает ЭДС индукции

$$\mathscr{E}_{\mathrm{c}} = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{1}{c}4\pi n \boxplus 1\frac{d}{dt}\left[\cos\left(\alpha_0\cos\omega t\right)\right]$$

Дифференцируя, получаем ответ задачи.

13

7.13

$(t) = \frac{2m\pi a^2\omega}{cRl^3}\sin\omega t$.

O2-7.14

К небольшой катушечке с числом витков N и площадью витка S подносят на расстояние a лист из хорошо проводящего металла. По катушке течет переменный ток I (действующее значение) частотой (.. Найти дополнительную ЭДС E, возникшую в катушке после приближения листа. Лист расположен перпендикулярно оси катушки.

7.14

$\mathscr{E} = -\frac{IN^2S^2}{4c^2a^3}\omega$, где знак «» означает, что эта дополнительная ЭДС убывает при экранировании. При этот под $\mathscr{E}$ понимают действующее значение ЭДС.

указание. Хорошо проводящий лист металла эквивалентен сверхпроводящему «магнитному зеркалу», в котором и возникает «отражение» катушки.

O2-7.15

Два соосных круговых витка радиусами R и $r \ll R$ размещены на расстоянии R друг от друга. По малому витку пропускается ток $i = i_0 \cos \omega t$. Найти ток $\{(t)$ в большом витке, сопротивление которого равно R_0.

7.15

$\mathscr{G}(t) = \frac{\pi^2 r^2 \omega}{\sqrt{2}c^2 R R_0} i_0 \sin \omega t$.

O2-7.16

В центре кругового витка радиусом R, подключенного к вольтметру переменного тока, имеется небольшой тонкий цилиндрический магнитик, остаточная индукция которого равна B. Длина и радиус цилиндра равны l и r соответственно. Магнитик приводят во вращение с угловой скоростью ω вокруг оси, лежащей в плоскости витка и перпендикулярной оси цилиндра. Определить показание вольтметра. Считать $r \ll l \ll R$.

7.16

$V_{\text{дейст}} = \frac{\pi r^2 l \omega B}{2\sqrt{2}Rc}$ (показание вольтметра переменного тока).

O2-7.17

Посредине между двумя параллельными тонкими длинными проводниками расположен тонкий цилиндрический магнитик. Ось магнитика перпендикулярна плоскости проводников. Проводники с одной стороны замкнуты, а с другой - подключены к милливеберметру. Расстояние между проводниками $2l$, масса магнитика m, плотность ρ, остаточная индукция B_0. Магнитик быстро нагревают выше температуры Кюри. На сколько отклонится стрелка прибора?

7.17

Показание милливеберметра $\Delta\Phi = \Phi = \frac{B_0 m}{\pi/\rho}$.

O2-7.18

На оси кругового витка радиусом $R = 1$ см на расстоянии $L = 10$ см от него в некоторый момент времени оказывается «точечный» магнитный диполь, параллельный оси витка и движущийся вдоль нее со скоростью $v = 1$ km/c. Оценить силу тока в витке, если его сопротивление $r = 0,001$ Ом, а величина магнитного момента диполя $\mathfrak{N} = 0,1$ эрг/Гс.

O2-7.18

На оси кругового витка радиусом $R = 1$ см на расстоянии $L = 10$ см от него в некоторый момент времени оказывается «точечный» магнитный диполь, параллельный оси витка и движущийся вдоль нее со скоростью $v = 1$Km/c. Оценить силу тока если его сопротивление $r = 0,001$ Ом, а величина магнитного момента диполя $\mathfrak{J} = 0,1$ эрг/Гс.

7.18

$= \frac{6\mathfrak{M}\pi R^2 v}{cL^4 r} = 18\pi \cdot 10^4$ ед. СГСЭ $\approx 0,19$МА.

O2-7.19 Намагниченная пуля

Намагниченная пуля пролетает вдоль оси тонкой (плоской) катушки, соединенной с баллистическим гальванометром через идеальный выпрямляющий элемент. Пуля намагничена вдоль своей оси, ее размеры малы по сравнению с диаметром катушки D. Определить магнитный момент пули $\mathfrak{M}$, если известно, что гальванометр отклонился после пролета пули на угол φ. Известны баллистическая постоянная гальванометра b [рад/Кл], число витков катушки n и сопротивление цепи R.

7.19

$\mathfrak{m} = \frac{\varphi RD}{4\pi bn}()$.

21,22,23

7.21

$v_0 = B_0\sqrt{\frac{R^3}{2m}} = 20$ m/c.

7.22

$\mathfrak{N} = \frac{R}{2\pi cn}\frac{\left(h^2+a^2\right)^{3/2}}{ba^2}\varphi$.

7.23

$Q = \frac{B_1 SN}{cR} = 2,9 \cdot 10^6$ ед. СГСЭ $\approx 10^{-3}$ К, где B_1 - начальная магнитная индукция в щели.

Если H_1 - поле внутри магнетика, то $H_1 = -\frac{4\pi}{3}I_1$, где I_1 - остаточная намагниченность шара, а коэффициент $4\pi/3$ - размагничивающий фактор шара (см. Д. В. Сивухин, т. III, 61), $B_1 = \frac{8\pi}{3}\frac{I_0}{\sqrt{\left(\frac{4\pi}{3}\right)^2+1}} = 973$ Гс.

O2-7.24 Магнитики на оси соленоида

В торцевых плоскостях на оси длинного соленоида помещают одинаковые магнитики объемом $V = 1$ см ^{3} каждый и намагниченностью $4\pi I = 12,5$кГс, повернутые друг к другу разноименными полюсами. Магнитики отпускают, и они затем слипаются в центре соленоида, замкнутого на сопротивление $R = 1$ Ом. Какой заряд Q протечет при этом в цепи соленоида, витки которого намотаны с плотностью $n = 10^3$ см$^{-1}$?

7.24

$Q = \frac{4\pi IVn}{cR} \approx 3,75 \cdot 10^8$ ед. СГСЭ $\approx 0,125$К.

14.2.5 Problems about energy and forces in a magnetic field

O2-7.33 Влияние деформаций соленоида на ток

По длинному идеально проводящему соленоиду длиной l_0 течет постоянный ток $\mathscr{J}_0$. Как будет меняться ток во времени, если растягивать и сжимать соленоид таким образом, чтобы его длина менялась по закону $l = l_0 + a\cos\omega t$?

Solution

(???)

МФТИ-ГКЭ.2020.3А Сжимающаяся от тока оболочка

В одном из экспериментов, нацеленных на создание управляемого термоядерного синтеза, ток $I_0 = 2$МА пропускается по находящейся в вакууме полой тонкостенной цилиндрической оболочке радиуса $R_0 = 1$ см вдоль её образующей. В результате оболочка начинает сжиматься симметрично к оси системы. Найти изменение кинетической энергии оболочки на единицу её длины к моменту, когда она сожмётся до $R_1 = 10^{-2}R_0$. Толщину оболочки δ считать малой на протяжении всего процесса: $\delta \ll R_1$.

Первое решение

(?? нужно доучить силу ампера!!!?)

Выделим тонкий элемент вдоль образующей цилиндра с массой на единицу длины $dm = \rho\delta \cdot Rd\varphi$. По нему протекает ток $dJ = J_0\frac{d\varphi}{2\pi}$. Уравнение движения элемента:

$$dm \cdot \ddot{R} = \frac{dJ \cdot B(R)}{2c}$$

Коэффициент 2 в знаменателе учитывает тот факт, что поле, действующее на элемент оболочки, составляет половину от полного поля. (???? укажу это в 1й части!!! это потому что поле убывает к нулю внутри оболочки???)

Подставляя магнитное поле на поверхности оболочки $B(R) = 2J_0/cR$ (внутри оболочки поля нет), и суммируя по всем элементам, получаем уравнение движения

$$m\ddot{R} = \frac{J_0^2}{c^2R}$$

где $m = \rho \cdot 2\pi R\delta$.

Работа силы Ампера $f(R) = \frac{J_0^2}{c^2R}$ по обжатию оболочки равна (знак минус учитывает, что $dR < 0$):

$$A = -\int\limits_{R_0}^{R_1} f(R)dR = \frac{J_0^2}{c^2}\ln\frac{R_0}{R_1}$$

Поскольку вначале оболочка покоилась, то работа силы переходит в конечную кинетическую энергию:

$$K = A = \frac{J_0^2}{c^2}\ln\frac{r_0}{r_1} = \frac{\left(2\cdot 10^6\cdot 3\cdot 10^9\right)^2}{\left(3\cdot 10^{10}\right)^2}\ln 10^2 = 1,84\cdot 10^{11}(\text{ эрг / см }) \text{ или } 1,84\text{М Дж/м.}$$

Второе решение

(???)

Выражение для силы Ампера можно получить также следующим образом. Выделим внутри оболочки цилиндрический слой $[r; r+dr]$. Пусть dJ - протекающий в этом слое ток. Сила Ампера, действующая на него: $df = \frac{1}{c}dJ \cdot B$, где $B(r) = \frac{2J(r)}{cr}$ - поле, создаваемое током $J(r) = \int\limits_R^r dJ$, охватываемым этим слоем (внешние токи вклада в поле не дают, собственное поле слоя на него самого не действует).

Интегрируя по всей толще оболочки $r \in [R; R+\delta]$, приходим к тому же результату (в приближении $R \gg \delta$):

$$f = \int \frac{1}{c}BdJ \approx \frac{1}{c^2R}\int\limits_0^{J_0} 2JdJ \approx \frac{J_0^2}{c^2R}$$

МФТИ-ГКЭ.2020.3Б Нагрев оболочки от тока

В одном из экспериментов, нацеленных на создание управляемого термоядерного синтеза, ток $I_0 = 1$ МА пропускается по находящейся в вакууме тонкостенной цилиндрической плазменной оболочке вдоль её образующей. Начальный радиус оболочки $r_0 = 1$ см, толщина $\delta = 0,1$ мм, масса оболочки на единицу длины $m = 0,1$ мг/см. Протекание тока прекращается при сжатии до $r_1 \sim \delta$. Оценить температуру, до которой можно таким образом нагреть плазму, считая её квазинейтральной смесью идеальных газов протонов и электронов. Омическим нагревом пренебречь.

Solution

(???что такое плазменная оболочка??)

Согласно решению задачи 3А, работа по обжатию оболочки переходит в ее кинетическую энергию $K = \frac{J_0^2}{c^2} \ln \frac{r_0}{\delta}$.

После того, как вся энергия перейдет в тепло, получаем $K = 3\nu R \Delta T/2$, поскольку плазма - смесь одноатомных газов протонов и электронов. Здесь $\nu = \frac{2m}{\mu} \approx \frac{2m}{\mu_H}$ - количество молей на единицу длины оболочки, с учётом того, что масса электрона много меньше массы протона. Окончательно

$$\Delta T = \frac{J_0^2 \mu_{\text{H}}}{3mRc^2} \ln \frac{r_0}{\delta} = \frac{\left(10^6 \cdot 3 \cdot 10^9\right)^2 \cdot 1}{\left(3 \cdot 10^{10}\right)^2 \cdot 3 \cdot 10^{-4} \cdot 8,31 \cdot 10^7} \ln 10^2 \cong 1,85 \cdot 10^6 \text{ K}$$

О2-7.34 Давление в соленоиде

По длинному соленоиду, имеющему n [витков/см], течет ток $\mathscr{J}$. Найти давление P, действующее на боковую поверхность соленоида. Магнитная проницаемость среды $\mu = 1$.

7.34

: $p = \frac{2\pi}{c^2}\theta^2 n^2$.

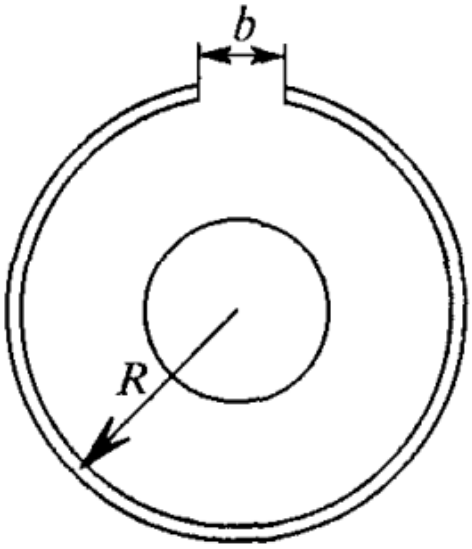
Решение. Способ 1 . Сначала определим давление магнитного поля как плотность магнитной энергии $P = w_{\text{M}} = \frac{B^2}{8\pi} = \frac{2\pi}{c^2}{}^2 n^2$. Заметим, что сила

магнитного давления направлена наружу (в ту область, где нет поля или оно меньше) в отличие от электрического поля. Например, пластины заряженного плоского конденсатора притягиваются друг к другу, т. е. сила давления электрического поля направлена в область поля.

Способ 2. Рассмотрим второй подход, основанный по существу на расчете силы, действующей на ток в магнитном поле. Возьмем элемент тока dl. Этот элемент тока соленоида находится в магнитном поле B, созданном всеми элементами обтекаемого током соленоида, кроме выделенного. Сила, действующая на элемент тока dl, находящийся в магнитном поле, равна $\frac{}{c}$ dl B. Указанное поле B может быть найдено из следующих соображений. Внутри длинного соленоида поле вблизи элемента тока $\&dl$ складывается из поля B, создаваемого всеми элементами тока соленоида, кроме данного элемента тока, и поля B', создаваемого данным элементом тока. Сумма этих двух полей одинакового направления равна $4\pi ng/c$, т.е. $B + B' = 4\pi n_{\mathscr{C}}/c$. Вне длинного соленоида сумма этих полей вблизи рассматриваемого элемента тока, как известно, равна нулю вследствие того, что поле B' меняет свое направление на обратное. Поэтому $B - B' = 0$. Из записанных двух уравнений находим $B = 2\pi n\mathscr{G}/c$, откуда сила, действующая на элемент тока, равна $\frac{2\pi \mathscr{J}^2}{c^2} ndl$, а искомое давление $P = \frac{2\pi \mathscr{J}^2}{c^2} n^2$, как при энсргетическом рассмотрении (способ 1).

О2-7.35

Во внешнем тонкостенном цилиндрическом проводнике коаксиального кабеля (рис. 106) вдоль образующей сделана щель шириной $b \ll R$(R - радиус внешнего проводника).



Найти силу, действующую на центральный проводник при пропускании по этому кабелю тока $\mathscr{J}$. Радиус центрального проводника $r \ll R$. (Ток течет по центральному проводнику в одну сторону, а по внешнему проводнику - в другую.)

7.35

$F = \frac{2}{c^2 R^2} \frac{b}{\pi}$.

O2-7.37

Магнит в виде круглого длинного стального цилиндра установлен вертикально. Для расчета принимаем, что на его полюсе N сосредоточена магнитная масса m. На полюс опирается проволочная скоба $ABOCD$ со стержнем ON (рис. 107), имеющая форму буквы «Т»; концы скобы A и D погружены в ртуть, налитую в горизонтальное кольцевое корыто. Точка O является серединой BC ($BO = OC = l$). Части $AB = CD$ малы по сравнению l. К магниту и ртути в корыте подводится постоянное напряжение, вследствие чего по стержню N идет ток 2 б и прволочный контур вращается вокруг ON. Расстояние ON проволоки BC от полюса N равно l. Определить: 1) момент пары сил M, вращающих контур; 2) точку приложения силы, действующей на плечо C.

Ук а з а н и е. Магнитная масса намагниченного стержня длиной L (магнитного диполя) есть отношение магнитного момента стержня $\mathfrak{M}$ к его длине, т. е. $m = \mathfrak{M}\mathfrak{T}/L$. При этом (в данной модели) предполагается, что L - это расстояние между точечными магнитными массами m (аналогия с электрическим диполем).

7.37

1) $M = m\mathscr{H}(2 - \sqrt{2}); 2) x = l(\sqrt{2} - 1)$.

O2-7.38

Вдоль оси цилиндрического жидкого проводника радиусом a равномерно по сечению течет ток $\mathscr{J}$. Найти давление $P(r)$, обусловленное взаимодействием тока с созданным им магнитным полем.

7.38

$P(r) = \frac{2}{c^2 \pi a^2} \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)$.

O2-7.39

На рис. 108 изображена схема электромагнитного насоса для перекачки расплавленного металла. Участок трубы с 54 расплавленным металлом помещается в магнитное поле, перпендикулярное оси трубы;

через этот же участок в перпендикулярном (к магнитному полю и оси трубы) направлении пропускается ток. Найти избыточное давление ΔP, создаваемое насосом. Провести числовой расчет для трубы квадратного сечения со стороной $a = 1$ см при $= 100$ А, $B = 1000$ Гс.

7.39

$\Delta P = \frac{B}{ca} = 10^4$ дин /см$^2 = 10^{-2}$ атм $= 1\kappa$.

O2-7.40

Для осуществления теплосъема с ядерных реакторов в качестве теплоносителя применяют расплавленные металлы. Перекачка металлов по трубам производится с помощью электромагнитных насосов: участок трубы с расплавленным металлом помещается в поперечное магнитное поле, т. е. поле, перпендикулярное оси трубы; через тот же участок трубы перпендикулярно ее оси и магнитному полю пропускается поперечный электрический ток. При этом возникает сила, приводящая жидкость в движение. Оценить ток, необходимый для перекачки ртутй по трубе диаметром $D = 20$мм и длиной $L = 10$ m со скоростью $V = 1$ s/c. Вязкость ртути $\eta = 1,5 \cdot 10^{-2}$ дин $\cdot$с/см^2, магнитное поле $B = 1000$ Гс.

7.40

≈ 600 А.

Решение. Сила, действующая на столб ртути в трубке, $F \approx \subset B/c$. Такая сила эквивалентна разности давлений на концах трубы $P_2 - P_1 = 4F/\left(\pi D^2\right)$. Подставляя эту разность в формулу Пуазейля (см. Д. В. Сивухин т. I, 97), получим

$$\approx \frac{32\dot{V}\eta cL}{BD^3} = 1,8 \cdot 10^{12}\text{e.} = 600 \text{ А}.$$

O2-7.41

В прямоугольную кювету (рис. 109), передняя и задняя стенки которой мсталлические, а прочие стенки диэлектрические, налит электролит с удельной проводимостью $\lambda = 0,2$ О$^{-1} \cdot$ см$^{-1}$. К металлическим стенкам приложено напряжение $V = 30$ В, и вся кювета помещена в однородное магнитное поле с индукцией $B = 100$ Гс, направленной вертикально. Размеры кюветы: $L = 20$ см, $a = 2$ см, плотность электролита $\rho = 1$г/см^3. Определить разность уровней жидкости Δh около правой и левой стенок кюветы.

7.41

$\Delta h = \frac{\lambda VBL}{ac\rho g} \approx 0.6$ cm.

42

7.42

$F = \frac{2^2 d}{c^2(R^2 - r^2)}$. Сила направлена от оси цилиндра к оси стержня.

O2-7.43

Два параллельных достаточно длинных провода находятся на расстоянии 20 см друг от друга. В них поддерживаются токи силой 20 А каждый, направленные в противоположные стороны. 1) Какую работу на единицу длины проводов совершает магнитное поле при удалении проводов на расстояние 40 см? 2) Как изменится при этом магнитная энергия единицы длины системы двух проводов?

7.43

1) $A = 8 \ln 2$ [эрг]. 2) Увеличится на $\Delta W_{\text{m}} = 8 \ln 2$ [эрг].

О2-7.44

Вблизи длинного прямого провода, по которому течет ток $\mathscr{J}_1 = 10$ А, расположена квадратная рамка с током $\mathscr{J}_2 = 1$ А (рис. 110). Рамка и провод лежат в одной плоскости, стороны рамки $a = 6,8$ см, расстояние от рамки до провода $b = 4$ см. Какую работу нужно совершить, чтобы прямой провод передвинуть в положение, указанное на рисунке штриховой линией?

7.44

$A = \frac{2a_{12}}{c^2} \ln\left(1 + \frac{a}{b}\right) \approx 2,7$ эрг.

О2-7.45

При производстве полиэтиленовой пленки широкая тонкая полоса протягивается по роликам со скоростью v(см. рис. 64). В процессе обработки поверхность пленки приобретает равномерно распределенный заряд σ.Над пленкой на расстоянии d, малом по сравснию с шириной пленки, расположен прямой провод, по которому течет ток Я. Направление тока совпадает с направлением движения пленки. Найти силу, действующую на единицу длины пленки. Оценить величину этой силы при $v = 1$ m/c, $\sigma = 10^{-7}$Кл/m^2, $\mathfrak{d} = 10$ А.

7.45

$f = \frac{2\pi \mathscr{J} v\sigma}{c^2} \approx 6,3 \cdot 10^{-10}$ дин / $= 6,3 \cdot 10^{-3}$H/m.

О2-7.46

На расстоянии $L = 10$ см от прямого провода, по которому течет ток $\mathscr{J}_1 = 10$ А, расположена квадратная рамка со стороной $l = 1$ см таким образом, что две ее стороны параллельны проводу, и вся система лежит в одной плоскости (рис. 111). По рамке течет ток $\mathfrak{d}_2 = 1$ А. Найти силу взаимодействия между проводом и рамкой.

7.46

$F = \frac{2\mathscr{J}_1\mathscr{J}_2}{c^2}\left(\frac{l}{L}\right)^2 \approx 2 \cdot 10^{-3}$ дин.

О2-7.47

Однородно заряженное непроводящее тонкое кольцо (масса m, заряд q) быстро вращается с угловой скоростью ω вокруг своей оси во внешнем однородном магнитном поле B (рис. 112). Найти угловую скорость прецессии Ω.

О2-7.48

Постоянный магнит, выполненный в виде стержня, помещен в слабое однородное магнитное поле (рис. 113). Чтобы повернуть его на 180° из положения по полю в положение 4 в. 4 против поля, нужно затратить работу A. Стержень приводят в быстрое вращение вокруг своей оси с частотой $\omega = 80$c^{-1}, сообщая энергию вращения $\mathscr{E}_{\text{пр}} = A$. Стержень начинаст прецессировать с частотой Ω. Найти частоту прецессии.

О2-7.49

Над большим горизонтальным латунным листом помещена магнитная стрелка с магнитным моментом $\mathfrak{M}$. Стрелка укреплена на вертикальной оси Рис. 113 и связана со спиральной пружиной, модуль кручения которой f. Как изменится положение равновесия стрелки, если по листу потечет поверхностный ток плотностью i? Направление тока совпадает с начальным равновесным положением стрелки. Рассмотреть случай малых углов закручивания. 56

O2-7.50

Компас располагают под проводом, по которому течет постоянный ток, на расстоянии $R = 10$ см от оси провода. Найти ток, при котором стрелка поднимется над своим шпеньком. Остаточная индукция стали стрелки равна индукции насыщения $B_0 = 20$кГ. Плотность стали $\rho = 7,8\text{г/см}^3$.

O2-7.51 Разгон спутника полем Земли

Искусственный спутник Земли массой $m = 1000$ кг выполнен в виде тонкостенного шара. Для сообщения ему угловой скорости можно использовать магнитное поле Земли, индукция которого $B = 0,5$ Гс. Найти угловую скорость ω, которую приобретает спутник при быстрой разрядке аккумуляторов, имеющих заряд $Q = 5$ А$\cdot$ ч, через обмотку $N = 20$ витков, уложенную на поверхности спутника вдоль окружности большого круга. Считать магнитное поле Земли параллельным плоскости обмотки.

O2-7.53

По двум широким и длинным металлическим плоским лентам l и 2, поставленным параллельно друг другу, текут антипараллельные токи, линейная плотность которых $i = d_e/dl = \text{const}$. Пространство между лентами плотно без зазоров заполнено двумя плоскими слоями магнетиков с магнитными проницаемостями μ_1 и μ_2 (рис. 114).

(картинка)

Определить давление на каждую из металлических лент, а также на границу раздела магнетиков.

O2-7.54 Две шины (???)

Определить индуктивность на единицу длины двух плоских шин, находящихся на расстоянии d друг от друга. Ширина шины $a \gg d$. Найти силу, действующую на единицу площади шин, если по ним текут одинаковые токи в противоположных направлениях.

(?? не совсем понял задачу?? ладно, с ответами разобраться скорее всего можно.)

O2-7.55

Из энергетических соображений оценить коэффициент самоиндукции круглой петли длиной l из у тонкой проволоки радиусом r.

O2-7.56

Два одинаковых длинных соленоида длиной Рис. 115 $l = 50$ см, приставленных торцами друг к другу (рис. 115), притягиваются с силой $F = 1$Н, когда по их обмоткам течет одинаковый ток $\mathfrak{V} = 10$ А. Чему равен коэффициент самоиндукции L каждого из соленоидов? 57

7. SOLUTIONS Эпектромагнитная индукция. Энергия и силы в магнитном поле.

Сохранение магнитного потока в сверхпроводящих контурах

7.47

$\Omega = \frac{qB}{2mc}$. Обратите внимание на то, что угловая скорость прецессии не зависит от скорости вращения кольца и от угла между направлениями векторов B и ω.

7.48

$\Omega = \frac{\omega}{4} = 20\text{с}^{-1}$.

7.49

Стрелка повернется на угол $\varphi = \frac{2\pi imt}{cf}$.

7.50

$\geqslant \frac{2\pi c R^2 pg}{B_0} \approx 2400$ А.

7.51

$\omega = \frac{3}{2}\frac{\pi NB}{mc}Q = 0,1c^{-1}$.

7.52

$N = \frac{cD^2}{16l}BE = 1,4 \cdot 10^{16}$ эрг /с $= 1,4 \cdot 10^9$ Вт при $\frac{D}{d} = \sqrt{e}$, где e - основание натурального логарифма.

7.53

$P_1 = \frac{2\pi i^2}{c^2}\mu_1$; $\quad P_2 = \frac{2\pi i^2}{c^2}\mu_2$ - давления на ленты.

$$P_{12} = \frac{2\pi i^2}{c^2}(\mu_1 - \mu_2) - \text{ давление на границе раздела магнетиков.}$$

В целом система сбалансирована - не движется.

7.54

$L = 4\pi\frac{d}{a}$; $\quad P = \frac{2\pi \mathscr{J}^2}{c^2 a^2}$.

7.55

$L = 2l\ln(l/r)$ при $l \gg r$.

7.56

$L = 2\frac{Fc^2}{g^2}l = 10^7$ см $= 10^{-2}\Gamma$.

7.57

$F = 6\left(\frac{SN}{cl^2}\right)^2 = 6 \cdot 10^{-4}$ дин; $M = \frac{2S^2N^2}{l^3} \approx 20$ см.

7.58

$F = \frac{\mu-1}{8\pi}B^2S$.

7.59

$L = \frac{2c^2Fl}{(\mu-1)\mathscr{J}^2} = 10^6$ см $= 10^{-3}\Gamma$.

7.60

$h = \frac{2\pi n^{22}}{c^2 \rho g}(\mu - 1)$.

7.61

$A = \frac{2\pi S}{\left(\mu + \frac{L}{l}\right)L}\left(\frac{\mu N g}{c}\right)^2; \quad \mu \gg 1, L \gg l.$

7.62

$F(d) = -\left[\frac{rN}{c\left(\frac{R}{\mu} + \frac{d}{\pi}\right)}\right]^2; \quad F(0) = -\left(\frac{r\mathscr{O}N\mu}{cR}\right)^2.$

7.63

$\frac{F_1}{F_2} = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^2.$

7.64

$F \approx 49,8$Н.

7.65

$\varphi = \frac{1}{2\pi}\frac{B_1}{B_0}\frac{lS}{L^3} \approx 0,1$ рад $\approx 6^\circ$.

7.66

$\frac{\Delta\Omega}{\Omega} = \frac{IB}{\rho g l} = \pm 10.$

7.67

$\mathscr{O}_0 = c\sqrt{\frac{aF}{2\pi R}}.$

7.68

$\vartheta_{\text{max, магн}} = \frac{cdB_{\text{кр}}}{2\pi} \approx 480$ А - этот ток определяется предельным магнитным полем, разрушающим сверхпроводимость.
$\mathscr{I}_{\text{max, мех}} = c\sqrt{\frac{F_{\text{р}}d}{\pi D}} \approx 400$. Таким образом, предельный ток определяется прочностью обмотки.

7.69

$F = \frac{9}{64}B_0^2 R^2 = 9 \cdot 10^6$ дин.

7.70

$F = \frac{^2}{c^2 R}\left(\ln\frac{8R}{r} - 1\right)$.

7.71

$P = \frac{B_0^2}{8\pi}\left(\frac{S}{S-\sigma}\right)^2$.

7.72

$P_{\text{M}} S^2 = \text{const}$, где P_{M} - магнитное давление на стенки соленоида, S - поперечное сечение соленоида.

7.73

Линейная плотность поверхностного тока $i = \frac{}{2\pi r}$; давление направлено внутрь сверхпроводника $P_1 = \frac{^2}{2\pi c^2 R_1}$; $\quad P_2 = \frac{^2}{2\pi c^2 R_2} < P_1$.

7.74

$r_{\max} = \frac{3B_{\text{кр}}^2}{32\pi\rho g} \approx 1,7$ cm.

7.75

$A = \frac{1}{2} L \mathscr{C}_0^{\,0}\, {}^{2}_{0} \frac{L_{\text{c}}/N^2}{(L - L_{\text{c}}/N^2)}$.

7.7

6. $r\,(F_{\max}) = \frac{1}{2\sqrt{\alpha}} \approx 5$ cm; $\quad F_{\max} = \gamma V B_0^2 \sqrt{\frac{\alpha}{e}} \approx 0,1$ дин, где e - основание натурального логарифма.

7.77

$F = 10^5$ дин $= 1$Н.

7.78

$F_2(x) = F_1(x) \frac{\mathscr{I}_2^2}{{}^2_1} \left[1 - \frac{2c^2}{\mathscr{I}_1^2 L_0} \int_0^x F_1(x)dx\right]^{-2}$.

При $\mathscr{O}_1 = {}_2 \quad F_2(x) > F_1(x) (x > 0)$

Указание. При изменении x сохраняется магнитный поток.

7.79

$M = \pm\frac{4\pi}{c^2} g^2 n N S \sin\theta$. Катушки стремятся развернуться так, чтобы их собственные поля были направлены в одну сторону.

7.8

0. $F = \mathfrak{M}\frac{dB}{dx} = \mathfrak{M}\frac{2\pi\mathscr{I}n}{cR}$.

7.8

1. $F(x) = \left(\frac{2\pi}{c}gR\right)^2 \frac{3r^3x}{2(R^2+x^2)^4}$, где r - радиус шарика. При $x = \pm\frac{R}{\sqrt{7}}$ сила отталкивания максимальна (график на рис. 404).

7.8

2. $f = \frac{B^2}{8\pi}$ (давление, направленное к центру цилиндра).

7.8

3. $h = \frac{1}{2}\left(\frac{3\mathfrak{m}^2}{mg}\right)^{1/4} \approx 2,1$ cm.

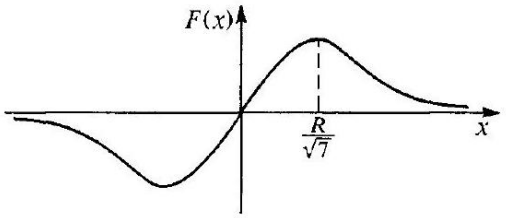


Рис. 404

7.8

4. $g = \frac{cA}{B_0S}$.

7.8

5. $F_{\text{M}} \sim 10^{18}a^3 > F_{\text{гр}} \sim 10^{15}a^3$ дин, где a - размер капли. Капля будет отталкиваться от поверхности звезды.

O2-6.24 Lines of force of a superconducting sphere

A superconducting sphere with a radius of R is placed in a weak uniform external magnetic field. At two points symmetrical with respect to the center of the sphere and lying outside the sphere in the equatorial plane perpendicular to the external magnetic field, there are two mosquitoes that can fly along the magnetic field lines. The initial distance between them is $2r_0 > 2R$. How far can they approach each other if they fly out at the same time, in the same direction and at the same constant speed?

Solution

Просто нужно знать силовые линии от сверхпроводящей сферы в поле (!?!? currently I don't know how to solve it.) This is an unphysical problem.

By using a magnetic dipole approximation of a field, one can write the total field around the superconductor as

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0\left(1 + \frac{R^3}{2r^3}\right) - \frac{3R^3\left(\mathbf{B}_0\mathbf{r}\right)}{2r^5}\mathbf{r}$$

(??? now I don't know what to do)

$$r_{\min} = r_0\sqrt{1 - \left(\frac{R}{r_0}\right)^3}$$

14.2.6 Basic Problems about Particles in Electromagnetic Field

O2-8.1 Три электрона разлетаются

Три электрона в состоянии покоя помещены в вершинах правильного треугольника со стороной $a = 1$ см. После этого они начинают двигаться под действием взаимного отталкивания. Определить предельное значение их скоростей.

8.1

$v = e\sqrt{\frac{2}{ma}} = 2,2 \cdot 10^4$ cm/c, где m - масса электрона.

O2-8.2 Три релятивистских электрона разлетаются

Три электрона в состоянии покоя помещены в вершинах правильного треугольника со стороной $a = 1$ см. После этого они начинают двигаться под действием взаимного отталкивания. Определить предельное значение их скоростей, считая электроны релятивистскими. При каких расстояниях a можно пользоваться нерелятивистским приближением?

8.2

$v = c\frac{\left(1+\frac{2mc^2a}{e^2}\right)^{1/2}}{1+\frac{mc^2a}{e^2}}$. Нерелятивистское приближение справедливо при $a \gg \frac{e^2}{mc^2} = r_{\text{кл}} = 2,8 \cdot 10^{-13}$ см - классический радиус электрона.

O2-8.3 Скорость электронов из конденсатора

В плоском конденсаторе с напряженностью электрического поля $E = 1000$ В/ м из отрицательно заряженной пластины в результате термоэмиссии вылетают электроны. Принимая во внимание действие поля электрического изображения, оценить, на каком расстоянии от этой пластины скорость электронов будет наименьшей.

8.3

Скорость минимальна при $x = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{e}{E}} = 6 \cdot 10^{-5}$ cm.

O2-8.4

Вдоль эвакуированной длинной цилиндрической трубы радиусом R создан стационарный аксиально симметричный поток электронов, ускоренных при прохождении разности потенциалов V. Найти распределение плотности электронов в зависимости от радиуса r в некотором сечении пучка, если результаты измерения магнитного поля B как функции r в этом сечении оказалось возможным описать выражением $B = B_0(r/R)^q$ при $r < R, q > 0$, где B_0 и q - постоянные. Определить электрическое поле $E(r)$, предполагая, что параметры пучка не изменяются вдоль его оси.

8.4

$n(r) = \frac{c(1+q)}{4\pi evR}B_0\left(\frac{r}{R}\right)^{q-1}$; $\quad E(r) = \frac{c}{v}B_0\left(\frac{r}{R}\right)^q$, где $v = \sqrt{\frac{2eV}{m}}$ - скорость электронов.

О2-8.5*

Две щели S_1 и S_2 шириной $d = 0,1$ см каждая (рис. 128), установленные в эвакуированном сосуде, выделяют плоский пучок электронов с энергией $W = 400$ В. На каком расстоянии x от щели S_2 ширина электронного пуч- ка удвоится из-за кулоновского расталкивания электронов, если электронный ток, приходящийся на единицу длины шели (за щелью S_2), равен $i = 10^{-4}$ А/см? При расчетах щели считать бесконечно длинНыми.

8.5

$x = 12$ см.

Решение. Задача решается в предположении, что пучок расширяется медленно, так что продольное электрическое поле можно не учитывать. Тогда для нахождения поперечного электрического поля можно применить теорему Гаусса

$$2E = 4\pi k$$

где $k = i/v$ - погонный заряд пучка, приходящийся на единицу площади пучка в направлении длины щели, v - его продольная скорость. Подставляя

эти соотношения в уравнение движения граничного электрона в направлении поперек пучка и считая, что время $t = x/v$, получим дифференциальное уравнение для границ1 пучка $y = y(x)$:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{2\pi ei}{mv^3}$$

Интегрируя это уравнение с начальным условием $y(0) = d/2$ и потребовав, чтобы при $x = l$ толщина пучка удвоилась: $y(l) = d$, получим уравнение для определения искомого расстояния l, из которого и найдем

$$x = \sqrt{\frac{dmv^3}{2\pi(-ei)}}.$$

Определяя v как $v = \sqrt{2W/m}$, получим числовой ответ.

О2-8.6*

Определить частоту поперечных колебаний протонов, захваченных релятивистским электронным пучком, имеюцим сечение $\pi R^2 = 3,14 \cdot 10^{-2}$ см^2 и силу тока $\mathfrak{e} = 10^3$ А.

8.6

$\omega = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{2e\mathscr{I}}{mc}} \approx 2,4 \cdot 10^9 \text{с}^{-1}$; $\quad v = \frac{\omega}{2\pi} = 0,38 \cdot 10^9 \Gamma$ L.

Решение. Уравнение радиального движения протона в поле электрического пучка (действием магнитного поля пренебрегаем)

$$m\ddot{r} + eE_r = 0,$$

где E_r - абсолютная величина радиальной составляющей электрического поля пучка. По теореме Гаусса $E_r = \frac{2q}{r}$, где $q = en\pi r^2$ - заряд внутри трубки радиусом r, приходящийся на единицу длины, n - концентрация электронов. Электрический ток $g = env\pi R^2 \approx enc\pi R^2$ (с учетом того, что $\approx\approx$). Подстановка в уравнение радиального движения даст ответ задачи.

О2-8.7

Из ускорителя выводится пучок протонов с энергией $W = 4$ МэВ, который затем проходит в вакууме путь $l = 4$ м прежде, чем попасть на мишень. Вследствие кулоновского взаимодействия частиц размеры пучка увеличиваются. Оценить максимально возможную плотность тока в пучке, если допускается увеличение радиуса пучка на $\delta = 10\%$ по сравнснию с исходным. Распределение частиц в пучке аксиально симметрично, их начальными поперечными скоростями пренебречь.

8.7

$j_{\max} \approx \frac{\delta m}{\pi e l^2}\left(\frac{2W}{m}\right)^{3/2} = 1,5 \cdot 10^7$ ед. СГСЭ $= 5$ mA/cm^2.

O2-8.8

На рис. 129 изображена электронная лампа непосредственного накала со всеми поданными на нее напряжениями. С какой скоростью (выраженной в вольтах) электроны будут достигать анода лампы?

8.8

Со скоростью от 56 до 60 В вследствие неэквипотенциальности нити лампы, вдоль которой есть падение напряжения 4 В. Такое распределение скоростей будет иметь место, если анодный ток мал по сравнению с током накала, что обычно имеет место.

O2-8.9

Найти отношение силы кулоновского расталкивания к силе притяжения Ампера двух параллельных пуч- ков электронов, прошедших ускоряющий потенциал $V = 10$ кВ.

8.9

$\frac{F_{\text{К}}}{F_{\text{А}}} = \left(\frac{c}{v}\right)^2 = \frac{c^2 m}{2eV} \approx 25,6.$

O2-8.10

Какое количество неподвижных однозарядных положительных ионов нужно поместить в пространстве, занимаемом однородным Цилиндрическим пучком электронов, движущихся со скоростью v параллельно оси, чтобы радиус пучка при его движении не изменялся? Плотность Электронов в пучке n_0. Столкновениями электронов с ионами пренебречь. 63

8.10

$n = n_0 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right).$

O2-8.11

Электронный пучок распространяется по цилиндрическому плазменному каналу, нейтрализующему пространственный заряд. Плотность тока в пучке монотонно спадает при удалении от оси. Оценить ток пучка (в амперах), при котором размеры электронных траекторий станут меньше радиуса пучка. Скорость электронов $v = 0,9c$.

O2-8.14*

Для моделирования траектории атомной частицы с зарядом e и импульсом p, движущейся в постоянном магнитном поле, часто пользуются тем обстоятельством, что очень легкий (невесомый) гибкий проводник с током J, находящийся под постоянным механическим натяжением T, занимает в том же магнитном поле положение, совпадающее с траекторией частицы. Найти связь между ϑ, e, p, T. Настица движется перпендикулярно к магнитному полю. Предполагается, что вне магнитного поля участки проводника прямолинейны и расположены вдоль соответствующих прямолинейных же участков траектории.

O2-8.17

В установке для разделения изотопов ^{235}U и ^{238}U пучок однократно ионизованных ускоренных ионов урана с энергией $W = 5$кэВпопадаетотисточникачерезщельS (рис. 132) в однородное магнитное поле, перпендикулярное к плоскости рисунка. В магнитном поле ионы разных масс движутся по различным окружностям и, совершив полуоборот, попадают в приемники. Конструкция последних должна быть такова, чтобы расстояние между пучками 235U и ^{238}U на выходе было не Рис. 132 меньше $\delta = 5$ мм. Каково должно быть магнитное поле B, удовлетворяющее этому условию? Найти также время t, необходимое для полного разделения $M = 1$ кг природного урана, если ионный ток, создаваемый источником, $\mathfrak{g} = 5$ мА. Массы протона и нейтрона считать одинаковыми и равными $1,67 \cdot 10^{-24}$Г.

O2-8.18

Сепаратор частиц устроен следующим образом: на вход цилиндрического конденсатора с внешним радиусом r_1 и внутренним радиусом r_2 попадают ионы разных масс и, двигаясь по окружности, попадают затем в магнитное поле $\mathbf{B}$ (рис. 133). Каково отношение M/q массы иона к его заряду, если он прошел этот сепаратор при напряжении на конденсаторе V, а радиус его траектории в магнитном поле равен R_T?

O2-8.19 Определение отношения заряда к массе

Один из ранних методов определения отношения заряда к массе e/m для электрона состоял в следующем. Электроны, вырванные из алюминиевого диска A, ускорялись разностью потенциалов V, приложенной между A и щелью S (рис. 134). Пройдя через щель S, электронный пучок по падал в однородное магнитное поле, перпендикулярное к плоскости рисунка. Вся система помещалась в вакууме. Изменяя величину магнитного поля, добивались того, чтобы ток на коллекторе C, регистрируемый гальванометром Г, был максимален. Измерив магнитное поле B в этот момент, можно вычислить e/m. Провести числовой расчет, если расстояние между щелью S и коллектором C равно $d = 10$ см, угол между прямой, проведенной от S КC, и начальным направлением электронного пучка $\alpha = 30°, V = 1000$ В, $B = 10,6\Gamma c$

O2-8.20

В ускорителе прямого действия протон движется в практически однородном электрическом поле внутри вакуумной трубки. Посторонние магнитные поля искривляют его траекторию, в результате чего он может попасть на стенку, не дойдя до конца трубки. Оценить допустимый уровень однородного внешнего магнитного поля в зоне такого ускорителя, если длина трубки $l = 2$ м, а протоны ускоряются до энергии $W = 4$ МэВ. Допустимое отклонение протонов от осевой линии в конце трубки $b = 1$ см. Начальной скоростью протонов пренебречь.

O2-8.21 Малые колебания в особом магните

Частица массой m с зарядом e движется по равновесной круговой орбите радиусом r_0 в горизонтальной плоскости зазора магнита (рис. 135), в котором магнитное поле спадает по радиусу по закону $B_2(r) = A/r^n \quad (0 < n < 1)$. Центр орбиты совпадает с осью симметрии zz. Определить частоту ω_z вертикальных колебаний частицы на такой равновесной орбите в случае малых отклонений от горизонтальной плоскости.

Solution

(???)

При отклонении частиц от горизонтальной плоскости возникает возвращающая (квазиупругая) сила, зависящая от компоненты магнитного поля B_r. Поскольку в зазоре магнита $\mathbf{B} \sim \mathbf{H}$ и $\mathrm{rot}\,\mathbf{H} = \mathbf{0}$, имеем

$$\frac{\partial B_r}{\partial z} = \frac{\partial B_z}{\partial r}$$

откуда при малых z получим, что

$$B_r = \frac{\partial B_z}{\partial r} z = -\frac{n}{r_0} B_z z$$

Составляющая силы Лоренца F_z запишется в виде

$$F_z = \frac{e}{c} v B_r = -\frac{e}{c} \omega_0 n B_z z = -\omega_0^2 n m z$$

где v - линейная скорость частицы на орбите, $\omega_0 = eB_z\left(r_0\right)/(mc)$ - круговая (циклотронная) частота. Из уравнения вертикальных колебаний

$$m\ddot{z} = -n\omega_0^2 m z$$

следует

$$\omega_z = \omega_0\sqrt{n} = \sqrt{n}\frac{eB_z\left(r_0\right)}{mc}$$

ответ: 8.21*: $\omega_z = \frac{eB_z(r_0)}{mc}\sqrt{n}$.

O2-8.22* Малые колебания в особом магните

Частица массой m с зарядом e движется по равновесной круговой орбите радиусом r_0 в горизонтальной плоскости зазора магнита (рис. 135), в котором магнитное поле спадает по радиусу по закону $B_2(r) = A/r^n \quad (0 < n < 1)$. Центр орбиты совпадает с осью симметрии zz. Определить частоту ω_r радиальных колебаний частицы в случае малых отклонений от равновесной орбиты.

Solution

(???)

8.22* $\omega_r = \sqrt{2-n}\frac{eB_z(r_0)}{mc}$.

Решение. Равновесная орбита устойчива по отношению к малым радиальным отклонениям частицы, если сила Лоренца изменяется с изменением радиуса r медленнее, чем центробежная сила. При малых отклонениях $\rho = r - r_0$ можно записать

$$B_z(r) = B_z(r_0) + \frac{\partial B_z}{\partial r}(r - r_0) = B_z(r_0) - \frac{n}{r_0}B_z(r_0)\,\rho$$

Радиальная составляющая силы Лоренца имеет вид

$$F = \frac{e}{c}vB_z(r) = \frac{e}{c}\omega r B_z(r) = \frac{e}{c}\omega_0\frac{r_0^2}{r}B_z(r_0)\left(1 - \frac{n}{r_0}\rho\right) =$$
$$= \frac{e}{c}\omega_0 r_0 B_z(r_0)\left(1 - \frac{\rho}{r_0}\right)\left(1 - \frac{n}{r_0}\rho\right) \approx F(r_0) - m\omega_0^2(1+n)\rho$$

При написании этого выражения использован закон сохранения момента импульса: $\omega_0 r_0^2 = \omega r^2$, где $\omega_0 = eB_z(r_0)/(mc)$ - круговая (циклотронная) частота вращения частицы на равновесной орбите.

Запишем теперь выражение для центробежной силы

$$F_{\text{L. б.}} = m\omega^2 r = \frac{m\omega_0^2 r_0^4}{r^3} \approx m\omega_0^2 r_0\left(1 - 3\frac{\rho}{r_0}\right)$$

Уравнение радиальных колебаний частицы примет вид

$$m\ddot{\rho} = -m\omega_0^2(2-n)\rho.$$

Видно, что колебательный режим (устойчивость стационарной орбиты) возможен при $n < 2$. В этом случае

$$\omega_r = \omega_0\sqrt{2-n}$$

O2-8.23

В ускорителях заряженных частиц индукция B магнитного поля, направленная вдоль оси симметрии, изменяется вблизи равновесной орбиты по закону $B \propto 1/r^n$, где r - радиус круговой орбиты и n - характерный показатель. При каком его значении обеспечивается не только круговое движение на равновесной орбите, но и радиальная устойчивость его?

O2-8.25

Один из предложенных путей получения высоких температур, необходимых для осуществления термоядерных реакций, использует так называемую «магнитную термоизоляцию». Уход быстрых частиц из зоны высокой температуры предотвращается магнитным полем. Определить силу тока J в столбе газового разряда радиусом $R = 3$ см, необходимую для того, чтобы электроны, обладающие средней скоростью хаотического движения, отвечающей температуре $T = 10^6$ K, не могли удаляться от поверхности столба на расстояние больше, чем $r = 2 \cdot 10^{-3}$ см.

O2-8.26

Рассматривая движение электрона в атоме классически, покажите, что его механический $\mathbf{L}$ и магнитный $\mathbf{9}$ моменты связаны соотношением $\mathfrak{d}\lambda = -\frac{e}{2mc}\mathbf{L}$.

O2-8.27

Вспомнив теорию гироскопа и воспользовавшись результатом предыдущей задачи, показать, что во внешнем поле B атом прецессирует с частотой $\boldsymbol{\omega} = -\frac{e}{2mc}\mathbf{B}$ (теорема Лармора).

О2-8.38

Вдоль оси находящегося в вакууме соленоида из электронной пушки инжектируется цилиндрический пучок электронов (рис. 141). Вследствие пересечения частицами сходящихся магнитных силовых линий в области неоднородного поля у торца соленоида пучок приобретает однородное вращение. Полагая, что пушка находится вдали от торца соленоида, определить угловую скорость вращения пучка. Радиальные скорости электронов, приобретенные при движении в неоднородном магнитном поле, во внимание не принимать. Провести расчет для соленоида с плотностью намотки $n = 10$ витков/см и током $= 10$ А. Для электронов отношение $e/m_e = 5,27 \cdot 10^{17}$ ед. СГСЭ.

О2-8.39

Цилиндрический электронный пучок, распространяясь в пространстве внутри эвакуированной металлической трубы радиусом R вдоль направленного по ее оси внешнего однородного магнитного поля с индукцией $\mathbf{B}$, однородно вращается относительно этой оси с ларморовской частотой $\omega = \frac{eB}{2mc}$. В результате все радиальные силы в нем оказываются уравновешенными (бриллюэновское состояние равновесия, пучок Бриллюэна). Найти зависимость продольной скорости электронов v от расстояния до оси, а также максимальный ток, который может быть получен в таком пучке при условии, что потенциал трубы относительно эквипотенциального катода не меняется и равен φ_{a}, а пучок полностью заполняет трубу. Считать скорости электронов на катоде равными нулю.

О2-8.40

Полый электронный пучок, имеющий форму тонкостенной длинной трубки, движется в вакууме в направлении своей оси, вдоль которой приложено внешнее однородное магнитное поле, и одновременно вращается относительно оси с частотой Jармора. Считая пучок бесконечно тонкой заряженной поверхностью, свернутой в трубку круглого сечения, а полную скорость электронов пучка заданной и равной v_0, найти максимальный ток $\mathscr{V}_{\max}$, который можно провести в таком пучке. Считать, что $v_0 \ll c$, где c - скорость света.

О2-8.29

Шарик массой $m = 1$ с зарядом $q = 1$ ед. СГСЭ помещен внутри соленоида на гладкой горизонтальной плоскости, по которой он может скользить без трения. Ось соленоида вертикальна. Сначала тока в обмотке соленоида не было. Затем был включен ток, и в соленоиде установилось постоянное однородное магнитное поле с индукцией $B = 100$ Гс. Во время нарастания магнитного поля возникает электрическое поле, приводящее шарик в движение. Нарастание тока происходит настолько быстро, что за время установления поля шарик не успевает сместиться на заметное расстояние. 3* 67 Определить радиус r круговой траектории, по которой будет двигаться шарик после установления магнитного поля, а также период обращения T его по этой траектории, если в начальный момент шарик находился на расстоянии R от оси соленоида. Проанализировав числовые результаты, ответить на вопрос: можно ли практически наблюдать эффект с макроскопическими шариками? В чем трудности постановки опыта с заряженными макрочастицами?

О2-8.30

В ускорителе электронов бетатроне роль ускоряющего напряжения играет ЭДС индукции, возбуждаемая изменением магнитного потока, пронизывающего орбиту электронов. Электроны движутся при этом по орбитам приблизительно постоянного радиуса. Считая радиус орбиты электрона неизменным, определить необходимое для этого в данный момент времени соотношение между средним магнитным полем $\overline{B(t)}$, пронизывающим орбиту электрона, и магнитным полем на орбите электрона $B(t)$. Магнитное поле параллельно оси симметрии вакуумной камеры бетатрона.

О2-8.31

Дипольное магнитное поле нейтронной звезды $B_0 \sim 10^{12}$ Гс, масса $M \approx 1,5 \cdot 10^{30}$кг, радиус $R_0 \approx 10$ km. Определить с помощью числовых оценок, какие силы будут доминировать в динамике релятивистского электрона ($W \sim 3$МэВ) на расстоянии от звезды порядка радиуса земной орбиты (150 млн км).

О2-8.41

Заряженный шарик движется в скрещенных однородных гравитационном и магнитном полях в среде, сила трения в которой пропорциональна скорости движения. Движение происходит в плоскости, перпендикулярной вектору индукции магнитного поля. Найти величину и направление скорости установившегося движения шарика. Известно, что в среде без трения шарик движется с дрейфовой скоростью $v_{\text{др.}}$ В среде с трением, но в отсутствие магнитного поля, скорость его установившегося движения v_1.

O2-8.42

Заряженный шарик движется в скрещенных однородных электрическом E и магнитном B полях ($E \ll B$) в среде, сила трения в которой пропорциональна скорости движения. Движение происходит в плоскости, перпендикулярной вектору индукции магнитного поля. Найти величину и направление скорости его установившегося движения, если известно, что в отсутствие магнитного поля Эта скорость равна v_1.

O2-8.43

Электрический диполь движется в однородном магнитном поле со скоростью $\mathbf{v}$, перпендикулярной B. Дипольный момент p составляет малый угол с направлением [vB] (рис. 142). Найти угловую частоту малых колебаний диполя ω_0, считая известными его момент инерции J_0, скорость v, дипольный момент $\mathbf{p}$ и индукцию поля $\mathbf{B}$.

O2-8.45

Электрический заряд q равномерно распределен по твердому непроводящему тонкому кольцу массой m. Кольцо может свободно вращаться вокруг своего (закрепленного) центра. Вначале кольцо покоится, а магнитное поле равно нулю, Затем включают однородное магнитное поле $\mathbf{B} = \mathbf{B}(t)$, перпендикулярное к плоскости кольца и произвольно меняющееся во времени. Определить движение кольца в магнитном поле.

O2-8.46

Металлическое кольцо радиусом r и массой m падает в магнитном поле, вертикальная составляющая индукции которого зависит от высоты h по закону $B(h) = B_0(1 - ah)$, где a- константа. Плоскость кольца при падении горизонтальна, омическое сопротивление кольца R. Индуктивностью кольца пренебречь. Найти зависимость скорости падения от времени 1.

8. SOLUTIONS Движение заряженных частиц в электрическом и магнитном полях. ЭДС Холла. Движение тел при наличии пондеромоторных сил

8.11

$g \geqslant \frac{mc^3}{2e}\beta\gamma \approx 17$ кА, где $\beta = \frac{v}{c}$; $\quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$; $\quad \gamma\beta \approx 2$. Результат задачи совпадает с током Альфвена $\mathscr{G} = \frac{mc^3}{e} = 17$ кА.

8.12

$AC = \frac{2\pi m v \cos a}{Be}$.

8.13

$B = \frac{W}{Re} = \frac{V}{R} = 1,07 \cdot 10^7$Г с (ускоряющее напряжение, соответствующее энергии W, равно $V = 7,6 \cdot 10^{10}$ В $= 2,53 \cdot 10^8$ ед. СГСЭ).

Указание. Протоны считать ультрарелятивистскими. Их скорость настолько близка к скорости света, что энергия покоя протона пренебрежимо

мала по сравнению с кинетической энергией. При таких условиях кинетическую энергию можно вычислить по формуле $W = mc^2$, где m - релятивистская масса протона.

8.14

* $\mathscr{A}p = Te$. Решение. Радиус кривизны траектории частицы в магнитном поле $\rho = cp/(eB)$. На единицу длины натянутого проводника действует нормально упругая сила T/ρ_1, которая уравновешивается амперовой силой $\mathscr{S}B/C$. Это дает для радиуса кривизны проводника $\rho_1 = Tc/(B)$. При выполнении условия $\rho_1 = \rho$, т. е. $\mathscr{C}p = Te$, форма траектории будет совпадать с формой проводника.

8.15

$F = \frac{}{e}\sqrt{2Wm} \approx 0,14$Н, где m и e - масса и заряд протона.

8.16

Для ^{7}Li$V = Er\ln(r_2/r_1) \approx E(r_2 - r_1) \approx 245$ В; $E = 408$ В/с. Для ^{6}Li$V = 229$ В; $E = 381$ В/cm.

8.17

$B \leqslant \frac{c\Delta m}{\delta}\sqrt{\frac{2W}{me}} \approx 4000$Гс; $t = \frac{Me}{Am_{pg.}} \approx 2,5$ года, где m - масса атома урана, Δm - разность масс атомов ^{238}U и ^{235}U, $A = 238$ - относительная атомная масса ^{238}U, m_p - масса протона.

8.18

$\frac{M}{q} = \frac{R_T^2 B^2}{c^2 V}\ln\frac{r_2}{r_1}$.

8.19

$\frac{e}{m} = \frac{8Vc}{d^2B^2}\sin^2\alpha \approx 5,3 \cdot 10^{17}$ ед. СГСЭ.

8.20

$B \leqslant \frac{3mcb}{el^2}\left(\frac{W}{2m}\right)^{1/2} = 11$с, где m и e - масса и заряд протона.

8.21

: $\omega_z = \frac{eB_z(r_0)}{mc}\sqrt{n}$.

Решение. При отклонении частиц от горизонтальной плоскости возникает возвращающая (квазиупругая) сила, зависящая от компоненты магнитного поля B_r. Поскольку в зазоре магнита $\mathbf{B} \sim \mathbf{H}$ и $\operatorname{rot}\mathbf{H} = \mathbf{0}$, имеем

$$\frac{\partial B_r}{\partial z} = \frac{\partial B_z}{\partial r},$$

откуда при малых z получим, что

$$B_r = \frac{\partial B_z}{\partial r}z = -\frac{n}{r_0}B_z z$$

Составляющая силы Лоренца F_z запишется в виде

$$F_z = \frac{e}{c}vB_r = -\frac{e}{c}\omega_0 n B_z z = -\omega_0^2 nmz$$

где v - линейная скорость частицы на орбите, $\omega_0 = eB_z(r_0)/(mc)$ - круговая (циклотронная) частота. Из уравнения вертикальных колебаний

$$m\ddot{z} = -n\omega_0^2 mz$$

следует

$$\omega_z = \omega_0\sqrt{n} = \sqrt{n}\frac{eB_z(r_0)}{mc}.$$

8.22

: $\omega_r = \sqrt{2-n}\frac{eB_z(r_0)}{mc}$.

Решение. Равновесная орбита устойчива по отношению к малым радиальным отклонениям частицы, если сила Лоренца изменяется с изменением радиуса r медленнее, чем центробежная сила. При малых отклонениях $\rho = r - r_0$ можно записать

$$B_z(r) = B_z(r_0) + \frac{\partial B_z}{\partial r}(r - r_0) = B_z(r_0) - \frac{n}{r_0}B_z(r_0)\,\rho.$$

Радиальная составляющая силы Лоренца имеет вид

$$F = \frac{e}{c}vB_z(r) = \frac{e}{c}\omega r B_z(r) = \frac{e}{c}\omega_0\frac{r_0^2}{r}B_z(r_0)\left(1 - \frac{n}{r_0}\rho\right) =$$
$$= \frac{e}{c}\omega_0 r_0 B_z(r_0)\left(1 - \frac{\rho}{r_0}\right)\left(1 - \frac{n}{r_0}\rho\right) \approx F(r_0) - m\omega_0^2(1+n)\rho.$$

При написании этого выражения использован закон сохранения момента импульса: $\omega_0 r_0^2 = \omega r^2$, где $\omega_0 = eB_z(r_0)/(mc)$ - круговая (циклотронная) частота вращения частицы на равновесной орбите.

Запишем теперь выражение для центробежной силы

$$F_{\text{ц. б.}} = m\omega^2 r = \frac{m\omega_0^2 r_0^4}{r^3} \approx m\omega_0^2 r_0\left(1 - 3\frac{\rho}{r_0}\right).$$

Уравнение радиальных колебаний частицы примет вид

$$m\ddot{\rho} = -m\omega_0^2(2-n)\rho.$$

Видно, что колебательный режим (устойчивость стационарной орбиты) возможен при $n < 2$. В этом случае

$$\omega_r = \omega_0\sqrt{2-n}$$

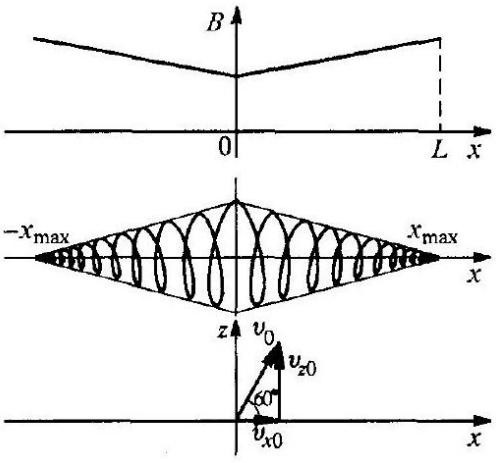


Рис. 405

8.23

Для устойчивости радиального движения необходимо, чтобы $n < 1$ (при этом $F(r_0 + \Delta r) < 0$).

8.24

:

$$x_{\max} = 5 \text{ cm}; \quad T = 0,8\text{c}.$$

Решение. Траектория заряженной частицы - спираль с уменьшающимся диаметром витков и уменьшающимся шагом при приближении к концам соленоида ($x = 0$ соответствует середине соленоида).

На рис. 405 дан график изменения поля соленоида $B(x)$, под ним - вид траектории частицы, а также вектор скорости в центральном сечении соленоида при $x = 0$

$$B = B_0 + B_0\frac{|x|}{L}.$$

Известно, что адиабатический инвариант такого движения есть $\frac{\delta}{\omega} = \text{const}$, где $\mathscr{E} = \frac{mv_z}{2}$ - кинетическая энергия частицы, а $\omega = \frac{eB}{mc}$ - циклотронная частота. Таким образом, $\frac{v_z^2}{B} = \frac{v_{z0}^2}{B_0}$. Далее $v_x = \sqrt{v_{z0}^2 + v_{x0}^2 - v_z^2} = \sqrt{v_{x0}^2 - v_{z0}^2\frac{x}{L}}$. Получаем, $x_{\max} = L\frac{v_{x0}^2}{v_{x0}^2} = L\operatorname{ctg}^2 60^\circ = 5$ cm - это и есть амплитуда колебаний. Период колебаний подсчитаем так:

$$T = 4\int_0^{x_{\max}}\frac{dx}{v_x} = 4\int_0^{x_{\max}}\frac{dx}{\sqrt{v_{x0}^2 - v_{z0}^2\frac{x}{L}}} = \frac{8Lv_{x0}}{v_{z0}^2} = 0,8\text{c}$$

8.25

: g $\approx 1,4\cdot 10^5$ А.

Решение. Оценку легко выполнить для частиц, покидающих столб газового разряда со среднеквадратичной скоростью $v = \sqrt{3kT/m_e}$, направленной перпендикулярно поверхности столба. Магнитное поле вблизи поверхности столба есть

$$B = \frac{2\mathscr{F}}{cR}$$

В этом поле вылетевшая из столба частица будет двигаться по окружности, радиус которой определяется выражением

$$\frac{m_e v^2}{r} = \frac{e}{c}vB$$

В итоге получим

$$= \frac{c^2}{2e}\frac{R}{r}\sqrt{3kTm_e} \approx 8,6\cdot 10^{14}\text{ ед. СГСЭ } \approx 1,4\cdot 10^5\text{ А.}$$

8.28

$v_0 = \frac{Be}{2\pi mc} \approx 164$ кГц, где $m = 28\cdot 1,66\cdot 10^{-24}$ г- масса иона азота;

$$\Delta v = \frac{cE}{RB} \approx 30\Gamma_{\text{L}}.$$

8.29

$r = \frac{R}{2}$; $\quad T = \frac{2\pi mc}{qB} \approx 60$ лет.

8.30

$B(t) = \frac{\overline{B(t)}}{2}$.

8.31

Сила Лоренца $F_{\text{л}} \sim 10^{-19}$ дин, гравитационная сила $F_{\text{гр}} \sim 10^{-28}$ дин.

8.32

$\frac{\Delta W}{W} = 2\frac{u}{v}$.

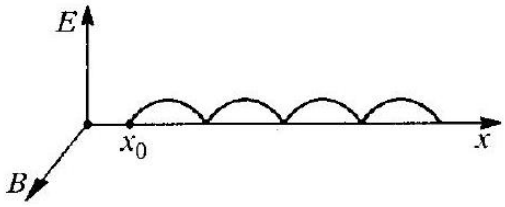


Рис. 406
Рис. 406

8.33

$\Delta W = 2vum$; $\quad \frac{\Delta W}{W} = \frac{4u}{v}$.

8.34

$T = \frac{2\pi m_e c}{eB}$; $\quad l = \frac{2\pi m_e c^2 E}{eB^2}$. Траектория частицы совпадает с траекторией точки колеса (циклоида) радиусом $R = \frac{m_e c^2 E}{eB^2}$, катящегося без проскальзывания вдоль оси x (рис. 406).

8.35

$y(t) = r(1 - \cos\omega t)$; $\quad x(t) = r\sin\omega t + \frac{cE}{B}t$, где $\omega = \frac{m_e c}{eB}$ и $r = \frac{m_e c}{eB}\left(v - \frac{cE}{B}\right)$. Ось OY параллельна электрическому полю, а ось OX перпендикулярна к обоим полям.

8.36

$\Delta\varphi = \frac{\pi e n \delta^2}{2} = 0,0075$ ед. СГСЭ $= 2,26$ В.

$v_{\text{д}} = \frac{\omega_{\text{пл}}^2}{\omega_c^2}x = 3,18 \cdot 10^7$ см/с $\ll c$, где $\omega_{\text{П},}^2 = \frac{4\pi n e^2}{m_e}$ – плазменная частота; $\omega_{\text{С}} = \frac{eB}{m_e c}$ - циклотронная частота.

8.37

$_{\max} = \frac{2}{3\sqrt{3}}\frac{\ln(r_2/r_0)}{\ln\left(r_2 r_0/r_1^2\right)}\frac{m v_0^3}{e}$ [ед. СГСЭ].

8.38

$\omega_0 = \frac{eB}{2m_e c} = \frac{2\pi n e}{m_e c^2} \approx 10^9 \text{с}^{-1}$.

8.39

$v = \text{const} = \sqrt{\frac{2e}{m}\varphi_0}$, где φ_0 - потенциал на оси пучка: $\varphi_0 = \frac{1}{3}\varphi_{\text{а}}$; $\mathscr{G}_{\max} = \frac{2}{3\sqrt{3}}\sqrt{\frac{2e}{m}}\varphi_{\text{а}}^{3/2}$.

8.40

$_{\max} = \frac{2}{3\sqrt{3}} \frac{mv_0^3}{e}$ [ед. СГСЭ].

8.41

$v = \frac{v_1}{\sqrt{1+\left(\frac{v_1}{v_{\text{др}}}\right)^2}}$; $\operatorname{tg}\varphi = -\frac{v_1}{v_{\text{др}}}$, где φ - угол в плоскости движения между вектором установившейся скорости $\mathbf{V}$ и силой тяжести.

8.42

$v = \frac{v_1}{\sqrt{1+\left(\frac{v_1 B}{cE}\right)^2}}$; $\operatorname{tg}\varphi = \frac{v_1}{v_{\text{др}}} = -\frac{v_1 B}{cE}$.

8.43

$\omega_0^2 = \frac{v}{c}\frac{pB}{J_0}$.

8.44

Капля движется по окружности радиусом $r = \frac{R}{2}$ с постоянной скоростью $v = \frac{qR}{2c}\frac{B}{E}$.

8.45

Кольцо вращается с частотой $\omega(t) = \frac{qB(t)}{2mc}$.

8.46

$v = v_{\text{уст}}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$, где $v_{\text{уст}} = -\frac{mc^2 Rg}{(\pi r^2 a B_0)^2}$ - установившаяся скорость, $\tau = \frac{mc^2 R}{(\pi r^2 a B_0)^2}$.

14.2.7 Advanced Problems about Particles in Electromagnetic Field

(see mechanics or field theory about it for now, there are a lot of them)

14.2.8 Problems about Hall's Electromotive force and impact on motion of a body

O2-8.47

Короткозамкнутой проволочной рамке в форме квадрата со стороной a, находящейся в магнитном поле, сообщена начальная скорость v_0 в направлении, перпендикулярном одной из сторон в плоскости рамки. Вектор магнитной индукции B направлен перпендикулярно плоскости рамки, а величина его линейно изменяется в направлении начальной скорости (x) так, что $\frac{dB}{dx} = k$. Найти скорость рамки через время t после начала движения. Масса рамки m, сопротивление R. Коэффициентом самоиндукции пренебречь. Силу тяжести не учитывать.

8.47

$v = v_0 \exp\left(-\frac{a^4 k^2 t}{c^2 R m}\right)$.

48-51

8.48

$p = \left(\frac{\mathscr{J}_0}{2\pi c}\right)^2 \frac{b^2}{2Rl} \frac{\ln(1+a/l)}{1+l/a}$.

8.49

: $v \approx 25$ m/c.

Решение. В силу того, что полосы, по которым течет ток, достаточно широкие, а промежуток между ними мал, магнитное поле токов будет сосредоточено в основном в этом промежутке. Пренебрегая краевыми эффектами, определим поле B, полагая также, что линейная плотность тока $i = /a$. Таким образом,

$$B = \frac{4\pi}{c}\frac{\mathscr{A}}{a}$$

Давление магнитного поля P направлено на пластины. Именно оно создает пондеромоторную силу F, приложенную к бруску:

$$P = \frac{B^2}{8\pi} = \frac{2\pi \mathscr{A}^2}{c^2 a^2}; \quad F = Pal = \frac{2\pi \mathscr{S}^{g^2} l}{c^2 a}$$

Исходя из того, что время действия этой силы ограничено длительностью импульса тока Δt, определим искомую скорость бруска

$$v = \frac{F\Delta t}{m} = \frac{2\pi \mathscr{J}^2 l \Delta t}{m c^2 a} \approx 25 \text{ m/c}$$

8.50

$v = \frac{2\mathscr{J}}{ca}\sqrt{\frac{\pi}{\rho}} \approx 40\text{M/c}$.

8.51

$L = \frac{Q}{2c} r_0^2 B_0 = 8 \cdot 10^{-3} \Gamma \cdot \text{ cm}^2/\text{c}$.

O2-8.52 Опыт Кикоина о закручивании сверхпроводника

В классическом опыте, поставленном И. К. Кикоиным, сверхпроводящий цилиндр (масса $M = 80$ г, высота $h = 20$ см, радиус $R = 0,5$ см) подвешен на упругой нити в магнитном поле, направленном вертикально вдоль оси цилиндра. Нить подвеса в исходном состоянии не закручена. Магнитное поле постепенно повышается так, что сверхпроводимость скачком исчезает при поле $B = 1\text{k}\Gamma$, а цилиндр при этом закручивается. Определить максимальный угол закручивания, если модуль кручения $k = 1$ эрг/рад.

8.52

$\varphi = \frac{m_e c B R h}{e\sqrt{2kM}} = 4,5 \cdot 10^{-5}$ рад.

Решение. Магнитное поле внутри цилиндра равно нулю. Достигается это поверхностными токами, намагничивающими сверхпроводяций цилиндр. $B_{\text{внутр}} = 0 = H + 4\pi I$, откуда $I = \frac{H}{4\pi} \approx \frac{B}{4\pi}$, где B - внешнее магнитное поле. Магнитный момент всего цилиндра объема V

$$\mathfrak{M} = IV = \frac{B}{4\pi} \cdot \pi R^2 h = \frac{BR^2 h}{4}$$

Гиромагнитным отношением Γ называется отношение магнитного момента $\mathfrak{M}$ к механическому моменту импульса тела

$$\Gamma = \frac{\mathfrak{M}}{L} = -\frac{e}{2m_e c}$$

Отсюда $|L| = \frac{\mathfrak{M}}{\Gamma} = \frac{2m_e c}{e}\mathfrak{M} = \frac{mcBR^2h}{2e}$.$L$ - это механический момент импульса, который получает цилиндр сразу же после выключения магнитного поля $B.L = J\dot{\varphi}$, где J - момент инерции цилиндра относительно его оси, $\dot{\varphi}$ максимальная угловая скорость, которую получает цилиндр перед началом вращения. Из закона сохранения энергии $\frac{k\varphi^2}{2} = \frac{J\dot{\varphi}^2}{2}$, откуда $k\varphi^2 = \frac{L^2}{J}$; $\varphi = \frac{L}{\sqrt{kJ}}$. Имея в виду, что $J = \frac{MR^2}{2}$, получим ответ

$$\varphi = \frac{mcBhR}{e\sqrt{2kM}} = 4,5 \cdot 10^{-5} \text{ рад.}$$

O2-8.53

Легкий шарик массой $m = 0,5$ г и радиусом $r = 1$ см подвешен на длинной нити и вращается по горизонтальной окружности, радиус которой очень мал по сравнению с длиной нити (конический маятник). Найти изменение угловой скорости вращения шарика $\Delta\omega = \omega - \omega_0$ после того, как он был заряжен до потенциала $V = 3000$ В и помещен в вертикальное магнитное поле $B = 3000$ Гс. В каком случае угловая скорость увеличится и в каком уменьшится?

П р и м е ч а н и е. Окончательную формулу для изменения угловой скорости упростить, использовав соотношение $qB/mc \ll \sqrt{g/l}$, где q - заряд шарика, l - длина нити, g - ускорение свободного падения.

8.53

$\omega - \omega_0 = \pm\frac{qB}{2mc} = \pm\frac{VrB}{2mc} \approx 10^{-6}\text{с}^{-1}$. Частота ω возрастет, если векторы B и $\boldsymbol{\omega}$ направлены противоположно, и уменьшится, если они направлены в одну сторону.

O2-8.54 Вращающийся шар в магните

Металлический шарик массой m и с зарядом q подвешен на нити длиной L и вращается вокруг вертикальной оси (конический маятник). При этом угол между нитью и вертикалью равен α. Маятник подвешен между полюсами электромагнита. Что произойдет при включении однородного магнитного поля с индукцией B? На какую величину и за счет чего изменится кинетическая энергия маятника? Что произойдет при выключении поля?

8.54

При включении поля B частота обращения шарика изменяется на $\Delta\omega = \pm\frac{Bq}{2mc}$. Кинетическая энергия шарика уменьшится на $\Delta W_{\text{кин}} = \frac{BqL^2\sin^2\alpha}{4c}\left(\frac{Bq}{2mc} + 2\sqrt{\frac{g}{L}}\right)$, если ω и B параллельны, и возрастет на ту же величину, если антипараллельны. При выключении (и включении) поля B возникает вихревое электрическое поле, тормозящее (или ускоряющее) движение шарика.

O2-8.55

Сверхпроводящий шар массой $M = 10$ г и радиусом $R = 1$ см покоится в магнитном поле $B =$ 1кГ. Температура шара постепенно повышается так, что сверхпроводимость исчезает, а шар начинает вращаться. Найти угловую скорость ω вращения шара.

8.55

$\omega = \frac{5}{2}\frac{m_e cRB}{Me} = 1,4 \cdot 10^{-5}c^{-1}$.

О2-8.56

На расстоянии $a = 9$ см над поверхностью сверхпроводника «парит» в поле тяжести тонкий постоянный магнит, длина которого мала по сравнению с расстоянием a. Если магнит слегка вывести из равновесия, то он совершает малые колебания в вертикальной плоскости. Найти период колебаний, при которых отсутствует вращательное движение диполя.

8.56

$T = \pi\sqrt{\frac{a}{g}} \approx 0,3\text{с}.$

О2-8.57

Постоянный короткий магнит с магнитным моментом, ориентированным вертикально, сначала удерживается над сверхпроводящей плоскостью на расстоянии $a = 2$ см, а затем отпускается (рис. 148). Оценить высоту h, на которую он подскочит. Масса магнита $m = 15$ г, объем $V = 2$ см^3, намагниченность $I = 10^3 \Гс$. нем положении взаимодействие магнита со сверхпроводником мало по сравнению с начальным. Получив ответ, проверить, правильно ли Это.

8.57

$h \approx \frac{(IV)^2}{8mga^3} \approx 4$ cm.

О2-8.58

Маленький постоянный магнит совершает малые свободные колебания над сверхпроводящей плоскостью. Каково отношение периодов колебаний двух магнитов одинаковой массы, если их магнитные моменты отличаются в 16 раз? Ось магнита при колебаниях остается параллельной сверхпроводящей плоскости.

8.58

$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{m_2}{\text{Mt}_1}\right)^{1/4} = 2.$

О2-8.59

Маленький постоянный магнит совершает малые свободные колебания над сверхпроводящей плоскостью. Каково отношение периодов колебаний двух магнитов с одинаковыми магнитными моментами, массы которых отличаются в 16 раз? Ось магнита остается перпендикулярной сверхпроводящей плоскости.

О2-8.60* Частота колебаний мнополя Дирака в конденсаторе (!??!?)

Монополь Дирака (элементарная частица массой M, обладающая магнитным зарядом b) находится строго посредине зазора между пластинами незаряженного разомкнутого плоского конденсатора, изготовленными из идеального сверхпроводника. Оценить частоту малых колебаний монополя в направлении нормали к плоскостям. Все размеры конденсатора много больше расстояния d между пластинами.

О2-8.62

Алюминиевое кольцо, сопротивление которого пренебрежимо мало, надето на сердечник электромагнита и лежит на подставке в верхней части сердечника (рис. 149). Магнит- ный поток, посылаемый сердечником через кольцо, нарастает от нуля до конечного значения $\Phi_0 = 10^5 \Гс \cdot \text{с}^2$. Нарастание потока происходит настолько быстро, что за время нарастания кольцо практически не успевает сместиться. Найти высоту h, на которую подскочит кольцо, если его масса $m = 100$ г, а индуктивность $L = 100$ см

O2-8.63

Сверхпроводящий шарик радиусом r и массой m со скоростью v подлетает к области постоянного магнитного поля B. Оценить максимальную скорость, при которой шарик отразится от поля.

O2-8.65

Длинный незаряженный цилиндр из немагнитного металла радиусом $R = 12,56$ см равномерно вращается в однородном магнитном поле $B = 300Гc$, параллельном оси цилиндра, с угловой скоростью $\omega = 60$ рад/с. Определить поверхностную плотность зарядов, возникающих вследствие вращения на боковой поверхности цилиндра. Указать знак поверхностных зарядов, если векторы $\boldsymbol{\omega}$ и B направлены в одну сторону. Магнитным полем возникающих зарядов и инерционными эффектами электронов пренебречь.

O2-8.66

Полый диэлектрический цилиндр с внутренним радиусом r_1 и наружным радиусом r_2 равномерно вращается в однородном магнитном поле с угловой скоростью ω вокруг своей оси. Вектор индукции магнитного поля B параллелен оси цилиндра, диэлектрическая проницаемость материала цилиндра равна в. Найти: 1) объемную 74 плотность $\rho_{\text{связ}}$ связанных зарядов, появившихся в диэлектрик вследствие вращения в магнитном поле; 2) полный объемный заря q на единицу длины цилиндра; 3) плотности поверхностных зарядо на обеих поверхностях цилиндра.

O2-8.67

Длинный сплошной алюминиевый цилиндр радиусом R зэ ряжен электричеством и вращается с постоянной угловой скоросты ω вокруг своей продольной оси. Заряд на единицу длины цилиндр равен $\varkappa$. Найти разность потенциалов V между осью и поверхность цилиндра, возникающую из-за его вращения. Действием центрс бежной силы пренебречь.

O2-8.68

Вдоль трубы с внутренним и наружным радиусами R_1 R_2 течет ток J.Определить, какая разность потенциалов V установится между внутренней и наружной поверхностями трубы. Число свободных электронов в единице объема металла - n.

O2-8.70

Длинная незаряженная пластинка из немагнитного металла движется равномерно в однородном магнитном поле $B = 1800$ Гс со скоростью $v = 6,28$ см/с. Векторы **B** и **v** взаимно перпендикулярны и параллельны плоскости пластинки (рис. 152). Определить поверхностную плотность электрических зарядов на плоскостях пластинки, возникающих вследствие ее движения. Указать знаки поверхностных зарядов, если векторное произведение [vB] направлено вверх. Магнитным полем возникающих зарядов пренебречь.

O2-8.71

Диэлектрическая жидкость проницаемостью ε протекает между пластинами плоского конденсатора со скоростью $v \ll c$. Перпендикулярно направлению движения жидко- сти и параллельно обкладкам конденсатора приложено однородное постоянное магнитное поле B. Определить напряжение V между обкладками конденсатора и поверхностную плотность зарядов диэлектрика σ. Расстояние между пластинами конденсатора d.

O2-8.72

В результате некоторого космического события образовалась система, состоящая из звезды (масса M, магнитный момент $\mathfrak{g}_0$) и планеты (масса $m \ll M$, магнитный момент &). Планета движется по круговой орбите радиусом R. Найти возможный разброс величины периода обращения в зависимости от ориентации магнитных моментов, считая плоскость орбиты перпендикулярной магнитному моменту звезды me_0. 75

O2-8.73

Определить период малых крутильных колебаний магнитного бруска $\left(S = 1\text{мм}^2, l = 10 \text{ см}\right)$, подвешенного горизонтально на неупругом подвесе в магнитном поле Земли (горизонтальная составляющая $B_0 = 0,2$Гс). Плотность стали $\rho = 7,8\text{г/см}^3$, остаточная индукция $B = 10$ кГс.

O2-8.76

Тонкое металлическое кольцо быстро вращается вокруг вертикальной оси, пгроходящей через его диаметр и перпендикулярной однородному магнитному полю с индукцией $B = 100Гс$. Пренебрегая трением в оси, найти время т, за которое угловая скорость вращения уменьшается в e раз. Плотность материала кольца $\rho = 9\text{г/см}^3$, проводимость $\lambda = 5 \cdot 10^5\ \text{Ом}^{-1} \cdot \text{см}^{-1}$. Потери энергии за один оборот считать малыми.

O2-8.77

Определить период малых продольных колебаний внутренней обкладки вертикально расположенного цилиндрического конденсатора, заряд которого постоянен и равен Q (рис. 155). Радиус 76 наружного цилиндра R, внутреннего r, высота h, масса внутренней обкладки $m, r \ll h$.

O2-8.78

Электрический заряд Q равномерно распределен по тонкому кольцу радиусом R (рис. 156). Точечный диполь массой m с дипольным моментом p может перемещаться вдоль оси кольца, перпендикулярной его плоскости, причем дипольный момент диполя параллелен оси кольца. В начальный момент времени диполь находится в центре кольца и имеет нулевую скоро- сть. 1) Определить максимальную скорость $v_{\max}$ диполя при его движении вдоль оси кольца. Сила тяжести отсутствует. 2) Определить положение равновесия x_0 диполя. 3) Определить период малых коле

O2-8.79

Одна из пластин конденсатора жестко закреплена, а вторая, имеющая массу m, связана с пружиной жесткостью k (рис. 157). Рис. 157 Расстояние между пластинами при ненапряженной пружине равно d_0. К конденсатору подключили батарею. В новом положении равновесия расстояние между пластинами $d = \frac{4}{5}d_0$ Найти период малых колебаний пластины.

8. SOLUTIONS Движение заряженных частиц в электрическом и магнитном полях. ЭДС Холла. Движение тел при наличии пондеромоторных сил

8.59

$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{m_1}{m_2}\right)^{1/8} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

8.60

** $\omega^2 = \frac{8b^2}{d^3M}$.

Решение. Поле в зазоре эквивалентно полю от бесконечной цепочки частиц с чередующимися зарядами. Однако для оценки достаточно учесть лишь ближайшие изображения, что дает точность около 3%. При смещении монополя на расстояние x от положения равновесия ближайшая пара создает силу

$$F_1 = \frac{b^2}{d^2}\left[\frac{1}{(1+2x/d)^2} - \frac{1}{(1-2x/d)^2}\right] \approx -\frac{8b^2x}{d^3} = -kx$$

откуда частота колебаний $\omega^2 = \frac{k}{M} = \frac{8b^2}{d^3M}$.

8.61

$T \approx \frac{\pi ca^2}{2\mathscr{A}}\sqrt{\frac{\rho}{2|x|}} \approx 1,2\text{с}$.

8.62

$h = \frac{\Phi_0^2}{2mgL} = 500$ см.

8.63

$v \leqslant rB\sqrt{\frac{r}{2m}}$.

8.64

$V = \frac{\mathscr{J}B}{can}$.

8.65

$\alpha = \frac{B\omega R}{4\pi c} \approx 6 \cdot 10^{-7}$ ед. СГСЭ $= 2 \cdot 10^{-16}\text{К}/\text{с}^2$.

8.66

*: Решение. 1) На заряд e, вращающийся вместе с цилиндром, действует сила Лоренца

$$\mathbf{F} = \frac{e}{c}[\mathbf{vB}] = \frac{e}{c}[[\omega\mathbf{r}]\mathbf{B}] = \frac{e}{c}(\omega\mathbf{B})\mathbf{r}.$$

Она вызывает такую же поляризацию диэлектрика, как электрическое поле с напряженностью $\frac{1}{c}(\omega\mathbf{B})$r, т. е.

$$\mathbf{P} = \frac{\alpha}{c}(\omega\mathbf{B})\mathbf{r} = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi c}(\omega\mathbf{B})\mathbf{r}.$$

Отскда, так как $\operatorname{div}\mathbf{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} = 2$,

$$\rho_{\text{свя}} = -\operatorname{div}\mathbf{P} = -\frac{\varepsilon - 1}{2\pi c}(\omega\mathbf{B}).$$

2. $q = \int \rho_{\text{свя}}\, dV = -\frac{\varepsilon-1}{2c}(\omega\mathbf{B})\left(r_2^2 - r_1^2\right)$.

3. Поверхностная плотность связанных зарядов на внутренней и внешней поверхностях цилиндра:

$$\sigma_1 \text{ Свя3} = -\frac{\varepsilon - 1}{4\pi c}(\omega\mathbf{B})r_1, \quad \sigma_{2\text{ СВя3}} = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi c}(\omega\mathbf{B})r_2.$$

Полный заряд цилиндра остается равным нулю.

8.67

$V = x\left(\frac{\omega R}{c}\right)^2$.

8.68

$V = \frac{2^2}{\pi enc^2\left(R_2^2 - R_1^2\right)}\left[\frac{1}{2} - \frac{\ln(R_2/R_1)}{(R_2/R_1)^2 - 1}\right]$.

8.69

$N = \left[\frac{Bvd}{c\left(\frac{d}{\lambda S} + R\right)}\right]^2 R$.

8.70

$\alpha = \frac{B}{4\pi}\frac{v}{c} = 3 \cdot 10^8$ ед. СГСЭ.

8.71

$V = -\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon c}|[\mathbf{vB}]|d; \quad |\sigma| = P = \frac{\varepsilon-1}{4\pi\varepsilon c}|[\mathbf{vB}]|$.

Указание. В лабораторной системе отсчета есть только поле $\mathbf{B}, \mathbf{E} = \mathbf{0}$ (вне диэлектрика). Следует перейти в систему отсчета, связанную с движущейся жидкостью: $\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{vB}] = \frac{1}{c}[\mathbf{vB}]; \mathbf{D}' = \mathbf{E}' = \frac{1}{c}[\mathbf{vB}]$ (вне диэлектрика). Внутри диэлектрика $\mathbf{D}' = \frac{1}{c}[\mathbf{vB}]; \mathbf{E}'' = \frac{1}{\varepsilon c}[\mathbf{vB}]$. Далее следует вернуться в лабораторную систему отсчета и получить ответ.

8.72

$\Delta T = \frac{6\pi 9\pi t\mathbb{R}_0}{m(\gamma M)^{3/2}R^{1/2}}$. При этом границы периода обращения планеты

$$\frac{2\pi\sqrt{m}}{\sqrt{\frac{\gamma mM}{R^3} + \frac{3mm_0}{R^5}}} \leqslant T \leqslant \frac{2\pi\sqrt{m}}{\sqrt{\frac{\gamma mL}{R^3} - \frac{3mmM_0}{R^5}}}.$$

8.73

$T = 2\pi l\sqrt{\frac{\pi\rho}{3B_0B}} \approx 7,5$с.

8.74

$T = \frac{2\pi^2 L}{B}\sqrt{\frac{2\rho lL}{3S}} = 25,3$с.

8.75

$T = \frac{4\pi^2 L}{B}\sqrt{\frac{\rho lL}{3S}} = 1,6$с.

8.7

6. $\tau = \frac{4c^2\rho}{\lambda B^2} = 7,2$с.

8.77

$T = 2\pi\sqrt{\frac{Q}{2g}}\left[\frac{\ln(R/r)}{mg}\right]^{1/4}$.

8.78

1) $'\max = \frac{2}{3^{3/4}R}\sqrt{\frac{pQ}{m}}$; 2) $x_0 = \pm\frac{R}{\sqrt{2}}$; 3) $T = \frac{3^{5/4}\pi R^2}{2}\sqrt{\frac{m}{pQ}}$.

8.79

$T = 2\pi\sqrt{\frac{2m}{k}}$.

14.2.9 Problems about non-stationary processes in circuits

9.1

$R \gg \frac{\Delta t}{c} \approx 10^8 \text{Om}; \quad Q_{\text{дЖ}} = \frac{1}{4}C\mathscr{E}^2$.

О2-9.2

Описать процесс разрядки конденсатора C_1 после замыкания ключа K, если его начальный заряд равен q_0. Иеследовать случай $R \to 0$, описать превращения энергии в контуре (рис. 158).

9.2

$q_1 = \frac{q_0}{1+C_2/C_1}\left[1 + \frac{C_2}{C_1}\exp\left(-\frac{C_1+C_2}{RC_1C_2}\right)\right]$.
При $R \to 0 q_1 \to \frac{q_0}{1+C_2/C_1}$. Прирост энергии $\Delta W = \frac{q_0^2}{2(C_1+C_2)}\frac{C_2}{C_1}$.

О2-9.3

Для измерения магнитной восприимчивости длинных цилиндрических образцов применяется установка, показанная на рис. 159. При быстром удалении образца, заполняющего всю катушку, на ней 77 возникает импульс напряжения, величина которого измеряется с помощью осциллографа. Определить магнитную восприимчивость x образца, если $\mathscr{E} = 4,5$ В, $R = 10$ Ом, $L = 1\Gamma, V = 6,8$мВ. Каким должно быть время удаления образца, чтобы от него зависела амплитуда импульса напряжения, измеряемого осциллографом?

9.3

$x = \frac{V}{\mathscr{E}} = 1,5 \cdot 10^{-3}; \quad \Delta t \ll \frac{L}{R} \approx 0,1\text{с}$.

О2-9.4

Из конденсатора быстро извлекают пластину с диэлектрической проницаемостью ε так, что емкость скачкообразно изменяется до значения C (рис. 160). Найти зависимость тока в цепи от времени и нарисовать график (t). Диэлектрик заполняет весь объем конденсатора.

9.4

$(t) = (\varepsilon - 1)\frac{\mathscr{E}}{R}e^{-t/(RC)}$.

5

9.5

$\frac{\omega}{\omega_0} = 2.1\Big) \mathscr{I}_{\max} = \max 0, \quad \frac{q_{\max}}{q_{\max 0}} = \frac{1}{2}$; 2) $\frac{\mathscr{I}_{\max}}{\mathscr{I}_{\max 0}} = 2, \quad q_{\max} = q_{\max 0}$.

О2-9.6

Постоянная времени разряда плоского масляного конденсатора через некоторое сопротивление равна τ_1. После того как масло конденсатора отсырело, постоянная времени разряда через то же сопротивление оказалась равной τ_2. Определить удельное сопротивление ρ отсыревшего масла, если его диэлектрическая проницаемость ε не изменилась.

9.6

$\rho = \frac{4\pi\tau_1\tau_2}{\varepsilon(\tau_1-\tau_2)}$.

О2-9.7

Сферический конденсатор с радиусами сфер R_1 и R_2 заполнен слабо проводящей средой. Емкость конденсатора равна C, а разность потенциалов на конденсаторе после отключения его от батареи уменьшается в два раза за время t. Определить диэлектрическую проницаемость ε среды и ее удельное сопротивление ρ.

9.7

$\varepsilon = C\frac{R_2-R_1}{R_1R_2}$; $\quad \rho = \frac{4\pi R_1R_2}{C(R_2-R_1)}\frac{\tau}{\ln 2}$ (СГСЭ).

О2-9.8

Последовательно соединенные дроссель L и омическое сопротивление присоединены к источнику постоянного тока с ЭДС . Полное омическое сопротивление цепи равно R. Индуктивность дросселя, когда в него вставлен железный сердечник, равна L_1. Индуктивность того же дросселя без железного сердечника L_2. Вначале сердечник был вставлен. В момент времени $t = 0$, когда ток в цепи уже установился, очень быстро вынимают железный сердечник (в течение времени, пренебрежимо малого по сравнению с временем установления тока). Определить силу тока $\mathcal{V}$ в цепи в зависимости от времени t для $t > 0$.

9.8

$\mathscr{C}(t) = \frac{\mathscr{C}}{R}\left(1 + \frac{L_1-L_2}{L_2}e^{-t/\tau}\right)$, где $\tau = \frac{L_2}{R}$.

О2-9.9

Длинный тонкий соленоид радиусом r_0 подключен к батарее, и по нему течет постоянный ток $\mathscr{V}_0$. Сердечником в соленоиде служит сплошной цилиндр из сверхпроводника. Радиус сердечника $r_1 = 0,5r_0$. Сердечник быстро выдергивают из соленоида. Найти значение $\mathscr{J}_1$ тока в обмотке непосредственно. после удаления сердечника. Как будет меняться ток в дальнейшем? Нарисуйте качественный график.

9.9

$\mathscr{C}_1 = \left(1 - \frac{r_1^2}{r_0^2}\right)\mathscr{J}_0 = \frac{3}{4}\mathscr{J}_0$. В дальнейшем ток возрастет до значения $\mathscr{O}_0$.

О2-9.10

Колебательный контур содержит индуктивность и емкость. Катушка индуктивности представляет собой соленоид с сердечником 78 из сверхпроводника. Радиус соленоида в два раза больше радиуса сердечника. В некоторый момент времени сердечник быстро выдергивают из соленоида. Как изменится частота колебаний контура? Во сколько раз изменятся максимальные величины заряда на конденсаторе и тока в катушке, если сердечник выдергивают в момент, когда ток в катушке 1) отсутствует и 2) максимален?

9.10

$\frac{\omega}{\omega_0} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 1) $q_{\max} = q_{\max 0}$, $\quad \frac{\mathscr{I}_{\max}}{\max 0} = \frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\frac{q_{\max}}{q_{\max 0}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\quad \frac{\mathscr{I}_{\max}}{\mathscr{I}_{\max}} = \frac{3}{4}$.

O2-9.11

Определить закон изменения напряжения V на конденсаторе C после замыкания ключа K в основной цепи схемы, представленной на рис. 161.

9.11

$V(t) = 5\left(1 - e^{-4\cdot 10^4 t}\right)$ [В].

O2-9.12

Проводящий шар радиусом $a = 20$ см (рис. 162), находящийся при потенциале $V_0 = 3 \cdot 10^4$ В, разряжается через сопротивление $R = 5 \cdot 10^3$ Ом. В квазистационарном приближении определить возникающее при этом магнитное поле $B(t, r, \theta)$ вне шара.

9.12

$B(t, r, \theta) = \frac{V_0 a}{c\tau}\frac{1-\cos\theta}{r}e^{-t/t} = \frac{2}{3}\frac{1-\cos\theta}{r}e^{-10^7 t}$[Гс],
где $\tau = Ra \approx 10^{-7}$ с (СГСЭ) .
Указание. Циркуляция вектора $\mathbf{B}$ по окружности радиусом r с центром на оси симметрии $\int(\mathbf{B}d\mathbf{l}) = B \cdot 2\pi r = -\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int_S(\mathbf{E}d\mathbf{S})$, где $\int_S(\mathbf{E}d\mathbf{S})$ - поток вектора $\mathbf{E}$, равный $Q\Omega$, где Ω - телесный угоп, под которым видна поверхность S, натянутая на контур - окружность радиусом $r : \Omega = 2\pi(1 - \cos\theta)$.

O2-9.13

К контуру L, C, R (рис. 163) с малым затуханием в момент $t = 0$ подключают источник постоянной ЭДС $\mathscr{B}$ с ничтожно малым внутренним сопротивлением. Определить напряжение V на конденсаторе C в зависимости от времени t. На какое минимальное напряжение должен быть рассчитан конденсатор?

9.13

$V(t) = \mathscr{E}\left[1 - e^{-\delta t}\left(\cos\omega t + \frac{\delta}{\omega}\sin\omega t\right)\right]$,
где $\delta = \frac{R}{2L}$ и ш $= \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$. Минимальное напряжсние, на которое должен быть рассчитан конденсатор, не меньше $2\mathscr{E}$.

O2-9.17

В колебательном контуре с индуктивностью L и емкостью C совершаются незатухающие колебания силы тока $\mathscr{V} = {}_0\cos\omega t$, Рис. 166 Рис. 167 Рис. 168 где $\omega^2 = 1/(LC)$. Катушкой индуктивности служит прямая длинная проволочная спираль. Как изменятся частота, амплитуда и энергия колебаний, если в момент времени $t = 0$ очень быстро (т. е. в течение времени, малого по сравнению с периодом колебаний $T = 2\pi/\omega$) растянуть спираль до удвоенной длины? Объяснить, почему при этом меняется энергия колебаний.

O2-9.18

К заряженному до напряжения V_0 конденсатору емкостью C_1 подключается незаряженный конденсатор емкостью C_2. Найти зависимость тока в цепи от времени, если влиянием индуктивности цепи можно пренебречь, а сопротивление цепи равно R.

[01] Ответы этого раздела даются в СИ, кроме особо оговоренных случаев.

O2-9.19

Конденсатор емкостью C несет заряд q. При параллельном соединении этого конденсатора с незаряженным конденсатором той же емкости часть Энергии выделяется в виде тепла в соединительных мым расчетом, не прибегая к закону сохранения энергии. Индуктивностью проводов пренебречь.

O2-9.20

Конденсатор C заряжается от батареи $\mathscr{E}$ через нелинейное сопротивление R (рис. 167), сила тока в котором связана с напряжением соотношением $\mathscr{J} = \lambda V^{3/2}$ (λ - постоянная величина). Найти зависимость силы тока в цепи от времени, если батарея включена при $t = 0$.

O2-9.21

При размыкании рубильника K в электрической цепи, изображенной на рис. 168, возник дуговой разряд. Определить ток в цепи. Вольт-амперная характеристика дугового разряда имеет вид $V = a + b/$

O2-9.22

Сверхпроводящие катушки с самоиндукциями L_1 и L_2 соединены параллельно и включены через сопротивление R в цепь гальванической батареи с ЭДС $\mathscr{B}$ и внутренним сопротивлением r (рис. 169). Найти токи в катушках $\mathscr{V}_1$ и $\mathscr{J}_2$ и ток в общей цепи J, если коэффициентом взаимной индукции катушек можно пренебречь.

O2-9.23

Длинный соленоид, длина которого равна l, а площадь витков S, замыкается в некоторый момент времени последовательно с сопротивлением R на источник постоянного напряжения с ЭДС $\mathscr{E}$. В средней части соленоида находится небольшое короткозамкнутое кольцо, площадь которого равна σ, сопротивление r. Плоскость кольца перпендикулярна оси соленоида. Пренебрегая самоиндукцией кольца, определить радиальное давление на кольцо (т. е. радиальную силу на единицу длины кольца) в тот момент, когда оно максимально.

O2-9.24

Тороидальная катушка с радиусом тора R и радиусом витков $r (r \ll R)$ замыкается в некоторый момент последовательно с сопротивлением R_0 на источник постоянного напряжения с ЭДС $\mathscr{E}$. Внутри катушки находится небольшое короткозамкнутое кольцо, площадь которого равна σ, а сопротивление r_0. Плоскость кольца совпадает с плоскостью одного из витков тора. Пренебрегая самоиндукцией кольца, определить энергию джоулевых потерь $Q^{\text{в}}_{\text{дж в коль-}}$ це за все время установления тока в цепи тора.

O2-9.25

Соленоид, реостат и источник постоянного напряжения включены последовательно. Соленоид равномерно растягивают со скоростью $v = 50$ см/с, одновременно передвигая движок реостата так, что сила тока в цепи остается постоянной. Насколько изменится сопротивление реостата, когда длина соленоида увеличится вдвое, если соленоид после растяжения имеет плотность витков $n = 50$ см$^{-1}$, а диаметр его поперечного сечения $D = 10$ см.

O2-9.26

Два соленоида имеют одинаковые геометрические размеры, но один из них изготовлен из провода вдвое большей площади поперечного сечения и вдвое меньшей длины, чем другой. Материал проводов обоих соленоидов одинаков. В обмотке какого из соленоидов будет выделяться больше тепла, если магнитные поля в них одинаковы? У какого из соленоидов меньше время установления магнитного поля?

O2-9.33

С помощью осциллографа наблюдают свободные затухающие колебания в колебательном контуре. Как изменится число колебаний, совершаемых за время, в течение которого амплитуда затухает в e раз, если в два раза уменьшить индуктивность контура L и в два раза увеличить его емкость C, сохранив неизменным активное сопротивление?

О2-9.34

Катушка колебательного контура (рис. 175) помещена в постоянное магнитное поле, создающее в ней постоянный магнитный 82 поток Φ_0. В момент времени $t = 0$ магнитное поле выключается. Время выключения пренебрежимо мало по сравнению с периодом собственных колебаний контура. Найти ток в контуре в зависимости от Я времени после выключения поля.

О2-9.35

Колебательный контур содержит катушку с индуктивностью L и конденсатор с утечкой. Емкость конденсатора равна C, сопротивление R. Пренебрегая активным сопротивлением катушки и прочих проводов, вывести уравнение собственных колебаний контура. Найти собственную частоту ω_0 и логарифмический декремент затухания d.

О2-9.36

Конденсатор $C = 0,1$ мкФ, заряженный до напряжения ЭДС $\mathscr{B} = 1$kВ, в момент $t = 0$ замыкается на катушку индуктивностью $L = 100$ m и сопротивление, равное критическому для образовавшегося контура (рис. 176). Определить время, за которое ток достигнет максимального значения, и вычислить это значение тока.

О2-9.39

Груз массой m подвешен на тонкой проволоке длиной l и сопротивлением R в однородном горизонтальном магнитном поле B и совершает малые колебания в плоскости, перпендикулярной полю. При этом проволока всегда остается замкнутой накоротко неподвижной внешней цепью. Найти число колебаний, по прошествии которых амплитуда тока в цепи уменьшится в e раз.

О2-9.40

В колебательном контуре с малым затуханием одновременно увеличивают емкость конденсатора и самоиндукцию катушки в одно и то же число раз, равное n. Увеличение производится в произвольный момент за время, малое по сравнению с периодом собственных колебаний контура. Найти соотношение между амплитудами тока $\mathscr{V}_1$ и $_2$ до и после изменения параметров контура.

О2-9.41

Кольцо из тонкой проволоки, имеющее омическое сопротивление $R = 10^{-3}$ О, массу $m = 1$Г и Рис. 178 радиус $r = 1$ см, подвешено на упругой нити и совершает малые крутильные колебания (? частотой) (рис. 178). Если поместить кольцо в магнитное поле, параллельное плоскости кольца в положении равновесия, то возникает сильное 83 затухание колебаний. Оценить магнитную индукцию поля, при которой движение крутильного маятника происходит в критическом режиме (т. е. колебательный режим переходит в апериодический). Самоиндукцию кольца и затухание без магнитного поля не учитывать.

О2-9.46

В условиях предыдущей задачи вместо конденсатора шины замкнуты вверху на соленоид, индуктивность которого равна L, а сопротивление ничтожно мало. Найти закон движения проводника, скользящего вдоль шин.

О2-9.47

Две длинные параллельные медные шины, расположенные вертикально на расстоянии l друг от друга, замкнуты вверху на сопротивление R и помещены в однородное магнитное поле B, перпендикулярное к плоскости шин. Вдоль шин падает медный проводник веса P. Трение отсутствует. Чему равно установившееся значение скорости падения?

О2-9.48

По двум вертикальным идеальным проводам (см. предыдущую задачу) в поле силы тяжести может скользить без трения идсальная проводящая перемычка массой m и длиной l (рис. 182).

Рис. 182 Рис. 183 Рис. 184

Проводники сверху замкнуты индуктивностью L, а снизу - сопротивлением R. Перемычка сначала удерживается в некотором положении, а затем отпускается без толчка. Найти новое положение равновесия перемычки и характер переходного процесса.

Проводники сверху замкнуты индуктивностью L, а снизу - сопротивлением R. Перемычка сначала удерживается в некотором положении, а затем отпускается без толчка. Найти новое положение равновесия перемычки и характер переходного процесса.

O2-9.49

Конденсатор емкостью C^* и катушка индуктивностью L присоединены к верхним концам двух параллельных медных шин, расположенных вертикально на расстоянии l друг от друга (рис. 183).

Однородном магнитное поле B горизонтально и перпендикулярно к плоскости шин. Вдоль шин в магнитном поле без начальной скорости падает медный проводник массой m так, что всегда имеется контакт между проводником и шинами. Сопротивлением катушки, медных шин и проводника, а также индуктивностью проводников и трением проводника о шины пренебречь. Определить закон изменения тока †(t), а также координаты проводника $x(t)$, начиная с момента начала падения $t = 0, x(0) = 0$.

O2-9.50

С одной из пластин конденсатора мгновенно испаряется тонкий слой вещества, несущий заряд $-q_0$, который затем движется как целое с постоянной скоростью v_0 к противоположной пластине (рис. 184). Найти зависимость тока в LC-цепи от времени при движении слоя в конденсаторе. Расстояние между пластинами конденсатора d, площадь пластин S. Индуктивность равна L.

O2-9.51

В однородное электрическое поле E_0 перпендикулярно ему помещены две плоскопараллельные незаряженные металлические пластины, образующие плоский конденсатор. В момент времени $t = 0$ пластины закорачивают через катушку индуктивностью L. Вычислить зависимость заряда конденсатора от времени. Площадь пластины равна S, расстояние между пластинами - d.

МФТИ-маг-вступ-2023.3v1-dem(2 мин) Конденсатор с диэлектриком (?????)

Найти изменение разности потенциалов между пластинами плоского конденсатора после введения внутрь конденсатора диэлектрической пластины толщиной h с диэлектрической проницаемостью ε. Расстояние между пластинами конденсатора равно $d(h < d)$. Конденсатор заряжен до разности потенциалов U_1 и отключен от источника.

Solution

После введения пластины поле в зазоре не изменится (по т. Гаусса). Для 1-го и 2-го случая имеем

$$U_1 = E_1 d$$
$$U_2 = E_1(d-h) + E_2 h$$

Из граничных условий:

$$D_1 = D_2; E_1 = \varepsilon E_2,$$

Ведь $E = q^2/(\varepsilon r^2) = E_1/\varepsilon$. В итоге

$$U_2 - U_1 = -\left(\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon}\right)\frac{h}{d}U_1$$

Задача отлично проверяет элементарные знания. Все просто, но важно не ошибиться и написать правильно формулы!

9. SOLUTIONS Переходные процессы в электрических цепях. Свободные колебания

9.14

$(t) = \frac{\delta}{R}\left[1 - e^{-\delta t}\left(\cos\omega t + \frac{\delta}{\omega}\sin\omega t\right)\right]$, где $\delta = \frac{R}{2L}$; $\quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}$; $\omega^2 = \omega_0^2 - \delta^2$.

9.15

$V(t) = V_0 e^{-\delta t}\left[\cos\omega t + \left(\frac{1}{\omega RC} - \frac{\delta}{\omega}\right)\sin\omega t\right]$, где $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}; \delta = \frac{R}{2L}$; $\omega^2 = \omega_0^2 - \delta^2$.

9.16

$\frac{V_{\max}}{V_0} = \frac{r}{R}$. Чем меньше r, тем меньше $V_{\max}$. Однако слишком малым r брать не следует во избежание больших нагрузок на источник тока. Достаточно, чтобы $V_{\max}$ не превышало V_0, т. е. r должно быть меньше или порядка R.

9.17

Частота увеличится в $\sqrt{2}$ раз. Амплитуда колебаний и энергия возрастут вдвое.

9.18

$\mathscr{C}(t) = \frac{V_0}{R}\exp\left[-\frac{t(C_1+C_2)}{RC_1C_2}\right]$.

9.19

$Q_{\text{дж}} = \frac{q^2}{4C}$.

9.20

$\mathscr{G} = \frac{\lambda\mathscr{E}^{3/2}}{[1+\lambda\sqrt{\mathscr{E}}//(2C)]^3}$.

9.21

$g = \frac{1}{2R}\left[(-a) + \sqrt{(8-a)^2 - 4Rb}\right]$.

9.22

$\mathscr{V} = \frac{\mathscr{E}}{R+r}$; $\quad \mathscr{J}_1 = \frac{\mathscr{J}}{1+L_2/L_1}$; $\quad \mathscr{O}_2 = \frac{\mathscr{J}}{1+L_1/L_2}$.

9.23

$F_{\max} = \frac{2\pi\sigma\mathscr{E}^2}{c^2rRlS}()$.

9.24

$Q_{\text{дж}} = \frac{2\mathscr{E}^2\sigma^2}{c^2\pi r^2RR_0r_0}$ (СГСЭ).

9.25

$\Delta R = \frac{\pi^2n^2D^2v}{c^2} = 1,4\cdot10^{-13}$ ед. СГСЭ $= 0,125$ Ом.

9.26

$Q_1 = Q_2$; $\quad t_1 = t_2$.

9.27

$q = \frac{q_0}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$.

9.28

$C \geqslant \frac{L}{R^2 n^2} = 1\text{МКФ}$.

9.29

$\frac{Q_\infty}{Q_R} = 1 + \frac{L}{CRr} \approx 34$.

9.30

$\omega_0 = \frac{2n}{\tau} = 2 \cdot 10^3 \text{с}^{-1} (\approx 320\text{Г})$.

9.31

$\omega = \frac{1}{\sqrt{3LC}}$.

9.32

$V(t) = {}_0 L_1 \sin \omega t$; $\quad \mathscr{G}(t) = \frac{L_1}{L_1 + L_2}{}_0 \cos \omega t$, где $\omega = \frac{1}{\sqrt{(L_1 + L_2)C}}$.

9.33

$N_2 = \frac{N_1}{2}$.

9.34

$= \frac{\Phi_0}{L} \cos \omega_0 t$, где $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

9.35

$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$; $\quad d = \frac{\pi}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$.

9.36

$t = \sqrt{LC} = 10^{-4}\text{с}$; $\quad \vartheta_{\max} = \frac{\mathscr{E}}{e}\sqrt{\frac{C}{L}} = 0,37$ А, где e - основание натурального логарифма.

9.37

$Q = \frac{V_0^2}{2N}\sqrt{\frac{C}{L}} = 100.$

9.38

1) $_L = {}_0 e^{-\delta t}\left[\cos\omega t - \left(\frac{\delta}{\omega} + \frac{\omega_0^2 q_0}{\omega_0^g}\right)\sin\omega t\right];$

$$V_C = Ve^{-\delta t}\left[\cos\omega t + \left(\frac{\delta}{\omega} + \frac{{}_0}{\omega q_0}\right)\sin\omega t\right]$$

2) $t_1 = \frac{1}{\omega}\operatorname{arctg}\frac{\omega_0}{\delta\mathscr{O}_0 + \omega_0^2 q_0}$,
где ${}_0 = \frac{V}{R_2}; q_0 = CV; \omega_0^2 = \frac{1}{LC}; \delta = \frac{R_1+R_2}{2L}; \omega^2 = \omega_0^2 - \delta^2; \delta < \omega_0.$

9.39

$n = \frac{\tau}{T}$, где $\tau = \frac{8mc^2R}{B^2l^2}$ - время релаксации, $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ - период (СГСЭ)

9.40

$\mathscr{J}_2 = \frac{\mathscr{S}_1}{n}.$

9.41

$B = \frac{c}{\pi r}\sqrt{2\pi v_0 mR} \approx 800$ Гс (СГСЭ) .

9.42

$W_R = \left(1 - \frac{M^2}{L_1L_2}\right)\frac{L_1}{2}\left(\frac{\mathscr{E}}{r}\right)^2; \quad W_2 = \frac{M^2}{2L_2}\left(\frac{\mathscr{E}}{r}\right)^2.$

9.43

$Q = \frac{L_1\vartheta_1^2}{2} - \frac{L_2{}_2^2}{2}$, где $\mathscr{V}_1 = \frac{\mathscr{K}}{R+r}.$

9.44

1) $T_1 = n \cdot 2\pi\sqrt{LC}$, где $n = 1, 2, 3, \ldots$
2) $T_2 = (2n+1)\cdot\pi\sqrt{LC}; \quad V_{\max} = 2V_0$, где $n = 1, 2, 3, \ldots$

9.45

1) $a = \frac{mg}{m+CB^2l^2}$; 2) $\mathscr{F} = \frac{mgBlC}{m+CB^2l^2}.$

9.46

$x = \frac{mgL}{B^2l^2}(1 - \cos\omega t)$, где $\omega = \frac{Bl}{\sqrt{mL}}$.

9.47

Скорость будет расти, пока сила взаимодействия между индуцированным током и магнитным полем не достигнет величины, равной весу проводника. Это наступит при значении $v_{\text{уст}} = PR/(Bl)^2$.

9.48

* Координата нового положения равновесия

$$x(t) = \frac{mgL}{(Bl)^2}\left(1 - e^{-\delta t}\cos\omega t\right) \underset{t\to\infty}{\to} \frac{mgL}{(Bl)^2}; \quad \delta = \frac{(Bl)^2}{mR}; \omega = \frac{Bl}{\sqrt{mL}}.$$

Координата x отсчитывается вниз от исходного положения перемычки.
Решение.

$$m\ddot{x} = mg + Bl\left(\mathscr{G}_L - {}_R\right), \quad L\dot{\mathscr{G}}_L = -Bl\dot{x}, \quad R^R_{\mathscr{O}} = Bl\dot{x}$$

После подстановки в уравнение динамики значений токов ${}_L$ и $\mathscr{O}_R$ получим

$$\ddot{x} + \frac{(Bl)^2}{mR}\dot{x} + \frac{(Bl)^2}{mL}x = g$$

отсюда после интегрирования при нулевых начальных условиях получаем

$$x = \frac{mgL}{(Bl)^2}\left(1 - e^{-\delta t}\cos\omega t\right)$$

9.49

$(t) = \frac{Blg}{L\omega^2}(1 - \cos\omega t)$, где $\omega^2 = \frac{B^2l^2}{c^2Lm} + \frac{c}{lC^*}$.

$$x(t) = \left(g - \frac{B^2l^2g}{cmL\omega^2}\right)t^2 + \frac{B^2l^2g}{cmL\omega^4}(1 - \cos\omega t)(\text{C})$$

9.50

$g(t) = \frac{q_0v_0}{d}\left(\cos\omega_0 t - 1\right)$, где $\omega_0^2 = \frac{c^2}{LC_0}$ (СГСЭ).

9.51

$q(t) = \frac{E_0S}{4\pi}\left(\cos\omega_0 t - 1\right)$, где $\omega_0^2 = \frac{c^2}{LC_0}, C_0 = \frac{S}{4\pi d}()$.

9.52

$q(t) = Q\left(1 - \cos\omega_0 t\right)$, где $\omega_0^2 = \frac{c^2}{LR}$ (СГСЭ) .

9.53

$V_0 = \frac{V}{\pi n R}\sqrt{\frac{L}{C}}$.

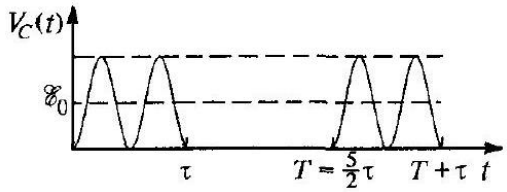


Рис. 407

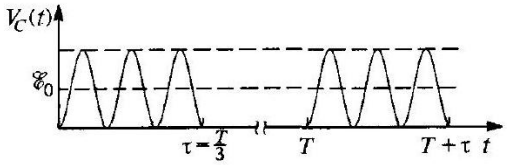


Рис. 408

9.54

$T = \frac{5}{2}\tau = 0,05\text{с}$; $V_C(t) = \begin{cases} \mathscr{E}_0(1-\cos\omega t), \\ 0 \end{cases}$ (рис. 407).

9.55

$\tau = \frac{T}{3} = 0,03\text{с}$; $V_C(t) = \begin{cases} \mathscr{E}_0(1-\cos\omega t), \\ 0 \\ 2l \end{cases}$ (рис. 408).

9.56

$\mathscr{S}_{\max} = \frac{2MI}{NS} = 40\text{МА}$; $v = \frac{2l}{T} = 100$ м/с.

14.2.10 Basic Problems about circuits 1

O2-10.1

Железный сердечник несет на себе две обмотки. Одна обмотка, из большого числа n витков, присоединена к источнику синусоидальной ЭДС $\mathscr{E}$. Другая обмотка состоит из одного кольца, сопротивление которого R. Точки A, B и C этого кольца (рис. 187) отстоят друг от друга на равные расстояния.

1) Что покажет достаточно чувствительный амперметр переменного тока с сопротивлением r, если его присоединить к двум из этих точек?

2) Как изменится показание амперметра, если его перебросить в положение, указанное штриховой линией на рисунке? Железный сердечник не имеет магнитного рассеяния. Индуктивностью кольца и соединительных проводов можно пренебречь.

10.1

1) $I_1 = \frac{3\mathscr{E}}{n(9r+2R)}$; 2) $I_2 = \frac{6\mathscr{E}}{n(9r+2R)}$. Токи противоположного направления.

O2-10.2

Для определения мощности, выделяемой переменным током в катушке (индуктивность L, сопротивление r), иногда применяют метод трех вольтметров, заключающийся в следующем. Последовательно с катушкой включают известное сопротивление R и присоединяют к цепи три вольтметра так, как показано на рис. 188. Измеряют с помощью этих вольтметров эффективные

напряжения: V_1 - на катушке, V_2 - на сопротивлении и V - между концами цепи. Зная показания ров, определить искомую мощность N.

10.2

$N = \frac{1}{2R}\left(V^2 - V_1^2 - V_2^2\right)$.

O2-10.3

Для определения мощности, выделяемой переменным током в катушке (индуктивность L, сопротивление r), иногда применяют Рис. 189 метод трех амперметров, состоящий в следующем (рис. 189). Параллельно катушке включа- ют известное сопротивление R. Измеряют эффективные значения токов: I_1 - через катушку, I_2 - через сопротивление R и полный ток I. Зная показания приборов, определить искомую мощность N.

10.3

$N = \frac{R}{2}\left(I^2 - I_1^2 - I_2^2\right)$.

O2-10.4

К источнику синусоидального напряжения $\mathscr{E} = \mathscr{E}_0 \sin\omega t$ в момент времени $t = 0$ подключают последовательно соединенные сопротивление R и индуктивность L. Найти силу тока как функцию времени и фазы φ. При каком условии после замыкания цепи в ней сразу установятся синусоидальные колебания?

10.4

$(t) = \frac{\mathscr{E}_0}{R^2+\omega^2L^2} \times$

$$\times \left[R\cos(\omega t + \varphi) + \omega L \sin(\omega t + \varphi) - e^{-Rt/L}(R\cos\varphi + \omega L)\right]$$

при $L = 0$ колебания начнутся сразу.

O2-10.5

В приведенной на рис. 190 схеме в момент $t = 0$ замыкают ключ K. Найти зависимость от времени тока $\mathscr{J}$ точник синусоидальной ЭДС $\mathscr{E} = \mathscr{E}_0 \sin\omega t$. Параметры контура связаны соотношением $R = \sqrt{L/C}$.

10.5

$(t) = \frac{\mathscr{E}_0}{R}\sin\omega t$.

O2-10.6

С помощью схемы, показанной на рис. 191, требуется получить фазовый сдвиг на угол 90° между напряжением на входе $V_{\text{вх}}$ и напряжением на выходе $V_{\text{вых}}$. Какому условию должны удовлетворять параметры схемы R и L, если циклическая частота входного напряжения равна ω? Чему при этом будет равно отношение амплитуд входного и выходного напряжений?

10.6

$\omega L = R$; $\left|\frac{V_{\text{Вх}}}{V_{\text{Вхх}}}\right| = 3$.

O2-10.7

Обмотка электромагнита, полное сопротивление которой $Z = 10$ Ом и коэффициент мощности $\cos\varphi = 0,6$, присоединены к цепи переменного тока. Каким будет коэффициент мощности $\cos\varphi'$, если параллельно обмотке присоединить конденсатор, реактивное сопротивление которого равно $Z_1 = 7$ Ом?

10.7

$\cos\varphi' = \cos\left[\text{arctg}\left(\frac{Z/Z_1 - \sin\varphi}{\cos\varphi}\right)\right] \approx 0,7.$

O2-10.8

Источник переменного тока с циклической частотой ω и ЭДС $\mathscr{E}$ действует на колебательный контур (рис. 192). Определить → силу тока I и сдвиг фазы φ между I и $\mathscr{E}$ при резонансе.

O2-10.10

Индуктивностью резонансного контура ($f_0 = 10$Мг) служит длинная однослойная катушка диаметром $D = 10$ мм. Во сколько раз изменится резонансная частота контура, если внутрь катушки вставлен на всю длину латунный цилиндр диаметром $D/2$? Сопротивление латуни $\rho = 8 \cdot 10^{-6}$ Ом $\cdot$ cm.

O2-10.11

В цепь, состоящую из последовательно включенных сопротивления R, индуктивности L и емкости C, включен последовательно источник синусоидальной ЭДС постоянной амплитуды и перестраиваемой частоты. Изменяя частоту источника, настраивают ее в резонанс с частотой цепи, затем уменьшают емкость контура в два раза и снова добиваются резонанса. Изменится ли сила тока при резонансе? Каково отношение резонансных частот, соответствующих первому и второму случаям?

O2-10.12

Показать, что в контуре предыдущей задачи амплитуда силы тока $\mathscr{J}$ при отклонении частоты внешней ЭДС на небольшую величину Δf[1] от резонансной частоты f_0 будет связана с амплитудой силы тока при резонансе $\mathscr{J}_0$ следующим соотношением:

$$\mathscr{V} = \frac{\mathscr{J}_0}{\sqrt{1 + (2\Delta f/f_0)^2 Q^2}},$$

где $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$ - добротность контура.

O2-10.13

Через баллистический гальванометр пропускается кратковременный импульс тока. При этом его рамка отклоняется на угол φ_0. Спустя половину периода, когда рамка гальванометра вернется в исходное положение, через гальванометр пропускается такой же импульс тока, но в противоположном направлении; через следующую половину периода пропускается снова такой же импульс, но в первоначальном направлении и т. д. Таким образом, всякий раз, когда рамка гальванометра проходит через положение равновесия, она испытывает одинаковые толчки в направлении своего движения. Найти максимальный угол отклонения рамки $\varphi_{\max}$ при установившихся колебаниях. Период затухающих колебаний гальванометра T, коэффициент затухания δ.

O2-10.15

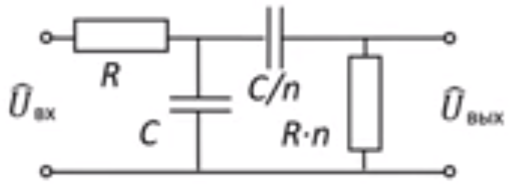
При изменении частоты f вынуждающей силы, действующей на линейную колебательную систему, меняется фаза φ установившихся колебаний этой системы и запасенная в ней энергия W. Пусть при малом сдвиге частоты от резонансной $\Delta f = 1$ Гц фаза колебаний δ изменилась на $\pi/4$. Как изменится при этом энергия W? Каково время затухания?

O2-10.16

В колебательном контуре с индуктивностью $L = 1$Г, настроенном в резонанс, под действием внешнего синусоидального напряжения с амплитудой $V_0 = 200$ В установился переменный ток с [1]Δf называется «расстройкой», а $\Delta f/f_0$ - "относительной расстройкой» частоты. 89 амплитудой $\mathscr{U}_0 = 20$ А. Найти сопротивление контура R и время затухания τ (время, за которое амплитуда колебаний уменьшается в e раз) в режиме свободных затухающих колебаний.

Определение сопротивления в немалой цепи из двух звеньев

На рисунке изображена цепочка переменного тока, состоящая из двух звеньев, причём параметры элементов второго звена в $n \gg 1$ раз отличаются от аналогичных параметров первого звена. На вход цепочки подаётся переменное напряжение частоты f = 50 Гц. Сдвиг фаз между входным и выходным напряжением оказался равен 300. Определите величину сопротивления R, если величина ёмкости с равна 3 мкФ.



всего 4 элемента цепи.
рисуем векторную диаграмму
потом еще один треугольник пририсовываем.
(короче, задача на метод ВД, им я не владею, так что пока сказать нечего особенно, потом буду доделывать.)

Поиск напряжения источника по его влиянию на напряжение на конденсаторе

(тут еще много тренировок остается!!!)
В последовательном RLC-контуре максимальное напряжение на конденсаторе $U_c = 141$ В достигается при частоте источника переменной э.д.с. 1000 Гц. Если не меняя напряжения источника U и изменить его частоту до 1001 Гц, то напряжение на конденсаторе падает до 100 В. Определите напряжение источника U_n.
пишем формулу соотношение из двух определений добротности

$$Q = \frac{U_{\text{max}}}{U_{\text{и}}} = \frac{f_0}{2\Delta f}$$

для нее как раз всё задано.
находим ответ.

О2-10.17

Прямой однослойный соленоид с индуктивностью L совершает вынужденные крутильные гармонические колебания вокруг своей оси $\varphi = \varphi_0 \cos \omega t$. Соленоид гибкими проводами присоединен к конденсатору емкостью C (опыт Мандельштама и Папалекси). Найти напряжение на конденсаторе при резонансе, когда частота ω равна собственной частоте колебательного контура $\omega_0 = \sqrt{1/(LC)}$. Радиус соленоида a, длина проволоки, из которой он изготовлен, l, сопротивление соленоида R.

О2-10.18

В резонансном контуре вдвое увеличили индуктивность L и вдвое уменьшили емкость C, оставив неизменным активное сопротивление. Как при этом изменилась избирательность контура $f_0/\Delta f$, где f_0 - резонансная частота, а Δf - ширина резонансной кривой?

О2-10.19

Входной контур радиоприемника имеет добротность $Q = 100$ и настроен на $f_0 = 1000$ кГц. Во сколько раз напряжение частоты f_0 на конденсаторе больше напряжения частоты $f_1 = 2f_0$ (мешающая станция), при условии, что амплитуды электродвижущих сил, возбуждающихся в контуре, одинаковы?

О2-10.20

При снятии резонансной кривой колебательного контура (рис. 194) с малым затуханием найдено: выходное напряжение максимально при частоте $f_0 = 1,6$ кГц; при частотах $f \ll f_0$ это напряжение равно $V_0 = 1$ В. Чему равно выходное напряжение V_1 при частоте $f_1 = 16$ кГц?

O2-10.22

Индуктивный датчик является радиотехническим устройством для регистрации небольших изменений индуктивности. Обычно такой датчик представляет собой электрический колебательный контур с изменяемой индуктивностью (рис. 196). Оценить минимальное измеряемое относительное изменение индуктивности $\Delta L/L$, 90 если контур настроен в резонанс. Напряжение источника питания $V = 100$ В, минимальное измеряемое изменение напряжения на сопротивлении $\Delta V = 10$мкВ, добротность контура $Q = 10^2$.

O2-10.23

Емкостный датчик - одно из наиболее чувствительных радиотехнических устройств для регистрации малых механических смещений. Обычно емкостный датчик представляет собой электрический колебательный контур с воздушным конденсатором (рис. 197), одна из пластин которого подвижна. Оценить минимальное измеряемое перемещение пластинки конденсатора Δd, если контур настроен в резонанс. Напряжение источника питания $V = 100$ В, минимальное измеряемое изменение напряжения на сопротивлении $\Delta V = 10$мкВ, добротность контура $Q = 10^3$ и зазор между пластинами

O2-10.24

В определенном пункте напря- Рис. 197 женность электрического поля, создавае- мого радиостанцией A, в пять раз больше, чем напряженность электрического поля радиостанции B. Определить добротность контура, с помощью которого можно принимать в данном пункте станцию B без помех со стороны станции A, если для этого необхходимо, чтобы амплитуда сигналов станции B в контуре была бы по крайней мере в 10 раз больше амплитуды сигналов станции A. Частота станции A равна 210к ц, частота станции B равна 200к(см. задачу 10.12).

O2-10.25

Для схемы, изображенной на рис. 198, определить частоты источника ЭДС, соответствующие резонансам токов и напряжений. Построить график сдвига фазы тока J относительно ЭДС в зависимости от частоты источника, считая внутреннее сопротивление последнего пренебрежимо малым.

O2-10.26

Для схемы, изображенной на рис. 199, определить частоты источника ЭДС, соответствующие резонансам токов и напряжений. Построить график сдвига фазы тока относительно ЭДС источника $\mathscr{E}$ в зависимости от частоты источника, считая внутреннее сопротивление последнего пренебрежимо малым.

O2-10.27

Дан черный ящик с двумя внешними клеммами. Внутри него собрана схема из индуктивности с малыми омическими потерями, емкости и сопротивления. Известно, что если подать на клеммы 91 постоянное напряжение 1 В, то ток будет равен 10 мА. При переменном напряжении 1 В на частоте 50Г ток равен 1 mA. С ростом частоты ток падает, достигает минимума при частоте 500 Гц, а затем постоянно возрастает до предельного значения 10 мА. Нарисовать схему черного ящика и определить ее параметры.

O2-10.28

Дан черный ящик с двумя внешними клеммами. Внутри него собрана схема из индуктивности с малыми омическими потерями, емкости и сопротивления. Известно, что если подать на клеммы постоянное напряжение 1 В, то ток будет равен 1 мА. При переменном напряжении 1 В на частоте 50 Гц ток равен 10 мА. С ростом частоты ток растет и достигает максимума на частоте 500 Гц. Нарисовать схему черного ящика и определить ее параметры.

O2-10.30

В цепь переменного тока с напряжением $\mathscr{E} = 440$ В и частотой $f = 50$ Гц включены последовательно нормально горящая лампочка накаливания и конденсатор. Чему равна емкость конденсатора C, если лампочка рассчитана на напряжение $V = 220$ В и силу тока $I = 1$ А? Чему равен сдвиг фаз φ между током и полным напряжением в цепи?

O2-10.31

В цепь переменного тока напряжением $\mathscr{B} = 440$ В и частотой $f = 50$Г включены последовательно нормально горящая лампочка накаливания и катушка самоиндукции. Лампочка рассчитана на 110 В и 1 А. При замене лампочки другой, рассчитанной на 220 В и $0,8$ А, оказалось, что новая лампочка горит также нормальным накалом. Найти сопротивление R и самоиндукцию L катушки.

O2-10.32

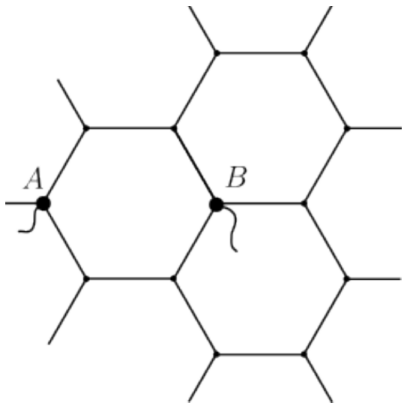
Определить диэлектрическую проницаемость ε , если известно, что ее удельное сопротивление $\rho = 10^{11}$ $\text{O}_\text{m}\cdot\text{cm}$ и при переходе от постоянного тока к переменному с частотой 50 Гц (при том же эффективном напряжении) ток, текущий через конденсатор, наполненный этой жидкостью, возрастает в 7 раз ($n = 7$).

O2-10.33

Длинный однослойный реостат из нихромовой проволоки с удельным сопротивлением $\rho = 1,1 \cdot 10^{-6}$ $\text{O}_\text{M} \cdot \text{m}$ намотан виток K (????) 92 витку с плотностью витков $n = 10$ см$^{-1}$ на керамический каркас диаметром $D = 5$ см и включен в цепь переменного тока с частотой $f = 50$ Гц. Найти сдвиг фаз между током и напряжением на реостате. Толщиной изоляции проволоки пренебречь.

Landau-Inst-summer-2025.4/8. Hexagonal lattice

Найти сопротивление между узлами A и B, указанными на рис. 2 , на бесконечной плоской шестиугольной решетке. Сопротивления всех ребер одинаковы и равны r.



Solution

(??? I guess after learning Tyimaaga's solution, this will be solved)

§ 10. Вынужденные колебания. Резонанс. Метод комплексных амплитуд SOLUTIONS

10.8

$I = \frac{\mathscr{E} RC\omega}{\sqrt{L^2\omega^2+R^2}}$; $\quad \operatorname{tg}\varphi = -\frac{R}{L}$.

10.9

$g = \frac{V_0\omega C\left(1-\omega^2 LC\right)}{2\omega^2 LC-1}\sin\omega t$;

$$\mathscr{I}_{\min} = 0\omega^2 = \frac{1}{LC}; \quad \mathscr{I}_{\max} = \infty\omega^2 = \frac{1}{2LC}.$$

10.10

$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \sqrt{\frac{4}{3}} \approx 1,15$.

10.11

Сила тока останется без изменения. Резонансная частота возрастет в $\sqrt{2}$ раз.

10.12

Указание. Преобразовать обычную формулу для амплитуды силы тока в контуре $\mathscr{I} = \frac{\mathscr{E}}{\sqrt{R^2+[L\omega-1/(\omega C)]^2}}$, подставив в нее $\mathscr{I}_0 = \mathscr{E}/R$, $\omega_0 = 2\pi f_0 = 1/\sqrt{LC}$ и частоту внешней силы $\omega = 2\pi\,(f_0 + \Delta f)$. Пренебречь квадратами и более высокими степенями $\Delta f/f_0$.

10.13

$\varphi_{\max} = \frac{\varphi_0}{1-e^{-\delta T/2}}$.

10.14

$\Delta\omega_1 = \Delta\omega_2 = \frac{1}{\tau} = 1\text{с}^{-1}$.

10.15

Энергия уменьшится в два раза; $\text{t} = \frac{1}{2\pi\Delta f} \approx 0,16\text{с}$.

[1] Здесь, как и в § 9, ответы и решения даны в СИ, кроме особо оговоренных случаев.

10.16

$R = \frac{V_0}{\mathscr{I}_0} = 10\text{Ом}; \quad \tau = \frac{2L}{R} = 0,2\text{с}$.

10.17

$V = \frac{m}{e}\frac{lLa\omega^3}{R}\varphi_0 \sin\omega t$, где m и e - масса и заряд электрона.

10.18

$Q_2 = 2Q_1$, где $Q = \frac{f}{\Delta f}$ - добротность.

10.19

$\frac{V(f_0)}{V(f_1)} = \sqrt{Q^2\left[1-\left(\frac{f_1}{f_0}\right)^2\right]^2 + \left(\frac{f_1}{f_0}\right)^2} \approx 300$.

10.20

$V_1 \approx V_0\left(\frac{f_0}{f_1}\right)^2 = 10\text{МВ}$.

10.21

$R = \frac{V}{I_0} = 10\text{ОМ}; \quad L = \frac{V}{2\pi f_1 I_1} = 0,1\text{Г}$;

$$C = \frac{1}{(2\pi f_0)^2 L} = \frac{f_1 I_1}{2\pi f_0^2 V} = 0,1\text{мКФ}.$$

10.22

$\frac{\Delta L}{L} = \frac{1}{Q}\sqrt{\frac{2\Delta V}{V}} \approx 4,5 \cdot 10^{-6}$.

10.23

$\Delta d = \frac{d}{Q}\sqrt{\frac{2\Delta V}{V}} = 4,5 \cdot 10^{-7}$ cm.

10.24

Добротность контура должна быть $Q > 525$, т. е. логарифмический декремент затухания контура менее $0,6\%$.

10.25

Резонансу напряжений соответствует частота $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. Резонансу токов соответствует $\omega_1 = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{LC}} \approx \frac{0{,}52}{\sqrt{LC}}$ и $\omega_2 = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{LC}} \approx \frac{1{,}93}{\sqrt{LC}}$. График $\varphi(\omega)$ - фазовой характеристики цепи - изображен на рис. 409.

10.26

Указание. Импеданс цепи $\widehat{Z} = i\left(\omega\frac{L}{2} - \frac{1}{2\omega C} + \frac{1}{\frac{1}{\omega L} - \omega C}\right)$. Резонанс токов соответствует величине $Z = \infty$. Он произойдет на частоте

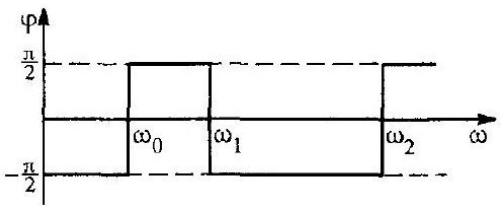


Рис. 409

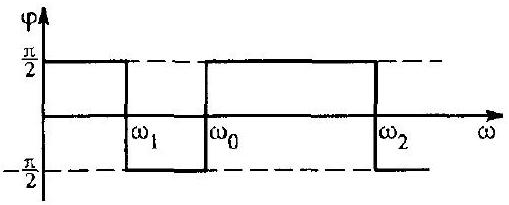


Рис. 410

$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. Резонанс напряжений соответствует $Z = 0$. Он произойдет на частотах $\omega_1 \approx \frac{0{,}52}{\sqrt{LC}}$ и $\omega_2 \approx \frac{1{,}93}{\sqrt{LC}}$. Фазовая характеристика цепи $\varphi(\omega)$ изображена на графике (рис. 410). Заметим, что если бы в цепи была активная нагрузка, то скачки фазы на частотах ω_0, ω_1 и ω_2 отсутствовали и были бы плавные переходы от $+\pi/2$ к $-\pi/2$ и наоборот.

10.27

См. рис. 411.$L = 3,2$Г; $C = 3,14 \cdot 10^{-2}$мКФ; $R = 100$Ом.

10.28

Возможны два варианта схемы:
1) см. рис. 412; $R = 1$ кОм; $C = 32$ мкФ; $L = 3,14$ мГ;
2) см. рис. 413; $R = 1$ кОм; $C = 13$ мкФ; $L = 30$ m.

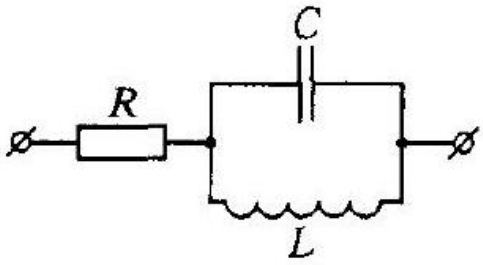


Рис. 411

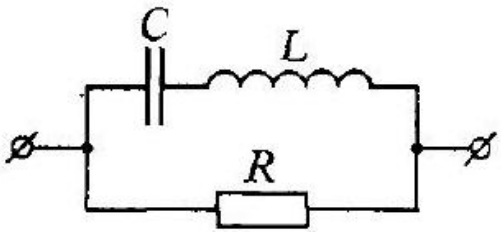


Рис. 412

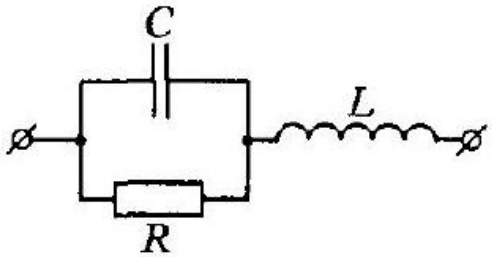


Рис. 413

10.29

$r = \frac{R}{1+(R/X)^2}$; $\quad x = \frac{X}{1+(X/R)^2}$.
1) $r = \frac{X^2}{R}$, $\quad x \approx X$, $\quad r \ll x$; 2) $r \approx R \quad x \approx \frac{R^2}{X}$, $\quad r \gg x$.

10.30

$C = \frac{I}{2\pi f(\mathscr{E}^2 - V^2)^{1/2}} \approx 8,4\text{mK}\Phi$; $\quad \varphi = 60°$.

10.31

$R = 137$ Ом; $L = 1,16$Г.

10.32

$\varepsilon = \frac{\sqrt{n^2-1}}{2\pi f \varepsilon_0 \rho} = 2,5$, где ε_0 - электрическая постоянная в СИ.

10.33

$\operatorname{tg}\varphi = \frac{2\pi^2 f D \mu_0}{16\rho n} = 5 \cdot 10^{-3}$, где μ_0 - магнитная постоянная в СИ.

14.2.11 Basic Problems about circuits 2

O2-10.34

В схеме, представленной на рис. 201, емкость подобрана таким образом, что при замыкании ключа K ток I, показываемый амперметром A, не изменяется. Определить индуктивность кагушки, если известно, что $I = 0,5$ А, $V = 380$ В, $f = 50$Г.

10.34

$L = \frac{V}{4\pi f I} = 1,2$Г.

O2-10.35

По первичной обмотке трансформатора течет ток $\mathfrak{J} = \mathscr{J}_0 \cos\omega t$. В какой момент времени следует разорвать вторичную обмотку трансформатора, чтобы в месте разрыва не образовалась искра? Определить силу тока J_1 в первичной обмотке в этот момент времени. Индуктивность вторичной обмотки L, омическое сопротивление R.

10.35

Искры не будет, если $\operatorname{tg}\omega t = \frac{\omega L}{R}$. При этом ток в первичной цепи $_1 = \frac{\mathscr{J}_0}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega L}{R}\right)^2}}$.

O2-10.36

Как изменится ответ к предыдущей задаче, если во вторичную обмотку дополнительно включить конденсатор емкостью C? П Пи какой частоте ω ток в первичной обмотке в момент разрыва вторичной будет равен амплитудному значению $\circ_0$?

10.36

$\operatorname{tg}\omega t = \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$; $_1 = \frac{\mathscr{J}_0 R}{\sqrt{R^2+\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$; $\mathscr{I}_1 = _0$ при $\omega L = \frac{1}{\omega C}$.

O2-10.37

Разделительный трансформатор имеет две одинаковые обмотки, у каждой из которых индуктивное сопротивление на рабочей частоте в $n = 5$ раз больше омического. Каково отношение мощностей, потребляемых в первичной цепи при замкнутой и разомкнутой вторичной цепи?

10.37

$\frac{N}{N_0} = \frac{(1+n)\left(1+2n^2\right)}{1+4n^2} = 13,1$, где N_0 - мощность при разомкнутой, а N - при замкнутой цепи.

O2-10.38

В трансформаторе омическое сопротивление первичной цепи в n_1, а вторичной в n_2 раз меньше индуктивного (на рабочей частоте). Найти сдвиг фазы δ между током и напряжением в первичной цепи. Рассеянием магнитного потока в сердечнике трансформатора пренебречь. Получить числовой ответ при $n_1 = n_2 = 10$.

10.38

$\operatorname{tg}\delta = \frac{n_1}{1+n_2(n_1+n_2)}$. При $n_1 = n_2 = 10\delta = -3°$. Ток отстает по фазе от напряжения.

O2-10.39

Вблизи катушки колебательного контура с параметрами L_1, C, R расположена вторая катушка с индуктивностью L_2. Взаимная индуктивность между катушками равна M. Какой будет резонансная частота контура, если выводы второй катушки замкнуты накоротко? Считать, что индуктивное сопротивление второй катушки на рассматриваемой частоте значительно больше ее активного сопротивления. При каком условии резонанс недостижим?

10.39

$\omega_{\text{рез}} = \frac{1}{\sqrt{C\left(L_1 - \frac{M^2}{L_2}\right)}}$. Резонанс недостижим, если $M^2 = L_1 L_2$.

O2-10.40

Две одинаковые катушки, намотанные на общий каркас, включены последовательно в колебательный контур с емкостью Рис. 202 двумя способами, изображенными на рис. 202. Резонансные частоты колебательных контуров оказались равными ω_1 и ω_2 соответственно. Найти индуктивность L каждой из катушек и коэффициент их взаимной индукции M.

10.40

$L = \frac{1}{4C}\left(\frac{1}{\omega_1^2} + \frac{1}{\omega_2^2}\right)$; $\quad M = \frac{1}{4C}\left(\frac{1}{\omega_1^2} - \frac{1}{\omega_2^2}\right)$.

41-45

10.41

$M = -L_2$.

10.42

$M = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\omega_1^2 C_2} - L_2\right)$.

10.43

$L = \frac{1}{C}\left(\frac{1}{\omega_1^2} + \frac{1}{\omega_2^2}\right)$; $\quad M = \frac{1}{C}\left(\frac{1}{\omega_1^2} - \frac{1}{\omega_2^2}\right)$.

10.44

: $Q = \frac{\rho c^2}{2\pi^2 f D \delta} = 18$ (СГСЭ).

Решение. Добротность катушки - это добротность колебательного контура, все потери в котором сосредоточены в катушке. Добротность можно определить как

$$Q = \frac{W_0}{\Delta W_{\text{пот}}\,(2\pi)} = \omega \frac{W_0}{N_{\text{пот}}} = 2\pi f \frac{W_0}{N_{\text{пот}}},$$

где W_0 - амплитудное значение энергии в катушке, $\Delta W_{\text{пот}}$ - потери энергии за период колебаний, $N_{\text{пот}}$ - мощность потерь энергии. $W_0 = \frac{B_0^2}{8\pi} Sl$, где $S = \frac{\pi D^2}{4}$, B_0 - амплитуда магнитной индукции, l - длина

трубки. Потери энергии связаны главным образом с вихревыми токами в стенках трубки. Эти токи - кольцевые. Причина вихревых токов - ЭДС индукции

$$\mathscr{E}_{\text{инд}} = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{1}{c}S\frac{dB}{dt}.$$

Отсюда мощность потерь на нагрев трубки

$$N_{\text{пот}} = \frac{\mathscr{E}^2_{\text{инд}}}{2R} = \frac{1}{2R}\left(\frac{\omega B_0 S}{c}\right)^2$$

Здесь $R = \rho\frac{\pi D}{l\delta}$ - сопротивление трубки вихревым токам, l - длина трубки. Таким образом,

$$Q = 2\pi f\frac{W_0}{N_{\text{пот}}} = \frac{c^2 Rl}{4\pi S\omega} = \frac{pc^2}{2\pi^2 fD\delta} = 18.$$

O2-10.45

Катушка колебательного контура имеет добротности $Q = 100$. Если один виток катушки замкнуть накоротко, то ее индуктивность почти не меняется, а добротность уменьшается вдвое Определить по этим данным число витков N катушки.

10.45

$N = Q^2 = 10^4$ витков.

O2-10.46

Колебательный контур состоит из конденсатора и заполненной железным сердечником катушки индуктивности, намотанной проводом с пренебрежимо малым сопротивлением. Как изменится добротность контура при увеличении емкости конденсатора в двг раза? Скин-эффект не учитывать.

10.46

$\frac{Q_2}{Q_1} = \sqrt{\frac{C_2}{C_1}} = \sqrt{2}.$

O2-10.47

Длинный соленоид с плотной намоткой размещен на цилиндрическом железном сердечнике с магнитной проницаемостью μ и проводимостью λ (рис. 206). Соленоид замкнут на конденсатор, вследствие чего образован контур с резонансной частотой ω. Радиус сердечника r, утечки в конденсаторе не существенны, обмотку и соединительные провода можно считать идеально проводящими. Определить добротность контура. Скин-эффект не учитывать.

10.47

$Q = \frac{2\omega}{\pi\mu\lambda}\left(\frac{c}{\omega r}\right)^2$ (СГСЭ).

48

10.48

$\omega_{\text{рез}} \approx \frac{c}{l} = 3\cdot 10^9\text{с}^{-1}$. Более грубая, но прямая оценка дает $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda} \approx 10^{10}\text{с}^{-1}$, где $\lambda = 2l$.

10.49

$f_{\text{рез}} = \frac{c}{\pi D}\left[\frac{a}{2d}\ln\left(1+\frac{2a}{D}\right)\right]^{-1/2} \approx 7\cdot 10^7\text{Г}$ (СГСЭ).

О2-10.50

Тороидальный резонатор электромагнитных колебаний представляет собой полый идеально проводящий тор круглого сечения. Внутри тора вырезан зазор (рис. 209), края зазора затянуты двумя проводящими сетками, имеющими форму круга радиусом $a = 5$ см. Расстояние между сетками $d = 2$ см, а средний радиус Рис. 210 Рис. 211 Рис. 212 кривизны тора 2 а. Рассматривая резонатор как колебательный контур, оценить его резонансную частоту. Считать, что ε и μ в резонаторе примерно равны единице.

10.50

$\omega_{\text{рез}} = \frac{2c}{a}\sqrt{\frac{d}{\pi a}} = 0,428 \cdot 10^{10}\text{с}^{-1}$; $f_{\text{рез}} = 682\text{М}$ (СГСЭ).

О2-10.51

Пренебрегая активным сопротивлением катушек, определить частоту резонанса токов в изображенном на рис. 210 контуре в случаях, когда генератор подключен к клеммам 1) ab, 2) ad и 3) ac.

10.51

Случаи 1) и 3) $\omega^2 = \frac{1}{LC}$; в случае 2) нет резонанса токов.

О2-10.52

При каком условии амплитуда тока ∘ ной на рис. 211, зависит только от амплитуды приложенного напряжения $V = V_0 \cos\omega t$, но не от его частоты? Найти при этом условии разность фаз между приложенным напряжением и напряжением на концах RC-пары.

10.52

$L = R^2C$; $\operatorname{tg}\varphi = -\omega RC$.

О2-10.53

На рис. 212 изображена электрическая схема, в которой $R = 6$ Ом, L=0,01 Г. Внешнее напряжение синусоидальное с 95 круговой частотой $\omega = 300\text{с}^{-1}$. Определить, при какой емкости конденсатора C ток находится в фазе ⌋ напряжением V.

10.53

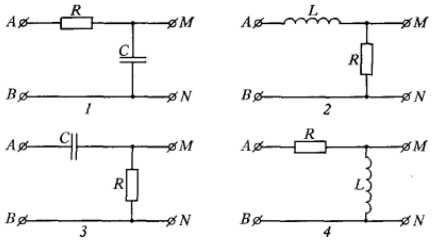
$C = \frac{L}{R^2+\omega^2L^2} \approx 220$ мкФ.

О2-10.58

На вход фильтра (рис. 217) подано напряжение $V = V_0 \cos\omega t$, где $\omega = 1/(RC)$. Определить амплитуду напряжения на выходе U_0.

О2-10.59

К клеммам A и B (рис. 218) подводится произвольное переменное напряжение $V_{\text{вх}}(t)$, которое возбуждает между клеммами M и N напряжение $V_{\text{вых}}(t)$. Параметры R, L, C подобраны таким образом, что напряжение на выходе в каждый момент времени мало по сравнению с напряжением на входе в тот же момент. Показать, что при выполнении этого условия выходное напряжение на схемах 1 и 2 приблизительно пропорционально интегралу, а на схемах 3 и 4 - производной от входного напряжения по времени.



O2-10.62

При каком соотношении между параметрами моста, изображенного на рис. 221, напряжение U на его выходе находится в фазе со входным напряжением V? Какова при этом амплитуда напряжения U_0 на выходе? $4-1651$ 97

O2-10.63

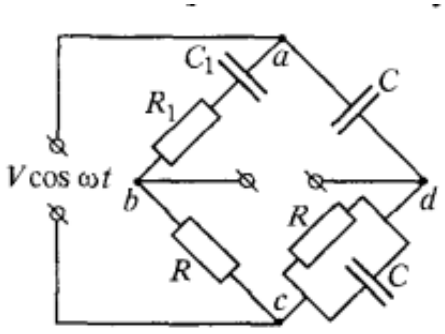
Мост переменного тока, изображенный на рис. 222, сбалансирован. Определить соотношение между постоянными времени плеч ab и cd. Является ли найденное соотношение достаточным условием баланса моста?

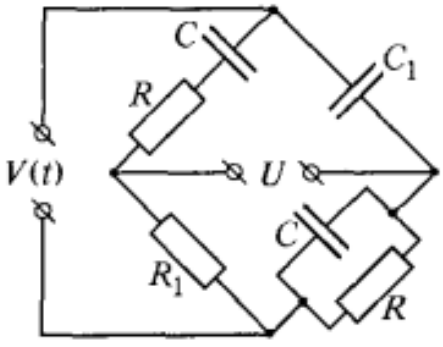
O2-10.64

Найти условия, при которых мост, изображенный на рис. 223, сбалансирован (т. е. $U = 0$) при подаче на его вход периодического напряжения любой формы.

O2-10.65

На колебательный контур с собственной частотой ω_0 и логарифмическим декрементом затухания $d = 0,02$ действует внешняя





O2-10.68

Конденсатор колебательного кон- тура возбуждается периодической последовательностью коротких импульсов, частота Рис. 224 следования которых равна собственной частоте контура, а их величина равна V_0. Как изменится амплитуда вынужденных колебаний, если контур возбудить гармонической ЭДС той же частоты и амплитуды V_0 (ЭДС в Этом случае включается последовательно с элементами контура)?

O2-10.69

Проволочная спираль с числом витков $N = 100$ навита на длинный сердечник с магнитной проницаемостью $\mu = 1000$. Один из концов спирали закреплен, а другой совершает медленные гармонические колебания с частотой $f = 1$ Гц и амплитудой $a = 2$ см. При таких медленных колебаниях спираль деформируется практически равномерно по всей длине. Площадь поперечного сечения, приблизительно равная площади витка спирали, $S = 100$ см^2, омическое 98 сопротивление спирали $R = 2$ Ом, а ее длина в недеформированном состоянии $l_0 = 31,4$ см. Концы спирали подсоединяются к источнику с напряжением $\mathscr{E}(t)$. Каково должно быть $\mathscr{E}(t)$, чтобы по спирали шел постоянный ток $\mathscr{J} = 1$ А?

O2-10.70

В одной из схем радиочастотного лампового генератора наличие электронной лампы с нелинейной характеристикой в цепи обратной связи эквивалентно подключению к колебательному контуру двухполюсника (рис. 225), комплексное сопротивление которого зависит от амплитуды тока $_0$ и на частоте ω равно $Z = a/_0 + ib\mathscr{J}_0^2/\omega$, где a и b - известные константы. При каких условиях возникнут автоколебания в такой схеме? Каковы частота ω и амплитуда A установившихся колебаний?

O2-10.71

Генератор возбуждает в изображенной на схеме электрической цепи (рис. 226) колебания сложной формы с периодом порядка 10^{-3} с. Внутренняя катушка может поворачиваться вокруг Рис. 225 Рис. 226 оси, перпендикулярной плоскости чертежа. За счет упругости подвеса при отсутствии токов внутренняя катушка устанавливается в положении равновесия, при котором ее ось перпендикулярна оси внешней катушки. При пропускании постоянного тока $_0 = 1$ А по обеим катушкам отклонение внутренней катушки $\varphi_0 = 1°$. Период собственных колебаний внутренней катушки порядка 1 с. Каково отклонение φ, если амперметры показывают эффективные значения токов $I = 1$ А, $I_1 = 2$ А и $I_2 = 3$ А?

O2-10.72 Гистерезис сегнетоэлектрика в конденсаторе (????)

Конденсатор подключен к розетке переменного тока с частотой $f = 50$ Гц и напряжением $U = 220$ В. Через конденсатор с сопротивлением утечки $R = 10$ кОм течет ток $I = 1$ А. Зависимость электрического смещения от напряженности E электрического поля в сегнетоэлектрике конденсатора, объем которого $V = 100$ см^3, образует петлю гистерезиса с площадью $S = 12,5$ мДж/см ^{3}. Найти активное сопротивление r_C и емкость C конденсатора.

Solution

(???)

Активное сопротивление $r_\text{С}$ конденсатора определяется не только сопротивлением R утечки, но и потерями энергии, затрачиваемыми на переполяризацию диэлектрика (сегнетоэлектрика), т. е. полная мощность потерь $N_\text{пот} = N_\text{ут} + N_\text{пол}$, а активное сопротивление $r_\text{С} = \frac{N_\text{пот}}{I^2}$.

Мощность, рассеиваемая на сопротивлении утечки $N_\text{у} = U^2/R = 4,84$ Вт, а мощность, расходуемая на переполяризацию

$$N_\text{пол} = \oint \frac{EdD}{4\pi} Vf = \frac{S}{4\pi} Vf = 4,97\text{В},$$

где использовано очевидное выражение для площади петли гистерезиса $\oint EdD = S$.

Итак, полная мощность потерь $N_\text{пот} = 9,81$ Вт. Импеданс цепи $\widehat{Z}$ легко вычислить: $|\hat{Z}| = \frac{U}{I} = 220$ Ом. Активное сопротивление конденсатора тоже уже можно определить: $r_C = N_\text{пот}/I^2 = 9,81$ Ом. Реактивное сопротивление X_C конденсатора $X_C = \sqrt{Z^2 - r_C^2} = 219,8$ Ом, откуда искомая емкость $C = 1/(\omega X_C) \approx 14,4$ мкФ.

10.72* $r_C = 9,8$ Ом;

$$C = \frac{1}{2\pi j X_C} \approx 14,4 \text{ мк , где } X_C = \sqrt{\left(\frac{U}{I}\right)^2 - r_C^2} = 219,8 \text{ Ом}$$

O2-10.73 (?? че???)

Дроссель подключен к розетке сети переменного тока с частотой $f = 50$Г и напряжением $U = 220$ В. Через обмотку с омическим сопротивлением $r = 1$ Ом течет ток $I = 1$ А. Мощность, выделяемая токами Фуко в пластинах сердечника, равна $N = 10$ Вт. Зависимость индукции B от напряженности H магнитного поля в ферромагнетике сердечника, объем которого $V = 100$ см^3, образует петлю гистерезиса

с площадью $S = 25$к с.э. Найти активное сопротивление R и индуктивность дросселя L. Считать, что сердечник набран из тонких пластин и поле внутри сердечника однородное.

O2-10.74

Два одинаковых проволочных кольца радиусом r каждое расположены так, как указано на рис. 227. Расстояние l между центрами колец велико по сравнению с r. В кольце I поддерживается переменный ток $\mathscr{J} = \mathscr{J}_0 \cos \omega t$. Найти среднее значение и направление силы F взаимодействия между кольцами. Индуктивность одного кольца равна L, омическое сопротивление R. Иеследовать два предельных случая: 1) $\omega L \gg R; 2) \omega L \ll R$.

O2-10.75

Металлическое проволочное кольцо площадью S с омическим сопротивлением R и индуктивностью L подвешено в горизонтальном однородном магнитном поле $B = B_0 \cos \omega t$ и удерживается в нем таким образом, что угол между вектором $\mathbf{B}_0$ и нормалью $\mathbf{n}$ к плоскости кольца равен φ (рис. 228). Определить средний момент M сил, действующих на кольцо со стороны магнитного поля.

Найти положения равновесия кольца и исследовать их устойчивость. Рассмотреть два предельных случая: 1) $\omega L \gg R; 2) \omega L \ll R$. В каком случае при одинаковых L вращающий момент больше?

O2-10.76 Сверхпроводник в колебательном контуре (??!!)

Для регистрации сверхпроводящего перехода круглый цилиндрический образец радиусом r и длиной l помещается в катушку колебательного контура, работающего на частоте $f = 10$ МГц. На этой частоте глубина скин-слоя исследуемого металла в нормальном состоянии $\delta = 1,0 \cdot 10^{-5}$ см. Определить изменение частоты Δf при охлаждении от $T > T_\text{c}$ до $T \ll T_\text{c}$, где T_c - критическая температура сверхпроводника. Катушку считать соленоидом длиной $l \gg r$, зазор между образцами и витками катушки $d = 0,1\text{мМ}, d \ll r$. Проникновением высокочастотного поля в проволоку катушки пренебречь.

§ 10. Вынужденные колебания. Резонанс. Метод комплексных амплитуд SOLUTIONS

10.54

$\omega RC = 1$.

10.55

$\Omega^2 LC = 1; \quad U = V \frac{CR^2 - L}{CR^2 + L}$. Векторная диаграмма изображена на рис. 414.

10.56

$\Omega^2 LC = 1; \quad \widehat{U} = -i \frac{2R\sqrt{LC}}{L + CR^2} \widehat{V}$ или $|U| = V \frac{2R\sqrt{LC}}{L + CR^2}$. На рис. 415 изображена векторная диаграмма напряжений цепи, где V_{R_1} - вектор

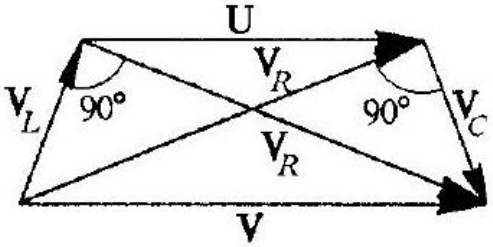


Рис. 414

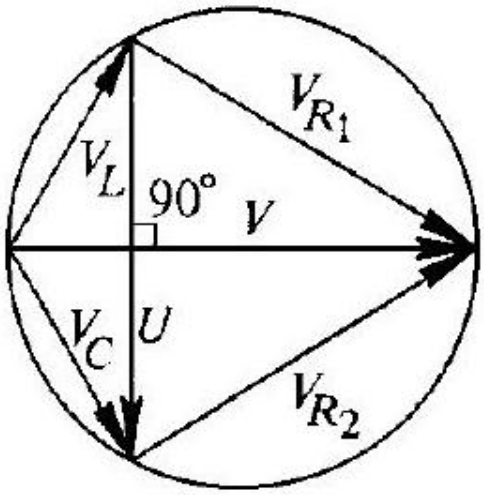


Рис. 415
напряжения на левом резисторе R в схеме, V_{R_2} - на правом резисторе R. $\hat{U} = \widehat{V}_{R_1} - \widehat{V}_{R_2}$.

10.57

$\omega RC = 1$; $\quad \frac{V}{U} = 3$.

10.58

$U_0 = V_0 \left(2m^2 + 2m + 5\right)^{-1/2}$.

10.60

$Z = \sqrt{\frac{L}{C} - \frac{\omega^2 L^2}{4}}$, при $\omega > \frac{2}{\sqrt{LC}}$ потребления мощности не будет.

10.61

Амплитуды на входе и выходе одинаковы. Сдвиг фазы выходного напряжения относительно входного определяется формулой $\operatorname{tg}\varphi = \frac{2\omega RL}{\omega^2 L^2 - R^2}$.

10.62

$\omega L = R$; $\quad U_0 = V_0 \left(\frac{1}{3} - \frac{R_2}{R_1 + R_2}\right)$.

10.63

$\tau = RC = R_1 C_1$. Достаточные условия баланса моста $R_1 = R$; $C_1 = C$.

10.64

$\frac{R_1}{C_1} = \frac{R}{C}$.

10.65

$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} \approx \frac{1}{\pi}\%$.

10.66

$\operatorname{tg}\varphi = \frac{R_2}{\omega L_2 - \frac{1}{\omega C_2}}$, где R_2, L_2, C_2 - параметры второго контура.

10.67

$\omega^2 LC = 1$.

10.68

$V_1 = \frac{V_0 Q}{\pi}; V_2 = V_0 Q$, откуда $\frac{V_2}{V_1} = \pi$, где Q - добротность контура.

10.69

$\mathscr{E}(t) = \mathscr{G} R\left[1 + \frac{2\pi\mu_0\mu S N^2 a f \sin 2\pi f t}{R l_0^2 \left(1 + \frac{a}{l_0}\cos 2\pi f t\right)^2}\right] = 2(1 + 0,08\sin 2\pi f t)$ [В].

10.70

Условие возникновения автоколебаний $\hat{Z}_{\text{конт}} + \hat{Z} = 0$, где $\hat{Z}_{\text{конт}}$ - импеданс колебательного контура; $\omega^2 = \frac{1}{LC} - \frac{a^2 b}{R^2 L}; A = \frac{|a|}{R}$.

10.71

Отклонение катушки $\bar{\varphi} = k\overline{1(t)2(t)}$, а коэффициент k определяется соотношением $\varphi_0 = k_0^2 \cdot \bar{\varphi} = \varphi_0 \frac{r^2 - I_1^2 - I_2^2}{2\mathscr{I}_0^2} = -6^\circ$.

10.72

* $r_C = 9,8\text{Ом}$;

$$C = \frac{1}{2\pi f X_C} \approx 14,4 \text{ мкФ, где } X_C = \sqrt{\left(\frac{U}{I}\right)^2 - r_C^2} = 219,8\text{Ом}.$$

Решение. Активное сопротивление r_C конденсатора определяется не только сопротивлением R утечки, но и потерями энергии, затрачиваемыми на переполяризацию диэлектрика (сегнетоэлектрика), т. е. полная мощность потерь $N_{\text{пот}} = N_{\text{ут}} + N_{\text{полл}}$, а активное сопротивление $r_{\text{С}} = \frac{N_{\text{пот}}}{I^2}$.

Мощность, рассеиваемая на сопротивлении утечки $N_{\text{ут}} = U^2/R = 4,84$ В т, а мощность, расходуемая на переполяризацию

$$N_{\text{по},\pi} = \oint \frac{EdD}{4\pi} V_f = \frac{S}{4\pi} V f = 4,97\text{ВТ},$$

где использовано очевидное выражение для площади петли гистерезиса $\oint EdD = S$.

Итак, полная мощность потерь $N_{\text{пот}} = 9,81$ Вт. Импеданс цепи $\widehat{Z}$ легко вычислить: $|\hat{Z}| = \frac{U}{I} = 220$ Ом. Активное сопротивление конденсатора тоже уже можно определить: $r_C = N_{\text{пот}}/I^2 = 9,81$ Ом.

Реактивное сопротивление X_C конденсатора $X_C = \sqrt{Z^2 - r_C^2} = 219,8$ Ом, откуда искомая емкость $C = 1/(\omega X_C) \approx 14,4$ мк Ф.

10.73

$R = 12\text{Om}$; $L = \frac{X_L}{2\pi f} = 0,7$ Г, где $X_L = \sqrt{\left(\frac{U}{I}\right)^2 - R^2} = 219,7\text{O}$.

указание. Площадь петли гистерезиса $S = \oint(\mathbf{H}d\mathbf{B})$ определяет мощность потерь на перемагничивание ферромагнетика $N_{\text{пер}} = \frac{S}{4\pi}$ Vf (СГСЭ).

10.74

$F = \frac{6\pi^4\omega^2 L r^8 \mathscr{G}_0^2}{R^2+\omega^2L^2}\frac{1}{l^7}$. Сила - отталкивающая.

Если $\omega L \gg R$, то $F \approx \frac{6\pi^4 r^8{}_0^2}{L}\frac{1}{l^7}$.

В другом предельном случае $\omega L \ll R$ $F \approx \frac{6\pi^4\omega^2 L r^8 \mathscr{G}_0^2}{R^2}\frac{1}{l^7}$.

10.75

$\mathbf{M} = \frac{\omega^2 S^2 L B_0 \cos\varphi}{2(R^2+\omega^2L^2)}[\mathbf{B}_0\mathbf{n}]$. Возможны два положения равновесия:

1) плоскость кольца перпендикулярна к магнитному полю (неустойчивое равновесие) ;

2) плоскость кольца параллельна магнитному полю (устойчивое равновесие).

При $\omega L \gg R$ $M \equiv M_1 \approx \frac{B_0^2 S^2}{2L}\sin\varphi\cos\varphi$.

П $\omega L \ll R$ $M \equiv M_2 = \frac{\omega^2 B_0^2 S^2 L}{2R^2}\sin\varphi\cos\varphi = M_1\left(\frac{\omega L}{R}\right)^2$.

Во втором случае вращающий момент меньше.

10.7

6. $\Delta f = \frac{f\cdot\Delta L}{2L} = 5\cdot 10^3$Г, где $\frac{\Delta L}{L} = \frac{\delta}{d} = 10^{-3}$ - изменение индуктивности катушки.

14.2.12 Generally special problems about circuits 1

ТУЙМ-100. Треугольный фрактал (2010)

Из куска тонкой проволоки сопротивлением $R_0 = 6$ Ом изготовили плоскую фигуру, состоящую из большого числа равносторонних треугольников, стороны каждого из которых, начиная со второго, являются средними линиями предыдущего треугольника (рис. 56). Вычислите сопротивление R полученной фигуры между точками A и B. Все точки соединения хорошо пропаяны.

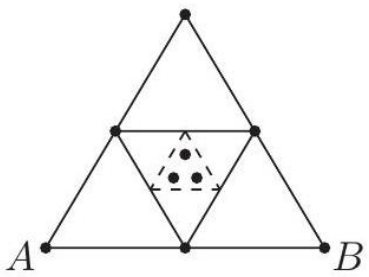


Рис. 56

ТУЙМ-100. Треугольный фрактал (2010)

• Пусть P - периметр наибольшего треугольника, тогда общую длину L использованной проволоки можно найти по формуле для суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем 0,5, так как периметр каждого следующего треугольника в 2 раза меньше предыдущего:

$$L = P + \frac{P}{2} + \frac{P}{4} + \frac{P}{8} + \ldots = \frac{P}{1-0,5} = 2P$$

Длина одной стороны наибольшего треугольника $a = P/3 = L/6$, значит, её сопротивление $r = R_0/6 = 1$ Ом.

• Добавим к цепи ещё один треугольник, для которого стороны a станут средними линиями (рис. 193). Новая система вложенных треугольников подобна исходной с коэффициентом подобия 2, следовательно, сопротивление R' между точками A' и B' больше R в то же число раз: $R' = 2R$.

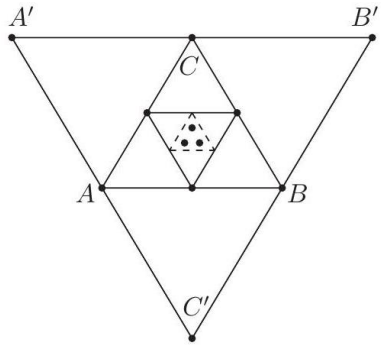


Рис. 193

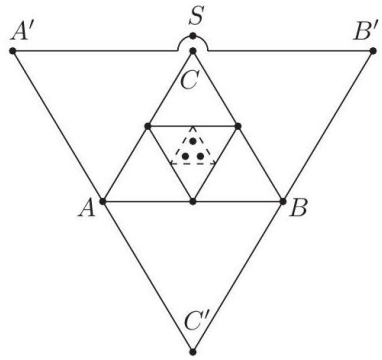


Рис. 194 3. Если разъединить вершину C и середину S стороны $A'B'$ (рис. 194), то сопротивление R' не изменится, так как в силу симметрии цепи точки C и S имеют одинаковые потенциалы. Пользуясь свойствами последовательного и параллельного соединений, по эквивалентной схеме (рис. 195) находим

$$R' = \frac{1}{\frac{1}{r+r} + \frac{1}{r+\frac{1}{\frac{1}{R}+\frac{1}{r+r}}+r}} = \frac{4r(R+r)}{3R+4r}.$$

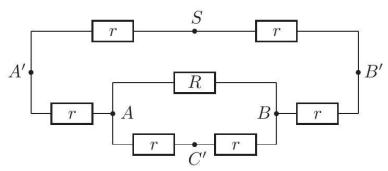


Рис. 195

• Приравняем выражения для R', полученные в пунктах 2 и 3:

$$2R = \frac{4r(R+r)}{3R+4r}$$

что после приведения к каноническому виду даёт уравнение

$$3R^2 + 2rR - 2r^2 = 0$$

откуда

$$R = \frac{\sqrt{7}-1}{3} \cdot r = \frac{\sqrt{7}-1}{18} \cdot R_0 \approx 0,55 \text{ Ом}$$

(второй корень отрицательный и не имеет физического смысла).

ТУЙМ-86. Полубесконечная цепочка (2004)

Определите сопротивление полубесконечной цепи между точками A и B, если сопротивление каждого звена равно R (рис. 41).

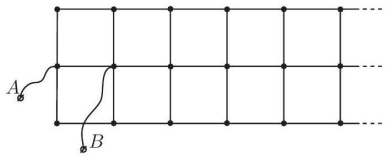


Рис. 41

86. Полубесконечная цепочка (2004)

Из симметрии схемы, изображённой на рис. 158, относительно линии, соединяющей точки A и B, следует, что потенциалы всех точек, симметричных относительно этой линии, равны, то есть схемы на рис. 158 и 159 эквивалентны. Рассчитать сопротивление схемы на рис. 159 уже легко:

$$R_\infty = \frac{\frac{R}{2}\left(R_\infty + \frac{3R}{2}\right)}{R_\infty + \frac{3R}{2} + \frac{R}{2}},$$

откуда $R_\infty = \frac{(\sqrt{21}-3)R}{4}$. Таким образом,

$$R_{AB} = \frac{(R_\infty + R)\,R}{R_\infty + 2R} = \frac{\sqrt{21}+1}{\sqrt{21}+5}R \approx 0,58R$$

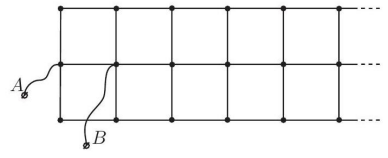


Рис. 158

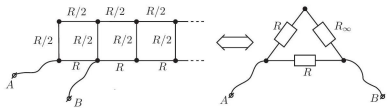


Рис. 159

ТУЙМ-76. Резистор или диод (1995)

К клеммам B и C электрической цепи, схема которой показана на рис. 31, можно подключать либо резистор сопротивлением R, либо идеальный диод в любой полярности.

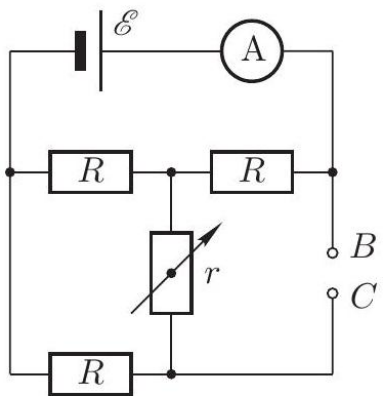


Рис. 31

Для каждого из трёх возможных подключений найдите зависимость силы тока I через амперметр от сопротивления r переменного резистора и изобразите её на графике. ЭДС $\mathscr{E}$ источника и сопротивление R каждого из постоянных резисторов известны. Внутренними сопротивлениями источника и амперметра можно пренебречь. Идеальный диод никак не препятствует прохождению тока в прямом направлении и абсолютно не пропускает ток в обратном направлении.

Solution

Суть задачи в кропотливом исследовании каждого случая (????). Вроде не сложные уравнения тут.

(?? я не знаю, что такое диод, поэтому не знаю, откуда схемы ниже???? нужно доучить теорию про это.)

Поочерёдно рассмотрим каждое из трёх подключений и в каждом случае найдём силу тока I с помощью закона Ома и формул для сопротивлений последовательно и параллельно соединённых резисторов.

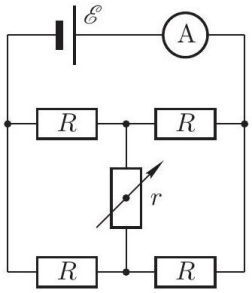


Рис. 137

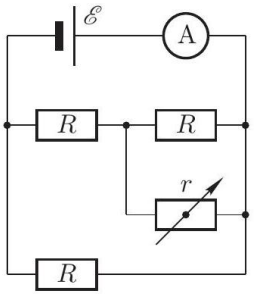


Рис. 138

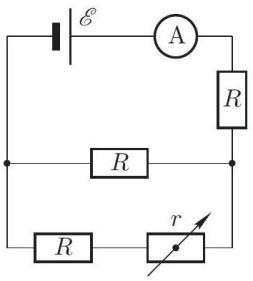


Рис. 139

• Если к клеммам B и C подключить резистор сопротивлением R, то схема станет симметричной (рис. 137), а напряжение на переменном резисторе и сила тока через него будут равны нулю. Значит, при любом r искомая сила тока составляет

$$I_1 = \frac{\mathscr{E}}{R} = \text{ const}$$

• Если к клеммам B и C подключить диод с направлением пропускания $B \to C$, то его можно заменить на проводник. Пользуясь эквивалентной схемой (рис. 138), находим силу тока в этом случае:

$$I_2 = \frac{\mathscr{E}}{R} \cdot \frac{2R + 3r}{R + 2r}$$

• Если к клеммам B и C подключить диод с направлением пропускания $C \to B$, то его можно заменить на разрыв цепи. Пользуясь эквивалентной схемой (рис. 139), находим силу тока в этом случае:

$$I_3 = \frac{\mathscr{E}}{R} \cdot \frac{2R + r}{3R + 2r}$$

На рис. 140 представлены качественные графики полученных зависимостей.

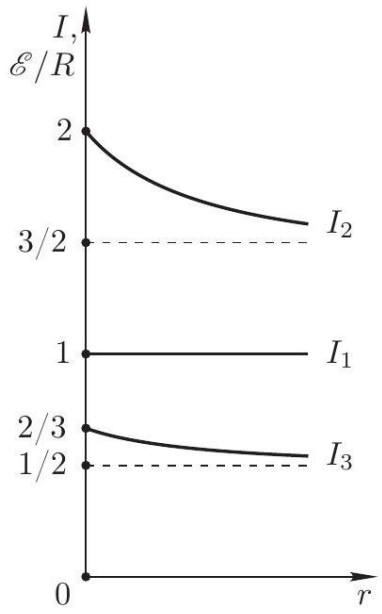


Рис. 140

ТУЙМ-78. Дуговой разряд (1998)

В некоторых случаях мощную электрическую цепь оказывается невозможно выключить обычными способами из-за возникновения дугового разряда между размыкаемыми контактами (особенно сильно эффект проявляется при наличии катушек большой индуктивностью, но в данной задаче они не рассматриваются). Цепь, состоящую из источника ЭДС $\mathscr{E} = 100$ В и резистора сопротивлением R, выключают с помощью рубильника K (рис. 32).

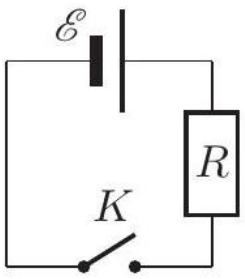


Рис. 32

• При каких сопротивлениях R может возникнуть дуговой разряд?

Найдите силу тока I в дуговом разряде, если $R = 8$ Ом.

Связь между напряжением U и силой тока I, именуемая обычно ВАХ вольт-амперная характеристика, дугового разряда имеет вид

$$U = a + \frac{b}{I}, \quad \text{где} \quad a = 10 \text{ В}, \quad b = 100 \text{ В} \cdot \text{А}.$$

Solution

Заданная в условии вольт-амперная характеристика дуги представляет собой связь тока I и равновесного напряжения U_e дуги, то есть напряжения, при котором ток дуги стационарен, не меняется с течением времени:

$$U_e = A + \frac{B}{I}$$

Если при данном токе I напряжение на дуге окажется меньше величины U_e, то ток будет уменьшаться со временем и дуга может погаснуть.

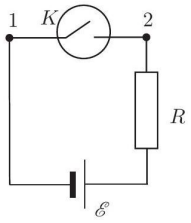


Рис. 142

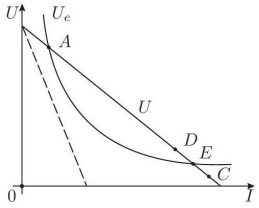


Рис. 143

При слишком большом напряжении ток будет расти, что может привести к пробою. По закону Ома для участка цепи $1-\mathscr{E}-2$ (рис. 142), по которому течёт тот же ток I, что и в дуге, $IR = \varphi_1-\varphi_2+\mathscr{E} = \mathscr{E}-U$, где $U = \varphi_2 - \varphi_1$ - напряжение, подаваемое на дугу. Отсюда

$$U = \mathscr{E} - IR.$$

Изобразим графически функции $U_e(I)$ и $U(I)$ (рис. 143). В точках A и E пересечения графиков подаваемое на дугу напряжение соответствует равновесному значению. Если графики не пересекаются (пунктирная прямая), то стационарного тока в дуге быть не может. Для нахождения координат точек A и E следует приравнять правые части выражений (190) и (191). Полученное квадратное уравнение

$$I^2R + (A - \mathscr{E})I + B = 0$$

имеет действительные корни лишь при условии положительности дискриминанта, то есть при

$$(A - \mathscr{E})^2 - 4RB \geqslant 0, \quad \text{или} \quad R \leqslant \frac{(A - \mathscr{E})^2}{4B} = 20,25 \text{ Ом}.$$

Только при таких сопротивлениях R и возможно устойчивое горение дуги. Найден ответ на первый вопрос задачи. Для ответа на второй вопрос следует вычислить корни уравнения (192):

$$I_1 = \frac{\mathscr{E} - A - \sqrt{(A - \mathscr{E})^2 - 4RB}}{2R} = 1,2 \text{ А},$$
$$I_2 = \frac{\mathscr{E} - A + \sqrt{(A - \mathscr{E})^2 - 4RB}}{2R} = 10 \text{ А}.$$

Первый корень соответствует точке A (рис. 143), второй - точке E. Проанализируем устойчивость горения дуги при параметрах цепи, соответствующих этим точкам.

Рассмотрим точку E. Если ток дуги случайно увеличится, то состояние цепи будет соответствовать точке C. Напряжение, подаваемое на дугу, окажется меньше равновесного для дуги значения, ток начнёт уменьшаться, и состояние E восстановится. При случайном уменьшении тока дуги (переход от точки E к точке D) напряжение превысит равновесное значение, что приведёт к увеличению тока и восстановлению равновесия. Аналогичный анализ для точки A приводит к заключению, что она соответствует неустойчивому горению. Итак, при заданном R в цепи установится ток $I = 10$ А.

ТУЙМ-80. Диоды (2002)

В схеме, изображённой на рис. 34, имеются четыре диода. Известно, что при любом напряжении, подведённом к выводам схемы, ток через амперметр не течёт. Вольт-амперные характеристики трёх диодов D_1, D_2 и D_3 известны (рис. 35). Постройте вольт-амперную характеристику четвёртого диода.

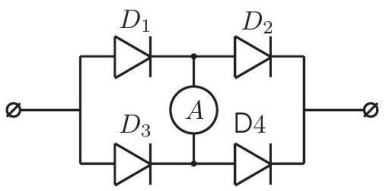


Рис. 34

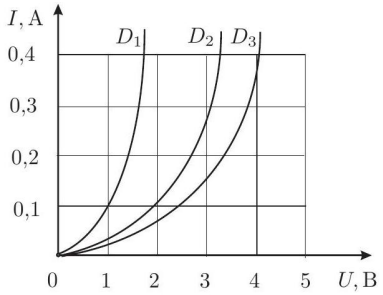


Рис. 35

Задача 80. Диоды (2002)

Отсутствие тока через амперметр (рис. 145) означает равенство напряжений на диодах D_1 и D_3, а также на диодах D_2 и D_4 и равенство токов через D_1 и D_2, а также через D_3 и D_4. Поэтому можно записать

$$I_1(U_1) = I_2(U_2) \quad \text{и} \quad I_3(U_1) = I_4(U_2).$$

Соответствующие функциональные зависимости представлены графиками на рис. 146.

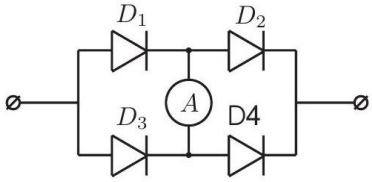


Рис. 145

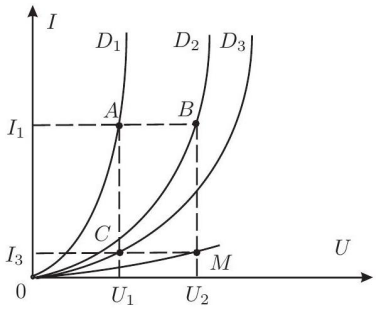


Рис. 146

Для нахождения какой-либо точки вольт-амперной характеристики диода D_4 нужно поступить следующим образом. Возьмём произвольное значение U_1 напряжения на диоде D_1. Найдём точку A (рис. 146), определяющую ток I_1, текущий через диод D_1. Тот же ток течёт и через диод D_2. Поэтому точка B определяет напряжение U_2 на нём. Такое же напряжение на диоде D_4, а ток через него такой же, как и через диод D_3. Этот ток I_3 соответствует точке C (рис. 146). Итак, найдены координаты U_2 и I_3 точки M искомого графика. Аналогично построенные другие его точки изображены на рис. 146.

ТУЙМ-81. ВАХ цепочек (2002)

В задаче исследуются вольт-амперные характеристики (ВАХ) цепочек, содержащих нелинейные элементы. Бесконечная цепочка (рис. 36) составлена из резисторов сопротивлением R и диодов с вольт-амперной характеристикой, показанной на рисунке. Найдите вольт-амперную характеристику этой цепочки на участке $U \gg \Delta U$ 2. Цепочка, изображённая на рис. 37, состоит из N звеньев. Все элементы цепочки имеют такие же характеристики, как и в предыдущем пункте. Ток через последнее звено равен I_0. Найдите ток I через всю цепь и напряжение U на ней. При решении задачи можно воспользоваться формулой n-го члена последовательности Фибоначчи ($a_1 = a_2 = 1, a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$):

$$a_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

Постройте вольт-амперную характеристику бесконечной цепочки, состоящей из одинаковых диодов и одинаковых лампочек (рис. 38). Вольтамперные характеристики диода и лампочки приведены на рис. 38 и обозначены VD и HL соответственно.

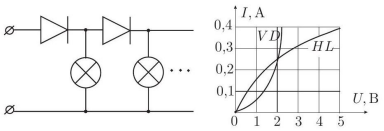


Рис. 36

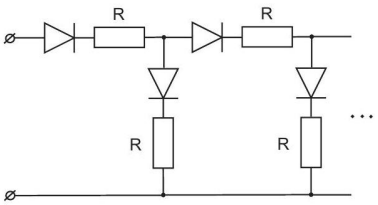


Рис. 37

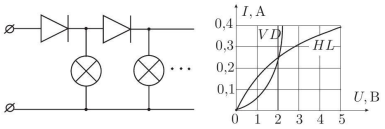


Рис. 38

ТУЙМ-81. ВАХ цепочек (2002)

На рис. 147 изображены первые звенья цепочки, о которой говорится в пункте 1, и указаны токи I_1 и I_2, текущие через участки CA и DA.

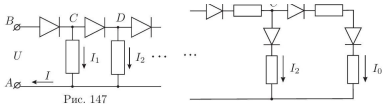


Рис. 147

Рис. 148

При данной в задаче вольт-амперной характеристике идеального диода его сопротивление равно бесконечности, если подаваемое на него напряжение меньше ΔU, иначе напряжение на диоде при любом токе равно ΔU. Учитывая эту особенность диода и применяя закон Ома, получим

$$I_1 = \frac{U - \Delta U}{R}, \quad I_2 = \frac{U - 2\Delta U}{R}$$

Аналогичным образом можно выразить ток I_i, текущий через i-й резистор:

$$I_i = \frac{U - i\Delta U}{R}$$

если

$$i < N = U/\Delta U \gg 1$$

Токи в остальных резисторах отсутствуют, так как напряжение на $(i-1)$-м резисторе оказывается меньше ΔU. Все токи I_i стекаются в узел A. Поэтому

$$I = \sum_{i=1}^{N} I_i = N\frac{U}{R} - \frac{\Delta U}{R}\sum_{i=1}^{N} i.$$

По формуле (194) имеем $N \gg 1$. Поэтому

$$\sum_{i=1}^{N} i = \frac{N+1}{2}N \approx \frac{N^2}{2}.$$

Подставляя в формулу (195) найденное выражение суммы, а также соотношение (194), получим

$$I = \frac{U^2}{\Delta U R} - \frac{\Delta U}{2R}\left(\frac{U}{\Delta U}\right)^2 = \frac{U^2}{2\Delta U R}$$

то есть вольт-амперная характеристика имеет вид параболы.

Можно предложить и более короткий способ решения. Уменьшение на единицу числа звеньев бесконечной цепочки не изменяет её вольт-амперной характеристики. Другими словами, одна и та же

функция связывает как ток I с напряжением между точками BA, так и ток на участке CD с напряжением между точками CA. Однако значения этих напряжений отличаются на ΔU, так что если напряжение между B и A равно U, то напряжение между C и A равно $U - \Delta U$. Соответственно отличаются значения функции $I(U)$:

$$I(U - \Delta U) = I(U) - \frac{dI}{dU}\Delta U$$

если $\Delta U \ll U$. Ток $I(U)$ втекает в узел C, а $I(U - \Delta U)$ вытекает из него. Поэтому

$$I(U) = I(U - \Delta U) + \frac{U - \Delta U}{R}$$

Из формул (196) и (197) следует, что

$$\frac{dI}{dU}\Delta U = \frac{U - \Delta U}{R} \approx \frac{U}{R}$$

откуда после интегрирования находим

$$I = \frac{U^2}{2\Delta U R}$$

поскольку при $U = 0$ ток I также равен нулю.
Во втором пункте рассматривается цепочка, последние звенья которой изображены на рис. 148.
Из рисунка видно, что $I_1 = I_0$. Ток I_2 находим из соотношения

$$I_2 R + \Delta U = I_1 R + 2\Delta U + I_0 R, \quad \text{или} \quad I_2 = \frac{\Delta U}{R} + I_1 + I_0 = 2I_0 + \frac{\Delta U}{R}.$$

Ток I_3 разветвляется в узле C. Поэтому $I_3 = I_2 + I_1$. Аналогичное соотношение справедливо для любого нечётного $k \geqslant 3$:

$$I_k = I_{k-1} + I_{k-2}.$$

Для любого чётного $k \geqslant 2$ выполняется соотношение, аналогичное (198):

$$I_k = I_{k-1} + I_{k-2} + \frac{\Delta U}{R}$$

Второе равенство из (198) позволяет предположить, что для любых k токи можно представить в виде

$$I_k = c_k I_0 + b_k \frac{\Delta U}{R}$$

подобрав a_k и b_k так, чтобы были обеспечены условия (199) и (200), а также $I_1 = I_0$. Нетрудно сообразить, что должны выполняться соотношения

$$\begin{aligned} &c_0 = c_1 = 1; \quad c_k = c_{k-1} + c_{k-2} \quad \text{при} \quad k \geqslant 2; \\ &b_0 = b_1 = 0; \quad b_k = b_{k-1} + b_{k-2} \quad \text{при нечётных} \quad k \geqslant 3, \\ &b_k = b_{k-1} + b_{k-2} + 1 \text{ при чётных } k \geqslant 2. \end{aligned}$$

Именно такие соотношения определяют известную в математике последовательность чисел Фибоначчи a_k, так что $c_k = a_{k+1}$. Числа b_k тоже образуют последовательность Фибоначчи, только

$$\begin{aligned} b_k = a_k - 1 \quad &\text{при нечётных } k \geqslant 3, \\ b_k = a_k \quad &\text{при чётных} \quad k \geqslant 2. \end{aligned}$$

Искомый в задаче ток I соответствует току I_{2N-1}, втекающему в N-е звено. Используя заданную в условии формулу n-го члена последовательности Фибоначчи, получим ответ:

$$I = I_0 \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2N} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2N}}{\sqrt{5}} + \frac{\Delta U}{R} \cdot \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2N-1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2N-1}}{\sqrt{5}} - \frac{\Delta U}{R}.$$

Напряжение на цепочке:

$$U = 2\Delta U + (I_{2N-1} + I_{2N-2})\, R$$

Подставляя найденные значения токов, получим

$$U = I_0 R \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2N+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2N+1}}{\sqrt{5}} + \Delta U \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2N} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2N}}{\sqrt{5}} + \Delta U.$$

В третьем пункте анализируется бесконечная цепочка, изображённая слева на рис. 149; справа изображена её эквивалентная схема.

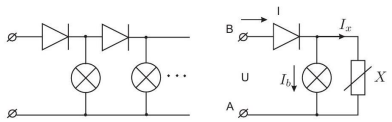


Рис. 149

Элемент X имеет такую же вольт-амперную характеристику $I = I(U)$, что и вся цепь, так как свойства бесконечной цепочки не изменяются при уменьшении числа звеньев. На рис. 150 представлены графики вольт-амперной характеристики диода VD и лампочки HL. При малых U оба графика можно приблизительно заменить прямыми линиями, измерить их наклон, и тем самым найти эквивалентные сопротивления диода R_d и лампочки R_b. Найдём сопротивление R_x элемента X исходя из того, что для бесконечной цепочки сопротивление между точками A и B равно R_x (рис. 149). Тогда величина R_x является корнем уравнения

$$R_x^2 - R_x R_d - R_d R_b = 0$$

Получаем

$$R_x = \frac{R_d}{2}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{4R_b}{R_d}}\right)$$

Строим на графике прямую, наклон которой соответствует R_x (рис. 150). Это начало искомой вольтамперной характеристики, которая относится также и к участку цепи X (рис. 149). Возьмём на этом участке некоторую точку A. Ей соответствует напряжение U_b на первой лампочке и ток I_x, текущий через элемент X. Ток в начале цепи $I = I_b + I_x$. Откладываем это значение на вертикальной оси. Находим точку C на графике VD на рис. 150.

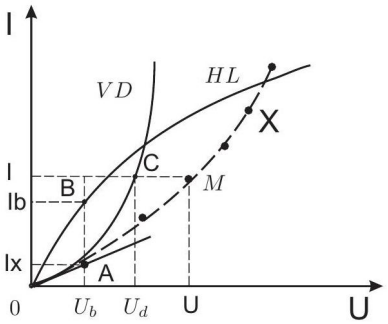


Рис. 150

Ей соответствует значение U_d напряжения на первом диоде. Остаётся найти $U = U_d + U_b$ и построить точку M с координатами U и I. Взяв точки в иных местах линейного участка, найдём другие точки искомой вольт-амперной характеристики (рис. 150).

ТУЙМ-83. Шестиугольник (2003)

В доску в вершинах правильного шестиугольника вбиты шесть гвоздей. Все гвозди попарно соединены резисторами с сопротивлением R. Найдите сопротивление между двумя соседними гвоздями.

ТУЙМ-83. Шестиугольник (2003)

На рис. 154 представлена схема заданной в условии цепи. Сопротивление каждого из резисторов R. Следует найти сопротивление между гвоздями A и B, к которым подаётся некоторое напряжение. Отыскать участки, соединённые последовательно или параллельно, не удаётся. Попытаемся использовать симметрию схемы. Не позволит ли она упростить задачу?

Гвозди A и B непосредственно подсоединяются к источнику напряжения. Остальные вершины шестиугольника $1, 2, 3, 4$ находятся в иных, но в одинаковых для каждой из них условиях. Все они подсоединены через резистор R к точкам A и B, а также к каждому из остальных гвоздей. Поэтому нет физической причины, вследствие которой потенциалы гвоздей $1, 2, 3, 4$ были бы различны. Таким образом, из соображений физической симметрии приходим к заключению о равенстве потенциалов этих точек. Поэтому можно перейти к эквивалентной схеме, изображённой на рис. 155. На этой схеме легко выделить последовательные и параллельные участки и найти искомое сопротивление R_x:

$$R_x = \frac{R}{3}$$

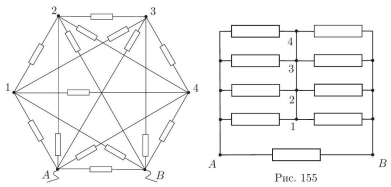


Рис. 154

Можно было и изолировать друг от друга точки $1, 2, 3, 4$. Получилась бы схема, отличающаяся от той, что изображена на рис. 155, отсутствием соединений этих точек. Однако равенство потенциалов точек 1, 2, 3,4 в новой схеме не будет нарушено. Поэтому и она эквивалентна исходной и приводит к прежнему ответу.

14.2.13 Generally special problems about circuits 2

ТУЙМ-88. Батарейки (2005)

Имеется батарейка с ЭДС $\mathscr{E}_1$ и внутренним сопротивлением r_1, а также некоторое количество одинаковых батареек с ЭДС $\mathscr{E}_2 = \mathscr{E}_1/2$. Если последовательно с батареей $\mathscr{E}_1$ подключить некоторое количество батареек $\mathscr{E}_2$ и нагрузку, то сила тока в цепи при любом количестве батареек $\mathscr{E}_2$ будет одинаковой. Если же к батарейке $\mathscr{E}_1$ параллельно подсоединить любое число батареек $\mathscr{E}_2$ и ту же нагрузку, то сила тока через неё останется равной прежнему значению. Полярности всех батарей считать одинаковыми. Найдите сопротивление нагрузки R, а также внутреннее сопротивление r_2 батареек $\mathscr{E}_2$.

ТУЙМ-88. Батарейки (2005)

На рис. 161 изображена схема цепи с последовательным соединением элементов. Запишем для неё закон Ома:

$$I = \frac{\mathscr{E}_1 + n\mathscr{E}_2}{R + r_1 + nr_2}$$

где I - ток нагрузки. При $n = 0$ из формулы (220) получим

$$I = \frac{\mathscr{E}_1}{R + r_1}$$

При очень больших n из формулы (220) следует, что

$$I = \frac{n\mathscr{E}_2}{nr_2} = \frac{\mathscr{E}_2}{r_2}$$

Поскольку ток нагрузки по условию не зависит от n, из формул (221) и (222) получаем

$$\frac{\mathscr{E}_1}{R + r_1} = \frac{\mathscr{E}_2}{r_2}, \quad \text{или} \quad R + r_1 = 2r_2.$$

Рассмотрим теперь цепь с параллельным соединением батареек, схема которой изображена на рис. 162. Она эквивалентна цепи, изображённой на рис. 163, где I_{eq} - ток в эквивалентном источнике $\mathscr{E}_2$, а $r_{eq} = r_2/n$ - его внутреннее сопротивление. В этом можно убедиться, применив правила Киргофа для контура, состоящего из нагрузки R и одной из батареек $\mathscr{E}_2$:

$$I\left(R + \frac{r}{n}\right) = \mathscr{E}_2, \text{ или } I\left(R + r_{eq}\right) = \mathscr{E}_{eq}.$$

По первому правилу Киргофа

$$I_{eq} = I - I_1$$

По второму правилу Киргофа для внешнего контура схемы, показанной на рис. 163, получаем

$$\mathscr{E}_1 = I_1 r_1 + IR$$

откуда

$$I_1 = \frac{\mathscr{E}_1 - IR}{r_1}$$

При $n = 0$ имеем $I_{eq} = 0$, и тогда

$$I = I_1 = \frac{\mathscr{E}_1}{R + r_1}$$

В случае бесконечного числа n батареек $\mathscr{E}_2$ сопротивление r_{eq} равно нулю, а ток нагрузки принимает прежнее значение I. Поэтому второе правило Киргофа для контура $\mathscr{E}_2 - R$ приводит к соотношению

$$I = \frac{\mathscr{E}_2}{R}$$

Из последнего уравнения и уравнения (224) найдём

$$\frac{\mathscr{E}_1}{R + r_1} = \frac{\mathscr{E}_2}{R}, \quad \text{или} \quad R + r_1 = 2R$$

Из формул (223) и (225) следует ответ: $R = r_1$ и $r_2 = r_1$. При решении данной задачи использован полезный метод эквивалентных схем. Группу соединённых друг с другом источников тока можно заменить одним эквивалентным источником. На практике используют батареи элементов. При последовательном соединении источников одинаковой полярности ЭДС и внутреннее сопротивление эквивалентного источника равны сумме соответствующих величин для составляющих элементов. Параллельно соединяют одинаковые источники. Эквивалентная ЭДС в этом случае равна ЭДС отдельных элементов, зато внутреннее сопротивление эквивалентного источника меньше сопротивления одного элемента. При соединении n элементов внутреннее сопротивление полученной батареи в n раз меньше сопротивления отдельного элемента.

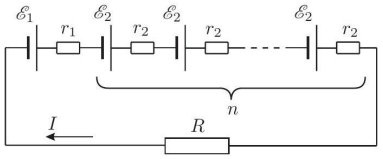


Рис. 161

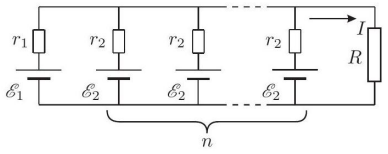


Рис. 162

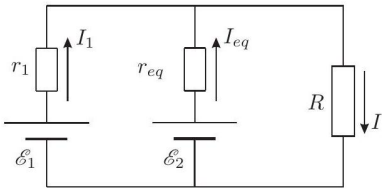


Рис. 163

ТУЙМ-92. Схема (2006)

Определите сопротивление R цельной проволочной конструкции между точками A и B (рис. 46), если сопротивление каждого участка проволоки, соединяющего любые две соседние точки из девяти отмеченных, равно r.

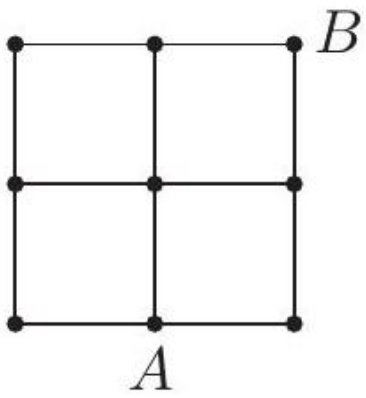


Рис. 46

ТУЙМ-92. Схема (2006)

Известно, что схемы треугольника, составленного из резисторов сопротивлениями R_1, R_2 и R_3 (рис. 174), и звезды, составленной из резисторов сопротивлениями r_1, r_2 и r_3 (рис. 175), эквивалентны, если

$$r_1 = \frac{R_2R_3}{R_1+R_2+R_3}, \quad r_2 = \frac{R_1R_3}{R_1+R_2+R_3}, \quad r_3 = \frac{R_1R_2}{R_1+R_2+R_3}.$$

Этот факт можно доказать, поочерёдно мысленно подключая омметр к каждой паре выводов и приравнивая соответствующие сопротивления. Введём обозначения на исходной схеме (рис. 176), сложим последовательные сопротивления (рис. 177) и поочерёдно применим преобразование «треугольник-звезда» к части цепи между точками C, D и F (рис. 178) и к части цепи между точками A, D и E (рис. 179).

Снова сложим последовательные сопротивления (рис. 180) и применим преобразование «треугольник-звезда» к части цепи между точками B, G и H (рис. 181).

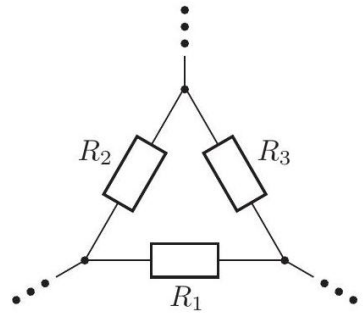


Рис. 174

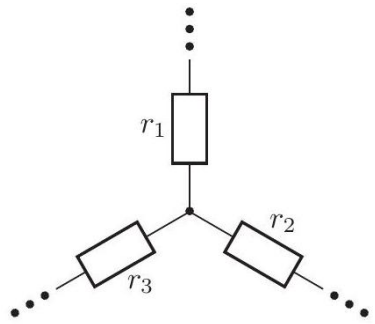


Рис. 175

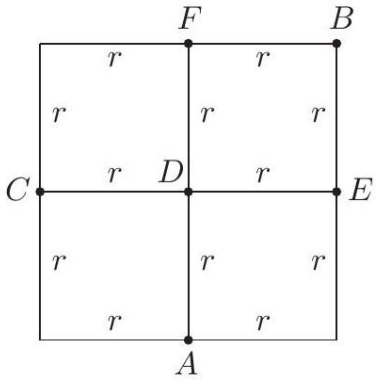


Рис. 176

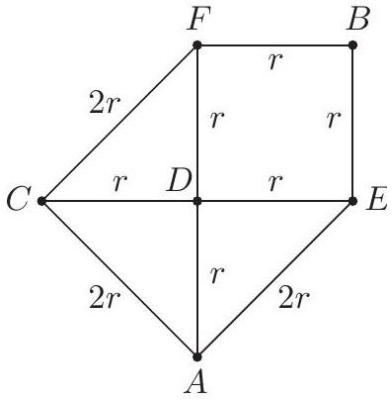


Рис. 177

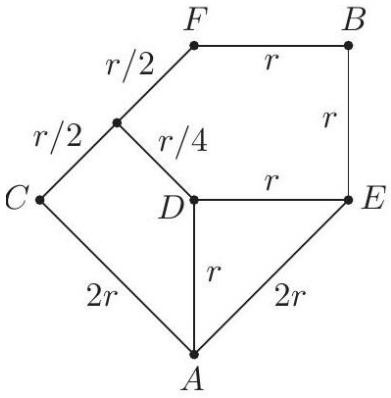


Рис. 178

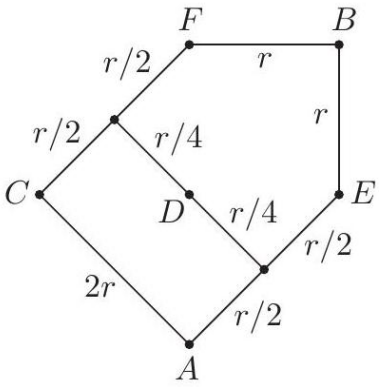


Рис. 179

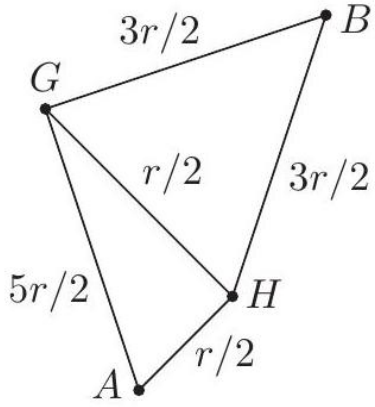


Рис. 180

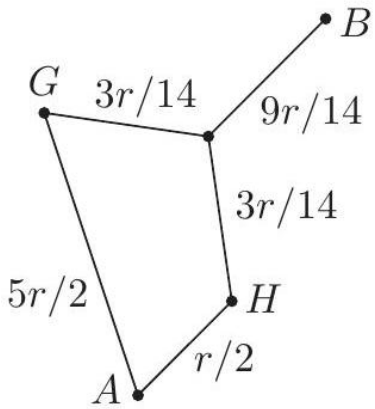


Рис. 181 Использовав формулы для последовательного и параллельного соединений резисторов, окончательно получим

$$R = \frac{9}{14}r + \frac{\left(\frac{5}{2}r + \frac{3}{14}r\right)\cdot\left(\frac{1}{2}r + \frac{3}{14}r\right)}{\left(\frac{5}{2}r + \frac{3}{14}r\right) + \left(\frac{1}{2}r + \frac{3}{14}r\right)} = \frac{29}{24}r.$$

ТУЙМ-93. Диод (2006)

В данной задаче рассматривается работа вакуумного диода, состоящего из разогретого сферического катода радиусом r и анода радиусом R, между которыми приложено напряжение U (рис. 47).

• Пусть заряженная частица с зарядом q и скоростью u_1 переходит из области с потенциалом φ_1 в область с потенциалом φ_2 (рис. 48), причём скорость $\vec{u}_1$ направлена под углом α к нормали границы раздела потенциалов. Определите скорость u_2 и направление движения частицы в области с потенциалом φ_2. 2. Предположим, что из катода в результате термоэмиссии вылетают электроны с одинаковыми скоростями v_0 во все стороны. Какое тормозящее напряжение U_0 необходимо приложить между электродами, чтобы ток в цепи перестал течь? Модуль заряда электрона равен e.

Во многих приложениях важно знать вольт-амперную характеристику используемого элемента или прибора цепи. Предположим, что с единицы поверхности катода в единицу времени изотропно во все стороны вылетает n электронов с одинаковыми скоростями v_0. Определите аналитический вид вольтамперной характеристики $I(U)$ рассматриваемого диода. Модуль заряда электрона равен e. Поле пространственных зарядов не учитывайте. Постройте схематичный график зависимости $I(U)$ с указанием характерных точек.

Примечание. Элемент телесного угла, показанный на рис. 49, равен

$$d\Omega = \sin\theta d\theta d\varphi$$

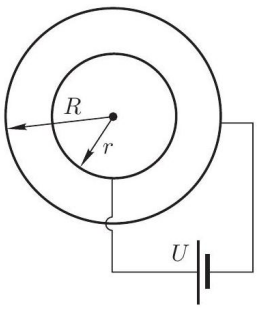


Рис. 47

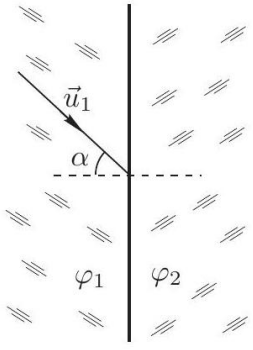


Рис. 48

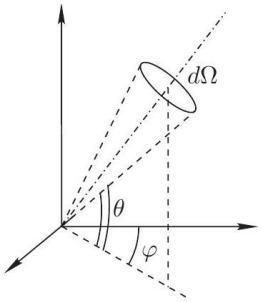


Рис. 49

Задача 93. Диод (2006)

• Согласно закону сохранения энергии имеем

$$\frac{mu_1^2}{2} + q\varphi_1 = \frac{mu_2^2}{2} + q\varphi_2, \quad u_2 = u_1\sqrt{1 + \frac{2q}{mu_1^2}\,(\varphi_1 - \varphi_2)}.$$

Поскольку при переходе частицы из одной области в другую на неё действует электрическое поле, перпендикулярное границе раздела областей, составляющая скорости частицы, параллельная границе, остаётся неизменной, и, таким образом

$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{u_1}{u_2}, \quad \sin\beta = \sin\alpha\frac{1}{\sqrt{1 + 2q\,(\varphi_1 - \varphi_2)\,/mu_1^2}},$$

где β - угол, задающий направление движения частицы во второй области.

• Ток в цепи перестаёт течь, когда электроны из-за электрического поля в промежутке между анодом и катодом не достигают анода. Запишем закон сохранения энергии:

$$\frac{mv_0^2}{2} = eU_0$$

откуда

$$U_0 = \frac{mv_0^2}{2e}$$

• Пусть потенциал катода нулевой: $\varphi_k = 0$, тогда скорость электрона v_1 на расстоянии r_1 от центра диода в области с потенциалом φ_1 находим из закона сохранения энергии:

$$\frac{mv_0^2}{2} - e\varphi_k = \frac{mv_1^2}{2} - e\varphi_1$$

откуда

$$v_1 = v_0\sqrt{1 + \frac{2e\varphi_1}{mv_0^2}}$$

Рассмотрим переход электрона из области с потенциалом φ_1 и радиусом r_1 в область с потенциалом φ_2 и радиусом r_2, причём $r_2 - r_1 \ll r_1$ (рис. 182). В этом случае

$$v_1 = v_0\sqrt{1 + \frac{2e\varphi_1}{mv_0^2}}, \quad v_2 = v_0\sqrt{1 + \frac{2e\varphi_2}{mv_0^2}}$$

Согласно первому пункту задачи компонента скорости электрона, перпендикулярная радиусу, не претерпевает изменения при переходе между областями с различным потенциалом, поэтому

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha_1} = \frac{v_2}{v_1} = \frac{\sqrt{1 + 2e\varphi_2/mv_0^2}}{\sqrt{1 + 2e\varphi_1/mv_0^2}}$$

По теореме синусов для треугольника OAB получаем

$$\frac{\sin\alpha_1}{r_2} = \frac{\sin\beta_1}{r_1}$$

Таким образом, для углов α и β_1 имеем следующую связь:

$$\sin\alpha\sqrt{1+\frac{2e\varphi_1}{mv_0^2}}r_1 = \sin\beta_1\sqrt{1+\frac{2e\varphi_2}{mv_0^2}}r_2.$$

Разбивая пространство между катодом и анодом на множество поясков с одинаковым потенциалом на протяжении каждого из них, можно воспользоваться оптическим законом Снеллиуса: если принять для i-го слоя

$$n_i = \sqrt{1+\frac{2e\varphi_i}{mv_0^2}}r_i$$

то

$$n_1\sin\alpha_1 = n_2\sin\alpha_2 = \ldots = n_i\sin\alpha_i$$

Для нахождения критического угла α_0 вылета электронов из катода запишем «закон Снеллиуса» для двух поясков, один из которых непосредственно прилегает к катоду, а другой - к аноду, причём в последний из поясков электрон попадает под прямым углом:

$$r\sin\alpha_0 = R\sqrt{1-\frac{2eU}{mv_0^2}}$$

откуда

$$\sin\alpha_0 = \frac{R}{r}\sqrt{1-\frac{2eU}{mv_0^2}}$$

Поскольку электроны вылетают из катода равномерно во все стороны, только часть электронов, заключённая внутри телесного угла с раствором α_0, достигнет анода, поэтому в установившемся режиме сила тока через диод составляет

$$I = 4\pi r^2 n\frac{2\pi\left(1-\cos\alpha_0\right)}{2\pi} = 4\pi r^2 n\left(1-\sqrt{1-\left(1-\frac{2eU}{mv_0^2}\right)\frac{R^2}{r^2}}\right).$$

Здесь необходимо заметить, что формула для синуса критического угла работает только при напряжениях

$$U \geqslant U_1 = \frac{mv_0^2}{2e}\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)$$

При меньших напряжениях все электроны, вылетающие из катода, достигают анода и ток через диод составляет $I_0 = 4\pi r^2 n$. Схематичный вид зависимости $I(U)$ показан на рис. 183.

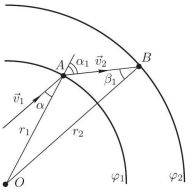


Рис. 182

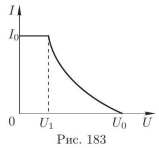


Рис. 183

ТУЙМ-94. Электрическая сеточка (2007)

Каждый резистор в цепи (рис. 50) имеет сопротивление $R = 100$ Ом. Все амперметры одинаковые, а их внутренние сопротивления много меньше R.

• Найдите сопротивление R_{BC} цепи между точками B и C.

Источник постоянного напряжения с ЭДС $\mathscr{E} = 24$ В подключили плюсом к точке B и минусом к точке C. Найдите силы тока через каждый амперметр. В качестве ответа пометьте стрелочкой направление тока через каждый амперметр и подпишите рядом численное значение силы тока, выраженное в мА (само обозначение «мА» не указывайте, чтобы не загромождать схему).

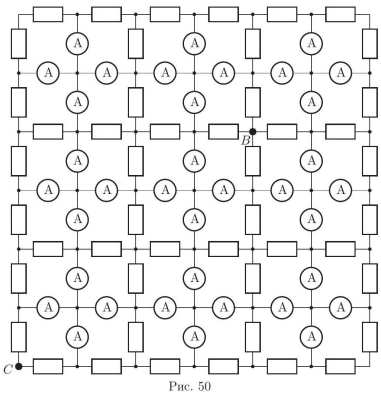


Рис. 50

ТУЙМ-94. Электрическая сеточка (2007)

• Поскольку внутренние сопротивления амперметров малы, при расчёте R_{BC} амперметры можно заменить на проводники (рис. 184). Потенциалы точек B_1, B_2, B_3, B_4, C_1 и C_2 равны, так как все эти точки соединены между собой проводами. Следовательно, ток пойдёт только через резисторы, непосредственно подключённые к точкам B и C. По свойствам последовательно и параллельно соединённых резисторов находим

$$R_{BC} = R_B + R_C = \frac{R}{4} + \frac{R}{2} = \frac{3}{4}R = 75 \text{ Ом}.$$

• Сила тока между точками B и C цепи:

$$I_0 = \frac{\mathscr{E}}{R_{BC}} = \frac{4\mathscr{E}}{3R} = 320 \text{ mA}.$$

Силы токов через каждый из резисторов, непосредственно соединённых с точкой B или C:

$$I_B = \frac{1}{4}I_0 = 80 \text{ mA}, \quad I_C = \frac{1}{2}I_0 = 160 \text{ mA}.$$

Поскольку ток через другие резисторы не идёт, при расчёте токов через амперметры эти резисторы можно заменить на разрывы цепи (рис. 185).

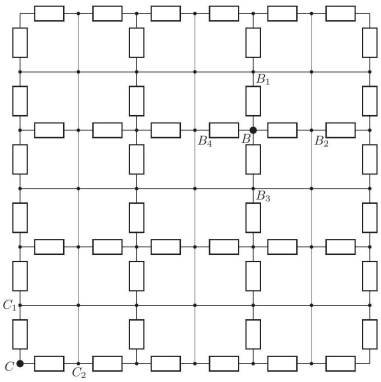


Рис. 184

Схема симметрична относительно прямой BC, поэтому распределение токов в «треугольных» половинках схемы также будет симметричным. Рассмотрим одну половинку схемы (рис. 186), удалив из неё амперметры, имеющие неподключённые выводы, и обозначим через I_1, I_2, I_3, I_4 и I_5 все различные силы токов (силы токов через последовательно соединённые элементы одинаковы). По свойствам последовательного соединения $I_1 = I_B = 80$ mA, $I_5 = I_C = 160$ mA.

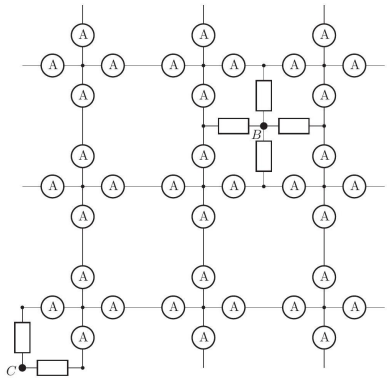


Рис. 185

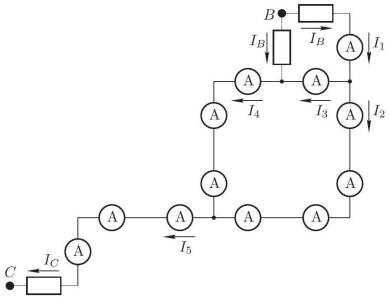


Рис. 186 Для нахождения I_2, I_3 и I_4 запишем правила Кирхгофа для контура, имеющего вид квадрата из 8 амперметров:

$$0 = 4rI_2 - rI_3 - 3rI_4, \quad I_B = I_2 + I_3, \quad I_C = I_2 + I_4$$

где r - внутреннее сопротивление амперметра. Решая систему, находим

$$I_2 = \frac{7}{32}I_0 = 70 \text{ mA}, \quad I_3 = \frac{1}{32}I_0 = 10 \text{ mA}, \quad I_4 = \frac{9}{32}I_0 = 90 \text{ mA}.$$

Окончательный ответ приведён на рис. 187.

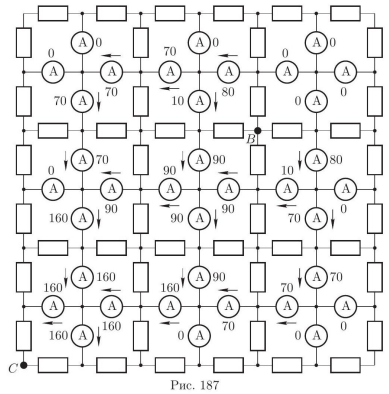


Рис. 187

ТУЙМ-104. Простенькая схемка (2012)

Экспериментатор Глюк собрал цепь из одинаковых идеальных источников постоянного напряжения, конденсаторов различных ёмкостей и резисторов, сопротивления которых указаны на схеме (рис. 59). Далее Глюк подключил идеальный амперметр поочерёдно к двум парам точек цепи. После каждого подключения амперметра Глюк ждал достаточно долго, чтобы ток перестал изменяться, и только после этого записывал показания. Результаты измерений: $I_{A1} = 20$ mA, $I_{A2} = 720$ mA.

• Определите, к каким точкам Глюк подключал амперметр в каждом из опытов.

Чему будет равна установившаяся сила тока I_{A3} через идеальный амперметр, если его подключить к точкам A и B (рис. 59)?

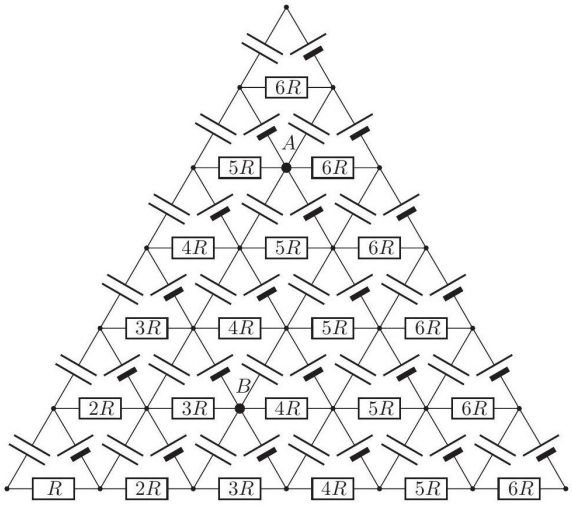


Рис. 59

ТУЙМ-104. Простенькая схемка (2012)

Установление постоянного тока через амперметр означает, что вызванные его подключением процессы перезарядки конденсаторов закончились и токи через конденсаторы больше не текут. В этом случае можно упростить схему, заменив каждый конденсатор на разрыв цепи (рис. 196). Для удобства обозначения узлов на схеме введена система координат (x, y).

Рассмотрим произвольный контур, состоящий из двух источников и двух одинаковых резисторов (одну «клеточку» на схеме). Обозначив ЭДС источников через $\mathscr{E}$, сопротивления резисторов через r и направив вправо токи i_1 и i_2 через верхний и нижний резисторы, запишем второе правило Кирхгофа:

$$\mathscr{E} - \mathscr{E} = ri_1 - ri_2$$

откуда

$$i_1 = i_2$$

Это означает, что силы токов через все одинаковые резисторы равны между собой и направлены в одну сторону, поэтому можно обозначить через $I_1, I_2,\ I_3, I_4, I_5$ и I_6 силы токов через резисторы сопротивлениями $R, 2R, 3R, 4R,\ 5R$ и $6R$ соответственно. Отметим, что обнаруженное равенство сил токов наблюдается только в случае идеальных источников, то есть таких, внутренним сопротивлением которых можно пренебречь по сравнению с R.

Подключим амперметр к двум произвольным узлам $C\,(x_1; y_1)$ и $D\,(x_2; y_2)$, не лежащим на одной вертикали (в противном случае амперметр окажется подключённым напрямую к идеальным источникам и сила тока через него устремится к бесконечности). Без ограничения общности можно считать, что узел C лежит левее узла D, то есть $x_1 < x_2$, а ток силой I_A через амперметр направлен от D к C. Чтобы было проще следить по рисунку за ходом рассуждений, удобно выбрать для себя какие-нибудь конкретные положения точек C и D, например, считать C совпадающей с B, а D - с A.

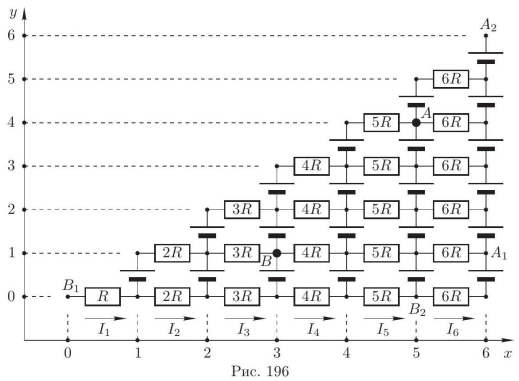


Рис. 196

Вертикальные прямые, проходящие через точки C и D, разделяют схему на три части: левее C, между C и D, правее D. В двух крайних частях цепи токов нет, так как токи через одинаковые резисторы текут в одну сторону, а на краях цепи заряду негде накапливаться и неоткуда взяться, поэтому далее будем рассматривать только среднюю часть цепи - между точками C и D.

Сгруппируем узлы, лежащие на одной вертикали, в обобщённые узлы, тогда токи через источники станут для них внутренними, а внутренние токи не учитываются при записи первого правила Кирхгофа. В обобщённый узел с координатой x_1 втекает ток силой I_A, а вытекают $x_1 + 1$ токов силой I_{x_1+1}; в

обобщённый узел с координатой x_1+1 втекают те же x_1+1 токов силой I_{x_1+1}, а вытекают x_1+2 токов силой I_{x_1+2}; и т. д. до обобщённого узла с координатой x_2-1, в который втекают x_2-1 токов силой I_{x_2-1} и вытекают x_2 токов силой I_{x_2}. Тогда по первому правилу Кирхгофа

$$I_A = (x_1+1)\, I_{x_1+1} = (x_1+2)\, I_{x_1+2} = \ldots = (x_2-1)\, I_{x_2-1} = x_2 I_{x_2}$$

откуда для любого x от x_1+1 до x_2 включительно находим

$$I_x = \frac{I_A}{x}$$

Рассмотрим следующий контур: начинаем из узла $D\,(x_2; y_2)$, проходим через амперметр в узел $C\,(x_1; y_1)$, проходим через резисторы $(x_1+1)\,R, (x_1+2)\,R, \quad \ldots, x_2 R$ по горизонтали до узла с координатой x_2, проходим через $|y_2-y_1|$ источников по вертикали до узла D. Запишем для этого контура второе правило Кирхгофа

$$(y_2-y_1)\cdot \mathscr{E} = (x_1+1)\, R\cdot I_{x_1+1} + (x_1+2)\, R\cdot I_{x_1+2} + \ldots + x_2 R\cdot I_{x_2},$$

откуда после подстановки выражения (234) получим

$$(y_2-y_1)\,\mathscr{E} = (x_2-x_1)\, R I_A$$

Амперметр показывает абсолютную величину силы тока, поэтому

$$I_A = \frac{\mathscr{E}}{R}\cdot\left|\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\right| = \frac{\mathscr{E}}{R}\cdot\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

где Δx и Δy - модули разностей соответствующих координат точек подключения амперметра.
Используя выражение (235) и численные данные из условия, запишем

$$\frac{I_{A2}}{I_{A1}} = \frac{\Delta x_1\cdot\Delta y_2}{\Delta x_2\cdot\Delta y_1} = 36$$

где $\Delta x_1, \Delta y_1, \Delta x_2, \Delta y_2$ - модули разностей соответствующих координат точек подключения амперметра в первом и втором опытах соответственно. Поскольку все модули разностей координат являются натуральными числами от 1 до 6, условие (236) может быть выполнено только при $\Delta x_1 = \Delta y_2 = 6$ и $\Delta x_2 = \Delta y_1 = 1$. Следовательно, в первом опыте амперметр был подключен к точкам $A_1(6;1)$ и $B_1(0;0)$, а во втором - к $A_2(6;6)$ и $B_2(5;0)$.
Используя данные первого или второго опыта, из формулы (235) находим

$$\frac{\mathscr{E}}{R} = I_{A1}\cdot\frac{\Delta x_1}{\Delta y_1} = I_{A2}\cdot\frac{\Delta x_2}{\Delta y_2} = 120\ \text{mA}$$

Для вычисления силы тока через амперметр, подключённый к точкам $A(5;4)$ и $B(3;1)$, подставим в выражение (235) значения $\Delta x_3 = 2$ и $\Delta y_3 = 3$:

$$I_{A3} = \frac{\mathscr{E}}{R}\cdot\frac{\Delta y_3}{\Delta x_3} = 180\text{A}$$

14.2.14 Problems about spectral analysis and circuits

O2-11.1

Найти спектры следующих колебаний: 1) $f(t) = A\cos^2\omega_0 t$ (квадратичное преобразование монохроматического сигнала); 2) $f(t) = A(1+m\cos\Omega t)\cos\omega_0 t; (\Omega \ll \omega_0; m<1)$ (амплитудная 100 модуляция); 3)$f(t) = A\cos(\omega_0 t + m\cos\Omega t); (\Omega \ll \omega_0; m \ll 1)$ (фазовая модуляция).

11.1

1) $f(t) = A\cos^2\omega_0 t = \frac{A}{2} + \frac{A}{2}\cos 2\omega_0 t$;
2) $f(t) = A(1+m\cos\Omega t)\cos\omega_0 t \approx$

$$\approx A\cos\omega_0 t + \frac{mA}{2}\cos\left[(\omega_0-\Omega)\,t\right] + \frac{mA}{2}\cos\left[(\omega_0+\Omega)\,t\right]$$

3) $f(t) = A\cos(\omega_0 t + m\cos\Omega t) \approx A\cos\omega_0 t + \frac{mA}{2}\cos\left[(\omega_0-\Omega)\,t + \frac{\pi}{2}\right] + \frac{mA}{2}\cos\left[(\omega_0+\Omega)\,t + \frac{\pi}{2}\right]$.

O2-11.2

В приемниках радиоизлучения обычно осуществляется квадратичное преобразование принимаемого сигнала с последующим усреднением за некоторое время Δt, подчиняющееся условию $2\pi/\omega_0 \ll \Delta t \ll 2\pi/\Omega$, где ω_0 - радиочастота, Ω - частота модуляции ($\omega_0 \gg \Omega$). Что зарегистрирует такой приемник в следующих случаях: 1) на вход поданы амплитудно-модулированные колебания (задача 11.1, п. 2); 2) на вход поданы колебания, модулированные по фазе (задача

11.2

1) $g(t) \sim A^2(1 + m\cos\Omega t)^2$, при $m \ll 1 g(t) \sim A^2(1 + 2m\cos\Omega t)$; 2) $g(t) \sim A^2 = \text{const}$; 3) $g(t) \sim (mA)^2 + (mA)^2\cos 2\Omega t$; 4) $g(t) \sim A^2(1 + 2m\cos\Omega t)$.

3) на вход поданы колебания, модулированные по фазе с отфильтрованной (т. е. несущей) частотой ω_0; 4) на вход поданы колебания модулированные по фазе, в которых фаза спектральной компоненты частоты ω_0 изменена на $\pi/2$ (т. е. фаза несущей изменена на $\pi/2$)?

O2-11.3

Найти спектр следующих сигналов, изображенных на рис. 229: а) периодическая последовательность прямоугольных импульсов; б) прямоугольный импульс; в) прямоугольный цуг.

11.3

а) $f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} C_n \exp(i\omega_n t)$, где $C_n = A\frac{\tau}{T}\frac{\sin(n\pi\tau/T)}{n\pi\tau/T}, \omega_n = n\frac{2\pi}{T}$;
б) $g(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\exp(-i\omega t)dt = A\tau\frac{\sin(\omega\ \mathrm{T}/2)}{(\omega\tau/2)}$;
в) $g(\omega) = A\frac{\tau}{2}\frac{\sin[(\omega-\omega_0)\tau/2]}{[(\omega-\omega_0)\tau/2]} + A\frac{\tau}{2}\frac{\sin[(\omega+\omega_0)\tau/2]}{[(\omega+\omega_0)\tau/2]}$, где $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$.2

O2-11.4

Плоский вакуумный диод подключен к источнику постоянного напряжения с пренебрежимо малым внутренним сопротивлением (рис. 230). Эмиссионная способность катода К столь мала, что ток через диод протекает в виде одиночных импульсов отдельных электронов, каждый из которых имеет длительность т. Найти спектр сигнала на измерительном приборе при прохождении такого импульса.

11.4

$(t) = \frac{2e}{\tau^2}t$. Полагая $g(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty}(t)e^{-i\omega t}dt$, получим $g(\omega) = \frac{2e}{(\omega\tau)^2}\left(e^{-i\omega\tau} + 1\right) - \frac{2e}{i\omega\tau}e^{-i\omega\tau}$ или иначе (см. сноску к задаче 11.3) $g(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathscr{J}(t)e^{i\omega t}dt = \frac{e}{\pi(\omega\tau)^2}\left(e^{i\omega\tau} - 1\right) + \frac{e}{i\pi\omega\tau}e^{i\omega t}$.

5-6

11.5

$= \begin{cases} -\mathscr{J}_0 & \text{при} \quad -\tau < t < 0, \quad 0 < t < \tau, \text{ где } \tau = \frac{d}{v_0}; \quad \mathscr{I}_0 = \frac{ev_0}{d}. \\ 0 \end{cases}$

Полагая $g(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-i\omega t}dt = \frac{2ev_0}{i\omega d}\left(1 - \cos\frac{\omega d}{v_0}\right)$ или иначе (см. сноску к задаче 11.3) $g(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(t)e^{i\omega t}dt = \frac{iev_0}{\pi\omega d}\left(1 - \cos\frac{\omega d}{v_0}\right)$.

11.6

Можно. Это электрический аналог опыта Мандельштама. Амплитуда колебаний в контуре максимальна при $\Omega = |\omega_0 - \omega|$.

---

[01] Ответы и указания даны в СИ, кроме особо оговоренных случаев.
[2] Существует другое, принятое в спектроскопии определение интеграла Фурье: $f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega)e^{-i\omega t}dt$, где $g(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega}^{\infty} f(t)e^{i\omega t}dt$.

О2-11.7

При каких условиях, налагаемых на вид сигнала $f(t)$ (и его спектра $F(\omega)$), напряжение $g(t)$ на выходе RC-цепочек, изображенных на рис. 233 и рис. 234, совпадает с входным напряжением $f(t)$?

11.7

Частотные характеристики фильтров (рис. 416) $\hat{\lambda}_1(\omega) = \frac{1}{1+i\omega RC}$; $\hat{\lambda}_2(\omega) = \frac{i\omega RC}{1+i\omega RC}$.
$g(t) \approx f(t)$, если $\omega_{\max} \ll \frac{1}{RC}$ (дифференцирующая цепочка).
$g(t) \approx f(t)$, если $\omega_{\min} \gg \frac{1}{RC}$ (интегрирующая цепочка).

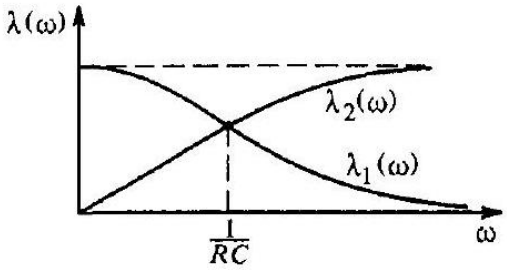


Рис. 416

О2-11.8

Высокодобротный колебательный контур находится под действием внешней амплитудно-модулированной ЭДС, изменяющейся по закону $\&(t) = A\left(1 + m\cos^2\Omega t\right)\cos\omega_0 t$. Резонансная частота контура может перестраиваться при помощи изменения емкости. Считая коэффициент затухания контура δ заданным, определить амплитуду вынужденных колебаний в следующих случаях: 1) контур настроен на несущую частоту ω_0; 2) контур настроен на частоту $\omega_0 + 2\Omega$.

11.8

1) $A_1 = \frac{\omega_0}{2\delta}\left(1 + \frac{m}{2}\right)A$; 2) $A_2 = \frac{\omega_0+2\Omega}{2\delta}\frac{mA}{4}$.

О2-11.9

На вход колебательного контура с высокой добротностью подаются амплитудно-модулированные колебания $\&(t) = A(1 + m\cos\Omega t)\cos\omega t$. При перестройке несущей частоты ω наблюдается несколько резонансов. Указать резонансные значения частот. Определить глубину модуляции m, если известно, что амплитуда вынужденных колебаний напряжения в контуре уменьшилась в $n = 4$ раза при перестройке частоты ω от значения ω_0 до $\omega_0 + \Omega + \delta$ (ω_0 - собственная частота, δ - коэффициент затухания контура).

11.9

Резонанс наступает на частотах ω_0 и $\omega_0 \pm \Omega$; $\quad m = \frac{2\sqrt{2}}{n} \approx 0,7$.

О2-11.10

В схеме, изображенной на рис. 235, действует переменная ЭДС, изменяющаяся по закону $\mathscr{E}(t) = \mathscr{C}_0\cos^2\Omega t$. Определить токи $\& \mathscr{V}_1$, если известно, что параметры цепи удовлетворяют соотношению $\Omega^2 = 1/(4LC)$.

11.10

$\mathscr{E} = \frac{\mathscr{E}_0}{2R}\cos 2\Omega t$; $\quad {}_1 = \frac{\mathscr{E}_0}{2(R_1+R)}$.

O2-11.11

В схеме, изображенной на рис. 236, действует переменная ЭДС, изменяющаяся по закону $\mathscr{E}(t) = \mathscr{E}_0 \cos^2 \Omega t$. Определить токи и $_1$, если известно, что параметры цепи удовлетворяют соотношению $\Omega^2 = 1/(4LC)$.

11.11

$= \frac{\mathscr{E}_0}{2R}$; $_1 = \frac{\mathscr{E}_0 \cos(2\Omega t - \varphi)}{2\sqrt{(R_1+R)^2 + \left(\frac{1}{2\Omega C}\right)^2}}$; $\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{2(R+R_1)\Omega C_1}$.

O2-11.12

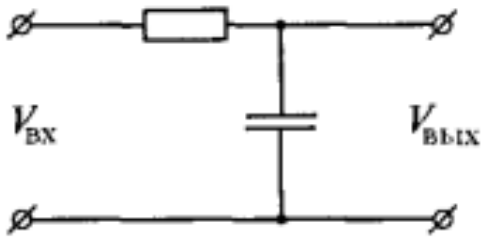
На RC-цепочку (рис. 237) подается гармоническое напряжение $V_{\text{ВХ}} = V_0 \cos \omega t$. Параметры цепочки подобраны так, что сдвиг фаз между $V_{\text{вых}}$ и $V_{\text{вх}}$ составляет 60°. Определить спектральный состав выходного напряжения и фазовые сдвиги между спектральными компонентами для случая, когда расстояние между пластинами конденсатора (конденсатор плоский) изменяется по закону $d = d_0(1 + a \cos \Omega t)$, причем $\Omega \ll \omega$ и $a \ll 1$.

11.12

Спектр выходного напряжения содержит три компоненты на частотах $\omega, \omega - \Omega$ и $\omega + \Omega$ с амплитудами $V_0/2, \sqrt{3}aV_0/4$ и $\sqrt{3}aV_0/4$ соответственно. Боковые компоненты сдвинуты по фазе на (5/6) л относительно основной частоты.

O2-11.13

На *RC*-цепочку (рис. 238) подается синусоидальное напряжение $V_{\text{вх}} = V_0 \cos \omega t$. Параметры цепочки подобраны так, что сдвиг фаз между $V_{\text{вых}}$ и $V_{\text{вх}}$ составляет $-45°$. Определить спектральный состав выходного напряжения и фазовые сдвиги между спектральными компонентами для случая, когда расстояние между пластинами плоского конденсатора изменяется по закону $d = d_0(1 + a \cos \Omega t)$, причем $\Omega \ll \omega$ и $a \ll 1$.

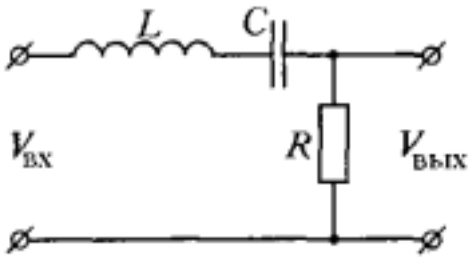


11.13

Спектр выходного напряжения содержит компоненту основной частоты ω с амплитудой $V_0/\sqrt{2}$ и две боковые компоненты на частотах $\omega \pm \Omega$ с амплитудами $aV_0/4$, сдвинутые по фазе на $\pi/4$ относительно основной частоты.

O2-11.14

На вход колебательного контура (рис. 239) подается амплитудно-модулированное напряжение $V_{\text{ВХ}} = V_0(1 + m \cos \Omega t) \cos \omega_0 t$ $(m < 1)$. Контур настроен в резонанс с частотой ω_0 Вычислить $V_{\text{вых}}$, если $\omega_0 = 2 \cdot 10^6 \text{с}^{-1}, \Omega = 5 \cdot 10^3 \text{с}^{-1}$, добротность контура $Q = 100$.

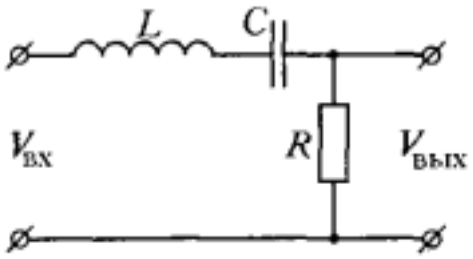


11.14

$V_{\text{вых}} = V_0\,[1 + m_1 \cos(\Omega t + \varphi)] \cos\omega_0 t,$
где $m_1 = \frac{m}{\sqrt{1+Q^2\frac{4\Omega^2}{\omega_0^2}}} \approx 0,89m; \quad \operatorname{tg}\varphi \approx Q\frac{2\Delta\omega}{\omega_0} \approx 0,5.$

O2-11.15

На вход колебательного контура (рис. 239) подается периодическая последовательность прямоугольных импульсов, длительность которых в 4 раза меньше величины периода. Частота повторения импульсов совпадает с резонансной частотой контура. Вычислить отношение амплитуд второй гармоники к первой на выходе контура, если его добротность $Q = 100$.



11.15

$\frac{V_2^{\text{Bbx}}}{V_1^{\text{Bbx}}} = \frac{2}{3Q}\frac{V_2^{\text{Bx}}}{V_1^{\text{Ax}}} \approx 0,0047$, где $V_2^{\text{Bx}} = \frac{A}{2\pi}$ - вторая гармоника входной последовательности прямоугольных импульсов амплитудой A, $V_1^{\text{BX}} = \frac{A}{\pi\sqrt{2}}$ - первая гармоника.

O2-11.16

Сигнал с выпрямителя имеет вид $V(t)$ (половинки косинусоид) (рис. 240). Его подают на схему, изображенную на рис. 241. Контур L, C настроен на частоту $\omega_0; R \gg \omega_0 L$ и $R \gg r$. Считая контур идеальным, определить форму сигнала $V_R(t)$.

11.16

$V_R(t) = \frac{1}{2}\,|\cos\omega_0 t|.$

O2-11.17

Сигнал с выпрямителя имеет вид $V(t)$ (половинки косинусоид) (рис. 240). Его подают на схему, изображенную на рис. 242. $V(t)$ Контур L, C настроен на частоту $\omega_0; \omega_0 L \gg R \gg r$. Считая контур идеальным, определить форму сигнала $V_R(t)$.

11.17

$V_R(t) = \frac{1}{2}\,|\cos\omega_0 t|$.

O2-11.18

Генератор импульсов, имеющих форму ограниченной в цепь колебательного контура L, C, R, имеющего добротность $Q = 100$ (рис. 243). Внутреннее сопротивление генератора $r = 50$ Ом, а амплитуда ЭДС $V = 100$ В. Найти
(???)

11.18

$_1^{\max} \approx 0,71$ А.
Решение. Разложим в спектр входной сигнал генератора. По условию достаточно определить две первых гармоники V_1 и V_2. По теореме Фурье о представлении периодической функции $f(t)$ в виде ряда

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)$$

где $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}, a_0 = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)dt, a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\cos\omega_0 ntdt, b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)\sin\omega_0 ntdt$. В нашем случае входной сигнал - четная функция. Поэтому $b_n \equiv 0$ для любого n. Определим $a_1 = \frac{4}{T}\int_0^{T/4}\cos^2\omega_0 tdt = \frac{1}{2}; a_2 = \frac{4}{T}\int_0^{T/4}\cos 2\omega_0 t\cos\omega_0 tdt = \frac{2}{3\pi}$. Поскольку амплитуда входного сигнала $V = 100$ В, то амплитуды гармоник равны $V_1 = \frac{1}{2}V, V_2 = \frac{2}{3\pi}V$. Основная (первая) гармоника представляет собой синусоидальный сигнал с частотой $\omega_1 = \omega_0$. Контур L, C, R настроен на первую гармонику по условию. При резонансе $\omega_1 L = \frac{1}{\omega_1 C} = \rho_1$. Добротность контура $Q = \frac{\rho_1}{R}$. При резонансе сопротивление контура имеет активный характер, поэтому $\mathscr{G}_1 = \frac{V_1}{R+r}$. Однако вторая гармоника - вне резонанса, точнее - вдали от него: $R + r \ll \omega_2 L - \frac{1}{\omega_2 C}$. Таким образом,

$$_2 = \frac{V_2}{\omega_2 L - \frac{1}{\omega_2 C}} = \frac{V_2}{2\rho_1 - \frac{1}{2}\rho_1} = \frac{2V_2}{3\rho_1}.$$

Отношение гармоник тока

$$\beta = \frac{\mathscr{I}_1}{\mathscr{I}_2} = \frac{9QR\pi}{8(R+r)},$$

откуда $R = \frac{8\beta r}{9\pi Q - 8\beta}$. Считая, что β равно как минимум 100 , определим $R \approx 20$ Ом. Понятно, что это значение сопротивления R определяет максимально возможное значение амплитуды первой гармоники тока

$$_1^{\max} = \frac{V_1}{r+R} = \frac{V}{2(r+R)} = \frac{5}{7} \approx 0,71 \text{ А}.$$

O2-11.19

Генератор прямоугольных импульсов с амплитудой $V = 100$ В и скважностью $\alpha = T/\tau = 4$ (Т- период следования, τ - длительность импульсов), имеющий внутреннее сопротивление $r = 50$ Ом, нагружен на последовательный контур с добротностью $Q = 100$. Найти максимально возможное значение амплитуды первой гармоники тока в контуре $\mathscr{Q}_1$, если все высшие гармоники должны быть подавлены по крайней мере в 100 раз ($\beta = \mathscr{V}_1/\mathscr{I}_2 \geqslant 100$).

11.19

$_1^{\max} = \frac{V_1}{r+R} = 237$ mA, где $V_1 = \frac{\sqrt{2}V}{2\pi}, R = \frac{2\beta r}{3\sqrt{2}Q - 2\beta} = 45$ОМ.

O2-11.20

Квадратичный детектор D преобразует входное напряжение $V = V_0(\sin\omega t + \sin 2\omega t)$ по закону $V_д = kV^2$К выходу детектора подключена цепь, состоящая из последовательно соединенных индуктивности L и сопротивления $R(\omega L/R = 1/3)$ (рис. 244). Вычислить отношение амплитуды гармоники с максимальной частотой к постоянной составляющей выходного напряжения, снимаемого с сопротивления.

11.20

$\frac{V_4^{\text{вых}}}{V_0^{\text{вых}}} = \frac{V_4^{\text{д.}}}{V_0^{\text{д}}\sqrt{1+\frac{\omega_4^2 L^2}{R^2}}} = \frac{3}{10}$, где ω_4 - четвертая гармоника (максимальная частота напряжения на выходе детектора $V^{\text{д}}$).

O2-11.21

Квадратичный детектор D преобразует входное напряжение $V = V_0(\cos\omega t + \cos 2\omega t)$ по закону $V_{\text{д}} = kV^2$. К выходу детектора подключена цепь, состоящая из последовательно соединенных 104 емкости C и сопротивления $R(\omega RC = 1/\sqrt{2})$ (рис. 245). Вычислить отношение амплитуды гармоники с максимальной частотой к постоянной составляющей выходного напряжения, снимаемого с емкости.

11.21

$\frac{V_4^{\text{вых}}}{V_0^{\text{вых}}} = \frac{V_4^{\text{д}}}{V_0^{\text{д}}\sqrt{1+16\omega^2 R^2 C^2}} = \frac{1}{6}$, где $\omega_4 = 4\omega$ - четвертая гармоника (максимальная частота напряжения на выходе детектора V^{d}).

O2-11.22

Электронный пучок линейного ускорителя представляет собой последовательность сгустков, следующих друг за другом с периодом $T = 3 \cdot 10^{-10}$ с. Для измерения электрического тока ускоренных частиц используется цилиндр Фарадея (рис. 246), полностью
(???)

11.22

$n = \frac{UT}{Re} \approx 2 \cdot 10^7$.
Указание. Требуется показать, что прибор будет фактически регистрировать напряжение, равное нулевой компоненте разложения входного напряжения в ряд Фурье $V_0 = \frac{1}{T}\int_0^T V(t)dt$.

O2-11.24

Тороидальная катушка, имеющая N витков, равномерно намотана на ферритовый сердечник сечением S и радиусом r. Из-за насыщения дифференциальная магнитная проницаемость материала сердечника зависит от напряженности магнитного поля по закону $\mu = \frac{dB}{dH} = \mu_1 - \mu_2 H^2$. Катушка охвачена проводником, замкнутым на конденсатор емкостью C (рис. 248).
Определить спектральный состав тока i через конденсатор, если в катушке течет переменный ток $= \mathscr{V}_0 \sin\omega t$. Индуктивностью проводника, омическим сопротивлением цепей и гистерезисом в магнетике пренебречь.

O2-11.25

Каков спектральный состав выходного напряжения $V_{\text{вых}}$ (т. е. амплитуды и фазы спектральных компонент) в схеме, изображенной на рис. 249, если обе индуктивности одновременно изменяются по закону $L = L_0(1 + m\cos\Omega t)$. Считать, что $m \leqslant 1, \omega \gg \Omega$ и $\omega L_0 \ll R$

O2-11.26

Каков спектральный состав выходного напряжения $V_{\text{вых}}$ (т. е. амплитуды и фазы спектральных компонент) в схеме, изображенной на рис. 250, если обе емкости одновременно изменяются по закону $\frac{1}{C} = \frac{1}{C_0}(1 + m\cos\Omega t)$? Считать, что $m \leqslant 1, \omega \gg \Omega$ и $\omega RC_0 \gg 1$.

O2-11.31

На вход высокодобротного колебательного контура $(L, C,\ R)$ в начальный момент времени $t = 0$ подается внешняя ЭДС $\mathscr{E}(t) = \mathscr{E}_0\cos[\Omega t + \varphi(t)]$ с законом фазовой модуляции $\varphi(t) = \alpha t^2$ $(\Omega \gg \sqrt{\alpha})$. Параметры колебательного контура удовлетворяют условию $2L/R \ll \sqrt{\pi/\alpha}$. Через какое время после

включения ЭДС амплитуда вынужденных колебаний в контуре максимальна? Сколько времени должно пройти, чтобы амплитуда вновь заметно уменьшилась?

O2-11.32

На вход высокодобротного колебательного контура (L, C, R) в начальный момент времени $t = 0$ подается внешняя ЭДС $\mathscr{E}(t) = a(t)\cos\omega_0 t$ с законом амплитудной модуляции $a(t) = a\left(1 + \cos\alpha t^2\right)$, где $\omega_0 \gg \sqrt{\alpha}$. Параметры контура удовлетворяют условиям: $2L/R \ll \sqrt{\pi/\alpha}, 1/\sqrt{LC} = \omega_0$. Через какое время после включения ЭДС колебания напряжения на обкладках конденсатора окажутся близкими к гармоническим?

O2-11.33

Сигнал $\mathscr{E}(t) = \mathscr{E}_0\cos(\omega t + m\cos\Omega t)$, где $m \ll 1$ и $\Omega \ll \omega$, подается на вход контура с высокой добротностью $Q \gg 1$. Резонансная частота контура $\omega_0 = \omega - \Omega$. Определить с точностью до малых поправок зависимость от времени напряжения на конденсаторе $V(t)$. Считать $\Omega \gg \omega_0/Q$.

O2-11.34

На вход колебательного контура, настроенного на частоту ω_0, подается сигнал $\mathscr{E}(t) = \mathscr{E}_0(1 + m\cos\Omega t)\cos\omega_0 t, m < 1$. Добротность контура $Q \gg 1$. Частота модуляции выбрана равной $\Omega = \omega_0/(2Q)$. Определить амплитуды и фазы спектральных компонент напряжения $V(t)$ на выходе. Пояснить решение с помощью векторной диаграммы. 107

O2-11.35

Индуктивность колебательного контура периодически изменяется во времени по закону, указанному на рис. 254. При каком значении емкости колебательного контура возможен параметрический резонанс? При каком максимальном значении активного сопротивления контура произойдет возбуждение параметрических колебаний? Выполнить числовой расчет для $L_0 = 4\cdot10^{-4}\Gamma, \Delta L = 4\cdot10^{-5}\Gamma$, $\tau_0 = 10^{-6}$с.

O2-11.38

С помощью высокочувст- вительной измерительной схемы, ко- торая проводит усреднение за время $\tau \approx 1$ с, регистрируются малые измеРис. 256 τ через вакуумный диод (рис. 256), вызванные, например, изменением напряжения батареи. Оценить минимальное регистрируемое на фоне дробового шума диода значение $\Delta_{\mathscr{J}}^{\min}$, если средний ток диода $\mathfrak{V} \approx 10^{-3}$ А. 108

O2-11.39

Сигнал от радиопередатчика, принятый на расстоянии $l_1 = 1$км, равен по мощности уровню собственных шумов приемника. Считая, что шумы обусловлены только тепловыми флуктуациями во входном контуре радиоприемника, оценить, с какого расстояния l_2 можно было бы вести прием с тем же соотношением уровней сигнала и шума, если охладить входные цепи радиоприемника до температуры жидкого гелия $T_2 \approx 4$ К.

§ 11. Элементы спектрального анапиза. Автоколебания. Параметрический резонанс. Шумы . Solutions

11.23

$i = \frac{\omega S}{Rc}\sqrt{\mu_1\mu_2}A^2\sin 2\omega t + \frac{\mu_2\omega S}{4Rc}A^3(\cos\omega t - \cos 3\omega t)$, где $A = \frac{2N}{cr}\theta_0$. Таким образом, в спектре тока три гармоники с частотами $\omega, 2\omega$ и 3ω (СГСЭ) .

11.24

$i = \frac{1}{c}S\omega^2 C\left(\mu_1 H_0 - \frac{1}{4}\mu_2 H_0^3\right)\sin\omega t + \frac{1}{c}\frac{3S}{4}C\omega^2\mu_2 H_0^3\sin 3\omega t$, где $H_0 = \frac{2N_0}{cr}$(СГСЭ).

11.25

$V_{\text{вых}} = V_0 \cos\left(\omega t - \frac{2m\omega L_0}{R}\cos\Omega t - \alpha\right)$, где $\alpha = \frac{2\omega L_0}{R} \ll 1$.
Спектр выходного напряжения содержит три компоненты на частотах ω, $\omega - \Omega$ и $\omega + \Omega$ с амплитудами $V_0, 2m\omega L_0 V_0/R, 2m\omega L_0 V_0/R$ и фазами 0 , $-\pi/2$ и $-\pi/2$ соответственно.

11.26

$V_{\text{вых}} = V_0 \cos\left(\omega t + \frac{2m}{\omega C_0 R}\cos\Omega t + \alpha\right)$, где $\alpha = \frac{2}{\omega C_0 R} \ll 1$.
Спектр выходного напряжения содержит три компоненты на частотах ω, $\omega - \Omega$ и $\omega + \Omega$ с амплитудами $V_0, 2mV_0/\left(\omega C_0 R\right), 2mV_0/\left(\omega C_0 R\right)$ и фазами 0 , $\pi/2$ и $\pi/2$ соответственно.

11.27

Вольтметр измеряет $\bar{V}$. С диодом $V = \frac{\sqrt{2}}{\pi} V_{\text{эфф}} \approx 100$ В, где $V_{\text{эфф}}$ - действующее значение переменного тока (220 В).

11.28

Вольтметр измеряет $V = \sqrt{\overline{V^2}}$. С диодом $V = \frac{V_{\text{эфф}}}{\sqrt{2}} \approx 155$ В.

11.29

$\frac{\delta V}{V_0} = \frac{1}{fRC} \approx 0,02$.

11.30

$\frac{\delta \mathscr{F}}{_0} = 1 - e^{-T/\tau} \approx \frac{T}{\tau} = \frac{R_1}{fL} = 0,02$.

11.31

Амплитуда сохранится близкой к максимальному значению в течение времени, необходимого для сдвига $\omega(t)$ на полуширину резонансной кривой $t \approx \frac{R}{4\alpha L}$. Максимум будет достигнут через $t_1 = \frac{1}{2\alpha}\left(\frac{1}{\sqrt{LC}} - \Omega\right)$.

11.32

Через время $t \geqslant \frac{1}{4\alpha R}$ боковые гармоники сместятся относительно резонансной частоты на ширину резонансной кривой, т. е. через это время боковые гармоники практически исчезнут.

11.33

$V(t) \approx \frac{\mathscr{E}_0}{2}\left[Qm\cos(\omega - \Omega)t - \frac{\omega_0}{\Omega}\cos\omega t\right]$.

11.34

$V(\omega_0) = Q_{\mathscr{B}_0} e^{-i\pi/2}$

$$V(\omega_0+\Omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} mQ\mathscr{E}_0 e^{-3\pi i/4}; \quad V(\omega_0-\Omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} mQ\mathscr{C}_0 e^{-\pi i/4}.$$

11.35

$C = \frac{4\tau_0^2}{\pi^2 L_0} = 10^{-9}\Phi; \quad R_{\max} = \frac{\Delta L}{4\tau_0}\pi = 31,4\text{OM}.$

11.36

$|\Delta C| > \frac{RCT^3}{16\pi^2 L\ \mathrm{T}^2} \approx 2,5\cdot 10^{-12}\Phi,$
где $T = 2\pi\sqrt{LC} \approx 4\cdot 10^{-6} c. \left|\frac{\Delta C}{C}\right| \approx 2,5\cdot 10^{-2}.$

11.37

$R_{\max} = S\frac{\sqrt{LL_{\text{cB}}}}{C} = 8$ Ом. При $R = 2R_{\max} = 16$ Ом, $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} = 12$ (без обратной связи). При наличии обратной связи $Q_1^* = 25$ (положительная связь), $Q_2^* = 8$ (отрицательная связь).

11.38

$\Delta_{\min} \approx \sqrt{\frac{2e?}{\tau}} = 1,7\cdot 10^{-11}$ А.

11.39

$l_2 = l_1\sqrt{T_1/T_2} \approx 8$ км. Здесь T_1 - комнатная температура.

14.2.15 Problems about Electromagnetic Waves

O2-12.11

Плоский воздушный конденсатор, состоящий из двух одинаковых дисков, заряжен электричеством и помещен внутри соленоида, создающего однородное постоянное магнитное поле $B = 1000$ Гс. Магнитное поле создается батареей, посылающей постоянный ток в обмотку электромагнита. Электрическое поле между пластинами конденсатора равно $E = 10000$ В/cm. Вся система (вместе с батареей) помещена на горизонтальных рельсах и может перемещаться по ним без трения. Рельсы параллельны пластинам конденсатора. Как изменится по величине и направлению механический импульс системы, если конденсатор пробивается электрической искрой вдоль его оси и в результате этого разряжается? Объем воздушного пространства между пластинами конденсатора $V = 100$ см^3. Обсудить результат с точки зрения закона сохранения импульса. Как изменится механический импульс системы, если конденсатор остается заряженным, но разрывается цепь батареи, питающей соленоид?

12.11

: $\mathbf{P} = \frac{V}{4\pi c}[EB]; \quad |P| \approx 0,88\cdot 10^{-4}\Gamma\cdot$ cm/c

Р ешение. Ввиду осевой симметрии полный электромагнитный импульс поля равен нулю. В результате разрядки конденсатора он измениться не может. Поэтому не может измениться и полный механический импульс системы. Но в результате разрядки электромагнитный импульс, локализованный в конденсаторе, уменьшается на $\frac{V}{4\pi c}$ [EB], а электромагнитный импульс поля вне конденсатора увеличивается на такую же величину. В соответствии с этим конденсатор приобретает механический импульс $\frac{V}{4\pi c}$ [EB], равный $\sim 10^{-4}\Gamma\cdot$ cm/c. Соленоид получит такой же, но противоположно

направленный импульс. Искру можно рассматривать как ток проводимости. Если бы все электрическое поле конденсатора было локализовано только внутри него, то магнитное поле искры вне конденсатора было бы полностью компенсировано магнитным полем тока смещения. На самом деле часть тока смещения проходит вне конденсатора и создает там магнитам поле. Это магнитное поле действует на токи, текущие в соленоиде, и меняет импульс последнего.

Решение остается в силе, если разорвать цепь питания батареи, оставив заряженным конденсатор.

O2-12.12.

Заряженный плоский воздушный конденсатор с напряженностью электрического поля между пластинами $E_0 = 282$ В/cm помещен внутри соленоида, поперечное сечение которого имеет форму прямоугольника со сторонами, параллельными и перпендикулярными пластинам конденсатора. В цепи обмотки соленоида имеется батарея постоянного тока и ключ. Вся система (вместе с батареей) помещена на горизонтальных рельсах, параллельных пластинам конденсатора, и может перемещаться по ним без трения. Вначале цепь соленоида разомкнута. Затем ключ замыкается, и в соленоиде создается постоянное магнитное поле с индукцией $B = 2000$ Гс. Как изменится по величине и направлению механический импульс системы после замыкания ключа? Объем воздушного пространства между пластинами конденсатора равен $V = 200$ см^3. Обсудить результат с точки зрения закона сохранения импульса.

12.12

$P = \frac{E_0 V B}{4\pi c} = 10^{-6}\text{Г} \cdot$ cm/c.

O2-12.13

Заряженный тонкостенный цилиндрический конденсатор с радиусом внешнего электрода $R = 20$ см висит в вакууме на упругой нити с модулем кручения $f = 10^4$ дин см в магнитном поле $B = 10^4 \text{Г}c$, параллельном нити и тонкому внутреннему электроду конденсатора. При нагреве конденсатор быстро разряжается за счет термоэмиссии. Определить амплитуду φ_0 малых крутильных колебаний конденсатора. Заряд конденсатора $Q = 5 \cdot 10^{-7}$ Кл, момент инерции конденсатора $J = 100\text{r} \cdot \text{cm}^2$.

12.13

$\varphi_0 = \frac{QBR^2}{2c\sqrt{Jf}} = 10^{-4}$ рад.

O2-12.14

Одним из методов обнаружения гипотетического элементарного магнитного заряда - монополя Дирака, величина которого в гауссовой системе единиц $g_0 = \hbar c/(2e)$, - может быть регистрация электрического тока, возникающего в сверхпроводящем контуре после прохождения сквозь него монополя. Оценить величину тока в кольце индуктивностью $L = 0,1$ мкГ. ук а з а и е. Гипотеза П. Дирака о монополе приводит к симметризации уравнений Максвелла так, что одно из них принимает форму

$$\mathscr{B} = -\frac{1}{c}\frac{d\Phi}{dt} - \frac{4\pi}{c}\ \text{d}_{\text{м}}$$

где $\mathscr{E}$ - ЭДС, возникающая в контуре, - поток магнитной индукции, $\mathscr{J}_{\text{м}}$ - ток монополя или магнитный заряд, протекающий через площадку, ограниченную контуром в единицу времени.

12.14

$\mathscr{A} = \frac{2\pi\hbar c^2}{Le} = 124$ ед. СГСЭ $= 0,041$ мкА.

O2-12.15

Одним из методов обнаружения гипотетического элементарного магнитного заряда - монополя Дирака, величина которого в гауссовой системе единиц $g_0 = \hbar c/(2e)$, - может быть регистрация электрического заряда, протекшего в металлическом кольце при прохождении сквозь него монополя. Оценить величину заряда для кольца сопротивлением $R = 1$ Ом (см. также предыдущую задачу).

12.15

$Q = \frac{2\pi\hbar}{eR} \approx 12,4 \cdot 10^{-6}$ ед. СГСЭ $\approx 4,1 \cdot 10^{-15}$ Кл.

O2-12.16

Подвесим небольшой стальной цилиндр внутри проволочной катушки, питаемой городским переменным током. Цилиндр, испытывая 50 циклов перемагничивания в секунду, сильно нагревается уже через одну-две минуты. Чтобы доказать, что нагревание обусловлено гистерезисом, а не токами Фуко, подвесим внутри той же катушки медный цилиндр тех же размеров, что и стальной. Электропроводность меди больше, чем у железа, а потому токи Фуко в ней будут сильнее. Между тем при значительном нагревании стального цилиндра медный остается холодным. Является ли это убедительным доказательством гистерезиса у железа?

12.16

: Не является.

Решение. Токи Фуко в меди должны быть меньше чем в железе, потому что магнитная проницаемость меди меньше чем у железа более чем в 1000 раз. $_\Phi \propto E/\rho \propto \operatorname{rot}\mathbf{E}/\rho$, где ρ - удельное электрическое сопротивление. Согласно закону Фарадея $\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}$, где μ - магнитная проницаемость. Так как $\mu_{\mathrm{Cu}} \sim 1, \rho_{\mathrm{Cu}} \approx 10^{-8}\mathrm{O}^2 \cdot \ \mathrm{m}; \mu_{\mathrm{Fe}} \sim 1000; \rho_{\mathrm{Fe}} \approx 10^{-7}\mathrm{Om_m}$ м, то

$$\frac{\mathscr{I}_{\text{фуко Fe}}}{\mathscr{I}_{\text{фуко Cu}}} = \frac{\mu_{\mathrm{Fe}}\rho_{\mathrm{Fe}}}{\mu_{\mathrm{Cu}}\rho_{\mathrm{Cu}}} \approx 10000.$$

Таким образом, железный цилиндр будет нагреваться значительно быстрее медного вне зависимости от наличия или отсутствия гистерезиса.

O2-12.17

Катушка с числом витков N, длиной l и радиусом a заполнена слабопроводящим материалом с постоянной проводимостью λ. Определить, как изменится ЭДС самоиндукции катушки по сравнению со случаем $\lambda = 0$, если по катушке течет ток $\mathfrak{d} = \mathfrak{g}_0 \cos\omega t$. Магнитная проницаемость материала μ. Краевыми эффектами пренебречь.

12.17

$\frac{\mathscr{E}_1^{ch}}{\mathscr{E}_0^{\mathrm{ch}}} = \frac{1}{2}\frac{\pi\mu\lambda\omega a^2}{c^2}$.

18,19

12.18

$B_0 \approx 840$ Гс. Толщина скин-слоя $\delta = 1,56$ мм мала по сравнению с толщиной «блина» $h = 2,2$ см (в поле). Таким образом, поле вне ртути похоже на поле сверхпроводника такой же формы. Сила давления поля $F_{\text{маг}} = 2\pi r h P_{\text{маг}}$, где $P_{\text{маг}} = \frac{1}{2}\frac{B_0^2}{8\pi}$. Сила магнитного давления с силами поверхностного натяжения уравновешивает силу тяжести. Отсюда и вычисляется искомое поле B_0.

12.19

$\mathscr{A} = \frac{2\omega^2 a^2 b}{c^2 dR} V_0 \cos\omega t$.

O2-12.20

В длинном воздушном соленоиде с радиусом намотки $r_0 = 1$ см, содержащем $n = 10$ витков / см, течет ток, нарастающий с 112 постоянной скоростью $d\mathscr{G}/dt = 100$ А/с. Какова будет форма силовых линий соответствующего ему вихревого электрического поля E? Найти величину E на расстоянии $2r_0$ от оси соленоида. Как изменится поле E и индукция D, если соленоид погрузить в однородный немагнитный диэлектрик с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 2$?

12.20

1) $E = \frac{\pi r_0}{c^2}\frac{d\mathscr{F}}{dt}n = 10^{-8}$ ед. СГСЭ $= 3 \cdot 10^{-4}$ В/m;
2) $E_1 = E$; $D_1 = 2D$.

O2-12.21

В однородном магнитном поле перпендикулярно вектору B расположен замкнутый круглый виток радиусом r, индуктивность которого L, а омическое сопротивление R. Начиная с момента $t = 0$ поле начинает убывать по линейному закону со скоростью $dB/dt = -a$. Найти закон изменения потока индукции $\Phi(t)$, пронизывающего контур витка.

12.21

$\Phi(t) = \Phi(0) - a\pi r^2 t + L\frac{a\pi r^2}{R}\left(\frac{t}{A} - e^{-Rt/L}\right)$ (в СИ), в СГСЭ постоянная времени $\tau = \frac{L}{c^2 R}$.

O2-12.22

Медный цилиндр радиусом $a = 1$ см и высотой $h = 10$ см помещен в переменное однородное магнитное поле $B = B_0 \cos\omega t$ параллельное оси цилиндра. Амплитуда поля $B_0 = 100\text{Г}c$, частота $v = 50$ Гц. Определить среднюю мощность тепла Q, выделяющегося в цилиндре из-за токов Фуко. Электропроводность меди $\lambda = 5,14 \cdot 10^{17}\text{с}^{-1}$ (СГСЭ).

12.22

$Q = \lambda\pi h\left(\frac{\pi v B_0 a^2}{2c}\right)^2 \approx 1,1 \cdot 10^6$ эрг/с $\approx 0,11$ Вт.

O2-12.23

Плоский конденсатор с площадью пластин S и расстоянием между ними d заполнен слабопроводящим диэлектриком с диэлектрической постоянной ε и удельным сопротивлением ρ. Через конденсатор течет переменный ток $\mathscr{J} = \mathscr{Q}_0 \cos\omega t$. Найти V_0 - амплитуду напряжения на конденсаторе.

12.23

$V_0 = \frac{4\pi d\mathscr{J}_0}{\varepsilon S\left[\omega^2 + \left(\frac{4\pi}{\rho\varepsilon}\right)^2\right]^{1/2}}$.

O2-12.24

В плоский конденсатор, состоящий из двух круглых дисков площадью S, помещена квадратная проволочная рамка со стороной a. Одна из сторон рамки совпадает с осью конденсатора, а две другие направлены по радиусу диска. Сопротивление рамки r (ее индуктивное сопротивление можно считать много меньше омического). Конденсатор заряжается от источника постоянной ЭДС до заряда Q_0, причем постоянная времени $\tau = RC$. Найти джоулево тепло, выделяющееся в рамке при зарядке конденсатора. Откуда берется эта энергия? При каких условиях можно пренебречь индуктивностью рамки?

12.24

$W = \left(\frac{\pi a^3}{c^2 S}\right)^2 \frac{Q_0^2}{2r\ \mathrm{T}^3}$.

O2-12.25

Имеется двухпроводная линия из идеального проводника (без тепловых потерь). Одна пара концов линии присоединена к генератору постоянного тока, другая - к некоторому сопротивлению (нагрузке). Показать, что если падение напряжения в проводах не учитывать, то вектор потока энергии (вектор Пойнтинга) **S** в пространстве между проводами направлен вдоль проводов от генератора к нагрузке. Как изменится картина, если учесть сопротивление проводов?

12.25

См. рис. 417 (a - линия без потерь; - линия с конечным сопротивлением проводов). При наличии сопротивления проводов существует

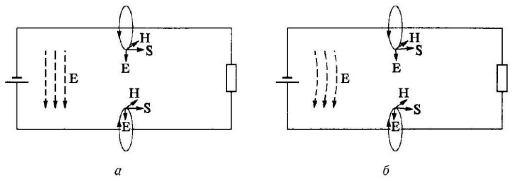


Рис. 417

падение напряжения вдоль проводов, а значит на поверхности проводов и в пространстве между проводами существует тангенциальная составляющая вектора **E**, вследствие чего вектор Пойнтинга отклонен в сторону проводов. Часть энергии течет к нагрузке, а часть - в провода и превращается в тепло.

O2-12.26

По прямому проводу, обладающему сопротивлением, идет постоянный ток. 1) Указать для произвольной точки боковой поверхности провода направление составляющей вектора Пойнтинга **S**, обусловленной тангенциальной составляющей E. 2) Показать, что произведение модуля вектора Пойнтинга на величину боковой поверхности провода равно мощности, выделяемой током в проводе.

12.26

1) См. рис. 418;
2) $S \cdot 2\pi rl = \frac{1}{4\pi} EH \cdot 2\pi rl = \frac{1}{4\pi} \frac{V}{l} \frac{2\mathscr{F}}{r} 2\pi rl = V\mathscr{G}$.

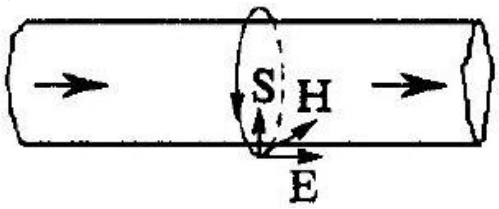


Рис. 418

O2-12.27

Постоянный ток $\mathscr{J}$ течет по цепи, состоящей из резистора сопротивлением R и длинной катушки радиусом r_2 и плотностью намотки витков $n\left[\text{ см}^{-1}\right]$ и соосного с катушкой прямого провода радиусом r_1 (рис. 258). Пренебрегая сопротивлением катушки и провода, найти аксиальную S_z и азимутальную S_φ компоненты вектора Пойнтинга внутри катушки вдали от ее $\Rightarrow$ rngy R торцов. Вычислить поток энергии через сечение катушки.

12.27

$S_z = \frac{\mathscr{I}^2 R}{2\pi r^2 \ln(r_2/r_1)}$; $S_\varphi = \frac{\mathscr{I}^2 Rn}{r \ln(r_2/r_1)}$. По-

ток энергии через сечение катушки направлен в сторону резистора и равен $W = \int_{r_1}^{r_2} S_z \cdot 2\pi r dr = g^2 R$.

28

12.28

$W = \frac{\mu_0 N^2 \mathscr{E}^2 \pi r^2}{2lR^2} = \frac{L^2}{2}(\text{C})$.

O2-12.29

Цилиндрический электронный пучок радиусом R распространяется в свободном пространстве. Электроны пучка летят параллельно, их энергия W, а концентрация n. Найти величину и направление вектора Пойнтинга в любой точке пространства.

12.29

Вектор Пойнтинга вне пучка $S_{\text{ex}} = \frac{\pi R^4 (ne)^2}{r^2}\sqrt{\frac{2W}{m}}$; вектор Пойнтинга внутри пучка $S_{\text{in}} = \pi r^2 (ne)^2 \sqrt{\frac{2W}{m}}$.

14.2.16 Problems about Waveguides and Resonators

O2-12.30

По цилиндрическому проводнику течет ток, плотность которого j однородна по сечению проводника. Концентрация электронов проводимости n. Пренебрегая сопротивлением и учитывая поле Холла, определить величину и направление вектора Пойнтинга в проводнике в зависимости от расстояния до оси r. Величины $\varepsilon = \mu = 1$.

O2-12.31

В свободном пространстве распространяется электронный пучок «ножевой» геометрии, т. е. имеющий вид тонкого плоского слоя; скорость электронов лежит в плоскости слоя. Толщина пучка $2a$, энергия электронов W, концентрация их n. Считая, что все электроны летят параллельно, найти вектор Пойнтинга в произвольной точке пространства.

O2-12.32

Конденсатор, состоящий из двух одинаковых дисков радиусом a, расположенных на расстоянии d друг от друга, заполнен диэлектриком с проницаемостью ε и заряжен до напряжения V_0. Затем конденсатор начинает разряжаться через внешнее сопротивление R. Пренебрегая краевыми эффектами, найти вектор Пойнтинга в конденсаторе как функцию расстояния r от оси и времени t. Найти полную электромагнитную энергию W, вытекшую через боковую поверхность конденсатора за все время разряда.

O2-12.33

Плоский конденсатор, состоящий из двух одинаковых соосных дисков, подключен к источнику постоянного напряжения $\mathscr{E}$. В момент $t = 0$ расстояние d между дисками начинает увеличиваться по некоторому закону $d(t)$. Найти вектор Пойнтинга $\mathbf{S}$ и электромагнитную энергию $W(r, t)$, переносимую через цилиндрическую поверхность радиусом r, расположенную внутри конденсатора вокруг оси, как функцию времени. Расстояние d между пластинами конденсатора остается все время малым по сравнению с радиусом пластины.

O2-12.34

По проводнику, имеющему форму плоской ленты, течет ток с плотностью j. Носителями тока являются электроны с концентрацией n. Найти величину и направление вектора Пойнтинга в 114 произвольной точке внутри проводника. Считать толщину ленты много меньше ее ширины, сопротивление не учитывать; $\mu \approx 1$.

O2-12.35

Цилиндрический электронный пучок с концентрацией n_e и продольной скоростью электронов v проходит сквозь газ положительных неподвижных ионов с концентрацией, подобранной таким образом, чтобы скомпенсировать силы взаимодействия электронов в поперечном направлении. Найти величину и направление вектора Пойнтинга внутри пучка, а также концентрацию ионов n_i.

O2-12.36

В длинном соленоиде объемом V и индуктивностью L ток возрастает по закону $\mathscr{V} = \alpha t$, где α - известная константа. Определить вектор Пойнтинга внутри соленоида. Определить полный поток Φ_S вектора Пойнтинга **S** через сферическую поверхность, центр которой лежит на оси соленоида вдали от его торцов, через время $t = \mathrm{I}$ с после начала процесса. Радиус R поверхности меньше радиуса соленоида. Рассеянием поля на торцах соленоида пренебречь, $\varepsilon = \mu = 1$.

O2-12.37

Внутри плоского конденсатора, образованного двумя круглыми дисками, расположенными на расстоянии d друг от друга, мысленно выделена замкнутая цилиндрическая поверхность радиусом $R(2R < d)$ и длиной $L(L$ меньше диаметра пластин конденсатора). Ось цилиндра перпендикулярна оси симметрии конденсатора. Напряжение на конденсаторе изменяется по линейному закону $V = At$, где A - известная константа. Определить вектор Пойнтинга внутри конденсатора. Определить полный поток Φ_S вектора Пойнтинга S через цилиндрическую поверхность через время $t = 1$ с после начала процесса.

O2-12.38

Оболочка и центральный проводник длинного отрезка коаксиального кабеля, замкнутого с торцов, изготовлены из разных сверхпроводников. Вначале по кабелю циркулирует ток $\mathscr{O}_0$. Затем температуру повышают так, что внутренний сверхпроводник переходит в нормальное состояние. Сверхпроводимость же оболочки при этом сохраняется. Определить вектор Пойнтинга и электромагнитную энергию, перенесенную за время затухания тока, на единицу длины кабеля. Радиус оболочки R_0, центрального проводника r_0. Считать скорость изменения тока d/dt известной.

O2-12.39

Двухпроводная линия из задачи $12-25$ присоединена с одного конца к генератору синусоидального тока. Напряжение и сила тока в линии находятся в одной и той же фазе. Показать, что вектор Пойнтинга **S** в пространстве между проводами всегда направлен от генератора к нагрузке.

O2-12.41 Контур (????)

Solution.

Ответ: 12.41* Энергия минимальна при $\frac{r_2}{r_1} = e = 2,718\ldots$

После срабатывания ключей в линии будет содержаться определенный запас энергии, равный (в СГСЭ)

$$W = \frac{L\mathscr{G}^2}{2c^2} + \frac{CU^2}{2}$$

где

$$U = gR, \quad R = 60\mathrm{OM}_\mathrm{M} = \frac{2}{c} \text{ ед. СГСЭ}.$$

Поскольку все омические сопротивления линии пренебрежимо малы, то весь этот запас энергии перейдет в излучение.

Величины индуктивности L и емкости C линии определяются известными соотношениями

$$L = 2l\ln(r_2/r_1), \quad C = \frac{l}{2\ln(r_2/r_1)}$$

Таким образом, запас энергии

$$W = \frac{\mathscr{J}^2 l}{c^2}\ln(r_2/r_1) + \frac{\mathscr{J}^2 R^2 l}{4\ln(r_2/r_1)} = \frac{\mathscr{J}^2 l}{c^2}\left[\ln(r_2/r_1) + \frac{1}{\ln(r_2/r_1)}\right]$$

так что $W \propto \left(x + \frac{1}{x}\right)$, где $x = \ln(r_2/r_1)$. Это выражение минимально при $x = 1$, откуда следует ответ.

О2-12.43 Контур из кобеля (????)

Отрезок коаксиального кабеля длиной $l = 14$ м подключен ко входу усилителя с очень высоким входным сопротивлением. Другой конец кабеля замкнут накоротко. Межпроводное пространство кабеля заполнено диэлектриком ($\varepsilon = 2$), характеризующимся малой удельной проводимостью $\lambda = 10^{-6}$ Ом$^{-1}$ · м$^{-1}$ $\approx 9 \cdot 10^3$ ед. СГСЭ. Найти наименьшую резонансную частоту $v_{\min}$ и добротность Q контура, эквивалентного отрезку данного кабеля, считая что потери связаны только с проводимостью диэлектрика.

Solution

(??? я очень плохо понимаю, что происходит в задаче)

Р еш е н и е. Средняя энергия электрического поля за период T, очевидно, равна половине $W_{\max}$:

$$W_E = \frac{1}{T}\int\limits_0^T dt \iiint_V \frac{\varepsilon E^2}{8\pi} dV = \frac{1}{2} W_{\max}$$

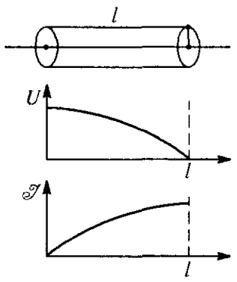
279
потери энергии за период

$$W_{\text{пот}} = \int\limits_0^T dt \iiint_V \lambda E^2 dV$$

Добротность системы

$$Q = 2\pi \frac{W_{\max}}{W_{\text{ror}}} = \frac{\varepsilon}{2T\lambda}.$$

На рис. 419 показано распределение напряжения и тока по длине кабеля в случае наименьшей частоты (наибольшей длины волны).



На отрезке кабеля длиной l установится четверть длины волны. Поэтому $v_{\min} = \frac{c}{4l\sqrt{\varepsilon}} = 3,75$ МГц, откуда $T = \frac{1}{v_{\min}}$ и $Q = \frac{\varepsilon}{2T\lambda} = 400$.

МФТИ-ГКЭ.2021.3 (?!?!?!?!??!)

К идеальной катушке подсоединили пустой конденсатор (форма конденсатора неизвестна). Резонансная частота этого колебательного контура оказалась равной $f_0 = 3,6$ МГц. Потом конденсатор заполнили однородным слабопроводящим диэлектриком. При последовательном подключении нового колебательного контура к источнику переменного напряжения амплитудой $U = 1$ В оказалось, что максимальная амплитуда напряжения на конденсаторе равна $U_{\text{m}} = 200$ В, причём достигается она при частоте источника $f_1 = 1,8$ МГц. Считая, что потери энергии происходят только в диэлектрике, определить его удельную проводимость σ и диэлектрическую проницаемость ε.

Solution

(?? тут нужно сидеть и продумывать её!?)

Потери определяются объёмными токами в диэлектрике. Добротность $Q = 2\pi \frac{W_3}{\Delta W_T}$, где запасённая в контуре энергия $W_{\text{эм}}$ вдвое больше средней по периоду в энергии в конденсаторе: $W_{\text{эм}} = 2\frac{1}{T}\int\limits_0^T dt \int \frac{\varepsilon E^2}{8\pi} dV$; потери за период $\Delta W_T = \int\limits_0^T dt \int \sigma E^2 dV$ (см. решение задачи 12.43 из задачника

по электричеству МФТИ). Следовательно, $Q = \frac{\epsilon}{2T\sigma}, 1/f_1 = T_1 = \sqrt{\varepsilon}T_0 = \sqrt{\varepsilon}/f_0$,где f_0 - резонансная частота при пустом конденсаторе, f_1 - при заполненном. В итоге добротность $Q = \frac{\sqrt{\epsilon}}{2\sigma}f_0 = \frac{f_0^2}{2\sigma f_1}$. С другой стороны $Q = \frac{U_{\max}}{U_0} = 200$. Окончательно получаем: $\varepsilon = \frac{f_0^2}{f_1^2} = 4, \sigma = \frac{f_0^2}{2Qf_1} = 1,8 \cdot 10^4 \text{с}^{-1} = 2 \cdot 10^{-8} (0\ \text{m})^{-1}$.

О2-12.44 Добротность волновода

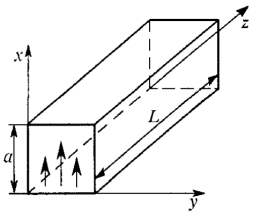
Торцы отрезка волновода сечением $a \times b = 10 \times 22$ мм ^{2} и длиной $l = 100$ мм запаяны, и волновод заполнен диэлектрической средой ($\varepsilon = 2$), обладающей слабой удельной проводимостью $\lambda = 10^{-7}$ О$^{-1}$· м $^{-1} \approx 900$ ед. СГСЭ. Найти добротность Q полученного СВЧ-резонатора для самой низкой возможной резонансной частоты $v_{\min}$, считая, что потери связаны только с проводимостью диэлектрика.

Solution

(???)

О2-12.45*

Волновод с металлическими стенками квадратного сечения со стороной $a = 5$ см возбуждается модулированными колебаниями $E_x(t) = E_0(1 + \cos\Omega t)\cos\omega_0 t$, где $\omega_0/(2\pi) = 3001$ МГц, а $\Omega/(2\pi) = 2$ МГц. Пренебрегая потерями бегущих волн в волноводе,определить, по какому закону меняется поле $E_{\text{вых}}(t)$ на выходе волновода длиной L. Поле E перпендикулярно оси волновода и параллельно одной из стенок (рис. 261).



Чему равна фазовая скорость волны с частотой ω_0?

Solution

(???)

12.45*: $E_{\text{вых}}(t) = E_0 \cos(\omega_0 t - k_{0z}L) + \frac{E_0}{2}\cos[(\omega_0 + \Omega)t - k_{1z}L]$; $v \approx 39c$.

Решение. Минимальная частота для электромагнитной волны, бегущей вдоль по оси z прямоугольного волновода, определяется из условия $\omega_{\min} = \frac{\pi c}{a}$; $v_{\min} = \frac{\omega_{\min}}{2\pi} = \frac{c}{2a} = 3000$ МГц. Такая частота называется критической или граничной. Волна с меньшей частотой не жизнеспособна в данном волноводе (сечением $a \times a$).

Волновод возбуждается модулированным колебанием в спектре которого только три гармоники. Основная $v_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 3001$М ц и две «боковых» $\omega_0 - \Omega$ и $\omega_0 + \Omega$ (соответственно 2999 и 3003 МГц). Очевидно, что мода с частотой 2999 МГц $< v_{\min}$ не способна распространяться в данном волноводе. Таким образом, в спектре распространяющейся в волноводе волны присутствуют только две моды v_0 и v_1. Им соответствуют волновые числа

$$k_{0z} = \sqrt{\frac{\omega_0^2}{c^2} - \frac{\pi^2}{a^2}} \quad \text{и} \quad k_{1z} = \sqrt{\frac{(\omega_0 + \Omega)^2}{c^2} - \frac{\pi^2}{a^2}}$$

Запишем закон изменения выходного электрического поля

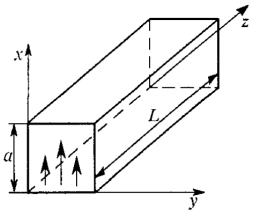
$$E_{\text{Bdx}}(t) = E_0 \cos(\omega_0 t - k_{0z}L) + \frac{E_0}{2}\cos[(\omega_0 + \Omega)t - k_{1z}L]$$

Найдем фазовую скорость волны с частотой ω_0:

$$v = \frac{\omega_0}{k_{0z}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\pi c}{\omega_0 a}\right)^2}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{\min}}{\omega_0}\right)^2}} \approx c\sqrt{1500} \approx 39c$$

O2-12.46

В волноводе квадратного сечения со стороной $a = 5$ см с металлическими стенками возбуждаются колебания электри ческого поля $E_x = E_0 \cos 2\pi v_0 t$ с частотой $v_0 = 2998$МГц (поле $\mathbf{E}$ перпендикулярно оси волновода z и параллельно одной из стенок)



При какой минимальной частоте амплитудной модуляции $v_{\min}$ в волноводе возникнет бегущая волна? Чему равна фазовая скорость волны при частоте модуляции $v = 3$М $\longleftarrow$?

Solution

(???)

O2-12.47

В резонаторе, который представляет собой кубик со стороной a, с идеально проводящими стенками и вакуумным наполнением возбуждена основная мода электромагнитных колебаний. Электрическое поле с амплитудой E_0 ориентировано по оси z. Найти вектор Пойнтинга $\mathbf{S}(t, x, y, z)$ как функцию координат и времени.

Solution

(???)

O2-12.48

Генератор электромагнитного излучения с длиной волны $\lambda = 8$ мм и мощностью $N = 1$ Вт настроен на основную моду прямоугольного резонатора с металлическими стенками, объем которого $V = 0,2$ см^3 и добротность $Q = 10^3$. Система соединения генератора и резонатора обеспечивает полное поглощение энергии генератора внутри резонатора. Определить максимальную напряженность E_0 электрического поля в резонаторе.

Solution

(???)

O2-12.49

Прямоугольный сверхпроводящий резонатор высотой $h = 3$ см имеет в горизонтальном сечении форму квадрата со стороной $a = 10$ см. Изнутри резонатор покрыт сверхпроводником, критическое магнитное поле H_c которого в условиях опыта равно 1 кЭ. Во избежание пробоя напряженность E электрического поля всюду не должна быть больше $E_0 = 30$ КВ/cm. Измеренная на низшей резонансной частоте добротность резонатора оказалась равной $Q = 10^6$ Какую мощность N можно подводить непрерывно к резонатору на этой частоте, чтобы поддерживать колебания с максимально допустимой амплитудой?

Solution

(???)

O2-12.50

В волноводе квадратного сечения (сторона квадрата равна a) с идеально проводящими стенками и вакуумным наполнением возбуждена бегущая электромагнитная ТЕ-волна с минимальной частотой при заданном волновом числе k_z. Ось z направлена вдоль волновода, вектор $\mathbf{E}$ параллелен оси x, амплитуда поля равна E_0. Определить вектор Пойнтинга $\mathbf{S}(x, y, z, t)$ как функцию координат и времени.

O2-12.52

Мощный СВЧ-генератор через волновод питает нагрузку, посылая в волновод мощность $N_0 = 100$ кВт. Часть этой мощности поглощается в нагрузке ($N_{\text{н}} = 75$ кВт), а часть отражается. В результате в волноводе возникает суперпозиция прямой и отраженной волн, распространяющихся во встречных направлениях. Найти коэффициент стоячей волны в волноводе, т. е. отношение максимальной напряженности поля (в пучности) к минимальной (в узле).

O2-12.53

В прямоугольном объемном резонаторе СВЧ-диапазона со сторонами $a < b < l$ возбуждают низшую моду колебаний. После накопления в резонаторе плазмы, образующейся в результате ионизации оставшегося после откачки воздуха, частота этой моды колебаний удваивается. По этим данным определить концентрацию электронов плазмы.

O2-12.54

Через волновод прямоугольного сечения со сторонами $a < b$ распространяется волна низшего типа (т. е. H_{01}), возбуждаемая генератором микроволнового излучения с частотой ω_0. Вследствие ионизации воздуха, оставшегося в волноводе после его вакуумирования, в нем образуется плазма, в результате чего длина волны в волноводе удваивается. Из этих условий определить концентрацию электронов в образовавшейся плазме.

Solution

(???)

12.54: $n_e = \frac{3m_e}{16\pi e^2}\left(\omega_0^2 - \frac{\pi^2 c^2}{b^2}\right)$.

Решение. Направим ось z прямоугольного волновода по направлению распространения электромагнитной волны. Запишем дисперсионное соотношение для волновода

$$\frac{\varepsilon\omega^2}{c^2} = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \frac{\pi^2}{a^2}m^2 + \frac{\pi^2}{b^2}n^2 + k_z^2$$

где $k_z = k = \frac{2\pi}{\lambda}$. Низшая волна, т. е. волна, имеющая наименьшую возможную частоту для данного волновода, при $a < b$ сразу определяет значения целых чисел m и n. Для $\omega = \omega_{\min}$ необходимо потребовать, чтобы $m = 0$, и $n = 1$.

Тогда в случае 1, когда плазмы еще нет и $\varepsilon = 1$, и частота $\omega = \omega_0$, наше дисперсионное соотношение принимает вид

$$\frac{\varepsilon\omega^2}{c^2} = \frac{\omega_0^2}{c^2} = \frac{\pi^2}{b^2} + k_1^2$$

Однако, когда в волноводе появилась плазма, то диэлектрическая проницаемость ε уменьшилась

$$\varepsilon = 1 - \frac{\omega_{\text{p}}^2}{\omega^2}$$

где $\omega_{\text{p}}^2 = \frac{4\pi n_e e^2}{m_e}$ - плазменная частота. При этом по условию задачи длина волны удвоилась $\lambda_2 = 2\lambda_1$, но тогда $k_2 = k_1/2$. Дисперсионное соотношение в случае 2

$$\frac{\varepsilon\omega_0^2}{c^2} = \frac{\omega_0^2}{c^2} - \frac{\omega_{\text{p}}^2}{c^2} = \frac{\pi^2}{b^2} + k_2^2$$

Заметим, что ω_0 - частота генератора и она не меняется. Из дисперсионного соотношения в случае 1 получим

$$k_1^2 = \frac{\omega_0^2}{c^2} - \frac{\pi^2}{b^2}$$

Подстановкой k_1^2 в дисперсионное соотношение в случае 2 найдем

$$\frac{\omega_0^2}{c^2} - \frac{\omega_\text{p}^2}{c^2} = \frac{\pi^2}{b^2} + \frac{\omega_0^2}{4c^2} - \frac{\pi^2}{4b^2},$$

откуда получаем необходимое выражение для плазменной частоты

$$\omega_\text{p}^2 = \frac{3}{4}\left(\omega_0^2 - \frac{\pi^2 c^2}{b^2}\right)$$

С другой стороны, $\omega_\text{p}^2 = 4\pi n_e e^2/m_e$ Приравнивая оба выражения, найдем искомую концентрацию электронов образовавшейся плазмы.

O2-12.55

Плоский конденсатор заполнен плазмой со средней концентрацией электронов и ионов n_0 и температурой T. Расстояние между пластинами конденсатора a, разность потенциалов V. Пренебрегая током через плазму и считая $eV \ll kT$, определить пространственную зависимость потенциала в плазме между пластинами конденсатора.

O2-12.56

Через конденсатор колебательного контура с резонансной частотой $\omega_0 = 10^7 \text{с}^{-1}$ параллельно пластинам пропускается электронный пучок, полностью заполняющий пространство между ними (ток $\mathscr{I} = 1$ мА, энергия $W = 1$ кэВ, сечение пучка $S = 100$ см^2). Во сколько раз изменится резонансная частота?

O2-12.57

По длинному плазменному цилиндру диаметром $2R = 10$ см течет ток $\mathfrak{g} = 10^5$ А, сосредоточенный в поверхностном слое. Давление в плазме $P = 10^5$Н/м^2. Определить давление P_0 на боковую поверхность плазменного цилиндра, возникающее под действием тока. Сжимается плазма или расширяется? Найти величину тока, необходимую для того, чтобы радиальные силы уравновесились.

Solution

(???)

12.57* $T(0) = \frac{J^2}{c^2 \pi R^2 nk} \approx 1,47 \cdot 10^7$ К, где k - постоянная Больцмана.

Р ешение. Плотность силы магнитного давления $\mathbf{f}(r) = \frac{1}{c}[\text{jB}]$ [дин/см ^{3}] действует по радиусу к центру плазменного шнура на объем dV, представляющий собой тонкое кольцо толщиной dr, высотой $l(dV = 2\pi r dr l)$. Магнитное поле на расстоянии r от оси шнура по теореме о циркуляции

$$B(r) = \frac{2\pi}{c} jr$$

Магнитное давление, оказываемое на стенки этого элементарного объема,

$$dp = -f dr = -\frac{2\pi}{c^2} j^2 r dr$$

Интегрированием найдем распределение магнитного давления внутри плазменного шнура

$$\int\limits_{P(R)}^{P(r)} dp = -\frac{2\pi}{c^2} j^2 \int\limits_R^r r dr = \frac{\pi R^2}{c^2} j^2 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$

$$P(r) = P(R) + \frac{g^2}{c^2 \pi R^2}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$$

283

Магнитное давление, направленное к центру шнура уравновешивается газокинетическим давлением плазмы $P(r) = nkT(r)$. При этом мы воспользовались моделью идеального газа (плазма в целом электрически нейтральна, и нам требуется всего лишь оценить температуру на оси):

$$T(r) = \frac{P(R)}{nk} + \frac{g^2}{c^2 \pi R^2}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)\frac{1}{nk}$$

Первый член в этой формуле - температура на периферии шнура $T(R)$. Считаем ее малой по сравнению с температурой на оси $T(0)$:

$$T(0) = \frac{^2}{c^2\pi R^2 nk} \approx 1,47 \cdot 10^7 \text{ K}$$

O2-12.59

Плазменный шнур удерживается с помощью магнитного поля, параллельного оси шнура, вследствие того, что поле не проникает внутрь плазмы. Оценить величину магнитного поля, необходимую для удержания плазмы, если концентрация частиц плазмы $n = 10^{16}$ см$^{-3}$, а ее температура $T = 10^8$ К

O2-12.60

В цилиндрическом пропорциональном счетчике пучок частиц вызывает объемную ионизацию. Оценить время собирания ионов в таком счетчике, наполненном аргоном при нормальном давлении. Радиус катода $R = 1$ см, радиус анода $r = 2 \cdot 10^{-2}$ см, разность потенциалов между анодом и катодом $V = 2500$ В, подвижность положительных ионов аргона $\mu^+ = 1,4$ см^2/(В $\cdot$ с).

O2-12.61

Мощный источник тока создает в тонкой цилиндрической плазменной оболочке ток $\mathscr{J} = 5 \cdot 10^6$ А, параллельный оси и равномерно распределенный по азимуту (рис. 262). Внутри оболочки предварительно создано продольное магнитное поле $B_0 = 1$к гс. Начальный радиус цилиндра $R_0 = 2$ см. В дальнейшем под действием тока

O2-12.62

Вдоль цилиндрического электронейтрального плазменного шнура (Z-пинч) течет ток $\mathscr{J}$. Считая, что условие механического равновесия плазмы определяется балансом сил Ампера и газокинетического давления, определить температуру вблизи оси плазменного шнура, полагая температуру на поверхности пренебрежимо малой (рис. 263). Плотность тока и концентрация частиц в плазме однородны по сечению, число частиц на единицу длины равно $N\left[\text{ см}^{-1}\right]$.

§ 12. Уравнения Максвелла. Электромагнитные волны. Волноводы и резонаторы. Плазма

12.30

$\mathbf{S} = \frac{\pi r^2 j^3}{nec^2}\mathbf{e}_z$, где $\mathbf{e}_z$ - единичный вектор в направлении тока.

12.31

Вне плоского слоя $S_{\text{ex}} = 4\pi(nea)^2\sqrt{\frac{2W}{m}}$; внутри плоского слоя на расстоянии x от центрального сечения $S_{\text{in}} = 4\pi(ne)^2\sqrt{\frac{2W}{m}}x^2$.

12.32

*: $S(r,t) = \frac{V_0^2 r}{2\pi a^2 dR}e^{-2t/\tau}$; $W = \frac{C_0 V_0^2}{2}$.

Решение. Емкость конденсатора $C_0 = \frac{\varepsilon S}{4\pi d}$, где $S = \pi a^2$. Конденсатор разряжается через сопротивление R, при этом напряжение на нем меняется

по закону $V(t) = V_0 e^{-t/\tau}$, где $\tau = RC_0$. Электрическое поле внутри конденсатора $E = \frac{V}{d}$. Плотность тока смещения, пронизывающего конденсатор, равна $j_{\text{см}} = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial D}{\partial t} = -\frac{V_0}{\pi a^2 R}e^{-t/\tau}$. Ток смещения замыкает собой объемный ток разряда конденсатора. Найдем поле H внутри конденсатора по теореме о циркуляции

$$H \cdot 2\pi r = \frac{4\pi}{c} j_{\text{СМ}} \cdot \pi r^2,$$

откуда $H = \frac{2\pi}{c} j_{\text{см}} r = \frac{2V_0 r}{ca^2 R}e^{-t/\tau}$.

Легко понять, что вектор Пойнтинга $\mathbf{S}$ направлен наружу конденсатора по радиусу. Поскольку $\mathbf{E} \perp \mathbf{H}$, то

$$S(r,t) = \frac{c}{4\pi}EH = \frac{V_0^2 r}{2\pi a^2 dR}e^{-2t/\tau}$$

При $r = a \quad S = \frac{V_0^2}{2\pi adR}e^{-2t/\tau}\left[/\left(\text{c}\cdot\text{cm}^2\right)\right]$.
Физический смысл вектора Пойнтинга - это плотность потока электромагнитной энергии, направленного к месту его поглощения. В данном случае - к резистору.

Рассчитаем полную электромагнитную энергию W, вытекшую через боковую поверхность конденсатора за все время разряда:

$$W = \int_0^\infty S\cdot 2\pi addt = \int_0^\infty \frac{V_0^2}{R}e^{-2t/RC_0}dt = \frac{C_0V_0^2}{2}.$$

Этот результат можно было предсказать и без вычислений - это начальная энергия заряженного конденсатора.

12.33

$S = \frac{\mathscr{E}^2 r}{8\pi}\frac{\dot{d}}{d^3}; \quad W(r,t) = \int_0^t Sd\cdot 2\pi rdt = \frac{\mathscr{E}^2r^2}{4}\left(\frac{1}{d_0} - \frac{1}{d(t)}\right)$.

12.34

$\mathbf{S} = -\frac{4\pi}{nec^2}j^2y^2\mathbf{j}$, где y - расстояние от центрального сечения до точки наблюдения. Вектор $\mathbf{S}$ антипараллелен вектору плотности тока $\mathbf{j}$.

12.35

$n_i = n_e\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right); \quad S = \pi\left(n_e er\right)^2\frac{v^3}{c^2}$.

12.36

$S = \frac{L}{2c^2V}r\alpha^2 t; \quad \Phi_S = \frac{4\pi}{3c^2}R^3\frac{L}{V}\alpha^2$.

12.37

$S = \frac{A^2r}{8\pi d^2}t$. Вектор S направлен по радиусу к оси конденсатора.

$$\Phi_S = \frac{R^2L}{4d^2}A^2$$

12.38

Вектор Пойнтинга $\mathbf{S}$ направлен к оси кабеля $S = \frac{}{\pi c^2 r}\frac{d\mathscr{I}}{\partial t}\ln\left(R_0/r\right)$. Считая известной погонную индуктивность кабеля
$L = 2\ln\left(R_0/r_0\right)$, электромагнитная энергия, перенесенная за время затухания на единицу длины кабеля

$$W\left(r_0\right) = \frac{\mathscr{O}_0^2}{c^2}\ln\frac{R_0}{r_0} = \frac{L\mathscr{O}_0^2}{2c^2}(\text{C})$$

12.39

Так как $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ одновременно меняют свое направление, то вектор $\mathbf{S}$ не изменяет направления.

12.40

Так как моменты изменения направлений векторов **E** и **H** на обратные сдвинуты между собой на четверть периода, то вектор **S** каждые четверть периода меняет свое направление на обратное. Действительно, в этом случае

$$\int_0^T \frac{EH}{4\pi}dt = \int_0^T \frac{1}{4\pi}E_0 \sin\omega t H_0 \cos\omega t dt = 0.$$

Энергия колеблется в отдельных участках провода, но не течет в одном направлении (стоячие волны).

12.41

* Энергия минимальна при $\frac{r_2}{r_1} = e = 2,718\ldots$

Решение. После срабатывания ключей в линии будет содержаться определенный запас энергии, равный (в СГСЭ)

$$W = \frac{L\mathscr{J}^2}{2c^2} + \frac{CU^2}{2}$$

где

$$U = R, \quad R = 60 \text{ Ом } = \frac{2}{c} \text{ ед. СГСЭ}.$$

Поскольку все омические сопротивления линии пренебрежимо малы, то весь этот запас энергии перейдет в излучение.

Величины индуктивности L и емкости C линии определяются известными соотношениями

$$L = 2l\ln(r_2/r_1), \quad C = \frac{l}{2\ln(r_2/r_1)}$$

Таким образом, запас энергии

$$W = \frac{^2l}{c^2}\ln(r_2/r_1) + \frac{^2R^2l}{4\ln(r_2/r_1)} = \frac{^2l}{c^2}\left[\ln(r_2/r_1) + \frac{1}{\ln(r_2/r_1)}\right],$$

так что $W \propto \left(x + \frac{1}{x}\right)$, где $x = \ln(r_2/r_1)$. Это выражение минимально при $x = 1$, откуда следует ответ.

12.42

$V(x,t) = V_0\frac{\cos(kx+\delta)\cos\omega t}{\cos\left[\left(m+\frac{1}{2}\right)\pi - kl\right]}$; $\quad A = \frac{V_0}{\cos\left[\left(m+\frac{1}{2}\right)\pi - kl\right]}$,

где

$k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$ - волновое число, δ определяется из условия $kl + \delta = \left(m + \frac{1}{2}\right)\pi$ при $m = 0, 1, 2, \ldots$ (узел напряжения на конце линии).

12.43

:

$$v_{\min} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}4l} = 3,75\text{МГ}; \quad Q = 400.$$

Решение. Средняя энергия электрического поля за период T, очевидно, равна половине $W_{\max}$:

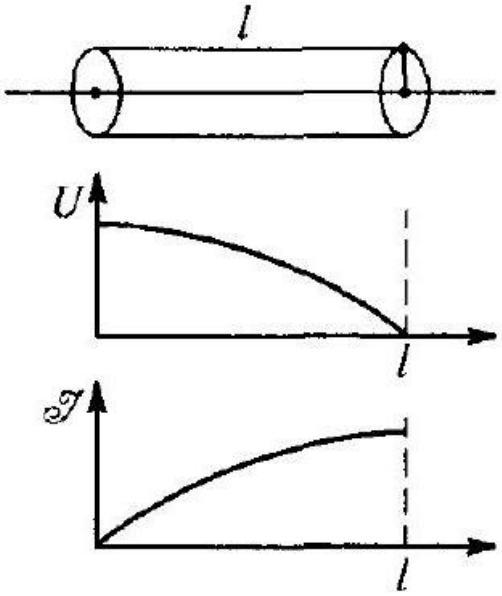
$$W_E = \frac{1}{T}\int_0^T dt \iint_V \frac{\varepsilon E^2}{8\pi}dV = \frac{1}{2}W_{\max}$$

потери энергии за период

$$W_{\text{пот}} = \int_0^T dt \iint_V \lambda E^2 dV$$

Добротность системы

$$Q = 2\pi\frac{W_{\max}}{W_{\text{rox}}} = \frac{\varepsilon}{2T\lambda}$$



На рис. 419 показано распределение напряжения и тока по длине кабеля в случае наименьшей частоты (наибольшей длины волны). На отрезке кабеля длиной l установится четверть длины волны. Поэтому $v_{\min} = \frac{c}{4l\sqrt{\varepsilon}} = 3,75$ МГц, откуда $T = \frac{1}{v_{\min}}$ и $Q = \frac{\varepsilon}{2T\lambda} = 400$.

12.44

: $Q \approx \frac{c\sqrt{\varepsilon}}{4\lambda b} = 5 \cdot 10^6$;

$$\nu_{\min} = \frac{c\sqrt{1+\frac{b^2}{l^2}}}{2b\sqrt{\varepsilon}} \approx \frac{c}{2b\sqrt{\varepsilon}} = 5\text{ГГ}.$$

Решение. Средняя энергия электрического поля за период T равна половине $W_{\max}$:

$$W_E = \frac{1}{T}\int_0^T dt \iint_V \int_{\frac{\varepsilon E^2}{8\pi}}^{8\pi} dV = \frac{1}{2}W_{\max}$$

Потери энергии за период

$$W_{\text{пот}} = \int_0^T dt \iiint_V \lambda E^2 dV$$

Добротность резонатора $Q = 2\pi\frac{W_{\max}}{W_{\text{пот}}} = \frac{\varepsilon}{2T\lambda}$. Для резонатора справедливо

$$\omega = \frac{kc}{\sqrt{\varepsilon}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}\sqrt{k_x^2+k_y^2+k_z^2},$$

где $k_x = \frac{n_1\pi}{a}; k_y = \frac{n_2\pi}{b}; k_z = \frac{n_3\pi}{l}$. Частота наименьшая, когда одно из целых чисел $n_i (i = 1,2,3)$ равно нулю, а остальные - единице. Исходя из размеров резонатора, очевидно, необходимо, чтобы $n_1 = 0$, а $n_2 = n_3 = 1$. Тогда $k_x = 0; k_y = \frac{\pi}{b}; k_z = \frac{\pi}{l}$.

$$\omega_{\min} = \frac{\pi c}{\sqrt{\varepsilon}}\sqrt{\frac{1}{b^2}+\frac{1}{l^2}} = \frac{\pi c}{b\sqrt{\varepsilon}}\sqrt{1+\left(\frac{b}{l}\right)^2};$$

$$\nu_{\min} = \frac{\omega_{\min}}{2\pi} = \frac{c}{2b\sqrt{\varepsilon}}\sqrt{1+\left(\frac{b}{l}\right)^2} \approx \frac{c}{2b\sqrt{\varepsilon}} = 5\text{ ГГц}.$$

Далее можно подсчитать и добротность $Q = \frac{\varepsilon}{2T\lambda} = \frac{\varepsilon\nu_{\min}}{2\lambda} \approx \frac{\sqrt{\varepsilon}c}{4b\lambda} \approx 5 \cdot 10^6$.

12.45

: $E_{\text{вых}}(t) = E_0 \cos(\omega_0 t - k_{0z} L) + \frac{E_0}{2} \cos[(\omega_0 + \Omega) t - k_{1z} L]$; $v \approx 39c$.

Решение. Минимальная частота для электромагнитной волны, бегущей вдоль по оси z прямоугольного волновода, определяется из условия $\omega_{\min} = \frac{\pi c}{a}$; $v_{\min} = \frac{\omega_{\min}}{2\pi} = \frac{c}{2a} = 3000$ МГц. Такая частота называется критической или граничной. Волна с меньшей частотой не жизнеспособна в данном волноводе (сечением $a \times a$).

Волновод возбуждается модулированным колебанием в спектре которого только три гармоники. Основная $v_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = 3001$ МГц и две «боковых» $\omega_0 - \Omega$ и $\omega_0 + \Omega$ (соответственно 2999 и 3003 МГц). Очевидно, что мода с частотой 2999 МГц $< v_{\min}$ не способна распространяться в данном волноводе. Таким образом, в спектре распространяющейся в волноводе волны присутствуют только две моды v_0 и v_1. Им соответствуют волновые числа

$$k_{0z} = \sqrt{\frac{\omega_0^2}{c^2} - \frac{\pi^2}{a^2}} \quad \text{и} \quad k_{1z} = \sqrt{\frac{(\omega_0 + \Omega)^2}{c^2} - \frac{\pi^2}{a^2}}.$$

Запишем закон изменения выходного электрического поля

$$E_{\text{ВХ}}(t) = E_0 \cos(\omega_0 t - k_{0z} L) + \frac{E_0}{2} \cos[(\omega_0 + \Omega) t - k_{1z} L]$$

Найдем фазовую скорость волны с частотой ω_0:

$$v = \frac{\omega_0}{k_{0z}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\pi c}{\omega_0 a}\right)^2}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_{\min}}{\omega_0}\right)^2}} \approx c\sqrt{1500} \approx 39c$$

12.46

$v_{\min} = 2$ МГц; $v = \frac{c}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_{\text{кр}}}{v_0 + v}\right)^2}} \approx 39c$; $\quad v_{\text{Кр}} = \frac{c}{2a} = 3000$ МГц.

12.47

$$\mathbf{S}(t, x, y, z) = -\frac{cE_0^2}{16\pi\sqrt{2}} \left[\mathbf{e}_x \sin\left(\frac{2\pi x}{a}\right) \sin^2\left(\frac{\pi y}{a}\right) + \mathbf{e}_y \sin^2\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{2\pi y}{a}\right)\right] \sin 2\omega t$$

где $\mathbf{e}_x$ и $\mathbf{e}_y$ - единичные векторы в направлении соответствующих осей.

Указание. В резонаторе основная мода электрического поля $\mathbf{E} = \mathbf{e}_z E_0 \sin\frac{\pi x}{a} \sin\frac{\pi y}{a} \cos\omega t$. Далее

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -c \operatorname{rot} \mathbf{E} = -c\frac{E_0 \pi}{a} \left[\mathbf{e}_x \sin\frac{\pi x}{a} \cos\frac{\pi y}{a} - \mathbf{e}_y \cos\frac{\pi x}{a} \sin\frac{\pi y}{a}\right] \cos\omega t$$

откуда следует выражение для поля $\mathbf{H}$. Основная мода в резонаторе имеет частоту $\omega = c\sqrt{\frac{\pi^2}{a^2} + \frac{\pi^2}{a^2}} = \frac{c\sqrt{2}\pi}{a}$.

12.48

$E_0^2 = \frac{16QN\lambda}{Vc}$; $\quad E_0 \approx 4,6$ ед. СГСЭ $= 1,4\kappa$В/см.

12.49

$N = \frac{E_0^2 hac}{16\sqrt{2}Q} = 0,4 \cdot 10^9$ ед. СГСЭ $= 40$ Вт. Предельная мощность определяется предельным электрическим полем.

12.50

$\mathbf{S}(t,x,y,z) =$

$$= \frac{c^2E_0^2}{4\pi\omega}\left[\mathbf{e}_y\frac{\pi}{4a}\sin\left(\frac{2\pi y}{a}\right)\sin 2(\omega t-kz)+\mathbf{e}_z k\sin^2\left(\frac{\pi y}{a}\right)\cos^2(\omega t-kz)\right]$$

где $\mathbf{e}_y$ и $\mathbf{e}_z$ - единичные векторы в направлении осей и $z, \omega = c\sqrt{k^2+\frac{\pi^2}{a^2}}$.
Возможна запись в виде бегущей волны

$$\mathbf{S} = \frac{c^2E_0^2}{4\pi\omega}\left[\mathbf{e}_y\frac{\pi}{2a}\sin\left(\frac{2\pi y}{a}\right)e^{-i\pi/2}+\mathbf{e}_z k\sin^2\left(\frac{\pi y}{a}\right)\right]e^{2i(\omega t-kz)}$$

12.51

$N_{\text{изл}} = N_0\left(1-r^2\right) = 89$ кВт, где $r^2 = \left(\frac{k-1}{k+1}\right)^2 = 1,9$ - коэффициент отражения по моцности.

12.52

$k = \frac{1+r}{1-r} = 3$. Здесь $r^2 = \frac{N_0-N_{\text{н}}}{N_0} = 0,25$ - коэффициент отражения по мощности, r - коэффициент отражения по амплитуде.

12.53

$n_e = \frac{3\pi m_e c^2}{4e^2}\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{l^2}\right)$.

12.54

*: $n_e = \frac{3m_e}{16\pi e^2}\left(\omega_0^2-\frac{\pi^2c^2}{b^2}\right)$.
Решение. Направим ось z прямоугольного волновода по направлению распространения электромагнитной волны. Запишем дисперсионное соотношение для волновода

$$\frac{\varepsilon\omega^2}{c^2} = k_x^2+k_y^2+k_z^2 = \frac{\pi^2}{a^2}m^2+\frac{\pi^2}{b^2}n^2+k_z^2$$

где $k_z = k = \frac{2\pi}{\lambda}$.
Низшая волна, т. е. волна, имеющая наименьшую возможную частоту для данного волновода, при $a<b$ сразу определяет значения целых чисел m и n. Для $\omega = \omega_{\min}$ необходимо потребовать, чтобы $m=0$, и $n=1$.
Тогда в случае 1 , когда плазмы еще нет и $\varepsilon = 1$, и частота $\omega = \omega_0$, наше дисперсионное соотношение принимает вид

$$\frac{\varepsilon\omega^2}{c^2} = \frac{\omega_0^2}{c^2} = \frac{\pi^2}{b^2}+k_1^2 \tag{1}$$

Однако, когда в волноводе появилась плазма, то диэлектрическая проницаемость & уменьшилась

$$\varepsilon = 1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2},$$

где $\omega_{\text{p}}^2 = \frac{4\pi n_e e^2}{m_e}$ - плазменная частота.
При этом по условию задачи длина волны удвоилась $\lambda_2 = 2\lambda_1$, но тогда $k_2 = k_1/2$. Дисперсионное соотношение в случае 2

$$\frac{\varepsilon\omega_0^2}{c^2} = \frac{\omega_0^2}{c^2}-\frac{\omega_{\text{p}}^2}{c^2} = \frac{\pi^2}{b^2}+k_2^2. \tag{2}$$

Заметим, что ω_0 - частота генератора и она не меняется. Из соотношения (1) получим

$$k_{\text{I}}^2 = \frac{\omega_0^2}{c^2} - \frac{\pi^2}{b^2}.$$

Подстановкой k_{I}^2 в (2) найдем

$$\frac{\omega_0^2}{c^2} - \frac{\omega_{\text{p}}^2}{c^2} = \frac{\pi^2}{b^2} + \frac{\omega_0^2}{4c^2} - \frac{\pi^2}{4b^2},$$

откуда получаем необходимое выражение для плазменной частоты

$$\omega_{\text{p}}^2 = \frac{3}{4}\left(\omega_0^2 - \frac{\pi^2 c^2}{b^2}\right).$$

С другой стороны, $\omega_{\text{p}}^2 = 4\pi n_e e^2/m_e$ Приравнивая оба выражения, найдем искомую концентрацию электронов образовавшейся плазмы.

12.55

$\varphi(x) = V\frac{\text{sh}(x/D)}{\text{sh}(a/D)}$, где $D = \sqrt{\frac{kT}{8\pi n_0 e^2}}$.

12.56

$\frac{\omega'}{\omega_0} = \sqrt{\frac{C_0}{C}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$; $\quad \omega' = \frac{\omega_0}{\sqrt{1+\alpha}} \approx 1,435\omega_0$, где $\alpha = \frac{4\pi \mathscr{A} e}{S\omega_0^2\sqrt{2mE}} \approx 1,06$.

Указание. Наличие электронного пучка приводит к изменению диэлектрической проницаемости среды в конденсаторе $\varepsilon(\omega') = 1 - \frac{4\pi n e^2}{m\omega'^2} = 1 - \alpha\frac{\omega_0^2}{\omega'^2}$.

12.58

1) $P_0 = \frac{^2}{2\pi c^2 R^2} = 6,37 \cdot 10^5$ дин $/\text{см}^2 = 6,37 \cdot 10^4 \text{Н}/\text{м}^2; P_0 < P$, поэтому плазменный цилиндр расширяется.
2) $P = P_0$ при $\mathcal{J} \approx 1,25 \cdot 10^5$ А.

12.57

* $T(0) = \frac{^2}{c^2\pi R^2 nk} \approx 1,47 \cdot 10^7$ К, где k - постоянная Больцмана.

Ре шен и е. Плотность силы магнитного давления $\mathbf{f}(r) = \frac{1}{c}[\mathbf{jB}]$ [[дн / см ^{3}] действует по радиусу к центру плазменного шнура на объем dV, представляющий собой тонкое кольцо толщиной dr, высотой $l(dV = 2\pi r dr l)$. Магнитное поле на расстоянии r от оси шнура по теореме о циркуляции

$$B(r) = \frac{2\pi}{c} jr.$$

Магнитное давление, оказываемое на стенки этого элементарного объема,

$$dp = -f dr = -\frac{2\pi}{c^2} j^2 r dr$$

Интегрированием найдем распределение магнитного давления внутри плазменного шнура

$$\int_{P(R)}^{P(r)} dp = -\frac{2\pi}{c^2} j^2 \int_R^r r dr = \frac{\pi R^2}{c^2} j^2 \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right);$$

$$P(r) = P(R) + \frac{^2}{c^2\pi R^2}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right).$$

Магнитное давление, направленное к центру шнура уравновешивается газокинетическим давлением плазмы $P(r) = nkT(r)$. При этом мы воспользовались моделью идеального газа (плазма в целом электрически нейтральна, и нам требуется всего лишь оценить температуру на оси):

$$T(r) = \frac{P(R)}{nk} + \frac{\mathscr{J}^2}{c^2\pi R^2}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)\frac{1}{nk}$$

Первый член в этой формуле - температура на периферии шнура $T(R)$. Считаем ее малой по сравнению с температурой на оси $T(0)$:

$$T(0) = \frac{\mathfrak{g}^2}{c^2\pi R^2 nk} \approx 1,47 \cdot 10^7 \text{ K}$$

12.59

$B = \sqrt{8\pi nkT} \approx 60\text{кГс}$.

12.60

$t = \frac{R^2}{2\mu V}\ln\frac{R}{r} \approx 5 \cdot 10^{-4}\text{с}$.

12.61

$R_x \approx \frac{B_0 R_0^2 c}{2\mathscr{G}} \approx 0,04\text{mM}$.

12.62

$T(0) \approx \frac{\mathscr{G}^2}{kc^2 N}$.

14.3 Practice in Theoretical Methods

(тут всякие задачи на максвелловскою ЭД, чисто про свойства теории)

14.3.1 Problems about properties of Maxwell's equations

(как теория поля, только более прикладное)

14.4 Questions for checking knowledge

14.4.1 Questions About Understanding the Laws of Electrodynamics

(????)

14.4.2 Questions on Understanding Typical Electrodynamics in Everyday Life and Applications

(см. ютуб https://www.youtube.com/@malkonsengineering/videos)

Как собрать схему АВР (Автоматический ввод резерва)? Как работает схема АВР? Для чего нужно АВР?

Как работает заземление? Для чего заземляют трансформатор?

Как работает зарядка для телефона?

14.4.3 Typical Knowledge Testing Tasks

(!?!?? выберу лучшие потом, штук 20!)

МФТИ-2022-с2.з2

В опытах Резерфорда золотая фольга бомбардировалась α-частицами $^2_4$He с кинетической энергией $W = 5$ МэВ. На какое минимальное расстояние может приблизиться α-частица к ядру золота $^{79}_{197}$ Au? (заряд электрона $e = 4,8 \cdot 10^{-10}$ ед. СГС; 1 эВ $= 1,6 \cdot 10^{-12}$ эрг).

Solution

Приравниваем кинетическую и потенциальную энергии, (??? почему там 4/197 еще?), получаем ответ: $r_{\min} = 2 \cdot 79 \cdot \frac{e^2}{W}\left(1 + \frac{4}{197}\right) = 4,6 \cdot 10^{-12}$ см.

МФТИ-2022-с2.з3

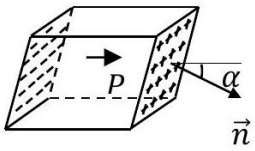
Напряжённость электрического поля Земли $E_0 = 130$ В/М, причём вектор $\vec{E}_0 \uparrow\uparrow \vec{g}$. Какой заряд приобретёт горизонтально расположенный короткозамкнутый плоский конденсатор с площадью пластин $S = 1$ м^2?

Solution

Ответ: $Q = 3,4$ ед. СГС.

МФТИ-2022-с3.з1

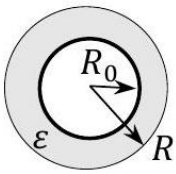
Найдите плотность поляризационных зарядов на торцах однородно поляризованного параллелепипеда.



Solution

МФТИ-2022-с3.з2

Проводящий шар радиуса R_0 несёт заряд q и окружён шаровым слоем диэлектрика с проницаемостью ε, вплотную прилегающим к поверхности шара. Внешний радиус равен R. Определить потенциал проводящего шара.



Solution

Ответ: $\varphi = \frac{q}{R}\left(1 + \frac{R - R_0}{\varepsilon R_0}\right)$.

МФТИ-2022-с4.1

Поверхностная плотность заряда на пластинах плоского конденсатора, заполненного твёрдым диэлектриком с проницаемостью ε, равна $\pm\sigma$. Определите объёмную плотность электрической энергии w в конденсаторе, а также силу f, действующую на единицу площади обкладок.

Solution

Ответ: $w = \frac{2\pi\sigma^2}{\varepsilon}$, $f = 2\pi\sigma^2$.

МФТИ-2022-с4.2 Проводящий конденсатор

Конденсатор ёмкостью $C = 20$ см заполнен однородной слабопроводящей средой, имеющей малую проводимость $\lambda = 10^{-6}$ $\text{Ом}^{-1} \cdot \text{см}^{-1}$ и диэлектрическую проницаемость $\varepsilon = 2$. Определить электрическое сопротивление между обкладками.

Solution

(забыл формулу, из интуитивных соображений получается $R = l/(\lambda\varepsilon)1$ кОм, переучивать нужно!)
Ответ: 8 кОм.

МФТИ-2022-с5.1 Обычный соленоид

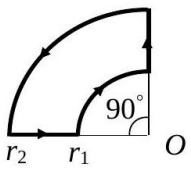
Определите индукцию магнитного поля в центре крайнего витка длинного соленоида с плотностью намотки n витков/см. По виткам соленоида протекает постоянный ток I.

Solution

(??? типичная задача из теории, забыл, нужно 1ю часть улучшать.)
Ответ: $B = \frac{2\pi n I}{c}$.

МФТИ-2022-с5.2

Проводящий контур, по которому течёт постоянный ток I, состоит из отрезков дуг и радиусов (см. рис.). Определите индукцию магнитного поля в точке O.



Solution

По закону Био-Савара сразу получаем $B = \frac{\pi I}{2c}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$.

МФТИ-2022-с5.3 Проводящий конденсатор

Плоский конденсатор с обкладками в виде круглых дисков радиуса R заполнен немагнитной слабо проводящей средой. Через конденсатор протекает постоянный ток I. Найдите индукцию магнитного поля на расстоянии $r \leq R$ от оси конденсатора.

Solution

(!?? не знаю, нужно доучивать!)
Ответ: $B = \frac{2I}{c} \cdot \frac{r}{R^2}$.

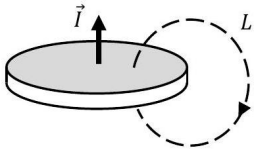
МФТИ-2022-с6.1

Постоянный магнит длиной L с однородной намагниченностью I согнут в кольцо так, что между полюсами остался маленький зазор $\ell \ll L$. Определите магнитную индукцию в зазоре.

Ответ: $B = 4\pi I \frac{L}{L+\ell} \approx 4\pi I$.

МФТИ-2022-с6.2

06.2. (2017-1А) Постоянный магнит изготовлен из однородно намагниченного материала и имеет форму тонкого диска толщиной d и площадью S.



Вектор намагниченности $\vec{I}$ направлен по нормали к плоскости диска. Найти циркуляцию векторов индукции и напряжённости магнитного поля $\vec{B}$ и $\vec{H}$ по контуру L, показанному на рисунке штриховой линией.

МФТИ-2022-с7.1

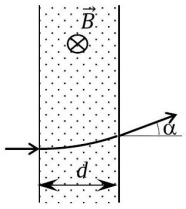
Определить давление магнитного поля на стенки длинного соленоида кругового сечения, в котором создано магнитное поле $B = 10$ Тл. Какова при этом должна быть поверхностная плотность тока i?

Ответ: $P \approx 400$ атм, $i = 80$ кА / см.

МФТИ-2022-с8.1

Протон влетает в область поперечного магнитного поля $B = 5$ Тл со скоростью $v = 2,4 \cdot 10^{10}$ cm/c. Толщина области, занятой полем, $d = 50$ см (см. рис.). Найти угол отклонения протона α от первоначального направления движения. Излучением пренебречь.

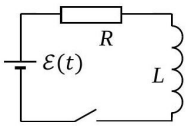
Ответ: $\alpha \approx \arcsin \frac{3}{5} \approx 37°$.



МФТИ-2022-с10.1

Найти зависимость тока в цепи $I(t)$ от времени в схеме на рис., если после замыкания ключа в момент $t = 0$ напряжение источника меняется по закону $\mathcal{E}(t) = At$. Рассмотреть случай $t \ll L/R$.

Ответ: $I(t) \approx \frac{At^2}{2L}$.



МФТИ-2022-с11

011.1. К последовательно соединенным резистору с сопротивлением $R = 3,2$ кОм и конденсатору ёмкостью $C = 1$ мкФ приложено сетевое напряжение с частотой $f = 50$ Гц. Найдите сдвиг фаз $\Delta\varphi$ между напряжением в сети и напряжением на резисторе.

Ответ: $\Delta\varphi \approx -45°$.

011.2. Некоторый двухполюсник, имеющий импеданс $Z = 3 + i\sqrt{3}$ [Ом], подключён к идеальному источнику переменной ЭДС с амплитудой $\varepsilon_0 = 2$ В. Найдите среднюю мощность, потребляемую двухполюсником.

Ответ: $P = 0,5$ Вт.

МФТИ-2022-с12

012.1. Найдите спектр модулированного по амплитуде сигнала вида $g(t) = f(t) \cdot \cos\omega_0 t$, если спектр сигнала $f(t)$ равен $F(\omega)$.

Ответ: $G(\omega) = \frac{1}{2}\left(F\left(\omega + \omega_0\right) + F\left(\omega - \omega_0\right)\right)$.

МФТИ-2022-с13

013.1. Напряжение в плоском конденсаторе меняется по гармоническому закону $U = U_0 \sin\omega t$. Пластины имеют форму дисков радиуса R, расстояние между которыми $h \ll R$, между пластин - среда с проницаемостью ε. Пренебрегая краевыми искажениями поля, найдите магнитное поле на краю конденсатора (на расстоянии R от оси). Частоту считать малой: $\omega \ll c/R$.

Ответ: $B = \frac{\omega R}{2c} \cdot \frac{\varepsilon U_0}{h} \cos\omega t$.

МФТИ-2022-с13

013.2. Используя выражение для вектора Пойнтинга S, в условиях предыдущей задачи найдите полный поток электромагнитной энергии из конденсатора и сравните его с выражением для скорости изменения энергии, запасённой в конденсаторе dW/dt.

Ответ: $S \cdot 2\pi Rh = \frac{dW}{dt} = \frac{\varepsilon\pi R^2}{h} \sin 2\omega t$.

МФТИ-2022-с14

014.1. Плоская электромагнитная волна бежит в однородной среде в направлении оси z и имеет компоненты поля $E_x(z,t)$ и $B_y(z,t)$. Фазовая скорость волны равна v. Показать, что в любой момент времени $E_x = \frac{v}{c} B_y$.

МФТИ-2022-с14

014.2. При какой длине кабеля его нельзя при расчётах заменить эквивалентным точечным сопротивлением, если частота в цепи $v = 50$ Гц?

Ответ: $\ell \gtrsim 6 \cdot 10^3$ км.

МФТИ-2022-с14

14.3. Найти минимальную частоту электромагнитных колебаний в объёмном прямоугольном резонаторе со сторонами $1 \times 2 \times 3$ см, выполненном из идеального проводника.

Ответ: 9 ГГц.

МФТИ-2022-с15

015.1. Температура электронов в плазме тлеющего разряда $T_e \sim 10^4$ К, концентрация $n_e \sim 10^9$ см$^{-3}$. При каком радиусе трубки разряд можно считать квазинейтральным?

Ответ: $r \gg 0,2$ мм.

МФТИ-2022-с15.2

В условиях предыдущей задачи оцените кулоновскую энергию взаимодействия заряженных частиц в плазме (в расчёте на одну частицу). Можно ли считать такую плазму идеальным газом?

Ответ: $w_{\text{кул}} \sim 10^{-4}$ В; да, можно.

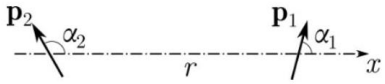
МФТИ-2022-с15.3

Радиосигнал с частотой $v = 4$ МГц посылается вертикально вверх и отражается от ионосферы на некоторой высоте. Определить концентрацию электронов в точке отражения.

Ответ: $n_e = 2 \cdot 10^5$ см$^{-3}$.

МФТИ-2022-Т1

Молекула воды обладает постоянным электрическим дипольным моментом $p = 1,84$ Д. (1 Д $\equiv 10^{-18}$ ед. СГС - «дебай», внесистемная единица дипольного момента). Две молекулы воды находятся на расстоянии $r = 35$ Åдруг от друга так, что векторы их дипольных моментов $\mathbf{p}_1$ и $\mathbf{p}_2$ лежат в одной плоскости под углами α_1 и α_2 к линии, соединяющей их центры (ось x, см. рис.).

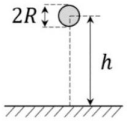


Для произвольных α_1 и α_2 определите проекцию F_x силы их взаимодействия и моменты сил, действующие на молекулы (относительно их центров). Для случаев а) $\alpha_1 = \pi/2, \alpha_2 = \pm\pi/2$ и б) $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = \pm\pi/2$ рассчитайте величину и направление вектора силы $\mathbf{F}$. Оцените также максимальную величину ускорения этих молекул.

Ответ: а) $|F_x| \sim 7 \cdot 10^{-15}$Н, $F_y = 0$, б) $F_x = 0, |F_y| \sim 7 \cdot 10^{-15}$Н; $a_{\max} \sim 2,3 \cdot 10^{10}$ g.

МФТИ-2022Т2.(2019-1Б)

Напряжённость поля на поверхности земли под одиночным заряженным бесконечным проводом радиуса $R = 1$ cm, расположенным параллельно поверхности, равна $E_0 = 750$ В/М. Расстояние от поверхности до оси провода $h = 4$ м. Определите потенциал провода, считая потенциал поверхности земли

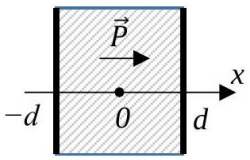


равным нулю.

Ответ: $\varphi = \frac{hE_0}{2} \ln \frac{2h}{R} \approx 10$ кВ.

МФТИ-2022.Т3.(2015-1А)

Плоскопараллельная пластина изготовлена из диэлектрика с «замороженной» поляризацией, направленной вдоль оси x, перпендикулярной поверхностям пластины. Пластина поляризована неоднородно: $\vec{P}(x) = \vec{P}_0 \cdot \left(1 + x^2/d^2\right)$, где $2d$ - толщина пластины (начало отсчёта - в центре пластины). Определите разность потенциалов U между поверхностями пластины. Краевыми эффектами пренебречь.



Ответ: $U = \frac{32}{3}\pi P_0 d$.

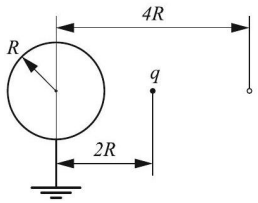
Т4.

На обкладках плоского конденсатора размещены заряды q и $-q$. Зазор между обкладками заполнен веществом, диэлектрическая проницаемость которого меняется по закону $\varepsilon = \frac{2}{1+x/h}$, где x - расстояние до положительной пластины, h - расстояние между пластинами. Найдите распределение объёмной плотности поляризационного заряда $\rho_{\text{пол}}$ в конденсаторе, а также его ёмкость C. Площадь каждой пластины S.

Ответ: $\rho_{\text{пол}} = +\frac{q}{2Sh} = \text{const}$, $C = \frac{S}{3\pi h}$.

Т5.(2018-1Б)

На расстоянии $2R$ от центра заземленного проводящего шара радиуса R находится точечный заряд q. Заряд перемещают на расстояние $4R$ от центра шара. Чему равна работа по перемещению точечного заряда q? Чему равно изменение энергии взаимодействия индуцированных зарядов между собой?



Solution

Ответ: $A = \frac{2q^2}{15R}, \Delta W_{\text{инд}} = -\frac{2q^2}{15R}$.

T6.(2019-3Б)

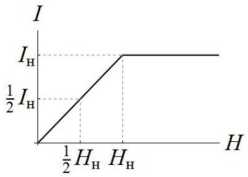
Постоянный ток силы I подводится по вертикальному кабелю к полусферическому небольшому заземлителю и равномерно растекается в однородном грунте. Пренебрегая проводимостью окружающего воздуха, определить напряженность магнитного поля в грунте в точке А, расположенной на расстоянии a от оси провода на глубине $h = a/\sqrt{3}$.

Solution

Ответ: $H = \frac{I}{ca}$.

T7.(2018-2A)

Сердечник тонкой тороидальной катушки изготовлен из магнетика, зависимость намагниченности $I(H)$ которого показана на рисунке.



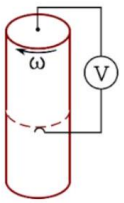
При некотором токе через катушку поле в сердечнике оказывается равным $\frac{1}{2}H_{\text{Н}}$. При увеличении тока в три раза магнитная индукция B в сердечнике увеличивается в 2,1 раза. Определите магнитную проницаемость магнетика μ на участке линейного роста зависимости $I(H)$.

Solution

Ответ: $\mu = 10$.

T8.(2020-4A)

Длинный однородный металлический цилиндр радиусом $r = 30$ см несёт на себе некоторый заряд, так что статическая напряжённость поля на его боковой поверхности равна $E_0 = 30$ кВ /см. Цилиндр подключили к идеальному вольтметру как показано на рис.: одним контактом к оси, а другим скользящим контактом - к боковой поверхности в середине цилиндра. Какую разность потенциалов $\Delta\varphi$ покажет вольтметр при вращении цилиндра вокруг оси с угловой скоростью $\omega = 10^3$рад/с? Центробежные эффекты не учитывать.

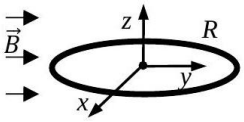


Solution

(!?!? не готов, нужно переучивать!)
Ответ: $\Delta\varphi = 0,45$ мкВ.

T9.(2016-2A)

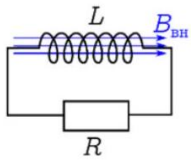
В однородном магнитном поле $\vec{B}$, направленном вдоль оси y, находится сверхпроводящее кольцо, лежащее в плоскости xy. Масса кольца M, коэффициент самоиндукции L, радиус R. Найти период малых колебаний кольца при вращении вокруг оси x. Начало координат совпадает с центром кольца.



Ответ: $T = \frac{\sqrt{2LM}}{RB}$.

T10.(2020-3А)

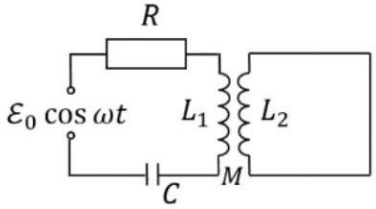
Переменное однородное внешнее магнитное поле $B_{\text{ВН}}(t) = B_0 \cos \omega t$ пронизывает катушку индуктивности вдоль её оси (см. рис.). Катушка имеет индуктивность L и замкнута на сопротивление $R = \omega L$. Найдите амплитуду и сдвиг фазы (относительно $B_{\text{вн}}$) установившихся колебаний суммарного магнитного поля внутри катушки.



Ответ: $|B| = 1/\sqrt{2}B_0, \varphi = -\pi/4$.

T11. (2019-4Б) Взаимная индукция катушек в простой схеме

Определите коэффициент взаимной индукции катушек M в схеме, изображённой на рисунке, если ток в колебательном контуре отстаёт от входного напряжения по фазе на $\pi/4$. Параметры цепи: $L_1 = 20$мГН, $L_2 = 5$мГН, $R = 5$ Ом, $C = 100$ мкФ, $\omega = 10^3$ рад /с.

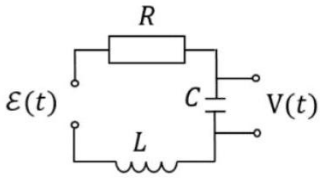


Solution

Ответ: $M = 5$ мГн.

T12.(2019-5А)

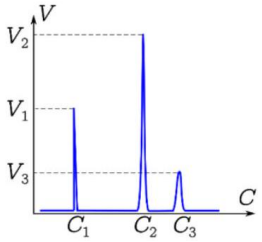
Вынужденные колебания напряжения на конденсаторе высокодобротного колебательного контура возбуждаются внешней ЭДС $\varepsilon(t) = \varepsilon_0(1 + m \cos \Omega t) \cos \omega_0 t$, где частота модуляции $\Omega = \omega_0/2, m < 1$. При резонансной частоте контура $\omega_{\text{р}} = \omega_0/2$ оказалось, что две гармоники из спектра колебаний напряжения на конденсаторе $V(t)$ имеют одинаковые амплитуды. Определите глубину модуляции m, если добротность контура $Q = 25$.



Ответ: $m = \frac{2}{3Q} = \frac{2}{75}$

T13.(2020-1Б)

Вынужденные колебания в высокодобротном RLC-контуре возбуждаются последовательно включённой внешней ЭДС $\mathcal{E} = \varepsilon_0 \cos(\omega_0 t + \varphi(t))$ с законом фазовой модуляции $\varphi(t) = m \cos \Omega t$, где $m = \frac{1}{9}$ и $\Omega = \frac{4}{5}\omega_0$. Зависимость амплитуды напряжения V на конденсаторе от его ёмкости C схематично показана на рисунке. Найдите отношения V_2/V_1 и V_1/V_3.



Ответ: $\frac{V_2}{V_1} = 10, \frac{V_1}{V_3} = 9$.

T14.(2016-6Б)

В вакууме распространяются две плоские электромагнитные волны одинаковой частоты и амплитуды: одна вдоль оси x, а другая - вдоль оси y. Вектор $\mathbf{E}$ обеих волн направлен по оси z. Найдите среднее по времени значение вектора плотности потока энергии $\langle \boldsymbol{S} \rangle$ во всех точках пространства. Укажите плоскости, вдоль которых средний поток энергии максимален.

Ответ: $\langle \vec{S} \rangle = \frac{c}{4\pi} E_0^2 \cos^2 \left[\frac{k}{2}(x-y) \right] (\vec{e}_x + \vec{e}_y)$,
$|\langle \vec{S} \rangle|_{\max} = \sqrt{2} \frac{c}{4\pi} E_0^2$ при $y = x + \lambda m$.

T15. (2018-4А)

В прямоугольном резонаторе с хорошо проводящими стенками размерами $a \times a \times b$, где $a > b$, две наименьшие резонансные частоты равны $v_1 = 10$ ГГ и $v_2 = 11$ Гц соответственно. Найдите следующую разрешенную частоту резонатора.

Ответ: $v_3 \approx 13$ ГГц.

14.4.4 Questions About Understanding Typical Details

(?????)

15 Extra problems just for practice basic methods

(there there is a place for extra not so important problems. or maybe I'll put them jut to a new note, maybe this would be better...)

15.0.1 Problems about Strange Capacitors

там что-то или вставляется и нужно найти потенциалы или еще что-то.

O2-3.55

Конденсатор, заполненный жидким диэлектриком с диэлектрической постоянной ε, зарядили, затратив на это энергию W_1. Затем конденсатор отсоединили от источника, слили из него диэлектрик и разрядили. Какая энергия W_2 выделилась при разрядке? Объяснить результат.

O2-3.56

Три проводящих шара с радиусами $R_1 = 10$ см, $R_2 = 20$ см и $R_3 = 30$ см и соответственно потенциалами $\varphi_1 = 450$ В, $\varphi_2 = 300$ В и $\varphi_3 = 150$ В в вакууме разведены далеко друг от друга. Какое количество тепла Q выделится после того, как их соединили тонкими проволочками? Емкостью проволочек пренебречь.

O2-3.61

Плоский воздушный конденсатор заряжен до разности потенциалов V и отсоединен от источника ЭДС. Площадь пластин S, расстояние между ними d. Пластины конденсатора расположены вертикально. Снизу подводят сосуд с жидким диэлектриком, имеющим диэлектрическую проницаемость ε, так что диэлектрик заполняет половину конденсатора. 1) Чему равна емкость конденсатора C? 2) Чему равна напряженность поля E в воздушной части промежутка между пластинами и в части, заполненной диэлектриком? 3) Как распределена поверхностная плотность σ электричества в пластине? 4) Определить уменьшение энергии конденсатора ΔW. На что она была израсходована? Считать, что граница жидкость-воздух плоская.

O2-3.62

Внутри плоского конденсатора с площадью пластин 200 см^2 и расстоянием между ними 0,1 см находится пластина из стекла ($\varepsilon = 5$), целиком заполняющая пространство между пластинами конденсатора. Как изменится энергия конденсатора, если удалить денсатор все время присоединен к батарее с ЭДС, равной 300 В; 2) конденсатор был первоначально присоединен к той же батарее, а затем отключен, и только после этого пластина была удалена. Найти механическую работу, которая затрачивается на удаление пластины в том и другом случае.

O2-3.63

Плоский конденсатор с квадратными пластинами (расстояние между пластинами d, площадь пластин S) заряжен до разности потенциалов V и отсоединен от источника напряжения. После этого в конденсатор вдвинута до половины широкая пластина диэлектрика с диэлектрической проницаемостью ϵ. Толщина пластины равна d. Найти силу, с которой пластина втягивается в конденсатор.

O2-3.65

Между пластинами плоского воздушного конденсатора введена диэлектрическая пластина толщиной l_2 с диэлектрической проницаемостью ε_2 (рис. 37). Конденсатор частично погружен в жидКость с диэлектрической проницаемостью ε_1 и плотностью р. Найти 26 высоту поднятия жидкости в конденсаторе h, пренебрегая капиллярными явлениями, если между его обкладками поддерживается разность потенциалов V. Суммарная толщина столбов жидкости в Конденсаторе равна l_1.

O2-3.66

Оценить, на сколько изменится емкость плоского конденсатора, пластины которого находятся на расстоянии $d = 1$ см друг от друга, если в него внести проводящий шарик радиусом $r = 0,2$ мм и расположить его в центре на одинаковых расстояниях от пластин.

O2-3.67

Конденсатор переменной емкости состоит из двух неподвижных металлических пластин, расположенных на расстоянии d друг от друга, и подвижной диэлектрической пластины, которая может поворачиваться и входить в зазор между металлическими пластинами (рис. 38).

Все пластины имеют форму полукруга радиусом R, причем зазоры между диэлектрической пластиной и пластинами конденсатора пренебрежимо малы по сравнению с d. Пренебрегая краевыми эффектами, найти момент M сил, действующих на диэлектрическую пластину, когда она выведена из положения равновесия. Конденсатор заряжен до разности потенциалов V, диэлектрическая проницаемость подвижной пластины равна ε.

O2-3.68

В предыдущей задаче величина момента сил M не зависит от угла поворота θ диэлектрической пластины. Но в положении равновесия, когда $\theta = 0$, момент сил должен обращаться в ноль. Объяснить это расхождение.

O2-3.69

Плоский конденсатор состоит из двух одинаковых квадратных пластин, расположенных в вакууме вертикально на расстоянии $d = 1$ мм друг от друга. Одна из пластин закреплена, а другая может двигаться без трения по гладким вертикальным направляющим. При какой разности потенциалов V между пластинами подвижная пластина не упадет вниз? Масса подвижной пластины $M = 1$ г, сторона квадрата $l = 10$ см.

O2-3.70

Две половины сферического конденсатора заполнены диэлектриками с проницаемостями ε_1 и ε_2 (рис. 39). Определить силу, действующую на внутреннюю сферу. Заряд конденсатора Q, радиус внутренней сферы R.

O2-3.71

Оценить силу, действующую на атом, находящийся на расстоянии $l = 200$Åот поверхности острия металлической иглы с радиусом закругления $R = 100$Å. Потенциал на игле $V = 10$ кВ. Поляризуемость атома α - величина порядка его объема.

3. SOLUTIONS Электрическое поле в веществе. Энергия электрического поля. Энергетический метод вычисления пондеромоторных сил

3.55

$W_2 = \varepsilon W_1$.

3.56

$Q = \frac{1}{2}\left(R_1\varphi_1^2 + R_2\varphi_2^2 + R_3\varphi_3^2\right) - \frac{1}{2}\left(R_1 + R_2 + R_3\right)\varphi^2 \approx 4,16$ эрг, где φ - установившийся потенциал системы после соединения всех шаров.

3.57

$x = \frac{d}{\frac{\varepsilon^2 S\delta^2}{8\pi dA} - \varepsilon}$.

3.58

$Q = \frac{C\mathscr{E}}{4}$; $\quad R > \frac{\Delta t}{C} \approx 10^8$ ед. СГСЭ.

3.59

$F = \frac{S}{8\pi}\left(\frac{V\varepsilon}{l_1\varepsilon + l_2}\right)^2$; при $l \to 0 F = \frac{SV^2\varepsilon^2}{8\pi l_2^2} = \frac{D^2}{8\pi}S = w_3 S$, где D - индукция, а w_3 - плотность энергии электрического поля.

3.60

Пробой диэлектрика наступит раньше.

3.61

1) $C = \frac{(1+\varepsilon)S}{8\pi d}$.2) $E = \frac{2V}{d(1+\varepsilon)}$; напряженность поля одинакова в воздухе и в жидкости. 3) В воздухе $\sigma = \frac{V}{2\pi d(1+\varepsilon)}$; в жидкости $\sigma' = \frac{\varepsilon V}{2\pi d(1+\varepsilon)}$. 4) $\Delta W = \frac{SV^2}{8\pi d}\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1}$. За счет энергии ΔW совершена работа при подъеме жидкости между пластинами конденсатора. Уровень жидкости между пластинами будет выше, чем в сосуде.

3.62

* Изменение энергии конденсатора: 1) $\Delta W_1 = \frac{(1-\varepsilon)CV^2}{2} \approx -318$ эрг; 2) $\Delta W_2 = \frac{(\varepsilon - 1)Q^2}{2C\varepsilon} \approx +1590$ эрг. Работа, совершаемая при удалении стеклянной пластины: $A_1 = +318$ эрг; $A_2 = +1590$ эрг.

Решение. В обоих случаях не только изменяется энергия конденсатора, но и затрачивается работа на удаление пластины. Эта работа во втором случае больше, так как по мере выдвигания пластины напряженность поля в конденсаторе увеличивается, в то время как в первом случае она остается неизменной. В первом случае при удалении пластины из конденсатора не только совершается механическая работа, но и уменьшается энергия конденсатора, и увеличивается энергия батареи. Работа, совершенная против ЭДС батареи, $A = \Delta QV$, где ΔQ - изменение заряда конденсатора после удаления пластины. Так как $\Delta Q = (\varepsilon - 1)CV$, то $A = (\varepsilon - 1)CV^2$ и при удалении пластины совершается механическая работа $A_1 = A + \Delta W_1 = (\varepsilon - 1)CV^2/2 = +318$ эрг. Во втором случае при удалении пластины совершается механическая работа, равная увеличению энергии конденсатора: $A_2 = \Delta W_2 = +1590$ эрг.

3.63

$F = \frac{\varepsilon - 1}{(\varepsilon + 1)^2}\frac{V^2\sqrt{S}}{2\pi d}$.

3.64

$h = \frac{V^2(\varepsilon-1)}{\pi\rho g\left(D_1^2-D_2^2\right)\ln(D_1/D_2)} \approx 5$ mm.

3.65

$h = \frac{\varepsilon_2^2(\varepsilon_1-1)V^2}{8\pi\rho g(\varepsilon_2 l_1+l_2)^2}$.

3.66

$\Delta C \approx \frac{r^3}{d^2} \approx 8\cdot 10^{-6}$ см. Эта оценка не учитывает «исчезновение» поля в объеме шарика. Всличина неучтенной энергии порядка механической работы по переносу шарика в заданную точку. Таким образом, $\Delta C \sim 10^{-5} - 10^{-6}$ cm.

3.67

$M = \frac{(\varepsilon-1)R^2V^2}{16\pi d}$. Момент сил M стремится втянуть диэлектрическую пластину внутрь конденсатора.

3.69

$V = \sqrt{\frac{8\pi Mgd}{l}} = 4,71$kB.

3.70

$F = \frac{\varepsilon_1-\varepsilon_2}{2(\varepsilon_1+\varepsilon_2)^2}\left(\frac{Q}{R}\right)^2$.

3.71

$F \approx \frac{2\alpha R^2V^2}{(l+R)^5} \approx 10^{-5}$ дин, если $\alpha \approx r^3$.

Вхождение палочки в цилиндр

(напишу компактнее в разы потом!)

Покоящаяся на бесконечности длинная палочка с равномерно распределенным на ней зарядом Q притягивается полым незаряженным диэлектрическим цилиндром такой же длины, расположенным осесимметрично с палочкой.

Найдите скорость палочки, когда она полностью втянется в цилиндр.

Внутренний радиус цилиндра R_1, внешний $-R_2$, причем $R_1, R_2 << L$, где L$-$ длина цилиндра и палочки. Диэлектрическая проницаемость вещества цилиндра ε, масса палочки m.

кинетическая энергия уменьшается за счет уменьшения поля.

в диэлектрике возникнет поляризация от того, что появится заряд.

плотность энергии до втягивания в СГС есть

$$w = \frac{E^2}{8\pi}$$

плотность энергии после втягивания в СГС есть

$$w = \frac{E^2}{8\pi\varepsilon}$$

Нужно найти эту напряженность, возле палочки.

воспользуемся теоремой гаусс вдоль цилиндра вокруг палочки:

$$E \cdot 2\pi r l = 4\pi \frac{Q}{L} l$$

тогда получаем величину поля:

$$E = \frac{2Q}{Lr}$$

Находим изменение энергии через интегрирование плотности энергии:

$$\Delta W = \int_{R_1}^{R_2} \left[\frac{\varepsilon}{8\pi} \left(\frac{2Q}{\varepsilon x L} \right) - \frac{1}{8\pi} \left(\frac{2Q}{xL} \right) \right] 2\pi x L dx$$

(мб это можно написать быстрее, не переводя D в E, но итак в целом понятно всё)
Заметим, что вне палочки поле какое было, такое и осталось.
по итогу получаем ответ в виде логарифма.
и дальше приравниваем эту энергию к кинетической энергии палочки.

O2-Потенциал заземленного конденсатора в точках, напротив заряда в нем

2.49 чисто на тренировку.

O2-Свойства конденсатора-полусферы

3.67 задротство какое-то

O2-Емкость конденсатора с внесенным шариком

3.66 показательная задача.

16 Problems from Batygin Toptygin

16.1 Vector and tensor calculus

16.1.1 a basics

(добавлю чуть теории еще из начала)
is called a diagonal matrix. A matrix whose elements satisfy the condition

$$\alpha_{ik}\alpha_{il} = \delta_{kl} \tag{1.a.11}$$

is called an orthogonal matrix.
The reciprocal (or inverse) matrix $\hat{\alpha}^{-1}$ is defined by

$$\hat{\alpha}\hat{\alpha}^{-1} = \hat{\alpha}^{-1}\hat{\alpha} = \hat{1} \tag{1.a.12}$$

and describes the reciprocal transformation, i.e. if $A'_i = \alpha_{ik}A_k$ then $A_k = \alpha^{-1}_{ki}A'_i$. Finally, the transposed matrix $\hat{\tilde{\alpha}}$ is obtained from $\hat{\alpha}$ by interchanging the columns and the rows, so that

$$\hat{\tilde{\alpha}} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{32} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{pmatrix}, \quad \tilde{\alpha}_{ik} = \alpha_{ki} \tag{1.a.13}$$

1.1 Find the cosine of the angle θ between two directions n and n' which are defined in a spherical system of coordinates by the angles ϑ, ϕ and ϑ', ϕ' respectively.
1.2 Prove the identities

$$([A \wedge B] \cdot [C \wedge D]) = (A \cdot C)(B \cdot D) - (A \cdot D)(B \cdot C)$$
$$[[A \wedge B] \wedge [C \wedge D]] = (A \cdot [B \wedge D])C - (A \cdot [B \wedge C])D$$
$$= (A \cdot [C \wedge D])B - (B \cdot [C \wedge D]A$$

1.3 A set of three quantities $a_i (i = 1, 2, 3)$ is given in all Cartesian systems of coordinates and it is known that $a_i b_i$ is invariant with respect to rotations and reflections. Show that if b_i is a vector (pseudovector) then a_i is also a vector (pseudovector).
1.4 Show that if $a_i = T_{ik} b_k$ in every system of coordinates, where T_{ik} is a tensor of rank 2 while b_k is a vector, then a_i is also a vector.
1.5 Show that $\partial a_i / \partial x_k$ is a tensor of rank 2.
1.6 Show that if T_{ik} is a tensor of rank 2 and P_{ik} is a pseudotensor of rank 2, then $T_{ik} P_{ik}$ is a pseudoscalar.
1.7 Show that the symmetry of a tensor is a property which is invariant with respect to rotations, i.e. a tensor which is symmetric (skew-symmetric) in a given coordinate system remains symmetric (skew-symmetric) in all other systems which are rotated with respect to the original system.
1.8 Show that if the tensor S_{ik} is symmetric while the tensor A_{ik} is skewsymmetric, then

$$A_{ik} S_{ik} = 0$$

1.9 Show that the sum of the diagonal components of a tensor of rank 2 is an invariant quantity.
1.10* In some cases it is convenient to use the cyclic components defined by

$$a_{\pm 1} = \mp \frac{(a_x \pm \mathrm{i} a_y)}{\sqrt{2}}, \quad a_0 = a_z$$

instead of the Cartesian components a_x, a_y, a_z of a vector. Express the scalar and vector products of two vectors in terms of their cyclic components. Find also the cyclic components of the position vector in terms of the spherical Legendre functions [(2)].
1.11* Find the components of the tensor ϵ_{ik}^{-1} which is reciprocal to ϵ_{ik}. Consider in particular the case where ϵ_{ik} is a symmetric tensor defined along the principal axes.
1.12 Suppose that in all coordinate systems the components of the vector $\boldsymbol{a}$ are linear functions of the components of another vector $\boldsymbol{b}$ so that $a_i = \epsilon_{ik} b_k$. Show that the quantity ϵ_{ik} is a tensor of rank 2. (More precisely, ϵ_{ik} is a tensor if $\boldsymbol{a}$ and $\boldsymbol{b}$ are both polar vectors or pseudovectors, whereas ϵ_{ik} is a pseudotensor if one of the vectors is polar and the other is axial.)
1.13 Show that the set of quantities $A_{ikl} B_{ik}$, where A_{ikl} is a tensor of rank 3 and B_{ik} is a tensor of rank 2, is a vector.
1.14 Find the transformation law for the set of volume integrals $T_{ik} = \int x_i x_k \, \mathrm{d}^3 r$, which describes space rotations and reflections (x_i and x_k are the Cartesian coordinates).
1.15 Set up the transformation matrices for the basic unit vectors which represent the transformation from Cartesian coordinates to spherical coordinates and vice versa, and also the transformation from Cartesian coordinates to cylindrical coordinates and vice versa.
1.16 Write down the transformation matrices for the components of a vector which describe (a) the reflection of the three coordinate axes or (b) the rotation of the Cartesian system of coordinates about the z-axis through an angle ϕ.
1.17 Find the transformation matrix for the components of a vector, which describes the rotation of the coordinate axes defined by the Euler angles θ, ϕ, ψ (figure 1.17.1), by multiplying together the matrices corresponding to rotations about the z-axis through angle ϕ, about the line ON through an angle θ, and about the z'-axis through an angle ψ.
1.18 Find the matrix $\hat{D}(\theta, \phi, \psi)$ for the transformation of the cyclic coordinates of a vector

(cf problem 1.10) when the coordinate system is rotated through the Euler angles θ, ϕ, and ψ (figure 1.17.1).
(2) Spherical functions are defined in appendix 2.

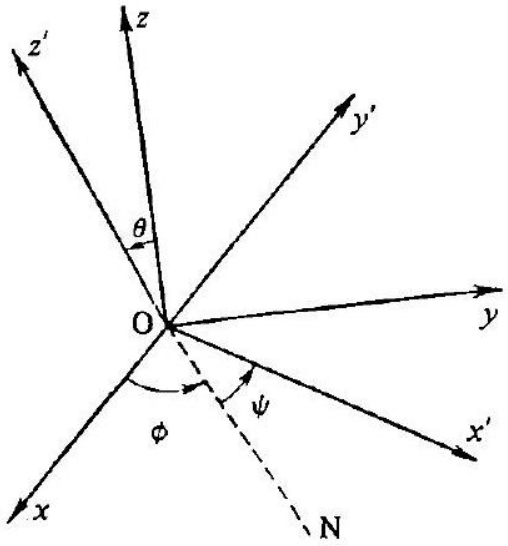


Figure 1.17.1.
1.19* Show that the matrix representing an infinitesimal rotation of a system of coordinates may be written in the form

$$\hat{\alpha} = \hat{1} + \hat{\epsilon}$$

where $\hat{\epsilon}$ is a skew-symmetric matrix ($\epsilon_{ik} = -\epsilon_{ki}$). Elucidate the geometrical meaning of ϵ_{ik}.
1.20 Show that if $\hat{\alpha}$ is an orthogonal transformation matrix then the corresponding transposed matrix represents the inverse transformation.
1.21 Show that the matrix representing the reflection or rotation of the three basic unit vectors of a coordinate system is identical to the matrix describing the transformation of the components of a vector.
1.22* Show that when an even number of coordinate axes are reflected or rotated, the transformation determinant is equal to +1, whereas the corresponding result for an odd number of coordinate axes is -1 . Transformations which have a determinant equal to +1 are called proper transformations and those with a determinant equal to -1 are called improper transformations.
1.23 Show that if the corresponding components of two vectors in one system of coordinates are respectively proportional to each other, then they are also proportional in any other system of coordinates (such vectors are said to be parallel).
1.24* A set of quantities e_{ikl} is given in all Cartesian systems of coordinates and has the following property: transposition of any two subscripts of e_{ikl} gives rise to a change of sign, and $e_{123} = 1$. Show that e_{ikl} is a pseudotensor of rank 3 (the completely antisymmetric unit tensor of rank 3).
1.25 Show that the components of a skew-symmetric tensor of rank 2 transform on rotation as the components of a vector.
1.26 Write down expressions for the components of the vector product of two vectors and for the curl of a vector in terms of the tensor e_{ikl}. Determine how these quantities transform on rotation or reflection.
1.27 Prove the following equations
(a) $e_{ikl}e_{lmn} = \delta_{im}\delta_{kn} - \delta_{in}\delta_{km}$;
(b) $e_{ikl}e_{klm} = 2\delta_{im}$
1.28 Rewrite the following expressions in an invariant vector form:

(a) $e_{\text{inl}}\, e_{irs}e_{imp}e_{stp}a_n a_r b_m c_t$
(b) $e_{\text{inl}}\, e_{krs}e_{lmp}e_{stp}a_r a'_n b_k b'_i c_t c'_m$
1.29 Show that

$$T_{ik}a_i b_k - T_{ik}a_k b_i = 2(\omega \cdot [a \wedge b])$$

where T_{ik} is an arbitrary tensor of rank 2, $\boldsymbol{a}$ and $\boldsymbol{b}$ are vectors, and ω is a vector equivalent to the skew-symmetric part of T_{ik}.

1.30 Express the product

$$(a \cdot [b \wedge c])\,(a' \cdot [b' \wedge c'])$$

in the form of a sum of terms containing only scalar products of vectors.
Hint. Use the theorem on the multiplication of determinants, or the pseudotensor e_{ikl} of rank 3 (cf problem 1.24).
1.31* Show that:
(a) the only vector whose components are identical in all systems of coordinates is the zero vector,
(b) any tensor of rank 2 whose components are identical in all systems of coordinates is proportional to δ_{ik},
(c) any rank 3 tensor whose components are identical in all systems of coordinates is proportional to e_{ikl}, and
(d) any rank 4 tensor whose components are identical in all systems of coordinates is proportional to $\delta_{ik}\delta_{lm} + \delta_{im}\delta_{kl} + \delta_{il}\delta_{km}$.
1.32* Suppose that n is a unit vector which is such that it is equally likely to lie along any direction in space. Find the average values of its components and of the products $\overline{n_i}, \overline{n_i n_k}, \overline{n_i n_k n_l}, \overline{n_i n_k n_l n_m}$ by using their transformation properties rather than by a direct evaluation of the corresponding integrals.
1.33 Find the averages over all directions of the following expressions:

$$\overline{(a \cdot n)^2}, \overline{(a \cdot n)(b \cdot n)}, \overline{(a \cdot n)n}, \overline{[a \wedge n]^2}, \overline{([a \wedge n] \cdot [b \wedge n])}$$
$$\overline{(a \cdot n)(b \cdot n)(c \cdot n)(d \cdot n)}$$

where $\boldsymbol{n}$ is a unit vector which is such that it is equally likely to lie along any direction and $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$, and $\boldsymbol{d}$ are constant vectors.

Hint. Use the results of the preceding problem.
1.34 Obtain all the possible independent invariant forms involving the polar vectors n, n', and the pseudovector l.
1.35 Find the independent pseudoscalars which can be constructed from (a) two polar vectors n, n' and one pseudovector l, and (b) three polar vectors n_1, n_2, n_3

16.1.2 b Vector analysis

In an arbitrary orthogonal system of coordinates q_1, q_2, q_3 the square of an element of length is given by

$$\mathrm{d}l^2 = h_1^2\, \mathrm{d}q_1^2 + h_2^2\, \mathrm{d}q_2^2 + h_3^2\, \mathrm{d}q_3^2 \tag{l.b.1}$$

and an element of volume is given by

$$\mathrm{d}V = h_1 h_2 h_3\, \mathrm{d}q_1\, \mathrm{d}q_2\, \mathrm{d}q_3 \tag{1.b.2}$$

where

$$h_i = \left[\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2\right]^{1/2} \tag{1.b.3}$$

are functions of the coordinates. The various differential operations may then be written down as follows:

$$\begin{aligned}
&(\operatorname{grad}\Phi)_i = \frac{1}{h_i}\frac{\partial\Phi}{\partial q_i}\\
&\operatorname{div} A = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(h_2h_3A_1) + \frac{\partial}{\partial q_2}(h_1h_3A_2) + \frac{\partial}{\partial q_3}(h_1h_2A_3)\right]\\
&\operatorname{curl} A = \begin{vmatrix} \frac{e_1}{h_2h_3} & \frac{e_2}{h_1h_3} & \frac{e_3}{h_1h_2}\\ \frac{\partial}{\partial q_1} & \frac{\partial}{\partial q_2} & \frac{\partial}{\partial q_3}\\ h_1A_1 & h_2A_2 & h_3A_3 \end{vmatrix}\\
&\nabla^2\Phi = \frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial\Phi}{\partial q_1}\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{h_1h_3}{h_2}\frac{\partial\Phi}{\partial q_2}\right) + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial\Phi}{\partial q_3}\right)\right]
\end{aligned} \tag{1.b.4}$$

In the formula for $\operatorname{curl} A$ the differential operators $\partial/\partial q_i$ operate on the elements of the last row of the determinant.

In spherical polar coordinates we have

$$\left.\begin{aligned}
&x = r\sin\vartheta\cos\phi, \quad y = r\sin\vartheta\sin\phi, \quad z = r\cos\vartheta\\
&h_r = 1, \quad h_\vartheta = r, \quad h_\phi = r\sin\vartheta;\\
&\operatorname{grad}\Phi = e_r\tfrac{\partial\Phi}{\partial r} + \tfrac{\boldsymbol{e}_\vartheta}{r}\tfrac{\partial\Phi}{\partial\vartheta} + \tfrac{\boldsymbol{e}_\phi}{r\sin\phi}\tfrac{\partial\Phi}{\partial\phi}
\end{aligned}\right\} \tag{1.b.5}$$

Equations (1.b.5) continued over

$$\left.\begin{aligned}
&\operatorname{div} A = \tfrac{1}{r^2}\tfrac{\partial}{\partial r}(r^2A_r) + \tfrac{1}{r\sin\vartheta}\tfrac{\partial}{\partial\vartheta}(A_\vartheta\sin\vartheta) + \tfrac{1}{r\sin\vartheta}\tfrac{\partial A_\phi}{\partial\phi};\\
&(\operatorname{curl} A)_r = \tfrac{1}{r\sin\vartheta}\left[\tfrac{\partial}{\partial\vartheta}(A_\phi\sin\vartheta) - \tfrac{\partial A_\vartheta}{\partial\phi}\right];\\
&(\operatorname{curl} A)_\vartheta = \tfrac{1}{r\sin\vartheta}\tfrac{\partial A_r}{\partial\phi} - \tfrac{1}{r}\tfrac{\partial\left(rA_\phi\right)}{\partial r};\\
&(\operatorname{curl} A)_\phi = \tfrac{1}{r}\tfrac{\partial(rA_\vartheta)}{\partial r} - \tfrac{1}{r}\tfrac{\partial A_r}{\partial\vartheta};\\
&\nabla^2\Phi = \tfrac{1}{r^2}\tfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\tfrac{\partial\Phi}{\partial r}\right) + \tfrac{1}{r^2\sin\vartheta}\tfrac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\tfrac{\partial\Phi}{\partial\vartheta}\right) + \tfrac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\tfrac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2}
\end{aligned}\right\} \tag{1.b.5}$$

In the cylindrical system of coordinates we have

$$\begin{aligned}
&x = r\cos\phi, \quad y = r\sin\phi, \quad z = z\\
&h_r = 1, \quad h_\phi = r, \quad h_z = 1;\\
&\operatorname{grad}\Phi = e_r\frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{e_\phi}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\phi} + e_z\frac{\partial\Phi}{\partial z};\\
&\operatorname{div} A = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\\
&(\operatorname{curl} A)_r = \frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial\phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z}; \quad (\operatorname{curl} A)_\phi = \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\\
&(\operatorname{curl}\boldsymbol{A})_z = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_\phi) - \frac{1}{r}\frac{\partial A_r}{\partial\phi}\\
&\nabla^2\Phi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}
\end{aligned} \tag{1.b.6}$$

The following identities hold for any A and Φ
$\operatorname{curl}\operatorname{grad}\Phi\equiv 0,\quad \operatorname{div}\operatorname{curl}A\equiv 0,\quad \operatorname{div}\operatorname{grad}\Phi=\nabla^2\Phi.$
The following integral theorems may be used to transform volume, surface, and contour integrals.

Gauss' theorem:

$$\int\limits_V \operatorname{div}A\ \mathrm{d}^3r=\oint\limits_S\left(A\cdot\ \mathrm{d}^2S\right) \tag{1.b.8}$$

where V is a given volume and S is a closed surface bounding V.
Stokes' theorem:
$\oint_l(A\cdot\ \mathrm{d}l)=\int\limits_S\left(\operatorname{curl}A\cdot\ \mathrm{d}^2S\right),$
where l is a closed contour and S is an arbitrary surface drawn through this contour.

In equations (1.b.8) and (1.b.9) the vector $\boldsymbol{A}$ should be a differentiable function of the coordinates.

1.36 Write down the cyclic components of the gradient in spherical coordinates (cf problem 1.10).

1.37 Use Cartesian, spherical, and cylindrical coordinates to obtain expressions for $\operatorname{div}r,\operatorname{curl}r,\operatorname{grad}(\boldsymbol{l}\cdot r)$, and $(\boldsymbol{l}\cdot\nabla)r$ where r is the position vector and l a constant vector.

1.38 Use only spherical (or cylindrical) coordinates to find $\operatorname{curl}[\omega\wedge r]$ where ω is a constant vector parallel to the z-axis.

1.39 Prove the following identities:

```
$\opn{grad}(\varphi \psi)=
\varphi \opn{grad} \psi+\psi \opn{grad} \varphi$
$\opn{div}(\varphi A)=
\varphi \opn{div} A+(A \cdot \opn{grad}) \varphi$;
$\opn{curl}(\varphi A)=
\varphi \opn{curl} A-[A \wedge \opn{grad}] \varphi$;
$\opn{div}[A \wedge B]=(B \cdot \opn{curl} A)-(A \cdot \opn{curl} B)$;
$\opn{curl}[A \wedge B]=A \opn{div} B-B \opn{div} A+(B \cdot \nabla) A-(A \cdot \nabla)
$\opn{grad}(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})=[\boldsymbol{A} \wedge \opn{curl} \bold
```

Hint. Use the operator ∇ and the differentiation and multiplication rules for vectors and not the components along the coordinate axes.

1.40 Prove the identities

$$\begin{aligned}
&(C\cdot\operatorname{grad})(A\cdot B)=(A\cdot(C\cdot\nabla)B)+(B\cdot(C\cdot\nabla)A)\\
&(C\cdot\nabla)[\boldsymbol{A}\wedge B]=[A\wedge(C\cdot\nabla)B]-[B\wedge[C\cdot\nabla)A]\\
&(\nabla\cdot A)B=(A\cdot\nabla)B+B\operatorname{div}A;\\
&([A\wedge B]\cdot\operatorname{curl}C)=(B\cdot(A\cdot\nabla)C)-(A\cdot(B\cdot\nabla)C)\\
&[[\boldsymbol{A}\wedge\nabla]\wedge B]=(A\cdot\nabla)B+[A\wedge\operatorname{curl}B]-A\operatorname{div}B\\
&[[\nabla\wedge A]\wedge B]=A\operatorname{div}B-(A\cdot\nabla)B-[\boldsymbol{A}\wedge\operatorname{curl}B]-[B\wedge\operatorname{curl}A]
\end{aligned}$$

1.41 Write down expressions for $\operatorname{grad}\varphi(r),\operatorname{div}\varphi(r)r,\operatorname{curl}\varphi(r)r$, and $(l\cdot\nabla)\varphi(r)r$.

1.42 Find the function $\varphi(r)$ which satisfies the condition $\operatorname{div}\varphi(r)r=0$.

1.43 Find the divergence and curl of the following vectors:
$(a\cdot r)b,\quad (a\cdot r)r,\quad [a\wedge r],\quad \varphi(r)[a\wedge r],\quad [r\wedge[a\wedge r]],$
where $\boldsymbol{a}$ and $\boldsymbol{b}$ are constant vectors.

1.44 Evaluate:

$\operatorname{grad}(A(r)\cdot r)$, $\operatorname{grad}(A(r)\cdot B(r))$, $\operatorname{div}\varphi(r)\boldsymbol{A}(r)$, $\operatorname{curl}\varphi(r)\boldsymbol{A}(r)$, $(l\cdot\nabla)\varphi(r)A(r)$.

1.45 Evaluate:

$\operatorname{grad}\left[\frac{(p\cdot r)}{r^3}\right]$, $\operatorname{curl}\left\{\frac{[p\wedge r]}{r^3}\right\}$,

where $\boldsymbol{p}$ is a constant vector, by using the expressions for the gradient and the curl in terms of spherical coordinates. Give a geometrical interpretation of these vectors.

1.46 Show that

$$(A\cdot\nabla)A=-[A\wedge\operatorname{curl}A]$$

when $A^2=$ constant.

1.47 Write down the components of the vector $\nabla^2 A$ along the axes of the spherical system of coordinates.

Hint. Use the identity

$$\nabla^2 A=-\operatorname{curl}\ \operatorname{curl}\ A+\operatorname{grad}\operatorname{div}A$$

1.48 Write down the components of the vector $\nabla^2\boldsymbol{A}$ along the axes of the cylindrical system of coordinates.

1.49 Transform the volume integral $\int(\operatorname{grad}\varphi\cdot\operatorname{curl}A)\mathrm{d}^3r$ into a surface integral.

1.50 Evaluate the integrals

$$\oint r(a\cdot n)\mathrm{d}^2S,\quad \oint(a\cdot r)n\ \mathrm{d}^2S$$

where $\boldsymbol{a}$ is a constant vector and $\boldsymbol{n}$ is the unit normal.

1.51 Transform the surface integrals

$\oint n\varphi\ \mathrm{d}^2S$, $\oint[n\wedge a]\mathrm{d}^2S$, $\oint(n\cdot b)a\ \mathrm{d}^2S$,

where $\boldsymbol{b}$ is a constant vector and $\boldsymbol{n}$ the unit normal, into volume integrals.

1.52 Use one of the identities established in the preceding problem to derive the law of Archimedes by summing all the forces on the surface elements of a body immersed in a liquid.

1.53* Let $f(a,r)$ satisfy the condition

$$f\left(c_1a_1+c_2a_2,r\right)=c_1f\left(a_1,r\right)+c_2f\left(a_2,r\right)$$

where c_1 and c_2 are arbitrary constants, and suppose further that $f(a,r)$ is a differentiable function of r. Show that if V is an arbitrary volume, S is its bounding surface, and $\boldsymbol{n}$ is the unit normal to this surface then

$$\oint f(n,r)\mathrm{d}^2S=\int f(\nabla,r)\mathrm{d}^3r$$

which is the generalised Gauss theorem. The operator ∇ in the integrand $f(\nabla,r)$ operates on r and lies on the left of all the variables

Hint. Express $\boldsymbol{n}$ in terms of the unit vectors of a Cartesian system of coordinates and use the relation (cf problem 1.51)

$$\int\frac{\partial\varphi}{\partial x}\ \mathrm{d}^3r=\oint\varphi n_x\ \mathrm{d}^2S$$

1.54 Solve problems 1.50 and 1.51 with the aid of the generalised Gauss theorem proved in the preceding problem.

1.55 Transform the closed line integral $\oint\varphi\mathrm{d}l$ into a surface integral.

1.56 Transform the closed line integral $\oint u\ \mathrm{d}f$ into a surface integral, where u and f are scalar

functions of coordinates.
1.57 Prove the identity

$$\int (A \cdot \operatorname{curl}\operatorname{curl} B - B \cdot \operatorname{curl}\operatorname{curl} \boldsymbol{A})\mathrm{d}^3 r = \oint \left(\{[B \wedge \operatorname{curl} \boldsymbol{A}] - [\boldsymbol{A} \wedge \operatorname{curl} B]\} \cdot \mathrm{d}^2 S\right)$$

1.58 The vector A satisfies the condition $\operatorname{div} A = 0$ within the volume V, whereas on the surface S which bounds this volume $A_n = 0$. Show that

$$\int_V \boldsymbol{A}\ \mathrm{d}^3 r = 0$$

1.59* Show that

$$\operatorname{div}_R \int \frac{A(r)\mathrm{d}^3 r}{|R - r|} = 0$$

where $A(r)$ is a vector satisfying the conditions of problem 1.58.
1.60 Prove the Gauss theorem

$$\int \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_i}\ \mathrm{d}V = \oint T_{ik}\ \mathrm{d}S_i$$

for a three-dimensional tensor of rank 2.
Hint. Start with the Gauss theorem for a vector $A_i = T_{ik} a_k$ where a is an arbitrary constant vector.
1.61 Find the general form of the solution of Laplace's equation for the scalar functions (a) $f(r)$, (b) $f(\vartheta)$, and (c) $f(\phi)$ where r, ϑ, and ϕ are the spherical polar coordinates.
1.62 Repeat problem 1.61 for the cylindrical polar coordinates r, ϕ, and z.
1.63 Show that if the scalar function ψ is a solution of the equation $\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0$ and $\boldsymbol{a}$ is a constant vector, then the vector functions

$$L = \operatorname{grad} \psi, \quad M = \operatorname{curl}(a\psi), \quad N = \operatorname{curl} M$$

satisfy the equation

$$\nabla^2 A + k^2 A = 0$$

1.64* The equation

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1, \quad a > b > c$$

represents an ellipsoid with semiaxes a, b, and c. The equations

$$\begin{aligned} &\tfrac{x^2}{a^2+\xi} + \tfrac{y^2}{b^2+\xi} + \tfrac{z^2}{c^2+\xi} = 1, \quad \xi \geqslant -c^2 \\ &\tfrac{x^2}{a^2+\eta} + \tfrac{y^2}{b^2+\eta} + \tfrac{z^2}{c^2+\eta} = 1, \quad -c^2 \geqslant \eta \geqslant -b^2 \\ &\tfrac{x^2}{a^2+\zeta} + \tfrac{y^2}{b^2+\zeta} + \tfrac{z^2}{c^2+\zeta} = 1, \quad -b^2 \geqslant \zeta \geqslant -a^2 \end{aligned}$$

represent, respectively, an ellipsoid, a hyperboloid of one sheet, and a hyperboloid of two sheets, which are confocal with the above ellipsoid. One of these surfaces, characterised by the quantities ξ, η, ζ, passes through each point in space. The quantities ξ, η, ζ are called the ellipsoidal coordinates of a point x, y, z. Find the transformation formulae relating ξ, η, ζ and x, y, z. Prove the orthogonality of the ellipsoidal system of coordinates and find the coefficients

h_i of equation (1.b.3) and the Laplace operator in ellipsoidal coordinates.

1.65* When $a = b > c$, the ellipsoidal system of coordinates (cf preceding problem) degenerates into the so-called oblate spheroidal system. The coordinate ζ thus becomes a constant equal to $-a^2$ and should be replaced by another coordinate.

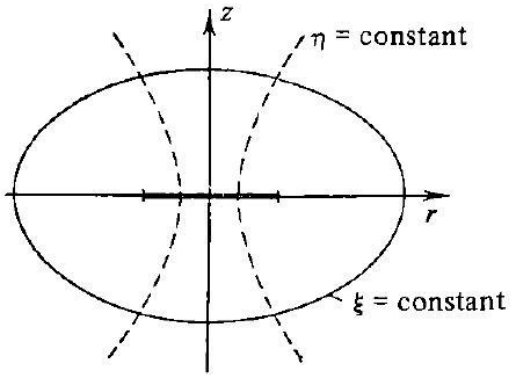


Figure 1.65.1.

The azimuthal angle ϕ in the xy-plane is chosen as the latter coordinate. The coordinates ξ and η are then defined by

$$\frac{r^2}{a^2+\xi}+\frac{z^2}{c^2+\xi}=1, \quad \frac{r^2}{a^2+\eta}+\frac{z^2}{c^2+\eta}=1, \quad r^2=x^2+y^2$$

where $\xi \geqslant -c^2, -c^2 \geqslant \eta \geqslant -a^2$. The surfaces $\xi =$ constant represent oblate ellipsoids of revolution with the z-axis as the axis of rotation, and the surfaces $\eta =$ constant are hyperboloids of one sheet of revolution which are confocal with them (figure 1.65.1).

Find expressions for r and z in terms of the oblate spheroidal coordinates. Find also the coefficients h_i of equation (1.b.3) and the Laplace operator in terms of these coordinates.

1.66* The prolate spheroidal system of coordinates is obtained from the ellipsoidal system (cf problem 1.64) when $a > b = c$. The coordinate η then degenerates into a constant, and should be replaced by the azimuthal angle ϕ measured from the y-axis in the yz-plane. The coordinates ξ, ζ are defined by

$$\frac{x^2}{a^2+\xi}+\frac{r^2}{b^2+\xi}=1, \quad \frac{x^2}{a^2+\xi}+\frac{r^2}{b^2+\xi}=1, \quad r^2=y^2+z^2$$

where $\xi \geqslant -b^2, -b^2 \geqslant \zeta \geqslant -a^2$.

The surfaces representing constant values of ξ and ζ are prolate ellipsoids and hyperboloids of two sheets of revolution (figure 1.66.1). Express x and r in terms of ξ and ζ. Find the coefficients h_i of equation (1.b.3) and the Laplace operator in terms of the variables ξ, ζ, ϕ.

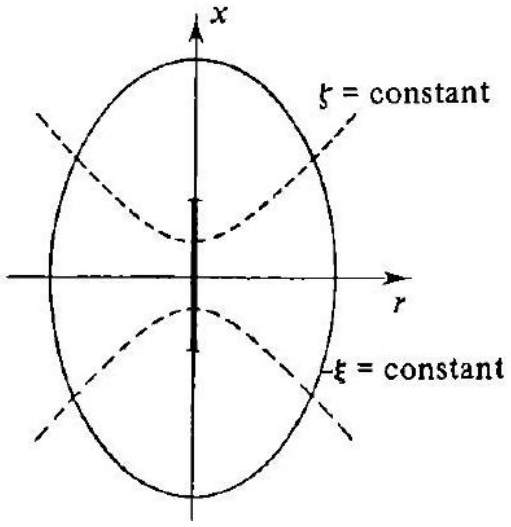


Figure 1.66.1.

1.67 Bispherical coordinates ξ, η, ϕ are related to the Cartesian coordinates by the expression

$$x = \frac{a \sin\eta \cos\phi}{\cosh\xi - \cos\eta}, \quad y = \frac{a \sin\eta \sin\phi}{\cosh\xi - \cos\eta}, \quad z = \frac{a \sinh\xi}{\cosh\xi - \cos\eta}$$

where a is a constant parameter and $-\infty < \xi < \infty, 0 < \eta < \pi$, $0 < \phi < 2\pi$. Show that the coordinate surfaces $\xi =$ constant represent
the spheres

$$x^2 + y^2 + (z - a\coth\xi)^2 = \left(\frac{a}{\sinh\xi}\right)^2$$

the surfaces $\eta =$ constant represent spindle-shaped surfaces of revolution about the z-axis, whose equation is

$$\left[\left(x^2 + y^2\right)^{1/2} - a\cot\eta\right]^2 + z^2 = \left(\frac{a}{\sin\eta}\right)^2$$

and the surfaces $\phi =$ constant are semi-infinite planes diverging from the z-axis (figure 1.67.1). Show that these coordinate surfaces are orthogonal to each other and find the coefficients h_i of equation (1.b.3) and the Laplace operator in terms of these coordinates.

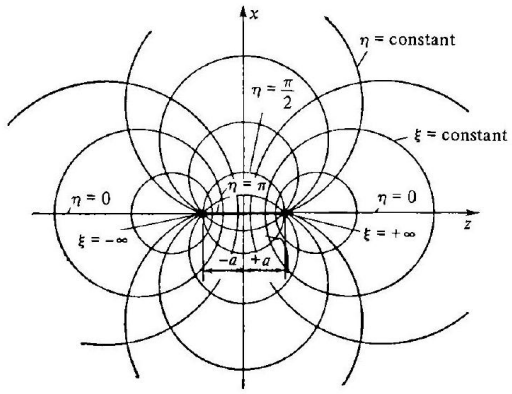


Figure 1.67.1.

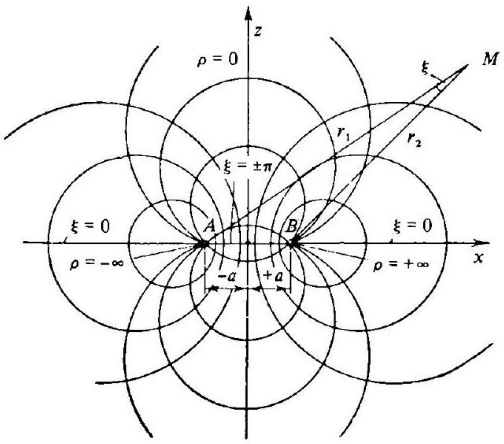


Figure 1.68.1.

1.68 The toroidal coordinates ρ, ξ, ϕ form an orthogonal system and are related to the Cartesian coordinates by the formulae

$$x = \frac{a \sinh \rho \cos \phi}{\cosh \rho - \cos \xi}, \quad y = \frac{a \sinh \rho \sin \phi}{\cosh \rho - \cos \xi}, \quad z = \frac{a \sin \xi}{\cosh \rho - \cos \xi}$$

where a is a constant parameter, $-\infty < \rho < \infty, -\pi < \xi < \pi$, and ϕ is an azimuthal angle lying between 0 and π.

Show that $\rho = \ln (r_1/r_2)$ (see figure 1.68 .1 showing the planes ϕ = constant, $\phi + \pi$ = constant) and that ξ represents the angle between r_1 and $r_2 (\xi > 0$ when $z > 0; \xi < 0$ when $z < 0)$. What is the form of the ρ and ξ coordinate surfaces? Find the coefficients h_i of equation (1.b.3).

16.2 Electrostatics in vacuo

This chapter contains problems which are concerned with the determination of the potential $\varphi(r)$ and field strength $\boldsymbol{E}(r)$ from given volume, surface, and linear charge distributions. The distribution of point charges may be described by a volume density

$$\rho(r) = \sum_i q_i \delta (r - r_i)$$

where q_i is the magnitude of the i th charge, r_i is the position vector of the i th charge, and $\delta (r - r_i)$ is the Dirac delta-function (cf appendix 1). For a static distribution the electric field satisfies the Maxwell equations

$$\operatorname{div} E = 4\pi\rho, \quad \operatorname{curl} E = 0 \tag{2.0.1}$$

The integral form of the first of these equations is

$$\oint_S E_n \, \mathrm{d}^2 S = 4\pi q \tag{2.0.2}$$

where S is a closed surface; q is the total charge enclosed by this surface, and E_n the component of the electric field in the direction of the outward normal. The potential and the electric field strength are related by the expressions

$$E = -\operatorname{grad} \varphi, \quad \varphi(r) = \int_r^{r_0} (E \cdot \, \mathrm{d}r), \quad \varphi (r_0) = 0 \tag{2.0.3}$$

The potential φ satisfies the Poisson equation

$$\nabla^2\varphi = -4\pi\rho \tag{2.0.4}$$

The potential is continuous and finite at all points at which there are no point charges. On a charged surface separating regions 1 and 2 (figure 2.0.1), $\varphi_1 = \varphi_2$. The normal derivatives of φ are discontinuous across a charged surface so that

$$E_{2n} - E_{1n} = 4\pi\sigma \quad \text{or} \quad \frac{\partial\varphi_1}{\partial n} - \frac{\partial\varphi_2}{\partial n} = 4\pi\sigma \tag{2.0.5}$$

where the normal $\boldsymbol{n}$ is directed from region 1 into region 2 .

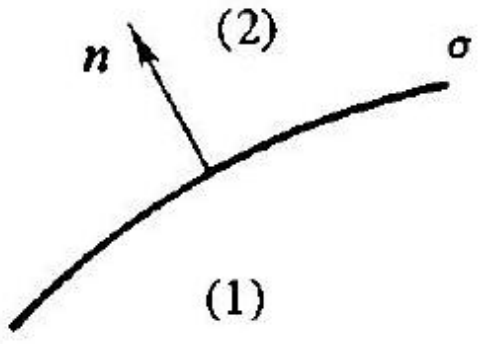


Figure 2.0.1.

(1) For details of the theory we refer to the text books by Smythe (1950), Stratton (1941), Jackson (1962), and Panofsky and Phillips (1962).

The change in the potential on passing through an electric double layer of strength (dipole moment per unit area) τ is given by (see, e.g. Panofsky and Phillips, 1962)

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial n} = \frac{\partial\varphi_2}{\partial n}, \quad \varphi_2 - \varphi_1 = 4\pi\tau \tag{2.0.6}$$

where the normal $\boldsymbol{n}$ is directed from the negative to the positive side of the layer.

If the potentials corresponding to charge distributions ρ_1 and ρ_2 are φ_1 and φ_2 then the potential corresponding to the charge distribution $\rho = \rho_1 + \rho_2$ is $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$. This is the so-called superposition principle. An analogous result holds for the electric field E. In particular, the superposition principle may be used to determine the potential due to a complicated charge distribution by integrating over elementary charges:

$$\varphi(r) = \int \frac{\rho\,(r')\,\mathrm{d}^3r'}{|r - r'|} \tag{2.0.7}$$

In the case of surface or line charge distributions, the volume integral in equation (2.0.7) must be replaced by the corresponding surface or line integrals, whereas in the case of a set of point charges it must be replaced by the appropriate summation. The latter remark applies also to all the formulae given below which contain volume integrals over charge distributions.

In the majority of cases, direct evaluation of the integral given by equation (2.0.7) is difficult. It is, therefore, frequently convenient to expand the integrand into a series in powers of x/r or x'/r, and then integrate term by term. This expansion may be obtained either in terms of Cartesian or spherical polar coordinates.

Cartesian coordinates (figure 2.0.2). When $r > a$ (a is the maximum distance of the charges from the origin O) we have (note the summation over repeated Greek indices)

$$\varphi(x,y,z) = \frac{q}{r} - p_\alpha\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\frac{1}{r} + \frac{Q_{\alpha\beta}}{2!}\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha\partial x_\beta}\frac{1}{r} - \frac{Q_{\alpha\beta\gamma}}{3!}\frac{\partial^3}{\partial x_\alpha\partial x_\beta\partial x_\gamma}\frac{1}{r} - \tag{2.0.8}$$

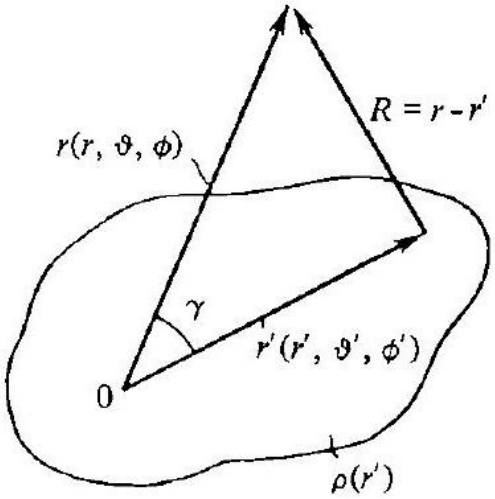


Figure 2.0.2.

The multipole moments $q, p_\alpha, Q_{\alpha\beta}, \ldots$ are given by the following volume integrals

$$q = \int \rho\,(r')\,\mathrm{d}^3 r' \quad \text{total charge}$$

$$p_\alpha = \int \rho\,(r')\,x'_\alpha \mathrm{d}^3 r' \quad \text{dipole moment components,}$$

$$Q_{\alpha\beta} = \int \rho\,(r')\,x'_\alpha x'_\beta \mathrm{d}^3 r' \quad \text{quadrupole moment components.}$$

When the coordinate system is rotated, the quantities $q, p_\alpha, Q_{\alpha\beta}, \ldots$ transform, respectively, as scalars, vectors, tensors of rank 2, and so on. The second and third terms in the potential given by equation (2.0.8) may be written in the form

$$\varphi^{(p)} = \frac{(p \cdot r)}{r^3} \tag{2.0.9}$$

where $\boldsymbol{p} = (p_x, p_y, p_z)$ is the dipole moment of the system;

$$\varphi^{(Q)} = \frac{1}{2r^5}\left[\left(3x^2 - r^2\right) Q_{xx} + \left(3y^2 - r^2\right) Q_{yy} + \left(3z^2 - r^2\right) Q_{zz} \right.$$
$$\left. + 6xyQ_{xy} + 6xzQ_{xz} + 6yzQ_{yz}\right]$$

Spherical polars. We shall use the expansion for $|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^{-1}$ which is given in appendix 2 [equation (A2.15)]. Substituting this expansion into equation (2.0.7) we have for $r > r'$

$$\varphi(r) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \left(\frac{4\pi}{2l+1}\right)^{1/2} \frac{Q_{lm} Y_{lm}(\vartheta, \phi)}{r^{l+1}} \quad (r > r') \tag{2.0.10}$$

where Q_{lm} is the multiple moment of order l, m and is given by

$$Q_{lm} = \left(\frac{4\pi}{2l+1}\right)^{1/2} \int \rho\,(r')\,r'^l Y^*_{lm}\,(\vartheta', \phi')\,\mathrm{d}^3 r' \tag{2.0.11}$$

If $r' > r$ then r and r' change places in equation (A2.15) of appendix 2 and

$$\varphi(r) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{l} \left(\frac{4\pi}{2l+1}\right)^{1/2} r^l Q'_{lm} Y_{lm}(\vartheta, \phi) \quad (r < r') \tag{2.0.12}$$

where

$$Q'_{lm} = \left(\frac{4\pi}{2l+1}\right)^{1/2} \int \frac{\rho\,(r')}{r'^{l+1}} Y^*_{lm}\,(\vartheta', \phi')\,\mathrm{d}^3 r' \tag{2.0.13}$$

If the point defined by the position vector r lies inside the charge distribution (see figure 2.0.2), then the region of integration in equation (2.0.7) must be divided into two parts by a sphere of radius r, centred on the origin O. The expansion given by equation (A2.15) of appendix 2 is then used inside the sphere and the expansion with $r\,(r')$ replaced by $r'(r)$ is used outside the sphere.

Real systems of charges are always bounded and their potential decreases at large distances at least as fast as $1/r$. However, when we consider the field near a middle part of a long cylinder or a finite flat body it is convenient to idealize the problem and assume the body to be infinite. The potential does in that case not decrease at infinity, but it describes the field correctly at distances which are small compared to the dimensions of the body.

The structure of the electrostatic field can be conveniently represented by lines of force and equipotential surfaces. The lines of force can be defined by the following set of differential equations involving the arbitrary orthogonal coordinates q_1, q_2, q_3:

$$\frac{h_1\ \mathrm{d}q_1}{E_1} = \frac{h_2\ \mathrm{d}q_2}{E_2} = \frac{h_3\ \mathrm{d}q_3}{E_3} \tag{2.0.14}$$

where h_i are the coefficients given by equation (l.b.3). The equipotential surfaces are defined by $\varphi(r) =$ constant.

Neutral points are defined as those points at which $E = 0$ at finite distances from systems of charges.

The energy of an electrostatic field may be computed from one of the following two formulae:

$$W = \frac{1}{8\pi} \int E^2\ \mathrm{d}^3 r, \quad W = \frac{1}{2} \int \rho\varphi\ \mathrm{d}^3 r \tag{2.0.15}$$

These formulae are equivalent if the charges are localised in a finite region of space and the integration extends over all space.

The energy of interaction between two systems of charges 1 and 2 is given by

$$U = \int \rho_1(r)\varphi_2(r)\mathrm{d}^3 r = \int \frac{\rho_1\,(r_1)\,\rho_2\,(r_2)\,\mathrm{d}^3 r_1\ \mathrm{d}^3 r_2}{|r_1 - r_2|} \tag{2.0.16}$$

The generalised ponderomotive forces may be obtained by differentiating U or W with respect to the corresponding generalised coordinates a_i:

$$F_i = -\frac{\partial U}{\partial a_i} \quad \text{or} \quad F_i = -\frac{\partial W}{\partial a_i} \tag{2.0.17}$$

The generalised force is positive if it tends to increase the corresponding coordinate.

2.1 An infinite plane plate of thickness a is uniformly charged to a volume density ρ. Find the potential φ and the electric field strength E.

2.2 An electric charge is distributed throughout space in such a way that its volume density is given by

$$\rho = \rho_0 \cos\alpha x \cos\beta y \cos\gamma z$$

forming an infinite periodic lattice. Find the potential φ due to this distribution.

2.3 The plane $z = 0$ is charged to a density which varies in accordance with the periodic law

$$\sigma = \sigma_0 \sin\alpha x \sin\beta y$$

where σ_0, α, and β are constants. Find the potential φ due to this charge distribution.

2.4 An infinitely long cylinder of radius R carries a uniform charge density κ per unit length. Find the potential φ and the electric field strength E for this system.

2.5 Find the potential φ and the electric field strength $\boldsymbol{E}$ for a uniformly charged infinitely long straight filament.

2.6 Find the potential φ and the electric field strength E for a uniformly charged line segment of length $2a$, lying between $-a$ and $+a$ along the z-axis, when its total charge is q.

2.7 Find the form of the equipotential surfaces for the uniformly charged line segment considered in the preceding problem.

2.8 Find the potential φ and the electric field strength $\boldsymbol{E}$ for a sphere carrying a uniform volume charge distribution.

2.9 Find the potential φ and the electric field strength E for a sphere of radius R, carrying a uniform surface charge distribution, with total charge q.

2.10 A sphere of radius R is uniformly charged to a density ρ. The sphere contains an uncharged spherical cavity of radius R_1. The centres of the two spheres are separated by a distance a, where $a + R_1 < R$. Find the electric field strength $\boldsymbol{E}$ inside the cavity.

2.11 The space between two concentric spheres of radii R_1 and R_2 $(R_1 < R_2)$ is charged to a volume density given by $\rho = \alpha/r^2$. Find the total charge, q, the potential, φ, and the electric field strength, E. Consider the limiting case $R_2 \to R_1$, assuming q to be constant.

2.12 Determine the energy W of the electrostatic field for the charge distributions considered in problems 2.8, 2.9, and 2.10. (Use two methods of computing the energy [see equation (2.0.15)].)

2.13 Consider a spherically symmetric charge distribution $\rho = \rho(r)$. By dividing the charge distribution into spherical shells, find the potential φ and the electric field strength E in terms of $\rho(r)$ (write down the potential φ and the field E in the form of an integral over r).

2.14 Use the results of problem 2.13 to solve problems 2.8 and 2.11 .

2.15 In the ground state of a hydrogen atom, the electron charge is distributed with a density given by

$$\rho(r) = -\frac{e_0}{\pi a^3} \exp\left(-\frac{2r}{a}\right)$$

where $a = 5.29 \times 10^{-11}$ m (Bohr radius) and $e_0 = 4.80 \times 10^{-10}$ e.s.u. (the elementary charge). Find the potential φ_e and the field strength $\boldsymbol{E}_{er}$ due to the electron charge distribution, and also the total potential φ and the field strength E in the atom, assuming that the nucleus (proton) is localised at the origin. Give a rough sketch of the spatial variation of φ and $\boldsymbol{E}$.

Hint. It is convenient to use the method employed in the solution of problem 2.13 .

2.16 Assume that the atomic nucleus may be looked upon as a uniformly charged sphere and find the maximum field strength due to this sphere. The radius of the nucleus is given by $R = 1.5 \times 10^{11} A^{1/3}$ m and its total charge is Ze_0, where A is the atomic weight, Z is the atomic number, and e_0 is the elementary charge.

2.17 Use the result of problem 2.13 to solve problem 2.9 .

2.18 Two thin coaxial uniformly charged rings of equal radius R lie in parallel planes which are at a distance a from each other. The work which must be done in order to bring a point charge q from infinity to the centres of the two rings is respectively equal to A_1 and A_2. Find the total charges q_1 and q_2 carried by the rings.

2.19 Find the potential φ and the electric field strength E along the axis of a thin uniformly charged circular disc of radius R and total charge q. Show that the normal component of the field changes by $4\pi\sigma$ on passing through the surface of the disc. Consider the field at large distances from the disc.

2.20 A thin circular ring of radius R consists of two uniformly charged semicircular sections carrying charges q and $-q$. Find the potential φ and field strength $\boldsymbol{E}$ along the axis of the ring

and in its immediate neighbourhood. Discuss the form of the field at large distances from the ring.

2.21 Express the potential φ due to a thin uniformly charged circular ring of radius R, carrying a total charge q, in terms of the complete elliptical integral of the first kind

$$K(k) = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\mathrm{d}\beta}{\left(1 - k^2 \sin^2 \beta\right)^{1/2}}$$

Hint. Use the substitution $\phi' = \pi - 2\beta$ when integrating over the azimuth.

2.22 Use the general formula for the potential φ due to a thin circular ring (see problem 2.21) to determine the field (a) along the axis of the ring, (b) at large distances from the ring, and (c) in the immediate neighbourhood of the ring.

Hint. Use formula (8.113) from Gradshteyn and Ryzhik (1965) for case (c).

2.23 A sphere of radius R carries a surface charge $\sigma = \sigma_0 \cos\vartheta$. Find the potential φ due to this charge distribution by using the multipole expansion in terms of spherical polars.

2.24 The sources of an electric field are arranged in an axially symmetric distribution in such a way that there are no charges near the axis of symmetry. Express the potential φ and the electric field strength $\boldsymbol{E}$ near the axis of symmetry in terms of the potential φ and its derivatives along this axis.

2.25 Find the potential φ due to a thin uniformly charged circular ring with the aid of the multipole expansion in terms of spherical polars. The total charge q and the radius R are given.

2.26 Find the potential φ at large distances for the following systems of charges:

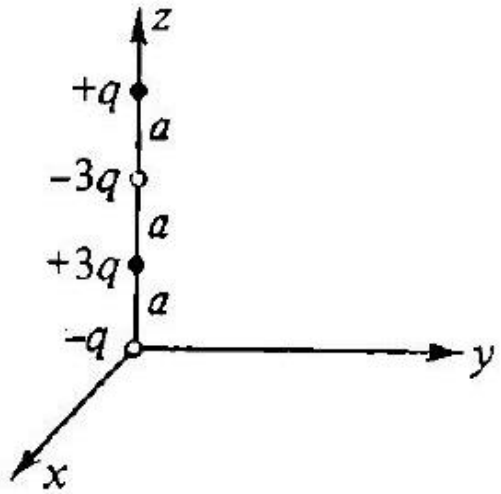
(a) point charges $q, -2q, q$ lying along the z-axis at a distance a from each other (linear quadrupole);

(b) point charges $\pm q$ at the corners of a square of side a, arranged so that neighbouring charges have opposite signs, while a charge $+q$ is placed at the origin; the sides of the square are parallel to the x - and y-axes (planar quadrupole).

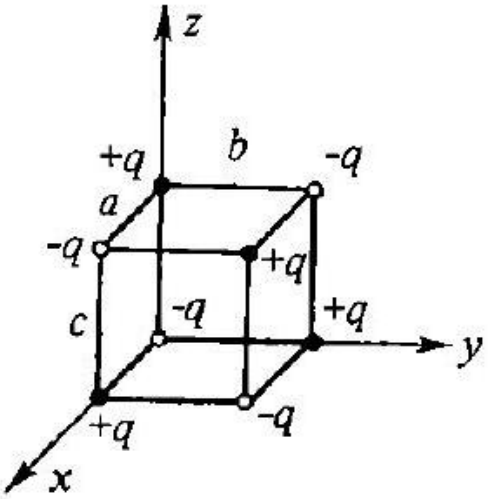
2.27 Find the potential φ at large distances from the following systems of charges:

(a) linear octupole (figure 2.27.1a),

(b) three-dimensional octupole (figure 2.27 .1 b).



(a)



(b)

Figure 2.27.1.

2.28 A point charge q is placed at a point whose spherical coordinates are r_0, ϑ_0, ϕ_0. Find the multipole expansion for the potential φ due to this charge.

2.29 An ellipsoid with semiaxes a, b, c is uniformly charged throughout its volume so that the total charge is q. Find the potential at large distances from the ellipsoid (retain terms up to the quadrupole term inclusively). Discuss the special cases of an ellipsoid of revolution with semiaxes $a = b$ and c and of a sphere ($a = b = c$). (Atomic nuclei having finite quadrupole moments may be approximately looked upon as ellipsoids of revolution.)

Hint. In integrating inside the ellipsoid use the generalised spherical coordinates $x = ar \sin\vartheta \cos\phi, \quad y = br \sin\vartheta \sin\phi, z = cr \cos\vartheta$.

2.30 Two thin coaxial uniformly charged rings with radii a and $b(a > b)$ and charges q and $-q$ respectively, lie in a given plane. Find the potential φ at a large distance from this system. Compare the result with the potential due to a linear quadrupole (see problem 2.26).

2.31* Show that the charge distribution

$$\rho = -(\boldsymbol{p}' \cdot \nabla)\,\delta(r)$$

represents an elementary dipole of moment $\boldsymbol{p}'$ at the origin. Discuss the result using the δ-function representation (appendix 1).

Hint. Start with the multipole expansion in terms of Cartesian coordinates.

2.32 Show that the charge distribution

$$\rho = q \prod_{i=1}^{n} (a_i \cdot \nabla)\,\delta(r)$$

gives rise to the potential

$$\varphi(r) = q \prod_{i=1}^{n} (a_i \cdot \nabla)\,\frac{1}{r}$$

2.33 Use the results of problem 2.26, and the fact that the quadrupole moment is a tensor of rank 2, to determine the potential φ at a large distance from a linear quadrupole whose orientation is defined by the polar angles γ, β. Indicate a second method of solving this problem.

2.34 The three-dimensional octupole shown in figure 2.27.1b is turned through an angle β about the z-axis. Find the potential φ at a large distance from it by transforming the components of the octupole moment. Compare with other methods of solution.

2.35 Find the potential φ at a large distance from a planar quadrupole which lies in a plane

containing the z-axis (figure 2.35 .1). Find the components of the quadrupole moment directly, and also by rotating the planar quadrupole discussed in problem 2.26(b).

2.36 A sphere of radius R is uniformly polarised to a dipole moment $\boldsymbol{P}$ per unit volume. Find the potential φ due to this sphere.

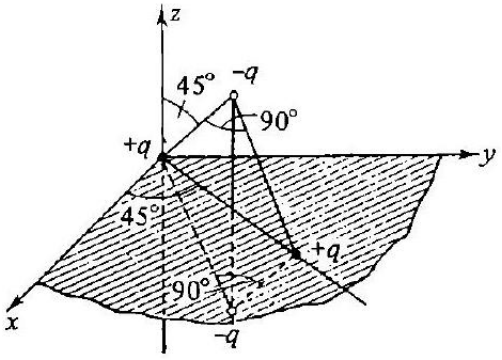


Figure 2.35.1.

2.37 A two-dimensional charge distribution is characterised by a charge density $\rho(r)$ which is independent of the z-coordinate. If $\rho(r) \neq 0$ in a finite region S in the xy-plane, then the potential φ outside the charge distribution may be expanded into a multipole expansion (two-dimensional multipoles). Find this expansion.

Hint. Use the result of problem 2.5, the superposition principle, and the expansion [see Gradshteyn and Ryzhik, 1965, formula (1.514)]

$$\ln\left(1 + u^2 - 2u\cos\varphi\right) = -2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos k\varphi}{k} u^k$$

where $|u| < 1$.

2.38 Expand the potential φ due to a linear charge κ in terms of twodimensional multipoles. The charged line is parallel to the z-axis and passes through the point (r_0, ϕ_0) in the xy-plane.

2.39 Find the potential φ at a large distance from two parallel linear charges κ and $-\kappa$ at a small distance a from each other (two-dimensional dipole).

2.40 A disc of radius R carries an electric double layer of strength τ = constant. Find the potential φ and the field strength E along the axis of symmetry perpendicular to the plane of the disc.

2.41 Find the electric field E due to an electric double layer of strength τ = constant, lying in the semi-infinite plane $y = 0, x > 0$. Compare with the magnetic field due to an infinite line current flowing along the z-axis. Solve the problem by

(a) direct integration of contributions due to double layer elements, and (b) by determining the electrostatic potential first.

2.42 Find the equations of the lines of force due to the following system of point charges: $+q$ at $z = a, \pm q$ at $z = -a$. Sketch the lines of force. Are there any neutral points?

Hint. Owing to the symmetry of the problem the lines of force lie in the planes ϕ = constant, and E_z and E_r are independent of ϕ (cylindrical
coordinates). The variables in the differential equation for the lines of force [see equation (2.0.14)] may be separated with the aid of the substitution

$$u = \frac{z + a}{r}, \quad v = \frac{z - a}{r}$$

2.43 Use the results of the preceding problem to find the equation for the lines of force due to a point dipole at the origin.

2.44 Find the equation for the lines of force due to a linear quadrupole [see problem 2.26(a)]

and sketch the lines of force.
2.45 Show that the flux through a surface S due to a point charge q is equal to $q\Omega$ where Ω is the solid angle subtended by the surface at the point charge ($\Omega > 0$, if from this point one sees the negative side of the surface).
2.46 A charge q_1 lies on the axis of symmetry of a circular disc of radius A at a distance a from the plane of the disc. Find the charge q_2 which must be placed at a point located symmetrically relative to the disc in order that the flux through the disc in the direction towards the charge q_1 should be Φ.
2.47* Find the equation for the lines of force of a system of n colinear charges $q_1, q_2, \ldots, q_n$ placed at the points $z_1, z_2, \ldots, z_n$ on the z-axis without integrating the differential equations for the lines of force. Use the theorem of problem 2.45 for a force tube generated by rotating a line of force about the axis of symmetry.
2.48 Use the result of the preceding problem to find the equation for the lines of force due to a system of two point charges (cf problem 2.42) and a linear quadrupole (cf problem 2.44).
2.49 Uniformly charged filaments carrying charges κ_1 and $-\kappa_2$ per unit length are parallel and lie at a distance h from each other. Find the relation between κ_1 and κ_2 for which the family of equipotential surfaces associated with this system will include cylinders of finite radius and determine the radii and the position of the axes of the cylinders.
2.50 Point charges q_1 and $-q_2$ lie at a distance h from each other. Show that the equipotential surfaces associated with this sytem include a sphere of finite radius. Find the coordinates of the centre of the sphere and its radius. Find an expression for the potential φ on the surface of the sphere if the potential at infinity is zero.
2.51 Find the charge distribution giving rise to a potential of the form

$$\varphi(r) = \frac{q}{r}\exp(-\alpha r)$$

where α and q are constants.
2.52 Find the charge distribution giving rise to the potential

$$\varphi(r) = \frac{e_0}{a}\left(\frac{a}{r}+1\right)\exp\left(-\frac{2r}{a}\right)$$

where e_0 and a are constants.
2.53 Find the energy of interaction U between the electron cloud and the nucleus in the hydrogen atom. Assume that the electron charge density is given by

$$\rho(r) = \frac{e_0}{\pi a^3}\exp\left(-\frac{2r}{a}\right)$$

where e_0 is the charge of the electron and a is a constant (the Bohr radius) (cf problem 2.15).
2.54 Under certain conditions it may be assumed that the electron clouds due to the two electrons in the helium atom are identical and may be described by the volume charge density

$$\rho(r) = -\left(\frac{8e_0}{\pi a^3}\right)\exp\left(-\frac{4r}{a}\right)$$

where a is the Bohr radius and e_0 is the charge of the electron. Find the energy of interaction U between the electrons in the helium atom using this approximation (which is in fact the zero-order approximation of perturbation theory).
2.55 The centres of two spheres carrying charges q_1 and q_2 are at a distance a from each other ($a > R_1 + R_2$, where R_1 and R_2 are the radii of the spheres). The charges form a spherically symmetric distribution. Find the energy of interaction U and the force F between the spheres.

2.56 A soap bubble hanging from the end of an open tube contracts under the action of its surface tension (the coefficient of surface tension is γ). Assuming that the dielectric strength of air, i.e. the field strength at which breakdown occurs, is E_0, investigate whether the contraction may be prevented by placing a large charge on the bubble. What is the minimum equilibrium radius R of the bubble?
2.57* Two thin parallel coaxial rings of radii a and b carry uniformly distributed charges q_1 and q_2. The distance between the planes of the rings is c. Determine the energy of interaction U and the force F between the rings.
2.58 Find the force F and the couple N on an electric dipole of moment P due to a point charge q.
2.59 A dipole with a moment p_1 is placed at the origin while another dipole with a moment p_2 is placed at a point whose position vector is r.

Find the energy of interaction U and the force $\boldsymbol{F}$ between the two dipoles. For which orientation of the dipoles does the force become a maximum?
2.60 A system of charges can be described by a volume density $\rho(r)$ and occupies a finite region in the neighbourhood of a given point O. The system is placed in an external electric field, which in the neighbourhood of this point may be represented by the following series for its potential:

$$\varphi_1(r) = \sum_{l,m} \left(\frac{4\pi}{2l+1}\right)^{1/2} a_{lm} r^l Y_{lm}(\vartheta, \phi)$$

Find the energy of interaction U of the system with the external field by expressing it in terms of the a_{lm} and the multipole moments Q_{lm} of the system (cf problem 3.38).

16.3 Electrostatics of conductors and dielectrics

16.3.1 a Basic concepts and methods of electrostatics

The electrostatic field in a dielectric is characterised by the electric field $\boldsymbol{E}$ and the induction vector D which satisfy the following equations:

$$\left.\begin{array}{lll} \operatorname{curl}\boldsymbol{E} = 0 & \text{or} & \oint_l E_l \,\mathrm{d}l = 0 \\ \operatorname{div}\boldsymbol{D} = 4\pi\rho & \text{or} & \oint_S D_n \,\mathrm{d}^2S = 4\pi q \end{array}\right\}$$

where ρ is the density of free charges in the dielectric and q is the total free charge enclosed by the surface S. The density of bound charges in a dielectric may be expressed in terms of the polarisation $\boldsymbol{P}$ (electric dipole moment per unit volume, which is produced by the bound charges):

$$\rho_b = -\operatorname{div}\boldsymbol{P} \tag{3.a.2}$$

The polarisation P can be expressed in terms of E and D:

$$D = E + 4\pi P \tag{3.a.3}$$

For isotropic dielectrics and sufficiently small fields

$$D = \epsilon \boldsymbol{E} \tag{3.a.4}$$

where ϵ is the permittivity of the medium. In anisotropic dielectrics, ϵ is a tensor of rank 2, i.e.

$$D_i = \epsilon_{ik} E_k \tag{3.a.5}$$

where the summation over k is again implied.
The electric field vector may be derived from a scalar potential φ:

$$E = -\operatorname{grad}\varphi, \quad \varphi(r) = \int_r^{r_0} (E \cdot \, \mathrm{d}r) \tag{3.a.6}$$

where r is the position vector of the point of observation and $\varphi(r_0) = 0$.
The potential satisfies the equation

$$\operatorname{div}(\epsilon \operatorname{grad}\varphi) = -4\pi\rho \tag{3.a.7}$$

In those regions where the dielectric is uniform, the latter equation reduces to the Poisson equation

$$\nabla^2\varphi = -\frac{4\pi\rho}{\epsilon} \tag{3.a.8}$$

(1) For details of the theory we refer to the textbooks by Stratton (1941), Smythe (1950), Jackson (1962), Panofsky and Phillips (1962), Landau and Lifshitz (1960), and Robinson (1973).

The boundary conditions at a boundary separating two different dielectrics are (the indices t and n indicate the components which are, respectively, tangential and normal to the boundary surface)

$$E_{1t} = E_{2t}, \quad D_{2n} - D_{1n} = 4\pi\sigma \tag{3.a.9}$$

or

$$\varphi_1 = \varphi_2, \quad \epsilon_1 \frac{\partial\varphi_1}{\partial n} - \epsilon_2 \frac{\partial\varphi_2}{\partial n} = 4\pi\sigma \tag{3.a.10}$$

The boundary conditions given by equation (3.a.9) hold both for isotropic and anisotropic media. The unit normal n is directed from the first medium into the second, t is a unit vector tangential to the surface, and σ is the surface density of free charges. The surface density of bound charges σ_b on the separation boundary is given by

$$\sigma_\mathrm{b} = P_{1n} - P_{2n} \tag{3.a.11}$$

The basic problem of electrostatics is to find the electric potential φ. It may be solved in various ways. The main method is to solve the differential equations (3.a.7) and (3.a.8) subject to the boundary conditions (3.a.9) or (3.a.10). It is sometimes possible to choose a set of fictitious point charges for which the potential in a particular region satisfies the same differential equation and the same boundary conditions as the given set of charges (method of images). In many cases it is a simple matter to find the image system (see problems 3.14, 3.18, 3.25, and 3.27).
The field vanishes inside a conductor placed in a constant electric field and hence the boundary conditions on the surface of a conductor are of the form

$$\boldsymbol{E}_t = \mathbf{0}, \quad \varphi = \text{ constant} \tag{3.a.12}$$

If a certain region of space is occupied by a dielectric with permittivity ϵ, and the electrostatic field is known in all space, then as $\epsilon \to \infty$ the field becomes identical with the field produced when the dielectric is replaced by a conductor of the same geometric form.

The problem of the determination of the electric field due to a given bounded set of charged conductors placed in a dielectric has a unique solution if either the total charge or the potential of each conductor is known. In the first of these two cases, the boundary condition given by (3.a.12) must be supplemented by

$$q = \int_S \sigma \, \mathrm{d}^2 S = -\frac{1}{4\pi} \oint_S \epsilon \frac{\partial \varphi}{\partial n} \, \mathrm{d}^2 S \tag{3.a.13}$$

where q is the charge on the conductor and the integral is evaluated over the surface of the conductor.

The capacitance C of a capacitor is defined as the ratio of the charge on one of its electrodes to the potential difference between the electrodes:

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} \tag{3.a.14}$$

The capacitance of an isolated conductor is defined as the ratio of the charge on the conductor to its potential (it may be assumed that the potential vanishes at infinity).

The energy of an electrostatic field which is localised in a volume V is given by the integral

$$W = \int_V w \, \mathrm{d}^3 r \tag{3.a.15}$$

where $w = (\boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{E})/8\pi$ is the energy density and the integral is taken over the volume V.

When a dielectric of volume V and permittivity ϵ_2 is introduced into an isotropic dielectric with permittivity ϵ_1, then the energy of the electrostatic field is changed by an amount given by

$$U = \frac{1}{8\pi} \int_V (\epsilon_1 - \epsilon_2) \, (E_2 \cdot E_1) \, \mathrm{d}^3 r \tag{3.a.16}$$

where E_1 is the initial field and $\boldsymbol{E}_2$ the final field (it is assumed that the sources of E_1 are maintained unaltered). The quantity U may be looked upon as the energy of interaction of the dielectric body with the external field E_1.

The force per unit volume, due to the electric field, on an isotropic dielectric whose permittivity depends only on its mass density τ is given by the following equation:

$$f = \rho E - \frac{1}{8\pi} E^2 \operatorname{grad} \epsilon + \frac{1}{8\pi} \operatorname{grad} \left(E^2 \frac{\mathrm{d}\epsilon}{\mathrm{d}\tau} \right) \tag{3.a.17}$$

The body forces acting on free and bound charges in a given volume V may be replaced by the equivalent system of surface stresses applied to the surface S of the volume V and given by

$$F = \int_V f \, \mathrm{d}^3 r = \oint_S T_n \, \mathrm{d}^2 S \tag{3.a.18}$$

where T_n is the surface force per unit area applied to an element having a unit outward normal n.

The surface stresses are described by a stress tensor T_{ik}, and the quantity T_n in equation (3.a.18) is the component of T_{ik} along the outward normal n to the surface element $\mathrm{d}^2 S$, so that

$$(T_n)_i = T_{ik} n_k, \quad T_{ik} = \frac{\epsilon}{4\pi} E_i E_k - \frac{1}{8\pi} E^2 \left(\epsilon - \frac{\partial \epsilon}{\partial \tau} \tau \right) \delta_{ik} \tag{3.a.19}$$

The terms containing $(\partial\epsilon/\partial\tau)\tau$ in equations (3.a.17) and (3.a.19) are not, in general, small and represent electrostriction. However, in calculating the resultant of the forces acting on a dielectric this term does not contribute to the final result and may be ignored (see problems 3.12 and 3.13). The stress tensor (3.a.19) may then be replaced by the simpler (Maxwell) tensor

$$T_n = \frac{\epsilon}{4\pi}\left(E_n E - \frac{1}{2}nE^2\right) \tag{3.a.20}$$

The force per unit area on the surface of a conductor is given by

$$f_\mathrm{s} = T'_n = n\frac{\epsilon E^2}{8\pi} = \frac{1}{2}\sigma E \tag{3.a.21}$$

In a liquid dielectric which is in equilibrium in an electric field the electric stresses are balanced by the hydrostatic pressure. The equilibrium condition is then given by

$$pn + T_n = \text{ constant} \tag{3.a.22}$$

where $p(\tau)$ is the pressure in the liquid and τ is the density. In particular, near the boundary between a liquid and the atmosphere ($\epsilon = 1$) the pressure $p(\tau)$ is greater than the atmospheric pressure by an amount given by

$$p(\tau) - p_\mathrm{atm} = \frac{\tau E^2}{8\pi}\frac{\partial\epsilon}{\partial\tau} - \frac{\epsilon - 1}{8\pi}\left(\epsilon E_n^2 + E_t^2\right) \tag{3.a.23}$$

where $\boldsymbol{E}$ is the electric field strength in the liquid, and $\boldsymbol{E}_n$ and $\boldsymbol{E}_t$ are the normal and tangential components of E. Equation (3.a.23) describes the dependence of the pressure in a liquid near its surface on the electric field strength. The pressure inside the liquid (gas) is given by

$$\int_{p_0}^{p} \frac{\mathrm{d}p}{\tau(p)} = \frac{E^2}{8\pi}\frac{\partial\epsilon}{\partial\tau} \tag{3.a.24}$$

where p_0 is the pressure at the point where $E = 0$. For an incompressible liquid

$$p - p_0 = \frac{\tau E^2}{8\pi}\frac{\partial\epsilon}{\partial\tau} \tag{3.a.25}$$

3.1 A point charge q is placed on the planar separation boundary between two homogeneous infinite dielectrics with permittivities ϵ_1 and ϵ_2. Find the potential φ, the field strength E, and the induction D.

3.2 A point charge q lies on a straight line which is the line of intersection of three planes, the angles between the planes being α_1, α_2, and α_3 $(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 2\pi)$. The space between each pair of planes is filled with homogeneous dielectrics with permittivities ϵ_1, ϵ_2, and ϵ_3. Find the potential φ, the electric field strength E, and the induction D.

3.3 The centre of a conducting sphere carrying a charge q lies on the plane boundary between two infinite homogeneous dielectrics with permittivities ϵ_1 and ϵ_2. Find the potential φ of the electric field and the charge distribution, σ, on the sphere.

3.4 The space between the electrodes of a spherical capacitor is partly

filled with a dielectric which occupies a region subtending a solid angle Ω at the centre of the spheres. Find the capacitance C assuming that the radii of the electrodes are a and b, and the permittivity is ϵ.3.5 The permittivity of a medium filling the space between the electrodes of a spherical capacitor whose radii are a and b is given by

$$\epsilon(r) = \begin{cases} \epsilon_1 = \text{ constant }, & a \leqslant r < c, \\ \epsilon_2 = \text{ constant }, & c \leqslant r \leqslant b, \end{cases}$$

where $a < c < b$. Find the capacitance, C, of the capacitor, the distribution of bound charges, σ_b, and the total bound charge in the dielectric.

3.6 A spherical capacitor whose electrodes have radii a and b is filled with a dielectric whose permittivity is given by $\epsilon(r) = \epsilon_0 a^2/r^2$ where r is the distance from the centre. Show that the capacitance of this capacitor is equal to the capacitance of a plane parallel capacitor filled with a homogeneous dielectric with permittivity ϵ_0, electrode area $4\pi a^2$, and distance between the electrodes equal to $b - a$ (neglect edge effects).

3.7 A plane parallel capacitor is filled with a dielectric the permittivity of which is given by $\epsilon = \epsilon_0(x + a)/a$, where a is the distance between the electrodes, S is the area of the plates, and the x-axis is perpendicular to the plates. Neglecting edge effects, find the capacitance C and the distribution of bound charges when a potential difference V is applied between the planes.

3.8 (a) Find the force f_0 per unit area on the two electrodes of a plane parallel capacitor in vacuo when the distance between the plates is a and the potential difference between them is V.

(b) Find the new value f of this force when the charged capacitor is separated from the battery and filled with a liquid dielectric of permittivity ϵ, or when a plate of solid dielectric of the same permittivity and thickness just smaller than a is introduced between the plates so as not to touch them.

(c) Find the force of attraction f between the plates when the capacitor is first filled with the liquid dielectric, or when the solid dielectric plate is inserted into it, before the capacitor is charged from the battery.

3.9 The electrodes of a plane parallel capacitor are at a distance h_1 from each other and have the form of rectangles with sides a and b. A plate of permittivity ϵ is placed between the electrodes in such a way that it is parallel to them. The plate is in the form of a parallelepiped of thickness h_2 and base area $a \times b$. The plate is not completely inserted
into the capacitor so that a length $a - x$ of it remains outside. Find the force F with which the plate is attracted by the capacitor in the following two cases:

(a) a potential difference V is maintained across the capacitor, and

(b) each of the electrodes carries a constant charge q.

Ignore edge effects.

3.10* A plane parallel condenser is placed in an incompressible liquid of permittivity ϵ and density τ so that its plates are vertical. Find the distance h to which the liquid will rise in the capacitor when the distance between the plates is d and the potential difference between them is V.

Hint. Use equations (3.a.23) and (3.a.25).

3.11 Find the direction of the Maxwell stress T'_n which acts on an area d^2S whose normal n makes an angle ϑ with the direction of the electric field E. Find also the magnitude of T'_n and the electrostrictional stress T''_n.

3.12 Two identical point charges q are placed in a homogeneous liquid dielectric of permittivity ϵ at a distance a from each other. Use the Maxwell or the total stress tensor to find the force F acting on each of the charges. What are the components making up the force of interaction $q^2/(a^2\epsilon)$ between the two charges? For comparison, calculate the forces on:

(a) the plane of symmetry perpendicular to the line joining the charges, and

(b) the surface of a small sphere centred on one of the charges.

3.13 An uncharged conducting sphere of radius R and mass m floats in a liquid of permittivity ϵ and density τ, so that three quarters of its volume are immersed. Find the potential φ_0 at which the sphere has to be maintained in order to ensure that half of its volume will be

immersed. Solve the problem by using (a) the Maxwell stress tensor and (b) the total stress tensor including the electrostriction term.

3.14 A point charge q is placed at a point A which is at a distance a from the plane separating two semi-infinite homogeneous dielectrics whose

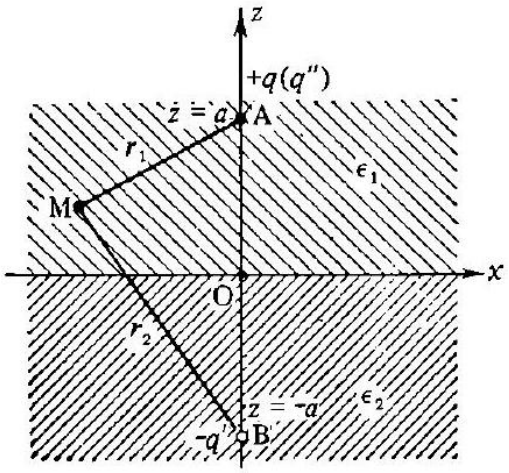


Figure 3.14.1.

permittivities are ϵ_1 and ϵ_2 (figure 3.14.1). Find the potential φ by the method of images.

Hint. The solution should be sought in the form

$$\varphi_1 = \frac{q}{\epsilon_1 r_1} - \frac{q'}{\epsilon_1 r_2}, \quad z \geqslant 0$$

$$\varphi_2 = \frac{q''}{\epsilon_2 r_1}, \quad z < 0$$

where q' and q'' are the required effective charges at the points B and A respectively.

3.15 Find the density σ_b of bound surface charges on the plane separating two homogeneous dielectrics with permittivities ϵ_1 and ϵ_2, which is due to a point charge q (see problem 3.14). Investigate what happens when ϵ_2 tends to infinity and give a physical interpretation of the result.

3.16 Find the force F on the point charge of problem 3.14 (image force). Solve the problem by a number of methods, including the Maxwell stress tensor method. Give a qualitative description of the motion of the charge if it is free to move through the dielectric.

3.17* Two semi-infinite homogeneous dielectrics with permittivities ϵ_1 and ϵ_2 are in contact along an infinite plane. Two charges q_1 and q_2 are placed at equal distances a from this plane along a straight line perpendicular to it. Find the forces F_1 and F_2 acting on each of the charges. Why are the two forces not equal?

3.18 A point charge q is placed in a homogeneous dielectric at a distance a from the plane boundary of a semi-infinite conductor. Find the potential φ in the dielectric, the distribution σ of charges induced in the metal, and the force F on the charge q.

3.19 A point charge q is placed between two earthed intersecting metal planes which are at an angle α_0 to each other. Use the method of images to find the electric field and discuss the special cases $\alpha_0 = 90°, 60°$, and $45°$.

3.20 An electric dipole of moment $\boldsymbol{p}$ is placed in a homogeneous dielectric near the plane boundary of a semi-infinite conductor. Find the potential energy of interaction U of the dipole with the induced charges, and the force F and couple N on the dipole.

3.21* A homogeneous sphere of radius a and permittivity ϵ_1 is placed in a homogeneous dielectric medium of permittivity ϵ_2. At a large distance from the sphere the electric field E_0 in the dielectric is uniform. Find the potential φ everywhere and sketch the lines of force for the two

cases $\epsilon_1 > \epsilon_2$ and $\epsilon_1 < \epsilon_2$. Find also the distribution of bound charges.

3.22 An infinite dielectric was at first homogeneous and uniformly polarised (polarisation vector $\boldsymbol{P}$ = constant). A spherical cavity was then introduced into it. Determine the change in the electric field $\Delta\boldsymbol{E}$ in the cavity in the following two cases:

(a) the introduction of the cavity does not affect the polarisation in the surrounding dielectric [(2)],

(b) the change in the field gives rise to the change in the polarisation [$\boldsymbol{P} = (\epsilon - 1)\boldsymbol{E}/4\pi$].

3.23 An uncharged metal sphere of radius R is introduced into a uniform electric field $\boldsymbol{E}_0$. The permittivity of the surrounding medium is ϵ_0 = constant. Determine the resulting potential φ and density σ of surface charges on the sphere.

3.24* Two equal point charges $q_1 = q_2 = q$ are placed at a distance a from each other in a solid dielectric of permittivity ϵ_1. The charges lie at the centres of small spherical cavities of radius R. Find the forces acting on the charges and compare them with the electric stresses in the plane of symmetry perpendicular to the line joining the charges.

3.25* A conducting sphere of radius R is placed in the field of a point charge q which is at a distance a from the centre of the sphere ($a > R$). The system is immersed in a homogeneous dielectric of permittivity ϵ. Find the potential φ and the charge distribution σ induced on the sphere in the following two cases:

(a) the potential of the sphere is maintained at V and the potential at infinity is zero, and

(b) the charge on the sphere is Q.

Write down the potential in the form of the sum of the potentials due to a number of point-charge images.

Hint. Use the expansion for the solution of Laplace's equation in terms of spherical harmonics (appendix 2) and the expansion for the field due to a point charge which was obtained in problem 2.28.

3.26 A conductor maintained at a potential V contains a spherical cavity of radius R which is filled with a dielectric having a permittivity ϵ. A point charge q is placed at a distance a from the centre of the cavity ($a < R$). Find the field in the cavity and the equivalent system of image charges.

3.27 An earthed conducting plane has a hemispherical boss of radius a. The centre of the sphere lies on the plane. A point charge q is placed on the axis of symmetry of the system at a distance $b > a$ from the plane. Use the method of images to find the potential φ and also the charge Q induced on the boss.

3.28 A conducting sphere of radius R_1 is placed in a homogeneous dielectric of permittivity ϵ_1. The sphere contains a spherical cavity of radius R_2 which is filled with a homogeneous dielectric of permittivity ϵ_2. A point charge q is placed at a distance a from the centre of the cavity ($a < R_2$). Find the potential φ in the whole of space.

3.29* A dielectric sphere of radius R and permittivity ϵ_1 is placed in a homogeneous dielectric ϵ_2. A point charge q is located at a distance a ($> R$) from the centre of the sphere. Find the potential φ in the whole of space. By passing to the limit, find the field for a conducting sphere. Find also the force acting on the charge q due to the polarisation of the sphere produced by it. How does this force change if we place another identical point charge at a spot symmetric with respect to the centre of the dielectric sphere?

3.30 Solve the preceding problem for the case where the point charge q is placed inside the dielectric sphere $\epsilon_1 (a < R)$. Discuss the special case $a = 0$ (charge at the centre of the sphere).

3.31* An insulated metal sphere of radius a is placed inside a hollow metal sphere of radius b. The distance between the centres of the two spheres is c where $c \ll a, c \ll b$. The total charge on the inner sphere is q. Find the charge distribution σ on the inner sphere and the force F acting on it. Terms involving second and higher powers of c may be neglected.

3.32 A spherical capacitor is formed by two nonconcentric spheres (see preceding problem). Cal-

culate, in the first nonvanishing approximation, the correction ΔC to the capacitance which is due to the departure from exact concentricity.
3.33 Find the energy of interaction U between a point charge q and an earthed conducting sphere of radius R. The charge is at a distance a from the centre of the sphere and the system is placed in a homogeneous dielectric medium of permittivity ϵ. Find also the force F on the point charge.
3.34 A point charge q is placed in a dielectric at a distance a from the centre of a conducting insulated sphere of radius R which carries a total charge Q. Find the energy of interaction U between the charge and the sphere and the force F on the point charge.
3.35 What are the conditions which have to be satisfied by a test charge q (in the sense of its magnitude and position in space) in order that it can be used to investigate the field due to a system of charges situated on conductors and dielectrics, and in particular, the field due to a charged sphere in a homogeneous dielectric?

3.36* An electric dipole $\boldsymbol{p}$ is placed in a homogeneous dielectric at a distance r from the centre of an earthed conducting sphere of radius R.

Determine the system of images which is equivalent to the induced charges. Find also the energy of interaction U between the dipole and the sphere, and the force F and couple N on the dipole. Discuss the limiting case $r \to R (r > R)$.
3.37 An electric dipole $\boldsymbol{p}$ is placed at the centre of a spherical cavity of radius R in a conductor. Find the distribution of charges σ induced on the surface of the cavity. Determine the field E' due to these charges inside the cavity.
3.38* The potential at a point O in a homogeneous dielectric with permittivity ϵ may be written down in the form

$$\varphi_1 = \sum_{l,m} \left(\frac{4\pi}{2l+1} \right)^{1/2} a_{lm} r^l Y_{lm}(\vartheta, \phi)$$

The dielectric is then disturbed so that it is no longer homogeneous and neutral in the neighbourhood of O (e.g., an inclusion in the form of a conductor or a dielectric with permittivity $\epsilon_1 \neq \epsilon$ is placed in the region). As a result, the potential outside the disturbed region becomes $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ where

$$\varphi_2 = \sum_{l,m} \left(\frac{4\pi}{2l+1} \right)^{1/2} \epsilon^{-1} r^{-(l+1)} Q_{lm} Y_{lm}(\vartheta, \phi)$$

The potential φ_2 is due to free and bound charges in the region of the disturbance (the factor involving ϵ is introduced for convenience). Find the potential energy of interaction U between the inclusion and the external field φ_1.

Hint. Consider the electric stresses acting on a surface enclosing the inclusion. Use the result of problem 2.60
3.39 Find the energy of interaction U_0 of the inclusion considered in the preceding problem with the external field in the case where, owing to the rapid convergence of the series, terms beyond $l = 1$ may be neglected (slowly varying external field). Give the result in a vector form. Find the force F and the couple N on the inclusion using this approximation.
3.40 Show that an uncharged dielectric body of permittivity ϵ_0 which is placed in a dielectric of permittivity ϵ is attracted towards regions of higher electric field strength, if $\epsilon_0 > \epsilon$, and repelled from such regions, if $\epsilon_0 < \epsilon$.

Hint. Use equation (3.a.16).
3.41 In general, the components of the dipole moment $\boldsymbol{p}$ induced in a dielectric body placed

in an external uniform field E may be written down in the form $p_i = \beta_{ik}E_k$ where β_{ik} is the symmetric polarisability tensor. What orientation will the body tend to assume in the external uniform field? The body is uncharged and the tensor β_{ik} is such that $\beta_{ik}x_ix_k$ is positive definite, i.e. $\beta_{ik}x_ix_k > 0$ where $x_i (i = 1, 2, 3)$ is an arbitrary nonvanishing vector.

3.42 A cylinder made from a dielectric with permittivity ϵ_1 is placed in a homogeneous liquid dielectric with permittivity ϵ_2. What will be the orientation of the cylinder when the system is placed in a uniform external field? What would be the orientation of a thin disc in the liquid dielectric?

3.43 Find the force F on a dielectric sphere due to a point charge q (cf the conditions of problem 3.29). Consider the limiting case of a conducting sphere. Solve the problem by two methods: the method of problem 3.38 and by means of equation (3.a.16).

3.44 An electrostatic field is produced by two conducting cylinders with parallel axes, radii R_1 and R_2, and charges $\pm\kappa$ per unit length. The distance between the axes is $a > R_1 + R_2$. Find the mutual capacitance C_{mut} of the system per unit length [$C_{\text{mut}} = \kappa/(\varphi_1 - \varphi_2)$ where φ_1 and φ_2 are the potentials of the cylinders].

Hint. Use the result of problem 2.49

3.45 The axes of two identical conducting cylinders of radius R are placed at a distance a from each other. The cylinders carry a charge of $\pm\kappa$ per unit length. Find the distribution of charges σ on the surfaces of the two cylinders.

3.46 A capacitor consists of two cylindrical conducting surfaces with radii R_1 and $R_2 > R_1$. The distance between the axes is $a < R_2 - R_1$. Find the capacitance C of the system.

3.47 Determine the potential φ due to a point charge in a homogeneous anisotropic medium characterised by a permittivity tensor ϵ_{ik}.

3.48 A plane parallel plate made from an anisotropic homogeneous dielectric having a permittivity tensor ϵ_{ik} is placed in a vacuum. A uniform electric field $\boldsymbol{E}_0$ is present outside the plate. Using the boundary conditions for the field vector determine the field $\boldsymbol{E}$ inside the plate.

3.49 Find the capacitance C of a plane parallel capacitor with electrode area equal to S when the distance between the plates is a and the space between them is filled with an anisotropic dielectric with a permittivity ϵ_{ik}. Neglect edge effects.

3.50 Find the change in the direction of the lines of force associated with an electric field $\boldsymbol{E}$ on passing from vacuum into an anisotropic dielectric. Use the results of problem 3.48 .

16.3.2 b Coefficients of potential and capacitance

The potentials V_i of a system of n conductors are homogeneous linear functions of the charges q_k on the conductors:

$$V_i = \sum_{k=1}^{n} s_{ik}q_k \quad (i = 1, 2, 3, \ldots, n) \tag{3.b.1}$$

The quantities s_{ik} are called the coefficients of potential. They depend on the relative positions, form, and geometrical dimensions of the conductors, and also on the permittivity of the surrounding medium. The matrix $\hat{s}$ is symmetric:

$$s_{ik} = s_{ki} \tag{3.b.2}$$

The quantity s_{ik} is the potential of the i th conductor when the k th conductor carries a charge $q_k = 1$ while the remaining conductors remain uncharged. All the s_{ik} are positive quantities.

It is clear that the charges on the conductors are homogeneous linear functions of their potentials so that

$$q_i = \sum_{k=1}^{n} c_{ik} V_k \quad (i = 1, 2, 3, \ldots, n) \tag{3.b.3}$$

The quantities c_{ik} are called the coefficients of capacitance. Moreover, $c_{ii} > 0$ (self-capacitances) and $c_{ik} = c_{ki} < 0$ when $i \neq k$ (mutual capacitances).

The quantity c_{ik} is the charge on the i th conductor when all conductors other than the k th conductor are earthed while the k th conductor is maintained at a potential $V_k = 1$. The matrices s_{ik} and c_{ik} are each other's inverses.

In the case of an isolated conductor the only finite coefficient of capacitance is c_{11} and this is referred to simply as the capacitance of the conductor. The capacitance of a capacitor [equation (3.a.14)] may be expressed in terms of the coefficients of capacitance of its electrodes (cf problem 3.52). The energy of a system of conductors is given by

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i,k} c_{ik} V_i V_k = \frac{1}{2} \sum_{i,k} s_{ik} q_i q_k \tag{3.b.4}$$

The generalised force F_a corresponding to a generalised coordinate a is given by

$$F_a = -\frac{1}{2} \sum_{i,k} \frac{\partial s_{ik}}{\partial a} q_i q_k = +\frac{1}{2} \sum_{i,k} \frac{\partial c_{ik}}{\partial a} V_i V_k \tag{3.b.5}$$

Green's reciprocity theorem is useful in the solution of electrostatic problems. This theorem reads as follows: If total charges $q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n$ on n conductors produce potentials $V_1, V_2, V_3, \ldots, V_n$ and if charges
$q'_1, q'_2, q'_3, \ldots, q'_n$ produce potentials $V'_1, V'_2, V'_3, \ldots, V'_n$, then

$$\sum_{i=1}^{n} q_i V'_i = \sum_{i=1}^{n} q'_i V_i \tag{3.b.6}$$

3.51 Prove Green's reciprocity theorem [equation (3.b.6)]. Use it to prove that $s_{ik} = s_{ki}$.
3.52 A given system consists of two conductors at a large distance from all other conductors. The conductor 1 is placed inside the hollow conductor 2. Express the capacitances C and C' of the capacitor and the isolated conductor forming this system in terms of its coefficients of capacitance. Show that the mutual capacitance of conductor 1 and any other conductor which lies outside conductor 2 vanishes.
3.53 Express the coefficients of potential s_{ik} in terms of the coefficients of capacitance c_{ik} in the case of a system of two conductors.
3.54 The capacitances of two isolated conductors are C_1 and C_2. The conductors are in vacuo at a distance r from each other, where r is large compared with the linear dimensions of the conductors. Show that the coefficients of capacitance of the system are given by

$$c_{11} = C_1 \left(1 + \frac{C_1 C_2}{r^2}\right), \quad c_{12} = -\frac{C_1 C_2}{r}, \quad c_{22} = C_2 \left(1 + \frac{C_1 C_2}{r^2}\right)$$

Hint. Determine the coefficients of potential to within terms of the order of $1/r$.
3.55 The coefficients of capacitance of a system of two conductors are c_{11}, c_{22}, and $c_{12} = c_{21}$. Find the capacitance C of a capacitor formed by the two conductors.
3.56 Four identical conducting spheres are placed at the corners of a square. Sphere 1 carries a charge q while the other spheres are uncharged. Sphere 1 is then connected by means of a thin wire in turn to spheres 2, 3, and 4 (cyclic numeration) until equilibrium is established in each case. Find the charge on each of the conductors at the end of the operation. The coefficients of potential may be looked upon as given.

3.57 Three identical spheres of radius a are placed at the corners of an equilateral triangle with sides $b \gg a$. To start with all the spheres carry equal charges q. They are then earthed in turn until equilibrium is established. What is the charge of each sphere at the end of the process?
3.58 The self-capacitance of two conductors, which are lying in a dielectric with permittivity ϵ, at potentials V_1 and V_2 is C_1 and C_2 respectively. The distance between the conductors is much larger than their linear dimensions. Find the force F between them.
3.59 A closed conducting surface at a potential V_1 encloses a conductor at a potential V_0. At the same time, the potential at a point P in the space between the two surfaces is V_P. The conductors are then earthed and a charge q is placed at the point **P**. Find the charges induced on the conductors.
3.60 Show that the geometrical locus of points from which a unit point charge induces in an earthed conductor a charge of equal magnitude is an equipotential surface in the field of the conductor in the absence of the point charge.
3.61 Two conductors with self-capacitances c_{11} and c_{22} and mutual capacitance c_{12} form a part of a system of insulated conductors and are connected by a thin wire. Find the self-capacitance of the subsystem of joined conductors and the coefficients of mutual capacitance between it and the remaining conductors.
3.62 Two identical spherical capacitors with inner and outer radii a and b are insulated and placed at a large distance from each other. The inner spheres are given charges q and q_1, after which the outer spheres are joined by a wire. Find an approximate expression for the change ΔW in the energy of the system.
3.63 The thin outer electrode of a spherical capacitor is earthed and a small aperture is cut in it. An insulated wire is then passed through this aperture so that the inner sphere becomes connected to a third conductor which lies at a large distance from the capacitor. The selfcapacitance of the third conductor is C and the total charge carried by the inner sphere and the distant conductor is q. Find the force F on the third conductor assuming that the radius of the outer sphere is b and that of the inner sphere is a.
3.64* A conductor is charged by placing it in contact with the plate of an electrophorus. The conductor is then removed and the plate is recharged to a charge Q. On first contact the charge given to the conductor is q. What is the charge received by the conductor after a very large number of contacts?

16.3.3 c Special methods of electrostatics

This section contains electrostatic problems which are mathematically more difficult. The various methods which may be used to solve electrostatic problems are discussed in several books, such as the ones listed at the beginning of this chapter. In this section only some of these methods are illustrated, namely, the method of curvilinear coordinates (in the case of elliptical surfaces and the surfaces of two spheres), the methods of images, integral transformations, and inversion. These methods are explained in the solutions of the various problems (for example, problems
3.65, 3.67, 3.77, 3.81, 3.83, and 3.87). We shall confine our attention here to a brief account of the method of inversion.

Inversion is defined as the transformation of space in which each point is transformed into a conjugate point relative to some suitably chosen sphere of inversion of radius R. If the spherical coordinates (with origin at the centre of the sphere of inversion) of the original point are r, ϑ, and ϕ, then the spherical coordinates of the inverse point are $r' = R^2/r, \vartheta$, and ϕ. In vector form,

$$r' = \frac{R^2 r}{r^2}, \quad \text{or} \quad r = \frac{R^2 r'}{r'^2} \tag{3.c.1}$$

Inversion is a conformal transformation. Inversion transforms a sphere into a sphere. If, in particular, the centre of inversion lies on the sphere to be transformed, then the latter becomes a plane, and vice versa.

Laplace's equation is invariant with respect to inversion, i.e. if a function $\varphi(r)$ is a solution of Laplace's equation in the original space then

$$\varphi'(r') = \frac{r}{R}\varphi(r) = \frac{R}{r'\varphi}\left(\frac{R^2}{r'^2}r'\right) \tag{3.c.2}$$

is a solution of the equation in the inverted space.

The basic problem which may be solved by the method of inversion may be formulated as follows: it is required to find the field due to a system of earthed conductors and point charges q_i placed at points with position vectors r_i. The potential at infinity is V = constant. In order to solve the problem let us use the method of inversion to transform the surfaces of the conductors into a simpler form.

The point charges q_i are then replaced by

$$q_i' = \frac{R}{r_i}q_i \tag{3.c.3}$$

which lie at the points

$$r_i' = R^2\frac{r_i}{r_i^2}$$

Moreover, a charge

$$q_0 = -RV \tag{3.c.4}$$

appears at the point $r' = 0$. The electrostatic problem, that is, the determination of the potential $\varphi'(r')$, is then solved in the inverted system. The potential $\varphi(r)$ may then be obtained by means of the reciprocal transformation.

3.65* A conducting ellipsoid carrying a charge q and having semiaxes a, b, and c is placed in a homogeneous dielectric of permittivity ϵ. Find the potential φ and the capacitance C of the ellipsoid and also the surface charge density σ.

Hint. Use the ellipsoidal coordinates (see problem 1.64). The potential should be sought in the form $\varphi(\xi)$.

3.66 Using the results of the preceding problem find the potentials and the capacitances of a prolate and an oblate ellipsoid of revolution. Consider the special cases of a thin long rod and a thin disc. The capacitance C and the potential φ of the prolate ellipsoid should also be found using the result of problem 2.7 .

3.67* A conducting ellipsoid carrying a charge q is placed in a vacuum in a uniform external field E_0 which is parallel to one of the axes of the ellipsoid. Find the potential φ of the resultant electric field.

Hint. Use the ellipsoidal coordinates of problem 1.64. The boundary conditions on the surface of the ellipsoid ($\xi = 0$) can only be satisfied if the dependence of the potential φ' due to the induced charges on the coordinates η, ζ is the same as for the external field: $\varphi' = \varphi_0(\xi, \eta, \zeta)F(\xi)$.

3.68 The field strength in a plane parallel capacitor is E_0. The earthed electrode carries a boss in the form of one half of a prolate ellipsoid of revolution whose axis of symmetry is perpendicular to the plates. The distance between the plates is large compared with the linear dimensions of the boss. Find the potential φ at a point between the plates, and the ratio of the maximum value $E_{\max}$ of the field to the field E_0. (The result of this problem explains how a lightning conductor works.)

3.69 An uncharged conducting ellipsoid is placed in a uniform external field $\boldsymbol{E}_0$ which is arbitrarily oriented relative to the axes of the ellipsoid. Find the total potential φ. Discuss the potential at a large distance from the ellipsoid by expressing it in terms of the depolarisation coefficients

$$n^{(x)} = \frac{abc}{2}\int\limits_0^\infty \frac{\mathrm{d}s}{(s+a^2)R_s}, \qquad n^{(y)} = \frac{abc}{2}\int\limits_0^\infty \frac{\mathrm{d}s}{(s+b^2)R_s}$$
$$n^{(z)} = \frac{abc}{2}\int\limits_0^\infty \frac{\mathrm{d}s}{(s+c^2)R_s} \qquad \left\{R_s = \left[(s+a^2)\,(s+b^2)\,(s+c^2)\right]^{1/2}\right\}$$

3.70 Find expressions for the depolarisation coefficients introduced in the preceding problem for a prolate ellipsoid of revolution ($a > b = c$). Discuss the special cases of a very elongated ellipsoid (rod) and an almost spherical ellipsoid.

3.71 Find the depolarisation coefficients for an oblate conducting ellipsoid ($a = b > c$). Discuss the special case of a disc.

3.72* A dielectric ellipsoid with semiaxes a, b, and c is placed in a uniform external field $\boldsymbol{E}_0$. The permittivity of the ellipsoid and of the homogeneous dielectric which surrounds it are ϵ_1 and ϵ_2, respectively. Find the potential φ of the resultant electric field (use the hint given in problem 3.67). Find the field strength $\boldsymbol{E}$ inside the ellipsoid and also the potential φ_2 at large distances from the ellipsoid by expressing it in terms of the components of the polarisability of the ellipsoid along its principal axes.

3.73 An ellipsoid of revolution with permittivity ϵ_1 is placed in a uniform external field E_0 in a homogeneous dielectric with permittivity ϵ_2. Find the energy U of the ellipsoid in this field and the couple N acting on it. Discuss also the case of a conducting ellipsoid of revolution.

3.74* Show that when a conducting liquid sphere is given a sufficiently large charge it becomes unstable. Find the critical charge q_c assuming that the radius of the drop is R and the surface tension is γ.

Hint. Compare the energy of a spherical drop with the energy of a deformed drop in the shape of a prolate ellipsoid of revolution. The surface area of this ellipsoid is given by

$$S = 2\pi b^2 + \frac{2\pi b a^2}{(a^2-b^2)^{1/2}} \arccos\frac{b}{a} \quad (a > b = c)$$

3.75* A uniform electric field $E_0 \| z$ in the half-space $z < 0$ is bounded by an earthed conducting plane $z = 0$ which carries a circular aperture of radius a. Find the potential φ in the whole of space.

Consider the special case of large distances from the aperture with $z > 0$.

Hint. Use the oblate spheroidal coordinates (see problem 1.65) with $c = 0$. The solution should be sought in the form $\varphi = -E_0 z F(\xi)$.

3.76 Find the distribution of charges σ on the conducting plane of the preceding problem.

3.77* A point charge q is placed between two earthed conducting halfplanes OA and OB which are at an angle β to each other. The point charge is at N (r_0) in figure 3.77.1. The cylindrical coordinates of the point charge are $(r_0, \gamma, 0)$, the z-axis lies along the line of intersection of the two planes, and the azimuthal angle ϕ is measured from the plane OA. Show that the potential $\varphi(r, \phi, z)$ may be written in the form

$$\varphi(r,\phi,z) = \int\limits_0^\infty \varphi_k(r,\phi)\cos kz\ \mathrm{d}k$$

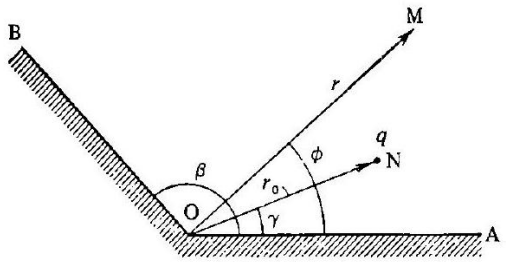


Figure 3.77.1.
where

$$\varphi_k(r,\phi)=\frac{8q}{\beta}\begin{cases}\sum\limits_{n=1}^{\infty}K_{n\pi/\beta}\left(kr_0\right)I_{n\pi/\beta}(kr)\sin\frac{n\pi\gamma}{\beta}\sin\frac{n\pi\phi}{\beta}, & r<r_0\\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}I_{n\pi/\beta}\left(kr_0\right)K_{n\pi/\beta}(kr)\sin\frac{n\pi\gamma}{\beta}\sin\frac{n\pi\phi}{\beta}, & r>r_0\end{cases}$$

and I_ν and K_ν are the cylinder functions.
Hint. Use equation (A3.11) of appendix 3.
3.78 Show that the potential due to a point charge placed between the two planes of the preceding problem may be expressed in the form

$$\varphi(r,\phi,z)=\frac{q}{\beta\left(2rr_0\right)^{1/2}}\int\limits_n^{\infty}\left\{\frac{\sinh(\pi\zeta/\beta)}{\cosh(\pi\zeta/\beta)-\cos[\pi(\phi-\gamma)/\beta]}-\frac{\sinh(\pi\zeta/\beta)}{\cosh(\pi\zeta/\beta)-\cos[\pi(\phi+\gamma)/\beta]}\right\}\frac{\mathrm{d}\zeta}{(\cosh\zeta-\cosh\eta)^{1/2}}$$

where

$$\cosh\eta=\frac{r_0^2+r^2+z^2}{2rr_0},\quad \eta>0$$

Hint. Use the following formulae

$$\int\limits_0^{\infty}K_\nu(kr)I_\nu\left(kr_0\right)\cos kz\ \mathrm{d}k=\frac{1}{2\left(2rr_0\right)^{1/2}}\int\limits_\eta^{\infty}\frac{\exp(-\xi\nu)\mathrm{d}\xi}{(\cosh\xi-\cosh\eta)^{1/2}}$$

and

$$\sum_{n=1}^{\infty}p^n\cos nx=\frac{1}{2}\left(\frac{1-p^2}{1-2p\cos x+p^2}-1\right)$$

3.79 Find the potential φ due to a charge q, having cylindrical coordinates $r_0,\gamma,z=0$, which is lying close to the conducting halfplane $\phi=0$.

Hint. Use the result of problem 3.78. In order to evaluate the integral use the substitution $\cosh\frac{1}{2}\zeta=\cosh\frac{1}{2}\eta\cosh u$ where $0<u<\infty$.
3.80 Find the distribution of surface charge σ near the line of intersection of the two conducting planes of figure 3.77.1. Assume that the system lies in the field of an arbitrary charge distribution.

Hint. Consider the case of a single charge near the system; use the result of problem 3.77, the expansion given by equation (A3.6) of appendix 3, and the formula

$$\int\limits_0^{\infty}K_\nu(k\rho)k^\nu\cos kz\ \mathrm{d}k=2^{\nu-1}\sqrt{\pi}\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\frac{\rho^\nu}{\left(\rho^2+z^2\right)^{\nu+1/2}}$$

3.81* A point charge q is placed at a distance a from a homogeneous plane parallel dielectric plate of thickness c. Find the electric field using
the fact that both the product

$$J_0\,(kr_1)\exp(\pm kz)$$

and the integral

$$\int_0^\infty A(k)J_0\,(kr_1)\exp(\pm kz)\mathrm{d}k$$

satisfy the Laplace equation [r_1, z are cylindrical coordinates, J_0 is the zero-order Bessel function and $A(k)$ is an arbitrary function of k].

Hint. Use the result

$$\frac{1}{(r_1^2+z^2)^{1/2}} = \int_0^\infty \exp(-k|z|)J_0\,(kr_1)\,\mathrm{d}k$$

which is derived in appendix 3.

3.82 A plane parallel dielectric plate of thickness $\frac{1}{2}a$ and permittivity ϵ is placed between the plates of a plane parallel capacitor which are at a distance a from each other. The dielectric is in contact with one of the plates, both of which are earthed. A charge q which may be looked upon as a point charge is then placed on the surface of the dielectric. Find the potential φ in the capacitor and discuss its form in the neighbourhood of the charge. Use the method of images.

3.83* The radii of the electrodes of a nonconcentric spherical capacitor are a_1 and a_2 and the distance between their centres is $b\,(a_1+b<a_2)$; the outer sphere is earthed and the inner sphere is maintained at a potential V. Find the potential φ inside the capacitor. Find also the capacitance C of the spherical capacitor.

Hint. Use bispherical coordinates (see problem 1.67). Use the substitution

$$\varphi = (2\cosh\xi - 2\cos\eta)^{1/2}\psi$$

carry out the separation of variables in the equation for ψ, and use the results of appendix 2, especially equation (A2.16).

3.84 Find the capacitance of a nonconcentric spherical capacitor assuming that the distance between the centres is small ($b \ll a_1, b_2$) to within terms of the order of b^2 by using the results of the preceding problem (cf problem 3.32).

3.85 The distance between the centres of two conducting spheres of radii a_1 and a_2 is $b\,(b>a_1+a_2)$. Find the coefficients of capacitance c_{ik} of the system using bispherical coordinates.

3.86 The two conducting spheres of the preceding problem are at a large distance from each other ($b \gg a_1, a_2$). Find the coefficients of capacitance c_{ik} to within terms of the order of b^{-4}.

3.87* Two conducting spheres of equal radii a touch each other. Find the capacitance C of the system by the inversion method. Find also the potential φ due to the system when the spheres carry a total charge q.

Hint. Use the results of problem 3.82.

3.88 Use the inversion method to determine the field of an earthed sphere of radius R with a point charge q placed at a distance $a>R$ from its centre (see problem 3.25).

Hint. The potential of a uniformly charged sphere in the absence of the point charge may be regarded as known.

3.89* The surface of a conductor is formed by two spheres of radii R_1 and R_2 which intersect on a circle of radius a. Find the capacitance C of the conductor using the solution of problem 3.78 (two intersecting planes) and the inversion method.

Hint. The surface of the conductor can be described in terms of toroidal coordinates (see problem 1.68) by the equations

$$\xi = \xi_1 = \text{ constant }, \qquad \xi = \xi_2 = \text{ constant}$$
$$\left(\sin\xi_1 = \pm\frac{a}{R_1}, \qquad \sin\xi_2 = \pm\frac{a}{R_2}\right)$$

It is sufficient to consider the transformation of the coordinates in the plane perpendicular to the line of intersection of the two planes and passing through the centre of inversion, which should be taken to lie on the circle of intersection of the two spheres. In order to determine the charge q on the conductor for a given potential use the fact that the field at large distances from the conductor is of the form $\varphi = (q/r) - V$ where $-V$ is the potential at infinity.

3.90 Find the capacitance C of the following conductors:
(a) a hollow spherical segment of radius R which subtends an angle 2θ at the centre;
(b) a hemisphere of radius R.

3.91 A conductor is formed by two spheres each of radius a whose surfaces intersect at an angle $\frac{1}{3}\pi$. Find the capacitance C of the conductor.

16.4 Steady currents

The distribution of steady currents in a conducting medium with specific conductivity $\gamma(r)$ may be described with the aid of a current density $j(r)$ which satisfies the equation

$$\operatorname{div} j = 0 \tag{4.0.1}$$

This equation is a consequence of the law of conservation of charge. The current density in a medium is proportional to the sum of the electric field $\boldsymbol{E}$ and the external field (e.m.f.) $\boldsymbol{E}_\mathrm{e}$ which includes nonelectrical effects:

$$j = \gamma\,(E + E_\mathrm{e}) \tag{4.0.2}$$

This expression is equivalent to Ohm's law.

The electric field $\boldsymbol{E}$ and the current distribution $\boldsymbol{j}$ in a conductor can be conveniently described by a scalar potential φ (just as in electrostatics). The potential is defined by $\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad}\varphi$. It follows from this definition and from equations (4.0.1) and (4.0.2) that the basic differential equation for φ is

$$\operatorname{div}(\gamma \operatorname{grad}\varphi) = \operatorname{div}\gamma E_\mathrm{e} \tag{4.0.3}$$

On surfaces across which γ or $\boldsymbol{j}_\mathrm{e} = \gamma\boldsymbol{E}_\mathbf{e}$ are discontinuous, equation (4.0.3) is replaced by the boundary conditions

$$\gamma_2 E_{2n} - \gamma_1 E_{1n} = j_{\mathrm{e}1n} - j_{\mathrm{e}2n}, \tag{4.0.4}$$
$$\varphi_1 = \varphi_2. \tag{4.0.5}$$

On the surfaces of insulators ($\gamma = 0$) the condition given by equation (4.0.4) becomes

$$j_n = 0, \quad \text{or} \quad \gamma E_n + j_{en} = 0 \tag{4.0.6}$$

If the medium consists of a number of homogeneous regions and contains no external sources of e.m.f. then within each such region

$$\nabla^2 \varphi_k = 0 \tag{4.0.7}$$

while on the separation boundary of the i th and k th regions

$$\varphi_i = \varphi_k, \quad \gamma_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial n} = \gamma_k \frac{\partial \varphi_k}{\partial n} \quad \text{(no summation!)} \tag{4.0.8}$$

It is clear from equations (4.0.3) to (4.0.8) that there is a close correspondence between the basic, current problem and the analogous problem in electrostatics. The solution of the current problem may be obtained by solving the corresponding electrostatic problem (and vice
(1) For details of the theory we refer to the textbooks by Smythe (1950) or Landau and Lifshitz (1960).
versa) providing the following replacements are made:

$$\begin{array}{ll} \epsilon \to \gamma, & D \to -\gamma \operatorname{grad} \varphi \\ 4\pi\rho \to -\operatorname{div} j_{\mathrm{e}}, & 4\pi\sigma \to j_{ein} - j_e 2n \end{array} \tag{4.0.9}$$

The methods of electrostatics (see chapter 3) can therefore be used to solve the basic current problem. Thus, if a medium with finite conductivity $\gamma(r)$ contains perfect conductors ($\gamma \to \infty$) then the potential on each of the surfaces must satisfy the condition

$$\varphi_{\mathrm{el}} = \text{ constant} \tag{4.0.10}$$

The current problem is then analogous to the electrostatic problem of a system of conductors placed in a dielectric. As in the electrostatic case, there are two versions of the problem, namely, (a) the potentials of the electrodes (conductors) are given, $\varphi_k = V_k$; and (b) the currents leaving the electrodes are given so that

$$J_k = \oint_{S_k} j_n \, \mathrm{d}^2 S_k = -\oint \gamma \frac{\partial \varphi}{\partial n} \, \mathrm{d}^2 S_k \tag{4.0.11}$$

It is clear from the latter expression that the analogous quantities are the charge on the k th conductor q_k in the electrostatic problem and the current $J_k/(4\pi)$ from the k th electrode in the current problem.

The potentials V_k of the electrodes are linear functions of the currents J_k leaving the electrodes:

$$\left.\begin{array}{l} V_1 = R_{11} J_1 + R_{12} J_2 + \ldots + R_{1n} J_n, \\ V_2 = R_{21} J_1 + R_{22} J_2 + \ldots + R_{2n} J_n \\ V_n = R_{n1} J_1 + R_{n2} J_2 + \ldots + R_{nn} J_n. \end{array}\right\} \tag{4.0.12}$$

The coefficients R_{ik} are called the coefficients of resistance. They are independent of the potentials V_k and the currents J_k, and are determined exclusively by the geometry of the electrodes and the form of conductivity function γ. The coefficients of resistance are analogous to the coefficients of potential in the electrostatic problem (see problem 4.15).

The distribution of currents in quasi-linear conductors which is often encountered in practice may be determined with the aid of Kirchhoff's laws (see e.g. Smythe, 1950). A convenient method of considering complicated circuits involving quasi-linear conductors is the method of circulating currents [see e.g. Smythe (1950); in chapter 7 of that book one can find a large number of problems about current distributions].

4.1 An accumulator with a low internal resistance and e.m.f. & is unable to supply a given

instrument with a current J for a long period of time. In order to extend the life of the accumulator the instrument and the accumulator are connected in parallel and then joined through a resistance
R to DC mains. The voltage V of the mains is subject to fluctuations which are such that $V_1 \leqslant V \leqslant V_2$ where $V_1 > V_2 >$ &. The resistance R is chosen so that when $V = V_1$ no current is drawn from the accumulator, $J_1 = 0$. Find the current J_2 drawn from the accumulator when $V = V_2$.

4.2 Find the parameters of the coil of a moving coil galvanometer which gives a maximum deflection for a given external e.m.f. and external resistance R (series connection). The deflection of the galvanometer is proportional to the number of turns n in the coil and the current J in the circuit. Since the volume occupied by the coil is limited, it may be assumed that nS is approximately constant, where S is the cross section of the wire from which the coil is made.

4.3 A square net made of a wire of uniform cross section consists of n^2 identical square cells. The resistance of one side of each of these cells is r. The current enters at one of the corners of the net and leaves at the opposite corner. Find the resistance R of the entire net for $n = 2, 3,$ and 4 .

Hint. In order to reduce the number of circulating currents make use of the symmetry of the circuit.

4.4* A telegraph line (figure 4.4.1) is suspended from n insulators at $\mathrm{A}_1,\ \mathrm{A}_2, \ldots,\ \mathrm{A}_n$ (the earth forms the return lead). The sections $\mathrm{AA}_1,\ \mathrm{A}_1\ \mathrm{A}_2,\ \ldots, \mathrm{A}_n\ \mathrm{A}_{n+1}$ have the same resistance R and the insulators have an infinite resistance when dry. When the insulators are damp there is leakage to earth through them and the resistance of each of the insulators is then r. At one end of the line there is a battery with an internal resistance R_i and e.m.f. & while the final element is connected to earth through the resistance R_a. Find the current in each of the sections of the line and also the current flowing through the load R_a. By how much should the e.m.f. of the battery be increased in order that the current through the load should be the same both in the case of dry and damp insulation? Consider the special case of $R_a = 0$.

Hint. Consider circulating currents in the circuits formed by the section $\mathrm{A}_{k-1}\ \mathrm{A}_k$ of the line and the leakage paths for the insulators A_{k-1} and A_k. The solution of the resulting differential equation is the hyperbolic cosine.

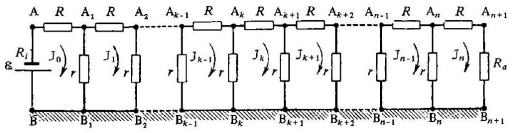


Figure 4.4.1.

4.5* An underground cable has a constant resistance ρ per unit length. The insulation of the cable is imperfect and such that the leakage conductivity per unit length is constant and equal to $1/\rho'$ with the earth acting as the return lead. Find the differential equation that describes the distribution of steady currents in the cable. Find the relation between the current $J(x)$ in the cable and the potential difference $\varphi(x)$ between the central conductor and the earth.

Hint. Use equation (4.4.1) of the solution of problem 4.4.

4.6* A battery of e.m.f. & and internal resistance R_i is connected between one end of an underground cable and the earth. The length of the cable is a and its resistance per unit length and conductivity per unit length are ρ and $1/\rho'$, respectively. The other end of the cable is connected to earth through a resistance R_a. Find the current distribution $J(x)$ along the cable. In particular, consider the special case $R_i = R_a = 0$. Check the result by finding the solution for the case where there is no leakage.

Hint. Use the differential equations obtained in problem 4.5, or equation (4.4.7) of the solution of problem 4.4.

4.7 Two plane parallel conducting plates are placed in contact with the two electrodes of a plane parallel capacitor. The thickness of the two plates is h_1 and h_2 and their conductivities and permittivities are, γ_1, γ_2, and ϵ_1, ϵ_2, respectively. The plates of the capacitor are made of a material whose conductivity is much greater than γ_1 and γ_2 and a constant potential difference V is maintained across them. Find the electric field E, the induction D, and the current density j in the plates, and also the densities of free and bound charges on all three separation boundaries.
4.8 Find the law of refraction for current lines across a smooth separation boundary between two media with conductivities γ_1 and γ_2, respectively.
4.9* A constant current J flows through an infinitely long straight conductor of radius a and conductivity γ. The conductor is surrounded by a thick cylindrical envelope which is coaxial with it and serves as the return lead. The inner radius of the envelope is b and the outer radius $c \to \infty$. Find the electric potential φ and the magnetic field H in the whole of space and determine the distribution of surface charges, σ. Assume that the permittivity of the medium between the conductors is ϵ.
4.10 Three conductors of circular cross section and the same radius r are connected in series forming a closed ring. The lengths of the conductors are $l_0, l_1, l_2 \gg r$ and their conductivities are $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$. An external e.m.f. $\mathscr{E}_0$, which is independent of time, is uniformly distributed throughout the first of the three conductors. Find the electric field E and the distribution of charges inside the ring.
4.11 Find the energy flux S through the surfaces of the three conductors considered in problem 4.10. Hence deduce Joule's law.
4.12 The current distribution in a three-dimensional conductor with conductivity γ is such that the electric field strength and, therefore, the current density are constant on any equipotential surface. Show that the resistance of the conductor is given by the same formula as the resistance of a quasi-linear conductor with a variable cross section. Note that these conditions are analogous to the conditions under which the electrostatic Gauss theorem may be used in the corresponding electrostatic problem.
4.13 Using the result of the preceding problem find the resistance R for the following conductors:
(a) a spherical capacitor with plate radii a and $b(a < b)$, filled with a homogeneous medium of conductivity γ,
(b) a similar capacitor filled with two homogeneous layers with conductivities γ_1 and γ_2, which are separated by a spherical boundary of radius c (the layer with conductivity γ_1 is in contact with the inner electrode),
(c) a cylindrical capacitor with plate radii a and $b(a < b)$, and length l which is filled with a medium of conductivity γ (neglect edge effects).
4.14 A particular system is earthed with the aid of a perfectly conducting sphere of radius a. One half of the sphere is in contact with the ground (ground conductivity $\gamma_1 =$ constant). The layer of earth which is in immediate contact with the sphere has an artificially increased conductivity γ_2. Find the resistance R to earth of the earthing device assuming that the outer radius of the special layer next to the sphere is b.
4.15* A system of perfect conductors (electrodes) is placed in a medium with conductivity $\gamma(r)$ and permittivity $\epsilon(r)$. The medium is such that $\gamma(\boldsymbol{r})/\epsilon(\boldsymbol{r}) =$ constant at all points. This condition can also be formulated differently: The space between the perfect conductors is filled, instead of with a medium with a conductivity γ, with a dielectric medium with a permittivity ϵ which is everywhere proportional to γ, so that $\epsilon/\gamma =$ constant. Find the relation between the coefficients of potential s_{ik} and the coefficients of resistance R_{ik} of the system of conductors. What is the relation between the charges q_k on the electrodes and the currents J_k leaving them?
4.16 A capacitor of arbitrary form is filled with a homogeneous dielectric of permittivity ϵ. Find

its capacitance C if it is known that when it is filled with a homogeneous conductor having a conductivity γ its DC resistance is R.
4.17 A system of electrodes is characterised by the coefficients of resistance R_{ik}. Find the amount of heat Q liberated per unit time in the space between the electrodes given that the currents J_k leaving the electrodes are known.
4.18 Two perfectly conducting spheres of radii a and b are placed in a homogeneous medium with conductivity γ and dielectric permittivity ϵ. The distance between the centres of the spheres is l and a current J enters one of the spheres and is taken out through the other. Find the resistance

$$R = \frac{V_a - V_b}{J}$$

of the medium between the spheres, where V_a and V_b are the potentials of the two spheres and J is the current leaving the sphere of radius a.

Hint. Express R_{ik} in terms of the coefficients of capacitance c_{ik} of the system (see problem 3.85).
4.19 The ends of a given circuit are earthed by means of two perfectly conducting spheres (radii a_1 and a_2). One half of each of the spheres is in contact with the earth which acts as the second lead. The distance between the spheres is $l \gg a_1, a_2$ and the conductivity of the earth is γ. Find the resistance R between the spheres.
4.20 Solve the preceding problem in the case where the two spheres are replaced by identical ellipsoids of revolution of volume V and eccentricity e_0. The axes of revolution of the ellipsoids are perpendicular to the earth's surface and their centres lie on this surface. Which of the two systems is a more efficient earthing device (i.e. ensures a lower resistance)?
4.21* A plane electrode $x = 0$ is capable of emitting an unlimited number of particles of charge e and mass m when an electric field is applied to it. The particles leave the plate with zero initial velocity and are accelerated towards another plane electrode which is parallel to the first electrode and is at a distance a from it. The potential difference between the electrodes is φ_0. The emission from the first electrode continues until the field due to the space charge produced between the plates compensates the external field so that $(\partial\varphi/\partial x)_{x=0} = 0$ on the surface of the first electrode. Find the steady-state current j between the electrodes as a function of the potential difference φ_0 between them.

Hint. The potential in the space between the electrodes obeys the Poisson equation $\nabla^2\varphi = -4\pi\rho, \rho = j/v$ where v is the velocity of the particles at a particular point.

16.5 Magnetostatics

In the case of a constant magnetic field Maxwell's equations are of the form

$$\operatorname{curl} \boldsymbol{H} = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0 \tag{5.0.1}$$

where B is the magnetic induction, H is the magnetic field strength, and $\boldsymbol{j}$ is the current density. The quantity c is equal to the ratio of the electromagnetic to electrostatic units of charge ($c = 3 \times 10^8$ m s^{-1}). In isotropic diamagnetics and paramagnetics B and $\boldsymbol{H}$ are related by

$$B = \mu H \tag{5.0.2}$$

where μ is the magnetic permeability of the material (a scalar). In the case of anisotropic materials the permeability is a tensor of rank 2 . The density of molecular currents in a material

placed in a magnetic field may be expressed in terms of the magnetisation vector M (magnetic moment per unit volume):

$$j_{\mathrm{mol}} = c \operatorname{curl} M \tag{5.0.3}$$

The three vectors $\boldsymbol{M}, \boldsymbol{B}$, and H are related by

$$B = H + 4\pi M \tag{5.0.4}$$

The main methods which may be used to determine the magnetic field in a nonferromagnetic medium are as follows:
(a) The use of the Biot-Savart law. The magnetic field due to a current element $J\ \mathrm{d}l$ in a vacuum or a homogeneous medium is given by

$$\mathrm{d}H = \frac{J}{cr^3}[\ \mathrm{d}l \wedge r] \tag{5.0.5}$$

According to the superposition principle, the total field at a given point may be obtained by integrating equation (5.0.5) with respect to all the current elements.
(b) Direct integration. Equations (5.0.1) and (5.0.2) may be integrated subject to the boundary conditions

$$(n \cdot [B_2 - B_1]) = 0 \quad [n \wedge (H_2 - H_1)] = \frac{4\pi}{c} i \tag{5.0.6}$$

where $\boldsymbol{i}$ is the surface current density and the normal $\boldsymbol{n}$ is drawn from the first region into the second. If the current distribution is axially
(1) For details of the theory refer to the textbooks by Stratton (1941), Smythe (1950), Landau and Lifshitz (1960, 1975), Panofsky and Phillips (1962), Jackson (1962), or Robinson (1973).
symmetric then the following integral form of the first of the two equations in equation (5.0.1) is useful:

$$\oint H_l\ \mathrm{d}l = \frac{4\pi}{c} J \tag{5.0.7}$$

The closed integral in this expression is evaluated over an arbitrary closed path and J is the total current flowing through an arbitrary surface drawn through this path.
(c) The vector potential method. The vector potential $\boldsymbol{A}$ is defined by

$$B = \operatorname{curl} A \tag{5.0.8}$$

with the subsidiary condition

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} = 0 \tag{5.0.9}$$

In all regions in which the magnetic material is homogeneous, $\boldsymbol{A}$ satisfies the equation

$$\nabla^2 A = -\frac{4\pi\mu}{c} j \tag{5.0.10}$$

The boundary conditions for the vector potential may be deduced from those for B and H [equation (5.0.6)].

The vector potential due to a given current distribution in a homogeneous medium with a given permeability μ may be written down in the form of the volume integral

$$A(r) = \frac{\mu}{c} \int \frac{j\,(r')\,\mathrm{d}^3 r'}{|r - r'|} \tag{5.0.11}$$

The corresponding expression for a linear current may be obtained by making the following substitution $j\ \mathrm{d}^3\boldsymbol{r}' \to J\ \mathrm{d}l'$. At large distances from a given current distribution equation (5.0.11) assumes the simpler form

$$A = \frac{[m \wedge r]}{r^3} \tag{5.0.12}$$

where the magnetic dipole moment $\boldsymbol{m}$ is given by

$$m = \frac{1}{2c}\int [r' \wedge j]\,\mathrm{d}^3r' \tag{5.0.13}$$

and it is assumed that $\mu = 1$.

(d) The scalar potential method. In all regions of space where $\boldsymbol{j} = 0$, we have $\operatorname{curl}\boldsymbol{H} = 0$, and hence

$$\boldsymbol{H} = -\operatorname{grad}\psi \tag{5.0.14}$$

where ψ is a scalar potential which, for $\mu =$ constant, satisfies the Laplace equation. However, the scalar potential defined in this way will not in
general be a single-valued point function. The scalar potential is used in problems 5.14, 5.15, etc.

Actual current distributions are bounded in space, and the current densities, potentials, and field strengths of such systems vanish at infinity. However, in a number of cases it turns out to be convenient to consider infinite conductors which have currents that produce nonvanishing fields at infinity. The results obtained in that way describe correctly the field close to the main parts of a finite conductor at distances small compared to the conductor's length.

The energy of the magnetic field localised in a volume V is given by the following integral

$$W = \frac{1}{8\pi}\int (\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B})\mathrm{d}^3r \tag{5.0.15}$$

which is evaluated over the volume V. If a given system of currents has finite dimensions then its total energy may be calculated with the aid of the formula

$$W = \frac{1}{2c}\int (A\cdot j)\mathrm{d}^3r \tag{5.0.16}$$

in which the integration is carried out over the volume occupied by the currents.

The magnetic energy of a quasi-linear conductor carrying a current J may be expressed in terms of the self-inductance L of the conductor:

$$W = \frac{1}{2c^2}LJ^2 \tag{5.0.17}$$

The self-inductance may also be written down in the form of a double integral over the volume occupied by the conductor:

$$L = \frac{1}{J^2}\iint \frac{(j(r)\cdot j\,(r'))}{|r-r'|}\mathrm{d}^3r\ \mathrm{d}^3r' \tag{5.0.18}$$

The energy of interaction between two current-carrying conductors is given by

$$W_{12} = \frac{1}{4\pi}\int (H_1\cdot B_2)\,\mathrm{d}^3r = \frac{1}{c}\int (j_1\cdot A_2)\,\mathrm{d}^3r_1 \quad (W_{12} = W_{21}) \tag{5.0.19}$$

where the first integral is evaluated over the whole of space and the second over the volume of one of the conductors. In the case of quasilinear currents the energy may be expressed in terms of the coefficient of mutual inductance L_{12}:

$$W_{12} = \frac{1}{c^2} L_{12} J_1 J_2 \tag{5.0.20}$$

which may also be rewritten in the form

$$W_{12} = \frac{1}{c} J_1 \Phi_{12} \tag{5.0.21}$$

where Φ_{12} is the magnetic flux due to the first conductor which is intercepted by the second and is given by

$$\Phi_{12} = \int \left(B_2 \cdot \ \mathrm{d}^2 S_1 \right) = \oint \left(A_2 \cdot \ \mathrm{d}l_1 \right) = \frac{1}{c} L_{12} J_2 \tag{5.0.22}$$

The mutual inductance may be obtained from the expression for the energy (5.0.20), from the expression for the flux (5.0.22), or, in the case of linear currents, from the formula

$$L_{12} = \mu \oint \oint \frac{(\mathrm{d}l_1 \cdot \ \mathrm{d}l_2)}{r_{12}} \tag{5.0.23}$$

The generalised forces F_i acting between two fixed currents may be obtained by differentiating the energy of interaction W_{12} (or the quantity $U_{12} = -W_{12}$, which is known as the potential function) with respect to the corresponding generalised coordinates:

$$F_i = \frac{\partial W_{12}}{\partial q_i} = -\frac{\partial U_{12}}{\partial q_i} \tag{5.0.24}$$

The forces may also be obtained from Ampre's formula

$$\mathrm{d}F = \frac{J}{C} [\ \mathrm{d}l \wedge B] \tag{5.0.25}$$

where $\mathrm{d}l$ is a circuit element carrying a current J and $\mathrm{d}F$ is the force on this element due to the external magnetic induction B.

The forces which act on currents and magnetic materials may be calculated with the aid of the Maxwell stress tensor

$$T_{lm} = \frac{\mu}{4\pi} \left(H_l H_m - \frac{1}{2} H^2 \delta_{lm} \right) \tag{5.0.26}$$

which is analogous to the stress tensor used in chapter 3 for the electric field.

In those regions of space which are occupied by ferromagnetics the relation between B and H is a nonlinear one. It is not even single-valued (hysteresis) and the solution of magnetostatic problems becomes exceedingly difficult. However, in discussing permanent magnets it is frequently assumed that the relation between B and H is linear as before:

$$B = \mu H + 4\pi M_0 \tag{5.0.27}$$

where $\boldsymbol{M}_0$ is a 'constant', i.e. independent of $\boldsymbol{H}$, magnetisation, which is looked upon as a given function of the coordinates. Ferromagnetics obeying equation (5.0.27) are called idealised ferromagnetics.

5.1 A conductor of radius a is surrounded by a thin conducting shell of radius b. The two conductors are coaxial and carry equal but opposite currents J. Determine the magnetic field H due to this system at all points in space. Solve the problem by two methods, namely, by integrating the differential form of Maxwell's equations and by using the integral form of these equations which is given by equation (5.0.7).

5.2 Determine the magnetic field H and the magnetic induction B due to a constant current J

flowing through an infinite cylindrical conductor of radius a. Assume that the permeabilities of the conductor and the surrounding material are μ_0 and μ, respectively. Solve the problem by the simplest method, i.e. with the aid of the integral form of Maxwell's equations, and also by introducing the vector potential A.

5.3 Solve the preceding problem for a hollow cylindrical conductor of inner and outer radii a and b respectively.

5.4 A straight and infinitely long strip of width a carries a current J which is uniformly distributed across the width of the strip. Find the magnetic field H and verify the results by considering the limiting case of large distances from the strip.

5.5 Two thin infinitely long parallel plates carry equal and opposite currents J. The width of each plate is a and the distance between them b. Find the force f per unit length on each plate.

5.6 Find the vector potential $\boldsymbol{A}$ of the magnetic field $\boldsymbol{H}$ due to two parallel line currents J flowing in opposite directions. The distance between the two currents is $2a$.

5.7 Determine the magnetic field H due to two parallel planes carrying equal surface current densities $i =$ constant. Consider the two cases when the currents flow (a) in the same direction and (b) in opposite directions.

5.8 Determine the magnetic field H in a cylindrical cavity inside an infinitely long cylindrical conductor. The radius of the cavity is a and of the conductor is b, and the distance between their parallel axes is $d(b > a + d)$. Assume that the current J is uniformly distributed across the cross section of the conductor.

Hint. Use the principle of the superposition of fields.

5.9* Find the vector potential A and the magnetic field H due to a thin ring of radius a which carries a current J. The surrounding medium is uniform and has a magnetic permeability μ. Express the results in terms of elliptical integrals.

Hint. Use the method employed in the solution of problem 2.21 .

5.10* Show that if a given magnetic field is axially symmetric and may be represented by a vector potential with components $A_\phi(r, z)$, $A_r = A_z = 0$ (cylindrical coordinates), then the equation for the lines of magnetic induction is

$$rA_\phi(r, z) = \text{ constant}$$

Hint. Consider the flux of magnetic induction inside the tube produced by rotating one of the lines of induction about the axis of symmetry (cf solution of problem 2.47).

5.11 Express the magnetic field H and the vector potential $\boldsymbol{A}$ of an axially symmetric field outside its sources in terms of the magnetic field strength $H(z)$ along the axis of symmetry.

5.12 Determine the magnetic field H along the axis of a solenoid in the form of a closely wound cylindrical coil. The height of the cylinder is h, its radius is a, the number of turns per unit length is n, and the current in the coil is J.

5.13* A sphere of radius a is uniformly charged over its surface to a total charge e and is rotating about one of its diameters with a constant angular velocity ω. Find the magnetic field inside and outside the sphere. Express the magnetic field H outside the sphere in terms of the magnetic moment $\boldsymbol{m}$ of the sphere.

5.14 Find the scalar potential ψ of the magnetic field due to an infinitely long straight wire carrying a current J. Calculate the components of the magnetic field.

5.15* Find the scalar potential ψ of the magnetic field due to a closed linear circuit carrying a current. Solve the problem (a) by integrating the Laplace equation and (b) by using the following well-known expression for the vector potential:

$$A = \frac{J}{c} \oint \frac{\mathrm{d}l}{r}$$

Hint. In part (a) write the solution of the Laplace equation as an integral over a closed

surface.

5.16 Find the force F and the couple N on a closed thin conductor carrying a current and placed in a uniform magnetic field H. The conductor is of an arbitrary form. Solve the problem in two ways, namely, by direct integration of the forces and moments of forces on current elements, and also by using the potential function. Express the result in terms of the magnetic moment m.

5.17 Find the potential function U for two small current loops with magnetic moments $\boldsymbol{m}_1$ and $\boldsymbol{m}_2$. Find the force $\boldsymbol{F}$ and the couple N on the two currents. Consider the special case $\boldsymbol{m}_1$ parallel to $\boldsymbol{m}_2$.

5.18 Show that the forces between two small current loops are such that the corresponding magnetic moments tend to set themselves parallel to each other and to the line joining their centres.

5.19 Find the potential function u_{21} (per unit length) for two parallel infinitely long straight line currents J_1 and J_2, and the force f per unit length between them.

5.20 A square frame carrying a current J_2 is placed so that two of its parallel sides are parallel to a long straight wire carrying a current J_1 (figure 5.20.1). The length of each side of the frame is a. Find the force F and the couple N, with respect to the axis OO′, on the frame.

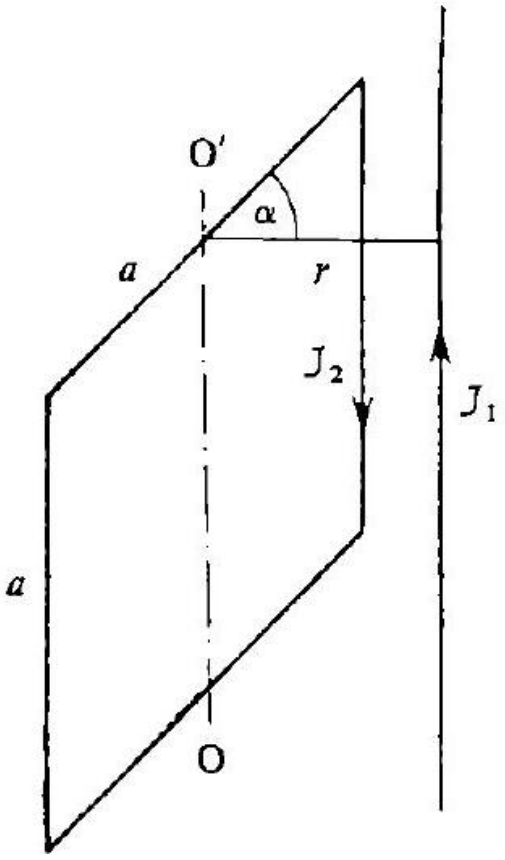


Figure 5.20.1.

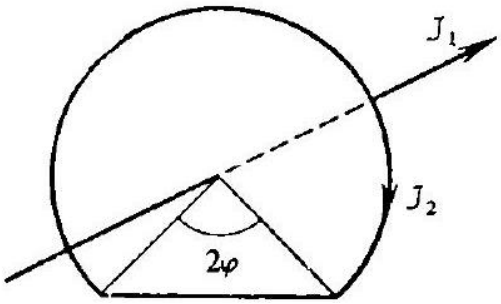


Figure 5.21.1.

5.21 A frame carrying a current J_2 consists of the arc of a circle which subtends an angle $2(\pi - \varphi)$. The ends of the arc are joined by a cord as shown in figure 5.21.1. A straight wire carrying a current J_1 passes through the centre of the circle and is perpendicular to the plane of the frame. Find the couple N on the frame.

5.22 A thin conducting cylindrical shell of radius b contains a coaxial wire of radius a and magnetic permeability μ_0. The space between the shell and the wire is filled with material of permeability μ. Find the selfinductance $\mathcal{L}$ per unit length of the line.

5.23 A line consists of two thin coaxial cylindrical shells of radii a and $b(a < b)$. The space between the two shells is filled with a material of permeability μ. Find the self-inductance $\mathcal{L}$ per unit length of the line.

5.24 A long straight conductor and a ring of radius a lie in the same plane. The distance between the wire and the centre of the ring is b. Find the mutual inductance L_{12} and the force F between the two conductors if the current through the wire is J_1 and the current through the ring is J_2.

5.25* Two thin rings of radii a and b are placed so that their planes are perpendicular to the line joining their centres. Assuming that the distance between the centres is l, find the mutual inductance L_{12} and express the result in terms of elliptical integrals. Consider the limiting cases $l \gg a, b$ and $a \approx b \gg l$.

5.26 Find the force F between the two circular currents in the preceding problem.

5.27 Find the self-inductance $\mathcal{L}$ per unit length of an infinite cylindrical solenoid with a closely wound coil and arbitrary cross section (not necessarily circular). Assume that the cross sectional area is S and the number of turns per unit length is n.

5.28 Find the self-inductance L of a coil of thin wire with n turns per unit length. The coil has a circular cross section of radius a and a finite length $h(h \gg a)$. Calculate L to within terms of the order of a/h.

5.29 Find the self-inductance L of a toroidal solenoid. The radius of the toroid is b, the cross section of the toroid is circular (radius a), and the total number of turns is N. Determine the self-inductance per unit length of the toroid in the limiting case $b \to \infty$ (N/b = constant). Solve the same problem for a toroidal solenoid of rectangular cross section (sides a and h). How does the self-inductance change if the uniformly distributed current, while retaining its direction, flows not along a wire wound around the torus, but directly along the hollow shell of the torus?

5.30 Determine the self-inductance $\mathcal{L}$ per unit length of a 'line' consisting of two straight wires of radii a and b which are at a distance h from each other. The currents in the two wires are equal and opposite.

5.31* Show that the self-inductance of a thin closed conductor of circular cross section is approximately given by (2)

$$L = \frac{\mu_0 l}{2} + L'$$

where μ_0 is the magnetic permeability of the conductor, l is its length, and L' is the mutual inductance of two linear circuits, one of which lies along the axis AMB of the quasi-linear conductor and the other along the

(2) The two terms in this formula may be called the internal and external selfinductance, respectively, since they represent the magnetic energy stored inside and outside the conductor.

line CND, along which an arbitrary open surface S bounded by the axis cuts the surface of the conductor (figure 5.31.1).

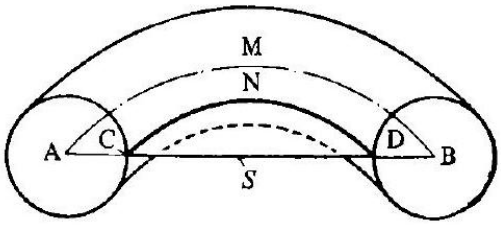


Figure 5.31.1.

5.32 Determine the self-inductance L of a thin ring of wire having a radius b. The radius of the wire is $a \ll b$.

Hint. Use the formula given in the preceding problem and the results of problem 5.25 .

5.33 Determine the mutual inductance L_{12} of two thin parallel wires of length a placed at a distance l from each other and lying along the parallel sides of a rectangle. (The mutual inductance has no direct physical meaning since the currents in these wires cannot be closed. However, this inductance may be used to find the inductance of a closed circuit with parallel straight sections; see problems 5.34 and 5.35.)

5.34 Determine the coefficient of mutual inductance L_{12} of two identical squares of side a placed at a distance l from each other and coinciding with the opposite faces of a rectangular parallelepiped. Find the force F between them assuming that $\mu = 1$ everywhere.

5.35 Determine the self-inductance L of a square of side b which is made of a thin wire of radius $a \ll b$. The magnetic permeabilities in the surrounding space and of the material of the wire are μ and $\mu_0 = 1$ respectively.

Hint. Use the formulae obtained in the solution of problems 5.31 and 5.33 .

5.36 Determine the magnetic moment m of a charged sphere rotating about one of its diameters. Consider the cases of uniform volume and surface charge distributions.

5.37* The current density associated with the spin magnetic moment of the electron in the hydrogen atom is given by $\boldsymbol{j} = c\,\mathrm{curl}[\rho(r)a]$, where a is a constant vector, c is the ratio of the electromagnetic to the electrostatic units of charge, and ρ is the charge density in the atom, which depends only on the radial distance r and is zero at infinity. Show that the magnetic field at the origin is $\frac{8}{3}\pi\rho(0)a$.

Hint. Use the results of problem 1.32 .

5.38 Reduce the determination of the magnetic field due to given currents in a nonuniform, nonferromagnetic medium to the corresponding
problem in electrostatics. To do this, the magnetic field should be written in the form $H = H_0 + H'$, where H_0 is the 'primary' field which would be produced by the same current distribution in empty space and H' is the field due to the presence of the magnetic material. Introduce the scalar potential ψ for $\boldsymbol{H'}$ and obtain an equation for ψ and the corresponding boundary conditions.

5.39 A current-carrying circuit lies on the plane separating two media with magnetic permeabilities μ_1 and μ_2. Determine the magnetic field strength $\boldsymbol{H}$ in the whole of space assuming that the field produced by the circuit in the absence of the media is known.

5.40 An infinite straight wire carrying a current J is parallel to the plane separating two media with magnetic permeabilities μ_1 and μ_2. The distance from the wire to the separation boundary is a. Determine the magnetic field.

Hint. Use the method of images as in electrostatic problems (chapter 3).

5.41 A sphere of radius a and magnetic permeability μ is placed in a uniform magnetic field H_0. Determine the resulting magnetic field H, the induced magnetic moment $\boldsymbol{m}$, and the current density j_{mol} which is equivalent to the magnetisation of the sphere.

5.42* An anisotropic nonferromagnetic sphere is placed in a uniform magnetic field. Find the resulting field H and the moment N of the forces acting on the sphere.

5.43 An infinitely long hollow cylindrical shell with internal and external diameters a and b, respectively, is placed in an external uniform magnetic field $\boldsymbol{H}_0$ which is perpendicular to its axis. The magnetic permeabilities of the cylinder and of the surrounding medium are μ_1 and μ_2 respectively. Find the field strength H in the cavity. Consider in particular the case $\mu_1 \gg \mu_2$.
5.44 A hollow sphere of internal and external radii a and b, respectively, is placed in an external uniform magnetic field $\boldsymbol{H}_0$. The magnetic permeabilities of the sphere and of the surrounding medium are μ_1 and μ_2 respectively. Find the field H in the cavity. Consider in particular the case $\mu_1 \gg \mu_2$.
5.45 An infinitely long straight wire of radius a and magnetic permeability μ_1 is placed in an external uniform magnetic field H_0 in a medium of magnetic permeability μ_2. The field is transverse to the wire and the wire carries a constant current J. Find the resulting magnetic field inside and outside the wire.
5.46 Determine the scalar and vector potentials ψ and A in a bounded region in which the magnetisation is known to be $M(r)$. Show by direct
calculation that the vectors $\boldsymbol{B} = \operatorname{curl} \boldsymbol{A}$ and $\boldsymbol{H} = -\operatorname{grad} \psi$ are related by

$$B = H + 4\pi M$$

5.47 A body of arbitrary form is uniformly magnetised. Show that the scalar potential due to this body may be written in the form

$$\psi = -(M \cdot \operatorname{grad} \varphi)$$

where $\boldsymbol{M}$ is the magnetisation and φ is the electrostatic potential due to a uniformly charged body (with density $\rho = 1$) of the same form and dimensions.
5.48 A straight wire carrying a current J is parallel to the axis of an infinitely long circular cylinder and at a distance b from it. The radius of the cylinder is a where $a < b$ and the magnetic permeability of the cylinder is μ. Find the force f per unit length of the wire [(3)].

Hint. Use the method of images.

5.49 A straight wire carrying a current J lies inside an infinitely long cylindrical cavity cut in a uniform magnetic medium. The wire is parallel to the axis of the cylinder and lies at a distance b from it. The radius of the cylinder is a and the magnetic permeability of the medium is μ. Determine the force f per unit length of the wire.
5.50 A current J flows through a straight wire lying along the z-axis. Three half planes at angles α_1, α_2, and α_3 to each other ($\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 2\pi$) intersect along the z-axis and the spaces between them are filled with magnetic media with permeabilities μ_1, μ_2, μ_3, respectively. Determine the magnetic field $H_i (i = 1, 2, 3)$ in the three regions.
5.51* Find the magnetic field due to a uniformly magnetised permanent magnet of spherical form. The magnetic permeability of the sphere is μ, and of the external medium is μ_2.
5.52* Find the field due to an infinitely long uniformly magnetised cylinder of radius a. The magnetisation vector M_0 is perpendicular to the axis of the cylinder and the magnetic permeabilities of the cylinder and of the surrounding medium are μ_1 and μ_2 respectively.
5.53 A uniformly magnetised sphere (idealised ferromagnetic) is placed in an external uniform magnetic field H_0. Find the resulting magnetic field and the couple N acting on the sphere. The magnetic permeability of the sphere is μ_1 and of the surrounding medium is $\mu_2 = 1$.
5.54 A small permanent magnet having a magnetic moment m is placed in vacuo near the plane boundary of a medium of magnetic permeability μ.

Find the force F and the couple N acting on the permanent magnet.
Hint. Use the method of images.

[0](3) From the results of problems 5.40 and 5.48 one can easily obtain the solution to the electrostatic problem of determining the field produced by a charged filament.

5.55 An ellipsoid with permeability μ is placed in a uniform magnetic field H_0. Find the internal field and the magnetic moment of the ellipsoid.
5.56* An ellipsoid made from an anisotropic material of permeability μ_{ik} is placed in a uniform external magnetic field H_0. Find the internal magnetic field H_1 in the ellipsoid.

16.6 Electrical and magnetic properties of matter

16.6.1 a Polarisation of matter in a constant field

In general, the polarisation vector $\boldsymbol{P}$ (electric dipole moment per unit volume) is a nonlinear function of the electric field E. However, in isotropic dielectrics and for sufficiently low fields, the polarisation is proportional to the field strength:

$$\boldsymbol{P} = \alpha \boldsymbol{E} \tag{6.a.1}$$

The dielectric susceptibility α is determined by the properties of the dielectric and is in general a function of temperature. The relation between α and the permittivity ϵ is

$$\epsilon = 1 + 4\pi\alpha \tag{6.a.2}$$

It is found for all substances that in a constant field $\alpha > 0, \epsilon > 1$. In anisotropic dielectrics ϵ and α are tensors of rank 2 .

In a sufficiently rarified medium (gas) the polarisability α is proportional to the number of particles N per unit volume:

$$\alpha = N\beta, \quad \epsilon = 1 + 4\pi N\beta \tag{6.a.3}$$

where β is the average polarisability per molecule. This result is obtained if it is assumed that the field E acting on a molecule is equal to the average field $\boldsymbol{E}$. In the case of a dense material the difference between the two fields must be taken into account. Thus, it is found that for nonpolar substances, i.e. substances whose molecules do not have a permanent dipole moment in the absence of the field, and are either distributed at random or form a crystalline lattice with cubic symmetry, the field acting on a molecule can be written as

$$E = E + \frac{4}{3}\pi P \tag{6.a.4}$$

When the latter equation holds, equations (6.a.3) are replaced by

$$\alpha = \frac{N\beta}{1 - \frac{4}{3}\pi N\beta}, \quad \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2} = \frac{4}{3}\pi N\beta$$

Equations (6.a.4) and (6.a.4') are known as the Lorenz-Lorentz relations.
The magnetisation vector M (magnetic dipole moment per unit volume) is frequently proportional to the magnetic field strength:

$$M = \chi H = \frac{\mu - 1}{4\pi} H \tag{6.a.5}$$

The magnetic permeability μ and the magnetic susceptibility χ are determined by the properties of the medium and are functions of
(1) For details of the theory see the textbooks by Frhlich (1958), Landau and Lifshitz (1960), Born and Wolf (1970), London (1950), Shoenberg (1952), and Pines (1963).
temperature. In contrast to the dielectric susceptibility, the magnetic susceptibility may be either positive or negative. Materials with $\chi > 0$ are called paramagnetics and those with

$\chi < 0$ are called diamagnetics. The relation between $\boldsymbol{M}$ and $\boldsymbol{H}$ for ferromagnetics is nonlinear and not single-valued.

In solving the problems given in this section, it will be necessary to use Boltzmann's formula [(2)] in addition to the equations of mechanics and electrodynamics. This formula gives the distribution of noninteracting particles in an external field:

$$\mathrm{d}N\left(q_i\right) = C \exp\left[-\frac{U\left(q_i\right)}{kT}\right] \mathrm{d}V \tag{6.a.6}$$

where $U\left(q_i\right)$ is the potential energy of the i th particle in the external field, q_i are the generalised coordinates characterising the position and the orientation of the particles, $\mathrm{d}V$ is a volume element in q-space, $\mathrm{d}N\left(q_i\right)$ is the number of particles in $\mathrm{d}V, k = 1.38 \times 10^{-23}$ J K^{-1} is Boltzmann's constant, T is the absolute temperature, and C is a normalising constant determined from the normalisation condition

$$\int \mathrm{d}N\left(q_i\right) = N_0 \tag{6.a.7}$$

where N_0 is the total number of particles in the system and the integral is evaluated over the volume occupied by the system.

When the polar angles ϑ, ϕ defining the orientation of a molecule are chosen as the generalised coordinates, the volume element may be written $\mathrm{d}V = \sin\vartheta \mathrm{d}\vartheta \mathrm{d}\phi$.

6.1 The charge density in the electron cloud of a hydrogen atom is described by the function

$$\rho(r) = -\frac{e_0}{\pi a_0^3} \exp\left(-\frac{2r}{a_0}\right)$$

where e_0 is the electronic charge and a_0 is a constant (Bohr radius). Calculate the polarisability β of the hydrogen atom in a weak external field, assuming that the distortion of the electron cloud may be neglected. Repeat your calculation on the assumption that the electron cloud is distributed uniformly in a sphere of radius a_0.

6.2 An atom with a spherically symmetric charge distribution is placed in a uniform magnetic field $\boldsymbol{H}$. Show that the additional field around the nucleus which is due to the diamagnetic current is given by

$$\Delta H = -\frac{eH}{3mc^2}\varphi(0)$$

[(2)] For a derivation of this formula see textbooks on statistical mechanics (e.g. Landau and Lifshitz 1969, ter Haar 1966, Pathria 1972).

where $\varphi(0)$ is the electrostatic potential due to the atomic electrons and e/m is the charge to mass ratio for an electron.

6.3* A molecule consists of two atoms at a distance a from each other. The atoms are spherically symmetric and their polarisabilities are β' and β''. Find the polarisability tensor for the molecule assuming that the atomic radii are small compared to a. Discuss in particular the case $\beta' = \beta''$.

6.4 Starting from the law of conservation of energy, show that the polarisability tensor for a molecule in a constant field is symmetric.

6.5 A dielectric consists of identical molecules having zero dipole moments in the absence of an external field. The polarisability tensor β_{ik} for each molecule is known. Find the polarisability α of the dielectric. Consider the two cases where (a) all the molecules are oriented in the same direction, and (b) the orientation of the molecules is random. Use the Lorenz-Lorentz formula to allow for the difference between the field acting on the molecule and the average field. [Note that case (a) may occur for crystalline and amorphous solids and case (b) for gases, liquids,

and solids. However, in distinction to a gas, a solid is a system of strongly interacting particles and therefore the concept of isolated molecules may have no physical significance for solids.]

6.6* If the polarisability of a molecule is a function of its orientation, then the energy of interaction between the molecule and an external field will also depend on the orientation. Hence, in addition to the distorting polarisation mechanism, there is also a directional mechanism which will come into play even when the molecule is nonpolar. This will give rise to a temperature dependence of the permittivity of a substance consisting of randomly oriented nonpolar molecules. Investigate this effect in the case of a diatomic gas in a weak constant electric field, and calculate the polarisability α of the dielectric assuming that the longitudinal and transverse polarisabilities of the gas are β_1 and β_2 respectively.

6.7 Two gas molecules have dipole moments p_1 and p_2 and lie at a distance R from each other. Owing to collisions with other molecules, their orientation will change and the probability that they will assume a given mutual orientation will be given by Boltzmann's formula (6.a.6) with U equal to the energy of interaction between the two dipoles. Assuming that $U \ll kT$, show that the magnitude of U averaged over the Boltzmann distribution is

$$U(R) = -\frac{2p_1^2 p_2^2}{3kTR^6}$$

Hint. In averaging over the directions of the dipoles, use the formulae obtained in problem 1.32. These formulae should also be used in the next problem.

6.8 A molecule having an electric dipole moment p interacts with a nonpolar molecule having a polarisability β. Show that the energy of interaction averaged over all possible orientations is

$$U(R) = -\frac{\beta p^2}{R^6}$$

where R is the distance between the molecules (see hint to the preceding problem).

6.9* In general, a dielectric placed in a constant electric field will possess higher order moments in addition to the dipole moment represented by the polarisation vector P. Find the volume and surface charge densities equivalent to a quadrupole polarisation Q_{ik} (the Q_{ik} are the components of the quadrupole moment per unit volume of the dielectric).

6.10 The permittivity of polar substances, for which the Lorenz-Lorentz formula does not hold, may be calculated by the following approximate method due to Onsager. Consider a small spherical cavity containing a single molecule and suppose that the cavity is surrounded by a homogeneous dielectric of permittivity ϵ. The cavity is evacuated and the field within it is equal to the effective field acting on the molecule. This field is determined by solving the macroscopic equations of electrostatics. Use this method to find the relation between the permittivity ϵ of the medium and the polarisability β of its molecules.

6.11* Consider a system consisting of particles with charge e and mass m, each of which moves at a certain fixed distance a from a given (its own) centre. The system is in a magnetic field in a state of statistical equilibrium. Show that the total magnetic susceptibility of the system is zero.

6.12* An ionised gas consists of ions (charge Ze, mean concentration N_0) and electrons (charge e, mean concentration n_0). The gas as a whole is electrically neutral ($ZN_0 = n_0$) and is in a state of statistical equilibrium at a temperature T. Assuming that the gas may be described in terms of classical statistics and that the energy of interaction between the particles is small compared with the thermal energy kT, find the charge density in the neighbourhood of an ion.

6.13 An infinite conducting plate bounded by the planes $x = h$, $x = -h$ is placed in a constant uniform electric field E_0 which is at right angles to the plate. The plate as a whole is electrically neutral, the mean concentration of free charges is N_0 and the permittivity is ϵ. Assuming that the change in the concentration under the action of the applied field is small ($|N - N_0| \ll N_0$),

find the field distribution inside the plate and determine the thickness of the layer in which the 'surface' charge is concentrated.

6.14 A layer of an electrolyte lies between two infinite plane electrodes $x = h, x = -h$ at which potentials φ_0 and $-\varphi_0$ are maintained. The electrolyte consists of two types of ions having charges $+e$ and $-e$, and the mean concentration in the absence of the external field is N_0. Assuming that the permittivity of the electrolyte is ϵ, determine the potential at any point between the electrodes.

Hint. Use the method employed in the solution of problem 6.12.

16.6.2 b Polarisation of matter in a variable field

In the case of a variable electromagnetic field, the electric induction at a time t depends on the values of the field at all the preceding instants of time:

$$\boldsymbol{D}(t) = \boldsymbol{E}(t) + \int_{-\infty}^{t} f(t-u)\boldsymbol{E}(u)\mathrm{d}u \tag{6.b.1}$$

where $f(t-u)$ is a function determined by the properties of the medium. A similar formula will of course hold for the magnetic vectors. The direct proportionality between the induction and the field strength will only hold for the Fourier components of these vectors, i.e. for fields which are sinusoidal functions of time:

$$D_\omega = \epsilon(\omega)E_\omega, \quad B_\omega = \mu(\omega)H_\omega \tag{6.b.2}$$

The permittivity ϵ and the magnetic permeability μ are then functions of the frequency of the field. In order to calculate the frequency dependence, some assumptions must be made about the microscopic structure of matter. A rigorous theory of the polarisation of matter can only be developed on the basis of quantum mechanics, since classical mechanics and electrodynamics are unable to explain the structure of matter. However, the classical oscillator model of an atom does yield a number of important qualitative predictions about the behaviour of matter in a variable field. According to this model the force on an atomic electron is

$$\boldsymbol{F} = -k\boldsymbol{r} \tag{6.b.3}$$

where r is the distance of the electron from the nucleus and k is a constant. In order to account for the dissipation of electromagnetic energy, it is also necessary to introduce a 'frictional' force which acts on the electron and is proportional to its velocity:

$$F_{\mathrm{fr}} = -\eta\dot{r} \tag{6.b.4}$$

The permittivity deduced for this oscillator model is given by

$$\epsilon(\omega) = 1 + \frac{\omega_{\mathrm{p}}^2}{\omega_0^2 - \omega^2 - \mathrm{i}\gamma\omega} \tag{6.b.5}$$

where $\omega_{\mathrm{p}}^2 = 4\pi e^2 N/m, \omega_0 = k/m, \gamma = \eta/m, N$ is the number of atoms per unit volume and e and m are the charge and mass of the electron respectively.

Figure 6.b.1 shows the real (ϵ') and imaginary (ϵ'') parts of ϵ as functions of the frequency ω. The imaginary part is responsible for the absorption of electromagnetic energy and becomes appreciable only near the eigenfrequency ω_0 of the oscillators. In this region ϵ' decreases with increasing ω (anomalous dispersion). In the remaining regions ϵ' increases with increasing ω (normal dispersion).

According to quantum theory, equation (6.b.5) must be replaced by the somewhat similar formula

$$\epsilon(\omega) = 1 + \omega_{\mathrm{p}}^2 \sum_i \frac{f_i}{\omega_i^2 - \omega^2 - \mathrm{i}\gamma_i\omega} \tag{6.b.6}$$

where $\omega_{\mathrm{p}}, f_i, \omega_i, \gamma_i$ are constants.

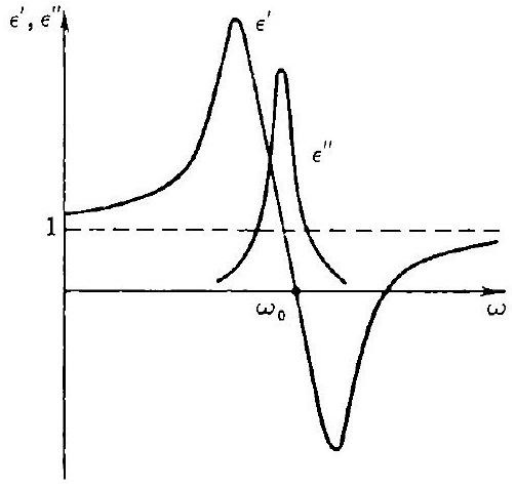


Figure 6.b.1.

6.15 An artificial dielectric consists of identical perfectly conducting metal spheres of radius a which are randomly distributed in vacuo. The average number of spheres per unit volume is N. An electromagnetic wave is propagated through the dielectric. Neglecting the difference between the field acting on each sphere and the average field, determine the permittivity ϵ and the magnetic permeability of the dielectric. Under what conditions can the dielectric be looked upon as a continuous medium?

Hint. The electric and magnetic polarisabilities of perfectly conducting spheres are calculated in problems 3.23 and 7.40.

6.16* Determine the permittivity of a conducting sphere assuming that the ions are fixed and the effect of bound electrons may be neglected. Energy dissipation should be allowed for by introducing the 'frictional' force $-\eta\dot{r}$ acting on the electrons whose concentration is N. Find the relation between the coefficient η and the conductivity.

6.17* A gaseous dielectric in a state of statistical equilibrium at a temperature T consists of molecules for which the principal values of the polarisability tensor are $\beta^{(1)} = \beta, \beta^{(2)} = \beta^{(3)} = \beta'$ where β and β' are
functions of frequency ω. The dielectric is acted upon by a constant uniform electric field E_0 and the concentration of the molecules is N. Find the permittivity tensor for the dielectric assuming that

$$E(t) = E\exp(-\mathrm{i}\omega t)$$

where $E \ll E_0$.

6.18 A gaseous dielectric consists of polar molecules whose electric dipole moment in the absence of an external field is p_0. The principal values of the polarisability tensor of a molecule in a variable field are $\beta^{(1)} = \beta, \beta^{(2)} = \beta^{(3)} = \beta'$, where the x_1-axis is parallel to p_0. The dielectric is placed in an electric field having a constant component E_0 and an alternating component $E(t) = E\exp(-\mathrm{i}\omega t)$. Neglecting the orienting effect of the alternating field, and also the orienting effect associated with the anisotropy of the molecular polarisation in the constant field, find the permittivity tensor for the alternating field if the temperature is T, and the

particle density N.

6.19* A system of charges (molecule) is placed in a sinusoidal electromagnetic field. Show that if there is no dissipation of electromagnetic energy in the system, then the polarisability tensor is Hermitian, i.e. $\beta_{ik} = \beta^*_{ki}$.

Hint. Use equation (7.a.7) to calculate the work done by the field.

6.20 Show that if a tensor β_{ik} is Hermitian, then in a suitably chosen coordinate system it may be written in the form

$$\beta_{ik} = \beta^{(i)}\delta_{ik} + \mathrm{e}_{ikl}g_l$$

where e_{ikl} is the skew-symmetric unit tensor of rank 3 (see problem 1.24), and g is a real vector (gyration vector). Note that media in which the gyration vector is finite are called gyrotropic. The propagation of electromagnetic waves in gyrotropic media is considered in section b of chapter 8 .

6.21 Find the polarisability β_{ik} of an atom in the field of a plane monochromatic wave and a weak constant external magnetic field $\boldsymbol{H}_0$. Use the oscillator model and the method of successive approximations. Neglect the effect of the magnetic component of the wave and losses of electromagnetic energy. Determine also the gyration vector g.

6.22 Use the oscillator model of an atom to find the permittivity tensor $\epsilon_{ik}(\omega)$ for a dielectric containing N atoms per unit volume, when the dielectric is placed in an arbitrary constant magnetic field $\boldsymbol{H}_0$. The dissipation of electromagnetic energy and the effects of the magnetic component of the plane wave may be neglected. When will the exact solution become identical with the approximate solution of the preceding problem?

Hint. In integrating the equations of motion of the electron use the cyclic coordinates:

$$x_{\pm1} = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}(x \pm \mathrm{i}y), \quad x_0 = z$$

6.23* Find the permittivity tensor for a plasma in an external constant magnetic field H, given that the average electron density is N. Positive ions may be regarded as fixed and energy losses should be taken into account by introducing a 'frictional force' $-\eta\dot{r}$.

6.24 Suppose that in the plasma considered in the preceding problem there is also a constant electric field $\boldsymbol{E}$. Use an approximation which is linear in H_0 to find the relation between the current density j and the electric field $\boldsymbol{E}$. Find also the electrical conductivity tensor.

Hint. Solve the equations of motion by the method of successive approximations.

6.25* Find the permittivity of an ionised gas placed in a constant magnetic field, taking into account the motion of positive ions but assuming that the ion mass is much greater than the electron mass. Discuss the dependence of the permittivity on the frequency ω and compare the result with the case where the ions may be considered as fixed. Assume that the concentration of ions and electrons is N.

Hint. Consider the equations of motion for an electron and an ion. The 'frictional' force on an electron is $-\eta(\dot{r} - \dot{R})$, the frictional force on an ion is $-\eta(\dot{R} - \dot{r})$, and r and R are the position vectors of the electron and ion respectively.

6.26 Suppose that in an infinite homogeneous medium there is only one special direction (e.g. the direction of an external field). Suppose further that T_{ik} is a tensor parameter of this medium, e.g. the permittivity or the magnetic permeability. It is clear that the components of the tensor T_{ik} should be invariant with respect to any rotation of the coordinate system about the special direction. Derive the limitations which are imposed by this invariance condition on the form of the tensor T_{ik}.

6.27 In some cases the function $f(t)$ which determines the relation between D and E [see equation (6.b.1)] is of the form $f(t) = f_0 \exp(-t/\tau)$ where f_0 and τ are constants [3]. Show that

$$\epsilon(\omega) = 1 + \frac{\epsilon_0 - 1}{1 - \mathrm{i}\omega\tau}$$

where ϵ_0 is the static value of the permittivity.
(3) This relation corresponds, for instance, to the model of a substance consisting of rigid dipoles. It neglects the polarisability of the electron shells.
6.28* Assuming that the polarisation of a particular medium can only arise after an electric field has been applied to it, show that the real and imaginary parts of the permittivity $\epsilon(\omega) = \epsilon'(\omega) + \mathrm{i}\epsilon''(\omega)$ are given by

$$\epsilon'(\omega) = 1 + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\epsilon''(\omega')}{\omega' - \omega} d\omega', \quad \epsilon''(\omega) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\epsilon'(\omega') - 1}{\omega' - \omega} d\omega'$$

These are the Kramers-Kronig dispersion relations. The symbol f denotes the principal value of the integral. Note that in the case of metals, for which $\epsilon(\omega)$ may have a singularity at $\omega = 0$, the second of these formulae is of the form

$$\epsilon''(\omega) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\epsilon'(\omega') - 1}{\omega' - \omega} \mathrm{d}\omega' + \frac{4\pi\sigma}{\omega}$$

where σ is the static conductivity of the metal.
Hint. Consider the polarisation $P(t)$ due to a field $\boldsymbol{E}(t) = \boldsymbol{E}_0\delta(t)$. Use equation (A1.17) of appendix 1.
6.29 Use the Kramers-Kronig dispersion relations of the preceding problem to determine the real part $\epsilon'(\omega)$ of the permittivity, assuming that the imaginary part is given by

$$\epsilon''(\omega) = \frac{(\epsilon_0 - 1)\,\omega\tau}{1 + \omega^2\tau^2}$$

where ϵ_0 and τ are constants.
6.30 Prove the following sum rule for the imaginary part of the dielectric permittivity:

$$\int_0^{\infty} \left[\mathrm{Im}\,\frac{1}{\epsilon(\omega)}\right] \omega \mathrm{d}\omega = -\frac{1}{2}\pi\omega_{\mathrm{p}}^2, \quad \int_0^{\infty} [\mathrm{Im}\,\epsilon(\omega)]\omega \mathrm{d}\omega = \frac{1}{2}\pi\omega_{\mathrm{p}}^2$$

where $\omega_{\mathrm{p}} = (4\pi N e^2/\mathrm{m})^{1/2}$ is the plasma frequency.
Hint. Bear in mind that $\mathrm{Re}\,\epsilon(\omega)$ is an even and $\mathrm{Im}\,\epsilon(\omega)$ an odd function of ω on the real axis. Use the asymptotic expression $\epsilon(\omega) = 1 - \omega_{\mathrm{p}}^2/\omega^2$, which is valid everywhere in the upper ω-halfplane as $|\omega| \to \infty$.
6.31 Show that if one wants to describe the electromagnetic field in matter one needs to introduce, apart from the average electric and magnetic fields $\boldsymbol{E}(r,t)$ and $B(r,t)$, only a single induction vector $D'(r,t)$ (and not two, D and H, as usual):

$$D'(r,t) = E(r,t) + 4\pi\int_{-\infty}^{t} j'(r,t')\,\mathrm{d}t'$$

where $j'(r,t')$ is the averaged current density induced in the matter; it satisfies the equation of continuity $\mathrm{div}\, j' + \partial\rho'/\partial t = 0$, where ρ' is the average charge density in the matter. By averaging the vacuum equations write
down the Maxwell equations for $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}$, and $\boldsymbol{D}'$ in the medium. The external charge and current densities $\boldsymbol{j}$ and ρ are given quantities.

16.6.3 c Ferromagnetic resonance

Classical theories are unable to supply a self-consistent explanation of ferromagnetism. Ferromagnetism is largely due to the intrinsic (spin) magnetic moments of electrons and the specific interaction forces between them, which are all of quantum-mechanical origin. However, some ferromagnetic phenomena may be discussed on the basis of a semiclassical theory. Among these phenomena is ferromagnetic resonance.

Ferromagnetic resonance is established under the following conditions: a constant magnetic field acting on the magnetic moment of an atom or a single electron gives rise to the Larmor precession of the moment about the direction of the field. This motion is eventually damped out because of the conversion of the Larmor precession energy into thermal energy. If the external field is sufficiently large, all the elementary magnetic moments become parallel to the external field. The ferromagnetic is then referred to as saturated and, correspondingly, the magnetic moment per unit volume is called the saturation magnetisation. In this section we shall always assume that the ferromagnetic is in fact magnetised to saturation. If in addition to the constant field there is also an alternating magnetic field, which is perpendicular to the constant field, then the alternating field will tend to maintain the precessional motion and when its frequency becomes equal to the precession frequency, ferromagnetic resonance will set in.

The motion of the magnetisation vector in a ferromagnetic is described by the Landau-Lifshitz equation (Landau and Lifshitz, 1935) which may be obtained as follows. The couple acting on a magnetic moment $\boldsymbol{m}$ of a particle (atom or single electron) placed in a magnetic field H_{eff} is $N = [m \wedge H_{\text{eff}}]$. Since the rate of change of the angular momentum K is equal to the sum of the moments of the external forces we have

$$\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}t} = N = [m \wedge H_{\text{eff}}] \tag{6.c.1}$$

According to quantum mechanics, the relation between the magnetic moment and the angular momentum of an electron is

$$\boldsymbol{m} = -\gamma \boldsymbol{K}, \quad \gamma = \frac{e_0}{mc}$$

where e_0 and m are the charge and mass of the electron and c is the velocity of light in vacuo. By using this relation and taking the average of both sides of equation (6.c.1) over an infinitely small volume, we obtain the Landau-Lifshitz equation

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} = -\gamma\,[M \wedge H_{\text{eff}}]$$

where M is the magnetisation vector and H_{eff} is the average magnetic field acting on each elementary magnetic moment. In an infinite isotropic medium magnetised to saturation

$$H_{\text{eff}} = H - \lambda M + q\nabla^2 M \tag{6.c.3}$$

where H is the average magnetic field in the medium and λ, q are constants. The second term in this expression is the so-called Weiss molecular field which does not contribute to equation (6.c.2) because $[M \wedge M] = 0$. The third term is only important when M is a very rapid function of the coordinates. We shall not consider such changes in M in this section and will therefore assume that $H_{\text{eff}} = H$.

In order that equation (6.c.2) should describe electromagnetic energy losses in the medium as well as the other effects described above, an additional dissipative term must be added to it. It is usual to assume that H_{eff} includes a 'frictional field' $-p\,\mathrm{d}M/\mathrm{d}t$. Equation (6.c.2) then becomes

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} = -\gamma \left[M \wedge \left(H - p\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} \right) \right] \tag{6.c.4}$$

where p is the loss parameter. If the losses are small and the total magnetic field is the sum of a constant field $\boldsymbol{H}_0$ and a variable field $h(t)$, where $|\boldsymbol{h}| \ll H_0$, then equation (6.c.4) may be simplified to read

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} = -\gamma[M \wedge H] + \omega_r \left(\chi_0 H - M\right) \tag{6.c.5}$$

where $\chi_0 = M_0/H_0, \omega_r = p\gamma^2 M_0^2/\chi_0$, and $M_0 = |M|$ is the saturation magnetisation. The Landau-Lifshitz equation is the starting point in the solution of problems on ferromagnetic resonance. In recent years ferromagnetics with very low conductivity (ferrodielectrics, ferrites) have found extensive application in ultrahigh frequency electronics. The propagation of electromagnetic waves in ferrites is discussed in chapters 8 and 9 .

6.32 Find the law of motion of the magnetisation vector M in an infinite ferrite medium magnetised to saturation. Assume that there are no losses and that the magnetic field $\boldsymbol{H}$ in the medium is constant and uniform.

6.33 Solve the preceding problem in the case of finite losses using the Landau-Lifshitz equation in the form given by equation (6.c.5). Assume that the angle between M and H is small and that $\omega_r \ll \omega_0 = \gamma H_0$.

6.34* Suppose that in an infinite ferromagnetic medium there is a constant uniform magnetic field H_0 and a high frequency field $h\exp(-\mathrm{i}\omega t)$ where $h =$ constant. Assuming that $h \ll H_0$ and neglecting energy losses, find the forced oscillations of the magnetisation vector M using an approximation which is linear in h. (The eigenoscillations, i.e. the Larmor precession under the action of the constant field $\boldsymbol{H}_0$, will be damped out as the result of losses which are present in all real systems.)

6.35 Use the result of the preceding problem to find the magnetic susceptibility and permeability tensors χ_{ik} and μ_{ik} for a high-frequency field. Find the components of the tensor μ_{ik} as functions of the constant magnetic field H_0 for $M_0 = 1.6 \times 10^{-2}$ T and $\nu = \omega/(2\pi) = 9375$MHz ($\lambda = 3.2 \times 10^{-2}$ m). Investigate the resonance character of the variation in these quantities and determine H_0 at resonance.

6.36* The magnetic field in an infinite ferrite medium magnetised to saturation consists of a constant component $H_0 = H_z$ and a circularly polarised alternating component $H_x = h\cos\omega t, H_y = h\sin\omega t, h =$ constant. Find the exact solution of the Landau-Lifshitz equation corresponding to the forced precession of the vector M at the frequency ω of the external field. The energy dissipation may be ignored.

6.37 Solve problem 6.34 taking energy losses into account. Use the Landau-Lifshitz equation in the form given by equation (6.c.5).

6.38 Use the result of the preceding problem to find the magnetic permeability tensor μ_{ik} for a high-frequency field. Obtain expressions for the real and imaginary parts of the components of this tensor. Find the dependence of both parts of the components of the permeability tensor on a constant magnetic field for $M_0 = 1.6 \times 10^{-2}$ T, $\omega_r = 3 \times 10^9$ s^{-1}, and $\nu = \omega/(2\pi) = 9375$MHz. Determine the resonance value of the constant field, i.e. the value at which the imaginary parts of the components of the permeability tensor are a maximum.

6.39 Determine the half-width ΔH_0 of the resonance curve for the imaginary parts of the components of the magnetic permeability tensor, assuming that $\omega_r \ll \omega$. The half-width is defined as the distance between the ordinates $\mu'' = \mu_{\mathrm{res}}$ and $\mu'' = \frac{1}{2}\mu_{\mathrm{res}}$.

6.40* Find the Larmor precession frequency ω_k in an ellipsoidal ferromagnetic specimen in which energy losses may be neglected. The specimen is in an external uniform magnetic field H_0 which is parallel to one of the axes of the ellipsoid. Assume that the departure of the

magnetisation vector M from the equilibrium position is small.

Hint. The Landau-Lifshitz equation will now include the internal field H_1. This field will differ from the external field H_0 owing to the demagnetising effect which is a consequence of the form of the body:

$$H_1 = H_0 - H_{\mathrm{dm}}, \quad H_{k\mathrm{dm}} = 4\pi N_{kl} M_l$$

where N_{kl} is the demagnetisation tensor (see problem 5.55).

6.41 Solve the preceding problem taking energy losses into account. Retain only those terms which are linear in ω_r.

6.42* Discuss forced oscillations in a small ellipsoidal specimen in the presence of energy losses. Determine the components of the magnetic susceptibility tensor for a high-frequency field, assuming that the amplitude h of the field is small compared with the constant field H_0.

6.43 In some ferromagnetic media (antiferromagnetics) the resultant magnetisation M consists of two parts, so that $M = M_1 + M_2$ where M_1 and M_2 are due to ions lying at different sites of the crystal lattice and forming two magnetic sublattices. In the equilibrium state M_1 and $\boldsymbol{M}_2$ are antiparallel so that $M = |M_1 - M_2|$. When an external magnetic field is introduced, each of the vectors experiences the molecular Weiss field [see equation (6.c.3)] and the two vectors cease to be antiparallel. Find the natural precession frequencies assuming that $\lambda\,|M_1 - M_2| \gg H_0$ where H_0 is the external field and λ is the molecular Weiss constant. Assume that the departures of the vectors M_1 and M_2 from their equilibrium positions are small.

16.6.4 d Superconductivity

A consistent theory of superconductivity must be a quantal one. However, one can use classical arguments to construct a phenomenological electrodynamics of superconductors.

The Maxwell equations retain their form also when there are superconductors present. The only difference with the case of normal conductors lies in the material equations connecting the fields with the currents.

At temperatures much lower than the temperature of the transition to the superconducting state, but not too close to the absolute zero, the local theory suggested by F and H London (1950) is applicable. The total charge and current densities in a superconductor consist, according to that theory, of a normal part $(\rho_n, \boldsymbol{j}_n)$ and a superconducting part $(\rho_s, \boldsymbol{j}_s)$:

$$\rho = \rho_{\mathrm{s}} + \rho_{\mathrm{n}}, \quad \boldsymbol{j} = \boldsymbol{j}_{\mathrm{s}} + \boldsymbol{j}_{\mathrm{n}}$$

where $j_{\mathrm{s}} = -en_{\mathrm{s}}\boldsymbol{v}_{\mathrm{s}}$ with n_{s} the density of the superconducting electrons and v_{s} their velocity, $j_{\mathrm{n}} = \sigma \boldsymbol{E}$ with σ the electrical conductivity. The continuity equation is satisfied separately for the normal and the superconducting components.

The basic property of the electrons which correspond to superconductivity is that as they move through a superconductor they are-in contrast to the normal electrons-not scattered by the thermal oscillations of the lattice or by impurities. The motion of the superconducting electrons is thus determined solely by their interaction with the electromagnetic field and is described by the equation

$$\frac{\mathrm{d}v_{\mathrm{s}}}{\mathrm{d}t} \equiv \frac{\partial v_{\mathrm{s}}}{\partial t} + (v_{\mathrm{s}} \cdot \nabla)\, v_{\mathrm{s}} = -\frac{e}{m}\left\{E + \frac{1}{c}\,[v_{\mathrm{s}} \wedge H]\right\}$$

Any change in the magnetic field leads, because of electromagnetic induction, to the occurrence of a surface current, the value of which is uniquely determined by the field. This current compensates the magnetic field inside the superconductor. The superconductor therefore behaves magnetically as a perfect diamagnetic. From the equation of motion of the superconducting electrons and the Maxwell equations one can derive Londons' material equation:

$$c\,\mathrm{curl}\,(\Lambda j_\mathrm{s}) + H = 0 \tag{6.d.1}$$

where $\Lambda = mn_\mathrm{s}e^2$ is the London parameter.
This equation describes the diamagnetism of the superconducting electrons. Using equation (6.d.1) the equation of motion of the superconducting electrons becomes

$$\frac{\partial j_s}{\partial t} - \frac{1}{\Lambda}E = 0 \tag{6.d.2}$$

where the small term ∇v_s^2 has been dropped. The material equations (6.d.1) and (6.d.2) considered together with the Maxwell equations completely determine the electrodynamics of superconductors in the low frequency region.

We shall everywhere in this section assume that $\epsilon = \mu = 1$. Moreover, we shall often not stipulate in the statement of the problems (see problems 6.44 to 6.50) that the superconductor is characterised by a London parameter Λ or by the depth the magnetic field penetrates into the superconductor,

$$\delta = \left(\frac{\Lambda c^2}{4\pi}\right)^{1/2} \tag{6.d.3}$$

which can be used instead of it. For most superconductors $\delta \approx 10^{-7}$ to 10^{-8} m.

6.44 Write down the Maxwell equations and the material equations which describe a static electromagnetic field in a superconductor. Derive the equations which in that case describe the current and magnetic field distributions.

6.45 A superconductor fills the half-space $x \geqslant 0$, while $x \leqslant 0$ is a vacuum. In the vacuum there is a uniform magnetic field H_0 parallel to y. Find the magnetic field and current distributions in the superconductor in the static case.

6.46 Find the force per unit area of the surface of the superconductor considered in the preceding problem. What is the direction of that force?

6.47 A superconducting plate of thickness $2a$ is positioned symmetric with respect to the $x = 0$ plane and is placed in a uniform magnetic
field H_0 parallel to y. Find the magnetic field distribution in the bulk of the plate and also the average magnetic moment per unit volume.

6.48 An infinitely long circular superconducting cylinder is placed in a uniform magnetic field H_0 parallel to z; the axis of the cylinder is parallel to the field. Find the magnetic field distribution inside the cylinder and the average magnetic moment per unit volume.

6.49 A superconducting sphere of radius a is placed in a uniform magnetic field H_0. Determine the current distribution in the sphere and the magnetic field everywhere in space. Consider the limiting cases $a \gg \delta$ and $a \ll \delta$.

6.50 A current J flows through an infinitely long straight conductor of circular cross section (radius a). Find the distribution of the current density j over the cross section of the conductor and the magnetic field everywhere in space.

6.51 A superconductor is in the shape of a coil of arbitrary cross section. A current concentrated in a thin surface layer flows through it. Prove that the magnetic flux through a surface based on a contour drawn inside the conductor vanishes if the current density on the contour vanishes. Use the material equation (6.d.2) and the Maxwell equations.

6.52 A superconducting plane coil of self-inductance L through which a current J flows, enters completely a uniform magnetic field H_0. Determine the current J' which will flow along the coil after this has happened. The area of an axial cross section of the coil is S. The normal to the plane of the coil makes an angle ϑ with the direction of $\boldsymbol{H}_0$.

6.53 A conducting coil of self-inductance L is in the normal state in an external magnetic field (the magnetic flux through the contour of the coil equals Φ_0). Afterwards the temperature is

lowered and the coil changes to the superconducting state. What current will flow through the coil if the external magnetic field is now excluded?

16.7 Quasi-stationary electromagnetic fields

16.7.1 a Quasi-stationary phenomena in linear conductors

If the period of an alternating electromagnetic field is much greater than the time taken by the electromagnetic wave to travel through a given system, i.e.

$$T \gg \frac{l}{c}, \quad \omega \ll \frac{c}{l} \tag{7.a.1}$$

where c is the velocity of light and l is a characteristic linear dimension of the system, then the velocity of propagation of electromagnetic disturbances through the system may be assumed to be infinite. The corresponding approximation is known as the quasi-stationary approximation. The quasi-stationary approximation occasionally gives good results even when this condition is not satisfied, e.g. in the theory of long transmission lines.

In the quasi-stationary approximation, the current in a closed circuit consisting of a source of e.m.f. $\mathcal{E}(t)$, a capacitance C, an inductance L, and a resistance R, satisfies the following differential equations

$$J = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}, \quad \frac{1}{c^2} L \frac{\mathrm{d}^2 q}{\mathrm{d}t^2} + R \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C} q = \varepsilon(t)$$

where q is the charge on one of the capacitor plates. When the e.m.f. is of the form $\mathscr{E}(t) = \mathscr{E}_0 \exp(-\mathrm{i}\omega t)$, then in steady state the current is proportional to the e.m.f. so that

$$J = \frac{\mathring{\mathrm{A}}}{Z}, \quad Z = R + \mathrm{i}\left(\frac{1}{\omega C} - \frac{\omega L}{c^2}\right) \tag{7.a.2}$$

The quantity Z is called the complex impedance of the circuit.
The eigenfrequency ω_0 of the oscillations in a circuit consisting of a capacitance C and a self-inductance L is given by Thomson's formula

$$\omega_0 = \frac{c}{(LC)^{1/2}} \tag{7.a.3}$$

In the case of a circuit consisting of a number of branches, the differential equations giving the currents in the various branches may be set up with the aid of Kirchhoff's laws.

The e.m.f. induced in a linear circuit due to a change in the magnetic flux intercepted by it is given by Faraday's law

$$\&_{\mathrm{ind}} = -\frac{1}{c} \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} \tag{7.a.4}$$

(1) For more details see the books by Landau and Lifshitz (1960), Smythe (1950), Stratton (1941), Ramo and Whinnery (1944), and Brillouin (1946).
where Φ is the flux of magnetic induction through the circuit. The change in flux may be due to a change in the magnetic field or to the motion or a deformation of the circuit. If there are a number of inductively coupled circuits then the total flux of magnetic induction through the i th circuit Φ_i is given by

$$\Phi_i = \frac{1}{c} \sum_k L_{ik} J_k \tag{7.a.5}$$

where J_k is the current in the k th circuit, $L_{ik}(i \neq k)$ is the mutual inductance between the i th and the k th circuits, and $L_{ii} \equiv L_i$ is the self-inductance of the i th circuit (see the introduction to chapter 5).

The generalised force acting on a conductor carrying a current in a quasi-stationary field is given by

$$F_i = \left(\frac{\partial W}{\partial q_i}\right)_J \tag{7.a.6}$$

where W is the magnetic energy of the system, q_i is the generalised coordinate, and the differentiation is carried out at constant current in the conductors. The magnetic energy can be expressed in terms of the currents and the coefficients of inductance by means of the same formulae as in the static case [see equations (5.0.17) and (5.0.20)].

The time average of the product of harmonic functions of time, $a(t) = a_0 \exp(-\mathrm{i}\omega t)$, may be calculated with the aid of the formulae

$$\overline{a^2(t)} = \frac{1}{2}|a|^2, \quad \overline{a(t)b(t)} = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\,(ab^*) \tag{7.a.7}$$

For example, the average dissipation of heat in a circuit may be calculated from the following formulae

$$Q = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Re}(\mathcal{E} J^*) = \tfrac{1}{2}|J|^2\,\mathrm{Re}Z\,.$$

7.1 A circular loop of wire of radius a is placed in a magnetic field H_0 and rotates with an angular velocity ω about a diameter which is perpendicular to H_0. Find the current in the loop $J(t)$, the retarding couple $N(t)$, and the average power $\bar{P}$ which is required to maintain the rotation.

7.2 A plane LCR circuit of area S rotates with an angular velocity ω in a constant magnetic field H_0 about an axis lying in the plane of the circuit and perpendicular to H_0. Determine the average retarding couple $\bar{N}$ on the circuit.

7.3 The current through one of two inductively coupled circuits is $J(t) = J_0 \exp(-i\omega t)$. The inductance and resistance of the two circuits are given. Express the average generalised force on the circuits in terms of the derivative of the mutual inductance with respect to the generalised coordinate q_i.

7.4 Two identical circuits each have a resistance R and inductance L. and one of them includes a source of e.m.f. $\mathcal{E}(t) = \varepsilon_0 \exp(-i\omega t)$. The mutual inductance between the circuits is L_{12}. Determine the average force $\bar{F}$ on each of the circuits. Express the result in terms of the derivative of the mutual inductance with respect to the corresponding coordinate.

7.5 Determine the natural frequencies of electrical oscillations in the two circuits shown in figure 7.5 . 1 when the coupling between the two circuits is achieved through a capacitance $C[Z = \mathrm{i}/(\omega C)]$.

Hint. Set up a system of algebraic equations for the currents and put the determinant of the system equal to zero.

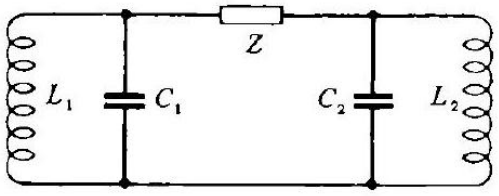


Figure 7.5.1.

7.6 Solve the preceding problem in the case when the coupling between the two circuits is

through an inductance (see figure 7.5.1; $Z = -\mathrm{i}\omega L/c^2$).
7.7 Find the natural frequencies of oscillation $\omega_{1,2}$ in two inductively coupled circuits with capacitances C_1, C_2, inductances L_1, L_2, and mutual inductance L_{12}.
7.8 Two circuits are coupled to each other through a resistance R (see figure 7.5.1, with $Z = R$). Find the natural frequencies of oscillation of the two circuits when the coupling is small, i.e. R is large.
7.9 A circuit consisting of an inductance L_1, a capacitance C_1, and a resistance R_1, includes an external source of e.m.f. $\&(t) = \mathscr{E}_0 \exp(-i\omega t)$. The circuit is inductively coupled to another circuit whose parameters are L_2, C_2, R_2. The mutual inductance between the two circuits is L_{12}. Find the currents J_1 and J_2 in the two circuits. Consider in paricular the case where the second circuit is purely inductive ($R_2 = 0, C_2 = \infty$) and determine the frequency ω at which the current J_1 is a maximum.
7.10 Find the complex impedance Z of the two-terminal network shown in figure 7.10 .1

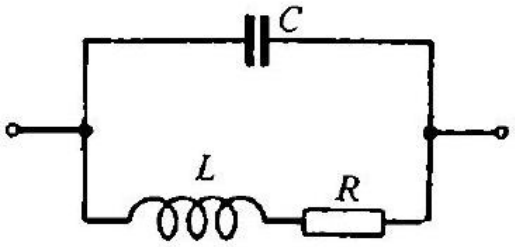


Figure 7.10.1.
7.11 A capacitor is filled with a dielectric whose permittivity is given by

$$\epsilon = 1 - \frac{\omega_{\mathrm{p}}^2}{\omega(\omega + \mathrm{i}\gamma)}$$

(ionised gas; see problem 6.16). In the absence of the medium the capacitance is C_0. Show that the complex impedance of such a capacitor is equal to the impedance of the two-terminal network shown in figure 7.10.1 when the parameters L, C, and R of this circuit are suitably chosen. Find L, C, and R.
7.12 Determine the average energy $\bar{W}$ stored per unit time in the capacitor described in the preceding problem. Find also the heat loss Q per unit time and express both quantities in terms of the potential difference between the capacitor plates $U = U_0 \exp(-i\omega t)$.
7.13 A capacitor is filled with a medium having a permittivity

$$\epsilon = 1 + \frac{\omega_{\mathrm{p}}^2}{\omega_0^2 - \mathrm{i}\gamma\omega - \omega^2}$$

[dielectric with losses; see equation (6.b.5)]. In the absence of the dielectric the capacitance is C_0. Find the parameters C, C_1, L, and R of the two-terminal network shown in figure 7.13.1, when its AC impedance is equal to the impedance of the above capacitor.

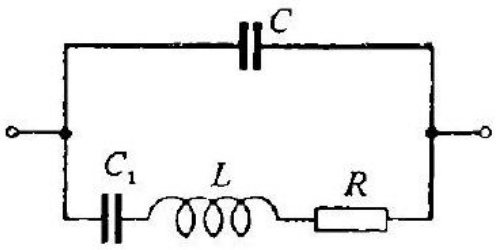


Figure 7.13.1.

7.14 Find the average energy $\bar{W}$ per unit time stored in the capacitor considered in the preceding problem and the average heat loss Q per unit time. Assume that the potential difference between the capacitor plates is $U = U_0 \exp(-i\omega t)$.

7.15 An oscillatory circuit consists of a capacitance C and an inductance L. At a certain instant of time a battery of constant e.m.f. & and an internal resistance R is connected across the plates of the capacitor. Find the current flowing through the inductance as a function of time. Investigate the dependence of this current on L, C, and R.

7.16 A rectangular voltage pulse $U_1(t) = U_0$ for $0 \leqslant t \leqslant T$ and $U_1(t) = 0$ for $t < 0, t > T$ is applied to a circuit consisting of a resistance R and a capacitance C connected in series. Find the voltage across the resistance.

7.17 A rectangular pulse $U_1(t) = U_0$ for $0 \leqslant t \leqslant T$ and $U_1(t) = 0$ for $t < 0$ and $t > T$ is applied across a circuit consisting of a resistance R and an inductance L connected in series. Find the voltage $U_2(t)$ across the inductance.

7.18 A circuit consists of a plane parallel capacitor having a capacitance C and a resistance R (figure 7.18.1). One wants to produce a field between the capacitor plates which will increase linearly from zero to E_0 during a time T and then decrease linearly to zero over an equal interval of time. Determine the form of the pulse which must be applied across the input of this circuit in order to produce the required variation.

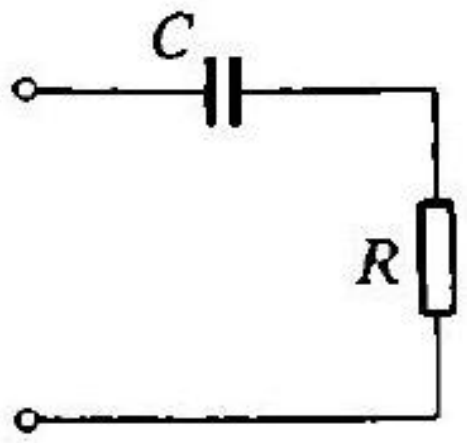


Figure 7.18.1.

7.19 An e.m.f. $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t + \varphi_0)$ is connected at $t = 0$ across a circuit consisting of a resistance R and an inductance L. Find the current $J(t)$ in the circuit and determine the phase angle φ_0 for which there will be no transients.

7.20* An artificial transmission line consists of N identical sections ($N \gg 1$) and is open at each end (figure 7.20.1). Find the natural frequencies of the system.

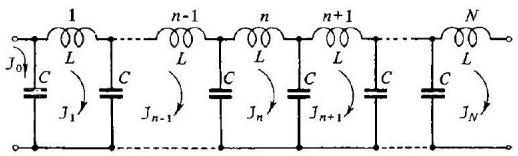


Figure 7.20.1.

7.21 Assuming that the total number of natural frequencies of a long artificial transmission line (see the preceding problem) is large, find the number of oscillations in a frequency interval $\Delta\omega$.

7.22* A long artificial transmission line consisting of $2N$ alternately identical sections (figure 7.22 .1) is open at each end. Investigate the spectrum of natural frequencies of the system.

7.23* A long artificial transmission line consists of N identical sections (figure 7.23.1) whose impedances are given by

$$Z_1 = -\mathrm{i}\left(\frac{\omega}{c^2}L_1 - \frac{1}{\omega C_1}\right), \quad Z_2 = -\mathrm{i}\left(\frac{\omega}{c^2}L_2 - \frac{1}{\omega C_2}\right)$$

A potential difference U_1 is applied across one end of the line while the other end remains on open circuit. Find the potential difference U_2 between the points a and b.

Hint. The solution should be sought in the form of a difference equation involving the current J_n in the nth section with $J_n = q^n \times$ constant.

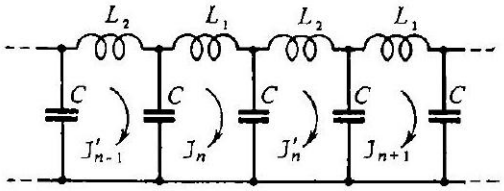


Figure 7.22.1.

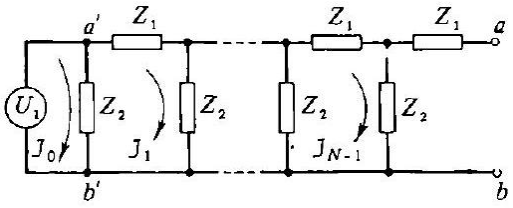


Figure 7.23.1.

7.24 Use the results of the preceding problem to investigate the transmission coefficient $K = U_2/U_1$ as a function of frequency for $N \gg 1$. Find the frequency interval in which K is appreciably different from zero.

7.25 From a consideration of a long artificial transmission line with lumped parameters (problem 7.20) obtain a differential equation for the current in a long line with uniformly distributed parameters by taking the appropriate limit.

7.26 A long lossless transmission line with continuously distributed parameters and length l is on open circuit at each end. Find the spectrum of natural oscillations of the system and compare it with the spectrum of the lumped-parameter line considered in problem 7.20.

7.27* An e.m.f. connected to a closed circuit gives rise to a current $J(t) = J_0 \exp(-\mathrm{i}\omega t)$ in the circuit. Find the general expression for the complex impedance of the circuit without neglecting the delay in the system.

7.28 Find the correction to the inductance and resistance $R_\mathrm{r}(\omega)$ of a circular circuit of radius a in the first nonvanishing approximation (see the preceding problem). Show that $R_\mathrm{r}(\omega)$ is the coefficient of proportionality between the average energy emitted per unit time and the r.m.s. current in the circuit.

16.7.2 b Eddy currents and skin effect

If a conductor placed in an external magnetic field satisfies the conditions given by equation (7.a.1), then at each instant of time the field near the conductor must satisfy the following equations of magnetostatics:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{B} = 0, \quad \operatorname{curl} \boldsymbol{H} = 0 \tag{7.b.1}$$

and the equation

$$\operatorname{curl} E = -\frac{1}{c}\frac{\partial B}{\partial t} \tag{7.b.2}$$

When the conductivity σ of a conductor is sufficiently high ($\sigma/\omega \gg \epsilon'$ where ϵ' is the real part of the permittivity), the field inside the conductor is described by equation (7.b.2) and

$$\operatorname{div} B = 0, \quad \operatorname{curl} \boldsymbol{H} = \frac{4\pi}{c}\sigma \boldsymbol{E} \tag{7.b.3}$$

From equations (7.b.2) and (7.b.3) one can obtain second-order equations for the vectors $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}$. In the case of a homogeneous medium these equations are of the form

$$\nabla^2 \boldsymbol{H} = \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}, \quad \nabla^2 \boldsymbol{E} = \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{7.b.4}$$

On the boundaries separating two conductors, or a conductor and a dielectric, the field components must satisfy the boundary conditions

$$B_{1n} = B_{2n}, \quad H_{1\tau} = H_{2\tau}, \quad E_{1\tau} = E_{2\tau} \tag{7.b.5}$$

The quantity $\delta = c/(2\pi\mu\sigma\omega)^{1/2}$ (the thickness of the skin layer) characterises the depth of penetration of the field into the conductor (ω is the frequency of the field). In the case of a strong skin effect it may be assumed that the field does not penetrate into the conductor, in which case $H = 0$ inside the conductor, whereas outside the conductor and at its surface the relation between the surface current i and the field is

$$H = \frac{4\pi}{c}[i \wedge n] \tag{7.b.6}$$

Owing to the appearance of eddy currents, a conductor placed in a magnetic field assumes a magnetic moment even if its permeability is $\mu = 1$. This magnetic moment may be conveniently characterised by the magnetic polarisability tensor β_{ik} which is defined by

$$m_i = \beta_{ik} H_{0k} \tag{7.b.7}$$

where $\boldsymbol{m}$ is the magnetic moment of the body and H_0 is a periodic external magnetic field. The tensor β_{ik} is symmetric ($\beta_{ik} = \beta_{ki}$) and its components are in general complex and depend on the frequency.

The time average of the heat liberated inside a conductor may be calculated from

$$Q = \int (\overline{\boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{E}}) \mathrm{d}^3 r = \int \sigma \bar{E}^2 \, \mathrm{d}^3 r \tag{7.b.8}$$

or

$$Q = -\frac{c}{4\pi} \oint \left([\overline{E \wedge H}] \cdot \mathrm{d}^2 S \right) \tag{7.b.9}$$

In the first of these formulae the integral is evaluated over the volume of the conductor, whereas in the second formula it is evaluated over its surface. The heat Q can also be expressed in terms of the imaginary part of the magnetic polarisability tensor ($\beta_{ik} = \beta'_{ik} + \mathrm{i}\beta''_{ik}$); in the case of a field which is a harmonic function of time, we have

$$Q = \frac{\omega}{2}\beta''_{ik} \operatorname{Re}\left(H_{0i} H^*_{0k}\right) \tag{7.b.10}$$

7.29 A coil, in which a current $J_0 \exp(-\mathrm{i}\omega t)$ is flowing, is wound on a wide plate which has a conductivity σ, magnetic permeability μ, and is bounded by the planes $x = \pm h$. The number of turns, which are parallel to one another, per unit length is n and the thickness of the coil is

very small. Neglecting edge effects, determine the real part of the amplitude of the magnetic field inside the plate. Investigate the limiting cases of a strong ($\delta \ll h$) and weak ($\delta \gg h$) skin effect.

7.30* An infinitely long metal cylinder with conductivity σ and magnetic permeability μ is placed so that its axis coincides with the axis of an infinite solenoid of circular cross section, which carries a current $J = J_0 \exp(-i\omega t)$. Find the magnetic and electric field in the whole of space, and also the current distribution j in the cylinder, assuming that the radius of the cylinder a, the radius of the solenoid b, and the number of turns per unit length, n, are known.

7.31 A conducting cylinder is placed in the uniform magnetic field $H = H_0 \exp(-\mathrm{i}\omega t)$ which is parallel to its axis. By using the results of the preceding problem, investigate the current distribution j inside the cylinder, in the limit of low and high frequencies.

7.32 Calculate the amount of heat Q liberated per unit time per unit length of the cylinder considered in problem 7.30. Investigate the limit of low and high frequencies.

7.33 Find the magnetic polarisability β (per unit length) of a cylinder of radius a and conductivity σ placed in an alternating magnetic field of frequency ω which is parallel to its axis. Assume that the magnetic permeability is $\mu = 1$ and consider the limit of high and low frequencies.

7.34* A metal cylinder of radius a and conductivity σ is placed in an external uniform magnetic field $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_0 \exp(-\mathrm{i}\omega t)$ which is perpendicular to its axis. Assuming that the magnetic permeability is $\mu = 1$, find the resultant field and the current density j in the cylinder.

Hint. Express E, H in terms of the vector potential A and integrate the differential equation for A.

7.35 Find the energy dissipation per unit length of a perfectly conducting circular cylinder placed in an alternating magnetic field of frequency ω which is perpendicular to the axis of the cylinder.

7.36* An infinitely long cylinder of radius a and conductivity σ is placed in a circularly polarised magnetic field, which is perpendicular to its axis,

$$H_0(t) = (H_{01} + \mathrm{i}H_{02}) \exp(-\mathrm{i}\omega t)$$

H_{01} and H_{02} are mutually perpendicular vectors and are of equal length $H_{01} = H_{02} = H_0$ [the vector $H_0(t)$ describes a circle of radius H_0 in the plane perpendicular to the axis of the cylinder]. Find the average couple $\bar{N}$ per unit length of the cylinder ($\mu = 1$).

7.37 An infinitely long cylinder rotates about its axis with an angular velocity ω in a constant uniform magnetic field H_0 which is perpendicular to the axis. Find the retarding couple $\bar{N}$ per unit length of the cylinder.

7.38* An infinitely long metal cylinder of radius a, conductivity σ, and permeability μ is placed in a constant and uniform magnetic field H_0 which is parallel to its axis. The external field is then switched off and is maintained at zero. Find the magnetic field inside the cylinder as a function of time.

7.39 A metal sphere of radius a, conductivity σ, and magnetic permeability μ is placed in a uniform alternating magnetic field $H_0(t)$, with $H_0(t) = H_0 \exp(-\mathrm{i}\omega t)$. Assuming that the frequency is low, find the distribution of eddy currents in the sphere and the average power Q absorbed by it. Use the first-order approximation.

7.40 A metal sphere of radius a, conductivity σ, and magnetic permeability μ is placed in a uniform magnetic field which varies with a frequency ω. Find the resultant field H and the average power Q absorbed by the sphere at high frequencies.

Hint. In calculating the field outside the sphere, assume that the field inside it is zero, i.e. neglect the penetration depth δ in comparison with the radius a. In determining the field inside the sphere assume that its surface is plane.

7.41* A conducting ellipsoid is placed in a uniform alternating magnetic field. Determine the magnetic polarisability of the ellipsoid in the case of a strong skin effect, i.e. assume that the

depth of penetration of the field into the conductor can be neglected. Consider the limiting cases of a thin circular disc and a long thin rod.

7.42* A sphere of radius a and conductivity σ is placed in a uniform magnetic field $H(t) = H_0 \exp(-\mathrm{i}\omega t)$. Find the resultant magnetic field and the distribution of eddy currents in the sphere in the general case of
an arbitrary frequency. Verify that in the limiting cases of a strong and weak skin effect the general solutions become identical with those obtained in problems 7.39 and 7.40, respectively (assume for simplicity that $\mu = 1$).

7.43 Find the average power, Q, absorbed by a conducting sphere in a uniform alternating magnetic field of arbitrary frequency.

7.44 Find the active resistance R of a thin cylindrical conductor of length l, radius a, and conductivity σ in the presence of the skin effect, assuming that the permeability is $\mu = 1$. Investigate the limit of low and high frequencies.

7.45 A layer of another metal is deposited on the surface of a cylindrical conductor of radius a and conductivity σ_1. The thickness of the layer is h and its conductivity is $\sigma_2 (h \ll a)$. Find the active resistance R of the composite conductor to alternating currents, assuming that the thickness of the skin layer is small compared with $a (\mu = 1)$.

7.46 An infinitely long hollow cylinder of internal radius a and wall thickness $h (h \ll a)$ is placed in a uniform magnetic field $H_0(t)$, with $H_0(t) = H_0 \exp(-\mathrm{i}\omega t)$, which is parallel to its axis. Find the amplitude H' of the magnetic field in the cavity and investigate its dependence on ω.

Hint. Since $h \ll a$, the field inside the shell may be determined on the assumption that the shell is plane.

7.47 An alternating current $J = J_0 \exp(-i\omega t)$ flows along a hollow cylindrical conductor of average radius a, conductivity σ, magnetic permeability μ, and thickness $h \ll a$. Find the current distribution j across the conductor and its active resistance R per unit length. Find also the condition which must be satisfied in order to ensure that the resistance of a hollow conductor is very nearly equal to the resistance of a solid conductor of equal external radius.

Hint. Neglect the curvature of the surface of the conductor.

7.48* A linear current J flows inside a metal tube at a distance l from its axis. The radius of the tube is a, the wall thickness is $h \ll a$, and the conductivity of the walls is $\sigma (\mu = 1)$. The current J and the distance l are both arbitrary functions of time, but are such that at all times $l \ll a$. Assuming that equation (7.a.1) is satisfied, determine the force f per unit length on the current J due to eddy currents induced in the cylindrical shell in the case of a weak skin effect $(h \ll \delta)$.

7.49* Solve the preceding problem in the case of a strong skin effect $(h \gg \delta)$.

16.8 Propagation of electromagnetic waves

16.8.1 a Plane waves in a homogeneous medium.

In the absence of charges and currents, the electromagnetic field vectors in a dielectric satisfy the equations

$$\operatorname{curl} E = -\frac{1}{c}\frac{\partial B}{\partial t} \tag{8.a.1}$$

$$\operatorname{curl} H = \frac{1}{c}\frac{\partial D}{\partial t} \tag{8.a.2}$$

$$\operatorname{div} D = 0 \tag{8.a.3}$$

$$\operatorname{div} B = 0 \tag{8.a.4}$$

In a nondispersive medium the field vectors are related by

$$\boldsymbol{D} = \epsilon \boldsymbol{E}, \quad \boldsymbol{B} = \mu \boldsymbol{H} \tag{8.a.5}$$

where ϵ is the permittivity and μ the magnetic permeability. If the losses in electromagnetic energy are negligible then ϵ and μ are real. In the case of a homogeneous medium equations (8.a.1) to (8.a.5) may be combined to yield the following second-order equation for $\boldsymbol{E}$ and $\boldsymbol{H}$:

$$\nabla^2 E - \frac{1}{v_{\text{ph}}^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0, \qquad \nabla^2 H - \frac{1}{v_{\text{ph}}^2}\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = 0 \tag{8.a.6}$$

where $v_{\text{ph}} = c/(\epsilon\mu)^{1/2}$ can be identified with the phase velocity of the waves described by equations (8.a.6).

In general, equations (8.a.5) will only hold for monochromatic field components and the permittivity and permeability will be complex functions of frequency (dispersion). The imaginary parts of the permittivity and permeability determine the dissipation of electromagnetic energy in the medium.

In a conducting medium in which the field is varying slowly, so that the relation between the current and the field is of the form $\boldsymbol{j} = \sigma \boldsymbol{E}$, where σ is the static conductivity, equation (8.a.2) must be replaced by

$$\operatorname{curl} H = \frac{4\pi}{c}\sigma E + \frac{1}{c}\frac{\partial D}{\partial t} \tag{8.a.7}$$

The latter relation will again assume the form of equation (8.a.2) if one introduces the complex permittivity, which at low frequencies is

(1) For details of the theory we refer to the textbooks by Landau and Lifshitz (1960, 1975), Born and Wolf (1970), Stratton (1941), Smythe (1950), Jackson (1962), Panofsky and Phillips (1962), Alfvn and Flthammer (1963), and Stroke (1969), and the review paper by Akhiezer, Bar'yakhtar, and Kaganov (1961).

given by

$$\epsilon(\omega) = \epsilon' + \mathrm{i}\frac{4\pi\sigma}{\omega} \tag{8.a.8}$$

where ϵ' and σ are the static values of the permittivity and conductivity. At high frequencies the permittivity of a conducting medium is also a complex function of frequency.

In the case of good conductors (metals) the second term in equation (8.a.8) is very large and hence at low frequencies

$$\epsilon(\omega) = \mathrm{i}\frac{4\pi\sigma}{\omega} \tag{8.a.9}$$

If the frequency is such that the depth of penetration of the field into the metal is much smaller than the radius of curvature of its surface, and also much less than the wavelength in the surrounding medium, then the tangential components of $\boldsymbol{E}$ and $\boldsymbol{H}$ near the surface of the conductor are related by

$$\boldsymbol{E}_\tau = \zeta\,[H_\tau \wedge n] \tag{8.a.10}$$

where $\boldsymbol{n}$ is an inward unit normal and ζ is the surface impedance which depends on frequency and the properties of the metal, and is defined by

$$\zeta = \left(\frac{\mu}{\epsilon}\right)^{1/2} \tag{8.a.11}$$

Equation (8.a.10) will hold provided $|\zeta| \ll 1$. It may be used as an approximate boundary condition for the determination of the field outside a conductor.

If the field is a simple periodic function of time, the medium is homogeneous, and $\mu = 1$, then the electric field will satisfy the equation

$$\nabla^2 E + \frac{\epsilon\omega^2}{c^2} E - \operatorname{grad}\operatorname{div} E = 0 \tag{8.a.12}$$

and the magnetic field $\boldsymbol{H}$ will be given in terms of $\boldsymbol{E}$ by equation (8.a.1).
A plane monochromatic wave propagating in the direction of the wavevector k, where $k = 2\pi/\lambda$ and λ is the wavelength, is described by

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 \exp\{\mathrm{i}[(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}) - \omega t]\} \tag{8.a.13}$$

The wave amplitude $\boldsymbol{E}_0 = \boldsymbol{E}' + \mathrm{i}\boldsymbol{E}''$ is in general a complex vector. Moreover, $E_0 \perp \boldsymbol{k}$, i.e. the waves are transverse. Depending on the magnitude and direction of the real vectors $\boldsymbol{E}'$ and $\boldsymbol{E}''$, the wave will be plane, circularly, or elliptically polarised.

Plane monochromatic waves with a well-defined frequency and a welldefined polarisation are a mathematical idealisation. The waves which we call monochromatic are, in fact, always quasi-monochromatic. We can consider them as superpositions of monochromatic waves with frequencies
in some range $\Delta\omega$. In any given point of space such a wave can be described by the function $E_0(t)\exp(-\mathrm{i}\omega t)$, where ω is some average frequency in the range $\Delta\omega$, and $\boldsymbol{E}_0(t)$ is a function which varies much more slowly than $\exp(-\mathrm{i}\omega t)$. Moreover, one is often (and in the optical band as a rule) dealing with the simultaneous observation of radiation from many independent sources, with phase differences which vary randomly. These waves will be nonmonochromatic and only partially polarised.

One can consider in a unique way the polarisation both of monochromatic (and completely polarised) and of nonmonochromatic (partially polarised) waves. The polarisation and intensity of these waves can be characterised by the tensor

$$I_{ik} = \overline{E_{0i} E_{0k}^*} \tag{8.a.14}$$

where the averaging is performed over the moment of the observation and over an ensemble of independent sources, and $i, k = 1, 2$ characterise the two basic directions in the xy-plane (here k is parallel to z). The polarisation tensor is Hermitean: $I_{ik} = I_{ki}^*$. It can be written as follows:

$$I_{ik} = I_1 e_i^{(1)} e_k^{(1)^*} + I_2 e_i^{(2)} e_k^{(2)^*} \tag{8.a.15}$$

where I_1 and I_2 are positive quantities and $e^{(1)}$ and $e^{(2)}$ are mutually orthogonal complex vectors, normalised by the condition $\left(\boldsymbol{e}^{(i)} \cdot \boldsymbol{e}^{(k)^*}\right) = \delta_{ik}$ and characterising two basic polarisation states of a partially polarised wave. It is clear from equation (8.a.15) that such a wave can be considered to be an incoherent [(2)] superposition of two basic elliptically polarised waves. The shape and orientation of the polarisation ellipses of these waves are described by the vectors $e^{(1)}$ and $e^{(2)}$. The polarisation ellipses are similar, and their corresponding axes are mutually perpendicular. The quantities I_1 and I_2 are the intensities of the basic waves. The total intensity of the wave $I = \overline{E_0 E_0^*} = I_1 + I_2 = \operatorname{Tr}(I_{ik})$. The quantities I_i and $e^{(i)}$ can be determined from the set of equations

$$I_{ik} e_k = I e_i \tag{8.a.16}$$

The ratio

$$P = \frac{I_1 - I_2}{I_1 + I_2} = 1 - \rho \quad (I_2 \leqslant I_1) \tag{8.a.17}$$

is called the degree of polarisation of a partially polarised wave, and $\rho = I_2/I_1$ is its degree of depolarisation. For a completely polarised wave $P = 1(\rho = 0)$, and for an unpolarised wave $P = 0(\rho = 1), I_1 = I_2 = \frac{1}{2}I$, and the polarisation tensor becomes

$$I_{ik} = \frac{1}{2}\delta_{ik}$$

(2) Oscillations with phase differences which change randomly are said to be incoherent.

When a plane wave falls on a plane separation boundary between two media, the angles θ_0, θ_1, and θ_2, which are the angles of incidence, reflection, and refraction (figure 8.a.1), are related by

$$\theta_1 = \theta_0, \quad \frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_0} = \frac{n_1}{n_2}, \quad n_i = (\epsilon_i)^{1/2} \tag{8.a.18}$$

where $n_{1,2}$ are the refractive indices of the first and second media (we assume that $\mu_1 = \mu_2 = 1$).

The amplitudes of the reflected wave (E_1, H_1) and the refracted wave (E_2, H_2) can be expressed in terms of the amplitude (E_0, H_0) of the incident wave. The corresponding relationships are known as Fresnel's formulae:

(a) If E_0 is normal to the plane of incidence, then

$$E_1 = \frac{\sin(\theta_2 - \theta_0)}{\sin(\theta_2 + \theta_0)}E_0, \quad E_2 = \frac{2\cos\theta_0 \sin\theta_2}{\sin(\theta_2 + \theta_0)}E_0 \tag{8.a.19}$$

(b) If H_0 is normal to the plane of incidence, then

$$H_1 = \frac{\tan(\theta_0 - \theta_2)}{\tan(\theta_0 + \theta_2)}H_0, \quad H_2 = \frac{\sin 2\theta_0}{\sin(\theta_0 + \theta_2)\cos(\theta_0 - \theta_2)}H_0 \tag{8.a.20}$$

The angle θ_2 is given in terms of the permittivities of the two media by equations (8.a.18). Equations (8.a.18) to (8.a.20) retain their form even when ϵ_2 is complex, but then the angle θ_2 will also be complex and will not have a simple geometrical interpretation. The treatment of a complex θ_2 is discussed in problem 8.22 .

The reflection coefficient R is defined as the ratio of the time average of the reflected energy flux to the time average of the incident energy flux.

The superposition of plane monochromatic waves with different wavevectors and frequencies is often referred to as a wave group, or wavepacket. A wavepacket is described by

$$\Psi(r,t) = \int \psi(k)\exp\{\mathrm{i}[(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}) - \omega t]\}\mathrm{d}k_x\ \mathrm{d}k_y\ \mathrm{d}k_z \tag{8.a.21}$$

where $\Psi(r,t)$ is a Cartesian component of $\boldsymbol{E}$ or $\boldsymbol{H}$. The function $\psi(\boldsymbol{k})$ is called the amplitude function. The maximum of the amplitude of a wavepacket moves through space with the group velocity $v_\mathrm{g} = \mathrm{d}\omega/\mathrm{d}k$.

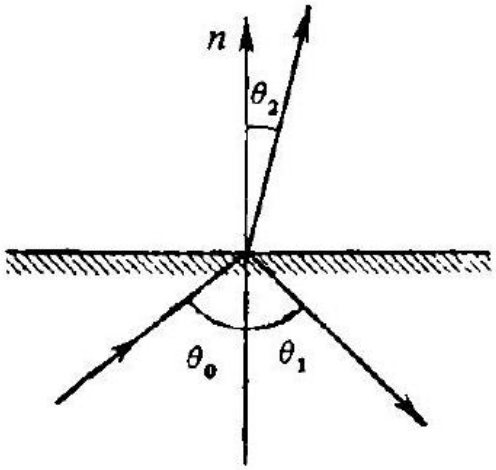


Figure 8.a.1.

8.1 Two plane monochromatic linearly polarised waves of the same frequency propagate along the z-axis. The first wave is polarised along the x-axis and has an amplitude a, and the second is polarised along the y-axis and has an amplitude b. The phase of the second wave leads the phase of the first wave by x. Find the polarisation of the resultant wave.

8.2 In the preceding problem, consider the dependence of the polarisation on the phase difference χ when $a = b$.

8.3 Two monochromatic waves of equal frequency are circularly polarised in opposite directions. They are in phase and propagate in the same direction. Their amplitudes are a and b. Determine the type of polarisation for different values of the ratio a/b (a and b may be chosen to be real).

8.4 Express the degree of polarisation P of a plane wave in terms of the components I_{ik} of the polarisation tensor. What is the condition which the components I_{ik} must satisfy in order that the wave is completely polarised?

Hint. Use equation (8.a.15) and the orthogonality of the basic polarisation vectors.

8.5 Verify that a partially polarised electromagnetic wave can always be considered as the sum of an unpolarised and a completely polarised wave. To do that show that the polarisation tensor (8.a.15) can in the general case be written in the form

$$I_{ik} = \frac{1}{2}I(1-P)\delta_{ik} + \frac{1}{2}PI_{ik}^{\mathrm{pol}}$$

where the determinant of the tensor I_{ik}^{ool} vanishes so that this tensor describes a completely polarised wave. The first term in this expansion corresponds to the unpolarised wave, where $I = I_1 + I_2$ is the total intensity and P the degree of polarisation.

8.6 A plane monochromatic wave with intensity I propagates along the z-axis and is polarised with a polarisation ellipse with semiaxes a and b. The semimajor axis a makes an angle ϑ with the x-axis. Find the polarisation tensor and consider possible special cases.

8.7* An electromagnetic wave is formed by the superposition of two incoherent 'almost monochromatic' waves of the same intensity I and with approximately equal frequencies and wavevectors. Both waves are linearly polarised and the directions of polarisation are defined in the plane perpendicular to the wavevector by the unit vectors $e^1(1,0)$ and $\boldsymbol{e}^2(\cos\vartheta, \sin\vartheta)$. Find the polarisation tensor I_{ik} of the resultant partially polarised wave and its degree of polarisation. Elucidate the nature of the polarisation of this wave (see problem 8.6).

8.8 Solve the preceding problem in the case where the two intensities are unequal ($I_1 \neq I_2$) and the two directions of polarisation are at an angle of $\frac{1}{4}\pi$.

8.9 The Hermitian polarisation tensor of an electromagnetic wave is given by

$$I_{ik} = \frac{1}{2} I \left(\delta_{ik} + \sum_{l=1}^{3} \xi_l \hat{\tau}_{ik}^{(l)} \right) = \frac{1}{2} I \begin{pmatrix} 1+\xi_3 & \xi_1 - \mathrm{i}\xi_2 \\ \xi_1 + \mathrm{i}\xi_2 & 1-\xi_3 \end{pmatrix}$$

where I is the total intensity of the wave, ξ_i are real parameters which are such that $\xi^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 \leqslant 1$ (Stokes parameters), and $\hat{\tau}^{(l)}$ are the matrices

$$\hat{\tau}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\tau}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{i} \\ \mathbf{i} & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\tau}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Explain the physical significance of the parameters ξ_i. To do this, express the degree of depolarisation ρ in terms of ξ_i and determine the polarisation of the two component waves into which a partially polarised wave may be resolved under the following three conditions:
(a) $\xi_1 \neq 0$
$\xi_2 = \xi_3 = 0$
(b) $\xi_2 \neq 0$
$\xi_1 = \xi_3 = 0$
(c) $\xi_3 \neq 0$
$\xi_1 = \xi_2 = 0$

8.10 The electric field E of an electromagnetic wave in which the real and imaginary components of the complex wavevector k are in different directions, is linearly polarised. Determine the mutual disposition of the vectors $\boldsymbol{E}_0, \boldsymbol{H}', \boldsymbol{H}'', \boldsymbol{k}'$, and $\boldsymbol{k}''$, where $\boldsymbol{H}', \boldsymbol{H}''$ correspond to the real and imaginary parts of the complex amplitude $\boldsymbol{H}_0$ and $\boldsymbol{k}'$ and $\boldsymbol{k}''$ are the real and imaginary parts of the wavevector k. Find the locus of the end point of the vector H at a given point in space.

Solve the same problem in the case where the vector H is linearly polarised.

8.11 A circularly polarised monochromatic wave falls obliquely on the plane boundary of a dielectric. Determine the polarisation of the reflected and refracted waves.

8.12* A beam of almost monochromatic unpolarised light is incident on the plane boundary of a dielectric. Find the polarisation tensors $I_{ik}^{(1)}, I_{ik}^{(2)}$ and the depolarisation coefficients ρ_1, ρ_2 of the reflected and refracted light.

8.13 An unpolarised, almost monochromatic beam of light is incident on the plane boundary of separation between two dielectrics. Determine the coefficient of reflection R and the depolarisation coefficients $\rho_{1,2}$ of the reflected and refracted light, if the angle of incidence is equal to Brewster's angle.

8.14 Derive the Fresnel formulae for the case where an electromagnetic wave is incident on the plane boundary of a conducting medium with a small surface impedance ζ.

8.15 Find the reflection coefficient R of a metal surface with a small surface impedance $\zeta = \zeta' + \mathrm{i}\zeta''$. Find the angle of incidence θ_0 at which the reflection coefficient is a minimum.

8.16 A linearly polarised wave is incident on the plane boundary of a conducting medium with a low surface impedance ζ. Determine the polarisation of the reflected wave if the glancing angle of incidence is equal to the angle Φ_0 determined in the solution of the preceding problem.

8.17 A linearly polarised plane wave is incident at an angle θ_0 on the surface of a metal. The direction of the electric vector is at an angle $\frac{1}{4}\pi$ to the plane of incidence. The experimentally determined ratio of the transverse and longitudinal (with respect to the plane of incidence) components of the reflected wave is found to be $E_{\parallel 1}/E_{\perp 1} = \tan\rho$ and the phase difference between the components δ is such that

$$\frac{E_{\parallel 1}}{E_{11}} = \tan\rho \exp(\mathrm{i}\delta)$$

Express the real part of the refractive index n' and the absorption coefficient n'' in terms of ρ, δ, and θ_0 where $n' + \mathrm{i}n'' = \zeta^{-1}$, if ζ is the surface impedance and $|n'^2 - n''| \gg \sin^2\theta_0$.

8.18 Find the reflection coefficient R of the plane surface of a conductor at normal incidence, in the limiting case of low conductivity [cf equation (8.a.8)].
8.19* Show that a linearly polarised wave will in general become elliptically polarised after total reflection from the surface of a dielectric. Under what conditions will the polarisation become circular?
8.20 Investigate the transport of energy in the case of total internal reflection. Find the energy flux along the separation boundary, and also in the perpendicular direction, in the medium from which the reflection takes place. Determine the lines of the Poynting vector S.
8.21 A plane monochromatic wave is incident upon the plane separating two dielectrics with permittivities ϵ_1 and ϵ_2. Describe the nature of the field on both sides of the boundary in the case of glancing incidence (angle of incidence $\theta_0 \to \frac{1}{2}\pi$).
8.22* An electromagnetic wave is incident obliquely from a dielectric on the plane boundary of a conducting medium. Find the direction of propagation, the attenuation, and the phase velocity v_{ph} in the conducting medium.
8.23* A dielectric layer of permittivity ϵ_2 is bounded by the planes $z = 0$ and $z = a$ and lies between dielectric media with permittivities ϵ_1 and ϵ_3 ($\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 1$). An electromagnetic wave falls normally on the surface of the layer from the region $z < 0$. Find the thickness of the layer corresponding to minimum reflection, and the ratio of ϵ_1, ϵ_2, and ϵ_3 for which there will be no reflection.
8.24* A plane wave falls normally from a vacuum on the boundary of a dielectric. Investigate the effect of the 'sharpness' of the boundary on the reflection coefficient, assuming that the permittivity is given by

$$\epsilon(z) = \epsilon - \frac{\Delta\epsilon}{\exp(z/a) + 1}, \quad \epsilon = 1 + \Delta\epsilon$$

where ϵ and $\Delta\epsilon$ are constants. Investigate the special cases of large and small a.

Hint. Use the substitutions $\xi = -\exp(-z/a)$ and $E(\xi) = \xi^{-\mathrm{i}ka}\psi(\xi)$ in the differential equation for $E(z)$ [cf equation (8.a.12)] where $\psi(\xi)$ satisfies the hypergeometric equation [see Gradshteyn and Ryzhik (1965), equation (9.151)].
8.25* In the absence of absorption, the permittivity of a plasma is given by (cf problem 6.16)

$$\epsilon = 1 - \frac{4\pi e^2 N}{m\omega^2}$$

Discuss the propagation of electromagnetic waves in a plasma whose concentration is described by the linear function $N(z) = N_0 z$. Consider the case where a plane monochromatic wave is incident normally on a nonhomogeneous layer of plasma (this may be of importance in the propagation of radio waves in the ionosphere).

Hint. Solve the equation for $E(z)$ by expanding the required function into a Fourier integral.
8.26 Construct a one-dimensional wavepacket Ψ at time $t = 0$ in the case where the amplitude is given by the Gaussian function

$$a(k) = a_0 \exp\left[-\frac{(k - k_0)^2}{(\Delta k)^2}\right]$$

and a_0, k_0 and Δk are constants. Find the relation between the width of the packet Δx and the range of wavenumbers Δk which contribute significantly to the wavepacket.
8.27 A wavepacket Ψ is formed by the superposition of plane waves of different frequency. The amplitude function is given by the Gaussian curve

$$a(\omega) = a_0 \exp\left[-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{(\Delta\omega)^2}\right]$$

where a_0, ω_0, and $\Delta\omega$ are constants. Find the amplitude of the packet as a function of time at the point $x = 0$. Determine the relation between the length of the wavepacket Δt and the frequency range $\Delta\omega$.

8.28 A given object is illuminated by light of wavelength λ and is viewed through a microscope. Find the minimum possible linear dimension $\Delta x_{\min}$ of the object which is allowed by the condition $\Delta x \Delta k \geqslant 1$.

8.29 The position of an object is determined by means of radar. What is the limiting accuracy with which this determination may be carried out if the wavelength is λ and the distance to the object is l?

8.30 Investigate the form and the motion of a wavepacket obtained as a result of the superposition of plane waves with equal amplitudes a_0 and with wavevectors lying in the range $|k_0 - \boldsymbol{k}| \leqslant q$, where k_0 and q are constants. Replace the actual law of dispersion $\omega(k)$ by the approximate relation

$$\omega(k) = \omega(k_0) + \left(\left.\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}\right|_0 \cdot [k - k_0] \right)$$

8.31* Investigate the spreading of a one-dimensional wavepacket in a dispersive medium. Assume that the amplitude function is given by the Gaussian curve $a(k) = a_0 \exp\left[-\alpha (k - k_0)^2\right]$, and retain all terms up to and including the second-order term in the expansion of ω in terms of k.

8.32 Find the phase velocity v_{ph} and the group velocity v_{g} for a medium whose permittivity is given by

$$\epsilon(\omega) = 1 + \frac{\omega_{\mathrm{p}}^2}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Consider only the cases of large and small frequencies (compared with ω_0) and assume that $\mu = 1$.

8.33 Determine the rate of transport of energy by a one-dimensional wavepacket in a dispersive medium. Show that this velocity is equal to a group velocity lg .

Hint. The rate of transport of energy v is given by the relation $\bar{\gamma} = v\bar{w}$, where

$$\overline{\overline{w}} = \frac{1}{16\pi}\left[\frac{\mathrm{d}(\omega\epsilon)}{\mathrm{d}\omega} EE^* + \frac{\mathrm{d}(\omega\mu)}{\mathrm{d}\omega} HH^*\right]$$

is the average energy density in the dispersive medium (see Landau and Lifshitz, 1960) and $\bar{\gamma}$ is the average energy flux.

16.8.2 b Plane waves in anisotropic and gyrotropic media

When the electrical and magnetic properties of a medium are different in different directions so that the permittivity and the magnetic permeability of such a medium are tensors, the medium is referred to as optically anisotropic. Optical anisotropy may be a consequence of the crystalline structure of the body, but it may also be produced by an external electric field (cf problems 6.17 and 6.18) or by an external mechanical effect. In
the absence of an external magnetic field, the tensors $\epsilon_{ik}(\omega)$ and $\mu_{ik}(\omega)$ are symmetric:

$$\epsilon_{ik} = \epsilon_{ki}, \quad \mu_{ik} = \mu_{ki} \tag{8.b.1}$$

We shall not consider the effects associated with the spatial nonuniformity of the field, which leads to a dependence of the permittivity and the magnetic permeability on the wavevector $\boldsymbol{k}$ (see Landau and Lifshitz, 1960, and also problem 8.48).

In an anisotropic medium, two plane monochromatic waves of the same frequency and polarised linearly in perpendicular planes may be propagated in a given direction with different phase velocities. The directions along which both waves have the same velocity of propagation are called optic axes. The direction of propagation of a wave, which is defined by the normal to the wave surface, is not in general the same as the ray direction, i.e. the direction of the Poynting vector.

Crystals in which two of the principal values of the permittivity tensor are equal $\left[\epsilon^{(1)} = \epsilon^{(2)} = \epsilon_\perp, \epsilon^{(3)} = \epsilon_\sharp\right]$ are known as uniaxial. Their optic axis lies along the $x_3 = z$-axis. The wavevectors of the two waves propagating at an angle θ to the optic axis are then given by

$$k_1 = \frac{\omega}{c}\left(\epsilon_\perp \mu\right)^{1/2}, \quad k_2 = \frac{\omega}{c}\left(\frac{\epsilon_\perp \epsilon_\parallel \mu}{\epsilon_\perp \sin^2\theta + \epsilon_\parallel \cos^2\theta}\right)^{1/2} \tag{8.b.2}$$

The first of these waves is known as the ordinary wave. The induction vector D and the electric field vector E of this wave are parallel to each other and perpendicular to the wavevector k_1 and the plane containing the wavevector and the optic axis (principal plane). The second wave is known as the extraordinary wave. In this wave the induction vector D lies in the principal plane and is perpendicular to the corresponding wavevector $\boldsymbol{k}_2$. The vector $\boldsymbol{E}$ lies in the principal plane but is not parallel to D.

In the presence of an external constant magnetic field, the tensors ϵ_{ik} and μ_{ik} are no longer symmetric. In nonabsorbing media, to which we shall confine our attention in this section, these tensors are Hermitian, i.e.

$$\epsilon_{ik} = \epsilon^*_{ki}, \quad \mu_{ik} = \mu^*_{ki} \tag{8.b.3}$$

The relation between the field strengths and the inductions is then of the form (cf problem 6.20)

$$\boldsymbol{D} = \hat{\epsilon}'\boldsymbol{E} + \mathrm{i}\left[\boldsymbol{E} \wedge \boldsymbol{g}_\mathrm{e}\right], \quad \boldsymbol{B} = \hat{\mu}'\boldsymbol{H} + \mathrm{i}\left[\boldsymbol{H} \wedge \boldsymbol{g}_\mathrm{m}\right] \tag{8.b.4}$$

where g_e and g_m are the gyration vectors (electric and magnetic respectively) and $\hat{\epsilon}'\boldsymbol{E}$ is a vector with components equal to $\epsilon'_{ik}E_k$. Media for which the field vectors are given by equation (8.b.4) are known as gyrotropic media.

Two plane waves of the same frequency can propagate in a gyrotropic medium in a given direction with different phase velocities. These waves
are elliptically polarised in opposite directions, and the polarisation ellipses have the same ratio of axes but are rotated relative to each other by $\frac{1}{2}\pi$.

The boundary conditions on the surface of an anisotropic or gyrotropic body are the same as on the separation boundary between two isotropic media [cf equations (3.a.9) and (5.0.6)].

8.34 The direction of propagation of the extraordinary wave in a uniaxial crystal is at an angle θ to the optic axis. Determine the angle α between the wavevector k and the electric field E, and also the angle ϑ between the ray direction (Poynting vector) and the optic axis of the crystal.

8.35 A plane wave is incident on the plane surface of a uniaxial crystal placed in a vacuum. The optic axis of the crystal is at right angles to its surface. Find the directions of propagation of the ordinary and extraordinary rays in the crystal, if the angle of incidence is θ_0.

8.36 Solve the preceding problem in the case where the optic axis of the crystal is parallel to its surface and makes an angle α with the plane of incidence.

8.37 A plane monochromatic wave propagates in an infinite ferrite medium which is magnetised to saturation at angle θ to a constant magnetic field. The magnetic permeability of the ferrite is given by the tensor [3]

$$\mu_{ik} = \begin{pmatrix} \mu_\perp & -\mathrm{i}\mu_\mathrm{a} & 0 \\ \mathrm{i}\mu_\mathrm{a} & \mu_\perp & 0 \\ 0 & 0 & \mu_\parallel \end{pmatrix}$$

where the z-axis is parallel to the constant magnetic field. Assuming that the permittivity of the ferrite ϵ may be looked upon as a scalar [4], find the phase velocities of propagation $v_{1,2}$.

8.38 A plane monochromatic wave propagates in a dielectric placed in a constant uniform magnetic field. Assuming that the permeability of the dielectric is $\mu = 1$, and that the permittivity tensor (see problem 6.22) is of the form

$$\epsilon_{ik} = \begin{pmatrix} \epsilon_\perp & -\mathrm{i}\epsilon_\mathrm{a} & 0 \\ \mathrm{i}\epsilon_\mathrm{a} & \epsilon_\perp & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_\parallel \end{pmatrix}$$

find the phase velocities of propagation.

8.39 Investigate the polarisation of waves which can propagate in an infinite ferrite medium magnetised to saturation. Consider the special cases

(a) where the propagation occurs along the constant magnetic field and

(b) where the propagation takes place at right angles to this field.

(3) The dielectric permittivity tensor of a gaseous dielectric in a uniform external field has the same form (see problem 6.22).

[4] This is so because the constant magnetic field has a much greater effect on the magnetic properties of the ferrite than on the electrical properties.

8.40 A dielectric is placed in an external magnetic field. A plane monochromatic wave propagates in the direction of the magnetic field (the z-axis) and is linearly polarised at the point $z = 0$. Determine the polarisation of the wave at points $z \neq 0$.

Hint. Use the permittivity tensor obtained in the solution of problem 6.22

8.41 A plane, circularly polarised wave is incident normally on the plane boundary of a ferrite placed in a vacuum. The ferrite is magnetised in the direction of incidence of the wave. Determine the polarisation and the amplitude of the reflected and transmitted waves.

Hint. Use the boundary conditions for the field vectors $\boldsymbol{E}$ and $\boldsymbol{H}$.

8.42 Solve the preceding problem in the case where the incident wave is linearly polarised.

8.43* An artificial dielectric consists of thin perfectly conducting circular discs which are similarly oriented and placed in a vacuum. A constant magnetic field $\boldsymbol{H}_0$ is applied at right angles to the planes of the discs and a plane electromagnetic wave propagates in the direction parallel to the magnetic field. Determine the phase velocities of propagation, assuming that the dielectric may be looked upon as a continuous medium.

Hint. Take into account the Hall effect which appears as a result of the presence of the external magnetic field.

8.44 A plane wave is incident normally upon a plane lattice formed by thin, parallel, infinitely long conductors. The distances between the conductors and their thickness are much smaller than the wavelength. What effect will the lattice have upon the propagation of waves with different polarisations?

8.45 Consider the possibility of the propagation of longitudinal oscillations in a medium with a dielectric permittivity $\epsilon(\omega)$. The electric field vector E is parallel to the wavevector for such oscillations. Give the conditions for which the damping of such oscillations will be small. At what frequency are longitudinal oscillations possible in a plasma (its dielectric permittivity was calculated in problem 6.16)?

8.46 The region $x < 0$ is occupied by a plasma with dielectric permittivity $\epsilon(\omega) = 1 - \omega_\mathrm{p}^2/\omega^2$ (see problem 6.16) while the region $x > 0$ is a vacuum. Show that along the plasma-vacuum boundary a surface wave can propagate in which the field strength is damped exponentially

with distance from the boundary. Find the frequency for which such a wave is possible and its polarisation. Restrict the discussion to that of a slow wave ($v_{\rm ph} = \omega/k \ll c$).

8.47 An ionised gas is placed in a constant magnetic field. A transverse plane wave propagates in the direction parallel to the field. Find the phase velocities of propagation. Consider the special case of low
frequencies ($\omega \to 0$) and the nature of the electromagnetic waves, taking into account the motion of the positive ions.

Hint. Use the expression, which was obtained in problem 6.25, for the permittivity tensor of an ionised gas in a constant magnetic field.

8.48 Determine the magnetic permeability tensor $\mu_{ik}(\omega, k)$ of a ferrodielectric without neglecting the term $q\nabla^2 M$ for the effective magnetic field in equation (6.c.3). To do this, consider the motion of the magnetisation vector under the action of a plane monochromatic wave. The ferrodielectric is magnetised to saturation by a constant magnetic field $\boldsymbol{H}_0$.

Hint. Confine the analysis to the case of small amplitudes and linearise the equation of motion of the magnetisation vector.

8.49 Find the dispersion relation for electromagnetic waves propagating in an isotropic ferrodielectric magnetised to saturation without neglecting the term $q\nabla^2 M$ in the expression for the effective field $H_{\rm eff}$ [equation (6.c.3)]. Show that three types of waves with different dispersion relations can propagate in such a medium. Determine the explicit form of the dispersion relation $\omega(k)$ for these waves, subject to the condition $\omega^2\epsilon/(ck)^2 \ll 1$. Estimate the relative magnitude of the electric and magnetic fields for this branch of the oscillations.

8.50 Determine the surface impedance ζ of a ferromagnetic conductor placed in a constant magnetic field which is parallel to its surface. Use the magnetic permeability tensor given in problem 8.37 and assume the components of the electrical conductivity tensor are $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_1$, $\sigma_{33} = \sigma_3, \sigma_{12} = -\sigma_{21} = -\mathrm{i}\sigma_2, \sigma_{13} = \sigma_{31} = \sigma_{23} = \sigma_{32} = 0$.

Hint. The surface impedance is a tensor of rank 2 and should be determined from [cf equation (8.a.10)]

$$E_{\tau i} = \zeta_{ik}\,[H_\tau \wedge n]_k$$

where $i, k = 1, 2, E_{\tau i}$ and H_τ are the tangential components of the field vectors near the surface of the conductor, and n is a unit normal.

8.51 Solve the preceding problem in the case where the constant magnetic field is normal to the surface of the ferromagnetic conductor.

c Scattering of electromagnetic waves by macroscopic bodies. Diffraction The diffraction of electromagnetic waves by conducting or dielectric bodies is described by the solutions of Maxwell's equations subject to appropriate boundary conditions. An exact solution is only possible in a very limited number of cases (cf problems 8.54 and 8.59). However, an approximate solution may frequently be obtained.

If the linear dimensions of the body are small in comparison with the wavelength, then the electromagnetic field near the body may be looked upon as uniform. A body placed in a uniform periodic field will assume
electric and magnetic moments which will be the same functions of time as the external field. The scattered wave appears as the result of the emission of radiation by these alternating moments. The scattering of electromagnetic waves by bodies of small linear dimensions may therefore be reduced to the determination of the dipole moments induced in them. The radiation fields are given in terms of the dipole moments by equations (12.a.17) and (12.a.20).

The differential cross section for scattering into a solid angle $\mathrm{d}\Omega$ is defined by

$$\mathrm{d}\sigma_{\rm s} = \frac{\mathrm{d}/(\vartheta, \alpha)}{\bar{\gamma}_0} \tag{8.c.1}$$

where $\mathrm{d}I = \bar{\gamma}\mathrm{d}^2S = \bar{\gamma}r^2\ \mathrm{d}\Omega$ is the time average of the intensity emitted into the solid angle $\mathrm{d}\Omega$ and $\bar{\gamma}$ and $\bar{\gamma}_0$ are the average energy flux densities of the scattered and incident radiation. The energy flux density is described by the Poynting vector

$$S = \frac{c}{4\pi}[E \wedge H] \tag{8.c.2}$$

The absorption cross section is equal to the ratio of the average energy absorbed by a body per unit time to the average energy flux density in the incident wave:

$$\sigma_{\mathrm{a}} = \frac{Q}{\bar{\gamma}_0} \tag{8.c.3}$$

In the opposite limiting case, i.e. when the wavelength is much smaller than the linear dimensions of the body, one can use the methods of geometrical optics. In the case of diffraction of an electromagnetic wave by an aperture in an infinite opaque screen, the amplitude of the diffracted field, in the geometrical optics approximation, is given by

$$u_{\mathrm{P}} = \frac{k}{2\pi\mathrm{i}} \int \frac{u}{R} \exp(\mathrm{i}kR)\mathrm{d}^2S_n \tag{8.c.4}$$

This formula may be derived from Huygens' principle. The quantity u_P is the field at a point P in front of the screen (figure 8.c.1), u is the field at

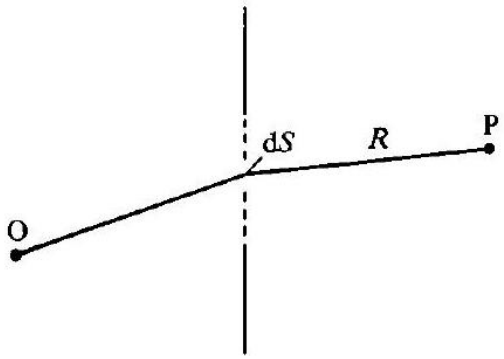


Figure 8.c.1.

an element of area d^2S of the aperture (this field is assumed to be the same as in the absence of the screen, i.e. undistorted by the screen), d^2S_n are the components of the area vector $\mathbf{d}^2S$ in the direction of the ray reaching d^2S from the source of light O, R is the distance between d^2S and the point of observation P, and k is the modulus of the wavevector.

The source of light O and the point of observation P may be either at finite or infinite distances from the screen. When both O and P, or only one of them are at a finite distance from the screen, the phenomenon is known as Fresnel diffraction. When both O and P are at very large distances from the screen, then the rays of light reaching the aperture and the rays leaving it may be regarded as parallel, and this case is known as Fraunhofer diffraction. Equation (8.c.4) may then be written in the approximate form

$$u_{\mathrm{P}} = \frac{u_0 \exp(\mathrm{i}kR_0)}{2\pi\mathrm{i}R_0} \int \exp\{\mathrm{i}([k-k'] \cdot r)\}\, \mathrm{d}^2S_n \tag{8.c.5}$$

where $\boldsymbol{k}$ and $\boldsymbol{k}'$ are the wavevectors of the incident and diffracted radiation, R_0 is the distance from the aperture to the point of observation, and u_0 is the field amplitude within the aperture. The intensity of the diffracted wave is proportional to the square of the modulus of the amplitude $|u_{\mathbf{p}}|^2$.

Two screens are defined as complementary if the apertures in one correspond to identical opaque regions in the other, and vice versa. The Babinet principle holds for such screens.

Suppose that the wave fields at a given point with two complementary screens are given by u_1 and u_2, and u is the wave field in the absence of the two screens. We then have

$$u_1 + u_2 = u \tag{8.c.6}$$

Equations (8.c.4) and (8.c.5) take no account of the polarisation of the waves, i.e. the amplitude u is looked upon as a scalar. The diffraction formula which takes into account the vector nature of the electromagnetic field is

$$E_{\mathrm{P}} = -\frac{\mathrm{i}k}{4\pi R}\int \{[n_0 \wedge H] - n\,(n \cdot [n_0 \wedge H]) + [n \wedge [n_0 \wedge E]]\}\exp(\mathrm{ikr})\mathrm{d}^2S \tag{8.c.7}$$

where $\boldsymbol{E}$ and $\boldsymbol{H}$ are the fields within the aperture, $\boldsymbol{E}_{\mathrm{P}}$ is the electric field at a large distance from the screen (in the so-called wave zone), n is a unit vector in the direction of propagation of the diffracted wave, n_0 is a unit normal to the plane of the aperture and is drawn towards the point of observation, r is the distance of the element of area d^2S from the point of observation, and R is the distance of the point of observation from the origin of coordinates, which is taken to lie in the plane of the aperture. The magnetic field in the wave zone is given in terms of the electric field by the usual formula $H_{\mathrm{P}} = [n \wedge E_{\mathrm{P}}]$.

8.52* A plane monochromatic wave is incident on an infinitely long, circular, perfectly conducting cylinder of radius a, in a direction at right angles to its axis. The cylinder lies in vacuo, and the vector $\boldsymbol{E}_0$ of the incident wave is parallel to the axis of the cylinder. Determine the resultant field, the distribution of currents on the surface of the cylinder, and the total current J flowing along the cylinder.

8.53 Find the differential scattering cross section $\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{s}}$ for the cylinder considered in problem 8.52 . Find also the total scattering cross section σ_s.

8.54* A plane monochromatic wave is incident on a perfectly conducting, circular cylinder so that its magnetic vector $H = H_0\exp\{\mathrm{i}[(k \cdot r) - \omega t]\}$ is parallel, and the wavevector k is perpendicular, to the axis of the cylinder. The cylinder lies in vacuo. Find the resultant electromagnetic field In particular, discuss the special case of a thin cylinder ($ka \ll 1$) and determine the differential and total scattering cross sections $\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{s}}$ and σ_{s} for the cylinder.

8.55 Let $\mathrm{d}\sigma_{\parallel}$and $\mathrm{d}\sigma_{\perp}$ be the differential scattering cross sections of an infinitely long cylinder for plane waves with the electric vector $\boldsymbol{E}$ parallel and perpendicular to the axis of the cylinder, respectively. Find the differential scattering cross section d'_{s} in the case of a wave whose electric vector $\boldsymbol{E}$ is at an angle φ to the axis of the cylinder, and also the differential scattering cross section $\mathrm{d}\sigma''_{\mathrm{s}}$ for an unpolarised wave.

Hint. Use the principle of superposition of waves.

8.56 An unpolarised plane wave is scattered by a perfectly conducting thin cylinder ($ka \ll 1$). Determine the degree of depolarisation ρ of the scattered waves as a function of the angle of scattering.

8.57* Solve problem 8.54 in the case of diffraction of a plane wave by an infinitely long cylinder without assuming that the cylinder is perfectly conducting, but regarding its surface impedance ζ as small. Use the approximate boundary condition given by equation (8.a.10).

8.58 Determine the average loss of energy Q and the absorption cross section σ_{a} per unit length of the cylinder considered in the preceding problem. Investigate the limiting case $ka \ll 1$ and explain your results.

8.59* Investigate the diffraction of a plane monochromatic wave by a dielectric cylinder. The cylinder lies in vacuo and has a radius a, permittivity ϵ, and magnetic permeability μ. The wave is incident at right angles to a generator of the cylinder and the vector $\boldsymbol{E}$ is perpendicular to its axis. Determine the resultant field.

8.60* A linearly polarised, plane monochromatic wave is scattered by a sphere of radius a,

which is much smaller than the wavelength λ. Express the components of the scattered electromagnetic wave in the wave zone in terms of the electric and magnetic polarisabilities of the sphere.
Determine the differential scattering cross section.

Hint. In view of the fact that $a \ll \lambda$, the external field near the sphere may be looked upon as uniform, and it is sufficient to consider the emission of radiation by the induced electric and magnetic dipole moments $\boldsymbol{p}$ and $\boldsymbol{m}$.

8.61 Calculate the differential and total scattering cross sections $\mathrm{d}\sigma_\mathrm{s}$ and σ_s and also the degree of depolarisation ρ of the secondary radiation when an unpolarised wave is scattered by a sphere of radius a which is much smaller than the wavelength λ. Express the result in terms of the electric and magnetic polarisabiliities β_e and β_m of the sphere.

8.62 By using the results of the preceding problem, determine the differential and total scattering cross sections $d\sigma_\mathrm{s}$ and σ_s for unpolarised light and a small dielectric sphere of permittivity $\epsilon(\mu = 1)$, and also determine the degree of depolarisation of the scattered radiation. Give a sketch showing these quantities as functions of the scattering angle θ. Indicate the limits of applicability of the solutions. Solve the same problem for a perfectly conducting sphere with $\mu = 1$.

8.63 A plane monochromatic wave is incident at an angle $\frac{1}{2}\pi - \alpha$ on a perfectly conducting thin disc whose radius a is much smaller than the wavelength λ. Determine the differential and total scattering cross sections $d\sigma_\mathrm{s}$ and σ_s for different polarisations of the incident wave and also the scattering cross section for an unpolarised wave.

8.64 A uniform dielectric of permittivity $\epsilon(\mu = 1)$ contains a cavity in the form of a thin disc of radius a and thickness $2h$. Unpolarised light of wavelength $\lambda \gg a$ is incident normally on one of the planes defining the cavity. Find the differential and total scattering cross sections $d\sigma_\mathrm{s}$ and σ_s.

8.65* Find the differential and total cross sections for the scattering of a plane wave of wavelength λ by a perfectly conducting cylinder of length $2h$ and radius $a \ll h, h \ll \lambda$. Investigate the various types of polarisation of the incident wave. The cylinder may be approximated by a prolate ellipsoid of revolution with semiaxes a and h.

Hint. Use the solutions of problems 3.70, 3.72, and 7.41.

8.66 Solve the preceding problem for a dielectric cylinder whose length $2h$ is much less than the wavelength λ inside the cylinder.

8.67 A plane monochromatic wave $E_0 \exp[\mathrm{i}(\boldsymbol{k} \cdot r) - \mathrm{i}\omega t]$ is scattered by a dielectric sphere of radius a with a polarisability $(\epsilon - 1)/4\pi \ll 1(\mu = 1)$. Because of the small polarisability the polarisation of the sphere is in first approximation proportional to the field of the incident wave. Determine the differential scattering cross section and the degree of depolarisation ρ of the scattered radiation. Describe the nature of the scattering in the case of a very large sphere $(ka \gg 1)$.

8.68 Determine the total scattering cross section σ_s for the dielectric sphere discussed in the preceding problem in the limit $ka \gg 1$ and compare with the case when $ka \ll 1$.

8.69* A plane monochromatic wave is scattered by a system of charges, for example, a macroscopic body. The electric field at large distances from the scatterer is of the form

$$\boldsymbol{E} = E_0 \left[\boldsymbol{e} \exp(\mathrm{i}kz) + \boldsymbol{F}(n) \frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{r} \right]$$

where $n = r/r, e = E_0/E_0, k = \omega/c, E_0$ is the amplitude of the incident wave, and $F(n)$ is the scattering amplitude which characterises the properties of the scatterer and is a function of frequency. Show that

$$\sigma_\mathrm{t} = \frac{4\pi}{k} \operatorname{Im} \left(e \cdot F \left(n_0 \right) \right)$$

where $\sigma_t = \sigma_s + \sigma_a$ is the total cross section for the interaction of the wave with the system of charges, σ_s is the scattering cross section, σ_a is the absorption cross section, and $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{n}_0)$ is the forward-scattering amplitude.

8.70* A plane monochromatic wave is incident on a macroscopic particle whose linear dimensions are much smaller than the wavelength λ. The electric and magnetic polarisabilities are $\beta_e = \beta'_e + i\beta''_e$ and $\beta_m = \beta'_m + i\beta''_m$. Since the polarisabilities are complex, the scattering is accompanied by absorption. Calculate the absorption cross section.

Hint. The energy absorbed per unit time is equal to the flux of the Poynting vector through the surface of a large sphere surrounding the particle.

8.71 Calculate the cross section for the absorption of electromagnetic waves by a conducting sphere with a small surface impedance $\zeta = \zeta' + i\zeta''$. The radius of the sphere, b, is small compared with the wavelength λ.

8.72 A plane monochromatic wave is incident on a macroscopic body of given absorption and differential scattering cross sections σ_a and $d\sigma_s/d\Omega$. Express the time average of the force $\bar{F}$ acting on the body in terms of these cross sections.

8.73* Determine the average force $\bar{F}$ acting on a small sphere of radius a placed in the field of a plane monochromatic wave. Consider the examples of a perfectly conducting sphere and a dielectric sphere of permittivity ϵ and magnetic permeability $\mu = 1$. The amplitude of the incident wave is E_0.

8.74 A point source of light is placed on a line which passes through the centre of a circular opaque screen of radius a and is perpendicular to it. Assuming that the geometrical optics approximation may be used ($\lambda \ll a$), find the intensity of light I at a point P on the axis.

8.75 In the preceding problem, consider diffraction at the complementary screen, i.e. a circular aperture in an infinite opaque screen.

8.76 A parallel beam of light is incident normally on a circular aperture in an opaque screen. Find the intensity distribution along the axis.

8.77 Find the angular distribution of the intensity of light in the case of Fraunhofer diffraction at an annular aperture (radii $a > b$) in an infinite opaque screen. Assume that the beam is incident normally on the plane of the aperture and consider the special case of diffraction by a circular aperture.

8.78 Find the angular distribution of the intensity of light for oblique incidence of a parallel beam on a circular aperture (Fraunhofer diffraction).

8.79 A plane linearly polarised wave is incident normally on the rectangular aperture $-a \leqslant x \leqslant a, -b \leqslant y \leqslant b$ in an infinite, thin screen. The amplitudes of the electric and magnetic fields are $E_y = E_0$, $H_x = -E_0, H_y = E_x = 0$. Determine the field radiated from the aperture and also the angular distribution of the radiation.

8.80 A plane linearly polarised wave $E_0 \exp[i(k \cdot r) - i\omega t]$ is incident normally on a circular aperture of radius a in an infinite, thin screen. Determine the field of the radiation emitted from the aperture and the angular intensity distribution.

16.8.3 d Coherence and interference

Detectors of electromagnetic radiation in the optical band react to the intensity I of the radiation, which is a quadratic function of the field components, averaged over time:

$$I = \overline{|u|^2} = \frac{1}{T}\int_0^T |u|^2 \, dt$$

This averaging expresses the fact that the time T over which detectors operate is not less than 10^{-10} s (exceptionally 10^{-13} s) whereas a characteristic period for optical oscillations is

10^{-15} to 10^{-16} s.

Therefore one can observe only those interference pictures that are sufficiently stable over a time interval which is longer than T. This complicates the observation of the interference of waves in the optical range.

Thermal, luminescent, or bremsstrahlung light sources consist, as a rule, of a large number of independent (incoherent) radiators that emit light which varies in phase and polarisation. Almost complete agreement in phase and polarisation is reached in quantum optical generators (lasers) in which the stimulated emission of light plays the main role. However, there are also, in this case, fluctuations in phase and polarisation, owing to the spontaneous emission and the scattering by different fluctuating inhomogeneities.

For an observation of a stable interference picture one usually has recourse to splitting the wave field of each of the independent radiators (and of the source as a whole) into several beams. If the wavepackets formed after the splitting intersect again, having traversed different optical paths, an interference picture may appear in the region where they intersect, provided well-defined coherence conditions are satisfied.

These conditions reduce to the requirement that interference pictures from different independent sources do not blot each other out. One can distinguish the simplest two cases of coherence:

(1) Temporal coherence. Interference of wavepackets can occur only if the time τ of the retardation of one of the packets is shorter than the lifetime Δt of a separate radiator. As to order of magnitude $\Delta t \sim 1/\Delta\nu$, where $\Delta\nu = \Delta\omega/2\pi$ is the spectral range of the frequencies emitted by the atoms (see problems 8.84 to 8.86). Instead of the coherence time, Δt, one can consider the longitudinal size, $l_\sharp$, of the coherence region (coherence length):

$$l_\mathrm{n} = c\Delta t \sim \frac{c}{\Delta\nu} \sim \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda} \tag{8.d.1}$$

where λ is the wavelength of the emitted quasi-monochromatic wave and $\Delta\lambda$ the spread in the wavelengths, which is connected with the spectral width through the relation $\Delta\lambda = (\lambda^2/c)\,\Delta\nu$.

(2) Spatial coherence. If the source is extended, the interference pictures from independent radiators, which are sufficiently far from one another in the source, can blot each other out by being superimposed upon one another. The field retains coherence in the vicinity of points for a region with transverse dimensions of the order

$$l_\perp \sim \frac{\lambda}{\Delta\vartheta} \sim \lambda\frac{R}{L} \tag{8.d.2}$$

where $\Delta\vartheta$ is the angular size of the source, L the transverse size of the source, and R the distance of the source from the point of observation. The longitudinal size $l_\parallel$of the coherence region is determined by equation (8.d.1).

The quantity

$$\Delta V = l_\perp^2 l_\parallel \sim \left(\frac{R}{L}\right)^2 \left(\frac{\lambda}{\Delta\lambda}\right) \lambda^3 \tag{8.d.3}$$

is called the coherence volume.

We call the average number of photons (light quanta) which cross a coherence area l_1^2 during the coherence time $\Delta t = 1/\Delta\nu$ the degeneracy parameter δ of the radiation:

$$\delta = l_\perp^2 \frac{\gamma}{\hbar\omega}\Delta t = \frac{\Delta V\gamma}{c\hbar\omega} \tag{8.d.4}$$

where γ is the energy flux density of the radiation in the frequency range $\Delta\nu, \hbar\omega = 2\pi\hbar\nu$ is the energy of one photon, and $\hbar = 1.05 \times 10^{-34}$ J s is Dirac's constant (Planck's constant

divided by 2π). The degeneracy parameter characterises an important property of quantum emitters: the capacity for stimulated or induced emission. This property consists in the fact that the intensity of radiation from emitters in an electromagnetic field is proportional to $1+\delta$ and increases with increasing δ.

Let the field $u(r,t)$ at the point of observation r at time t be expressed, according to Huygens' principle, in terms of the fields at the points r_1, r_2 at times $t-t_1, t-t_2$:

$$u(r,t) = A_1 u\left(r_1, t-t_1\right) + A_2 u\left(r_2, t-t_2\right) \tag{8.d.5}$$

Here $t_1 = s_1/c, t_2 = s_2/c, s_1 = |\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_1|, s_2 = |\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_2|$, and A_1, A_2 are factors which depend on the geometry involved and the dimensions of apertures that are positioned close to the points with radius vectors r_1 and r_2.

We can write the observed average intensity at r at the time t for a stationary regime in the form

$$I(r) = \overline{u^*(r,t)u(r,t)} = I_1(r) + I_2(r) + 2\left[I_1(r)I_2(r)\right]^{1/2} \operatorname{Re}\gamma\left(r_1, r_2, \tau\right) \tag{8.d.6}$$

In this formula $\tau = \left(s_1 - s_2\right)/c$ and the quantities

$$I_i(r) = |A_i|^2 \overline{\left|u\left(r_i, t-t_i\right)\right|^2} = |A_i|^2 I\left(r_i\right)$$

are the intensities at the point r, if only the i th aperture were open. The function $\gamma\left(r_1, r_2, \tau\right)$ is the so-called complex degree of coherence (or the coefficient of partial coherence) and is defined as follows:

$$\gamma\left(r_1, r_2, \tau\right) = \frac{\Gamma\left(r_1, r_2, \tau\right)}{\left[I_1(r)I_2(r)\right]^{3/2}} \tag{8.d.7}$$

where

$$\Gamma\left(r_1, r_2, \tau\right) = \overline{u\left(r_1, t\right) u^*\left(r_2, t+\tau\right)} \tag{8.d.8}$$

is the correlation function of the fields at r_1 and r_2 at times t and $t+\tau$. The case of spatial coherence corresponds to $\tau = 0$.

The concept of a correlation function and the definitions (8.d.7) and (8.d.8) retain their meaning independently of the way of studying the coherent properties of the field by means of two apertures described here. We can split a light beam from a point source into two beams with intensities I_1 and I_2 in any way and achieve a delay of one of them a time τ relative to the other. If we combine these beams again later on and observe the intensity of the resulting field, averaged over t, in a small region around the point r, this intensity will be described by an equation such as equation (8.d.6), the correlation function will be given by equation (8.d.8), and the coefficient of partial coherence by equation (8.d.7) with $r_1 = r_2 = r$. The function $\Gamma(r,r,\tau)$ is called the autocorrelation function of the field in the point with radius vector r at the times t and $t+\tau$.

The partial coherence coefficient satisfies the inequalities

$$0 \leqslant \left|\gamma\left(r_1, r_2, \tau\right)\right| \leqslant 1$$

The lower limit of these inequalities corresponds to incoherent light for which $I(r) = I_1(r) + I_2(r)$, whereas, on the other hand, the upper limit corresponds to coherent light. We take the Michelson visibility $B(r)$ as a measure of the sharpness of the interference bands:

$$B(r) = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$$
$$= |\gamma(r_1, r_2, r)|^2 \frac{2(I_1 I_2)^{1/2}}{I_1 + I_2} \tag{8.d.9}$$

The position of the maxima of the averaged intensity is determined by the condition

$$\arg \gamma(r_1, r_2, \tau) = 2n\pi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

If in the field of a coherent light wave there are some objects that scatter this wave, in the field where the scattered wave overlaps with the basic-'reference'-wave an interference picture is formed with an intensity which in each point of the region depends both on the intensities and on the phase differences of the scattered and the reference waves. This picture can be mapped on a photographic plate, and afterwards one can use the photographic plate as a diffraction lattice that transmits coherent light through it. The intensity I' of the light passing through the developed photographic plate in a given point (x, y) of it, when the plate is illuminated with light with an intensity distribution $I(x, y)$, is proportional to $I(x, y)$:

$$I'(x, y) = T(x, y) I(x, y)$$

and depends on the blackening of the photographic plate, characterised by the 'transmissivity' $T(x, y)$. The transmissivity depends on the intensity $I_0(x, y)$ of the primary field that causes the blackening and on the contrast of the photographic emulsion, which is characterised by the law

$$T(x, y) \propto [I_0(x, y)]^{-\frac{1}{2}\gamma}$$

where γ is the contrast coefficient (gamma) of the emulsion.
A photographic plane on which the picture of the interference of a reference wave with the wave scattered by an object is represented is called a hologram. It turns out that when coherent light is transmitted through a hologram, behind it a three-dimensional picture is formed of the original object. The process of reconstructing the original wave field in this way is called holography (see, e.g. Stroke, 1969) and is illustrated by problems 8.97 to 8.101 .

Finally we give some astronomical constants that are used in the solutions of the problems: Average distance from the Earth to the Sun: 1.50×10^8 km; Solar diameter:
1 light year:
1 pc (parsec):
1.39×10^6 km
9.46×10^{12} km
$30 \cdot 8 \times 10^{12}$ km

8.81 Derive the estimate, equation (8.d.2), for the transverse coherence dimension l_1. Start from the fact that interference pictures produced by emitters in different points of an extended quasi-monochromatic source of diameter L should not blot each other out within the limits of the coherence region. The distance from the source is R, and the wavelength λ.

8.82 Derive the estimate (8.d.4) for the degeneracy parameter δ.

8.83 A quasi-monochromatic source has a transverse dimension L and emits light with a wavelength λ. Estimate the order of magnitude of the solid angle $\mathrm{d}\Omega$ within which this radiation is coherent.

8.84 What are the transverse and longitudinal dimensions and the solid angle and volume of coherence of the radiation emitted by sodium atoms in the solar atmosphere? On the Earth one observes a spectral line of wavelength $\lambda_0 = 5 \times 10^{-7}$ m, while the atomic mass is

$m = 3.7 \times 10^{-26}$ kg. The main contribution to the width of the spectral line comes from the thermal motion of the atoms (the temperature $T \approx 6000$ K).

Hint. The Doppler width of a spectral line is

$\gamma_D = \left[\frac{8\pi^2 kT}{m\lambda_0^2}\right]^{1/2}$,

where k is the Boltzmann constant (see problem 12.74).

8.85 How are the results of the preceding problem changed, if one observes from Earth a star of the same type as the Sun at a distance of 10 light years?

8.86 Determine the longitudinal and transverse dimensions, and also the volume of coherence in the immediate neighbourhood, of a laser operating at a wavelength $\lambda_0 = 5 \times 10^{-7}$ m with a frequency spread $\Delta\nu = 10^2$ Hz. The diameter of the mirrors is $D = 5 \times 10^{-2}$ m.

8.87 Find the degeneracy parameter δ of the emission from a perfect black body at temperature T. Make numerical estimates for $\lambda = 10^{-2}$ m and $\lambda = 5 \times 10^{-7}$ m with $T = 273$ K and for $\lambda = 5 \times 10^{-7}$ m with $T = 10000$ K

Hint. The spectral energy density of the emission by a black body is

$$I_\nu = \frac{8\pi^2 \hbar \nu^3}{c^3[\exp(2\pi\hbar\nu/kT) - 1]}$$

where $k = 1.38 \times 10^{-23}$ J K^{-1} is Boltzmann's constant.

8.88 Find the degeneracy parameter for the laser considered in problem 8.86. The power of the radiation is 200 W . What is the effective temperature to which this value of δ corresponds?

8.89 Give the relation between the autocorrelation function

$$\Gamma(r, r, \tau) = \overline{u(r,t)u^*(r, t+\tau)}$$

and the power spectrum $I(\omega)$ of the radiation. The intensity of the radiation is

$$I = \overline{\overline{u^*}(t)u(t)} = \int_0^\infty I(\omega)\mathrm{d}\omega$$

8.90 Find the autocorrelation function of the radiation, if the line transmission is narrow and has a rectangular form in a range of width $\Delta\omega$ around ω_0. The intensity of the radiation is I.

8.91 In a Young interference experiment one observes an interference picture in the region where the beams which are diffracted by two openings overlap (figure 8.91.1). The openings are at a distance D from one another at the points $(0, 0)$ and (x, y). The light source is extended and its dimensions are much larger than D. It is at a distance R from the openings ($R \gg D$). The light is sufficiently monochromatic so that for each of the independent emitters the condition of temporal coherence is satisfied. Express the coefficient of partial coherence in terms of the intensity distribution $I(x, y)$ of the radiation over the cross section of the light source.

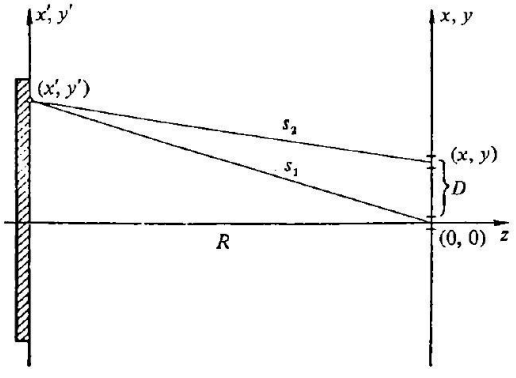


Figure 8.91.1.

8.92 The Michelson stellar interferometer is a version of the Young interference scheme in which the distance between the openings can be varied. Find the dependence of the visibility B of the interference bands in the Michelson interferometer on the distance D between the openings and on the wavelength λ for the following two cases:
(a) A binary is observed, i.e. a system of two stars which are close to one another, at an angular distance α from each other. Each of the stars can be considered to be a point light source. Assume the luminosity of the two stars to be the same.
(b) A single star is observed which has large dimensions and subtends an angular diameter α (consider this star to be a uniformly emitting disc).

8.93 In the Michelson stellar interferometer, that is considered in the preceding problem, light enters from a binary or from a single star of large dimensions. When the distance D between the openings is increased the visibility of the interference bands becomes weaker and for some value $D = D_0$ becomes zero. Determine: (a) the distance ρ between the components of the binary in Capella, which is at a distance $R = 44 \cdot 6$ light years from us, if $D_0 = 7.08 \times 10^{-1}$ m, and the observations are at a wavelength $\lambda = 5 \times 10^{-7}$ m; (b) the diameter d of Betelgeuze, which is at a distance of 652 light years, if $D_0 = 7.2$ m and $\lambda = 6 \times 10^{-7}$ m.

Hint. The first nonvanishing root of the Bessel function $J_1(x)$ is equal to $x_1 = 3 \cdot 8317$.

8.94 In the Hanbury Brown-Twiss interferometer (figure 8.94.1) one detects independently, and afterwards multiplies and registers, the light intensity that comes from two incoherent point sources which are far from one another or from different points of a single extended source. One can consider the waves coming from the sources to be plane waves (with wavevectors $\boldsymbol{k}_1$ and $\boldsymbol{k}_2$) with randomly fluctuating amplitudes and phases. Show that, by observing the correlation between intensities, one can use the Hanbury Brown-Twiss interferometer to measure the angular distance between sources.

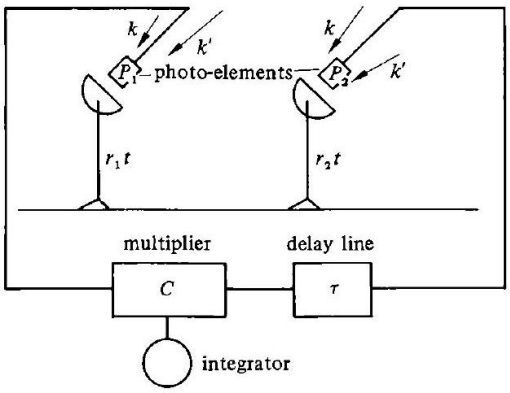


Figure 8.94.1.

8.95 A plane wave of wavelength λ is almost normally incident upon the lateral surface of a thin prism with vertex angle $\alpha \ll 1$ and refractive index n. Find the x-dependence (figure 8.95.1) of the phase shift that the wave acquires in the flat layer $ABCD$, which is partly occupied by the prism.

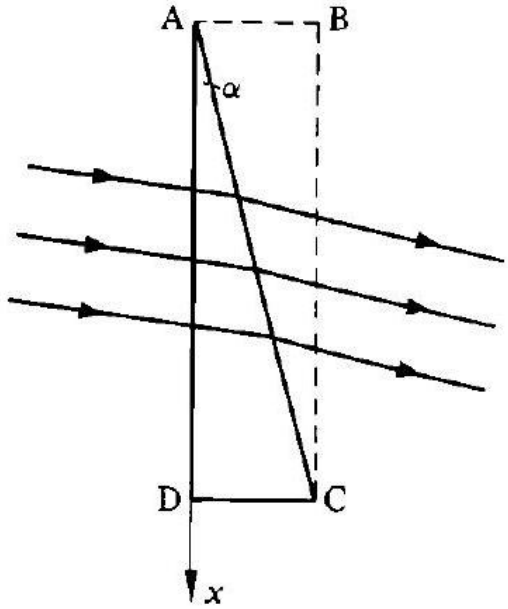


Figure 8.95.1.

8.96 A plane wave is incident upon a thin converging or diverging lens with radii of curvature R_1 and R_2 and refractive index n (figure 8.96.1). The wavelength is λ and the angle between the wavevector and the optical axis is small. Find the x-dependence of the phase shift that the wave acquires in the plane layer ABCD, which is partly occupied by the lens.

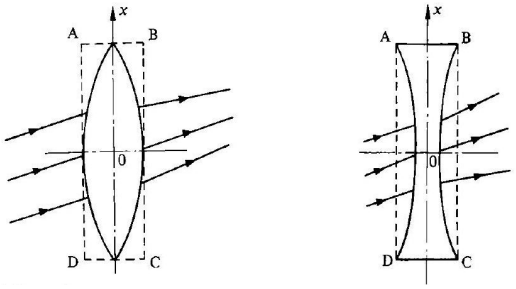


Figure 8.96.1.

8.97 A monochromatic plane wave of wavelength λ from a laser is incident upon a Fresnel double mirror (figure 8.97.1) with an angle $\vartheta \ll 1$ between the planes of the mirrors. An interference wave field is formed in the region where the two plane waves which come from the double mirror overlap. A photographic plate is placed in that region at an angle $\vartheta_1 \ll 1$ to the front of one of the waves. A system of transparent and dark interference bands is formed on the plate. Describe the wave
field which is produced behind the plate, if, after it has been developed, one transmits through it a plane wave, normal to its surface, from the same laser.

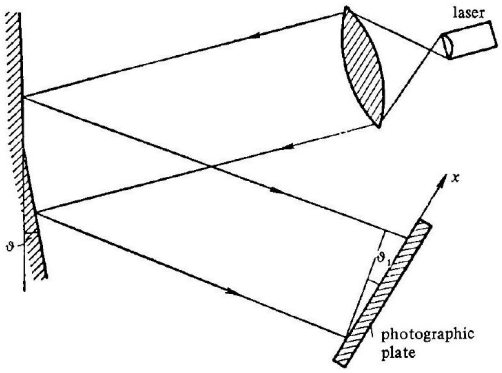


Figure 8.97.1.

8.98 A monochromatic plane wave passes simultaneously through a prism and an aperture in an opaque screen and is incident upon a photographic plate at a distance f (figure 8.98.1). The prism is a thin one with refracting angle $\alpha \ll 1$ and refractive index n. Find the intensity distribution of the field on the photographic plate due to the interference between the 'reference' plane wave (that part of the wave which has passed through the prism and was deflected by it) and the wave diffracted by the aperture (the angle of diffraction is assumed to be small).

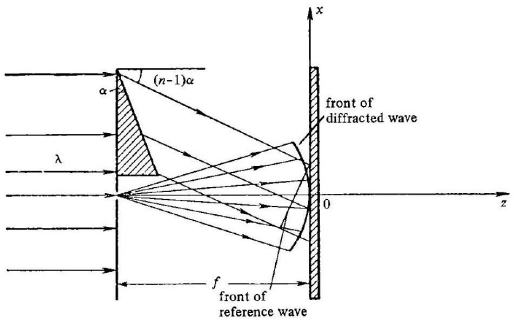


Figure 8.98.1.

8.99 Find the transmission distribution $T(x)$ through a hologram that is obtained under the conditions described in the preceding problem. Assume that when the hologram was produced the intensity of the reference wave was large compared with the intensity of the wave passing through the aperture. Trace the establishment of the initial wavefronts when a plane monochromatic wave $u_0 = A_0' \exp[\mathrm{i}(kz - \omega t)]$, which is incident normally, passes through this hologram (the wavelength is the same as that of the original wave). In particular, trace the appearance of the point image of the original aperture.

Hint. The wave field behind the hologram can be obtained simply by multiplying the wave $u_0(x)$, which is incident upon the hologram, by the transmissivity $T(x)$. For an interpretation of the expressions obtained turn to the solutions of problems 8.95 and 8.96 .

8.100 One produces by the set-up considered in the preceding two problems a hologram of two apertures at a distance $2D$ from one another in the plane of the prism. Using this hologram one can produce the image of the two apertures. Find this image and elucidate when it will be amplified.

Hint. For the establishment of the image one can illuminate the hologram with light of a wavelength λ' which is different from the wavelength λ used to obtain the hologram.

8.101 Determine the resolving power of the hologram which is obtained in a set-up such as the one considered in problem 8.98. The hologram is produced on a photographic plate with emulsion grain size d.

16.8.4 e X-ray diffraction

When considering the scattering of X-rays by macroscopic bodies it is important that the wavelength λ is comparable to the size a of the atoms. In condensed media the interatomic distances are of the same order of magnitude, whereas these distances are much larger than a in gases. Because of this it is impossible to average over physically small volume elements which contain many atoms. However, when the frequency of the X -rays is large compared to the characteristic atomic frequencies $\omega_{\mathrm{at}} \sim v_{\mathrm{at}}/c$ one may consider the electrons in the medium to be free. Since for free, nonrelativistic electrons the equations of motion in an external electromagnetic field can easily be integrated, one can evaluate the current induced by the field and determine the dielectric permittivity as a function of position, r:

$$\epsilon(r) = 1 - \frac{4\pi e^2 n(r)}{m\omega^2} \tag{8.e.1}$$

Here $n(r)$ is the electron density in the body, which is determined by the laws of quantum mechanics and is averaged over a statistical distribution of the states of thermal motion of the atoms.

The Maxwell equations have their usual form (8.a.1) to (8.a.4) with the dielectric permittivity (8.e.1) and magnetic permeability $\mu = 1$, provided that $4\pi e^2 n/m\omega^2 \ll 1$.

Consider a plane wave $E_0 \exp[\mathrm{i}\,(k_0 \cdot r) - \mathrm{i}\omega t]$ with an X-ray frequency $\omega \gg \omega_{\mathrm{at}}$, which is incident upon some body of finite size. In order that the incident radiation can be considered to be a plane polarised wave it is necessary that the size of the body is small compared to the coherence length, which was defined in the preceding section. In that case we have for the differential scattering cross section of a linearly polarised wave (see section c of chapter 8) for the definition of cross section

$$\mathrm{d}\sigma = r_0^2 \sin^2\theta \left| \int n(\boldsymbol{r}) \exp[\mathrm{i}(\boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{r})] \mathrm{d}^3\boldsymbol{r} \right|^2 \mathrm{d}\Omega \tag{8.e.2}$$

where $r_0 = e^2/mc^2$ is the classical electron radius, k the wavevector of the scattered wave, $k = k_0 = \omega/c, \theta$ the angle between $\boldsymbol{E}_0$ and $\boldsymbol{k}, \mathrm{d}\Omega$ an element of solid angle in the direction k, and $q = \boldsymbol{k}_0 - \boldsymbol{k}$ is the wavevector transfer. The quantity q is connected with the scattering angle ϑ of the wave (i.e. the angle between k_0 and $\boldsymbol{k}$) through the formula

$$q = 2\frac{\omega}{c} \sin\frac{1}{2}\theta = \frac{4\pi}{\lambda} \sin\frac{1}{2}\vartheta \tag{8.e.3}$$

The scattering cross section of an unpolarised X-ray wave is

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{2} r_0^2 \left(1 + \cos^2\vartheta\right) \left| \int n(r) \exp[\mathrm{i}(\boldsymbol{q} \cdot r)] \mathrm{d}^3 r \right|^2 \mathrm{d}\Omega \tag{8.e.4}$$

The condition for the applicability of equations (8.e.2) and (8.e.4) is the requirement that the total cross section $\sigma = \int\limits_{(4\pi)} \mathrm{d}\sigma$ is small compared to the cross-sectional area of the sample as a whole.

In the case of X-ray diffraction by a perfect single crystal the cross sections (8.e.2) ro (8.e.4) display a number of steep maxima, the position of which is given by the von Laue equation

$$k_0 - k = 2\pi g \tag{8.e.5}$$

where g is a reciprocal lattice vector. If the elementary crystal cell has the shape of a rectangular parallelepiped of edge lengths a_1, a_2, and a_3, we have

$$g = \left(\frac{n_1}{a_1}, \frac{n_2}{a_2}, \frac{n_3}{a_3}\right)$$

where n_1, n_2, and n_3 are arbitrary integers.

The integral of the form occurring in equations (8.e.2) or (8.e.4) integrated over the volume V_{at} of a single atom is called the atomic formfactor:

$$F_{\mathrm{at}}(q) = \int\limits_{V_{\mathrm{at}}} n_{\mathrm{at}}(r) \exp[\mathrm{i}(q \cdot r)] \mathrm{d}^3 r \tag{8.e.6}$$

The atomic formfactor is simply the Fourier transform of the distribution $n_{\mathrm{at}}(r)$ of the electrons in the atom and knowing it we can find $n_{\mathrm{at}}(r)$ by taking the inverse Fourier transform.

X-ray diffraction is considered in detail in the books by Landau and Lifshitz (1960) and Bacon (1966).

8.102 Elucidate under what conditions the scattering cross section for X-rays by bodies of finite size takes the form of the scattering cross section by free charges (Thomson formula). Write down the appropriate expressions for the cross sections. The number of atoms in the body is N and the number of electrons in each atom is Z.

8.103 The electron density distribution in a Z-electron atom can be approximated by the expression $n_{\text{at}}(r) = n_0$ at $\exp(-r/a)$, in which $n_{0\text{ at}} = Z/\pi a^3, a = a_0/Z^{1/3}, a_0 = 0.529\times10^{-10}$ m is the Bohr radius. Find the differential cross section for the scattering of an X-ray wave by a monatomic gas containing N atoms, with the assumption that the distribution of the atoms is completely random.

8.104 Find the cross section for the scattering of X-rays by a volume of gas containing n diatomic atoms. The atoms in a molecule are identical and are at a fixed distance R from one another. Assume that the formfactor $F_{\text{at}}(q)$ of an atom which is part of the molecular structure is the same as for an isolated atom.

8.105 What is the change in the cross section for the scattering of X-rays by a volume of a diatomic gas, considered in the preceding problem, if the thermal oscillations of the atoms in the molecule are taken into account?

Hint. Assume that the distance R between the atoms is distributed around an average value $R_0 \gg b$ according to the law

$$\mathrm{d}W_x = \frac{1}{b\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{b^2}\right) \mathrm{d}x$$

where $x = R - R_0, b = (2kT/\mu\omega^2)^{3/2}$, T is the temperature, μ the reduced mass, and ω the frequency of the eigenoscillations of the atoms in the molecule.

8.106 Derive the von Laue equation (8.e.5) and the Bragg condition $k \sin\frac{1}{2}\theta = \pi|g|$, where $|g|$ is the length of a reciprocal lattice vector, by considering the interference of waves scattered by separate centres of a perfect crystalline lattice.

8.107 Find the cross section for the scattering of X-rays by a perfect single crystal consisting of N identical atoms with formfactors $F_{\text{at}}(q)$ (assume that these formfactors are the same as for the case of isolated atoms). The elementary cell has the form of a cube with edge length a, and the crystal has the form of a rectangular parallelepiped of edge lengths L_1, L_2, L_3, which are parallel to the edges of the elementary cell.

Determine the position of the main maxima and verify that the von Laue equation (8.e.5) is satisfied. Find the magnitude of the cross section in those maxima.

8.108 A crystal consists of cubic elementary cells of edge length a and has the form of a right prism with a right isosceles triangle as base (the legs of the triangle $L_1 = L_2$, the lateral side is L_3). Determine the positions of the main maxima and find the magnitude of the cross section in these maxima.

8.109 Find the intensity distribution in the diffraction spot near one of the main maxima when X-rays are scattered by a single crystal (see problem 8.107). The wavevector of the incident X-rays is parallel to the edge L_3 and $k \gg 1/a$. Determine the width of the diffraction maximum and the total cross section corresponding to the scattering within the limits of a single diffraction spot.

8.110 Evaluate the intensity distribution in a diffraction spot around a main maximum for an arbitrary angle of incidence and arbitrary ratio between k and $1/a$. The X -rays are scattered by a single crystal in the form of a rectangular parallelepiped with edge lengths L_1, L_2, and L_3 (see problem 8.107).

8.111 Solve the preceding problem for the case of scattering by a spherical single crystal sample (of radius R).

16.9 Electromagnetic oscillations in finite bodies

A part of space bounded on all sides by metal walls is called a cavity resonator. A system of standing waves with definite frequencies ω (eigenfrequencies of the resonator) may exist within the resonator. When the resonator is not filled with a dielectric and its walls are perfectly conducting, the standing wave system may be obtained by solving the equations

$$\nabla^2 E + \frac{\omega^2}{c^2} E = 0, \quad \operatorname{div} E = 0 \tag{9.0.1}$$

subject to the boundary condition

$$E_\tau = 0 \tag{9.0.2}$$

The resonator eigenfunctions ${}^{(2)}E_\nu$ corresponding to different eigenfrequencies ω_ν are mutually orthogonal. The eigenfunctions corresponding to a single frequency (of which there can be several; see problems 9.20 and 9.22) can also be chosen to be mutually orthogonal. We normalise them to 4π:

$$\int (E_{\nu'} \cdot E_\nu)\, \mathrm{d}^3 r = 4\pi \delta_{\nu\nu'} \tag{9.0.3}$$

where the integral is taken over the volume of the resonator. The eigenfunctions H_ν, which can be expressed in terms of the E_ν by means of the Maxwell equations, have the same properties.

Because of energy losses in the walls or in the matter filling the resonator, and also because of the emission of energy into the space outside, the eigenoscillations of real resonators are damped. The energy losses of a given type of oscillation are characterised by the quality (Q), Q_ν, which is determined by the equation

$$Q_\nu = \frac{\widetilde{\omega}_\nu W_\nu}{P_\nu} \quad \text{or} \quad Q_\nu = \frac{\widetilde{\omega}_\nu}{2\gamma_\nu} \tag{9.0.4}$$

Here W_ν is the energy stored in the resonator; P_ν is the time-averaged energy loss; $\widetilde{\omega}_\nu$ is the resonance frequency which may be different from the resonance frequency of an ideal resonator; and γ_ν is the damping rate.

In contrast to a resonator, a waveguide takes the form of a cavity (duct) of indefinite length. Travelling waves propagate along the axis of the waveguide (z-axis), while standing waves are set up in the transverse direction. In general, the waves in a waveguide will not be transverse.
(1) For details of the theory we refer to the books by Landau and Lifshitz (1960), Jackson (1962), or Panofsky and Phillips (1962).
(2) The index ν stands for the set of four quantities which uniquely determine the resonator eigenoscillation ('mode').

Waves in which $E_z \neq 0, H_z = 0$ are called electric-type or E-waves, whereas waves with $H_z \neq 0, E_z = 0$ are called magnetic-type or H-waves. Purely transverse waves are only possible in waveguides whose cross sections are multiply connected.

The type of wave which may propagate in a given waveguide is determined by solving Maxwell's equations subject to the appropriate boundary conditions. A wave travelling along the axis of a waveguide may be described by

$$\boldsymbol{E}(r,t) = E(x,y)\exp[\mathrm{i}(kz - \omega t)], \quad H(r,t) = H(x,y)\exp[\mathrm{i}(kz - \omega t)]$$

where ω is the frequency and k is the component of the wavevector in the direction of the axis of the waveguide. The quantity k is also called the propagation constant.

In the case of electric-type waves (E-waves) $H_z = 0$ and E_z is a solution of the equation

$$\nabla^2 E_z + \kappa^2 E_z = 0 \tag{9.0.5}$$

where $\kappa^2 = \omega^2 \epsilon\mu/c^2 - k^2$, κ is the transverse component of the wavevector, ϵ and μ are the permittivity and magnetic permeability of the dielectric filling the waveguide, and the boundary condition on the waveguide wall is

$$E_z = 0 \tag{9.0.6}$$

In the case of magnetic-type waves (H-waves) $E_z = 0$ and H_z is the solution of

$$\nabla^2 H_z + \kappa^2 H_z = 0, \tag{9.0.7}$$

which satisfies the boundary condition on the waveguide wall

$$E_\tau = 0 \quad \text{or} \quad \frac{\partial H_z}{\partial n} = 0 \tag{9.0.8}$$

The symbol ∇^2 in equations (9.0.5) and (9.0.6) is the two-dimensional Laplace operator. Strictly speaking, the boundary conditions (9.0.6) and (9.0.8) hold only for waveguides whose walls are perfectly conducting.

The transverse components of the vectors E and H may be expressed in terms of the longitudinal components of these vectors with the aid of Maxwell's equations.

An E-wave or an H-wave of a given type (i.e. with a given κ) can only propagate in a waveguide with a simply connected cross section when its frequency is greater than a certain limiting frequency ω_0. The corresponding 'vacuum wavelength' $\lambda_0 = 2\pi c/\omega_0$ is of the order of the transverse linear dimensions of the waveguide. When $\omega < \omega_0$, the propagation constant k is purely imaginary and wave propagation is impossible. However, even when $\omega > \omega_0$ the propagation constant k is in general complex. This is due to the fact that the walls of the waveguide have a finite conductivity and energy dissipation takes place
within them, with the result that the electromagnetic wave is attenuated in accordance with an $\exp(-\alpha z)$ law. The attenuation coefficient α, which is the imaginary part of k, is equal to the energy dissipated per unit time within the walls of the waveguide per unit length divided by twice the energy flux along the waveguide. When the surface impedance $\zeta = \zeta' + i\zeta''$ is small, the attenuation coefficient for E-waves is approximately

$$\alpha = \frac{\omega\zeta'}{2\kappa k c} \oint |\nabla E_z|^2 \ \mathrm{d}l \Big/ \int |E_z|^2 \ \mathrm{d}^2 S \tag{9.0.9}$$

and the corresponding result for H-waves is

$$\alpha = \frac{c\kappa^2\zeta'}{2k\omega} \oint \left[|H_z|^2 + \left(\frac{k^2}{\kappa^4}\right) |\nabla H_z|^2 \right] \mathrm{d}l \Big/ \int |H_z|^2 \ \mathrm{d}^2 S, \tag{9.0.10}$$

where E_z and H_z are the field components for $\zeta = 0$, i.e. for perfectly conducting walls, $\mathrm{d}l$ is an element of the perimeter of the transverse cross section of the waveguide, and $\mathrm{d}^2 S$ is an area element of the cross section.

9.1 Determine the types of waves which can propagate in a rectangular waveguide with perfecting conducting walls and sides a and b. Find the corresponding dispersion relation and the field configurations, i.e. the dependence of the field components on the coordinates.

9.2 Determine the attenuation coefficients α of the various types of wave in a rectangular waveguide, given that the surface impedance of the waveguide walls is ζ.

9.3 An infinite layer of a dielectric material of permittivity ϵ and magnetic permeability μ fills the region $-a \leqslant x \leqslant a$. Show that the layer will act as a waveguide, i.e. the field of a travelling electromagnetic wave will be largely concentrated within the layer. Determine the types of

wave which may propagate in such a waveguide. Confine the analysis to the special case where the field vectors are independent of the y coordinate.

9.4 A dielectric layer with permittivity ϵ and magnetic permeability μ fills the region $0 \leqslant x \leqslant a$ and is in contact with a perfectly conducting solid on one side. The region $x > a$ is evacuated. Determine the types of electromagnetic wave, with amplitudes decreasing with distance from the layer, which may propagate along the layer. Compare the possible types of wave with the wave system obtained in the preceding problem.

9.5 Find the possible types of wave in a circular waveguide of radius a assuming that the walls are perfectly conducting. Determine the limiting frequency ω_0 for this waveguide.

9.6 By making use of the result of the preceding problem, find the attenuation coefficients α of the various types of wave in a circular waveguide, with the assumption that the surface impedance is ζ.

9.7 Determine the phase and group velocities v_{ph} and v_{g} of waves in rectangular and circular waveguides with perfectly conducting walls and also the dependence of the wave velocities on $\lambda = 2\pi c/\omega$.

9.8 Determine the phase and group velocities v_{ph} and v_{g} of waves in a waveguide by a geometrical method. To do this, consider the simplest H_{10} wave in a rectangular waveguide, resolve it into plane waves, and investigate the reflection of these waves from the waveguide walls.

9.9 Investigate the structure of the transverse electromagnetic wave in a perfectly conducting coaxial line of inner and outer radii a and b respectively. Determine the average energy flux $\bar{\gamma}$ along the line. Investigate the limiting case of a single, perfectly conducting cylindrical conductor.

9.10 Determine the possible types of transverse electromagnetic waves in a coaxial line with perfectly conducting walls of radii a and $b > a$.

9.11 Determine the value of the attenuation coefficient α of the transverse electromagnetic wave in a coaxial line of radii a and $b > a$ and surface impedance $\zeta = \zeta' + \mathrm{i}\zeta''$.

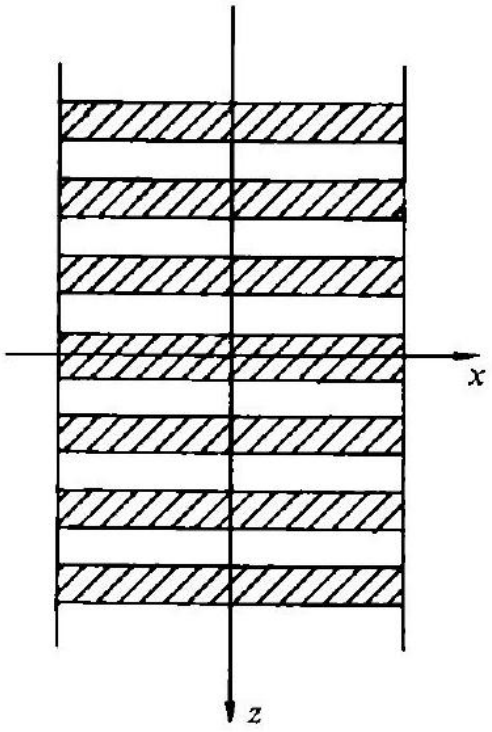
Hint. Use the relation between the attenuation coefficient and the energy losses given at the beginning of this chapter.

9.12* Discuss the propagation of an axially symmetric E-wave along an infinitely long cylindrical conductor having a finite conductivity and placed in a vacuum. Determine the phase velocity and show that in the case of a perfectly conducting cylinder the wave will become identical with the transverse electromagnetic wave (see problem 9.9). Use the approximate boundary condition given by equation (8.a.10).

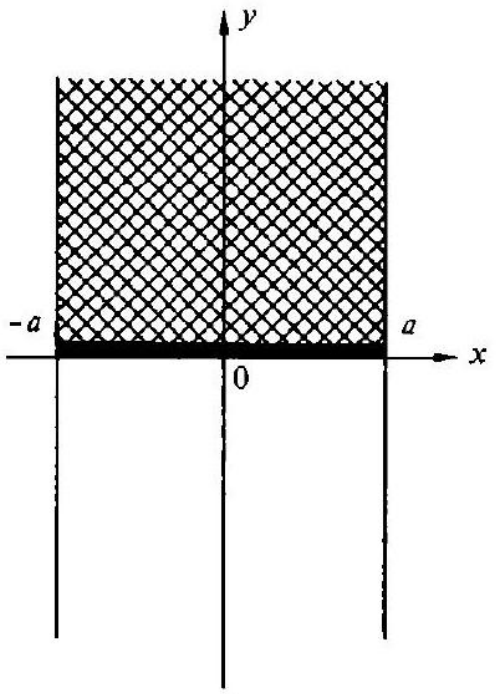
9.13 An axially symmetric E-wave propagates in a circular waveguide of radius b which is partly filled with a dielectric. The dielectric has a permittivity ϵ and occupies the region $a \leqslant r \leqslant b$. If $a \ll b$, determine the phase velocity as a function of frequency and find the limiting frequency. Under what conditions will the phase velocity be less than c? Consider the limiting case of a waveguide filled completely by the dielectric.

9.14 A ladder diaphragm (figure 9.14.1a) consisting of thin metallic strips oriented along the x-axis is placed in the plane $y = 0$ between two perfectly conducting planes $x = \pm a$ (figure 9.14.1b). The distances between the strips and their width are small compared to the wavelength. The region $y > 0$ above the ladder diaphragm is filled with a dielectric of permittivity ϵ, the region $y < 0$ contains air. Find the possible types of travelling waves which can propagate along the z-axis in such a system. What is the connection between the wavevector and the frequency of these waves?

Hint. For sufficiently long wavelengths the ladder diaphragm can be considered as an anisotropic conducting plane with a conductivity in the
x-direction which is infinite and a conductivity in the z-direction which is equal to zero.



(a)



(b)

Figure 9.14.1.

9.15 A rectangular waveguide with sides a and b and perfectly conducting walls is filled with a ferrodielectric. A constant magnetic field is applied at right angles to the wider wall of the waveguide (along the y-axis). The permittivity and magnetic permeability tensors of the ferrodielectric are given by

$$\epsilon_{ik} = \begin{pmatrix} \epsilon_\perp & 0 & -\mathrm{i}\epsilon_\mathrm{a} \\ 0 & \epsilon_\parallel & 0 \\ \mathrm{i}\epsilon_\mathrm{a} & 0 & \epsilon_\perp \end{pmatrix}, \qquad \mu_{ik} = \begin{pmatrix} \mu_\perp & 0 & -\mathrm{i}\mu_\mathrm{a} \\ 0 & \mu_\parallel & 0 \\ \mathrm{i}\mu_\mathrm{a} & 0 & \mu_\perp \end{pmatrix}$$

(see the solution of problem 6.35). Determine the components of the electromagnetic field,

the propagation constant, and the limiting frequency when the field is independent of y.
9.16 The electric and magnetic fields in a waveguide with perfectly conducting walls are described by

$$\boldsymbol{E_0} = E_0(x,y)\exp\left[\mathrm{i}\left(k_0 z - \omega t\right)\right], \quad \boldsymbol{H}_0 = H_0(x,y)\exp\left[\mathrm{i}\left(k_0 z - \omega t\right)\right]$$

When a dielectric core in the form of a cylinder of arbitrary cross section is inserted into the waveguide with its longitudinal axis parallel to the axis of the waveguide, the fields are given by

$$\boldsymbol{E} = E(x,y)\exp[\mathrm{i}(kz - \omega t)], \quad \boldsymbol{H} = H(x,y)\exp[\mathrm{i}(kz - \omega t)]$$

The dielectric may in general be characterised by the tensorial parameters ϵ_{ik}, μ_{ik}. Show, with the aid of Maxwell's equations, that the change in
propagation constant is given by

$$\Delta k = k - k_0 = \frac{\omega \int\limits_{\Delta S} \left(\Delta\epsilon_{ik} E_k E_{0i}^* + \Delta\mu_{ik} H_k H_{0i}^*\right) \mathrm{d}^2 S}{c \int\limits_{S} \left(\{[E_0^* \wedge H] + [E \wedge H_0^*]\} \cdot e_z\right) \mathrm{d}^2 S}$$

where $\Delta\epsilon_{ik} = \epsilon_{ik} - 1, \Delta\mu_{ik} = \mu_{ik} - 1$. The integral in the numerator is evaluated over the cross section of the dielectric rod (ΔS) and the integral in the denominator is taken over the cross section of the waveguide (S).
9.17 A ferrodielectric plate of thickness $d \ll a$ is inserted into a rectangular waveguide with perfectly conducting walls (figure 9.17.1). The plate is magnetised along the axis of the waveguide. Use the formula obtained in the preceding problem to determine the change Δk in the propagation constant for H_{10} waves to within terms of the order of d. Assume that the permittivity of the wall is a scalar, and the magnetic permeability tensor is as given in problem 8.37
.

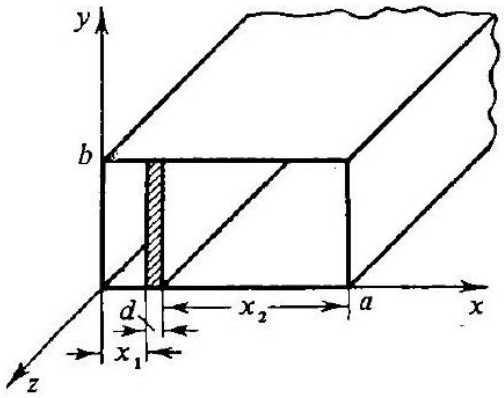


Figure 9.17.1.

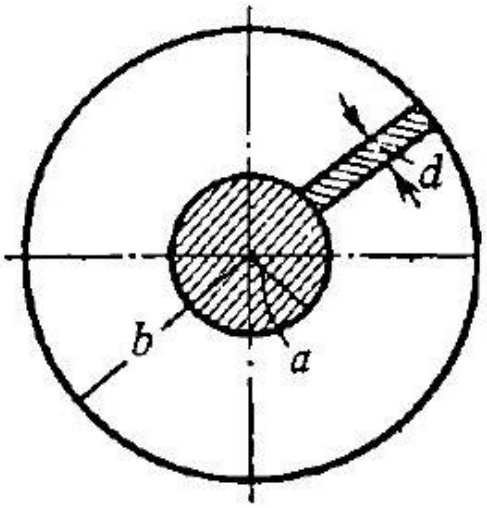


Figure 9.18.1.

9.18 A thin ferrite plate ($d \ll a, b$) is inserted into the coaxial waveguide shown in figure 9.18 .1 and is magnetised in the direction of the axis of the waveguide. Find the change Δk in the propagation constant of the transverse electromagnetic wave.

Hint. Use the method employed in the preceding problem to find the amplitude of the disturbed fields.

9.19 Solve the preceding problem for a constant magnetising field H_0 applied at right angles to the axis of the waveguide. Consider two directions of this field, namely, (a) H_0 perpendicular to the longer side of the plate and (b) H_0 perpendicular to the shorter side of the plate.

9.20 Determine the eigenfrequencies and normalised eigenfunctions of a cavity resonator with perfectly conducting walls. The resonator is in the form of a rectangular $a \times b \times h$ parallelepiped. The eigenfunctions should be chosen such that they are mutually orthogonal.

9.21 Determine the number of eigenoscillations $\Delta N(\omega)$ per frequency interval $\Delta\omega$ in the hollow resonator considered in the preceding problem.

Assume that $\Delta\omega \ll \omega$ and $\Delta N \gg 1$, and that the total volume of the resonator is V.

9.22 A given resonator is in the form of a right-circular cylinder of height h and radius a. Assuming that the walls are perfectly conducting, find the frequency of the eigenoscillations. Consider the E and H oscillations.

9.23 Two circular metallic plates of radius R are at a small distance d from one another and form a capacitor. The plates of the capacitor are closed by a conductor of thickness $2a$ in the form of a ring of radius b (figure 9.23.1). Find the eigenfrequency of the oscillations of such an 'open resonator', by assuming that one may apply a quasi-stationary approximation. Assume all conductors to be perfectly conducting.

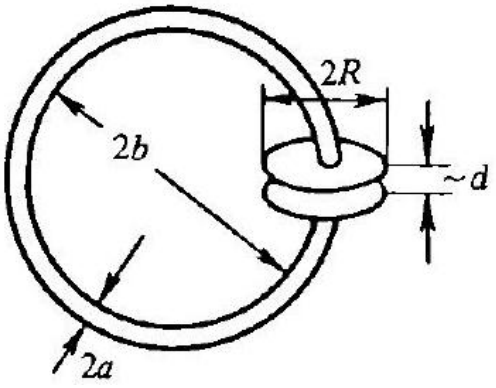


Figure 9.23.1.

9.24 Find the eigenfrequency ω_0 of the oscillations of the system shown in figure 9.24 .1, assum-

ing that the corresponding wavelength λ_0 is large compared to the dimensions of the system. Neglect energy losses and edge effects.

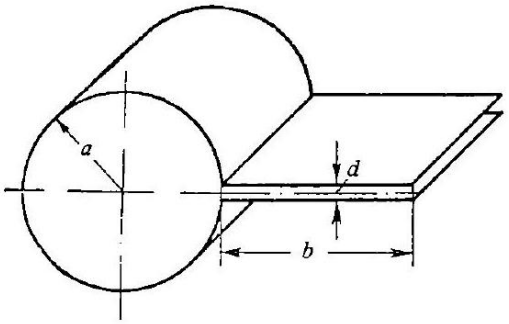


Figure 9.24.1.

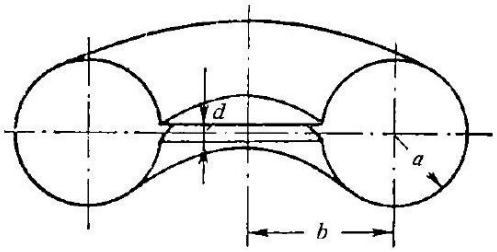


Figure 9.25.1.

9.25 To decrease energy losses due to radiation one uses, instead of an open oscillating contour (see figure 9.23.1), a closed resonator consisting of a toroidal cavity joined to a plane capacitor with circular plates (its cross section and dimensions are shown in figure 9.25.1). Find the eigenfrequency ω_0 of the basic kind of oscillations of such a resonator
in the quasi-stationary approximation. Under what conditions is this approximation applicable? Assume the walls of the resonator to be perfectly conducting.

9.26 Solve the preceding problem for a toroidal resonator with a cavity of rectangular cross section (figure 9.26.1).

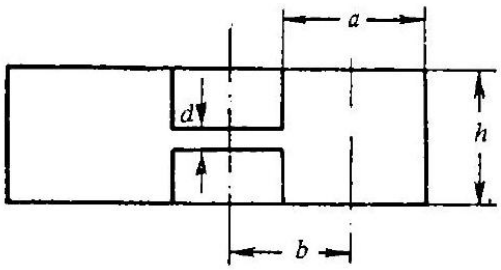


Figure 9.26.1.

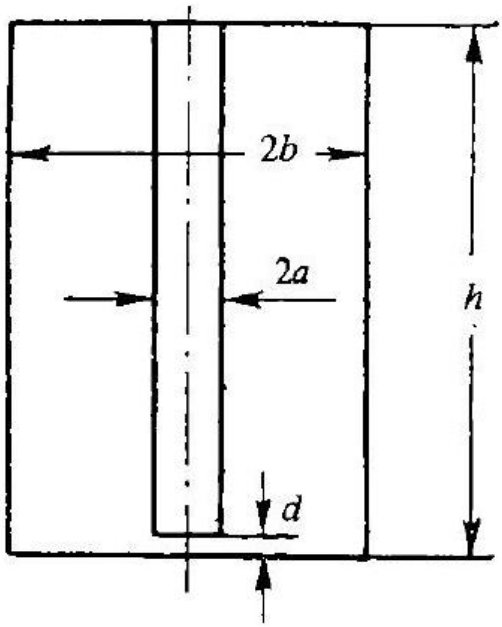


Figure 9.27.1.

9.27 A resonator is a circular cylinder (height h, inside radius b) along the axis of which there is fitted a perfectly conducting rod of radius a (figure 9.27.1). The walls of the cylinder are also perfectly conducting. Between the rod and one of the end planes of the cylinder there is a gap d. Find the eigenfrequencies of the electromagnetic oscillations which are transverse with respect to the axis of the system, assuming that the wavelength of these oscillations is much longer than the gap width d (but not longer than the height h of the cylinder). What is the change in the spectrum of the oscillations as $d \to 0$?

9.28 Let the eigenfrequencies ω_ν and the eigenfunctions $\boldsymbol{E}_\nu, \boldsymbol{H}_\nu$ of the oscillations of a resonator with perfectly conducting walls be known. Calculate the change in the eigenfrequencies caused by the finite conductivity of the resonator walls. The surface impedance ζ of the walls is small.

Hint. Look for the solution of the Maxwell equations in the form

$$E(r,t) = \sum_\nu q_\nu(t) E_\nu(r), \quad H(r,t) = \sum_\nu p_\nu(t) H_\nu(r)$$

where q_ν and p_ν are unknown functions of the time. Derive equations for q_ν and p_ν up to terms linear in ζ and study their solution.

9.29 A cavity resonator has the shape of a cube of edgelength a. The conductivity of the wall is σ and the magnetic permeability $\mu = 1$. Evaluate the Q of the resonator for an arbitrary kind of oscillation. How does it depend on the frequency? At what frequencies do the resonance properties of the system disappear?

9.30 A cavity resonator with walls of surface impedance ζ is excited by an external current $j(r)\exp(-i\omega t)$ flowing inside the resonator. The frequency ω of the current is close to one of the eigenfrequencies of the resonator. Find the electromagnetic field excited in the resonator and the way it depends on the frequency ω near resonance.

Hint. Use the method developed in problem 9.28.

9.31 An open resonator in the infra-red band consists of two parallel circular mirrors of diameter D, at a distance L opposite to one another (figure 9.31.1). Let the eigenoscillation of such a system be realised in the form of two waves with $\lambda \ll L, D$ propagating at right angles to the planes of the mirrors toward one another and forming a standing electromagnetic wave.

Give an order of magnitude estimate of the Q of such a resonator in the geometrical optics approximation. Take into account the energy losses at the reflection from the mirrors (reflection

coefficient R) and the radiation through the side surface, bearing in mind that there is diffraction. Take as the parameters of the resonator: $D = L = 10^{-2}$ m; $R = 0.95$; $\lambda = 3 \times 10^{-6}$ m.

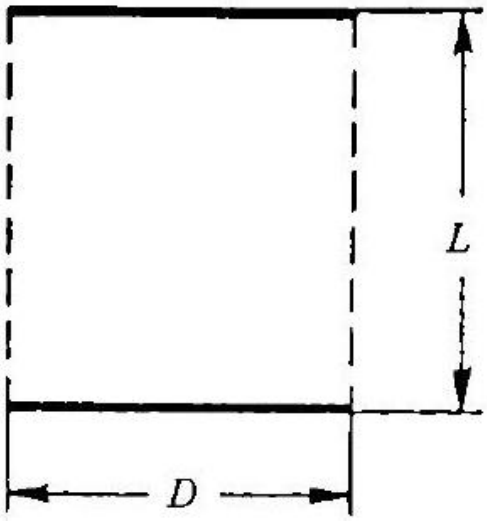


Figure 9.31.1.

9.32 The mirrors of the open resonator considered in the preceding problem are slightly nonparallel. The angle between their planes $\beta \ll 1$. Estimate the additional losses through radiation and the corresponding contribution to the Q-value of the resonator caused by the fact that the mirrors are not parallel. What values of the angle β are allowable without essentially changing the total Q of the resonator?

9.33 In a resonator formed by two parallel mirrors (see figure 9.31.1) the eigenoscillations with $\lambda \ll L, D$ are realised in the form of standing waves in the space between the mirrors. Consider that kind of oscillation in which the wavevector of the standing wave makes a small angle ϑ with the normal to the planes of the mirrors.

(a) Find the condition determining possible values of ϑ for a given λ.

(b) Give an order of magnitude estimate of the Q of the resonator as a function of the angle ϑ. Consider different ratios between the losses in the mirrors and the losses through radiation.

16.10 Special theory of relativity

16.10.1 a Lorentz transformations

The space and time coordinates in two inertial reference frames S and S' are related by the Lorentz transformation formulae

$$x = \gamma\left(x' + Vt'\right), \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \gamma\left(t' + \frac{Vx'}{c^2}\right) \tag{10.a.1}$$

where $\gamma = \left(1 - \beta^2\right)^{-1/2}$ and $\beta = V/c$. It is assumed that S' moves with a constant velocity V along the Ox-axis relative to S in such a way that the coordinate axes remain parallel to each other, the x - and x'-axes coincide, and the origins of S and S' coincide at times $t = t' = 0$. The inverse Lorentz transformation is obtained by changing the sign of V:

$$x' = \gamma(x - Vt), \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \gamma\left(t - \frac{Vx}{c^2}\right) \tag{10.a.2}$$

The quantities $x_0 = ct, x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$ are the coordinates of the world point

$$x_i = (ct, r) \tag{10.a.3}$$

Any four quantities A_0, A_1, A_2, A_3, which transform when we change from one inertial system of reference to another in the same way as the coordinates and the time, i.e. according to the formulae

$$\begin{aligned} A_0 &= \gamma\left(A_0' + \beta A_1'\right), \quad A_1 = \gamma\left(A_1' + \beta A_0'\right) \\ A_2 &= A_2', \quad A_3 = A_3' \end{aligned} \tag{10.a.4}$$

form a four-dimensional vector (four-vector, 4-vector) $A_i, i = 0, 1, 2, 3$. The three-dimensional vector $\boldsymbol{A} = (A_1, A_2, A_3)$ is called the spatial component of the 4 -vector A_i and the quantity A_0 is the time component.

The scalar product of two four-dimensional vectors is defined as follows:

$$A_i B_i = A_0 B_0 - A_1 B_1 - A_2 B_2 - A_3 B_3 \tag{10.a.5}$$

As before (see chapter 1) we shall assume that one sums over repeated indices, which now take on the values $0, 1, 2, 3$. The term with the index 0 is now taken with a plus sign, and the terms with indices $1, 2, 3$ are given a minus sign. This sign convention will be used in what follows.

The squares of 4 -vectors $A_i^2 (\equiv A_i A_i)$, defined in accordance with equation (10.a.5), and their scalar products $A_i B_i$ have the same values in all inertial systems of reference (they are invariant under Lorentz transformations). The 4 -vector A_i is called space-like if $A_i^2 < 0$ and time-like if $A_i^2 > 0$.

(1) For details of the theory we refer to the books by Fock (1964), Landau and Lifshitz (1960, 1975), Bergmann (1958), Jackson (1962), Pauli (1958), Heitler (1944), Panofsky and Phillips (1962), and Pathria (1974).

The invariant quantity

$$s_{12} = \left[c^2\left(t_1 - t_2\right) - \left(r_1 - r_2\right)^2\right]^{1/2} \tag{10.a.6}$$

is called the interval between two events with coordinates (r_1, t_1) and (r_2, t_2).

The time indicated by a clock moving together with a given object is called the proper time of the object. If the object moves relative to the frame S with a velocity V, then the proper time interval $\mathrm{d}\tau$ may be expressed in terms of the time interval $\mathrm{d}t$ in the frame S, and is given by

$$\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}t\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{1/2} \tag{10.a.7}$$

The quantity $\mathrm{d}t\left(1 - \beta^2\right)^{1/2}$ is invariant under a Lorentz transformation.

If a given rod has a length l_0 at rest, then when it moves with a velocity v in the direction of its longitudinal axis, its length as measured by an observer at rest is given by

$$l = l_0\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2} \tag{10.a.8}$$

The four-dimensional velocity (four-velocity) is defined as the 4-vector whose components are given by

$$u_i = \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}\tau} = \left[\frac{c}{\left(1 - v^2/c^2\right)^{1/2}}, \frac{v}{\left(1 - v^2/c^2\right)^{1/2}}\right] \tag{10.a.9}$$

where $\boldsymbol{v} = \mathrm{d}r/\mathrm{d}t$ is the ordinary particle velocity. It is clear from equation (10.a.9) that

$$u_i^2 = c^2 \tag{10.a.10}$$

The 4-velocity transforms in accordance with equation (10.a.4) just like any other 4 -vector.

The components of ordinary velocity are not the space components of any particular 4 -vector, and transform in accordance with the following expressions ($V \| x$):

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + v'_x V/c^2}, \quad v_y = \frac{v'_y \left(1 - V^2/c^2\right)^{1/2}}{1 + v'_x V/c^2}, \quad v_z = \frac{v'_z \left(1 - V^2/c^2\right)^{1/2}}{1 + v'_x V/c^2} \tag{10.a.11}$$

If the particle velocity is at angles ϑ and ϑ' to the x-axis in S and S' respectively, then

$$\tan\vartheta = \frac{v' \left(1 - V^2/c^2\right)^{1/2} \sin\vartheta'}{v' \cos\vartheta' + V}, \quad v' = \left(v'^2_x + v'^2_y + v'^2_z\right)^{1/2} \tag{10.a.12}$$

The four-dimensional acceleration of a particle is the 4 -vector with components

$$w_i = \frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mathrm{d}^2 x_i}{\mathrm{d}\tau^2} \tag{10.a.13}$$

The wavevector $\boldsymbol{k}$ and the frequency ω of a plane electromagnetic wave are the components of the wave 4 -vector

$$k_i = \left(\frac{\omega}{c}, k\right) \tag{10.a.14}$$

It follows that the phase of a plane wave $\varphi = -k_i x_i$ is an invariant.

It follows from equation (10.a.4) that the transformation formulae for the angle ϑ between a light ray and the x-axis are

$$\tan\vartheta = \frac{\sin\vartheta'}{\gamma\left(\cos\vartheta' + \beta\right)} \quad \text{or} \quad \cos\vartheta = \frac{\cos\vartheta' + \beta}{1 + \beta\cos\vartheta'} \tag{10.a.15}$$

Section a of chapter 11 deals with problems concerning the Lorentz transformation for energy, momentum, and force.

10.1 Suppose that a system S' moves relative to a system S with a velocity V along the x-axis. When clocks at $S'\left(x'_0, y'_0, z'_0\right)$ and $S\left(x_0, y_0, z_0\right)$ pass each other they indicate times t'_0 and t_0 respectively. Write down the Lorentz transformation formulae for this case.

10.2 A system S' moves relative to a system S with a velocity V. Show that when clocks in S and S' are compared, the clock in one of the systems, whose readings are successively compared with the readings of two clocks in the second frame (synchronised within that frame), will always lag behind. Express one of the two time intervals in terms of the other. (The readings of the moving clocks are compared when they pass each other.)

10.3 The length of a rod moving in the direction of its longitudinal axis in a given reference frame may be found by determining the time interval taken by the rod to travel past a point fixed in the frame and by multiplying it by the velocity of the rod. Show that this method of measuring the length of a rod will yield the usual Lorentz contraction.

10.4 A system S' moves relative to a system S with a velocity V. Clocks at rest at the origins of the two frames are found to be synchronised ($t = t' = 0$) when they pass each other. Find the coordinates in each system of the world point, which has the property that clocks at rest in S and S' indicate the same time $t = t'$ at this point. Determine the law of motion of the world point.

10.5 To measure time let us use a periodic process of reflecting a light 'spot' alternately from two mirrors mounted at the ends of a rod of length l. One period is the time it takes the 'spot' to move from one mirror to the other and back. The light clocks are fixed in the system S' and oriented parallel to the direction of the motion. Use the postulate of the constancy of the

velocity of light to show that the interval of eigentime $\mathrm{d}\tau$ can be expressed in terms of the time interval $\mathrm{d}t$ in the system S through equation (10.a.7).
10.6 Solve the preceding problem for the case when the light clocks are oriented at right angles to the direction of the relative velocity.
10.7 A 'train' A′B′ has a length $l_0 = 8.64 \times 10^8$ km in the system in which it is at rest. The train travels past a 'platform' AB having an equal length in its own rest frame with the velocity $V = 240000$ km s^{-1}. Identical synchronised clocks are placed at A, B, and A′, B′. When the head of the 'train' (B') becomes level with the beginning of the 'platform' (A), the corresponding clocks both indicate 12 h 00 min . Answer the following questions: (a) Is there a reference frame in which all four clocks will show 12 h 00 min? (b) What will be the time shown by the four clocks when A' becomes level with A? (c) What will be the time shown by the clocks when the head of the 'train' B ' becomes level with B?
10.8 Determine the time (as measured by a clock at rest on the earth's surface) taken by a rocket to reach Proximus Centauri and return to earth with a constant velocity $v = (0.9999)^{1/2}c$, if the distance to the star is four light years [(2)]. Use the result to determine the time interval which may be used as a basis for estimating the amount of food and other supplies for the journey. Calculate the kinetic energy of the rocket if its mass is 10 tonnes.
10.9 Two rulers, each having a length l_0 at rest, move in opposite directions with uniform velocities along the x-axis. An observer at rest relative to one of the rulers notes that the time interval between instants at which the left and right ends of the rulers pass each other is Δt. What is the relative velocity of the two rulers? In what order will the ends of the rulers pass each other for observers at rest relative to either of the rulers, and also for an observer with respect to whom both rulers move with equal velocities in opposite directions?
10.10 Derive the Lorentz transformation formulae without assuming that the velocity of S' relative to S is parallel to the x-axis. Give the result in a vector form.

Hint. Resolve the position vector r into the longitudinal and transverse components relative to the direction of the relative velocity V and use the Lorentz transformation (10.a.1).
10.11 Write down the Lorentz transformation formulae for an arbitrary 4-vector $A_i = (A_0, A)$ without assuming that the velocity V of the system S' relative to S is parallel to the x-axis.
10.12 Derive the velocity addition formulae when the velocity V of a system S' relative to S has an arbitrary direction. Give the result in a vector form.
10.13 Three reference frames, S, S', and S'' are such that S'' moves relative to S' with a velocity V' in the direction parallel to the x'-axis, and
(2) A light year is defined as the distance travelled by a light beam in vacuo in one year (see introduction to section 8, d).
S' moves relative to S with a velocity V in the direction parallel to the x-axis. The corresponding axes of all the three systems remain parallel. Find the Lorentz transformation connecting S'' and S and use it to obtain a formula for the addition of parallel velocities.
10.14 Prove the formula

$$\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2} = \frac{\left(1 - v'^2/c^2\right)^{1/2}\left(1 - V^2/c^2\right)^{1/2}}{1 + \left(v' \cdot V\right)/c^2}$$

where $\boldsymbol{v}$ and $\boldsymbol{v}'$ are the velocities of a particle relative to frames S and S', and V is the velocity of S' relative to S.
10.15 Prove the relation

$$v = \frac{\left\{\left(\boldsymbol{v}' + V\right)^2 - \left[v' \wedge V\right]^2/c^2\right\}^{1/2}}{1 + \left(v' \cdot V\right)/c^2}$$

where $\boldsymbol{v}$ and $\boldsymbol{v}'$ are the velocities of a particle relative to frames S and S', and $\boldsymbol{V}$ is the velocity of S' relative to S.

10.16 Three consecutive transformations of the system of reference are carried out: (a) A transition from the system S to a system S' moving with respect to S with a velocity V, parallel to the x-axis; (b) A transition from the system S' to a system S'', moving with respect to S' with a velocity $\boldsymbol{v}$, parallel to the y'-axis; (c) A transition from the system S'' to a system S''' moving with respect to S'' with a velocity equal to the relativistic sum of the velocities $-\boldsymbol{v}$ and $\boldsymbol{V}$. (We draw attention to the fact that the resulting velocity depends on the order in which the velocities are added.) Show that, as one should expect, the system S''' is at rest with respect to S and $t''' = t$, but that S''' is rotated with respect to S over a certain angle in the xy-plane (Thomas precession). Evaluate the angle φ of the Thomas precession.

Hint. Use the formulae in the general form of a Lorentz transformation (see problem 10.10) and of velocity addition (see problem 10.12), and write these formulae in terms of their components along Cartesian axes.

10.17 Two rulers, each of which has a length l_0 in its own rest frame, move towards each other with equal velocities v relative to a given reference system. Find the length l of each of the rulers in the reference frame in which the other ruler is at rest.

10.18 Two electron beams travel along the same straight line, but in opposite directions, with velocities $v = 0.9\mathrm{c}$ relative to the laboratory system. Find the relative velocity V of the electrons (a) as measured by an observer at rest in the laboratory and (b) by an observer moving together with one of the electron beams.

10.19 The effects which occur during a collision between two elementary particles are independent of the uniform motion of the two particles as a
whole. Such effects depend only on their relative velocity. A given relative velocity may be communicated to the colliding particles in two ways (we shall assume for simplicity that they have the same mass):
(a) an accelerator is used to accelerate one of the particles to an energy & while the other is at rest, or (b) both particles are accelerated towards each other by identical machines until they reach an energy $\mathscr{E}_0 < \&$. Compare the two energies & and $\mathscr{E}_0$ and consider in particular the ultrarelativistic case.

10.20 Find the transformation formulae for the acceleration $\dot{v}$ in the case when the system S' moves relative to the system S with an arbitrary velocity V. Express your result in vector form.

10.21 Express the components of the four-dimensional acceleration w_i in terms of the ordinary acceleration $\dot{v}$ and the velocity $\boldsymbol{v}$. Find w_i^2. Is the four-dimensional acceleration space-like or timelike?

10.22 Express the acceleration $\dot{v}'$ of a particle in the inertial frame in which it is instantaneously at rest in terms of its acceleration $\dot{v}$ in the laboratory system. Consider the cases when $\boldsymbol{v}$ varies only in magnitude or only in direction.

10.23 A relativistic particle performs a 'constant-acceleration' onedimensional motion (its acceleration $\dot{v} \equiv w$ is constant in the eigenframe of reference). Find the time dependence of the velocity $v(t)$ and of the coordinate $x(t)$ in the laboratory frame of reference, given that the initial velocity is v_0 and the initial position x_0. Consider, in particular, the nonrelativistic and the ultrarelativistic limits.

Hint. Use the result of the preceding problem.

10.24 The rocket considered in problem 10.8 is accelerated from rest to a velocity $v = (0.9999)^{1/2}c$. The acceleration of the rocket in the system in which it is instantaneously at rest is $|\dot{\boldsymbol{v}}| = 20\ \mathrm{m\ s^{-2}}$. Determine the time taken by the rocket to reach this velocity as measured by clocks in the frame in which it was originally at rest, and clocks at rest in the rocket.

Hint. Neglect the effect of inertial forces on the clocks in the rocket, i.e. determine the sum of the proper time intervals $\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}t\,(1 - v^2/c^2)^{1/2}$ in the inertial frames in which the rocket is

successively instantaneously at rest.

10.25 A particle moves with velocity $\boldsymbol{v}$ and acceleration $\dot{v}$ so that after a short time interval δt its velocity in the laboratory frame S is changed by the amount $\delta v = \dot{v}\delta t$. Let S' be the inertial system which is instantaneously comoving with the particle at time t and S'' the same system at time $t + \delta t$. Use the Lorentz transformation to show up to terms linear in δv that the coordinates and time in these systems are connected by the relations

$$r'' = r' + [\Delta\varphi \wedge r'] - t'\Delta v, \quad t'' = t' - \frac{(r' \cdot \Delta v)}{c^2} \tag{10.25.1}$$

where

$$\Delta v = \gamma \left[\delta \boldsymbol{v} + (\gamma - 1)\frac{(\boldsymbol{v} \cdot \delta \boldsymbol{v})}{v^2}\boldsymbol{v}\right], \quad \Delta\varphi = (\gamma - 1)\frac{[\delta \boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{v}]}{v^2} \tag{10.25.2}$$

What is the geometrical meaning of the transformation (10.25.1)? What is the form of equations (10.25 .2) when $v \ll c$, in the first nonvanishing approximation?

Hint. It is convenient to consider a chain of transformations $S'' \to S \to S'$, and to make use of the formulae given in the solution of problem 10.10.

10.26 A system S' moves with a velocity V relative to a system S. The velocities of two bodies relative to S are respectively v_1 and v_2. Find the angle α between the velocities of the two bodies as measured in S and S'.

Hint. Use the results of problems 10.12 and 10.14 .

10.27 What happens to the angle between the two velocities in the preceding question when the velocity of S' relative to S tends to the velocity of light c?

10.28 At a particular instant of time the direction of the rays of light from a star are at an angle ϑ to the orbital velocity v of the Earth in the frame in which the Sun is at rest. Find the change in the direction of the Earth-star line after a period of six months without assuming that v/c is small. This phenomenon is known as the aberration of light.

10.29 Find the form of the apparent curve, described by a star on the celestial sphere, which is due to the annual aberration. Assume that the polar coordinates of the star in the frame in which the sun is at rest are ϑ, ϕ, where the polar axis is drawn at right angles to the plane of the earth's orbit. The orbital velocity of the earth may be assumed to be very much smaller than the velocity of light.

10.30 A beam of light subtends a solid angle $\mathrm{d}\Omega$ in a given reference system. Find the change in this angle when it is measured in another inertial reference system.

10.31 Assuming that the stars in that part of the galaxy which is nearest to us are distributed uniformly, determine their distribution $\mathrm{d}N/\mathrm{d}\Omega'$ as measured by an observer in a rocket moving with a velocity approaching the velocity of light.

10.32 Find the transformation formulae for the frequency ω and the wavevector k of a plane monochromatic light wave between two inertial systems. Assume that the direction of the relative velocity $\boldsymbol{V}$ is arbitrary.

10.33 Find the frequency ω of a light wave as observed in the case of the transverse Doppler effect (the direction of propagation is at right angles to the direction of motion of the source in the system in which the detector of the radiation is at rest). Find the direction of propagation of the wave in the system in which the source is at rest.

10.34 The wavelength of light emitted by a source in the system in which it is at rest is λ_0. Find the wavelength λ measured by an observer approaching the source with a velocity V, and an observer moving with the same velocity away from the source.

10.35 A source emitting light of frequency ω_0 isotropically in all directions in its own frame of reference moves uniformly in a straight line relative to an observer with velocity V and at the moment of closest approach it is proceeding away from the observer at an impact parameter

d. The number of photons emitted per unit time per unit solid angle (photon intensity flux) is equal to J_0 in the rest frame of the source. Find the way the frequency ω and the photon flux intensity J registered by the observer depend on the angle between the beam direction and the direction of the velocity V. At what angles $\theta = \theta_0$ are the registered frequency and photon flux intensity the same as ω_0 and J_0? What fraction of photons is registered by the observer in the ranges $0 \leqslant \theta \leqslant \theta_0$ and $\theta_0 \leqslant \theta \leqslant \pi$? Draw the functions $\omega(\theta)$ and $J(\theta)$ for $V/c = \frac{1}{3}$ and $V/C = \frac{4}{5}$. What happens to these functions as $V/c \to 1$?

10.36 Find the angular distribution of the light intensity I (energy of the light emitted per unit time into a unit solid angle) and also the total light flux from the light source considered in the preceding problem.

Hint. Each photon has an energy $\hbar\omega$, where $\hbar$ is Planck's constant divided by 2π (Dirac's constant).

10.37 A mirror moves with a velocity V in a direction at right angles to its plane. Find the law of reflection of a plane monochromatic wave from the mirror, and also the change in the frequency on reflection. Consider in particular the case $V \to c$.

10.38 Solve the preceding problem in the case when the mirror travels without rotation in a direction parallel to its own plane.

10.39 An opaque cube of edgelength l_0 in its own rest frame moves with velocity V relative to an observer (see figure 10.39.1). The observer

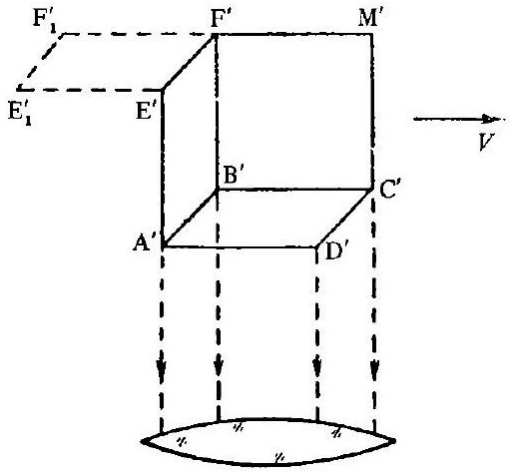


Figure 10.39.1.

photographs it at the moment when a beam of light emitted from the surface of the cube enters the objective of a camera at a right angle to the direction of motion (in the frame of the camera). The cube is seen under a small solid angle so that one may assume that the rays from the different points of the cube are parallel.

What is the shape of the image on the photographic plate? Make a sketch of the image, indicating on it the corners and edges of the cube as they are photographed. Evaluate their relative lengths. Which is the fixed object the image of which is equivalent to the photograph? What would be the shape of the image of a moving cube, if the Galileo transformations were valid?

10.40 A thin rod M′N′ is fixed in the system of reference S' and in that reference system has a length l_0 and is oriented as shown in figure 10.40.1. The system S' moves with a velocity $V \| Ox$ relative to a photographic plate AB which is at rest in the system S. At the time when the rod passes the photographic plate there is a short light flash which is such that the light rays are incident normally upon the xz-plane, the plane of the plate.

(a) What is the length l of the image on the plate? Can it be equal to or exceed l_0?

(b) At what angle of inclination α' are only the end points of the rod photographed?

(c) What is the angle of inclination, α, of the rod with respect to the x-axis?

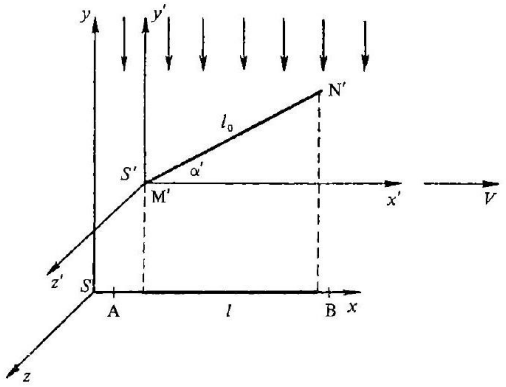


Figure 10.40.1.

10.41 A sphere moving with a velocity V is photographed by a fixed observer under a small solid angle. The rays of light from the sphere are incident in a parallel beam on the objective of the camera and the beam is at a right angle to the direction of the velocity V. What is the shape of the image on the photographic plate?

Hint. Consider the sphere as a collection of thin discs moving parallel to their planes and construct the image of each disc.

10.42 Let a moving opaque cube be photographed by a fixed observer at the moment when the light rays coming from the cube make an arbitrary angle α with the direction of the velocity V of the cube (in the frame of the observer). The solid angle under which the cube is seen is small so that the rays form a parallel beam which is normally incident on the surface of the photographic plate (figure 10.42.1). Show that the photograph must be the same as the photograph of a fixed cube which is turned at an angle. Find the angle of rotation for different values of V and fixed α. For what value of V will the single face A′B′ be photographed? When will the single face B′C′ be photographed?

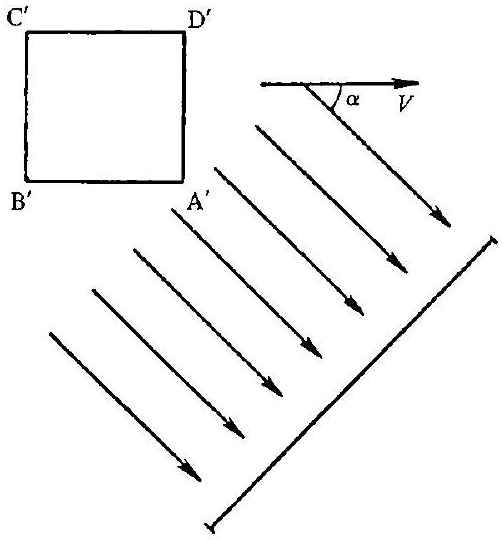


Figure 10.42.1.

10.43 Set up the wave 4 -vector describing the propagation of a plane monochromatic wave in a medium which has a refractive index n and moves with a velocity V (the phase velocity of the wave in a stationary medium may be taken to be $v' = c/n$). Find the transformation formulae for the frequency, the angle between the wavevector and the direction in which the medium moves, and the phase velocity.

10.44 A plane wave propagates in a medium moving with a velocity V in the direction of displacement of the medium. The wavelength in vacuo is λ. Find the velocity v of the wave in

the laboratory system (Fizeau experiment). The refractive index n is determined in the system S' in which the medium is at rest and depends on the wavelength λ' in this system. Neglect terms of second order in V/c.

16.10.2 b Four-dimensional vectors and tensors

On changing from one inertial frame (S') to another (S) the components of a 4 -vector transform according to the formulae

$$A_i = \alpha_{ik} A'_k \tag{10.b.1}$$

where the transformation matrix $\hat{\alpha}$ has the form (remember that the summation rule is such that summation over repeated indices is understood to be taken with a plus sign for the term corresponding to the index 0 and with a minus sign for the terms corresponding to the indices $1, 2, 3$)

$$\hat{\alpha} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & -\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{10.b.2}$$

It corresponds to the transformation (10.a.1), in which the corresponding coordinate axes in the frames S and S' are parallel, the relative velocity is along the x-axis, and the origins are the same at $t = t' = 0$.

The transformation matrix satisfies the relations

$$\alpha_{il}\alpha_{kl} = g_{ik}, \quad \alpha_{li}\alpha_{lk} = g_{ik} \tag{10.b.3}$$

where g_{ik} is the metric tensor, which has the form

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{10.b.4}$$

The signs in the main diagonal of the metric tensor correspond to the signs in equation (10.a.5) for the scalar product of two 4 -vectors.

The transformation which is the inverse of equation (10.b.1) can be written in the form:

$$A'_i = \alpha_{ki} A_k \tag{10.b.5}$$

The coordinates of a world point $x_0 = ct, x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$ form a 4-vector and transform according to equations (10.b.1) and (10.b.5).

When we perform two successive Lorentz transformations the corresponding matrices multiply according to the normal matrix multiplication rule (see chapter 1, section a).

A four-dimensional tensor (4-tensor) of rank N is a set of 4^N quantities $T_{ik\ldots l}$ which, when we change to another inertial system of reference, transform as the products of the corresponding components of a 4 -vector $A_i, A_k, \ldots, A_l$:

$$T_{ik\ldots l} = \alpha_{ip}\alpha_{kr}\ldots\alpha_{ls}T'_{pr\ldots s} \tag{10.b.6}$$

The determinant $|\alpha_{ik}|$ of the matrix $\hat{\alpha}$ of the Lorentz transformation may be equal to -1 [proper Lorentz transformation, such as equation

(10.a.1)] or to +1 (improper transformation). Any proper Lorentz transformation can be reduced to a transformation of the form (10.a.1) and a rotation in space; such transformations can be considered to be rotations in four-dimensional space. Improper Lorentz transformations include reflections of one coordinate or of three coordinates.

A pseudotensor of rank N is defined as the set of 4^N quantities $P_{ik\ldots l}$ which transform in accordance with the formulae

$$P_{ik\ldots l} = \alpha_{ip}\alpha_{kr}\ldots\alpha_{ls}\left|\alpha_{mn}\right| P_{pr\ldots s} \tag{10.b.7}$$

The skew-symmetric unit pseudotensor of rank 4 (see problem 10.50) is an example of a pseudotensor. Its components e_{iklm} are defined by the following conditions: (a) e_{iklm} changes sign when any pair of subscripts is reversed, and (b) $e_{0123} = 1$. It follows that the components of e_{ikim} will vanish when at least two of the subscripts are the same, or will be equal to ± 1 when the subscripts are all different.

10.45 Prove the relations

$$A_i = g_{ik}A_k, \quad A_iB_i = A_ig_{ik}B_k, \quad g_{ik}g_{kl} = g_{il}, \quad g_{ii} = 4$$

where g_{ik} is the metric tensor (10.b.4), while A_i and B_i are four-vectors. When summing over repeated indices one should use the sign rules given after equation (10.a.5)

10.46 Show that the tensor g_{ik} given by equation (10.b.4) has the same form in all inertial frames.

10.47 Show that the components A_1, A_2, A_3 of the four-dimensional tensor $A_i = (A_0, A_1, A_2, A_3)$ transform on space rotation as the components of the three-dimensional vector $A = (A_1, A_2, A_3)$ and also that the component A_0 is a three-dimensional scalar.

10.48 Find the three-dimensional tensors into which a 4-tensor of rank 2 is found to divide as a result of space rotations.

10.49 Show that the components of a skew-symmetric 4-tensor of rank 2 transform on space rotation as the components of two independent threedimensional vectors.

10.50 Show that the quantity e_{iklm}, which was defined in the introduction to this section, does in fact transform as a pseudotensor.

10.51 Show that

(a) $e_{iklm}e_{lmrs} = 2\left(g_{is}g_{kr} - g_{ir}g_{ks}\right)$

(b) $e_{iklm}e_{klmn} = 6g_{\text{in}}$

where e_{iklm} and g_{ik} were defined in the introduction to this section.

10.52 Show that

$$e_{iklm}e_{lmrs}A_iB_kC_rD_s = 2\left(A_iD_i\right)\left(B_kC_k\right) - 2\left(A_iC_i\right)\left(B_kD_k\right)$$

10.53 Construct a 4-vector from the partial derivatives $\partial\varphi/\partial x_i (i = 0, 1, 2, 3)$, where φ is a scalar. Find an expression for the components of ∇_i, the four-dimensional gradient operator.

10.54 Construct a 4-tensor T_{ik} from the partial derivatives $\partial A_i/\partial x_k$ $(i, k = 0, 1, 2, 3)$, where A_i is a 4 -vector. Show that the 4 -divergence $\partial A_i/\partial x_i$ is an invariant.

10.55 Find the transformation laws for the quantities:

(a) A_i^2;

(b) $T_{ik}A_k$

if A_i is a 4 -vector and T_{ik} a 4 -tensor.

10.56 Two 4-vectors A_i and B_i are called parallel if

$$\frac{A_0}{B_0} = \frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2} = \frac{A_3}{B_3}.$$

Show that the ratio of the corresponding components of parallel 4-vectors is invariant under a Lorentz transformation.

10.57 Find the number of different components of a 4-tensor of rank 3 which is skew-symmetric with respect to the transposition of any pair of subscripts. Show that the components transform on rotation as the components of a four-dimensional pseudovector.

10.58 Three reference systems S, S', and S'' are such that S'' moves relative to S' with a velocity V' in the direction parallel to the x'-axis and S' moves relative to S with a velocity V in the direction of the x-axis. Corresponding axes of the three systems remain parallel. By multiplying together the corresponding matrices, find the matrix for the transformation from S'' to S. Hence deduce the formula for the addition of parallel velocities [see equation (10.a.11)].

10.59 Write down the Lorentz transformation (10.a.1) in terms of the variables $x_1, x_2, x_3, x_0 = ct$ by expressing the magnitude of the relative velocity V in terms of the angle α given by $\tanh\alpha = V/c$.

10.60 A system S' moves relative to a system S with a velocity V ($\tanh\alpha = V/c$) in the direction defined by the polar angles ϑ, ϕ. The corresponding axes of S and S' remain parallel. Find the matrix $\hat{g}$ for the transformation from S' to S by multiplying together the simple transformation matrices.

16.10.3 c Relativistic electrodynamics

In this section we shall summarise the fundamental formulae of relativistic electrodynamics in vacuo. The three-dimensional current density $j = \rho\boldsymbol{v}$ and the charge density ρ form the current density 4 -vector

$$j_i = (c\rho, j) \tag{10.c.1}$$

The electric and magnetic fields are the components of the skewsymmetric electromagnetic-field 4-tensor

$$F_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -H_z & H_y \\ E_y & H_z & 0 & -H_x \\ E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix} \tag{10.c.2}$$

The field components in two systems S and S', whose x - and x'-axes are parallel to the relative velocity of the two systems, transform in accordance with the following formulae

$$\begin{array}{lll} E_x = E'_x, & E_y = \gamma\left(E'_y + \beta H'_z\right), & E_z = \gamma\left(E'_z - \beta H'_y\right) \\ H_x = H'_x, & H_y = \gamma\left(H'_y - \beta E'_z\right), & H_z = \gamma\left(H'_z + \beta E'_y\right) \end{array} \tag{10.c.3}$$

The quantities

$$H^2 - E^2 = \text{ invariant }, \quad (E \cdot H) = \text{ invariant} \tag{10.c.4}$$

are invariant under the Lorentz transformation. The vector and scalar potentials A and φ form the potential 4 -vector

$$A_i = (\varphi, A) \tag{10.c.5}$$

The components of the energy-momentum tensor in a vacuum are defined by

$$T_{ik} = \frac{1}{4\pi}\left(-F_{il}F_{kl} + \frac{1}{4}g_{ik}F_{lm}F_{lm}\right) \tag{10.c.6}$$

The nine space components of the tensor T_{ik} form the three-dimensional Maxwell stress tensor

$$T_{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi}\left(-E_\alpha E_\beta - H_\alpha H_\beta\right) + \frac{1}{8\pi}\left(\boldsymbol{E}^2 + \boldsymbol{H}^2\right)\delta_{\alpha\beta} \tag{10.c.7}$$

The space-time components of T_{ik} are proportional to the components of the energy flux density S and the field momentum density g:

$$\left.\begin{array}{ll} T_{0\alpha} = \frac{1}{c}S_\alpha, & S = \frac{c}{4\pi}[E \wedge H] \\ T_{04} = cg_\alpha, & g = \frac{1}{4\pi c}[E \wedge H] = \frac{1}{c^2}S \end{array}\right\} \tag{10.c.8}$$

The time component of T_{ik} is related to the field energy density w by the formula

$$T_{00} = w = \frac{1}{8\pi}\left(\boldsymbol{E}^2 + \boldsymbol{H}^2\right) \tag{10.c.9}$$

The divergence of the tensor T_{ik} determines the volume density of forces $f_i = [(v \cdot f)/c, f]$ acting on the charges:

$$\frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k} = f_i = \frac{1}{c}F_{ik}j_k \tag{10.c.10}$$

Let us consider now the formulae of electrodynamics in the presence of media. The field vectors $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{D}, \boldsymbol{B}$, and H form two skew-symmetric fourdimensional tensors of rank 2, i.e. the field tensor

$$F_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \tag{10.c.11}$$

and the induction tensor

$$H_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & -D_x & -D_y & -D_z \\ D_x & 0 & -H_z & H_y \\ D_y & H_z & 0 & -H_x \\ D_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix} \tag{10.c.12}$$

The polarisation and magnetisation vectors P and M form the following 4-tensor.

$$M_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & P_x & P_y & P_z \\ -P_x & 0 & -M_z & M_y \\ -P_y & M_z & 0 & -M_x \\ -P_z & -M_y & M_x & 0 \end{pmatrix} \tag{10.c.13}$$

The formulae $D = E + 4\pi P$ and $B = H + 4\pi M$ may be joined into the single relation

$$H_{ik} = F_{ik} - 4\pi M_{ik} \tag{10.c.14}$$

The 4 -force f_i per unit volume of the medium is given by

$$f_i = \left\{\frac{1}{c}[Q + (f \cdot v)], f\right\} \tag{10.c.15}$$

where f is the pondermotive force per unit volume and Q is the Joule heat liberated per unit volume per unit time.

10.61 Write down the transformation formulae for the field vectors $(\boldsymbol{E}, B)$, (D, H) and the

polarisations (P, M) in the case where the S' system moves relative to the S system with an arbitrarily oriented velocity V. Express the transformation formulae in a vector form.

Hint. Use the expression for the transformation coefficients in problem 10.60 and the asymmetry of the tensors F_{ik}, H_{ik}, and M_{ik}.

10.62 A uniform electromagnetic field $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}$ exists in the reference system S. Find the velocity of the system S' relative to S in which E' is
parallel to $\boldsymbol{H}'$. Does this problem always have a solution, and if so, is it always unique? Find the absolute values of E' and H'.

10.63 The electric and magnetic fields in a reference system S are mutually perpendicular $(\boldsymbol{E} \perp \boldsymbol{H})$. Find the velocity of the system S' relative to S, in which only the electric or only the magnetic field is present. Does this problem always have a solution, and if so, is it unique?

10.64 An infinitely long circular cylinder is uniformly charged with a density κ per unit length. A uniformly distributed current J flows in the direction of the axis of the cylinder. The permittivity and the magnetic permeability are equal to unity in all space. Find the reference system in which there is only an electric or only a magnetic field, and determine the magnitude of these fields.

10.65 The system of differential equations for the magnetic field lines of the form

$$[\mathrm{d}r \wedge H] = 0 \tag{10.65.1}$$

is not relativistically invariant and does not retain its form when we change to another inertial frame.

(a) Show that for fields of a special form the set of equations

$$[\mathrm{d}r \wedge H] + cE\ \mathrm{d}t = 0, \quad (E \cdot\ \mathrm{d}r) = 0 \tag{10.65.2}$$

can be considered as a relativistically invariant generalisation of the set (10.65.1).

(b) Elucidate the structure of the fields for which such a generalisation is possible, by considering the conditions of compatibility of equations (10.65.2). How many independent equations does the set (10.65.2) contain?

(c) What is the form of the integrability condition of the set (10.65.2)?

(d) Verify that the field lines determined by the set (10.65.2) move transversely with a velocity $\boldsymbol{u} = c[\boldsymbol{E} \wedge \boldsymbol{H}]/H^2$, i.e. that they move even in the case of static fields.

10.66 Show that the relativistically invariant set of equations for the electrical field lines which is the analogue of the set (10.65.2) of the preceding problem has the form

$$e_{iklm} F_{lm}\ \mathrm{d}x_k = 0 \tag{10.66.1}$$

What are the conditions imposed upon $\boldsymbol{E}$ and $\boldsymbol{H}$ and also upon the charge and current distributions by the conditions that the set (10.66.1) is compatible and integrable? How do the field lines determined by the set (10.66.1) move?

10.67 Find the magnitude of the e.m.f. induced in a conductor moving in a magnetic field B, with the aid either of the transformation formulae for the field strength or the transformation formulae for the potentials.

10.68 Find the potentials φ, A and fields E, H due to a point charge e moving with a uniform velocity V by carrying out the Lorentz transformation from the reference system in which the charges are at rest.

10.69 Evaluate the total electromagnetic momentum, $\boldsymbol{G}$, of the field produced by a uniformly moving charge (see preceding problem).

10.70 Show that the electric field due to a uniformly moving point charge is 'compressed' in the direction of motion, and that the field E on the line of motion of the charge is reduced as

compared with the Coulomb field. Is this reduction in the field consistent with the transformation formula $E_{\parallel} = E'_{\parallel}$?
10.71 An electric dipole having a moment p_0 in the reference system in which it is at rest, moves with a uniform velocity V. Find the potentials $\varphi, \boldsymbol{A}$ and the fields $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}$ due to the dipole.
10.72 Derive the transformation formulae for the electric and magnetic dipole moments $\boldsymbol{p}$ and $\boldsymbol{m}$ of a polarised and magnetised body between the inertial system in which the body is at rest and another inertial system.

Hint. Use the transformation formulae for the polarisation and magnetisation vectors P and M.
10.73 An uncharged wire loop in the form of a rectangle of sides a and b carries a current J' and moves with a uniform velocity V which is parallel to the side of length a. The wire has a finite cross section. Find the distribution of electric charges in the loop and its electric and magnetic moments in the laboratory system.
10.74 Deduce the relativistic transformation law for the Joule heat Q from the definition of the 4 -vector of force.
10.75 Find the transformation formulae for the energy momentum tensor T_{ik} under the Lorentz transformation (10.a.1).
10.76 Find the sum of the diagonal elements (i.e. the trace) of the energy-momentum tensor (10.c.6).
10.77 An electromagnetic field exists only within a finite volume of space V in which there are no charges. Show that the total energy and momentum of the field transform as a 4 -vector.
10.78 The total angular momentum of a system consisting of an electromagnetic field in vacuo and a set of point charges may be defined by [(3)]

$$K_{ik} = -\frac{1}{c}\int_t (x_i T_{kl} - x_k T_{il})\,\mathrm{d}^2 S_l + \sum (x_i p_k - x_k p_i)$$

[(3)] It can be easily verified using the definition of the tensor T_{ik} that the space part $K_{\alpha\beta}$ of the tensor K_{ik} is a skew-symmetric tensor equivalent to the vector $K = \int [r \wedge g]\mathrm{d}^3 r + \sum [r \wedge p]$, where $g = [E \wedge H]/(4\pi c)$ is the field momentum density.
where the integral is taken over the entire hypersurface $x_0 = ct =$ constant. The summation is carried out over all the particles, and the values of x_i, p_k are taken at the points of intersection of the world lines of the corresponding charges and the hypersurface $x_0 =$ constant. Prove the conservation of the total angular momentum K_{ik} of the system, taking into account the fact that $\partial T_{ik}/\partial x_k = F_{ik} j_k/c$.
10.79 A particular system, which consists of particles and an electromagnetic field, occupies a finite evacuated region of space. By considering the balance of the total angular momentum $K_{\alpha\beta}$ of the system, find an expression for the flux density R of the angular momentum of the field. Use the expression for K_{ik} given in the preceding problem.

16.11 Relativistic mechanics

16.11.1 a Energy and momentum

The momentum p of a relativistic particle is given by

$$p = \frac{mv}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} \tag{11.a.1}$$

where $\boldsymbol{v}$ is the velocity of the particle and m is its rest mass. The total energy & of a freely moving particle can be expressed in terms of the velocity:

$$= \frac{mc^2}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} \tag{11.a.2}$$

or in terms of the momentum:

$$\& = c\left(p^2 + m^2c^2\right)^{1/2} \tag{11.a.3}$$

The kinetic energy T of a particle is given by

$$T = \varepsilon - mc^2 \tag{11.a.4}$$

where $\varepsilon_0 = mc^2$ is the rest energy. The energy, the momentum, and the velocity of a particle are related by

$$\S\boldsymbol{v} = c^2\boldsymbol{p} \tag{11.a.5}$$

The energy and the momentum of a particle are the time and space components of the energy-momentum 4 -vector (4 -momentum)

$$p_i = \left(\frac{-}{c}, p\right) \tag{11.a.6}$$

In the transition from one inertial system into another, the momentum transforms in accordance with equation (10.a.4). The square of the 4 -momentum is a relativistic invariant:

$$p_i^2 = \frac{\mathring{\mathrm{A}}^2}{c^2} - p^2 = m^2c^2 \tag{11.a.7}$$

A particle is referred to as nonrelativistic if its kinetic energy is small, and ultrarelativistic if its kinetic energy is very large, as compared with the rest energy. The velocity of an ultrarelativistic particle approaches the velocity of light, and its energy is given by

$$\varepsilon = cp \tag{11.a.8}$$

(1) For details of the theory we refer to the books by Landau and Lifshitz (1975), Fock (1964), Bergmann (1958), Akhiezer and Berestetskii (1965), Pathria (1974), Jackson (1962), Pauli (1958), and Okun (1965).

Particles with zero rest mass and zero rest energy (photons and neutrinos) are always ultrarelativistic and their velocity is exactly equal to the velocity of light c.

The energy and momentum of a photon in vacuo are given by

$$= \hbar\omega, \quad p = \frac{\hbar\omega}{c} = \hbar k \tag{11.a.9}$$

where ω is the frequency and $\hbar = 1.05 \times 10^{-34}$ J s is Planck's constant divided by 2π.

The total energy and momentum of an isolated system of particles is conserved. It follows that if there is no interaction between the particles before and after a particular reaction (disintegration or collision) then the initial total 4 -momentum $p_i^{(0)}$ is equal to the final total 4 -momentum p_i:

$$\sum_a p_{ai}^{(0)} = \sum_b p_{bi} \tag{11.a.10}$$

where the summation is carried out over all the particles existing before and after the reaction.

In collision theory it is convenient to use either the laboratory system S, or the centre of mass system S' (CM system) in which the total momentum $\boldsymbol{p}$ is zero. The useful device

consisting of making use of the invariance of the squares of 4 -momenta should be noted (see solutions to problems 11.34, 11.40, and 11.58).

There are two types of collisions, namely, elastic, in which there is no change in the internal state and therefore no change in the masses of particles, and inelastic, in which there is a change in the internal energy (mass) of the colliding particles, and creation or annihilation of particles may take place. In an inelastic collision between two particles, the total mass $m_1 + m_2$ of the colliding particles differs from the total mass M_k of the particles emerging from the reaction by the amount given by

$$\Delta M = m_1 + m_2 - M_k \tag{11.a.11}$$

which is called the mass defect. The quantity $Q = c^2 \Delta M$ is known as the Q value of the reaction.

Reactions which proceed according to the scheme

$$a + b \to c + d$$

i.e. those in which two particles are transformed into two other particles, are called two-particle reactions-a particular case of a two-particle reaction is the elastic scattering of one particle by another one. It is convenient to describe the kinematics of two-particle reactions by means of the invariant quantities s, t, and u:

$$s = (p_{ai} + p_{bi})^2 , \quad t = (p_{ai} - p_{ci})^2 , \quad u = (p_{ai} - p_{di})^2 \tag{11.a.13}$$

where $p_{ai}, \ldots$ are the 4 -momenta of the particles which take part in the reaction. Any of the quantities s, t, and u can be expressed in terms of the two other ones using the relation [(2)]

$$s + t + u = \left(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 + m_d^2\right) c^2 \tag{11.a.14}$$

The kinematic plane in which the values of the variables s and t (or s, t, and u-see problem 11.56) are plotted gives a graphical representation of the kinematics of a two-particle reaction.

Many formulae of relativistic kinematics become simpler if we use a system of units in which the velocity of light $c = 1$. Masses, energies, and momenta are then measured in the same units, for example, MeV ($1\text{MeV} = 10^6\text{eV} = 10^{-3}\text{GeV} = 1.602 \times 10^{-13}$ J). In some problems of the present section we use such a system of units. In a number of cases the masses of elementary particles are measured in units of the electron mass m_e, i.e. one uses a system of units in which $m_\text{e} = 1$.

Table 11. a. 1 gives the rest energy $\&_0$ of a number of elementary particles. Table 11.a. 2 gives the binding energies of three light nuclei.

Table 11.a.1.

Particle	Mass	
	in units m_e	in MeV
Photon γ	0	0
Neutrino ν	0	0
Electron e^-	1	$0 \cdot 511$
Positron e^+	207	$105 \cdot 7$
Muons $\mu^\pm$	273	$139 \cdot 6$
Pions $\pi^\pm$	264	$135 \cdot 0$
π^0	966	$493 \cdot 8$
Kaons $K^\pm$	974	$497 \cdot 8$
$K^0, \overline{K}^0$	1836	$938 \cdot 2$
Proton p	$939 \cdot 5$	
Neutron n	1839	$1115 \cdot 4$
Lambda hyperon Λ	2181	

Table 11.a.2.

Isotopes	B, MeV
^{2}He	$2 \cdot 23$
^{4}He	$28 \cdot 11$
^{7}Li	$38 \cdot 96$

(2) We can, for instance, choose s and t as the two independent quantities. All other quantities, such as the energies and scattering angles in the laboratory frame and in the centre of mass frame, can be expressed in terms of them; see problems 11.51 to 11.53.

The binding energy is defined by

$$B = \Delta M c^2 = \sum \&_{0n} - \&_{ON} \tag{11.a.15}$$

where $\mathscr{E}_{0n}$ is the rest energy of a nucleon and $\mathscr{E}_{0N}$ is the rest energy of the nucleus.

11.1 Express the momentum p of a relativistic particle in terms of its kinetic energy T.

11.2 Express the velocity $\boldsymbol{v}$ of a particle in terms of its momentum $\boldsymbol{p}$.

11.3 A particle of rest mass m has an energy $\mathscr{E}$. Find the velocity v of the particle. Discuss in particular the nonrelativistic and the ultrarelativistic limits.

11.4 Find approximate expressions for the kinetic energy T of a particle of rest mass m in terms of (a) its velocity v, and (b) its momentum p, to within terms of the order of v^4/c^4 and p^4/m^4c^4 respectively, where $v \ll c$.

11.5 Find the velocity v of a particle of rest mass m and charge e after it has traversed a potential difference V (assume that the initial velocity is zero). Consider the nonrelativistic and the ultrarelativistic situations.

11.6 Find the particle velocity v for: (a) electrons in an electronic valve (Å = 300eV), (b) electrons in a 300 MeV synchrotron, (c) protons in a 680 MeV synchrocyclotron, and (d) protons in a 10 GeV proton synchrotron.

11.7 The beam current in an accelerator is J and the kinetic energy at the output of the accelerator is T. Find the force F exerted by the beam on a target placed in its path, and the power W dissipated in the target.

11.8 A body moves with a relativistic velocity v through a gas containing N slowly moving particles of rest mass m per unit volume. Find the pressure p exerted by the gas on a surface element of the body which is perpendicular to its velocity.

11.9 In a linear accelerator, the particles are accelerated in the gaps between hollow cylindrical electrodes (the so-called drift tubes), and travel along the common axis of these electrodes.

The acceleration is produced by a high-frequency electric field having a frequency $\nu =$ constant. Find the lengths of the drift tubes which will ensure that a particle of charge e and rest mass m will traverse all the accelerating gaps at instants of time at which the maximum voltage V_e acts across the gaps. Estimate also the total length of the accelerator with N drift tubes.

11.10 A beam of monochromatic μ-mesons produced in the upper atmosphere is incident vertically on the earth's surface [(3)]. Find the ratio of the intensity of the beam at a height h above sea level to the intensity

[(3)] Of course, the problem is formulated in a simplified form.

at sea level, by assuming that the reduction in the beam intensity in the particular layer of air of thickness h occurs only as a result of the spontaneous disintegration of the μ-mesons (energy of the μ-mesons $\mathscr{E} = 4 \cdot 2 \times 10^8 \text{eV}, h = 3$ km, half-life of μ-meson at rest $\tau_0 = 2.2 \times 10^{-6}$ s).

11.11 A reference system S' moves with a velocity V relative to a system S. A particle of rest mass m having an energy ε' and velocity v' in S' moves at an angle ϑ' to the direction of $\boldsymbol{V}$. Find the angle ϑ between the momentum p of the particle and the direction of V in the system S. Express the energy and the momentum of the particle in S in terms of ϑ', &$'$ or ϑ', v'. Consider in particular the ultrarelativistic case &$' \gg mc^2$, $V \approx c$. Show that in the ultrarelativistic case there will be a range of angles in which it is possible to use the approximate formula $\vartheta \approx \gamma^{-1} \tan \frac{1}{2}\vartheta$.

11.12 A system S' moves with a velocity V relative to a system S. The angular distribution of particles of equal energy ε' in S' is described by the function $\mathrm{d}W/\mathrm{d}\Omega' = F'(\vartheta', \phi')$ where $\mathrm{d}W$ is the fraction of particles which move within the solid angle $d\Omega'$ in the system S'. This function is usually normalised so that

$$\int \mathrm{d}W = \int F'(\vartheta', \phi')\, \mathrm{d}\Omega' = 1$$

where the angle ϑ' is measured from the direction of $\boldsymbol{V}$. Find the angular distribution of such particles in the system S. Consider in particular the ultrarelativistic case.

11.13 The number of particles $\mathrm{d}N$ in a volume element d^3r with momentum components lying between p_x and $p_x + \mathrm{d}p_x, p_y$ and $p_y + \mathrm{d}p_y$, and p_z and $p_z + \mathrm{d}p_z$ can be written in the form

$$\mathrm{d}N = f(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}, t)\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}\ \mathrm{d}^3\boldsymbol{p}$$

where $\mathrm{d}^3\boldsymbol{p} = \mathrm{d}p_x\ \mathrm{d}p_y\ \mathrm{d}p_z$ is a volume element in momentum space and $f(r, p, t)$ is the distribution function, or particle number density in phase space. Find the way the distribution function $f(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}, t)$ transforms under a Lorentz transformation.

11.14* Particles of type 1 having a velocity v_1 in a system S are scattered by stationary particles of type 2 . Find the transformation law for the scattering cross section $\mathrm{d}\sigma_{12}$ to a reference system S' in which particles of type 2 have a velocity v_2' and particles of type 1 a velocity v_1'. Consider in particular the case where v_1' and v_2' are parallel.

Hint. The scattering cross section $\mathrm{d}\sigma_{12}$ is defined as the ratio of the number of particles scattered per unit time by a single scattering centre into a solid angle $\mathrm{d}\Omega$, to the intensity of incident particles $I_{12} = n_1 v_0$, where n_1 is the number of incident particles per unit volume and v_0 is the initial relative velocity of particles of type 1 and 2 (cf problem 10.18).

11.15 A π^0-meson moving with a velocity v decays in flight into two γ-rays. Find the angular distribution of the γ-rays, $\mathrm{d}W/\mathrm{d}\Omega$, in the

laboratory system, assuming that the distribution in the rest system of the π^0-meson is spherically symmetric.

11.16 Express the energy of the π^0-meson considered in the preceding problem in terms of the ratio f of the number of γ-rays emitted into the forward and backward hemispheres.

11.17 A π^0-meson decays in flight into two γ-quanta. Show that the minimum angle of separation of the γ-quanta, $\vartheta_{\min}$, is given by the condition

$$\cos\frac{1}{2}\vartheta_{\min} = \frac{v}{c}$$

in the system of reference in which the pion velocity is v.

11.18* Find the dependence of the energy of the γ-rays appearing as a result of the disintegration of the π^0-meson (cf problem 11.15) on the angle ϑ between the direction of motion of the γ-ray and the direction of motion of the π^0-meson. Determine the energy spectrum of the γ-rays in the laboratory system.

Hint. It follows from the laws of conservation of energy and momentum that in the rest system of the π^0-meson, the energy of the γ-rays is $8' = \frac{1}{2}mc^2$, where m is the rest mass of the π^0-meson.

11.19 Show that whatever the form of the energy spectrum of π^0-mesons, the energy spectrum of the γ-rays which are produced as a result of the disintegration of these mesons will, in the laboratory system, have a maximum at $\& = \varepsilon', \varepsilon' = \frac{1}{2}mc^2$, where m is the rest mass of the π^0 meson. Express the rest mass m of the π^0-meson in terms of $\&_1$ and $_2$, which are two arbitrary values of the γ-ray energy on either side of the above maximum and correspond to equal values of the distribution function.

Hint. Use the γ-ray energy spectrum deduced in the preceding problem.

11.20 Determine the rest mass m of a particle given that it disintegrates into two particles of rest masses m_1 and m_2. It is known from experiment that the momenta of the two particles are p_1 and p_2 and the angle between their directions of motion is ϑ. Evaluate the mass of the charged pion, which decays into a muon and a neutrino, if experiment shows that the pion before the decay was at rest while the muon momentum after the decay was $29.8\mathrm{MeVc}^{-1}$. The muon mass is given in table 11.a.1.

11.21 Determine the rest mass m_1 of a particle given that it is one of two particles produced as a result of the disintegration of a particle having a rest mass m and momentum p. Assume that the momentum p_2, the rest mass m_2, and the direction of motion ϑ_2 of the second particle produced in the disintegration are also known.

11.22 A particle of rest mass m_1 and velocity v collides with a stationary particle of rest mass m_2 and is absorbed by it. Find the rest mass m and the velocity V of the resultant particle.

11.23 A pion (rest mass m_π) at rest in the laboratory frame disintegrates into a muon (rest mass m_μ) and a neutrino. Find the momentum p_μ of the muon.

The muon has a mean lifetime τ, if at rest. Find the mean distance d between the points where the pion (at rest) and the muon disintegrate.

11.24 A body at rest of mass m_0 disintegrates into two parts of masses m_1 and m_2. Evaluate the kinetic energies T_1 and T_2 of the disintegration products. Find the way the disintegration energy is distributed in the rest frame of the disintegrating particle between (a) the α-particle and the daughter nucleus in the α-decay of ^{238}U; (b) the muon and the neutrino in pion decay ($\pi \to \mu + \nu$); (c) the γ-quantum and the recoil of the nucleus when a γ-quantum is emitted.

11.25 A particle of rest mass m splits into two particles of rest masses m_1 and m_2, moving with velocities v_1 and v_2 with respect to the frame in which the original particle was at rest. Derive a relation between m_1, m, v_1 and v_2.

A rocket of rest mass m_0 starts from rest relative to a frame S; at a later time it has a velocity v with respect to S and rest mass m. It is propagated by ejecting mass in a fixed direction with a constant velocity w relative to itself. Find its velocity as a function of m.

11.26 If in the case of the rocket considered in the preceding problem the mass is ejected at such a rate that the acceleration of the rocket, relative to a frame with respect to which it is instantaneously at rest, is a constant, f, find the mass of the rocket as a function of time. The mass is once again ejected at a constart velocity w relative to the rocket.

11.27 A particle at rest decays according to the reaction $a \to b + d$. Express the decay energy

$Q_a = m_a - m_b - m_d (c = 1)$ in terms of the kinetic energy T_b of one of the particles formed in the decay and the masses m_b and m_d. Evaluate the decay energy and the mass of the Σ^+ particle which decays as $\Sigma^+ \to \mathrm{n} + \pi^+$, by making use of the experimental value $T_{\pi^+} = 91.7\mathrm{MeV}$ and the neutron and π^+masses given in table 11.a.l. Do the same for the alternative decay of the Σ^+as $\Sigma^+ \to \mathrm{p} + \pi^0$, if in that case $T_\mathrm{p} = 18.8\mathrm{MeV}$.

11.28 A free excited nucleus at rest emits a γ-quantum; its excitation energy was $\Delta\&$. Find the frequency ω of the γ-quantum. The mass of the excited nucleus was m. What is the reason why $\omega \neq \Delta\&/\hbar$? How does the result change if the nucleus is rigidly attached to a crystalline lattice (Mssbauer effect)?

11.29* A particle a of mass m at rest decays as follows: $a \to a_1 + a_2 + a_3$ into three particles of masses m_1, m_2, m_3 with kinetic energies T_1, T_2, T_3. Study the kinematics of such a decay using a Dalitz plot. To do this, introduce the variables $x = (T_2 - T_3)/\sqrt{3}, y = T_1$ and consider the xy-plane. Each actual decay corresponds to a well-defined point in that plane.

(a) Show that the energy conservation law delimits a region in the x, y-plane which has the form of an equilateral triangle. Verify that the lengths of the perpendiculars drawn from the point that depicts the given decay onto the sides of the triangle are equal to the kinetic energies of the particles produced in the decay.

(b) Check that the two quantities x and y that we have introduced are sufficient to determine the magnitudes of the momenta of the particles produced in the decay as well as the angles between the momenta in the rest frame of the decaying particle.

(c) The conservation law for the three-dimensional momentum leads to the fact that not all points inside the triangle correspond to true decays. Find the region in the xy-plane inside which decays are kinematically possible for the particular case $m_2 = m_3 = 0, m_1 \neq 0$.

11.30 Construct the Dalitz plot (see preceding problem) for muon and kaon decays:

(a) $\mu^\pm \to \mathrm{e}^\pm + 2\nu$;

(b) $\mathrm{K}^\pm \to \pi^0 + \mathrm{e}^\pm + \nu$.

In the last process the electron is, as a rule, produced ultrarelativistically, so that one can neglect its rest mass. Determine the maximum energies of the particles.

11.31 Construct the Dalitz plot (see problem 11.29) for the following decay of a positive kaon:

$$\mathrm{K}^+ \to \pi^- + \pi^+ + \pi^+$$

The decay energy $Q = m_\mathrm{K} - 3m_\pi \approx 75\mathrm{MeV} < m_\pi (c = 1)$ so that the pions which are produced can be approximately taken to be nonrelativistic. What is the maximum energy of each of the particles?

11.32 Construct the Dalitz plot (see problem 11.29) for the ω decay:

$$\omega \to \pi^+ + \pi^- + \pi^0$$

Assume the masses of the three pions to be the same; the decay energy is $Q = m_\omega - 3m_\pi \approx 360\mathrm{MeV}, m_\omega \approx 780\mathrm{MeV} (c = 1)$. What is the largest energy of each of the pions?

11.33* In problem 11.29 we gave the rules for the construction of a Dalitz plot for the decay into three particles. The probability $\mathrm{d}W$ for the decay has the form

$$\mathrm{d}W = \rho \mathrm{d}\Gamma$$

Here ρ is a quantity which depends on the interaction forces leading to the decay and on the momenta of the particles, while $\mathrm{d}\Gamma$ is a volume element in phase space Γ, which is determined by the integral

$$\Gamma = \int \frac{\mathrm{d}^3 p_1}{_1} \frac{\mathrm{d}^3 p_2}{\varepsilon_2} \frac{\mathrm{d}^3 p_3}{®_3} \delta\left(p_i - p_{1i} - p_{2i} - p_{3i}\right),$$

where p_i is the 4 -momentum of the decaying particle [$p_i = (m, 0)$ if the particle is at rest when decaying], $p_{\alpha i} = (\varepsilon_\alpha, p_\alpha)\,(\alpha = 1, 2, 3)$ are the 4 -momenta of the particles formed in the decay, and $\mathrm{d}^3 \boldsymbol{p}_\alpha$ is a volume element of the momentum space of the α th particle. The four-dimensional δ-function expresses the conservation law of 4 -momentum in the decay and shows that the integration is only over those values of the momenta p_1, p_2, and p_3 which are compatible with the energy and momentum conservation laws.

Express $\mathrm{d}\Gamma$ in terms of $\mathrm{d}x$ and $\mathrm{d}y$ and show that the phase volume Γ can be expressed in terms of the area of the allowed region in the Dalitz plot, when we use appropriate units. Give the proof for the general case where all masses are different and nonvanishing.

11.34* A particle of rest mass m collides with a stationary particle of rest mass m_1. The collision results in the production of a number of particles with a total rest mass M. If $m + m_1 < M$, then at low kinetic energies of the incident particle the reaction will not proceed, because it would violate the law of conservation of energy. Determine the minimum kinetic energy of the incident particle at which the reaction becomes energetically possible, i.e. the threshold kinetic energy T_0 for the reaction.

11.35 Find the energy thresholds T_0 for the following reactions:
(a) π-meson production in nucleon-nucleon scattering ($N + N \to N + N + \pi$),
(b) photoproduction of π-mesons on nucleons ($N + \gamma \to N + \pi$),
(c) production of a K-meson and a Λ-hyperon ($\pi + N \to \Lambda + K$), and
(d) proton-antiproton pair production in the scattering of a proton of rest mass m_p by a nucleus of rest mass m. Consider in particular the case of proton-proton scattering. Estimate the threshold for the production of an antiproton in the collision between a proton and a nucleus of mass number A, assuming that $m \approx m_\mathrm{p} A$.

11.36 Find an approximate expression for the energy threshold T_0 of reactions in which the change in the rest mass ΔM of the colliding particles is a small fraction of their total rest mass M (this situation occurs in the case of a collision between two nonrelativistic particles). Use this formula to determine the energy threshold T_0 of the following reactions:
(a) photodisintegration of the deuteron ($\gamma + {}^2_1\mathrm{H} \to p + n$) and (b) the reaction ${}^4_2\mathrm{He} + {}^4_2\mathrm{He} \to {}^7_3\mathrm{Li} + p$. Compare the approximate expressions with the exact expressions (see problem 11.34).

11.37 Show that the electron-positron pair production by γ-rays is only possible if a particle of finite rest mass participates in the reaction. (The intrinsic state of the particle remains unchanged in the reaction, its sole purpose being to take up a fraction of the energy and momentum, so that the corresponding conservation laws may be satisfied.) Find the threshold T_0 for the pair-production reaction.

11.38 Show that the annihilation of an electron-positron pair with the emission of a single γ-ray is forbidden by the conservation of energymomentum, but the annihilation of a pair with the emission of two photons is not forbidden.

11.39 A particle of energy & and rest mass m_1 moves towards a stationary particle of rest mass m_2. Find the velocity v of the centre of mass relative to the laboratory system.

11.40* A particle of rest mass m_1 and energy $\mathring{\mathrm{A}}_0$ undergoes an elastic collision with a stationary particle (rest mass m_2). Express the angles of scattering ϑ_1, ϑ_2 of the particles in the laboratory system in terms of their energies $\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2$ after the collision.

11.41 Use the solution of the preceding problem to express the energy of the particles undergoing the elastic collision in terms of the scattering angles in the laboratory system.

11.42 An ultrarelativistic particle of mass m and energy $\mathscr{E}_0$ is elastically scattered by a fixed nucleus of mass $M \gg m$. Determine how the final energy & of the particle depends on the scattering angle ϑ.

11.43 Solve the preceding problem for the case of inelastic scattering of a particle by a nucleus. The excitation energy $\Delta\&$ of the nucleus in its rest frame satisfies the inequality $mc^2 \ll \Delta\& \ll Mc^2$.
11.44 A particle of rest mass m is elastically scattered by a stationary particle of equal rest mass. Express the kinetic energy T_1 of the scattered particle in terms of the kinetic energy T_0 of the incident particle and the scattering angle ϑ_1.
11.45 Use the result of problem 11.41 to find (in the nonrelativistic approximation) the dependence of the final kinetic energies T_1 and T_2 of the particles undergoing an elastic collision on the initial kinetic energy T_0 of the incident particle, and the scattering angles ϑ_1, ϑ_2 in the laboratory system. Assume that the target particle was stationary prior to the collision.
11.46 Particles of rest mass m_1 and m_2 undergo an elastic collision. Their velocities in the centre of mass system are v_1' and v_2', the scattering angle is ϑ', and the velocity of the centre of mass system relative to the laboratory system is V. Determine the angle χ between the directions of motion of the particles after the collision in the laboratory system.
Consider in particular the case $m_1 = m_2$.
11.47 A photon of frequency ω_0 is scattered by a uniformly moving free electron. The momentum of the electron $\boldsymbol{p}_0$ is at an angle ϑ_0 to the direction of motion of the photon. Find the frequency ω of the scattered photon as a function of its direction of motion. Consider in particular the case where the electron was originally at rest (Compton effect).
11.48 A photon of energy $\hbar\omega_0$ is scattered by an ultrarelativistic electron of mass m and energy $\&_0 \gg \hbar\omega_0$. Find the maximum energy $\hbar\omega$ of the scattered photon.
11.49 Find the change in the energy of an electron when it collides with a photon, if the initial energy of the electron is $\&_0$ and that of the photon is $\hbar\omega_0$, and the angle between their momenta ϑ. Discuss the result. Under what conditions will electrons be accelerated owing to collisions with photons?
11.50 Express the invariant variables s, t, and u given by equation (11.a.13) in terms of the mass m, the absolute magnitude q of the momentum, and the scattering angle ϑ in the centre-of-mass frame for the case of elastic scattering of identical particles.
11.51 Let the particle b be at rest in the laboratory frame. Express the energy $\mathscr{E}_a$ of the particle a in the laboratory frame and also the energies $\&_a'$ and $\&_b'$ in the centre-of-mass frame in terms of the invariant variable s [see equation (11.a.13)]. Do the same for the absolute magnitudes of the three-dimensional momenta p_a and p' ($p_a' = p_b' = p'$). Use units in which the velocity of light $c = 1$.
11.52 Express the energies in the laboratory frame, $\&_c$ and $\&_d$, of the particles which are produced in a two-particle reaction in terms of the invariant variables given by equation (11.a.13).
11.53 Express the angle θ between the three-dimensional momenta $\boldsymbol{p}_a$ and $\boldsymbol{p}_c$ in the laboratory frame for the case of a two-particle reaction in terms of the invariant variables s, t, u given by equation (11.a.13). Express the angle θ' between the momenta $\boldsymbol{p}_a'$ and $\boldsymbol{p}_c'$ in terms of the same variables.
11.54 Construct the region of allowable values of the variables s and t [see equation (11.a.13)] for the reaction $\gamma + \mathrm{p} \to \pi^0 + \mathrm{p}$ (photo-production of a π^0-meson using a proton). What point of that region corresponds to the threshold of the reaction? What is the threshold value T_0 of the γ-quantum energy in the laboratory frame? What is the value of the kinetic energy T_π of the π^0-meson in the laboratory frame at threshold?
11.55 Two γ-quanta change into an electron-positron pair. The energy of one of them is given and is equal to ε_0. For what values ε_2 of the energy of the second quantum and for what value of the angle ϑ between their momenta is this reaction possible? Plot these values in an $\&_2, \cos\vartheta$-plane. Find also the region of allowable values of the variables s and t given by equation (11.a.13). Use as energy unit mc^2, where m is the electron mass.
11.56 Construct in the kinematic s, t-plane [see equation (11.a.13)] the physical regions corre-

sponding to the following three processes:
(a) $\pi^+ + \mathrm{p} \to \pi^+ + \mathrm{p}$: elastic scattering;
(b) $\pi^- + \overline{\mathrm{p}} \to \pi^- + \overline{\mathrm{p}}$; elastic scattering of antiparticles;
(c) $\pi^+ + \pi^- \to \mathrm{p} + \overline{\mathrm{p}}$: proton-antiproton pair production.

The masses of all pions are m and of all nucleons M.

11.57 Use the law of conservation of energy-momentum to show that the emission and absorption of light by a free electron in a vacuum is impossible.

11.58* Show that the uniform motion of a free charged particle of rest mass m, charge e, and velocity v in a medium with a refractive index $n(\omega)$ may be accompanied by the emission of electromagnetic waves (Cherenkov effect [4]). Express the angle ϑ between the direction of propagation of the wave and the velocity $\boldsymbol{v}$ in terms of v, ω, and $n(\omega)$ (cf problem 13.2).

Hint. The energy and momentum of a photon in a medium with a refractive index $n(\omega)$ is $\mathscr{E} = \hbar\omega$ and $p = n(\omega)\hbar\omega/c$.

11.59 Show that a free electron moving with a velocity v in a medium, can absorb electromagnetic waves of frequency ω provided $v > \mathrm{con}(\omega)$, where $n(\omega)$ is the refractive index.

11.60* A particle which, in general, may have a complicated structure and may contain a number of electric charges (for example an atom), moves with a uniform velocity $\boldsymbol{v}$ through a medium with a refractive index $n(\omega)$. The particle is at first in an excited state, and then emits a photon of frequency ω_0 (in the rest system) when it undergoes a transition to the ground state. The photon is observed in the laboratory system at an angle ϑ to the direction of motion of the particle. Find the frequency ω of the photon in the laboratory system (this is the Doppler effect in a refracting medium). Consider in particular the case $\omega_0 \to 0$.

Hint. Neglect terms which are of the second order in $\hbar$ and assume that $\hbar\omega_0 \ll mc^2$, where m is the rest mass of the particle.

11.61* The particle considered in the preceding problem moves with a uniform velocity through a medium. The particle is in the ground state and the remaining conditions are the same as those in the preceding problem. Show that the emission of radiation may still occur, accompanied by the excitation of the particle. Elucidate the conditions necessary for this behaviour, and find the frequency ω of the emitted radiation.

11.62 It follows from the energy and momentum conservation laws that Cherenkov emission of a single quantum of frequency ω is impossible if the refractive index $n(\omega) \leqslant 1$ (see problem 11.59). In particular, singlequantum Cherenkov emission of sufficiently hard photons is impossible,

since for high frequencies $n(\omega) < 1$. Show that when a fast charged particle of energy $\mathscr{G}_0$ moves uniformly through a medium, two photons may be emitted simultaneously, one of which, with frequency ω_2, may be hard so that $n(\omega_2) \to 1$. Make clear the conditions which the frequency ω_1 of the other photon and the particle velocity v_0 ($\hbar\omega_1 \ll cp_0$) must satisfy in order that such a process is possible (hard Cherenkov emission). What is the highest frequency of the hard quantum?

11.63 Consider the kinematics of the hard Cherenkov emission (see preceding problem), assuming the electron to be ultrarelativistic, $\mathscr{G}_0 \gg mc^2$, and the angle ϑ_2 at which the hard quantum flies off to be small. Determine the maximum value of the energy $(\hbar\omega_2)_{\max}$ of the hard quantum which can be reached in this case; consider characteristic particular cases.

11.64 A crystalline lattice can take up momentum only in discrete amounts $q = 2\pi\hbar g$, where g is a reciprocal lattice vector. In the case of a crystalline lattice with an elementary cell in the form of a rectangular parallelepiped with edgelengths a_1, a_2, a_3, the vectors g are $g = (n_1/a_1, n_2/a_2, n_3/a_3)$, where n_1, n_2, and n_3 are arbitrary integers. Assuming that the crystal, which has a very large mass, cannot take up any energy from a particle, elucidate the nature of the angular distribution of particles scattered by a single crystal.

[0](4) An analogous effect may occur for a neutral particle which has a nonvanishing electric or magnetic moment.

11.65 Using the relation $p_0 = 2\pi\hbar/\lambda_0$ between the momentum p_0 of the particle and the corresponding wavelength λ_0 derive the Bragg condition: $2a \sin \frac{1}{2}\vartheta = n\lambda_0$, where a is the distance between crystal planes and ϑ the scattering angle of the particles.
11.66 Elucidate the nature of the energy spectrum of bremsstrahlung quanta which occur when charged particles are scattered by a single crystal (cf problem 11.64). The angle between the direction of propagation of a bremsstrahlung quantum and the initial momentum of the particle is fixed and small, $\vartheta \ll 1$. The particle is ultrarelativistic, $\varepsilon_0 \gg mc^2$.
11.67 To an observer at the origin of a frame S, the rays from a distant star appear to make an angle ψ with the observer's positive x-axis. A second observer is moving with a velocity v along the x-axis. Find the frequency ν' measured by the second observer, if the frequency measured by the first one is ν.

Find the angle ψ' made by the rays from the star with the x-axis, as reckoned by the second observer.

16.11.2 b The motion of charged particles in an electromagnetic field

The force acting on a particle of charge e, which is moving with a velocity $\boldsymbol{v}$ in an electromagnetic field $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}$, is given by the Lorentz formula

$$\boldsymbol{F} = e\boldsymbol{E} + \frac{e}{c}[\boldsymbol{v} \wedge H] \tag{11.b.1}$$

The change in the kinetic energy of the particle per unit time is given by

$$(\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v}) = e(\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{v}) = \dot{\varepsilon} = \frac{\mathrm{d}\dot{\varepsilon}}{\mathrm{d}t} \tag{11.b.2}$$

where & is the energy of the particle (see section a).
The magnetic field does no work on the particle, since the force associated with it is always perpendicular to the particle velocity. The quantities F and $\mathrm{d}\mathscr{G}/\mathrm{d}t$ may be used to construct the following 4 -vector (the Minkowski force)

$$F_i = \left[\frac{(F \cdot v)}{c\,(1 - v^2/c^2)^{1/2}}, \frac{F}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}}\right] \tag{11.b.3}$$

The 4-force may be expressed in terms of the electromagnetic field tensor: $F_i = (e/c)F_{ik}u_k$, where u_k is the 4 -velocity of the particle and F_{ik} is the field tensor.

The four-dimensional form of the differential equation of motion of a particle is

$$\frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}\tau} = eF_i \quad \text{or} \quad m\frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}\tau} = \frac{e}{c}F_{ik}u_k \tag{11.b.4}$$

On resolving these equations along the space and the time axes, we obtain the equations of motion in the three-dimensional form, and the law of conservation of energy:

$$\dot{\boldsymbol{p}} = e\boldsymbol{E} + \frac{e}{c}[\boldsymbol{v} \wedge H], \quad \dot{T} = e(\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{E}) \tag{11.b.5}$$

where $T = \mathscr{E} - mc^2$ is the kinetic energy of the particle, $\boldsymbol{p}$ is its momentum, m is the rest mass, and the dot over the symbols indicates differentiation with respect to time t. The equations given by (11.b.5) hold for any velocity of the particle.

The relativistic Lagrange function for a charged particle in an electromagnetic field having a potential $\varphi, \boldsymbol{A}$ is of the form

$$L = -mc^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2} - U \tag{11.b.6}$$

In the nonrelativistic case we have

$$L = \frac{1}{2}mv^2 - U \tag{11.b.7}$$

Here

$$U = -\frac{e}{c}(A \cdot \boldsymbol{v}) + e\varphi \tag{11.b.8}$$

The quantity U plays the role of a potential energy of interaction between the particle and the external field. The equations of motion of
the particle may then be written in the Lagrangian form

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \tag{11.b.9}$$

where $q_i, \dot{q}_i$ are the generalised coordinates and velocities.
The current associated with the orbital motion of a point charged particle round a given centre may be characterised by the magnetic moment [5]

$$m = \kappa l \tag{11.b.10}$$

where $\kappa = e/2mc$ is the gyromagnetic ratio, m is the mass of the particle, and $l = [r \wedge mv]$ is the angular momentum. The particle will experience a couple $N = [\boldsymbol{m} \wedge H]$ in an external magnetic field H, and this will produce a change in the angular momentum l which is given by $\mathrm{d}l/\mathrm{d}t = N$. It follows that the rate of change of the magnetic moment is given by

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = \kappa[m \wedge H] \tag{11.b.11}$$

In addition to the angular momentum and the magnetic moment associated with orbital motion, microparticles also exhibit an intrinsic (spin) angular momentum s and a magnetic moment m_0 which are either parallel or antiparallel and are related by

$$m_0 = \kappa_0 s \tag{11.b.12}$$

For an electron $\kappa_0 = e/mc < 0$, where e is the charge on the electron and m its mass. The rate of change of $\boldsymbol{m}_0$ is given by an equation similar in form to equation (11.*b*.11), except that κ is replaced by κ_0 and $\boldsymbol{m}$ by $\boldsymbol{m}_0$.

The neutron is not electrically charged but does, nevertheless, possess a spin magnetic moment $\boldsymbol{m}_0$. According to quantum theory, the direction of this moment in an external magnetic field $H(r)$ can only be parallel or antiparallel to the field, and the initial orientation of the moment is conserved under certain conditions [6]. The motion of neutrons with magnetic moments parallel (or antiparallel) to the field can then be looked upon as the motion of classical particles in a force field with a potential energy

$$U = \mp m_0 H \tag{11.b.13}$$

[5] The classical theory described below can only be applied to microparticles with certain reservations. A rigorous theory of motion of elementary magnetic moments can only be developed on the basis of the quantum theory. We use here κ for the gyromagnetic ratio, since γ is used for $(1 - v^2/c^2)^{-1/2}$. There should be no confusion with the κ used in problems 11.72 and

11.73 .
(6) This will be true if the angle of rotation of the field per unit time in the system in which the neutron is at rest is small compared with the precession frequency $\omega_{\mathrm{L}} = 2m_0H/\hbar$ of the magnetic moment m_0 in the field H (adiabatic approximation).
where $H = |\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})|$. The energy U is usually very small and hence a magnetic field will only have an appreciable effect on the motion of very slow (cold) neutrons.
11.68 Write down the relativistic equation of motion for a particle acted upon by a force F by expressing the momentum explicitly in terms of the velocity $\boldsymbol{v}$. Consider in particular the following cases: (a) the direction of the velocity remains constant, (b) the magnitude of the velocity remains constant, and (c) $v \ll c$.
11.69 Derive the expression relating the force F on a particle in the laboratory system and the force $\boldsymbol{F}'$ in the rest system. Assume that the velocity of the particle $\boldsymbol{v}$ is given.
11.70 A body of rest mass m is stationary relative to a rocket which moves with a relativistic velocity v in a circular orbit of radius R. Find the force F on the body as measured by an observer in the frame in which the body is instantaneously at rest.
11.71 Two charges e and e' move parallel to the x-axis with equal constant velocities $\boldsymbol{v}$. Using the results of problem 10.68, show that the electromagnetic force between the charges may be derived from the so-called convection potential ${}^{(7)}\psi = (1-\beta^2)\, e/R$ where

$$R = \left\{(x_1 - x_2)^2 + \left(1-\beta^2\right)\left[(y_1-y_2)^2 + (z_1-z_2)^2\right]\right\}^{1/2}$$

r_1, r_2 are the position vectors of the two charges, and the force F is given by $F = -e' \operatorname{grad}\psi$. What will happen when $v \to c$?
11.72 Find the convection potential ψ for an infinitely long, uniformly charged, straight conductor. The linear density of charge in the frame in which the conductor is at rest is κ. The conductor moves without rotation at an angle α to its axis with a velocity v (in the laboratory frame).
Consider in particular $\alpha = 0$ and $\alpha = \frac{1}{2}\pi$.
11.73 An infinitely long, uniformly charged, straight line carrying a charge κ per unit length in the frame in which it is at rest moves with a velocity v in the direction parallel to itself. A point charge at a distance r from the line moves with an equal velocity in the direction parallel to the line. Find the electromagnetic force F on the point charge for an arbitrary velocity v.
11.74 The distribution of electrons in a parallel beam is axially symmetric and is characterised by a volume charge density ρ in the reference frame in which the electrons are at rest. The electrons are accelerated by a

potential difference V and the total beam current is J. Find the electromagnetic force F on each of the electrons in the laboratory frame.

Hint. Use the result of the preceding problem.
11.75 Find the spread Δa over a path length L of the electron beam considered in the preceding problem, assuming that it is due to the mutual repulsion between the electrons. Assume that the broadening is small ($\Delta a \ll L$) and that the cross section of the beam is circular with a radius a.
11.76* A particle of charge e and rest mass m moves with an arbitrary velocity in a uniform constant electric field $\boldsymbol{E}$. At the initial instant of time, $t = 0$, the particle was at the origin and had a momentum $\boldsymbol{p}_0$.
Determine the three-dimensional coordinates and the time t of the particle in the laboratory system as functions of its proper time τ. By eliminating τ express the three-dimensional coordinates as functions of t (the problem can also be solved directly by integrating the equations

[0](7) The convection potential of a system of charges moving as a whole is defined as that function of the coordinates which, when differentiated, yields the components of the Lorentz force in the laboratory system per unit test charge moving together with the system of charges.

of motion in the three-dimensional form). Consider in particular the nonrelativistic and the ultrarelativistic limits.

11.77 Find the trajectory of a charged particle of charge e and rest mass m in a uniform constant electric field $\boldsymbol{E}$, by using the results of the preceding problem. Consider in particular the nonrelativistic limit.

11.78 Find the range l of a relativistic charged particle of charge e, rest mass m, and potential energy & in a retarding uniform electric field $\boldsymbol{E}$ which is parallel to the initial velocity of the particle.

11.79* A relativistic particle of charge e and rest mass m moves in a constant uniform magnetic field $\boldsymbol{H}$. At the initial instant of time, $t = 0$, the particle was at the point with position vector r_0 and had a momentum p_0. Determine the law of motion of the particle.

11.80* A nonrelativistic particle of charge e and rest mass m moves in constant crossed electric and magnetic fields $E = (0, E_y, E_z)$ and $\boldsymbol{H} = (0, 0, H)$ respectively. At the initial instant of time, $t = 0$, the particle was at the origin and had a velocity $v = (v_{0x}, 0, v_{0z})$. Determine the functions $x(t), y(t)$, and $z(t)$ and sketch out the possible trajectories of the particle.

Hint. The substitution $u = x + \mathrm{i}y$ will simplify the integration.

11.81 A relativistic particle moves in parallel uniform constant electric and magnetic fields $\boldsymbol{E}$ and $\boldsymbol{H}$ ($\boldsymbol{E} \| \boldsymbol{H} \|_z$). At $t = 0$ the particle was at the origin and had a momentum $\boldsymbol{p}_0 = (p_{0x}, 0, p_{0z})$. Determine the quantities x, y, z, t as functions of the proper time τ of the particle.

11.82 Determine the law of motion of a particle in mutually perpendicular uniform constant electric and magnetic fields $\boldsymbol{E}$ and $\boldsymbol{H}$. Use two methods, namely, (a) the Lorentz formula, with the assumption that the motion of a particle in a purely electric or purely magnetic field is known (see problems 11.76 and 11.79), and (b) integrate equation (11.b.8).

11.83 Find the kinetic energy T of a particle as a function of the proper time τ for the types of motion considered in problems 11.76, 11.81, and 11.82 .

11.84 A particle having a small initial velocity v_0 ($v_0 \ll c$) moves in crossed constant uniform electric and magnetic fields $E = (0, E_y, E_z)$, $H = (0, 0, H), E \ll H$. Determine the law of motion of the particle by using the Lorentz transformation and assuming that its motion in parallel electric and magnetic fields is known (see problem 11.81). Use the results of problem 10.61 and compare with the result of problem 11.80 .

11.85 Determine the law of motion of a particle of charge e and rest mass m in the field of a plane electromagnetic wave $\boldsymbol{E}(t'), H(t')$, where $t' = t - (\boldsymbol{n} \cdot r)/c$ and $\boldsymbol{n}$ is a unit vector in the direction of propagation. Assume that at $t = 0$ the particle was at rest at the origin.

Hint. Note that the proper time τ of the particle is the same as the argument t' of the plane wave.

11.86 A particle of charge e and mass m is moving in the following field of an electromagnetic wave:

$$E = e_x a \cos\theta, \quad B = e_y \frac{a}{c} \cos\theta$$

where $\theta = k(z - ct)$. Find the orbit of the particle, given that at $t = 0$ it was at rest at the origin.

11.87 A nonrelativistic charged particle of charge e and mass m passes through a two-dimensional electrostatic field the potential of which is $\varphi = k(x^2 - y^2)$ where $k =$ constant > 0 (i.e. a strong focusing lens). Assume that at $t = 0$ the particle was at the point (x_0, y_0, z_0) and the initial velocity v_0 was parallel to the z-axis. Determine the motion of the particle.

11.88 Find the differential equation of motion for a relativistic particle in an electromagnetic field, starting from the Lagrange function in terms of cylindrical coordinates.

Hint. In evaluating the time derivative in the Lagrange equations, note that the derivative is taken along the trajectories of the particles, so that r, ϕ, z should be looked upon as functions

of time.

11.89* A potential difference V is maintained between the plates of a cylindrical capacitor whose radii are a and $b(a < b)$. An axially symmetric magnetic field, which is parallel to the axis of the capacitor, is set up between the plates. The inner plate (cathode) emits electrons with zero initial velocity. Find the critical magnetic flux Φ_c at which the electrons will no longer reach the anode.

11.90 A long straight cylindrical cathode of radius a carries a uniformly distributed current J and emits electrons with zero initial velocity. The
cathode is surrounded by a long coaxial anode of radius b which is maintained at a potential V relative to the cathode. Find the minimum potential difference between the cathode and the anode which will ensure that the electrons will reach the anode in spite of the effect of the magnetic field due to the current J.

11.91 An infinitely long straight cylindrical conductor of radius a carries a current J. The surface of the conductor emits electrons whose initial velocity v_0 is parallel to the axis of the conductor. Find the maximum distance b from the axis of the conductor which the electrons can reach.

11.92 Solve problem 11.90 by using the Lorentz transformation from the frame in which there is only one field ($\boldsymbol{E}$ or $\boldsymbol{H}$).

Hint. Use the results of problems 10.64 and 11.91.

11.93* A relativistic particle of charge $-e$ and rest mass m moves in the field of a stationary point charge Ze. Find the equation of the trajectory of the particle. Investigate the possible trajectories when the angular momentum $K > Ze^2/c$.

Hint. Use the law of conservation of energy and the equations obtained in problem 11.88

11.94 Investigate the possible trajectories of the particle considered in the preceding problem if $K \leqslant Ze^2/c$.

11.95* A relativistic particle of charge e and rest mass m moves in the field of a heavy point charge Ze. Find the trajectory of the particle and discuss the solution.

11.96 Show that when a particle moves in an attractive Coulomb field (see problem 11.93) its velocity will tend to c when $r \to 0\,(Ze^2 \geqslant Kc)$.

11.97 Determine the trajectory of the relative motion of nonrelativistic particles of charges e, e', masses m_1, m_2, and energy &. Investigate the solution.

11.98* Find the differential scattering cross section $\sigma(\theta)$ for nonrelativistic particles of charge e in the field of a stationary point charge e'. Assume that the velocity of the particles at a large distance from the scattering centre is v_0.

11.99 Determine the angle θ through which a relativistic particle of charge e, energy $\& > mc^2$, and angular momentum $K > |ee'|/c$ is deflected in the Coulomb field of a heavy stationary charge e' (see problems 11.93 and 11.95).

11.100 A relativistic particle of charge e, rest mass m, and velocity v_0 at large distances is scattered through a small angle by the Coulomb field of a fixed charge e'. Determine the differential scattering cross section $\sigma(\theta)$.

11.101 An electron of charge e and rest mass m travels through the evacuated space above a plane uncharged surface of a dielectric of
permittivity ϵ. Initially the electron moves in a direction parallel to the surface of the dielectric with a velocity v and at a distance a from it. Find the projected distance x from the initial position to the point at which the electron will enter the dielectric.

11.102* While an electron is being accelerated in the betatron, the magnetic field is continuously increasing, giving rise to the induced e.m.f. which accelerates the electron in a stationary orbit. Show that in order to accelerate an electron in an orbit of constant radius, it is necessary that the total magnetic flux cutting the orbit should be twice the flux associated with a magnetic field which is uniform within the orbit and zero along the orbit (the 2 : 1 betatron rule).

11.103* Show that, to within terms of the order of v^2/c^2, the energy of the retarded interaction between two charged particles is of the form

$$U(t) = \frac{e_1 e_2}{R}\left\{1 - \frac{1}{2c^2}\left[(v_1 \cdot v_2) + (v_1 \cdot n)\,(v_2 \cdot n)\right]\right\}$$

where R is the relative position vector of the two particles, $n = R/R$, and v_1, v_2 are the velocities of the particles (this is the so-called Breit formula; an analogous expression is used in an approximate quantum description of the retarded interaction). All the quantities on the right-hand side of the equation are taken at time t.

Hint. Use the expansions for the Linard-Wiechert potentials (see problem 12.36) and retain only those terms which are independent of the accelerations and their derivatives. Carry out a gradient transformation of the potentials in such a way that the scalar potential becomes identical with the Coulomb potential.

11.104 Find an approximate expression for the Lagrange function for two interacting particles, having charges e_1, e_2 and rest masses m_1, m_2, by taking into account the retarding effect to within terms of the order of v^2/c^2.

11.105 A particle having a magnetic moment $\boldsymbol{m}$ and gyromagnetic ratio κ is placed in a uniform magnetic field H. Determine the motion of the magnetic moment of the particle.

11.106 A particle of charge e and mass m and with an intrinsic angular momentum (spin) s and a magnetic moment $m = es/mc$ moves nonrelativistically in an external electrostatic central field $\varphi(r)$. Evaluate the interaction energy U of the spin and the external field in the first nonvanishing approximation in v/c, bearing in mind the Thomas precession of the instantaneously attached frame with an angular velocity

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{T}} = \frac{[\boldsymbol{v} \wedge \dot{\boldsymbol{v}}]}{2c^2}$$

The appearance of the Thomas precession was explained in problem 10.25.

Hint. The rates of change of any vector $\boldsymbol{A}$ in a fixed and in a rotating frame of reference are connected by the relation

$$\left(\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}\right)_{\text{fixed}} = \left(\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}\right)_{\text{rotating}} + [\Omega \wedge A]$$

where Ω is the rotational velocity (see, e.g. ter Haar, 1971).

11.107 Solve the preceding problem, assuming that the particle moves in a potential $V(r)$ which is not electrostatic. There is therefore no magnetic field in the comoving frame of reference.

11.108 A neutron (magnetic moment $\boldsymbol{m}_0$, kinetic energy T) enters a magnetic field defined by $H =$ constant, $x \geqslant 0$, and $H = 0, x < 0$. Under what conditions will the neutron be reflected from the field?

11.109 Investigate the possible trajectories of a neutron (rest mass m, dipole moment $\boldsymbol{m}_0$) in the field of an infinitely long straight conductor carrying a current J.

11.110 A beam of cold neutrons (velocity v_0, magnetic moment $\boldsymbol{m}_0$, rest mass m) is scattered by the magnetic field of an infinitely long straight conductor carrying a current J. Determine the differential scattering length

$$l(\phi) = \left|\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\phi}\right|$$

where $s(\phi)$ is the impact parameter for which the neutron is scattered through an angle ϕ.

Hint. Use the method employed in the solution of problem 11.98.

Emission of electromagnetic waves

16.11.3 a The Hertz vector and the multipole expansion

The problem of the determination of a variable electromagnetic field in a vacuum for a given distribution of charges $\rho(r', t)$ and currents $j(r', t)$ may be solved by evaluating the retarded potentials

$$\varphi(r,t) = \int \frac{\rho(r', t - R/c)}{R} \, \mathrm{d}^3 r' \tag{12.a.1}$$

$$A(r,t) = \frac{1}{c} \int \frac{j(r', t - R/c)}{R} \, \mathrm{d}^3 r' \tag{12.a.2}$$

where $R = |r - r'|$, r is the position vector of the point at which the field is to be determined, r' is the position vector of the field source, and $\mathrm{d}^3 r'$ is a volume element of the field source. These potentials satisfy the d'Alembert equations:

$$\nabla^2 \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -4\pi\rho \tag{12.a.3}$$

$$\nabla^2 A - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} j \tag{12.a.4}$$

and are related by the Lorentz condition

$$\operatorname{div} A + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \tag{12.a.5}$$

The number of unknown functions may be reduced if the potentials $A(r,t)$ and $\varphi(r,t)$, which are related by equation (12.a.5), are replaced by the single vector function $Z(r,t)$ which is known as the Hertz vector, or the polarisation potential, and is related to A and φ by the expressions

$$\varphi = -\operatorname{div} Z \tag{12.a.6}$$

$$A = \frac{1}{c} \frac{\partial Z}{\partial t} \tag{12.a.7}$$

The distribution of charges and currents can then be conveniently described with the aid of a single vector function $P(r', t)$ which is related to ρ and j by the expressions

$$\rho = -\operatorname{div} P \tag{12.a.8}$$

$$\boldsymbol{j} = \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t} \tag{12.a.9}$$

(1) For details of the theory see, for instance, the books by Landau and Lifshitz (1975), Stratton (1941), Jackson (1962), Panofsky and Phillips (1962), Smythe (1950), Pauli (1958), Heitler (1944), and Ginzburg and Syrovatskii (1964).

This definition of $\boldsymbol{P}$ ensures that the continuity condition $\operatorname{div} j + \partial\rho/\partial t = 0$ is satisfied. The quantity $\boldsymbol{P}$ is often referred to as the polarisation (but must not be confused with the polarisation of a dielectric).

The Hertz vector Z satisfies the d'Alembert equation

$$\nabla^2 Z - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 Z}{\partial t^2} = -4\pi P \tag{12.a.10}$$

The vectors E and H are given by

$$E = \operatorname{curl}\operatorname{curl} Z - 4\pi P, \quad H = \frac{1}{c}\frac{\partial \operatorname{curl} Z}{\partial t} \tag{12.a.11}$$

In order to determine the electromagnetic field for given ρ and j with the aid of the Hertz vector, the polarisation vector P must first be determined from equations (12.a.8) and (12.a.9). Owing to the analogy between equations (12.a.3) to (12.a.4) and (12.a.10), the Hertz vector can then be expressed in terms of $\boldsymbol{P}$ in a way similar to that whereby φ and $\boldsymbol{A}$ are expressed in terms of ρ and $\boldsymbol{j}$:

$$Z(r,t) = \int \frac{\boldsymbol{P}\,(r', t - R/c)}{R}\,\mathrm{d}^3 r' \tag{12.a.12}$$

If a system of charges and currents is confined to a finite region, its linear dimensions are of the order of a, and if the wavelengths λ which contribute significantly to the spectral expansions of the potentials are such that

$$\frac{a}{\lambda} \ll 1 \quad \text{and} \quad \frac{a}{r} \ll 1 \tag{12.a.13}$$

then the integrands can be expanded in powers of a/λ and a/r. If one retains only the first term of this expansion then

$$Z(r,t) = \frac{p\,(t')}{r} \tag{12.a.14}$$

where $t' = t - (r/c)$ is the retarded time of the centre of the system. The quantity

$$p\,(t') = \int r'\rho\,(r', t')\,\mathrm{d}^3 r' \tag{12.a.15}$$

is the electric dipole moment of the charge distribution (cf problems 12.20 and 12.21). The corresponding expression for A and φ can then be obtained with the aid of equations (12.a.6) and (12.a.7).

The field at large distances r from the system of charges is of particular interest. In this case we have the following inequality in addition to equations (12.a.13):

$$r' \ll \lambda \ll r. \tag{12.a.16}$$

This defines the so-called wave zone. The field can then be determined by expanding the vector potential in powers of a/λ. To within terms of the order of v^2/c^2, this expansion is of the form

$$A(r,t) = \frac{\dot{\boldsymbol{p}}\,(t')}{cr} + \frac{\ddot{Q}\,(t')}{2c^2 r} + \frac{[\dot{\boldsymbol{m}}\,(t') \wedge n]}{cr} \tag{12.a.17}$$

where $n = r/r$ is a unit vector in the direction of propagation of the electromagnetic waves and where the dots represent differentiation with respect to t'. The magnetic dipole moment is given by

$$m = \frac{1}{2c}\int [r' \wedge j]\,\mathrm{d}^3 r' \tag{12.a.18}$$

and the components of the quadrupole moment are

$$Q_\alpha = \sum_\beta Q_{\alpha\beta} n_\beta, \quad Q_{\alpha\beta} = \int \rho\,(r')\, x'_\alpha x'_\beta \mathrm{d}^3 r' \tag{12.a.19}$$

The form of the dependence of the vector potential in the wave zone on the distance r from the system is a characteristic feature. It ensures (see below) that the energy flux at infinity remains finite. This means that the vector potential describes the emission of electromagnetic energy.

The second and third terms of the vector potential, which represent the electric quadrupole and the magnetic dipole respectively, are smaller by a factor [(2)] of a/λ as compared with the first term (electric dipole) and may be neglected unless there are some special reasons responsible for a large reduction in the first term.

In the wave zone, the field in a sufficiently small region will be of the form of a plane wave travelling away from the source. The corresponding field strengths may be evaluated from the formulae

$$H = \frac{1}{c}[\dot{A} \wedge n], \quad E = [H \wedge n] \tag{12.a.20}$$

The angular distribution of the emitted radiation may be characterised by the amount of energy flowing into a unit solid angle per unit time and this is given by

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{c}{4\pi} H^2 r^2 \tag{12.a.21}$$

The total intensity I is obtained by integrating equation (12.a.21) over all directions.

Using the expansion given by equation (12.a.17), the final expression for the total intensity is given by

$$I = \frac{2}{3c^3}(\ddot{p})^2 + \frac{1}{60c^5}\left[3\sum_{\alpha\beta} \dddot{Q}^2_{\alpha\beta} - \left(\sum_\beta \dddot{Q}_{\beta\beta}\right)^2\right] + \frac{2}{3c^3}(\ddot{m})^2 \tag{12.a.22}$$

[(2)] If the radiating system is a particle moving with velocity v in a bounded region of size a, $a/\lambda \approx v/c$.

12.1 Use a direct substitution to verify that the retarded potentials satisfy the d'Alembert equation and the Lorentz condition.

12.2 Use the results of problem 1.32 to obtain the formula given by equation (12.a.22).

12.3 Write down the equations which are satisfied by the electromagnetic potentials φ and A if the Lorentz condition (12.a.5) is replaced by the condition $\operatorname{div} \boldsymbol{A} = 0$ (this is the so-called Coulomb gauge).

12.4 Prove that the electromagnetic fields are invariant under the gauge transformation

$$A \to A + \nabla\zeta, \quad \varphi \to \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \zeta}{\partial t}$$

where ζ is an arbitrary function.

12.5 Prove that the gauge transformation (see preceding problem) and the Lorentz condition (12.a.5) are Lorentz invariant.

12.6 Let A and φ be the vector and scalar potentials in a frame S corresponding to the Coulomb gauge, so that $\operatorname{div} \boldsymbol{A} = 0$. Find the potentials A' and φ' corresponding to the Coulomb gauge in a frame S' moving with a velocity v with respect to S. Consider the case where the transformation from S to S' can be considered to be an infinitesimal Lorentz transformation [compare an article by France (1976)].

12.7 Consider the case of an electromagnetic wave described by the following potentials in the Coulomb gauge in a frame S:

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_0 \exp[\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}) - \mathrm{i}\omega t], \quad \varphi = 0$$

Find the potential A' in the frame S' moving with a velocity $\boldsymbol{v}$ with respect to S [see preceding problem and of France (1976)]. Consider again the case where the transformation from S to S' can be considered to be an infinitesimal Lorentz transformation.

12.8 Show that when the Lorentz condition is satisfied then, in the wave zone, the scalar potential of a finite radiating system may be expressed in terms of the vector potential by the formula $\varphi = (n \cdot A)$.

12.9 Using the solution of problem 10.79 [equations (10.79.2) and (10.79.3)], find an expression for the loss of angular momentum per unit time, $-\mathrm{d}K/\mathrm{d}t$, by a system radiating as an electric dipole.

12.10 Find the equations for the lines of force of the electric and magnetic fields of a point electric dipole oscillator having a dipole moment $p = p_0 \cos\omega t$. Investigate the change in the field configuration between the wave zone and the region in the immediate neighbourhood of the oscillator.

Hint. If the polar axis lies along $\boldsymbol{p}_0$ then the electromagnetic field of the oscillator is of the form

$$E_r = \frac{2p_0\cos\vartheta}{r^2}\left[\frac{\cos(kr-\omega t)}{r} + k\sin(kr-\omega t)\right]$$

$$E_\vartheta = \frac{p_0\sin\vartheta}{r}\left[\left(\frac{1}{r^2} - k^2\right)\cos(kr-\omega t) + \frac{k}{r}\sin(kr-\omega t)\right]$$

$$E_\phi = H_r = H_\vartheta = 0$$

$$H_\phi = -\frac{p_0 k^2}{r}\cos(kr-\omega t) + \frac{p_0 k}{r^2}\sin(kr-\omega t)$$

12.11 Find the electromagnetic field H, E due to a charge e moving with a uniform velocity on a circle of radius a. Assume that the motion is nonrelativistic, the angular velocity is ω, and the distance to the point of observation r is much greater than the radius a. Find the time average of the angular distribution $\overline{\mathrm{d}I/\mathrm{d}\Omega}$ and of the total intensity $\bar{I}$ of the radiation, and investigate its polarisation.

12.12 Investigate the effect due to interference on the emission of electromagnetic waves by a system of charges in the following situation. Two identical electric charges e move with a uniform velocity at an angular frequency ω on a circular orbit of radius a in such a way that they remain at the opposite ends of a diameter. Find the polarisation, the angular distribution $\overline{\mathrm{d}//\mathrm{d}\Omega}$, and the intensity $\bar{I}$ of the radiation. What will be the effect of the removal of one of these charges? (cf the solution of the preceding problem).

12.13 How should the position of the particles in the preceding problem be adjusted on the circle in order that the intensities of the electric dipole and quadrupole radiations should be equal?

12.14 Two electric dipole oscillators vibrate with the same frequency ω but their phases differ by $\frac{1}{2}\pi$. The amplitudes of the dipole moments are both equal to p_0 and are at an angle φ to each other. Assuming that the distance between the oscillators is small compared with the wavelength, find the field H in the wave zone, the average angular distribution $\overline{\mathrm{d}//\mathrm{d}\Omega}$, and the average total intensity $\bar{I}$ of the emitted radiation.

12.15 Investigate the polarisation of the radiation field due to the oscillator system considered in the preceding problem, using the method employed in the solution of problem 8.1

12.16* Find the time average of the energy flux $\bar{\gamma}$ at large distances from the charge considered

in problem 12.11, retaining terms of the order of r^{-3}. Find the couple N on a totally absorbing spherical screen of large radius with the charge at its centre.

12.17 A uniformly magnetised sphere of radius a and magnetisation M rotates with a constant angular velocity ω about an axis passing through the centre of the sphere and making an angle φ with the direction of $\boldsymbol{M}$. Find the electromagnetic field E, H and investigate the polarisation of the field. Determine the average angular distribution $\overline{\mathrm{d}/\!/\mathrm{d}\Omega}$ and total intensity $\vec{I}$ of the radiation.

12.18 A uniformly charged drop pulsates with its density remaining constant. The surface of the drop is described by

$$R(\vartheta) = R_0\,[1 + aP_2(\cos\vartheta)\cos\omega t]$$

where $a \ll 1$. The total charge on the drop is q. Find the average angular distribution $\overline{\mathrm{d}I/\mathrm{d}\Omega}$ and total intensity $\bar{I}$ of the radiation emitted.

12.19 An electric charge q is arranged in a continuous spherically symmetric distribution in a bounded region and executes radial pulsations. Find the electromagnetic field E, H outside the charge distribution.

12.20 Find expressions for the electric dipole Z_p, electric quadrupole Z_Q, and magnetic dipole Z_m terms in the expansion for the Hertz vector, which hold for an arbitrary dependence of the charges and currents on time at distances $r \gg a$ and $\lambda \gg a$ (the condition $r \gg \lambda$ need not be satisfied).

12.21 Find, in vector form, expressions for the electromagnetic field strengths due to electric and magnetic dipole oscillators at distances which are large compared with their dimensions.

Hint. When differentiating with respect to r, note that the moments p and $\boldsymbol{m}$ should be taken at the retarded time $t' = t - (r/c)$ and are, therefore, functions of r.

12.22 Find the angular distribution $\overline{\mathrm{d}/\!/\mathrm{d}\Omega}$ and the total intensity $\bar{I}$ of the radiation from the open resonators considered (a) in problem 9.23; (b) in problem 9.24

12.23 Two identical electric dipole moments lie along a given straight line and oscillate in antiphase with a frequency ω and amplitude $\boldsymbol{p}_0$. The distance between the centres a is such that $\lambda \gg a$. Find the electromagnetic field at distances $r \gg a$. Find also the average angular distribution $\overline{\mathrm{d}/\mathrm{d}\Omega}$ of the radiation and its total intensity $\bar{I}$.

12.24* A standing current wave of amplitude J_0 and frequency ω is excited in a linear antenna of length l with nodes at the ends. The number of current half waves in the antenna is m. Find the average angular distribution $\overline{\mathrm{d}I/\mathrm{d}\Omega}$ of the emitted radiation.

12.25 Find the total radiation intensity $\bar{I}$ and the radiation resistance $R = 2\bar{I}/J_0^2$ of the antenna considered in the preceding problem.

Hint. The result can be expressed in terms of the integral cosine

$$\mathrm{Ci}(x) = C + \ln x + \int_0^x \frac{\cos t - 1}{t}\,\mathrm{d}t$$

where $C = 0.577$ is the Euler constant.

12.26 A travelling current wave $J = J_0 \exp[\mathrm{i}(k\xi - \omega t)]$ propagates in a linear antenna of length l, where $k = \omega/c$ and ξ is the coordinate of a point on the antenna. The loads at the ends of the antenna are chosen so that there are no reflected waves. Find the average angular distribution $\mathrm{d}I/\mathrm{d}\Omega$ and the total intensity $\bar{I}$ of the radiation.

12.27* A standing current wave of the form $J = J_0 \exp(-i\omega t)\sin n\phi'$ is excited in a circular wire loop of radius a. Find the electromagnetic field $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}$ in the wave zone.

12.28* The centres of two electric dipole oscillators of frequency ω and equal amplitudes $p_0 \| x$ lie on the z-axis at equal distances from the origin and distances $a = \frac{1}{4}\lambda$ from each other. The phase difference between the oscillators is $\frac{1}{2}\pi$. Find the average angular distribution $\overline{\mathrm{d}/\!/\mathrm{d}\Omega}$ of

the radiation.

12.29 A system of charges B having a charge density $\rho(r,t)$ and current density $j(r,t)$ is reflected in the $z=0$ plane in such a way that (a) each point $r=(x,y,z)$ transforms into $r'=(x,y,-z)$, and (b) the charge density changes sign so that $\rho(r,t)=-\rho'(r',t)$, with ρ' the charge density in the reflected system B'. Find the law of transformation on reflection of the current density $j(r,t)$ and the electric (p,Q) and magnetic (m) moments of the system, and also the electromagnetic field E,H.

12.30 Show that the electromagnetic field due to an arbitrary system of charges B, placed near a perfectly conducting plane, may be obtained as a superposition of the fields due to B and a system B' reflected in this plane (see preceding problem). Consider in particular the radiation emitted by an electric dipole oscillator having a moment $p(t)=p_0 f(t)$, where $|\boldsymbol{p}_0|=1$, $f(t)$ is an arbitrary function, and the dipole is at a distance $b \ll \lambda$ from the plane, and is at an angle $\varphi_0=$ constant to it. Use the electric-dipole approximation.

12.31 An electric dipole oscillates with a frequency ω and an amplitude $\boldsymbol{p}_0$. It is placed at a distance of $\frac{1}{2}a$ from a perfectly conducting plane where $a \ll \lambda$ and p_0 is parallel to the plane. Find the electromagnetic field $\boldsymbol{E},\boldsymbol{H}$ at distances $r \gg \lambda$ and the average angular distribution $\overline{\mathrm{d}/\!/\mathrm{d}\Omega}$ of the emitted radiation.

12.32 Show that if a function $u(r,\vartheta,\phi)$ satisfies the Helmholtz equation $\nabla^2 u+k^2u=0$, then the Hertz potential for a monochromatic electric wave ($H_r=0$) of frequency $\omega=kc$ in a source-free space is of the form

$$Z = ur + \operatorname{grad}\chi$$

where $\chi=k^{-2}\partial(ru)/\partial r$. Find also the components of the electromagnetic field $\boldsymbol{E},\boldsymbol{H}$ along the axes of a spherical system of coordinates in terms of $u(r,\vartheta,\phi)$ (the function u is known as the Debye potential).

Hint. In showing that $\nabla^2 Z+k^2Z=0$, note that $\nabla^2\chi+k^2\chi+2u=0$.

12.33 Show that the field due to a bound electric dipole oscillator placed at the point $r_0\,(r_0\|p_0)$ and having a moment $p_0\exp(-i\omega t)$ may be described by a Debye potential (see preceding problem) which is of the form

$$u=\frac{p_0}{r_0 R}\exp(\mathrm{i}kR)$$

where $R=r-r_0$.

Hint. The Hertz vector $Z=ur+\operatorname{grad}\chi$ corresponding to the potential u differs from the expression $(p_0/R)\exp(\mathrm{i}kR)$ [see equation (12.a.14)] but leads to the same expressions for the fields $\boldsymbol{E},\boldsymbol{H}$.

12.34 An electric dipole oscillator placed at a distance b from the centre of a perfectly conducting sphere of radius a has a dipole moment $p_0\exp(-\mathrm{i}\omega t)$. The dipole lies along the line joining it to the centre of the sphere. By using the Debye potential u (see problem 12.32), find the electromagnetic field E,H and the average angular distribution $\overline{\mathrm{d}/\!/\mathrm{d}\Omega}$.

16.11.4 b The electromagnetic field of a moving point charge

A point charge e moving with a velocity $v\,(t')$, whose position vector at time t' is $r_0\,(t')$, will give rise to an electromagnetic field whose potentials at a time t at a point having a position vector r are given by the LinardWiechert formulae

$$\varphi(r,t)=\left.\frac{e}{R[1-(R\cdot v)/c]}\right|_{t'},\quad A(r,t)=\left.\frac{ev}{c[R-(R\cdot v)/c]}\right|_{t'} \tag{12.b.1}$$

where $R=r-r_0$. The retarded time t' is defined by

$$c\,(t-t') = |R| \tag{12.b.2}$$

The field strengths derived from the Lienard-Wiechert potentials are

$$\begin{aligned} E(r,t) &= e\frac{(1-\beta^2)\,(n-v/c)}{[1-(n\cdot v)/c]^3R^2} + \left.\frac{e[n\wedge[(n-v/c)\wedge\dot{v}]]}{c^2[1-(n\cdot v)/c]^3R}\right|_{t'} \\ H &= [n\wedge E]|_{t'} \end{aligned} \tag{12.b.3}$$

where

$$\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{R}}{R}, \quad \beta = \frac{v}{c}$$

The first term in the expression for E and the corresponding term of H describe a field which falls off as R^{-2} (quasi-stationary field) and moves together with the charge. The second term in E and the corresponding term in H describe a field which falls off as R^{-1} (radiation field). The
energy flux associated with the latter field is independent of R. This means that the radiation field is not rigidly attached to the charge responsible for it. At large distances from the charge, i.e. in the wave zone, the quasi-stationary field is negligible compared with the radiation field. As can be seen from equation (12.b.3), the condition that the radiation field should appear is that the acceleration should be nonvanishing ($\dot{v} \neq 0$).

The intensity of radiation in the direction $n = R/R$ in the wave zone is given by

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}I_n(t)}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{c}{4\pi}E^2(t)R^2 = \frac{e^2}{4\pi c^3}\Bigg[&\frac{2(n\cdot v)(v\cdot\dot{v})}{c[1-(n\cdot v)/c]^5} \\ &+\frac{\dot{v}^2}{[1-(n\cdot v)/c]^4} - \frac{(1-v^2/c^2)\,(n\cdot\dot{v})^2}{[1-(n\cdot v)/c]^6}\Bigg] \end{aligned} \tag{12.b.4}$$

If the velocity, v, of the charge is small compared with the velocity of light, then the radiation field can be expanded into a multipole expansion and can be calculated with the aid of equations (12.a.17) to (12.a.22).

As a result of the emission of radiation, the accelerated particle loses energy and momentum which are transferred to the electromagnetic field. The loss of the i th component of the 4 -vector of energy-momentum of the particle $p_i = (\text{Å}/c, \boldsymbol{p})$ per unit proper time τ may be expressed in terms of the 4 -velocity u_i and the 4 -acceleration w_i of the particles and is given by

$$-\frac{\mathrm{d}p_i}{\mathrm{d}\tau} = -\frac{2e^2}{3c^3}w_k^2u_i \tag{12.b.5}$$

The energy lost by the particle per unit time in the laboratory system, i.e. the rate of loss of energy $\mathrm{d}\&/\mathrm{d}t'$, differs from equation (12.b.5) by the factor $\gamma = (1-v^2/c^2)^{-1/2}$, since $\mathrm{d}t' = \gamma\mathrm{d}\tau$. The total intensity of the radiation as determined with the aid of equation (12.b.4) is not in its turn identical to the rate of loss of energy (see problems 12.41 to 12.47).

The vector potential $\boldsymbol{A}\,(\boldsymbol{R}_0, t)$ due to a charge executing a periodic motion in a closed orbit $r = r_0\,(t')$ with a period $2\pi/\omega_0$ may be expanded into a Fourier series:

$$A\,(R_0,t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} A_l \exp\,(-\mathrm{i}\omega_0 lt)$$

At large distances from the orbit, the Fourier component A_l is given by

$$A_l = e\frac{\exp(\mathrm{i}kR_0)}{cR_0T}\oint \exp\left\{\mathrm{i}\left[l\omega_0 t' - (k\cdot r_0(t'))\right]\right\} v(t')\,\mathrm{d}t' \tag{12.b.6}$$

where

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}, \quad k = \frac{l\omega_0}{c}n$$

The integral in the above expression may be evaluated over the whole trajectory of the charge.

Charged particles which experience a collision move with a finite acceleration and, therefore, emit electromagnetic energy. The law of motion of the colliding particles, and hence the radiation emitted on collision, depends on the form of the interaction and the impact parameter, s (if the potential energy of the interaction between the two particles is a function of the distance between them only). The energy emitted in all directions when a beam of particles is scattered can be conveniently characterised by the total emission

$$\kappa = 2\pi\int_0^\infty \Delta W(s)s\;\mathrm{d}s \tag{12.b.7}$$

where $\Delta W(s)$ is the energy emitted in a single collision between two particles and s is the corresponding impact parameter.

The angular distribution of the radiation may be characterised by the differential emission $\mathrm{d}\kappa_n$ which is defined by

$$\frac{\mathrm{d}\kappa_n}{\mathrm{d}\Omega} = 2\pi\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\left[\Delta W_n(s)\right]}{\mathrm{d}\Omega}s\;\mathrm{d}s \tag{12.b.8}$$

where $\mathrm{d}\left[\Delta W_n(s)\right]/\mathrm{d}\Omega$ is the energy emitted per unit solid angle in the direction n for a single collision of two particles with an impact parameter s, which is averaged with respect to the azimuth in the plane perpendicular to the particle beam. There is an analogous formula for the differential emission per unit frequency interval $\mathrm{d}\kappa_\omega/\mathrm{d}\omega$. When dipole radiation predominates, equation (12.b.8) becomes

$$\frac{\mathrm{d}\kappa_n}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{1}{4\pi c^3}\left[A + BP_2(\cos\vartheta)\right] \tag{12.b.9}$$

where $P_2(\cos\vartheta) = \frac{3}{2}\cos^2\vartheta - \frac{1}{2}$ is a Legendre polynomial (see appendix 2), ϑ is the polar angle between the direction n of the radiation and the direction of the particle beam, and the quantities A and B are given by

$$A = \frac{2}{3}\int_0^\infty 2\pi s\;\mathrm{d}s\int_{-\infty}^{+\infty}\ddot{\boldsymbol{p}}^2\;\mathrm{d}t, \quad B = \frac{1}{3}\int_0^\infty 2\pi s\;\mathrm{d}s\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\ddot{\boldsymbol{p}}^2 - 3\ddot{p}_z^2\right)\mathrm{d}t \tag{12.b.10}$$

The low frequency spectrum of the radiation emitted during a collision occupying a time interval τ may be found from ($\omega\tau \ll 1$)

$$\frac{\mathrm{d}\Delta W_\omega}{\mathrm{d}\omega} = \frac{2}{3\pi c^3}\left[\sum e\left(\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1\right)^2\right] \tag{12.b.11}$$

where the sum is evaluated over all the colliding particles and v_1, v_2 are the velocities of the particles before and after the collision ($v_1, v_2 \ll c$).

12.35* Derive the Linard-Wiechert potentials [see equation (12.b.1)] from the general formulae for the retarded potentials.

Hint. The charge distribution in a point particle may be characterised by a volume charge density $\rho(r', t) = e\delta[r' - r_0(t)]$ where $r_0(t)$ is the position vector of the particle at time t and e is its charge. In evaluating the volume integral with respect to $\mathrm{d}^3r' = \mathrm{d}x'\mathrm{d}y'\mathrm{d}z'$, it will be necessary to use the new variable $R_1 = r' - r_0$.

12.36* Find the expansion for the Linard-Wiechert potentials in powers of R/c by expanding the general expressions for the retarded potentials (12.a.1) and (12.a.2) in powers of $1/c$.

12.37 Derive the potentials due to a uniformly moving point charge from the Linard-Wiechert potentials by expressing the retarded time t' in the latter in terms of the time t of observation of the field (cf problems 10.68 and 12.90).

12.38 Find the field strengths due to a uniformly moving point charge by making use of the general formulae (12.b.3). Express the field in terms of the time of observation, t, by eliminating the retarded time t' (see problem 10.68).

12.39 A charge e moves with a small velocity v and acceleration $\dot{v}$ in a bounded region. Find approximate expressions for the electromagnetic field E, H due to the particle at a point whose distance from the particle is large compared with the linear dimensions of the region within which the particle is moving. Determine the position of the boundary between the quasi-stationary zone and the wave zone.

12.40 Determine the angular distribution $\mathrm{d}/\mathrm{d}\Omega$ and the total intensity I of the radiation emitted by the charge considered in the preceding problem.

12.41* Express the energy lost by radiation per unit solid angle by a particle, $-\mathrm{d}\varepsilon/\mathrm{d}t'\mathrm{d}\Omega$, in terms of the intensity (flux) $\mathrm{d}//\mathrm{d}\Omega$ in a given direction given by the Poynting vector. Solve the problem (a) analytically, by considering the relation between the retarded time, t', and the time of observation, t, and (b) geometrically, by considering the form of the region of space within which the electromagnetic energy emitted by the particle in a time $\mathrm{d}t'$ is localised.

12.42 Show that if a particle executes a periodic motion, then the average rate of energy loss per period is equal to the average intensity of the radiation.

12.43 Prove equation (12.b.4).

12.44 Find the total rate of emission of energy in all directions, $-\mathrm{d}\&/\mathrm{d}t'$, by a charged particle, and express it in terms of (a) the velocity $v(t')$ and acceleration $\dot{\boldsymbol{v}}(t')$, and (b) the velocity $\boldsymbol{v}(t')$ and the external field $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}$ producing the acceleration of the particle. Assume that the mass, m, and the charge, e, of the particle are given.

12.45 Express the rate of loss of momentum $-\mathrm{d}p/\mathrm{d}t'$ by a radiating charged particle in terms of the total rate of loss of energy.

12.46 A radiating particle is observed from two reference systems which experience uniform relative motion. Compare the total rates of energy loss in the two systems.

12.47 The velocity $\boldsymbol{v}$ of a relativistic particle at a retarded time t' is parallel to its acceleration $\dot{v}$. Find the instantaneous angular distribution, $\mathrm{d}//\mathrm{d}\Omega$, of the emitted radiation, the total instantaneous intensity, I, and the total rate of emission of energy, $-\mathrm{d}\&/\mathrm{d}t'$. What is the nature of the angular distribution of the radiation in the ultrarelativistic case?

12.48 The velocity of a particle decreases from v_0 to zero in a time interval τ. Find the angular distribution of the radiation emitted during this time interval, assuming that the deceleration is constant. Determine the length of the pulse Δt as recorded by stationary instruments.

12.49 A relativistic particle of charge e, rest mass m, and momentum p moves in a circular orbit in a constant uniform magnetic field H. The radius of the orbit is $a = cp/eH$. Find the total rate of loss of energy by the particle, $-\mathrm{d}\&/\mathrm{d}t'$.

12.50 An ultrarelativistic electron moves in a uniform magnetic field of field strength $\boldsymbol{H}$ along a helix. Its velocity $\boldsymbol{v}$ makes an angle θ with the vector H. Find the energy loss per unit time of the electron, $-\mathrm{d}\varepsilon/\mathrm{d}t'$. Find also the radiative energy flux I through a fixed sphere of large

radius which encloses the electron.
12.51 Find the instantaneous angular distribution $\mathrm{d}/\!/\mathrm{d}\Omega$ of the intensity of radiation emitted by a relativistic particle whose velocity at the retarded time t' is perpendicular to its acceleration. Sketch out the polar diagram for $v \ll c$ and $v \sim c$. Determine the directions in which the radiation intensity is zero.
12.52 A particle of charge e and rest mass m moves with a velocity v on a circular orbit in a constant uniform magnetic field $\boldsymbol{H}$. Find the average angular distribution of the intensity of the emitted radiation $\mathrm{d}/\mathrm{d}\Omega$. Investigate the ultrarelativistic case $v \sim c$.

Hint. Use the results of the preceding problem. Transform to polar coordinates with the origin at the centre of the circular trajectory and the polar axis parallel to H. When evaluating the integral over the azimuthal angle use equations (3.428) from Gradshteyn and Ryzhik (1965).
12.53* Find the Fourier components A_n, H_n of the radiation field due to a charge e moving on a circular orbit of radius a with a relativistic velocity v. Investigate the polarisation of the Fourier components.

Hint. Use equations (A3.11) and (A3.9) of appendix 3.
12.54 Explain the presence of higher harmonics in the spectrum of the field radiated by a charge moving with a constant velocity in a circular orbit (see preceding problem). What will be the change in the intensity of these harmonics when $\beta = v/c \to 0$? What will then be the form of the radiation field?
12.55* A charge e moves on a circular orbit of radius a with a velocity $v = \beta c$. Find the spectral expansion of the intensity of the radiation emitted in a given direction, $\mathrm{d}I_n/\mathrm{d}\Omega$.
12.56* N electrons move simultaneously on a given circular orbit (see problem 12.53). Consider the effect of the interference between the fields produced by these electrons on the intensity of the nth Fourier component of the emitted radiation. Consider the following special cases: (a) the distribution of the electrons over the circular orbit is random, (b) the electrons are uniformly distributed and lie at angular distances $2\pi/N$ from each other, and (c) the electrons are arranged in a bunch whose dimensions are small compared with the radius of the orbit (the result will then depend on the ratio of the wavelength to the dimensions of the bunch).
12.57* Two particles which have charges e_1, e_2 and masses m_1, m_2 $(e_1/m_1 \neq e_2/m_2)$ execute elliptical motion (see problem 11.97). Find the time average of the total intensity of the radiation emitted by them.
12.58 Find the average rate of loss of angular momentum $\mathrm{d}K/\mathrm{d}t$ of a system of two particles executing an elliptical motion (see preceding problem).

Hint. A general formula for the change in the angular momentum was obtained in the solution of problem 12.9 .
12.59* Find the effective differential emission $\mathrm{d}\kappa_n/\mathrm{d}\Omega$ for the scattering of a beam of particles with charges e_1, masses m_1, and velocities v_0 by a charged particle of charge e_2 (of the same sign as e_1) and mass m_2.

Hint. In evaluating the integrals for A and B given by equation (12.b.9) replace the integration with respect to t by integration with respect to r where $\mathrm{d}t = \mathrm{d}r/\dot{r}, \dot{r} = v_0\,[1 - (2a/r) - (s/r)^2]^{1/2}$ .s is the impact parameter, and $2a$ is the minimum distance of approach of the two particles (this distance is reached when $s = 0$). Integrate first with respect to s and then with respect to r. In evaluating B, it will be necessary to use the equation for the trajectory of the relative motion, and this will be found in the solution of problem 11.97.
12.60* A particle of charge e_1 and mass m is scattered by another particle of charge e_2 and mass much greater than m. The impact parameter is s and the kinetic energy of the incident particle is large compared with the potential energy of interaction e_1e_2/r. The velocity v of the incident particle may, therefore, be looked upon as constant during the entire event and need not be small compared with the velocity of

light. Find the angular distribution of the total emission $\mathrm{d}\Delta W_n/\mathrm{d}\Omega$ and consider in particular the case $\beta = v/c \ll 1$.

Hint. Use the general formula for the angular distribution of total radiation [equation (12.b.4)]. The acceleration of the particle $\dot{v}$ should be expressed in terms of the Coulomb force acting upon it and also the velocity v, using the formulae $v = c^2 p/\&$ and $\dot{\boldsymbol{p}} = e_1 e_2 r/r^3$.

12.61 Determine the total loss of energy ΔW and momentum Δp by the particle during the collision considered in the preceding problem. Obtain these quantities both by direct integration of the angular distribution found in the preceding problem, and by using the formulae obtained in the solution of problems 12.44 and 12.45 .

12.62* A particle of charge e_1 and rest mass m collides with a heavy particle of charge e_2. The impact parameter s is large, so that the kinetic energy of the particle during the motion is large compared with its potential energy, and its velocity is much less than the velocity of light. Find the spectrum of the radiation emitted by the particle, $\mathrm{d}\Delta W_\omega/\mathrm{d}\omega$.

Hint. Use equation (A3.15) of appendix 3.

12.63 A beam of particles each of charge e and velocity $v \ll c$ is scattered by a perfectly hard sphere of radius a. Find the emission $\mathrm{d}\kappa_\omega$ in the frequency range $\mathrm{d}\omega$. Also determine the total emission κ.

12.64* A beam of particles having charges e_1 and masses m_1 is scattered by a particle of charge e_2 and mass m_2 $(e_1/m_1 = e_2/m_2)$. Express the differential emission $\mathrm{d}\kappa_n/\mathrm{d}\Omega$ in terms of the components $Q_{\alpha\beta}$ of the quadrupole moment of the system. Give the result in a form analogous to equations (12.b.9) and (12.b.10).

12.65* Find the total emission κ for a beam of charged particles (charge e, rest mass m, velocity v_0) scattered by an identical particle.

16.11.5 c Interaction of charged particles with radiation

A radiating system of particles, transmitting energy and momentum to the radiation field, experiences a reaction due to this field. If the radiation is of the electric dipole type, then each particle of charge e experiences a radiative deceleration (radiative friction) and the corresponding force is given by

$$f = \frac{2e}{3c^3}\ddot{p} \tag{12.c.1}$$

where $\boldsymbol{p}$ is the electric dipole moment of the system. For a single charge having a velocity $v \ll c$

$$f = \frac{2e^2}{3c^3}\ddot{y} \tag{12.c.2}$$

In the ultrarelativistic case when $v \approx c$ the radiative friction is of the form

$$f_x = -\frac{2e^4}{3\left(mc^2\right)^4}\left[\left(E_y - H_z\right)^2 + \left(E_z + H_y\right)^2\right]\&^2 \tag{12.c.3}$$

where the x-axis is taken in the direction of the velocity of the particle, $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}$ are the components of the external field in which the particle is moving, and $\& = mc^2/\left(1 - v^2/c^2\right)^{1/2}$ is the energy of the particle.

The radiative friction as given by equations (12.c.1) to (12.c.3) is only approximate. The concept of radiative friction can only be used if the corresponding force is small compared with other forces acting on the particle in its rest system. This condition is satisfied for a particle of charge e and mass m, moving in a given electromagnetic field E, H, provided

$$\lambda \gg r_0 \tag{12.c.4}$$

$$H \ll \frac{m^2c^4}{e^3} = \frac{e}{r_0^2} \tag{12.c.5}$$

where λ is the wavelength of the radiation emitted by the particle and $r_0 = e^2/mc^2 = 2.8 \times 10^{-15}$ m is the classical radius of the electron. These conditions indicate that classical electrodynamics gives rise to internal contradictions at small distances (large frequencies) and in strong fields. It should, however, be noted that owing to quantum effects, classical electrodynamics ceases to hold even before these internal contradictions become important. This occurs at distances of the order of $\lambda_0 = \hbar/mc = 137r_0$ and in fields $H \sim e/\lambda_0 r_0 = m^2c^4/137e^3$.

An electromagnetic wave incident on a system of charges will give rise to an acceleration of these charges. As a result, the system becomes a source of secondary waves and scatters the incident radiation. The process of scattering may be characterised by the differential and total scattering cross sections which were defined in section b of chapter 8.

The electromagnetic field due to a moving charged particle possesses energy, momentum, and therefore mass (electromagnetic mass of the particle). The problem of the electromagnetic mass of elementary particles cannot be resolved on the basis of classical electrodynamics. However, the classical theory gives a satisfactory descriptive account of the idea of the electromagnetic mass, and problems 12.66 to 12.69 will illustrate the fundamentals of this theory and also the associated difficulties.

12.66* Find the momentum of the electromagnetic field due to a particle of charge e moving with a uniform velocity $\boldsymbol{v}$. The particle may be looked upon as a solid sphere of radius r_0 in its own rest system S' (in the system in which the velocity of the particle is v Lorentz contraction will occur). Introduce the electromagnetic rest mass m_0 of the particle, which is related to its field energy at rest by the Einstein relation, and discuss the difficulties which arise in this connection.

12.67 Find the energy W_m of the magnetic field and the total electromagnetic energy W of the particle considered in the preceding problem.

12.68* Find the force F which a charged, spherically symmetric particle exerts on itself when it undergoes an accelerated, translational motion at a low velocity $v \ll c$. Retarded effects and the Lorentz contraction may be neglected.

Hint. Calculate the resultant force on small elements of charge de of the particle, using the Linard-Wiechert expression for the field strength (12.b.3).

12.69* Find the correct expression for the self-force F on a charged, spherically symmetric particle (see preceding problem). In deriving this expression, allow for the finite velocity of propagation of the interaction by including terms which are linear in the time of propagation of the interaction between the elements of the particle $(t' - t)$. Consider in particular the limiting case of a point particle. Estimate the contribution due to higher-order terms in this limiting situation.

12.70 Calculate the lifetime T which characterises the Rutherford model of the hydrogen atom, assuming that the electron in the atom moves and radiates as a classical particle. Assume that the electron moves towards the proton in a quasi-circular spiral, so that at each instant it radiates as if it were moving on a circular orbit, i.e. assume that the radius of the orbit is a slow function of time. Investigate the conditions under which this approximation is satisfactory. (Initial radius a of the atom may be taken to be 5×10^{-11} m.)

12.71 A relativistic particle of charge e and rest mass m moves on a circular orbit in a constant, uniform, magnetic field H, and loses energy by the emission of radiation. Find the energy $\&(t)$ of the particle and the radius $r(t)$ of its orbit as a function of time, assuming that at time $t = 0$ the energy is $\mathscr{E}_0$ (compare the preceding problem).

12.72 An electron is accelerated in a betatron and travels on an orbit of constant radius a. The induced electric field responsible for the acceleration is due to an alternating magnetic field of frequency ω. Find

the critical energy of the electron $\mathcal{E}_{cr}$ at which the energy lost by the emission of radiation is equal to the energy communicated to the electron by the induced electric field.

12.73* A particle of charge e and rest mass m is attracted towards a fixed point with a force $-m\omega_0^2 r$. Free oscillations commence in this harmonic oscillator at a time $t = 0$. Find the damping law of the oscillations by assuming that the radiative reaction is small. Determine the form of the spectrum of the oscillator and the width of a spectral line (natural width). Find the relation between the uncertainty in the energy $\hbar\omega$ of the emitted photons and the lifetime of the oscillator.

12.74 A gas consists of atoms of mass m. Owing to the thermal motion of the atoms and the Doppler effect, an observer at rest relative to the container will record a frequency which is different from the frequency ω_0 of the radiation emitted by these atoms at rest. Neglect the natural line width and find the form $\mathrm{d}I_\omega/\mathrm{d}\omega$ of the spectrum emitted by the gas at a temperature T.

Hint. The velocity distribution of the atoms may be assumed to be Maxwellian, i.e. given by

$$\frac{\mathrm{d}N}{N} = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) \mathrm{d}v_x\ \mathrm{d}v_y\ \mathrm{d}v_z$$

where $\mathrm{d}N/N$ is the fraction of molecules whose velocity v lies within the range $\mathrm{d}v_x\ \mathrm{d}v_y\ \mathrm{d}v_z$ and k is the Boltzmann constant (1.38×10^{-23} J K^{-1}). Since the velocity of the molecules is much smaller than the velocity of light, all terms of order higher than v/c may be neglected in the formula for the Doppler frequency change (see problem 10.32).

12.75 An emitting atom, which may be described by the harmonic oscillator model, is in translational motion in a gas. As a result of collisions with other atoms, there are discontinuous changes in its oscillations. The probability that the atom will not undergo a collision between time τ and $\tau + \mathrm{d}\tau$ is given by $\mathrm{d}W(\tau) = \frac{1}{2}\Gamma \exp\left(-\frac{1}{2}\Gamma_\tau\right) \mathrm{d}\tau$, so that the average time between collisions is $\bar{\tau} = 2/\Gamma$. Neglecting the natural line width, find the form of the spectrum emitted by the oscillator, $\mathrm{d}I_\omega/\mathrm{d}\omega$.

12.76* A group of waves of total intensity $S = \int_0^\infty S_\omega \mathrm{d}\omega$ (S is the total amount of energy passing through a unit area) is incident on a three-dimensional isotropic oscillator. The spectral width of the group is large compared with the natural width of a spectral line of the oscillator, γ, and the velocity of the electron is much smaller than the velocity of light. Find the energy absorbed by the oscillator from the wave group, taking into account the braking radiation (bremsstrahlung). What will be the effect on your result of the polarisation and the direction of propagation of the waves making up the group?

12.77 Find the total amount of energy ΔW absorbed by a one-dimensional oscillator of frequency ω_0 from a group of waves of spectral density S_ω in the following three cases: (a) a linearly polarised plane group of waves in which the $\boldsymbol{E}$ vector is at an angle ϑ to the axis of the oscillator, (b) an unpolarised plane group of waves travelling at an angle θ to the oscillator axis, and (c) an isotropic radiation field (plane waves with any polarisation and direction of propagation are incident on the oscillator with equal probability).

12.78* A linearly polarised wave is incident on an isotropic harmonic oscillator. Assuming that the velocity of the electron is much less than

the velocity of light, find the differential and total scattering cross sections, $\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}\Omega$ and σ taking into account the radiative friction force. Consider in particular the cases of weakly and strongly bound electrons.

12.79 A plane, circularly polarised, electromagnetic wave is scattered by a free charge. Determine the scattered field H and investigate its polarisation. Find also the differential and total scattering cross sections, $\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}\Omega$ and σ.
12.80 An unpolarised plane wave is scattered by a free charge. Find the degree of depolarisation ρ of the scattered wave as a function of the scattering angle ϑ.
12.81* A linearly polarised wave is scattered by a free charge, which moves with a relativistic velocity v in the direction of propagation of the wave. Find the differential scattering cross section. Consider also the scattering of an unpolarised wave.

Hint. Use equation (12.b.4) and express $\dot{\boldsymbol{v}}$ in terms of $\boldsymbol{E}$ and $\boldsymbol{H}$.
12.82* An isotropic, harmonic oscillator of frequency ω_0, charge e, and mass m is placed in a weak, uniform, constant magnetic field $\boldsymbol{H}$.
Determine the motion of the oscillator, and investigate the polarisation of the radiation emitted by it. Note that this harmonic oscillator is a model of an atom in an external, magnetic field, and hence the solution of the problem will be equivalent to the classical theory of the Zeeman effect.
d Expansion of an electromagnetic field in terms of plane waves An electromagnetic field is a function of the two independent variables r and t. In many instances it is convenient to use the Fourier expansion for the field. The following expansions are frequently employed.
(1) Expansion in terms of monochromatic waves:

$$f(r,t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_\omega(r) \exp(-\mathrm{i}\omega t)\mathrm{d}\omega \tag{12.d.1}$$

$$f_\omega(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(r,t) \exp(\mathrm{i}\omega t)\mathrm{d}t \tag{12.d.1'}$$

(2) Expansion in terms of plane waves:

$$f(r,t) = \int f_k(t) \exp[\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})]\mathrm{d}^3\boldsymbol{k} \tag{12.d.2}$$

$$f_k(t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int f(r,t) \exp[-\mathrm{i}(k\cdot r)]\mathrm{d}^3 r \tag{12.d.2'}$$

where

$$\mathrm{d}^3k \equiv \mathrm{d}k_x\ \mathrm{d}k_y\ \mathrm{d}k_z$$

(3) Expansion in terms of plane monochromatic waves:

$$f(r,t) = \int_{k\omega} f_{k\omega} \exp[\mathrm{i}(k\cdot r) - \mathrm{i}\omega t]\mathrm{d}^3k\ \mathrm{d}\omega \tag{12.d.3}$$

$$f_{k\omega} = \frac{1}{(2\pi)^4} \int f(r,t) \exp[-\mathrm{i}(k\cdot r) + \mathrm{i}\omega t]\mathrm{d}^3 r\ \mathrm{d}t$$

It follows from Maxwell's equations that the frequency ω is a function of the wavevector k. The equation $\omega = \omega(k)$ is known as the dispersion relation. Since the field components $f(r,t)$ are real, we have

$$f_\omega = f^*_{-\omega}, \quad f_k = f^*_{-k}, \quad f_{k\omega} = f^*_{-k,-\omega} \tag{12.d.4}$$

Equations (12.d.2) and (12.d.3) describe the field in all space. It follows that the integrals in these formulae are to be evaluated over all values of the wavevectors, and over all space.

Equations (A1.14) and (A1.15) of appendix 1 are very useful in connection with the Hourier expansions. In particular, equation (A1.15) and equation (12.d.4) may be used to show that

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)\mathrm{d}t = 4\pi \int_0^{\infty} |f_\omega|^2 \ \mathrm{d}\omega$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(r,t)\mathrm{d}r = (2\pi)^3 \iiint |f_k|^2 \ \mathrm{d}^3k \tag{12.d.5}$$

The expansion into plane monochromatic waves is of major importance in quantum electrodynamics where each of these waves is identified with a photon, i.e. with a particle moving with the velocity of light. The energy & and the momentum $\boldsymbol{p}$ of photons are related to the frequency ω and the wavevector k by the formulae

$$= \hbar\omega, \quad p = \hbar k \tag{12.d.6}$$

12.83 Prove equations (12.d.5).

12.84 Find the relation between the Fourier components of the fields $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}$ and the potentials A, φ (consider all three forms of the Fourier expansion).

12.85 Write down Maxwell's equations for the Fourier components for the three forms of Fourier expansion considered above. Assume that the whole of space is filled by a homogeneous isotropic dispersive medium with permittivity $\epsilon(\omega)$ and magnetic permeability $\mu(\omega)$.

12.86 Write down the d'Alembert equations and the Lorentz condition for the Fourier components of the potentials $A(r,t)$ and $\varphi(r,t)$. Consider all three forms of Fourier expansion and assume that all space is filled with a homogeneous isotropic medium with parameters $\epsilon(\omega)$ and $\mu(\omega)$.

12.87* Find the plane-wave expansion for the potential φ of the Coulomb field due to a fixed point charge.

12.88 Find the plane-wave expansion for the electric field E due to a point charge e.

12.89 A point charge moves with a velocity $v =$ constant in vacuo. Expand the potentials $\varphi, \boldsymbol{A}$ and the fields $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}$ into plane monochromatic waves.

12.90* Find the potentials $\varphi(r,t), A(r,t)$ due to a point charge in uniform motion (see the solution of problem 10.68), by using the planewave expansions for these potentials obtained in the preceding problem.

Hint. In order to evaluate the integral with respect to k carry out the substitution $k_x \to k_x\left[1-(v^2/c^2)\right]^{-1/2}, k_y \to k_y, k_z \to k_z$. Assume that the x-axis is parallel to the direction of the velocity and use the plane-wave expansion for the field of a fixed point charge (see problem 12.87).

12.91* A neutral point system of charges moves in vacuo with a uniform velocity $\boldsymbol{v}$. Find the electromagnetic field potentials $\varphi(r,t), A(r,t)$ by using the Fourier expansion in terms of plane monochromatic waves and assuming that the electric and magnetic dipole moments of the system in the laboratory frame are given.

Hint. The electric charge density and the current density of the system are given by

$$\boldsymbol{j} = c\,\mathrm{curl}[\boldsymbol{m}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{v}t)] + \frac{\partial}{\partial t}[\boldsymbol{p}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{v}t)]$$

$$\rho = -\,\mathrm{div}[\boldsymbol{p}\delta(r-\boldsymbol{v}t)]$$

12.92 Find the potentials of the field due to a uniformly moving magnetic dipole having a moment m_0 in its own rest system (a) for $\boldsymbol{m}_0 \| \boldsymbol{v}$ and (b) for $\boldsymbol{m}_0 \perp \boldsymbol{v}$.

Hint. Use the transformation formulae of problem 10.73.

12.93 Find the field due to a uniformly moving electric dipole of moment p_0 in its own rest system, using the results of problem 12.91 (see the solution of problem 10.71).

12.94 Show that the plane-wave components of the Fourier expansion of an irrotational vector are parallel to k (longitudinal), while the Fourier components of a solenoidal vector are perpendicular to k (transverse).

12.95* Find the equations which are satisfied in vacuo by the irrotational and solenoidal parts of the electromagnetic field vectors E and H. Show that the irrotational part of the electric field $E_{\|}(r,t)$ represents the instantaneous (unretarded) Coulomb field determined by the charge distribution at the same instant of time for which $\boldsymbol{E}_{\|}$is defined.

12.96* Find the plane-wave expansion for the vector potential $A(r,t)$ in vacuo when $\rho = 0, j = 0 \quad (\varphi = 0)$. The field occupies all space. Write
down the Fourier amplitudes of these waves in the form

$$A_{k\lambda}(t) = \frac{c}{\pi\sqrt{2}} q_{k\lambda}(t) e_{k\lambda}$$

where $e_{k\lambda}$ is a unit vector which characterises the direction of polarisation of the given transverse wave, so that $(k \cdot e_{k\lambda}) = 0$ (see the beginning of section a, chapter 8). In this representation there will be two independent polarisation unit vectors ($\lambda = 1, 2$) for each k. The unit vectors e_{k_1} and e_{k_2} are orthogonal, i.e. $\left(e_{k_1} \cdot e^*_{k_2}\right) = \left(e^*_{k_1} \cdot e_{k_2}\right) = 0$. Find the equations which are satisfied by the complex 'coordinates' $q_{k\lambda}(t)$. Express the fields $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}$, the energy $\boldsymbol{W}$, and the momentum $\boldsymbol{G}$ of the field in terms of $q_{k\lambda}$ and $\dot{q}_{k\lambda}$.

12.97* Using the results of the preceding problem, express the field vectors $A, \boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}$ in terms of the real oscillator coordinates

$$Q_{k\lambda} = a_{k\lambda} \exp(-\mathrm{i}\omega t) + a^*_{k\lambda} \exp(\mathrm{i}\omega t)$$

Find also the energy W and the momentum G of the field in terms of these coordinates.

12.98* The electromagnetic radiation field may be described in terms of the oscillator coordinates $q_{k\lambda}$ (see problem 12.96). Write down the differential equations for the interaction between the field and a charged, nonrelativistic particle.

12.99* Find the rate of change in the energy of a radiation field $\mathrm{d}W/\mathrm{d}t$ due to the interaction of a particle with the field. Express the rate of change in terms of the oscillator coordinates $q_{k\lambda}$ and the forces $F_{k\lambda}(t)$ (see the solution of the preceding problem).

12.100* A particle of charge e executes a simple harmonic oscillation $r = r_0 \sin \omega_0 t$, where $r_0 =$ constant. Use the field oscillator method (see problem 12.98) to find the angular distribution and the total intensity I of the emitted radiation [(3)].

12.101 A particle of charge e moves with a constant angular velocity ω_0 on a circle of radius a_0. Using the field oscillator method (see problem 12.98), investigate the polarisation of the radiation emitted by the particle, and hence find the angular distribution and the total intensity of the radiation (cf problem 12.11).

12.102* A linearly polarised wave of frequency ω is incident on a harmonic oscillator whose frequency is ω_0. Using the field oscillator method, find the differential and total scattering cross sections, $\mathrm{d}\sigma/\mathrm{d}\Omega$

[(3)] The problem can, of course, be solved in a much simpler way (see section a of this chapter). The method suggested in the problem is closely related to that employed in the solution of the analogous problem in quantum electrodynamics.

and σ (neglect radiative friction). Investigate the polarisation of the scattered radiation.

12.103 Find by the field oscillator method the differential and total scattering cross sections,

$d\sigma/d\Omega$ and σ, for linearly polarised, circularly polarised, and unpolarised monochromatic waves scattered by a free charge (cf problems 12.78 and 12.79).

12.104 A free charge scatters (a) an unpolarised wave of frequency ω, and (b) a circularly polarised wave. Investigate the polarisation of the radiated field, using the field oscillator method (see problems 12.78 and 12.79).

The radiation emitted during the interaction of charged particles with matter

In this chapter we shall use the methods of classical macroscopic electrodynamics to discuss energy losses by fast particles in matter.

The macroscopic theory does not take into account the spatial dispersion of the permittivity and magnetic permeability, and may be used whenever the medium may be looked upon as continuous, i.e. when the incident particle interacts simultaneously with a large number of atoms. This means that the macroscopic equations may be used to determine the energy communicated to those electrons in the medium which are at sufficiently large distances r from the trajectory, so that $r \gg a$, where a is of the order of the interatomic distance. In condensed media, the quantity a is of the order of the linear dimensions of the atom ($\sim 10^{-10}$ m).

The velocity of the particle v should satisfy the condition $v \gg v_{\text{at}}$, where v_{at} is the average velocity of the atomic electrons. At lower velocities, the particle will transmit its energy mainly to electrons near its trajectory, where the macroscopic equations do not hold.

Energy losses due to ionisation and excitation of atoms in the medium are referred to as ionisation losses. For a particle moving through a plasma, a considerable proportion of the energy lost is used in the excitation of oscillations of the electron gas as a whole (longitudinal plasma waves; see problem 8.45).

The medium is also found to have an important effect on the emission of transverse electromagnetic waves by moving particles. Thus, if the velocity of a charged particle in a nonabsorbing dielectric exceeds the ambient phase velocity of light, then Cherenkov radiation will be produced. The theory of this effect was given by Tamm and Frank.

The electromagnetic field produced in a medium by a moving particle may be determined from Maxwell's equations. The charge and current densities for these equations may conveniently be written in the form $\rho = e\delta\,[r - r_0(t)]$ and $j = e\dot{r}_0\delta\,[r - r_0(t)]$, where e is the charge of the particle and $r_0(t)$ is its position vector. The integration of Maxwell's equations for a dispersive medium is carried out by expanding the required quantities (field vectors) in terms of Fourier integrals with respect to the coordinates and time. A system of algebraic equations is then obtained for the Fourier components (see, for example, problem 13.1).

In order to find the energy of the Cherenkov radiation emitted per unit length of the trajectory of a particle, it is necessary to determine the electromagnetic field due to this particle in the medium, and to compute the energy flux through a cylindrical surface of unit length and infinite

radius surrounding the trajectory of the particle. The time integral of this energy flux will give the total energy emitted by the particle per unit path length in the form of electromagnetic waves. If the radius a of the cylindrical surface is finite, then the time integral of the energy flux will include not only the Cherenkov radiation, but also the energy communicated to electrons at distances $r > a$ from the trajectory of the particle.

13.1* A particle of charge e moves with a constant velocity through a homogeneous isotropic medium of permittivity $\epsilon(\omega)$ and magnetic permeability $\mu = 1$. Determine the components of the electromagnetic field due to this particle.

13.2* A particle moves with a constant velocity $v = \beta c$ in a nonabsorbing dielectric. With

[0](1) For details of the theory see, for instance, the books by Landau and Lifshitz (1960) or Ginzburg and Syrovatskii (1964) or the paper by Fermi (1940).

the aid of the results of the preceding problem, investigate the field due to this particle at a large distance from its trajectory. Show that a sufficiently fast particle will emit transverse electromagnetic waves (Cherenkov effect). Find the conditions under which this radiation will be emitted, and the total Cherenkov loss, w_{Ch}, per unit path length.

13.3 A particle of charge e moves with a constant velocity through a medium whose permittivity is given by the approximate formula

$$\epsilon(\omega) = 1 + \frac{\omega_{\mathrm{p}}^2}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Determine the Cherenkov energy emitted per unit path length when the particle velocity satisfies the condition $v^2\epsilon_0 > c^2$, where ϵ_0 is the static permittivity. Find the range of angles within which the radiation is concentrated. Obtain a numerical estimate, assuming that

$$\omega_0 = 6 \times 10^{15}\ \mathrm{s}^{-1}, \quad \epsilon_0 = 2, \quad v = c$$

13.4 Derive the condition $\cos\theta = (\beta n)^{-1}$, giving the direction of propagation of the Cherenkov radiation, by considering the interference between waves emitted by the particle at various points along its trajectory.

13.5 The Cherenkov radiation emitted by a particle may be looked upon as the result of a resonance between eigenoscillations in the medium and an impressed force associated with the moving particle. Find the condition for the appearance of the Cherenkov effect by comparing the frequencies of the eigenoscillations of the medium and those of the exciting force.

13.6 A relativistic particle of velocity v passes through a dielectric plate of thickness l in a direction at right angles to its plane. The refractive index of the plate is n and dispersion may be neglected. Find the length τ of the burst of Cherenkov radiation which an observer fixed with
respect to the plate will register. Determine the energy flux I of Cherenkov radiation through the surface of the plate during the burst. Neglect edge effects.

13.7 Show that the minimum velocity $v_{\min}$ of a particle at which the Cherenkov effect becomes possible in a particular direction, satisfies the condition

$$v_{\min}\cos\theta = v_{\mathrm{g}}\,(\omega_m)$$

where v_{g} is the group velocity of electromagnetic waves in the dielectric, ω_m is the frequency at which the refractive index has a maximum, and θ is the angle between the direction of emission and the velocity of the particle. The dielectric may be regarded as nonabsorbing.

13.8* A particle moves with a constant velocity $v = \beta c$ in a nondispersive medium which has a permittivity ϵ and magnetic permeability μ. Determine the electromagnetic potentials φ and $\boldsymbol{A}$. Consider the two situations $v < v_{\mathrm{ph}}$ and $v > v_{\mathrm{ph}}$, where v_{ph} is the phase velocity of electromagnetic waves in the medium under investigation.

13.9 A straight-line conductor lying along the x-axis is displaced along the y-axis with a constant velocity v in a nonabsorbing medium of permittivity $\epsilon(\omega)$ and magnetic permeability $\mu(\omega)$. The conductor is electrically neutral in the laboratory frame, and carries a current J in the direction of the x-axis [(2)]. Find the condition for the emission of Cherenkov radiation. Determine the total energy, w_{Ch}, of this radiation per unit path length, and find the retarding force f acting per unit length of the conductor due to the field produced by it.

Hint. The vector potential has the single component $A_x(y, z, t)$. When performing the inverse Fourier transformation use the method of going round the poles that was used in the preceding problem.

13.10 Two point charges e_1 and e_2 move with equal constant velocities v along the same straight line, but at a distance l (measured in the laboratory frame) from each other. Assuming that

the motion takes place in a medium of permittivity $\epsilon(\omega)$ and magnetic permeability $\mu = 1$, find the energy of the Cherenkov radiation, w_{Ch}, emitted per unit path length. Consider the cases $e_1 = e_2 = e$, and $e_1 = -e_2 = e$. By passing to the limit, find the Cherenkov energy losses for a point electric dipole lying along the direction of motion.

13.11* Two point charges, $+e$ and $-e$, separated by a constant distance l, move with a constant velocity v in a medium of permittivity $\epsilon(\omega)$ and permeability $\mu = 1$. The line joining the charges is at an angle α to the direction of motion (l and α are measured in the laboratory system).

Use the method employed in the preceding problem to find the Cherenkov energy, w_{Ch}, emitted per unit path length when l is very small.

13.12* A magnetic dipole moves with a constant velocity $v = \beta c$ in a nonabsorbing medium which has a permittivity $\epsilon(\omega)$ and permeability $\mu(\omega)$. The magnetic moment measured in the laboratory system is m and is parallel to the direction of the velocity. Determine the Cherenkov energy losses per unit path length, w_{Ch}.

Hint. Use the Fourier transformation to integrate the equations for the potentials. A moving magnetic dipole gives rise to a current $j(r,t) = c\,\mathrm{curl}\, m\delta(r - vt)$

13.13* A fast particle of charge e moves through a nonabsorbing dielectric of permittivity

$$\epsilon(\omega) = 1 + \frac{\omega_{\mathrm{p}}^2}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

where $\omega_{\mathrm{p}}^2 = 4\pi e^2 N/m$. Determine the energy lost per unit path length at distances from the particle trajectory which are greater than the interatomic distance a. The parameter a should be chosen so that the macroscopic equations will hold in the region $r > a$. Explain the physical significance of the various terms in the expression for the energy loss.

13.14* A charged particle of velocity $v = \beta c$ moves through a plasma of permittivity (see problem 6.16)

$$\epsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$$

where $\omega_{\mathrm{p}}^2 = 4\pi e^2 N/m$. Find the energy losses per unit path length due to distant collisions, i.e. collisions for which $r > a$, where a is the distance at which the macroscopic equations begin to hold.

13.15* A point charge e moves in vacuo in a direction perpendicular to the boundary of a perfect conductor. Determine the spectral and the angular distribution of the radiation emitted when the charge enters the conductor. The acceleration of the charge due to its interaction with the image induced in the conductor may be neglected. The velocity of the charge is $v = \beta c$.

Hint. The field in the vacuum is due to the charge and its image moving towards each other with equal constant velocities. When the particle reaches the boundary of the conductor, its charge is instantaneously screened by the free electrons in the conductor, and this is equivalent to a sudden deceleration of the charge and its image at the same point, i.e. on the boundary of the conductor.

13.16* A point charge e has a velocity $v = \beta c$ and moves in a vacuum in a direction perpendicular to the boundary of a nonabsorbing dielectric of permittivity $\epsilon(\omega)(\mu = 1)$. Neglecting the acceleration of the charge
due to image forces, determine the spectral and angular distribution of the radiation emitted into the vacuum ($z > 0$ in figure 13.16.1) when the particle enters the dielectric.

Hint. The charge and current densities produced by the moving particle should be replaced by the equivalent set of harmonic oscillators. In order to determine the field in the wave zone, use the reciprocity theorem $(\boldsymbol{p}_{\mathrm{B}} \cdot \boldsymbol{E}_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})) = (\boldsymbol{p}_{\mathrm{A}} \cdot \boldsymbol{E}_{\mathrm{B}}(\mathrm{A}))$, where $\boldsymbol{E}_{\mathrm{B}}(\mathrm{A})$ is the field produced

[0](2) Fast-moving, current-carrying particle beams may occur in accelerators or in certain forms of discharges.

at the point A by the harmonic dipole oscillator $\boldsymbol{p}_{\mathrm{B}}$ at B, and $\boldsymbol{E}_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})$ is the field produced at B by the oscillator p_{A} at A . Fresnel's formulae may be used to calculate $E_A(B)$, since the point of observation A is at a large distance from the point at which the charge enters the dielectric (wavezone approximation).

16.12 Plasma physics

16.12.1 a The motion of separate particles in a plasma

Electrical and magnetic fields very strongly affect the motion of charged particles in a plasma. They are produced by the electrons and ions of the plasma and also by external sources. If there are few collisions between the particles in the plasma, during time intervals much shorter than the time between collisions each separate particle moves under the influence of the macroscopic fields $\boldsymbol{E}$ and H which exist in the plasma and their motion is described by the equations of motion from mechanics, (11.a.1) and (11.b.9). In the case of inhomogeneous and variable fields the integration of the exact equations is, as a rule, a complicated mathematical problem.

The picture of the particle motion can be appreciably simplified if the magnetic field is strong and varies slowly in space and time, while the electrical field is weak [see inequalities (14.a.6) to (14.a.6")]. In that case one can take the action of the electrical field and also the spatial and temporal inhomogeneities of the magnetic field into account, with the use of perturbation theory. The motion of the particles proceeds as follows: at each moment in time the particle is rotating quickly about the direction of the magnetic field lines with the cyclotron frequency ceH/&, where e is the particle charge and & is its energy. The centre around which the particle moves (guiding centre) travels along the magnetic field line and is also slowly displaced at right angles to it under the influence of the electrical field and the inhomogeneities in the magnetic field. Moreover, the transverse and longitudinal momenta of the particle change their absolute magnitude slowly.

The approximation corresponding to this picture of the particle motion is called the guiding-centre or drift approximation, and the motion of the guiding centre at right angles to the magnetic field lines is called drift. The equations in the drift approximation can be derived by averaging the exact equations of motion over the fast rotation of the particles around the magnetic field line, using inequalities (14.a.6) to (14.a. 6″). The set of drift equations has the form

$$\dot{r} = v_{\parallel}\boldsymbol{h} + \frac{c}{H^2}[\boldsymbol{E} \wedge H] + \frac{1}{2}v_{\perp}R_{\perp}\left[\boldsymbol{h} \wedge \frac{\nabla H}{H}\right] + v_{\parallel}R_{\parallel}[\boldsymbol{h} \wedge (\boldsymbol{h}\cdot\nabla)\boldsymbol{h}] \tag{14.a.1}$$

$$\dot{p}_{\parallel} = +\frac{1}{2}p_{\perp}v_{\perp}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{h} + e(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{h}) \tag{14.a.2}$$

$$\dot{p}_{\perp} = -\frac{1}{2}p_{\parallel}v_{\perp}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{h} \tag{14.a.3}$$

(1) For more details about the theory we refer to the books by Jackson (1962), Longmire (1963), Northrop (1963), Alfvn and Flthammer (1963), Thompson (1962), van Kampen and Felderhof (1967), Akhiezer et al (1975), and the series edited by Leontovich (1965 - 1970).

Here $p_{\parallel}$is the component of the particle momentum along the magnetic field $H, p_{\perp}$ is the absolute magnitude of the momentum component at right angles to the magnetic field $H, h = H/H$, the unit vector in the direction of the magnetic field,

$$R_\perp = \frac{cp_\perp}{eH}, \quad R_\parallel = \frac{cp_\parallel}{eH}, \quad v_\perp = \frac{p_\perp}{m}, \quad v_\parallel = \frac{p_\parallel}{m}$$
$$m = m_0 \left(1 - \frac{v_\perp^2 + v_\parallel^2}{c^2}\right)^{-1/2}$$

m_0 and e are the particle rest mass and charge. All field strengths on the right-hand sides of equations (14.a.1) to (14.a.3) are taken at the position of the guiding centre, and $\dot{r}$ is the guiding-centre velocity.

The first term on the right-hand side of equation (14.a.1), $v_\parallel h$, describes the motion of the guiding centre along the magnetic field line, the second term describes the transverse motion under the action of the electrical field (electrical drift). The third and fourth terms give, respectively, the transverse drift due to the change in the magnetic field in magnitude and direction. If there are not only electrical and magnetic fields acting on the particle, but also a nonelectromagnetic force F, one must add a term $c[\boldsymbol{F} \wedge H]/eH^2$ to the right-hand side of equation (14.a.1) and a term $(\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{h})$ to the right-hand side of equation (14.a.2).

Equations (14.a.2) and (14.a.3) allow us to find the change in the total particle energy with time:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(mc^2\right) = e(\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{h})\boldsymbol{v}_\parallel \tag{14.a.4}$$

From these equations it also follows that

$$\frac{p_\perp^2}{H} = \text{ constant} \tag{14.a.5}$$

i.e. the quantity $I = p_\perp^2/H$ is an integral of motion. However, it is not an exact, but an approximate integral of motion, occurring because the electrical field is small and the magnetic field changes slowly. Such approximate integrals of motion are called adiabatic invariants.

Equations (14.a.1) to (14.a.3) are approximate equations of motion of the particle which are valid for slow spatial changes of E and H:

$$\left|R_\parallel \frac{\partial H}{\partial x}\right| \ll H, \quad \left|R_\perp \frac{\partial H}{\partial x}\right| \ll H, \quad \left|R_\parallel \frac{\partial E}{\partial x}\right| \ll E, \quad \left|R_\perp \frac{\partial E}{\partial x}\right| \ll E \tag{14.a.6}$$

where the coordinate x may be in any direction. Moreover, there is the condition that the electrical field is small:

$$\frac{cE}{H} \ll v$$

and the condition that the electrical and magnetic fields change slowly with time:

$$\omega \ll \frac{ceH}{\&}$$

where ω is a frequency, which is characteristic for the change in the field.

14.1 A uniform magnetic field H and an arbitrarily oriented force F act upon a nonrelativistic particle of charge e and mass m. Show that the component of the force F which is at right angles to H causes a uniform motion (drift) of the particle with a constant velocity

$$v_\mathrm{d} = \frac{c}{eH^2}[F \wedge H]$$

at right angles to the magnetic field lines.

Explain the occurrence of the drift qualitatively by considering the particle trajectory and the

forces acting on the particle at different points of the trajectory.

14.2 Show by direct calculation that the quantity $p_\perp^2/H$ is an adiabatic invariant [(2)] for the case of a magnetic field $H(t)$ which is uniform and constant in direction, but which has an absolute magnitude that varies slowly. To do this, evaluate the electrical field and integrate the equation describing the change in the transverse particle momentum $p_\perp$ with time, assuming that during a single cyclotron period the particle trajectory can be considered to be a circle coinciding with the electrical field lines.

14.3 A system of identical noninteracting particles is in a uniform magnetic field H and has an isotropic momentum distribution. All particles have the same energy $\mathscr{E}_0$. Afterwards the magnetic field increases adiabatically to a magnitude nH. Find the angular distribution $\mathrm{d}w(\vartheta)$ and the average square of the particle energy $\overline{\varepsilon^2}$ in the final state.

14.4* Let a magnetic field which is constant in direction vary weakly in space as far as its absolute magnitude is concerned. Show that this nonuniformity of the field in first approximation leads to a particle drift at right angles to the field with a velocity

$$v_\mathrm{d} = \frac{v_\perp R_\perp}{2H^2}[H \wedge \nabla H]$$

where $v_\perp$ is the absolute magnitude of the particle velocity component at right angles to the direction of the field, and $R_\perp = cp_\perp/eH$ is the particle Larmor radius [cf the general formula (14.a.1)].

14.5 Use the fact that the quantity $I = p_\perp^2/H$ is invariant to prove that in the drift approximation the magnetic flux through the orbit of the

[(2)] For a discussion of adiabatic invariants see Northrop (1963) or ter Haar (1971).

cyclotron rotation of the particle as well as the magnetic moment of a nonrelativistic particle that is produced by its cyclotron rotation are conserved. What are the additional conditions necessary for the magnetic moment of a relativistic particle to be conserved?

14.6 A particle moves in a weakly nonuniform constant magnetic field. By using the fact that the quantity $I = p_1^2/H$ is invariant and the energy conservation law, show that in the drift approximation a force F acts upon the particle in the direction of the magnetic field lines, and find the magnitude of that force. Express it in terms of the magnetic moment of the cyclotron rotation of the particle.

14.7 Between the regions I and II, in which the static magnetic field is uniform and equal to H, there is a region III in which the field is larger ('magnetic mirror'). The maximum value of the field is H_m, and the shape of the field lines is shown schematically in figure 14.7.1. A particle moves in the region I with a momentum $\boldsymbol{p}$ which at a certain instant makes an angle ϑ with the field lines. Assuming the change in the field to be slow, find the relation between ϑ, H, and H_m for which the particle will be reflected from the strong field region.

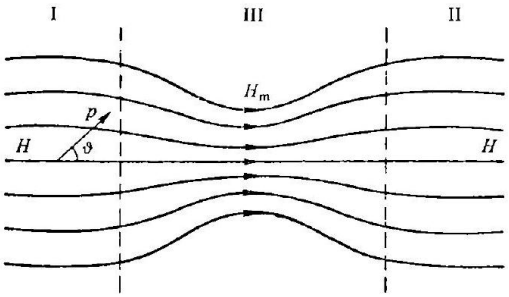


Figure 14.7.1.

14.8 The magnetic field structure in an adiabatic trap with an axially symmetric field has the shape shown schematically in figure 14.18.1.

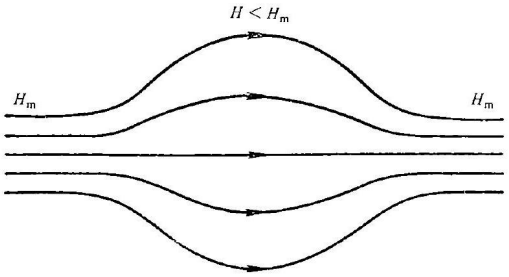


Figure 14.8.1.

A batch of particles is injected into the central part of the trap where the field strength is H; the velocity distribution of the particles is isotropic. What fraction of the particles will be retained in the trap after a long time?

14.9 In the trap with an axially symmetric field, as shown in figure 14.8.1, a set of particles is captured. The particles spend most of their time in the central part of the trap where the field is almost uniform. Let the field in the trap increase slowly with time in such a way that the shape of the magnetic lines of force do not change. Determine the change in the distance of the guiding centre of each of the particles from the axis of the trap.

14.10 In a uniform magnetic field of strength H there is a fixed point charge q. A particle of charge e and mass m, which at infinity has a longitudinal velocity component equal to $v_\parallel$, is scattered by the charge q. Assume that the drift approximation is applicable and neglect the change in the longitudinal velocity in the scattering process; find along which line of force the guiding centre of the particle will move after the scattering. Before the scattering it moves along the field line, the equation of which is $r = l, \phi = 0$, in a cylindrical system of coordinates with the z-axis going through the charge q and in the direction of the field.

14.11 The Earth's magnetic field is approximately the field of a point dipole with magnetic moment $\mu = 8.1 \times 10^{15}$ T m^3. A proton with energy $\mathcal{E} = 50$MeV is at a certain time in the plane of the magnetic equator at a distance of two Earth radii from the centre of the Earth and moves at right angles to the magnetic lines of force. Find the motion of the guiding centre of the proton in the drift approximation. After what time T has it turned completely around the Earth's sphere? What is the Larmor radius R of the proton? The Earth's radius is $r_* = 6380$ km, and its mass $M = 6 \times 10^{24}$ kg.

14.12* A proton is in the plane of the geomagnetic equator (see preceding problem) at a distance r from the centre of the Earth and its momentum makes an angle α with the direction of the magnetic field lines.

(a) Neglecting the gravitational field show that the guiding centre of the proton will not only move along the magnetic lines of force, but will also undergo an azimuthal drift. Find the angular drift velocity ω_d, and express it in terms of r and the geomagnetic latitude λ.

(b) Give the value λ_m corresponding to the points where the particles are reflected in the Earth's magnetic field.

(c) Find the conditions under which the proton can reach the surface of the Earth.

14.13 A bounded stationary beam of identical nonrelativistic particles of mass m, charge e, and with velocities v is incident upon a fixed particle of charge e' (figure 14.13.1). The particle density in the beam is n. Evaluate

the force acting upon the fixed particle, neglecting the interactions between the incident particles. Elucidate the reason why this force becomes infinite as the beam radius $s_m \to \infty$. Is the force still infinite if e' is one of the charges in a neutral plasma?

Hint. Use the results of problem 11.98.

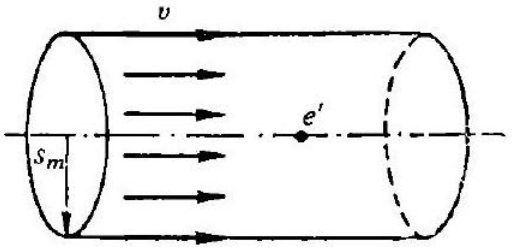


Figure 14.13.1.

14.14 A 'test' particle of charge e and mass m moves with a velocity v in a gas consisting of identical charged particles. Their mass is m', their charge is e', their density is n', and their velocity distribution function is $f(v)$ $\left[\int f(v)\mathrm{d}^3\boldsymbol{v} = n'\right]$. Write down an expression for the average force $\bar{F}(v)$ acting on the 'test' particle.

Hint. Use the result obtained in the solution to the preceding problem. Neglect the velocity dependence of the Coulomb logarithm.

14.15 A test particle of charge e and mass m moves in a medium consisting of randomly distributed, fixed, infinitely heavy, identical particles of charge e' and density n. What is the change with time in energy and momentum of the test particle owing to the effect of the average force exerted by the medium?

14.16 The particles in a medium have velocities which have the same absolute magnitude v_0 and which are distributed with spherical symmetry; their charge and mass are e and m respectively. Evaluate the average force $\bar{F}$ acting on a test particle of charge e' and mass m' moving with a velocity v.

14.17 Solve the preceding problem for the case where the particles in the medium move with velocities v_0 which all have the same magnitude and direction.

14.18* The electrons in a plasma show random thermal motion and have, as well as this, an organised velocity component which occurs due to the action of a uniform electrical field E produced by an external source. Give an order-of-magnitude estimate of the dependence of the average friction force $\bar{F}$ on the ordered velocity $\boldsymbol{u}$, assuming that the friction is caused by collisions with fixed ions. Show that $\bar{F}$ as function of $\boldsymbol{u}$ has a maximum and estimate the magnitude of $\bar{F}_{\max}$. How will the electron gas behave under the action of an electrical field E when $E < \vec{F}_{\max}/e$ and when $E > \bar{F}_{\max}/e$?

16.12.2 b Collective motions in a plasma

A plasma, i.e. an ionised gas or a conducting liquid, consists of free charges. When one applies electrical and magnetic fields to such a system, macroscopic motion of the substance may result. In turn, the macroscopic motions may lead to the appearance of an electromagnetic field. A plasma is therefore, as a rule, a system in which the matter and the electromagnetic field interact strongly. The analysis of the behaviour of such a system is very complicated and a complete finished theory of the behaviour of a real plasma does not exist at present.

If the mean free path of the plasma particles is much shorter than the characteristic dimensions of the region in which the plasma moves one can use hydrodynamical equations in which electromagnetic forces are taken into account to describe the motion of the plasma. The electromagnetic field is described by the Maxwell equations, neglecting the displacement current as compared to the conduction current, which is valid if the field varies sufficiently slowly in time. This is called the magneto-hydrodynamical approximation. It is valid for a sufficiently dense medium in which the mean free path is short owing to the frequent collisions of the particles with one another. However, the hydrodynamical approximation can also be applied for a description of the motion of a collisionless (rarefied) plasma across a strong magnetic field.

The radius of the cyclotron rotation of the particles around the magnetic lines of force plays the role of the mean free path in that case.

The equations of magneto-hydrodynamics for an incompressible conducting liquid can be written in the following form:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla)v = -\frac{1}{\rho}\nabla\left(p + \frac{H^2}{8\pi}\right) + \frac{1}{4\pi\rho}(H \cdot \nabla)H + \frac{\eta}{\rho}\nabla^2 v \tag{14.b.1}$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \operatorname{curl}[v \wedge H] + \frac{c^2}{4\pi\sigma}\nabla^2 H \tag{14.b.2}$$

$$\operatorname{div} v = 0 \tag{14.b.3}$$

$$\operatorname{div} H = 0 \tag{14.b.4}$$

Here $\boldsymbol{v}(r,t)$ is the hydrodynamical (averaged) velocity of the matter; ρ = constant is its density, p its pressure, σ its conductivity, and η its viscosity coefficient.

The current density and the electrical field in a moving liquid can be found from the Maxwell equation curl $H = 4\pi j/c$ and Ohm's law, which in a moving medium has the form

$$j = \sigma\left(E + \frac{1}{c}[v \wedge H]\right) \tag{14.b.5}$$

If the conductivity is very high ($\sigma \to \infty$) the last term on the right-hand side of equation (14.b.2) plays an insignificant role and we can write that
equation in the form

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \operatorname{curl}[v \wedge H] \tag{14.b.6}$$

The magnetic lines of force are in this case 'frozen in' in the matter: when the matter moves, the lines of force move together with the particles of the medium which are situated on them. Thus the magnetic flux through any contour which moves with the liquid remains constant.

If the conductivity is low or the velocity v small, we can neglect the curl$[v \wedge H]$ term in equation (14.b.2) and the equation becomes the same as equation (7.b.4).

Charge separation processes in the plasma and displacement currents become important when the frequencies corresponding to the changes in the fields are high. If we neglect electromagnetic energy losses the dielectric permittivity of the plasma has the form

$$\epsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_{\mathrm{p}}^2}{\omega^2} \tag{14.b.7}$$

where the quantity

$$\omega_{\mathrm{p}} = \left(\frac{4\pi n e^2}{m}\right)^{1/2} \tag{14.b.8}$$

(n is the electron density, m is the electron mass, and e is the electron charge) is called the Langmuir frequency, or the plasma frequency, or the frequency of the plasma oscillations. It characterises the frequency of the oscillations of the electrons relative to the ions. Such oscillations arise for any charge distribution in the plasma (see problem 14.26). The correct description of a plasma in the case of fast changing fields is given by using the Maxwell equations together with Boltzmann's kinetic equation, but a discussion of that case lies outside the framework of the present book.

14.19* A viscous, incompressible, conducting liquid moves between two fixed parallel planes in the direction of the z-axis under the action of a constant pressure gradient $\mathrm{d}p/\mathrm{d}z$ = constant.

The conductivity is σ, the viscosity η, and the distance between the planes $2a$. A constant, uniform, external magnetic field H_0 is applied at right angles to the planes in the direction of the x-axis. Evaluate the x-dependence of the velocity of the liquid and the extra magnetic field occurring in the moving liquid. Analyse the result for large and small values of H_0.

14.20 A viscous incompressible liquid lies between the parallel planes $x = \pm a$. The plane $x = -a$ moves with a velocity $-v_0$ and the plane $x = a$ moves with a velocity v_0, both in the z-direction. There is no pressure gradient, and the electrical conductivity σ and the viscosity η are given. A uniform magnetic field H_0 is applied at right angles to the
planes. Evaluate the velocity of the liquid and the additional magnetic field in it.

14.21 Along a cylindrical column of a hot plasma of radius a a current J is flowing which is distributed across the cross section with a density $j(r)$. What is the r-dependence of the plasma density, if it balances the magnetic pressure produced by the current flowing along the column?

Let the plasma be isothermal and let it satisfy the perfect gas equation of state. Express the current strength J in terms of the plasma temperature T and the total number of particles N of one sign per unit length of the plasma column. Neglect viscosity and consider a stationary plasma state with $v = 0$.

14.22 What should be the distribution of the current across the cross section of the plasma column (see preceding problem) in order that the pressure of the plasma be constant across the column?

14.23 Plasma is ejected isotropically in all directions from the surface of a sphere of radius a which is rotating about its diameter with constant angular velocity Ω. The plasma velocity is constant and directed along the radius. Close to the surface of the sphere there is a magnetic field which, in the frame of reference that rotates with the sphere, has the value $\boldsymbol{H}(a, \vartheta, \phi) = H_0(\vartheta, \phi)$, where ϕ is measured in the plane perpendicular to the axis of rotation. The energy density in the plasma is large compared to the energy density of the magnetic field so that we can neglect the effect of the field on the motion of the plasma. By assuming that the magnetic field is frozen in the plasma, find the way it varies with position and time in the region $r > a$ in the fixed frame of reference [(3)].

14.24 Find the shape of the lines of force of the interplanetary magnetic field in Parker's model, considered in the preceding problem. Determine the magnitude of the magnetic field and the angle θ between the lines of force and the radial direction on the Earth's orbit for the following values of the parameters: solar radius $a = 0.7 \times 10^6$ km, average magnetic field at the surface of the Sun $H_0 \approx\approx 80$ A m^{-1}, radius of the Earth's orbit $r_0 \approx 1.5 \times 10^8$ km, velocity of the solar wind $v = 300$ km s^{-1}, and angular velocity of the solar rotation $\Omega = 2.7 \times 10^{-6}$rads^{-1}.

14.25 A uniform magnetic field H, parallel to the axis of a plasma cylinder, and a radial electrical field $\boldsymbol{E}$ act upon the plasma cylinder. Evaluate that part of the energy of the system which is connected with the electrical field, taking into account the electrical drift of the plasma. Use the expression obtained for the energy to determine the transverse dielectric permittivity $\epsilon_\perp$ of a plasma in a magnetic field.

[(3)] Parker has used the model considered in this problem to describe the interplanetary magnetic field produced by solar plasma currents (solar wind).

14.26 A quasi-neutral plasma lies between the planes $x = \pm d$. Let there be at a certain moment a charge separation such that all electrons are in the plane $x = d$ and all ions are in the plane $x = -d$. Owing to the electrostatic forces the charges will start to perform oscillations. Neglect particle collisions and find the frequency ω of these oscillations, given that the average density of particles of one sign is n.

14.27 Find the depth of penetration into a plasma of an electromagnetic field for different frequencies. To do this, consider normal incidence of an electromagnetic wave onto a plane boundary of a plasma and calculate the reflection coefficient R and the transverse electrical field in the plasma $\boldsymbol{E}(r, t)$. Take formula (14.b.7) for the dielectric permittivity.

14.28* Find the dielectric permittivity of a collisionless plasma, taking the thermal motion of the electrons into account. In order to do this, integrate the equations of motion for an electron in an external field $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 \exp[\mathrm{i}(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r}) - \mathrm{i}\omega t]$, evaluate the current density produced by a single particle, and average this expression over an initial equilibrium distribution of positions and velocities, assumed to be Maxwellian. Restrict yourself to the linear approximation in the electrical field strength E and neglect the motion of the ions. The average density of the electrons is n and the plasma temperature is T (in energy units).
14.29 The longitudinal dielectric permittivity of a plasma is of the form

$$\epsilon_{\|} = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\left(1 + \frac{3k^2}{\omega^2} v_{\|}^2\right)$$

if the thermal motion of the particles is taken into account; here $v_{\|}^2 = T/m$ and the second term within the brackets is small compared to unity. Evaluate the phase and group velocities of longitudinal plasma waves.
14.30 At time $t = 0$ the charge neutrality in a plasma is violated and as a result there appears a volume charge with density $\rho(r, 0)$.
(a) Evaluate the charge density $\rho(r, t)$ for $t > 0$ by making use of equation (14.b.7) for the dielectric permittivity of the plasma.
(b) Describe qualitatively the change in this result if the thermal motion of the plasma particles is taken into account. Use the $\epsilon_{\|}$given in the preceding problem to perform an actual calculation, with the choice of $\rho(r, 0)$ in the form

$$\rho(r, 0) = \rho_0 \frac{x}{x_0} \exp\left(-\frac{x^2}{x_0^2}\right)$$

where ρ_0 and x_0 are constants.
14.31 Consider the plasma model in which a gas of negatively charged electrons, with charge $-e$, move in a neutralising background of uniform charge density $n_0 e$, where n_0 is the average electron number density. If an additional infinitesimal point charge q is put at the origin, find the
change $\varphi(r)$ in the electrostatic potential, for the case where the system is at temperature T (cf problem 6.12).
14.32 Discuss the conditions under which the Debye screened potential derived in the preceding problem is valid.
14.33 Find the electron number density for the case when in the plasma described by the model of problem 14.31 an additional charge q is put at the origin.
14.34 Find the total number n_{exc} of excess electrons in the Debye sphere under the conditions of the preceding problem.
14.35 Find the energy E_{int} of the interaction between the additional charge q and the charge in the Debye sphere under the conditions of problem 14.31
14.36 Find the energy E_{Deb} of the charge density in the Debye sphere under the conditions of problem 14.31.
14.37 Estimate the average number of electrons n_D in the Debye sphere under the conditions of problem 14.31.
14.38* Consider an electromagnetic wave of intensity $E_0 \exp(\mathrm{i}kx - \mathrm{i}\omega t)$ that propagates through a plasma which, for the sake of simplicity, is taken to be one-dimensional. Discuss qualitatively how this wave will lose energy to the electrons in the plasma; the velocity distribution of the electrons may be assumed to be Maxwellian. Hence find qualitatively how the damping of such a wave depends on the temperature T and the wavenumber k (Landau damping).

17 Solutions from Batygin Toptygin

17.1 Vector and tensor calculus

a Vector and tensor algebra. Transformations of vectors and tensors 1.1 $\cos\theta = (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{n}') = \cos\vartheta\cos\vartheta' + \sin\vartheta\sin\vartheta'\cos(\phi-\phi')$.
1.3 Since $b_i (i = 1, 2, 3)$ are the components of a vector, it follows that when the system of coordinates is rotated, $b_i' = \alpha_{ik} b_k$. Substituting b_i' into $a_i' b_i' =$ invariant and comparing with $a_k b_k =$ invariant, we find that $a_k = \alpha_{ik} a_i'$, a_k transform as the components of a vector when the system of coordinates is rotated. Since the invariant (a scalar) does not change sign on reflection, then the components a_i and b_i should either both change sign (polar vectors) or should both remain unaltered (pseudovectors).

$$1.10 [a\wedge b]_0 = \mathrm{i}\,(a_{-1}b_{+1} - a_{+1}b_{-1}), \quad [a\wedge b]_{\pm 1} = \pm\mathrm{i}\,(a_0 b_{\pm 1} - a_{\pm 1} b_0)$$
$$(a\cdot b) = \sum_{\mu=1}^{\mu=-1} (-1)^{\mu} a_{-\mu} b_{\mu}, \quad r_{\mu} = \left(\frac{3}{4\pi}\right)^{1/2} r Y_{1\mu}$$

1.11 The tensor reciprocal to ϵ_{ik} satisfies the conditions

$$\epsilon_{ik}\epsilon_{kl}^{-1} = \delta_{il} \tag{1.11.1}$$

The above is a set of algebraic equations involving the components of the reciprocal tensor ϵ_{ik}^{-1}. The solutions are of the form

$$\epsilon_{ik}^{-1} = \frac{\Delta_{kl}}{|\epsilon|} \tag{1.11.2}$$

where Δ_{ik} is the cofactor of the element ϵ_{ik} in the determinant $|\epsilon|$. It follows from equation (1.11.2) that the necessary condition for the existence of the reciprocal tensor is $|\epsilon| \neq 0$. Bearing in mind the wellknown property of determinants $\Delta_{ki}\epsilon_{kl} = \delta_{il}|\epsilon|$, we see that the reciprocal tensor must, in addition to equation (1.11.1), also satisfy the conditions

$$\epsilon_{ik}^{-1}\epsilon_{kl} = \delta_{il}$$

If ϵ_{ik} is a symmetric tensor defined along the principal axes: $\epsilon_{ik} = \epsilon^{(i)}\delta_{ik}$ (no summation over i), then

$$\epsilon_{ik}^{-1} = \frac{1}{\epsilon^{(i)}}\delta_{ik}$$

1.14 The T_{ik} form a tensor of rank 2 .
1.15 In the transformation $e_i \to \boldsymbol{e}_i'$, the coefficients $\alpha_{ik} = (\boldsymbol{e}_i'\cdot\boldsymbol{e}_k)$ in $\boldsymbol{e}_i' = \alpha_{ik}\boldsymbol{e}_k$ represent the components of the new unit vectors along the old unit vectors. On evaluating the components (figures 1.15.1 and
1.15.2) we obtain the following transformation matrices:
(a) transformation from Cartesian to spherical coordinates:

$$\hat{\alpha} = \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\phi & \sin\vartheta\sin\phi & \cos\vartheta \\ \cos\vartheta\cos\phi & \cos\vartheta\sin\phi & -\sin\vartheta \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \end{pmatrix},$$
$$\hat{\alpha}^{-1} = \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\phi & \cos\vartheta\cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\vartheta\sin\phi & \cos\vartheta\sin\phi & \cos\phi \\ \cos\vartheta & -\sin\vartheta & 0 \end{pmatrix};$$

(b) transformation from Cartesian to cylindrical coordinates:

$$\hat{\alpha} = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\hat{\alpha}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

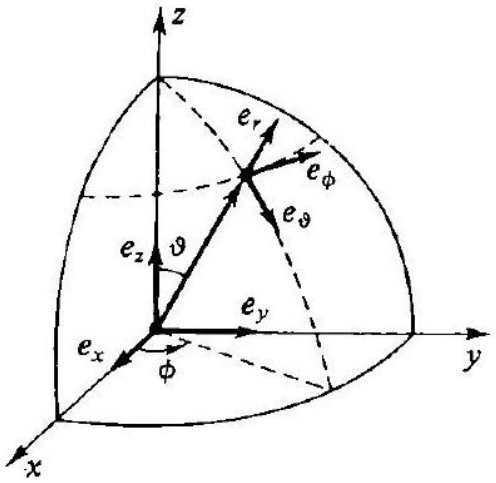


Figure 1.15.1

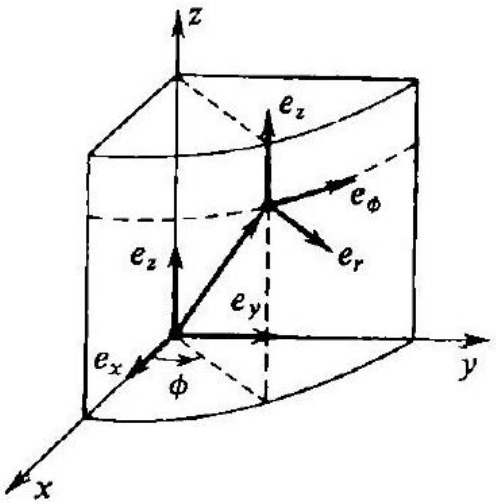


Figure 1.15.2.

1.16 Let $\hat{g}$ represent the matrix relating the components of the vector in coordinate systems S' and $S\,(A'_i = g_{ik}A_k)$. We then have:

(a) for the case of reflection

$$\hat{g}_- = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

(b) for the case of rotation

$$\hat{g}(\phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

where ϕ is positive in the clockwise direction (on looking in the direction of the positive z-axis).

1.17 Using the results of the preceding problem we have

$$\hat{g}(\theta,\phi,\psi) = \hat{g}(\psi)\hat{g}(\theta)\hat{g}(\phi) =$$
$$\begin{pmatrix} \cos\phi\cos\psi - \cos\theta\sin\phi\sin\psi & \sin\phi\cos\psi + \cos\theta\cos\phi\sin\psi & \sin\theta\sin\psi \\ -\cos\phi\sin\psi - \cos\theta\sin\phi\cos\psi & -\sin\phi\sin\psi + \cos\theta\cos\phi\cos\psi & \sin\theta\cos\psi \\ \sin\phi\sin\theta & -\sin\theta\cos\phi & \cos\theta \end{pmatrix}$$

1.18

$$\hat{D}(\theta,\phi,\psi) =$$
$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1+\cos\theta)\exp[\mathrm{i}(\phi+\psi)] & -\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\sin\theta\exp(\mathrm{i}\psi) & -\frac{1}{2}(1-\cos\theta)\exp[\mathrm{i}(\psi-\phi)] \\ -\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\sin\theta\exp(\mathrm{i}\phi) & \cos\theta & -\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\sin\theta\exp(-\mathrm{i}\phi) \\ -\frac{1}{2}(1-\cos\theta)\exp[\mathrm{i}(\phi-\psi)] & -\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\sin\theta\exp(-\mathrm{i}\psi) & \frac{1}{2}(1+\cos\theta)\exp[-\mathrm{i}(\phi+\psi)] \end{bmatrix}$$

1.19 Since the matrix corresponding to rotation through zero angle (identity transformation) is the unit matrix $\hat{1}$, it follows that for a rotation through a small angle $|\epsilon_{ik}| \ll 1$. In order to prove the relation $\epsilon_{ik} = -\epsilon_{ki}$, we can use the invariance of $r^2 = \delta_{ik}x_i x_k$ with respect to rotation. Since $x_i' = \alpha_{ik}x_k = x_i + \epsilon_{ik}x_k$, it follows that to within terms of the first order we have

$$r'^2 = r^2 + 2\epsilon_{ik}x_i x_k$$

It follows from the invariance of r^2 that

$$\epsilon_{ik}x_i x_k = 0$$

for arbitrary x_i, and this is only possible when $\epsilon_{ik} = -\epsilon_{ki}$. Consider now the vector $\delta\varphi$ with components $\delta\varphi_i = \frac{1}{2}e_{ikl}\epsilon_{kl}$. We then have

$$r' = r + [\delta\varphi \wedge r]$$

and it is clear that $\delta\varphi$ is a vector representing an infinitesimal rotation whose direction is parallel to the axis of rotation and whose magnitude is equal to the angle of rotation.
1.22 The proof is the same for any number of transformations. Let the transformation matrix be $\hat{\alpha}$ and its determinant $|\hat{\alpha}|$. Since the matrix $\hat{\alpha}$ is orthogonal, there are n^2 equations of the form $\alpha_{ik}\alpha_{ik} = \delta_{il}$. Since the left-hand sides of these equations contain the elements of the determinant which is equal to the product of two determinants $|\hat{\alpha}|$, we have

$$|\hat{\alpha}||\hat{\alpha}| = |\hat{1}| = 1, \quad \text{or} \quad |\hat{\alpha}|^2 = 1$$

Hence,

$$|\hat{\alpha}| = \pm 1$$

It will now be shown that for rotations $|\hat{\alpha}| = +1$. For a rotation through a zero angle (identity) $|\hat{\alpha}| = |\hat{1}| = 1$. Since the elements of the matrix $\hat{\alpha}$ are continuous functions of the parameters defining the rotation (e.g. the Euler angles; see answer to problem 1.17), it follows that the result $|\hat{\alpha}| = 1$ will also hold for finite rotations.

The form of $|\hat{\alpha}|$ which corresponds to reflections is

$$|\hat{\alpha}| = \begin{vmatrix} \pm 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \pm 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \pm 1 & \dots \\ \dots & \dots & . & . \end{vmatrix}$$

The negative signs of the diagonal elements correspond to reflected axes. It is clear that $|\hat{\alpha}| = +1$ for an even number of such axes, and $|\hat{\alpha}| = -1$ for an odd number.

1.24 Of all the 27 quantities e_{ikl}, only six have nonzero values. The remainder have at least two identical subscripts, and in view of the skewsymmetry, they are all equal to zero ($e_{iik} = -e_{iik} = 0$). The finite components are

$$e_{123} = e_{312} = e_{231} = -e_{321} = -e_{213} = -e_{132} = 1$$

Consider now the expression $\alpha_{1i}\alpha_{2k}\alpha_{3l}e_{ikl}$. Recalling the definition of a third-order determinant and the definition of e_{ikl}, we may rewrite this expression in the form

$$\alpha_{1i}\alpha_{2k}\alpha_{3l}e_{ikl} = |\hat{\alpha}| = +1 = e'_{123}$$

On interchanging two subscripts on the left, e.g. 1 and 2, we have

$$\alpha_{2i}\alpha_{1k}\alpha_{3l}e_{ikl} = -\alpha_{1k}\alpha_{2i}\alpha_{3l}e_{kil} = -e'_{123} = e'_{213} \ldots$$

It is clear from these equations that the e_{ikl} transform on rotation as a tensor of rank 3. The quantities e_{ikl} remain unaltered on reflection and hence they form an axial tensor of rank 3. This tensor has the interesting property that its components are the same in all coordinate systems.

1.25 The tensor A_{ik} may be written in the form of the table

$$A_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & A_{12} & -A_{31} \\ -A_{21} & 0 & A_{23} \\ A_{31} & -A_{23} & 0 \end{pmatrix}$$

Let $A_{23} = A_1, A_{31} = A_2$, and $A_{12} = A_3$. These three equations may also be written in the form $A_i = \frac{1}{2}e_{ikl}A_{kl}$, where e_{ikl} is the completely antisymmetric unit tensor of rank 3 (see preceding problem). Since A_{kl} is a tensor of rank 2, it follows that the quantities $A_i (i = 1, 2, 3)$ form a vector. The vector A_i is called the dual of the tensor A_{ik}.

1.26

$$[A \wedge B]_i = e_{ikl}A_kB_l, \quad \operatorname{curl}_i A = e_{ikl}\frac{\partial A_l}{\partial x_k}$$

[$A \wedge B$] and curl $\boldsymbol{A}$ may be looked upon as skew-symmetric tensors of rank 2, or as their dual vectors whose components do not change sign on reflection (pseudovectors).

1.28 (a) $a^2(b \cdot c) + (a \cdot b)(a \cdot c)$

(b) $([[a \wedge b] \wedge c] \cdot [[a' \wedge b'] \wedge c'])$.

1.30 $(a \cdot a')(b \cdot b')(c \cdot c') + (a \cdot b')(b \cdot c')(c \cdot a') + (b \cdot a')(c \cdot b')(a \cdot c')$
$-(a \cdot c')(c \cdot a')(b \cdot b') - (a \cdot b')(b \cdot a')(c \cdot c') - (b \cdot c')(c \cdot b')(a \cdot a')$.

1.31 Consider the proof for a vector and a tensor of rank 2:

(a) Since the components of the vector should, by definition, be the same in all systems of coordinates, it follows that for any rotation $A'_i = A_i$, i.e.

$$A'_x = A_x, \quad A'_y = A_y, \quad A'_z = A_z \tag{1.31.1}$$

Let us rotate the system of coordinates about the z-axis through an angle π. Since, in general, the transformation formulae for rotations are $A'_i = \alpha_{ik}A_k$, we find that

$$A'_x = -A_x, \quad A'_y = -A_y, \quad A'_z = A_z \tag{1.31.2}$$

Equations (1.31.1) and (1.31.2) are consistent only if $A_x = A_y = 0$. Next, consider the rotation of the coordinate system about the x-axis through an angle π. As before, we can show

that $A_z = 0$, i.e. the vector $A = 0$ if its components are independent of the choice of the coordinate system.
(b) An arbitrary tensor of rank 2 may be written down in the form of a sum of a symmetric and a skew-symmetric tensor:

$$T_{ik} = S_{ik} + A_{ik}$$

The skew-symmetric tensor is equivalent to a pseudovector (see problem 1.25), and in view of the above property of a vector, its components are independent of the choice of the coordinate system only if they are equal to zero. We shall therefore consider the symmetric tensor S_{ik}.

Let us select a coordinate system in which S_{ik} has the diagonal form $\lambda^{(i)}\delta_{ik}$. If the $\lambda^{(i)}$ are not all equal, then the components of the tensor will depend on the choice of the axes, i.e. on which subscript (1,2, or 3) is used to represent a given axis. The components of the tensor will be independent of the choice of the axes only if $\lambda^{(1)} = \lambda^{(2)} = \lambda^{(3)} = \lambda$. The tensor will then be of the form $\lambda\delta_{ik}$.
1.32 The required mean values are given by the following integrals

$$\overline{n_i} = \frac{1}{4\pi}\int n_i \, \mathrm{d}^2\omega, \quad \overline{n_i n_k} = \frac{1}{4\pi}\int n_i n_k \, \mathrm{d}^2\omega, \ldots \tag{1.32.1}$$

However, instead of the direct evaluation of these integrals it is more convenient to use a method based upon the transformation properties of the quantities under consideration. It is clear that the quantities $\overline{n_i}, \overline{n_i n_k}$, and so on, are tensors of rank $1, 2, 3, 4, \ldots$, respectively. On the other hand, it follows from their definition [equation (1.32.1)] that these quantities should be independent of the choice of the coordinate system. They are therefore expressed in terms of tensors whose components are independent of the choice of the coordinate system.

Consider $\bar{n}_i$. Since the only vector whose components are independent of the choice of the coordinate system is the zero vector (see problem 1.31), it follows that $\overline{n_i} = 0$.

The tensor $\overline{n_i n_k}$ should be capable of being expressed in terms of a symmetric tensor of rank 2 whose components are independent of the choice of the coordinate system. The only tensor satisfying this condition is δ_{ik}.

We therefore have

$$\overline{n_i n_k} = \lambda\delta_{ik}$$

where λ can be determined by contracting [(1)] the tensor:

$$\overline{n_i n_i} = \overline{n^2} = 1 = 3\lambda, \quad \lambda = \frac{1}{3}$$

Similarly,

$$\overline{n_i n_k n_l} = 0$$

$$\overline{n_i n_k n_l n_m} = \frac{1}{15}\left(\delta_{ik}\delta_{lm} + \delta_{il}\delta_{km} + \delta_{im}\delta_{kl}\right)$$

1.33 $\frac{1}{3}a^2$, $\frac{1}{3}(a\cdot b)$, $\frac{1}{3}a$, $\frac{2}{3}a^2$, $\frac{2}{3}(a\cdot b)$, $\frac{1}{15}[(a\cdot b)(c\cdot d) + (a\cdot c)(b\cdot d) + (a\cdot d)(b\cdot c)]$.
1.34 $n^2, n'^2, l^2, (n\cdot n'), ([n\wedge n']\cdot l), (n\cdot l)^2, (n'\cdot l)^2, (n\cdot l)(n'\cdot l)$.
1.35 $(n\cdot l), (n'\cdot l), \quad (n_1\cdot[n_2\wedge n_3])$

17.1.1 b Vector analysis

1.36

$$\nabla_{\pm 1} = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\exp(\pm \mathrm{i}\phi)\left(\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\vartheta}{r}\frac{\partial}{\partial\vartheta} \pm \frac{\mathrm{i}}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)$$
$$\nabla_0 = \cos\vartheta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\vartheta}{r}\frac{\partial}{\partial\vartheta}$$

1.37 $\operatorname{div} r = 3, \operatorname{curl} r = 0, \operatorname{grad}(\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{l}, (\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{\nabla})r = \boldsymbol{l}.$
1.38 $\operatorname{curl}[\omega\wedge r] = 2\omega.$
(1) Contracting of a tensor consists in the summation over two indices which are the same.

1.41

$$\operatorname{grad}\varphi(r) = \tfrac{r}{r}\varphi'; \quad \operatorname{div}\varphi(r)r = 3\varphi + r\varphi'$$
$$\operatorname{curl}\varphi(r)r = 0; \quad (l\cdot\nabla)\varphi(r)r = l\varphi + \tfrac{r(l\cdot r)}{r}\varphi'$$

Here, and also below, differentiation with respect to r is indicated by a prime.
1.42

$$\varphi(r) = \frac{\text{const}}{r^3}$$

1.43
$$\begin{array}{ll} \operatorname{div}(r\cdot a)b = (a\cdot b), & \operatorname{curl}(r\cdot a)b = [a\wedge b] \\ \operatorname{div}(a\cdot r)r = 4(a\cdot r), & \operatorname{curl}(a\cdot r)r = [a\wedge r] \\ \operatorname{div}[a\wedge r] = 0, & \operatorname{curl}[a\wedge r] = 2a \end{array}$$

$$\operatorname{div}\varphi(r)[a\wedge r] = 0, \quad \operatorname{curl}\varphi(r)[a\wedge r] = (2\varphi + r\varphi')\,a - \frac{r(a\cdot r)}{r}\varphi'$$
$$\operatorname{div}[r\wedge[a\wedge r]] = -2(a\cdot r), \quad \operatorname{curl}[r\wedge[a\wedge r]] = 3[r\wedge a]$$

1.44

$$\operatorname{grad}(A(r)\cdot r) = A + \frac{r}{r}(r\cdot A')$$
$$\operatorname{grad}(A(r)\cdot B(r)) = \frac{r}{r}\{(A'\cdot B) + (A\cdot B')\}$$
$$\operatorname{div}\varphi(r)A(r) = \frac{\varphi'}{r}(r\cdot A) + \frac{\varphi}{r}(r\cdot A')$$
$$\operatorname{curl}\varphi(r)A(r) = \frac{\varphi'}{r}[r\wedge A] + \frac{\varphi}{r}[r\wedge A']$$
$$(l\cdot\nabla)\varphi(r)A(r) = \frac{(l\cdot r)}{r}(\varphi' A + \varphi A')$$

1.45

$$-\operatorname{grad}\left[\frac{(p\cdot r)}{r^3}\right] = \operatorname{curl}\left\{\frac{[p\wedge r]}{r^3}\right\}$$

the components of this vector along the basic unit vectors e_r, e_ϑ, e_ϕ are respectively equal to

$$\frac{2p\cos\vartheta}{r^3}, \quad \frac{p\sin\vartheta}{r^3}, \quad 0$$

The vector lines are formed by the intersection of the two families of surfaces $\phi = C_1, \quad r = C_2 \sin\vartheta$.
1.47

$$\left(\nabla^2 A\right)_r = \nabla^2 A_r - \frac{2}{r^2} A_r - \frac{2}{r^2 \sin\vartheta} \frac{\partial}{\partial\vartheta} (\sin\vartheta A_\vartheta) - \frac{2}{r^2 \sin\vartheta} \frac{\partial A_\phi}{\partial\phi}$$
$$\left(\nabla^2 A\right)_\vartheta = \nabla^2 A_\vartheta - \frac{A_\vartheta}{r^2 \sin^2\vartheta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial\vartheta} - \frac{2\cos\vartheta}{r^2 \sin^2\vartheta} \frac{\partial A_\phi}{\partial\phi}$$
$$\left(\nabla^2 A\right)_\phi = \nabla^2 A_\phi - \frac{A_\phi}{r^2 \sin^2\vartheta} + \frac{2}{r^2 \sin\vartheta} \frac{\partial A_r}{\partial\phi} + \frac{2\cos\vartheta}{r^2 \sin^2\vartheta} \frac{\partial A_\vartheta}{\partial\phi}$$

1.48

$$\left(\nabla^2 A\right)_r = \nabla^2 A_r - \frac{A_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_\phi}{\partial\phi}$$
$$\left(\nabla^2 A\right)_\phi = \nabla^2 A_\phi - \frac{A_\phi}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial\phi}$$
$$\left(\nabla^2 A\right)_z = \nabla^2 A_z$$

1.49

$$\int (\operatorname{grad}\varphi \cdot \operatorname{curl} A) \mathrm{d}^3 r = \oint \left([A \wedge \operatorname{grad}\varphi] \cdot \mathrm{d}^2 S\right) = \left(\varphi \operatorname{curl} A \cdot \ \mathrm{d}^2 S\right)$$

1.50 Here, as in a number of other cases, it is convenient to consider the scalar product of the integrals with a constant vector c:

$$\left(c \cdot \oint r(a \cdot n) \mathrm{d}^2 S\right) = \oint (c \cdot r) a_n \ \mathrm{d}^2 S$$
$$= \int \operatorname{div}[(c \cdot r) a] \mathrm{d}^3 r = (a \cdot c) \int \mathrm{d}^3 r = (a \cdot c) V$$

Since c is an arbitrary vector it follows that $\int (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{n}) r \ \mathrm{d}^2 S = aV$.
Similarly, $\oint (a \cdot r) n \ \mathrm{d}^2 S = aV$

1.51

$$\oint n\varphi \ \mathrm{d}^2 S = \int \operatorname{grad}\varphi \mathrm{d}^3 r, \quad \oint [n \wedge a] \mathrm{d}^2 S = \int \operatorname{curl} a \ \mathrm{d}^3 r$$
$$\oint (\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{b}) a \ \mathrm{d}^2 S = \int (\boldsymbol{b} \cdot \nabla) a \ \mathrm{d}^3 r$$

1.55 Using the method of problem 1.50, it is easy to show that

$$\oint_{\varphi \mathrm{d}} l = \int [n \wedge \operatorname{grad}\varphi] \mathrm{d}^2 S$$

where n is the unit normal to the surface.
1.56
$\int ([\operatorname{grad} u \wedge \operatorname{grad} f] \cdot n) \mathrm{d}^2 S$.
1.61
(a) $A + \frac{B}{r}$;
(b) $A + B \ln \tan \frac{\vartheta}{2}$;
(c) $A + B\phi$.
1.62 (a) $A + B \ln r$;

(b) $A + B\phi$;
(c) $A + Bz$.
1.64

$$\left.\begin{aligned} x &= \pm\left[\frac{(\xi+a^2)(\eta+a^2)(\xi+a^2)}{(b^2-a^2)(c^2-a^2)}\right]^{1/2}, \\ y &= \pm\left[\frac{(\xi+b^2)(\eta+b^2)(\xi+b^2)}{(c^2-b^2)(a^2-b^2)}\right]^{1/2}, \\ z &= \pm\left[\frac{(\xi+c^2)(\eta+c^2)(\zeta+c^2)}{(a^2-c^2)(b^2-c^2)}\right]^{1/2}; \end{aligned}\right\} \tag{1.64.1}$$

$$h_1 = \frac{[(\xi-\eta)(\xi-\xi)]^{1/2}}{2R_\xi}, \quad h_2 = \frac{[(\eta-\zeta)(\eta-\xi)]^{1/2}}{2R_\eta},$$

$$h_3 = \frac{[(\zeta-\xi)(\zeta-\eta)]^{1/2}}{2R_\zeta}$$

$$\nabla^2 = \frac{4}{(\xi-\eta)(\xi-\zeta)(\eta-\zeta)}\left[(\eta-\zeta)R_\xi\frac{\partial}{\partial\xi}\left(R_\xi\frac{\partial}{\partial\xi}\right) + (\zeta-\xi)R_\eta\frac{\partial}{\partial\eta}\left(R_\eta\frac{\partial}{\partial\eta}\right)\right.$$
$$\left.+(\xi-\eta)R_\zeta\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(R_\zeta\frac{\partial}{\partial\zeta}\right)\right]$$

where $R_u = [(u+a^2)(u+b^2)(u+c^2)]^{1/2}$. It is clear from equation (1.64.1) that to each set of values of ξ, η, ζ there correspond eight sets of values of x, y, z.

The orthogonality of the ellipsoidal coordinate system can be proved by finding $\operatorname{grad}\xi, \operatorname{grad}\eta, \operatorname{grad}\xi$ and then evaluating the scalar products $(\operatorname{grad}\xi \cdot \operatorname{grad}\eta)$ and so on, which all turn out to be equal to zero. The quantities $\operatorname{grad}\xi, \operatorname{grad}\eta, \operatorname{grad}\zeta$ may be found directly from the equations defining ξ, η, ζ by taking the gradient of both sides of these equations and using equation (1.64.1).

1.65

$$z = \pm\left[\frac{(\xi+c^2)(\eta+c^2)}{c^2-a^2}\right]^{1/2}, \quad r = \left[\frac{(\xi+a^2)(\eta+a^2)}{a^2-c^2}\right]^{1/2}$$

$$h_1 = \frac{(\xi-\eta)^{1/2}}{2R_\xi}, \quad h_2 = \frac{(\xi-\eta)^{1/2}}{2R_\eta}, \quad h_3 = r$$

where

$$R_\xi = \left[(\xi+a^2)(\xi+c^2)\right]^{1/2}, \quad R_\eta = \left[(\eta+a^2)(-\eta-c^2)\right]^{1/2}$$

$$\nabla^2 = \frac{4}{\xi-\eta}\left[R_\xi\frac{\partial}{\partial\xi}\left(R_\xi\frac{\partial}{\partial\xi}\right) + R_\eta\frac{\partial}{\partial\eta}\left(R_\eta\frac{\partial}{\partial\eta}\right)\right] + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}$$

1.66

$$x = \pm\left[\frac{(\xi^2+a^2)(\xi+a^2)}{a^2-b^2}\right]^{1/2}, \quad r = \left[\frac{(\xi+b^2)(\xi+b^2)}{b^2-a^2}\right]^{1/2};$$

$$h_1 = \frac{(\xi-\zeta)^{1/2}}{2R_\xi}, \quad h_2 = r, \quad h_3 = \frac{(\xi-\zeta)^{1/2}}{2R_\zeta}$$

where

$$R_\xi = \left[\left(\xi + a^2\right)\left(\xi + b^2\right)\right]^{1/2}, \quad R_\zeta = \left[\left(\zeta + a^2\right)\left(-\xi - b^2\right)\right]^{1/2}$$
$$\nabla^2 = \frac{4}{\xi - \zeta}\left[R_\xi \frac{\partial}{\partial \xi}\left(R_\xi \frac{\partial}{\partial \xi}\right) + R_\zeta \frac{\partial}{\partial \zeta}\left(R_\zeta \frac{\partial}{\partial \zeta}\right)\right] + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$$

1.67

$$h_\xi = h_\eta = \frac{a}{\cosh \xi - \cos \eta}, \quad h_\phi = \frac{a \sin \eta}{\cosh \xi - \cos \eta}$$
$$\nabla^2 = \frac{(\cosh \xi - \cos \eta)^3}{a^2}\left[\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{\cosh \xi - \cos \eta}\frac{\partial}{\partial \xi}\right)\right.$$
$$\left. + \frac{1}{\sin \eta}\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\sin \eta}{\cosh \xi - \cos \eta}\frac{\partial}{\partial \eta}\right) + \frac{1}{\sin^2 \eta(\cosh \xi - \cos \eta)}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}\right]$$

1.68 The surfaces $\rho =$ constant are the toroids

$$\left[\left(x^2 + y^2\right)^{1/2} - a \cot \rho\right]^2 + z^2 = \left(\frac{a}{\sinh \rho}\right)^2$$

and the surfaces $\xi =$ constant are the spherical segments

$$(z - \arctan \xi)^2 + x^2 + y^2 = \left(\frac{a}{\sin \xi}\right)^2$$
$$h_\rho = h_\xi = \frac{a}{\cosh \rho - \cos \xi} \quad h_\phi = \frac{a \sinh \rho}{\cosh \rho - \cos \xi}$$

17.2 Electrostatics in vacuo

2.1

$$\varphi_1 = -2\pi\rho z^2, \quad E_1 = -4\pi\rho z e_z \quad \left(|z| < \frac{a}{2}\right)$$
$$\varphi_2 = -\frac{1}{2}\pi\rho a(4|z| - a), \quad E_2 = -2\pi\rho a \frac{z}{|z|} e_z \quad \left(|z| > \frac{a}{2}\right)$$

where the z-axis is perpendicular to the surface of the plate.

2.2

$$\varphi(x, y, z) = \frac{4\pi\rho_0}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} \cos \alpha x \cos \beta y \cos \gamma z$$

2.3

When $z > 0$: $\varphi = \frac{2\pi\sigma_0}{\lambda} \exp(-\lambda z) \sin \alpha x \sin \beta y$
when $z < 0$: $\varphi = \frac{2\pi\sigma_0}{\lambda} \exp(\lambda z) \sin \alpha x \sin \beta y, \quad \lambda = (\alpha^2 + \beta^2)^{1/2}$.
The exponential decrease in the potential along the z-axis is due to the fact that the plane contains charges of different sign.

2.4 The simplest method of solution involves the electrostatic Gauss theorem. In the solution involving integration of the Poisson equation, the Laplace operator must be expressed in terms of cylindrical coordinates. Owing to the symmetry of the system, φ is a function of r only. For the volume charge distribution we find

$$\varphi_1 = \int_r^R \frac{2\kappa r}{R^2}\,\mathrm{d}r = \kappa\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right), \quad E_1 = \frac{2\kappa r}{R^2} (r \leqslant R)$$

$$\varphi_2 = \int_r^R \frac{2\kappa}{r}\,\mathrm{d}r = -2\kappa \ln\frac{r}{R}, \qquad E_2 = \frac{2\kappa}{r} (r \geqslant R)$$

In the case of the surface charge distribution

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = -2\kappa \ln\frac{r}{R}$$

2.5

$$\varphi = -2\kappa \ln r, \quad E = \frac{2\kappa}{r}$$

where κ is the charge per unit length. The arbitrary constant in the potential is chosen so that $\varphi = 0$ when $r = 1$.
2.6

$$\varphi(x, y, z) = \frac{q}{2a} \ln\left|\frac{z - a + \left[(z - a^2) + x^2 + y^2\right]^{1/2}}{z + a + \left[(z + a)^2 + x^2 + y^2\right]^{1/2}}\right|$$

2.7 We use the notation

$$z_1 = z + a, \quad z_2 = z - a,$$
$$r_{1,2} = \left[x^2 + y^2 + z_{1,2}^2\right]^{1/2}, \quad C = \frac{z_1 + r_1}{z_2 + r_2}$$

It follows from the solution of the preceding problem that

$$r_1 + r_2 = 2a\frac{C + 1}{C - 1} = \text{constant} \tag{2.7.1}$$

(remember that $z_1 - z_2 = 2a$).
Equation (2.7.1) shows that the equipotential surfaces are ellipsoids of revolution whose foci lie at the ends of the segment.
2.8

$$\varphi_1(r) = \tfrac{q}{R}\left(\tfrac{3}{2} - \tfrac{r^2}{2R^2}\right), \quad E_1 = \tfrac{qr}{R^3} \quad (r \leqslant R)$$
$$\varphi_2(r) = \tfrac{q}{r}, \quad E_2 = \tfrac{qr}{r^3} \quad (r \geqslant R)$$

2.9

$$\varphi_1(r) = \tfrac{r}{R}, \quad E_1 = 0 \quad (r < R)$$
$$\varphi_2(r) = \tfrac{q}{r}, \quad E_2 = \tfrac{qr}{r^3} \quad (r > R)$$

2.10 The electric field in the cavity is uniform and is given by

$$E = \frac{4}{3}\pi\rho r - \frac{4}{3}\pi\rho(r - a) = \frac{4}{3}\pi\rho a$$

2.11$q = 4\pi\alpha\,(R_2 - R_1)$
$E_1 = 0, \quad \varphi_1 = \frac{q}{R_2 - R_1} \ln\frac{R_2}{R_1}$ when $r \leqslant R_1$;
$E_2 = \frac{q(r - R_1)}{R_1 - R_1)r^2}$,

$\varphi_2 = \frac{q}{R_2 - R_1}\left(1 - \ln\frac{r}{R_2} - \frac{R_1}{r}\right)$ when $R_1 \leqslant r \leqslant R_2$;
$E_3 = \frac{q}{r^2}$; $\varphi_3 = \frac{q}{r}$ when $r \geqslant R_2$.
The field of a sphere with a uniform surface charge distribution is obtained by letting $R_2 \to R_1 \equiv R$ keeping q constant.
2.12 The energy W for the charge distributions of problems 2.8,2.9, and 2.11 is given by

$$W = \frac{3q^2}{5R}, \quad W = \frac{q^2}{2R}, \quad W = \frac{q^2}{R_2 - R_1} - \frac{q^2 R_1}{(R_2 - R_1)^2}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

respectively.

By comparing the contributions to the energy W given by the integrals $\int_0^R$ and $\int_R^\infty$ it may be shown that most of the energy is localized outside the charge distribution (83% in the case of a uniformly charged sphere).
2.13

$$\varphi(r) = \frac{4\pi}{r}\int_0^r \rho(r')\, r'^2\, \mathrm{d}r' + 4\pi\int_r^\infty \rho(r')\, r' \mathrm{d}r'$$

$$E(r) = \frac{4\pi r}{r^3}\int_0^r \rho(r')\, r'^2\, \mathrm{d}r'$$

2.15 The field due to the electron cloud in the atom is given by

$$\varphi_e(r) = -\frac{e_0}{r}\left[1 - \exp\left(-\frac{2r}{a}\right)\right] + \frac{e_0}{a}\exp\left(-\frac{2r}{a}\right)$$

$$E_{er} = -\frac{e_0}{r^2}\left[1 - \left(\frac{2r}{a} + 1\right)\exp\left(-\frac{2r}{a}\right)\right] + \frac{2e_0}{a^2}\exp\left(-\frac{2r}{a}\right)$$

The potential and the magnitude of the field strength of the total electric field in the atom are given by

$$\varphi(r) = \varphi_e(r) + \frac{e_0}{r}$$

$$E_r = \frac{e_0}{r^2}\left(\frac{2r}{a} + 1\right)\exp\left(-\frac{2r}{a}\right) + \frac{2e_0}{a^2}\exp\left(-\frac{2r}{a}\right)$$

2.16 The field strength is a maximum on the surface of the nucleus:

$$E_{\max} = \frac{Ze_0}{R^2} = 6.4 \times 10^{20}\frac{Z}{A^{2/3}}\mathrm{Vm}^{-1}$$

2.17 Use the fact that the surface density is given by

$$\rho(r, \vartheta, \phi) = \sigma(\vartheta, \phi)\delta(r - a)$$

2.18

$$q_{1,2} = \frac{R\left(R^2 + a^2\right)^{1/2}}{qa^2}\left[\left(R^2 + a^2\right)^{1/2} A_{1,2} - RA_{2,1}\right]$$

2.19
$\varphi = \frac{2q}{R^2}\left[\left(R^2 + z^2\right)^{1/2} - |z|\right]$,
$E_x = E_y = 0$, $E_z = \frac{2q}{R^2}\left[\frac{z}{|z|} - \frac{z}{(R^2 + z^2)^{1/2}}\right]$,

where z is the coordinate of the point of observation measured from the plane of the disc.
2.20 If the positively charged half of the ring occupies the region $x > 0$ in the xy-plane, then for $x, y \ll (R^2 + z^2)/R$ it is found, after expanding the integrand $\int (\kappa/r_{12})\,\mathrm{d}l$ into a series, that

$$\varphi = \frac{4qRx}{\pi\left(R^2 + z^2\right)^{3/2}}$$

and hence

$$E_x = -\frac{4qR}{\pi\left(R^2 + z^2\right)^{3/2}}, \quad E_y = 0, \quad E_z = \frac{12qRxz}{\pi\left(R^2 + z^2\right)^{3/2}}$$

When $z \gg R$ the field is the same as the field due to an electric dipole which lies along the x-axis and has a moment equal to $4qR/\pi$.
2.21 Owing to the symmetry of the system, the potential will be independent of the azimuthal angle ϕ and hence the xz-plane may be drawn through the point of observation without loss of generality (figure 2.21.1). Therefore,

$$r_{12} = \left(r^2 + R^2 - 2rR\sin\vartheta\cos\phi'\right)^{1/2}$$

and

$$\varphi(r,\vartheta) = 2\kappa R\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}\phi'}{\left(r^2 + R^2 - 2rR\sin\vartheta\cos\phi'\right)^{1/2}}$$

where $\kappa = q/(2\pi R)$.
Substituting $\phi' = \pi - 2\beta$ and writing

$$k^2 = \frac{4rR\sin\vartheta}{r^2 + R^2 + 2rR\sin\vartheta}$$

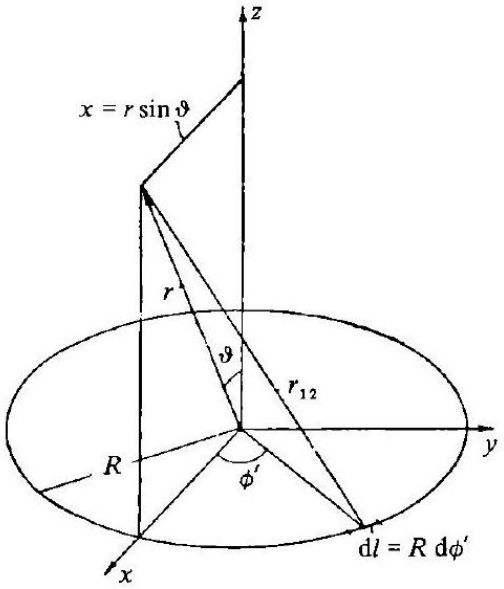


Figure 2.21.1.
we have

$$\varphi(r,\vartheta) = \frac{4\kappa R}{\left(r^2 + R^2 + 2rR\sin\vartheta\right)^{1/2}}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\mathrm{d}\beta}{\left(1 - k^2\sin^2\beta\right)^{1/2}} = \frac{2k\kappa}{(rR\sin\vartheta)^{1/2}}K(k)$$

2.22
(a) $\varphi = \frac{q}{(R^2+z^2)^{1/2}}$,
where z is the distance of the point of observation from the plane of the ring.
(b) $\varphi = \frac{q}{r}$.
(c) Let r' be the distance from the point of observation to the ring. For $r' \ll R$ we have

$$1 - k^2 \approx \frac{r'^2}{4R^2}, \quad K(k) = \ln \frac{8R}{r'}, \quad \varphi(r) = -2k \ln r' + \text{ constant}$$

which is the same result as for a linear charge.
2.23

$$\varphi_1 = \frac{4}{3}\pi\sigma_0 r \cos\vartheta \quad (r \leqslant R), \quad \varphi_2 = \frac{4\pi\sigma_0 R^3}{3r^2}\cos\vartheta \quad (r \geqslant R)$$

Inside the sphere the electric field is uniform and has an intensity $E_{1z} = -\frac{4}{3}\pi\sigma_0$; outside the sphere the field is the same as for a dipole with a moment $\frac{4}{3}\pi\sigma_0 R^3$.
2.24 Owing to the axial symmetry of the field, the Laplace equation in terms of cylindrical coordinates (the polar axis along the axis of symmetry of the system) is of the form

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0 \tag{2.24.1}$$

We shall seek the solution of equation (2.24.1) in the form of a power series

$$\varphi(r,z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z) r^n, \quad a_0(z) = \varphi(0,z) \equiv \Phi(z) \tag{2.24.2}$$

where $\Phi(z)$ is the potential along the axis of symmetry of the system. Substituting equation (2.24.2) into equation (2.24.1), rearranging and equating to zero the coefficients of the resulting series, we obtain the recurrence relations for the coefficients $a_n(z)$, and hence

$$\varphi(r,z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2}\left(\frac{r}{2}\right)^{2n} \Phi^{(2n)}(z) = \Phi(z) - \frac{r^2}{4}\Phi''(z) + \dots$$
$$E_r = -\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{r}{2}\Phi''(z) + \dots, \quad E_\phi = 0, \quad E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z} = -\Phi'(z) + \dots$$

2.25 The multipole moments to be computed are

$$Q_{lm} = \left(\frac{4\pi}{2l+1}\right)^{1/2} \int \kappa R^l Y_{lm}^*\left(\frac{\pi}{2}, \phi\right) R \, \mathrm{d}\phi$$
$$Q'_{lm} = \left(\frac{4\pi}{2l+1}\right)^{1/2} \int \frac{\kappa}{R^{l+1}} Y_{lm}^*\left(\frac{\pi}{2}, \phi\right) R \, \mathrm{d}\phi$$

Using equations (A2.1) and (A2.5) of appendix 2 we find that

$$\varphi(r,\vartheta) = \frac{q}{r}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\left(\frac{R}{r}\right)^{2n} P_{2n}(\cos\vartheta), \quad \text{when} , \quad r > R$$
$$\varphi(r,\vartheta) = \frac{q}{R}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\left(\frac{r}{R}\right)^{2n} P_{2n}(\cos\vartheta), \text{ when } \quad r < R$$
$$x!! \equiv x(x-2)\dots \begin{cases} 1, \text{ if } x \text{ is odd} \\ 2, \text{ if } x \text{ is even} \end{cases}$$

Both formulae hold at $r = R\left(\vartheta \neq \frac{1}{2}\pi\right)$.
2.26
(a) $\varphi \approx qa^2 \frac{3z^2-r^2}{r^5} = 2qa^2 \frac{P_2(\cos\vartheta)}{r^3}$;
(b) $\varphi \approx \frac{3qa^2 \sin^2\vartheta \cos\phi \sin\phi}{r^3}$.

2.27

(a) $\varphi \approx \frac{6qa^3 P_3(\cos\vartheta)}{r^4} = qa^3 \frac{15\cos^3\vartheta - 9\cos\vartheta}{r^4}$;
(b) $\varphi \approx \frac{15qabcxyz}{r^7} = \frac{15qabc \sin^2\vartheta \cos\vartheta \sin\phi \cos\phi}{r^4}$,
2.28

$$\varphi(r,\vartheta,\phi) = \sum_{l,m} \frac{4\pi}{2l+1} \frac{r^l}{r_0^{l+1}} Y_{lm}^*(\vartheta_0,\phi_0)\, Y_{lm}(\vartheta,\phi) \quad \text{when} \quad r < r_0$$

$$\varphi(r,\vartheta,\phi) = \sum_{l,m} \frac{4\pi}{2l+1} \frac{r_0^l}{r^{l+1}} Y_{lm}^*(\vartheta_0,\phi_0)\, Y_{lm}(\vartheta,\phi) \quad \text{when} \quad r > r_0.$$

2.29
$\varphi(x,y,z) \approx \frac{q}{r} + q\frac{a^2\left(3x^2-r^2\right)+b^2\left(3y^2-r^2\right)+c^2\left(3z^2-r^2\right)}{10r^5}$.
In the case of an ellipsoid of revolution

$$a = b \quad \text{and} \quad \varphi(r,\vartheta) = \frac{q}{r} + q\frac{c^2-a^2}{5}\frac{P_2(\cos\vartheta)}{r^3}$$

In the case of a sphere

$$a = b = c \quad \text{and} \quad \varphi = \frac{q}{r}$$

2.30 In spherical coordinates (polar axis along the axis of symmetry of the system and the origin at the centre of the rings) the potential is

$$\varphi(r,\vartheta) = -\frac{q\,(a^2-b^2)}{2}\frac{P_2(\cos\vartheta)}{r^3}$$

This expression represents the potential of a linear quadrupole in which two charges of $-q$ each are at a distance of $\frac{1}{2}\left(a^2-b^2\right)^{1/2}$ from the central charge of $2q$.
2.31 Since $\delta(r) = 0$ everywhere except at $r = 0$, we have

$$q = -\int (p'\cdot\nabla)\,\delta(r)\mathrm{d}^3r = -\oint (p'\cdot n)\,\delta(r)\mathrm{d}^2S = 0$$

Also,

$$p_\alpha = -\int x_\alpha\,(\boldsymbol{p}'\cdot\nabla)\,\delta(r)\mathrm{d}^3r = -\int x_\alpha p'_n \frac{\partial\delta(r)}{\partial x_n}\,\mathrm{d}^3r = \int p'_n \frac{\partial x_\alpha}{\partial x_n}\delta(r)\mathrm{d}^3r$$

The latter transformation involves integration by parts. We sum over the repeated subscript n. The resulting surface integral becomes equal to zero since $\delta(r) = 0$ when $r \neq 0$. In view of the definition of the δ-function we have

$$p_\alpha = p'_n \frac{\partial x_\alpha}{\partial x_n} = p'_n\delta_{\alpha n} = p'_\alpha$$

All the multipole moments of higher order are proportional to the components of r at $r = 0$ and are therefore equal to zero. For example, in the case of the quadrupole moment

$$Q_{\alpha\beta} = -\int x_\alpha x_\beta p'_n \frac{\partial \delta(r)}{\partial x_n}\,\mathrm{d}^3 r = \int \delta(r) p'_n \frac{\partial\,(x_\alpha x_\beta)}{\partial x_n}\,\mathrm{d}^3 r$$
$$= \left[p'_\alpha x_\beta + p'_\beta x_\alpha\right]_{r=0} = 0$$

2.32 On integrating by parts n times, we have

$$\varphi(r) = q(-1)^n \int \delta\,(r') \prod_i (a_i \cdot \nabla') \frac{1}{|r - r'|} \mathrm{d}^3 r' = q \prod_i (a_i \cdot \nabla) \frac{1}{r}$$

2.33 The simplest method is to use the formula

$$\varphi = \frac{qa^2}{r^5}\left(3z'^2 - r^2\right)$$

(cf solution to problem 2.26) and express z' in terms of x, y, and z (figure 2.33.1). The final result is

$$\varphi = \frac{qa^2}{r^5}\left[3(x\sin\gamma\cos\beta + y\sin\gamma\sin\beta + z\cos\gamma)^2 - r^2\right]$$

This result may also be obtained by using the fact that the components of the quadrupole moment form a tensor of rank 2. In the coordinate system (x', y', z') the components of the quadrupole moment are

$$Q'_{xx} = Q'_{yy} = Q'_{xy} = Q'_{xz} = Q'_{yz} = 0, \quad Q'_{zz} = 2qa^2$$

The transformation matrix is of the form

$$\hat{\alpha} = \begin{pmatrix} \cos\gamma\cos\beta & -\sin\beta & \sin\gamma\cos\beta \\ \cos\gamma\sin\beta & \cos\beta & \sin\gamma\sin\beta \\ -\sin\gamma & 0 & \cos\gamma \end{pmatrix}$$

This matrix may then be used to evaluate the components of $Q_{\alpha\beta}$ in the (x, y, z) system with the use of the expression

$$Q_{\alpha\beta} = \sum_{\gamma,\delta} \alpha_{\alpha\gamma}\alpha_{\beta\delta} Q'_{\gamma\delta}$$

and equation (2.0.8).

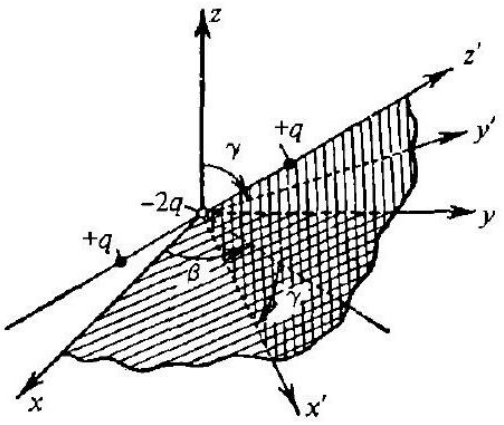


Figure 2.33.1.

2.34

$$\varphi = \frac{15qabcz}{2r^7}\left[\left(y^2 - x^2\right)\sin 2\beta + 2xy\cos 2\beta\right]$$

2.35

$$\varphi = \frac{qa^2}{4r^3}\left(3\sin^2\vartheta\sin 2\phi - 3\cos 2\vartheta - 1\right)$$

2.36 According to the superposition principle we have

$$\varphi(r) = \int\limits_V \frac{(\boldsymbol{P}\cdot\{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\})}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}\,\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}' = \int(\boldsymbol{P}\cdot\operatorname{grad}')\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}'$$

Application of Gauss' theorem to this expression yields

$$\varphi(r) = \int\limits_S \frac{P_n}{|r-r^r|}\mathrm{d}^2S$$

where S is the inner surface of the polarised sphere and $P_n = P\cos\vartheta$.
If the solution of problem 2.23 is used, it is found that

$$\varphi_1 = \frac{4\pi Pr}{3}\cos\vartheta \quad (r \leqslant R), \quad \varphi_2 = \frac{4\pi PR^3}{3r^2}\cos\vartheta \quad (r \geqslant R)$$

2.37

$$\varphi(r) = -2\kappa\ln r + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A_n\cos n\phi + B_n\sin n\phi}{nr^n}$$

where $\kappa = \int\rho(r')\,\mathrm{d}^2S'$ is the total charge per unit length,

$$A_n = \int\rho(r')\,r'^n\cos n\phi'\mathrm{d}^2S' \quad \text{and} \quad B_n = \int\rho(r')\,r'^n\sin n\phi'\mathrm{d}^2S'$$

are the two-dimensional multipole moments of order n. It follows from these formulae that the potential of a dipole in the two-dimensional case is given by

$$\varphi = 2\frac{(p\cdot r)}{r^2}$$

where $\boldsymbol{p} = \int\rho(r')\,r'\mathrm{d}^2S'$ is the dipole moment per unit length of the distribution and r is the position vector in the xy-plane.

2.38

$$\varphi(r,\phi) = -2\kappa\ln r + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{r_0}{r}\right)^n\cos n\left(\phi-\phi_0\right), \text{ when } r > r_0,$$

$$\varphi(r,\phi) = -2\kappa\ln r + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{r}{r_0}\right)^n\cos n\left(\phi-\phi_0\right), \text{ when } \quad r < r_0.$$

$$\phi(r) \approx \frac{2\kappa a}{r}\cos\phi = \frac{2(p\cdot r)}{r^2}$$

where p is the dipole moment per unit length, r is the position vector in the xy-plane ($r \geqslant a$), and the z-axis lies along one of the linear charges.

2.40 Along the axis of symmetry of the disc (the z-axis is drawn from the negative to the positive side of the disc),

$$\varphi(z) = \tau\Omega = 2\pi\tau\left[1 - \frac{|z|}{(R^2+z^2)^{3/2}}\right]\frac{z}{|z|}$$

$$E_x = E_y = 0, \quad E_z = \frac{2\pi a^2\tau z}{|z|\,(a^2+z^2)^{3/2}}$$

2.41 (a) In cylindrical coordinates

$$E_\phi = \frac{2\tau}{r}, \quad E_r = E_z = 0$$

(b) $\varphi = 2\tau(\pi - \phi)$, $\quad E_\phi = -\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\phi} = \frac{2\tau}{r}$; $\quad E_r = E_z = 0$.

The field $\boldsymbol{E}$ is identical in form with the magnetic field due to a straight line current $I = \tau c$.

2.42 The equation of the lines of force is

$$(z+a)\left[(z+a)^2 + r^2\right]^{-1/2} \pm (z-a)\left[(z-a)^2 + r^2\right]^{-1/2} = C$$

where C is a constant. The case of charges of different sign is illustrated in figure 2.42 .1 a . Figure 2.42 .1 b illustrates the case of two charges of the same kind. The neutral point occurs at $r = 0, z = 0$, for the case of two charges of the same kind (figure 2.42 .1 b).

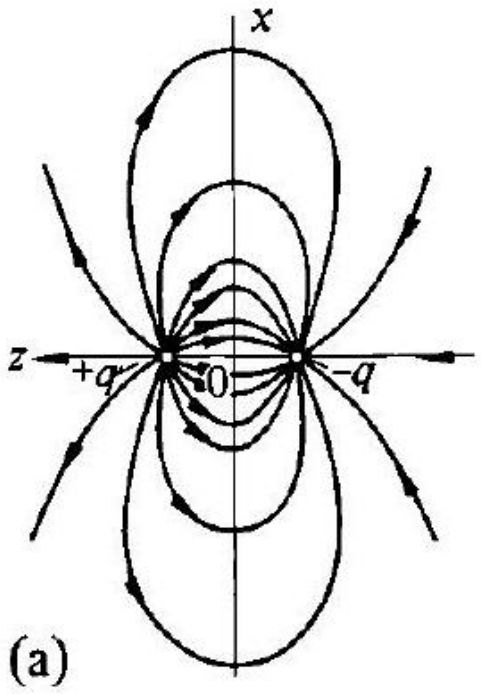
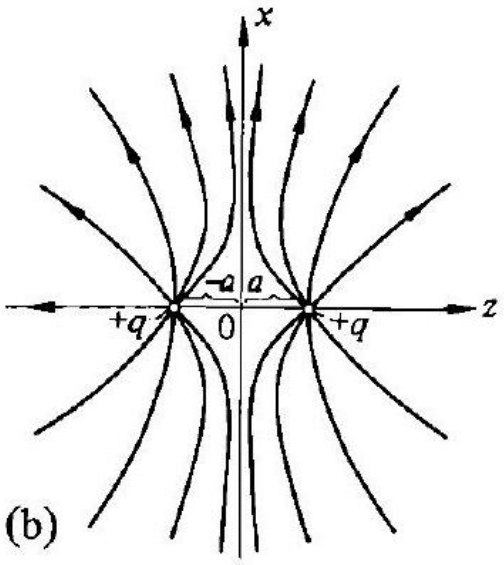


Figure 2.42.1.



(b)

2.43 It is convenient to use spherical coordinates. By letting a tend to zero, expanding into a series, and neglecting terms of the order of a^2 and higher, it is found that

$$r = C \sin^2 \vartheta$$

2.45 $r = C \left(\sin^2 \vartheta |\cos \vartheta| \right)^{1/2}$

$$C = \text{ constant}$$

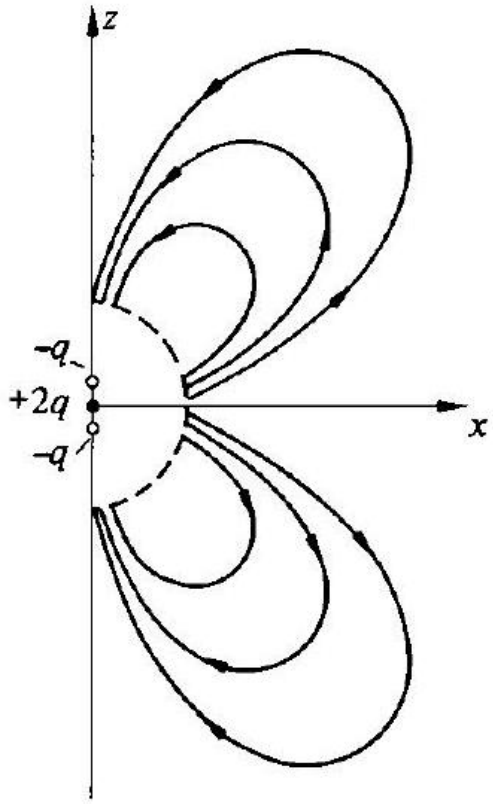


Figure 2.45.1.

It should be remembered that in the case of a quadrupole of finite dimensions this formula will only hold at large distances (figure 2.45.1).

2.46

$$q_2 = \frac{\Phi + \sqrt{2}(\sqrt{2}-1)\pi q_1}{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)\pi}$$

2.47 Consider a force tube which is obtained by rotating a line of force about the z-axis. Application of the electrostatic Gauss theorem to the volume bounded by the surface of this tube and two $z =$ constant planes which do not contain charges, shows that the flux through any cross section normal to the axis of the tube,

$$\Phi(z) = \sum_i q_i \Omega_i(z)$$

(cf problem 2.45), is independent of z (when z lies between z_k and z_{k+1}). Here $\Omega_i(z) = 2\pi\,(\pm 1 - \cos\alpha_i)$ is the solid angle subtended by the negative side of the cross section at the point z_i at which the charge q_i is located, and α_i is the angle between the z-axis and the position vector of a point on the periphery of the normal cross section whose coordinates are r, z. The positive sign should be taken for $z > z_i$ and the negative sign for $z < z_i$. If on varying z, the normal cross section of the tube passes through a charge q_k, then $\Phi(z)$ will change discontinuously by $\pm 4\pi q_k$, but $\sum_i q_i \cos\alpha_i$ will remain constant. Writing $\cos\alpha_i$ in terms of z, z_i, and r, we obtain the required equation for the family of lines of force:

$$\sum_i \frac{q_i\,(z - z_i)}{\left[r^2 + (z - z_i)^2\right]^{1/2}} = C, \quad C = \text{ constant}$$

2.49 Consider the cylindrical coordinate system whose z-axis lies along the axis of the cylinder (figure 2.49.1). Instead of the condition $\varphi =$ constant on the surface S of the cylinder, it is more convenient to use the condition that $\partial\varphi/\partial\phi = 0$ on the surface S, which is a consequence of it. After differentiation we have

$$\frac{\kappa_1 x_1}{R^2 + x_1^2 - 2Rx_1\cos\phi} = \frac{\kappa_2 x_2}{R^2 + x_2^2 - 2Rx_2\cos\phi}$$

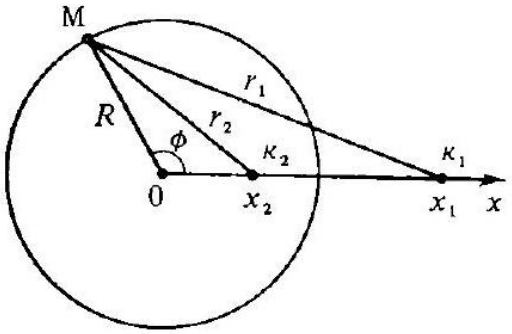


Figure 2.49.1.

On rearranging and equating terms with and without $\cos\phi$, we find that when $\kappa_1 = \kappa_2$, any cylindrical surface whose axis is parallel to the charged filaments and lies in the plane of the filaments will be an equipotential surface, provided its radius satisfies the condition $R^2 = x_1 x_2$. When $x_1 = 0$, the solution $\kappa_2 = 0$ will also exist. This corresponds to cylindrical equipotential surfaces in the field due to one of the filaments.

2.50 Referring to figure 2.50 .1, the radius R of the required sphere and the position of its centre are respectively given by

$$R^2 = z_1 z_2, \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{q_1^2}{q_2^2}$$

The potential on the surface of this sphere is zero.

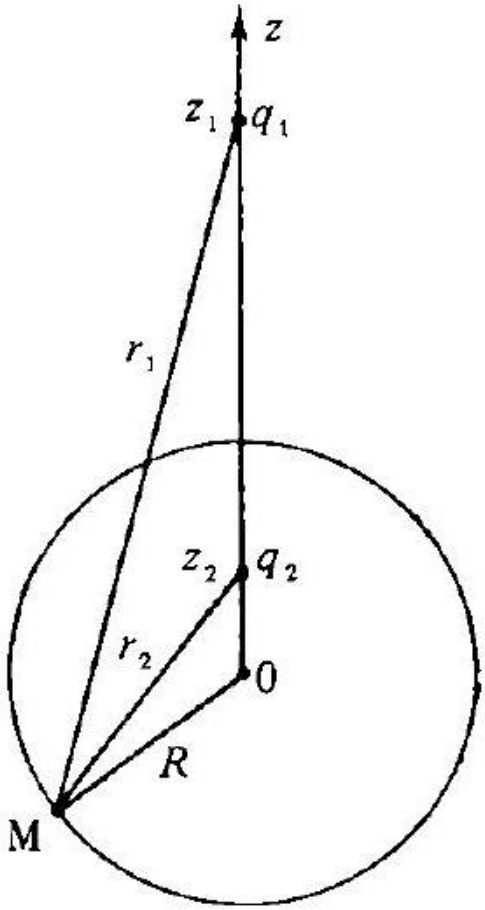


Figure 2.50.1.

2.51

$$\nabla^2\varphi = q\nabla^2\frac{\exp(-\alpha r)}{r} = q\nabla^2\frac{1}{r} + q\nabla^2\frac{\exp(-\alpha r)-1}{r}$$
$$= 4\pi q\delta(r) + \frac{q}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left[r\frac{\exp(-\alpha r)-1}{r}\right] = -4\pi q\delta(r) + \frac{q\alpha^2\exp(-\alpha r)}{r}$$

Thus, we have a point charge q at the origin and a spherical symmetric volume distribution with a density

$$\rho = -\frac{q\alpha^2\exp(-\alpha r)}{4\pi r}, \quad \int \rho\ \mathrm{d}^3r = -q$$

2.52 The point charge e_0 at the origin is surrounded by a volume charge with a density

$$\rho(r) = -\frac{e_0}{\pi a^3}\exp\left(-\frac{2r}{a}\right)$$

This is the charge distribution in the hydrogen atom (see problem 2.15).

2.53

$$U = \int \frac{e_0}{r}\rho(r)\mathrm{d}^3r = -\frac{e_0^2}{\pi a^3}\int_0^\infty r\exp\left(-\frac{2r}{a}\right)4\pi\ \mathrm{d}r = -\frac{e_0^2}{a}$$

2.54

$$U = \frac{5e_0^2}{4a}$$

2.55

$$U = \frac{q_1 q_2}{a}, \quad F = \frac{q_1 q_2}{a^2}$$

2.56

$$R = \frac{32\pi\gamma}{E_0^2}$$

2.57

$$U = \int_{l_1}\int_{l_2} \frac{\kappa_1\kappa_2 \, \mathrm{d}l_1 \, \mathrm{d}l_2}{r_{12}} = \frac{q_1 q_2}{4\pi^2 ab} \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{ab \, \mathrm{d}l_1 \, \mathrm{d}l_2}{\left[c^2 + a^2 + b^2 - 2ab\cos\left(\phi_1 - \phi_2\right)\right]^{1/2}}$$

where the integration is carried out over all elements $\mathrm{d}l_1$, $\mathrm{d}l_2$ of both rings and ϕ_1, ϕ_2 are the angles which define the position of the elements. Integrating with respect to ϕ_2 and substituting $\phi_1 = \pi - 2\phi$ we have

$$U = \frac{q_1 q_2 k}{\pi(ab)^{1/2}} K(k)$$

where

$$k = \frac{2(ab)^{1/2}}{\left[c^2 + (a+b)^2\right]^{1/2}} \quad \text{and} \quad K(k) = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\mathrm{d}\phi}{\left(1 - k^2\sin^2\phi\right)^{1/2}}$$

The function $K(k)$ is the complete elliptical integral of the first kind.
In evaluating the force

$$F = -\frac{\partial U}{\partial c} = -\frac{\partial U}{\partial k}\frac{\partial k}{\partial c}$$

it is necessary to use the formula [see Gradshteyn and Ryzhik, 1965, formula (8.112)]

$$2k^2 \frac{\mathrm{d}K(k)}{\mathrm{d}\left(k^2\right)} = \frac{E(k)}{1-k^2} - K(k)$$

where $E(k) = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \left(1 - k^2\sin^2\phi\right)^{1/2} \mathrm{d}\phi$ is the complete elliptical integral of the second kind.
Finally,

$$F = \frac{q_1 q_2 c k^3}{4\pi(ab)^{3/2}} \frac{E(k)}{1-k^2}$$

2.58

$$F = -\frac{3qr(p\cdot r)}{r^5} + \frac{qp}{r^3}, \qquad N = \frac{q[p \wedge r]}{r^3}$$

2.59

$$U = \frac{p_1 p_2}{r^3}\left(\sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2 \cos\varphi - 2\cos\vartheta_1\cos\vartheta_2\right)$$

where ϑ_1 is the angle between $\boldsymbol{r}$ and $\boldsymbol{p}_1$, ϑ_2 is the angle between $\boldsymbol{r}$ and $\boldsymbol{p}_2$, φ is the angle between the planes (r, p_1) and (r, p_2), and

$$F = \frac{3p_1p_2}{r^4}\left(\sin\vartheta_1 \sin\vartheta_2 \cos\varphi - 2\cos\vartheta_1 \cos\vartheta_2\right)$$

The force reaches a maximum when $\vartheta_1 = \vartheta_2 = \varphi = 0$, i.e. when the dipoles are parallel.

2.60

$$U_{21} = \int \rho\left(r'\right)\varphi_1\left(r'\right)\mathrm{d}^3r' = \sum_{l,m}\left(\frac{4\pi}{2l+1}\right)^{1/2} a_{lm}\int r'^l Y_{lm}\left(\vartheta', \phi'\right)\mathrm{d}^3r'$$
$$= \sum_{l,m} a_{lm}Q^*_{lm}$$

17.3 Electrostatics of conductors and dielectrics

a Basic concepts and methods of electrostatics

3.1

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \frac{2}{\epsilon_1+\epsilon_2}\frac{q}{r}, \quad D_1 = \frac{2\epsilon_1}{\epsilon_1+\epsilon_2}\frac{qr}{r^3}, \quad D_2 = \frac{2\epsilon_2}{\epsilon_1+\epsilon_2}\frac{qr}{r^3}$$

3.2

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \frac{2\pi}{\epsilon_1\alpha_1+\epsilon_2\alpha_2+\epsilon_3\alpha_3}\frac{q}{r}, \quad D_i = \frac{2\pi\epsilon_i}{\epsilon_1\alpha_1+\epsilon_2\alpha_2+\epsilon_3\alpha_3}\frac{qr}{r^3}$$

3.3 The boundary conditions (φ = constant on the surface of the conductor and $\varphi = 0$ when $r \to \infty$) may be satisfied by a potential of the form $\varphi = C/r$ where the constant C is determined from the conditions

$$\oint_S D_n\,\mathrm{d}^2S = 4\pi q, \quad C = \frac{2q}{\epsilon_1+\epsilon_2}$$

Hence we have

$$\varphi = \frac{2q}{\epsilon_1+\epsilon_2}\frac{1}{r}$$

and the surface distributions are

$$\sigma_1 = \tfrac{q\epsilon_1}{2\pi a^2(\epsilon_1+\epsilon_2)}, \quad \sigma_2 = \tfrac{q\epsilon_2}{2\pi a^2(\epsilon_1+\epsilon_2)}$$
$$\sigma_{1\,\mathrm{b}} = \tfrac{q(\epsilon_1-1)}{2\pi a^2(\epsilon_1+\epsilon_2)}, \quad \sigma_{2\,\mathrm{b}} = \tfrac{q(\epsilon_2-1)}{2\pi a^2(\epsilon_1+\epsilon_2)}$$

3.4

$$C = \left[\frac{(\epsilon-1)\Omega}{4\pi}+1\right]\frac{ab}{b-a}$$

3.5

$$C = \left[\frac{1}{\epsilon_1}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{c}\right)+\frac{1}{\epsilon_2}\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{b}\right)\right]^{-1}$$

The bound charges are located where the dielectric is nonuniform, i.e. on the spheres with radii a, b, c:

$$\sigma_{a,\,\mathrm{b}} = -\frac{q}{4\pi a^2}\frac{\epsilon_1 - 1}{\epsilon_1}, \quad \sigma_{b,\,\mathrm{b}} = \frac{q}{4\pi b^2}\frac{\epsilon_2 - 1}{\epsilon_2},$$
$$\sigma_{c,\,\mathrm{b}} = \frac{q}{4\pi c^2}\left(\frac{1}{\epsilon_2} - \frac{1}{\epsilon_1}\right)$$

where q is the charge on the inner electrode of the capacitor. The total bound charge on the capacitor is zero.

3.7 The capacitance is

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{4\pi a \ln 2}$$

The surface density of bound charges is given by

$$\sigma_{\mathrm{b}} = -\sigma\left(1 - \frac{1}{\epsilon_0}\right), \quad \text{when} \quad x = 0$$
$$\sigma_{\mathrm{b}} = \sigma\left(1 - \frac{1}{2\epsilon_0}\right), \quad \text{when} \quad x = a$$

The volume density is given by

$$\rho_{\mathrm{b}} = \frac{\sigma a}{\epsilon_0 (x + a)^2}$$

where σ is the charge at $x = 0$.

3.8

(a) $f_0 = \frac{E_0^2}{8\pi} = \frac{V^2}{8\pi d^2}$

(b) $f = \frac{D^2}{8\pi\epsilon} = \frac{1}{\epsilon} f_0$ (liquid dielectric),
$f = \frac{D^2}{8\pi} = f_0$ (solid dielectric);

(c) $f = \frac{\epsilon E^2}{8\pi} = \epsilon f_0$ (liquid dielectric),
$f = \frac{(\epsilon E)^2}{8\pi} = \epsilon^2 f_0$ (solid dielectric)

3.9

(a) $F = \frac{(\epsilon-1) b h_2 V^2}{8\pi\epsilon h_1 [h_1 - h_2(\epsilon-1)/\epsilon]}$;

(b) $F = \frac{2\pi(\epsilon-1) h_1 h_2 q^2 [h_1 - h_2(\epsilon-1)/\epsilon]}{b\{a[h_1 - h_2(\epsilon-1)/\epsilon] + (\epsilon-1) h_2 x/\epsilon\}}$.

3.10 Consider the pressures at the points A and B in the liquid (figure 3.10.1). At B the pressure is equal to the atmospheric pressure p_{atm}. The pressure at A may be found either from equation (3.a.25), according to which

$$p_{\mathrm{A}} = p_{\mathrm{atm}} + \frac{E^2}{8\pi}\frac{\tau \partial\epsilon}{\partial\tau}$$

(where $p_{\mathrm{atm}} = p_0, E = V/d$), or by noting the fact that p_{A} differs from the pressure at the surface of the liquid in the capacitor by the hydrostatic pressure rgh so that

$$p_{\mathrm{A}} = rgh + \tau\frac{E^2}{8\pi}\frac{\partial\epsilon}{\partial\tau} - \frac{\epsilon - 1}{8\pi}E^2 + p_{\mathrm{atm}}$$

[cf equation (3.a.23)]. On comparing the two expressions we find that

$$h = \frac{\epsilon - 1}{8\pi g\tau}E^2$$

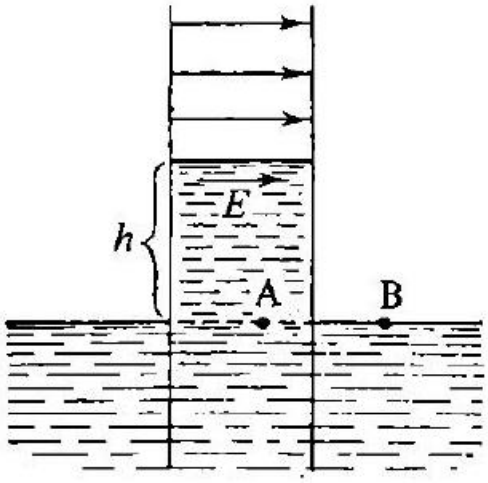


Figure 3.10.1.

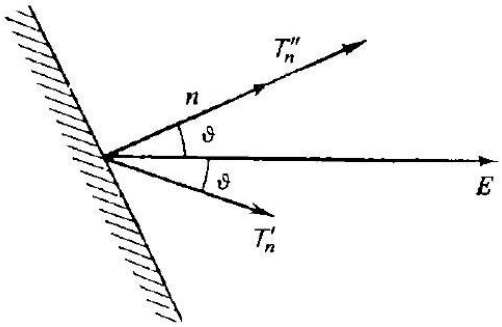


Figure 3.11.1.

3.11 The Maxwell stress tensor T_n' is oriented so that the electric field E bisects the angle between n and T_n' (figure 3.11.1)

$$|T_n'| = w = \frac{\epsilon E^2}{8\pi}$$

for any orientation of the area. The strictional stress is given by

$$T_n'' = \frac{E^2 \tau n}{8\pi} \frac{\partial \epsilon}{\partial \tau}$$

and is always directed along the normal n ('negative pressure').

3.12 (a) Consider the cylindrical coordinate system illustrated in figure 3.12.1a. In the xy-plane the field is radial and is given by

$$E = \frac{2qr}{\epsilon \left(r^2 + \frac{1}{4}a^2\right)^{3/2}}$$

The force F acting on one of the charges, for example the left-hand charge, is obtained by adding the stresses applied to the elements d^2S of this plane on the right-hand side

$$T_z \, \mathrm{d}^2S = -\frac{\epsilon}{8\pi} E^2 \, \mathrm{d}^2S = -\frac{\epsilon q^2}{2\pi} \frac{r^2}{\left(r^2 + \frac{1}{4}a^2\right)^3 \epsilon^2} \, \mathrm{d}^2S$$

if we use the Maxwell stress tensor. Hence

$$F_z = \int T_z \, \mathrm{d}^2S = -\frac{1}{2\pi} \epsilon q^2 \int_0^\infty \frac{r^2 2\pi r \, \mathrm{d}r}{\epsilon^2 \left(r^2 + \frac{1}{4}a^2\right)^3} = -\frac{q^2}{\epsilon a^2}$$

This is in fact the force acting between two charges in a uniform dielectric. However, if this calculation is carried out with the total stress tensor, then the force becomes $F_z + \Delta F_z$ where

$$\Delta F_z = \frac{q^2\tau}{\epsilon^2 a^2}\frac{\partial\epsilon}{\partial\tau}$$

The correction ΔF_z is due to the strictional term. However, the theory which takes into account the electrostrictional stresses must also allow for the fact that the liquid will be drawn into the field, and for the associated increase in the hydrostatic pressure, which is given by

$$\Delta p = \frac{E^2\tau}{8\pi}\frac{\partial\epsilon}{\partial\tau}$$

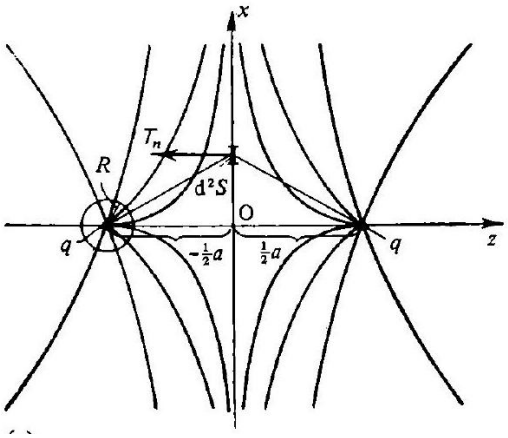
[equation (3.a.25)]. The resulting hydrostatic force is

$$\Delta F_{z\ \mathrm{h}} = -\frac{q^2\tau}{\epsilon^2 a^2}\frac{\partial\epsilon}{\partial\tau} = -\Delta F_z$$

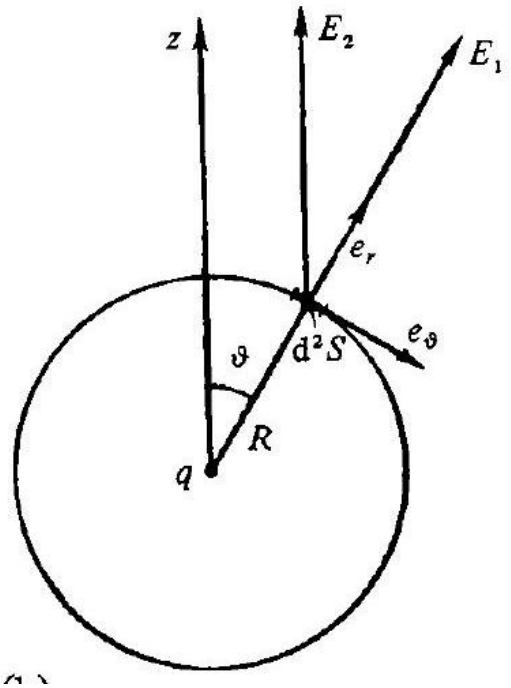
The total force between the charges is thus given by

$$F_z + \Delta F_z + \Delta F_{z\ \mathrm{h}} = -\frac{q^2}{\epsilon a^2}$$

and is, therefore, equal to the force which is obtained without allowance for the strictional forces. Consequently it is the total force due to both electrical and mechanical effects.
(b) The same results are obtained by considering the stresses on the surface of a small sphere of radius R whose centre coincides with the



(a)



(b)

Figure 3.12.1.

point charge q on which the force is acting (figure 3.12 .1 b). Introduce spherical polars and consider the Maxwell stress

$$T'_n = \frac{\epsilon}{4\pi}\left(E_r E - \frac{1}{2}E^2 e_r\right)$$

where $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2$ and the field due to the charge on which the force is acting is

$$E_1 = \frac{q}{\epsilon R^2} e_r$$

while the field due to the second charge is

$$E_2 = \frac{q}{\epsilon a^2}\left(e_\vartheta \sin\vartheta - e_r \cos\vartheta\right)$$

and may be looked upon as uniform, since the distance between the charges is $a \gg R$. Hence adding the stresses on the surface of the sphere we find that

$$F = \int T'_n \mathrm{d}^2 S = \frac{q}{\epsilon a^2} e_z$$

The inclusion of strictional stresses does not modify this result owing to hydrostatic compensation.

3.13

$$\varphi_0 = \left(\frac{8mg}{\epsilon - 1}\right)^{1/2}$$

where g is the acceleration due to gravity.

3.14

When $z \geqslant 0$, $\quad \varphi = \varphi_1 = \frac{q}{\epsilon_1 r_1} + \frac{(\epsilon_1 - \epsilon_2)}{\epsilon_1(\epsilon_1 + \epsilon_2)}\frac{q}{r^2}$.

When $z \leqslant 0$, $\quad \varphi = \varphi_2 = \frac{2}{\epsilon_1 + \epsilon_2}\frac{q}{r_1}$.

3.15

$$\sigma_{\mathrm{b}} = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial\varphi_2}{\partial z} - \frac{\partial\varphi_1}{\partial z}\right)\Big|_{z=0} = \frac{qa}{2\pi r^3}\frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1\left(\epsilon_1 + \epsilon_2\right)}$$

where

$$r = \left(x^2 + y^2 + a^2\right)^{1/2} = r_1|_{z=0} = r_2|_{z=0}$$

When $\epsilon_2 \to \infty$, the problem reduces to that of a point charge q placed in the dielectric ϵ_1 just outside the plane surface of the conductor. The surface density is then

$$\sigma_{\mathrm{b}} \to -\frac{qa}{2\pi r^3}\epsilon_1$$

This limiting density is in fact the sum of the density of bound charges on the surface of the dielectric and the density of free charges on the surface of the conductor.
3.16

$$F = \frac{q^2}{4a^2}\frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1\left(\epsilon_1 + \epsilon_2\right)}$$

When $\epsilon_1 > \epsilon_2$, the charge is repelled from the boundary between the dielectrics, and when $\epsilon_1 < \epsilon_2$ the charge is attracted. A charge which is at first in the medium with the higher permittivity is repelled and moves away from the boundary. A charge which is at first in the medium with the lower permittivity is attracted towards the boundary, passes through it, and having reached the second medium is repelled by it and moves to infinity. All these results will hold provided that frictional effects experienced by the charge while it is moving in the media are neglected.

The above expression for the force F may be obtained in various ways:
(a) by considering the interaction between two point charges q' and q'';
(b) by calculating the force on the point charge which is due to bound charges on the separation boundary;
(c) with the aid of the Maxwell stress tensor.

In the latter case it is convenient to discuss stresses on the separation boundary, or on the surface of a small sphere surrounding the charge.

$$F_1 = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1\left(\epsilon_1 + \epsilon_2\right)}\frac{q_1^2}{4a^2} + \frac{q_1 q_2}{2\left(\epsilon_1 + \epsilon_2\right)a^2}$$
$$F_2 = \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_2\left(\epsilon_1 + \epsilon_2\right)}\frac{q_2^2}{4a^2} + \frac{q_1 q_2}{2\left(\epsilon_1 + \epsilon_2\right)a^2}$$

The fact that the forces acting on q_1 and q_2 are not equal is due to the fact that the two charges do not by themselves form a closed mechanical system: there are also bound charges on the separation boundary between the two dielectrics. The vector sum of the forces on the boundary and on the charges q_1 and q_2 is equal to zero.
3.18 If it is assumed that in the metal $\varphi = 0$, then in the dielectric

$$\varphi = \frac{q}{\epsilon r_1} - \frac{q}{\epsilon r_2}$$

(see figure 3.14.1: charge q at A, charge $-q$ at B; $\epsilon_1 = \epsilon, \epsilon_2 = \infty$). The term $-q/\epsilon r_2$ is due to the charge induced in the conductor and the bound charges on the dielectric. It is equivalent to the potential of a point charge $-q/\epsilon$ at the point $z = -a$. The charge $-q/\epsilon$ is called the

image of the charge q/ϵ in the plane $z = 0$ (the factor $1/\epsilon$ represents the effect of the dielectric).

$$\sigma = -\frac{qa}{2\pi r^3}, \quad F = -\frac{q^2}{4a^2\epsilon}$$

where r is the position vector in the plane $z = 0$.

3.19 The field between the conducting planes is due to the charge systems shown in figure 3.19.1.

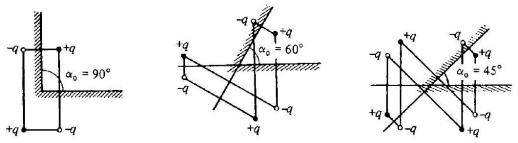


Figure 3.19.1.

3.20 Suppose that the dipole is located at the point $(0, 0, z)$. If the components of the dipole moment p along the x-, y-, and z-axes are $(p\sin\phi, 0, p\cos\phi)$ then the components of its image $\boldsymbol{p}'$ along these axes will be $(-p\sin\phi, 0, p\cos\phi)$.

$$U = \frac{(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{p}')\,r^2 - 3(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r})\,(\boldsymbol{p}'\cdot r)}{2\epsilon r^5} = -\frac{p^2}{16z^3\epsilon}\left(1+\cos^2\phi\right)$$

$$F_z = -\frac{3p^2}{16z^4\epsilon}\left(1+\cos^2\phi\right), \quad N_\phi = -\frac{p^2\sin^2\phi}{16z^3\epsilon}$$

The factor $\frac{1}{2}$ in the expression for U is due to the fact that the field E' due to the dipole moment $\boldsymbol{p}'$ is proportional to $\boldsymbol{p}$. When $\boldsymbol{p}$ is increased by $\mathrm{d}p$ at constant orientation, the interaction energy increases by

$$\mathrm{d}U = -\left(\boldsymbol{E}'\cdot\mathrm{d}p\right)$$

and hence

$$U = \int_0^p \mathrm{d}U = -\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{E}'\cdot\boldsymbol{p}\right)$$

(cf the solution to problem 3.37).

The dipole is attracted to the plane whatever its orientation. The couple N tends to align the dipole with the z-axis, either in the positive or the negative direction ($\phi = 0, \pi$). The couple will also vanish when $\phi = \frac{1}{2}\pi$, but this equilibrium position is unstable.

3.21 Consider a set of polar coordinates with the origin at the centre of the sphere and the z-axis parallel to $\boldsymbol{E}_0$. The potential may be sought in the form of a series in Legendre polynomials (cf the solution of problem 3.25).

The final result is

$$\varphi_1 = -\frac{3\epsilon_2}{\epsilon_1+2\epsilon_2}E_0 r\cos\vartheta, \text{ when } r < a$$

$$\varphi_2 = -E_0 r\cos\vartheta + \frac{\epsilon_1-\epsilon_2}{\epsilon_1+2\epsilon_2}E_0 a^3\frac{\cos\vartheta}{r^2}, \text{ when } r > a$$

The electric field inside the sphere is uniform and is given by

$$E_1 = \frac{3\epsilon_2}{\epsilon_1+2\epsilon_2}E_0 \quad \begin{cases} > E_0, & \text{when} \quad \epsilon_2 > \epsilon_1\,, \\ < E_0, & \text{when} \quad \epsilon_2 < \epsilon_1\,. \end{cases}$$

Outside the sphere the resultant field consists of the external uniform field E_0 and the field due to an electric dipole of moment

$$p = E_0 a^3 \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + 2\epsilon_2}$$

This secondary field is due to bound charges on the surface of the dielectric sphere with densities

$$\sigma_\mathrm{b} = \frac{3}{4\pi} \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + 2\epsilon_2} E_0 \cos\vartheta, \qquad \rho_\mathrm{b} = 0$$

It is easy to understand the reason for such a charge distribution by considering each small element of the polarised dielectric as an elementary dipole.

3.22 For the dielectric with unaltered polarisation

$$\Delta E = -\frac{4}{3}\pi P$$

(see problem 2.36). For a normal dielectric

$$\Delta E = -\frac{12\pi\epsilon}{(2\epsilon + 1)(\epsilon - 1)} P$$

3.23

$$\varphi = -(E_0 \cdot r) + \frac{(p \cdot r)}{r^3} \quad (r \geqslant R)$$

where $p = R^3 E_0$, R^3 is the polarisability of the sphere, and

$$\sigma = \frac{3\epsilon_0}{4\pi} E_0 \cos\vartheta$$

3.24 The force F on one of the charges may be found by multiplying q_1 by the field strength due to the second charge, q_2, in the cavity around q_1. Since the cavity is small, the field inside it is uniform and equal to

$$\frac{3\epsilon E_0}{2\epsilon + 1} = \frac{3q}{(2\epsilon + 1)a^2}$$

where $E_0 = q/\epsilon a^2$ is the uniform field in the vicinity of the cavity. Hence,

$$F = \frac{3q^2}{(2\epsilon + 1)a^2}$$

This force is different from the force between charges in a uniform liquid dielectric with the same permittivity (see problem 3.12). If, by analogy with problem 3.12, it were required to find the force on the plane of symmetry, then a calculation involving only the Maxwell stresses would yield

$$F_1 = \frac{q^2}{\epsilon a^2}$$

This differs both from the force F on the charge itself and from the total electric stress force (the strictional term is ignored in view of its complicated form for a solid). An equal force will act on any region of the dielectric surrounding the cavity containing the charge. One part of this force, namely

$$\frac{3q^2}{(2\epsilon+1)a^2}$$

acts on the point charge q and the other part, namely,

$$-\frac{(2\epsilon-1)q^2}{(2\epsilon+1)a^2\epsilon}$$

acts on the bound charges on the surface of the cavity.

3.25 Let the origin of spherical polar coordinates be at the centre of the sphere (figure 3.25.1) and consider the potential in the form

$$\varphi(r,\vartheta,\phi)=\frac{q}{\epsilon r_1}+\sum_{l,m}\left(a_{lm}r^l+\frac{b_{lm}}{r^{l+1}}\right)P_{lm}(\cos\vartheta)\exp(\mathrm{i}m\phi) \tag{3.25.1}$$

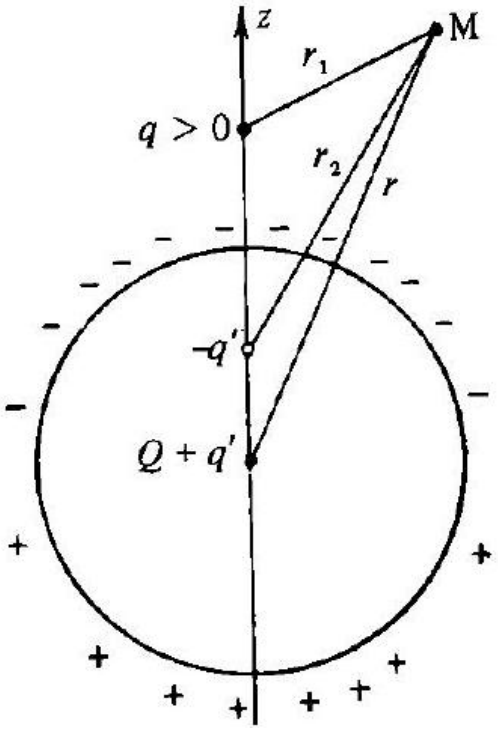


Figure 3.25.1.

where r_1 is the distance between q_1 and the point of observation. The series in equation (3.25.1) represents the field due to charges induced on the sphere. This field should vanish at infinity, and therefore $a_{lm}=0$. Because of the symmetry of the problem, the potential is independent of the angle ϕ, and hence terms with $m\neq 0$ will also vanish. The remaining constants, $b_l\equiv b_{l0}$, will be determined from the boundary conditions. In case (a) the potential of the sphere is

$$\varphi(R,\vartheta)=V=\ \text{constant}$$

Using the expansion for q/r_1 given in problem 2.28 we have

$$\varphi(R,\vartheta)=\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{qR^l}{\epsilon a^{l+1}}+\frac{b_l}{R^{l+1}}\right)P_l(\cos\vartheta)=V$$

and hence

$$b_l=-\frac{qR^{2l+1}}{\epsilon a^{l+1}}\quad\text{when}\quad l\neq 0,\quad b_0=VR-\frac{Rq}{\epsilon a}$$

so that the potential outside the sphere is given by

$$\varphi(r,\vartheta) = \frac{q}{\epsilon r_1} + \frac{VR}{r} - \frac{qR}{\epsilon a}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{R^2}{a}\right)^l \frac{P_l(\cos\vartheta)}{r^{l+1}} \tag{3.25.2}$$

The density of charges induced on the surface of the sphere can now be found and is given by

$$\sigma(R,\vartheta) = -\frac{\epsilon}{4\pi}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\bigg|_{r=R} = \frac{\epsilon V}{4\pi R} - \frac{q}{4\pi}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\frac{R^{l-1}}{a^{l+1}}P_l(\cos\vartheta)$$

In case (b) the potential V is unknown and should be expressed in terms of the charge Q of the sphere. Clearly,

$$Q = 2\pi\int\sigma(R,\vartheta)R^2\sin\vartheta\ \mathrm{d}\vartheta = \epsilon VR - \frac{qR}{a}$$

and hence

$$V = \frac{Q}{\epsilon R} + \frac{q}{\epsilon a}$$

Using the solution of problem 2.28, equation (3.25.2) may be rewritten in the form

$$\varphi = \frac{q}{\epsilon r_1} + \frac{Q+q'}{\epsilon r} - \frac{q'}{\epsilon r_2}$$

where

$$q' = q\frac{R}{a}, \quad r_2 = \left(r^2 + a'^2 - 2a'r\cos\vartheta\right)^{1/2}, \quad a' = \frac{R^2}{a}$$

Thus, in the region $r > a$, the potential due to the sphere and the point charge is equivalent to the potential due to four point charges lying along the axis of symmetry, namely, a charge q at a distance a from the origin and its three images, i.e. charges Q and $q' = qR/a$ at the origin and a charge $-q'$ at the point $a' = R^2/a$. The charge $-q'$ represents the effect of charges induced on the surface of the sphere which is nearest to q (figure 3.25 .1). The sign of these charges is clearly opposite to that of q. The charge $+q'$ represents the effect of charges on the distant side of the sphere and is, of course, of the same sign as q. If the sphere as a whole is neutral, then the term including Q will vanish. When the sphere is earthed ($V = 0$) the potential is given by

$$\varphi = \frac{q}{\epsilon r_1} - \frac{q'}{\epsilon r_2}$$

3.26

$$\varphi(M) = \frac{q}{\epsilon r_1} - \frac{q'}{\epsilon r_2} + V$$

where (see figure 3.26 .1)

$$q' = q\frac{R}{a}. \quad a' = \frac{R^2}{a}$$

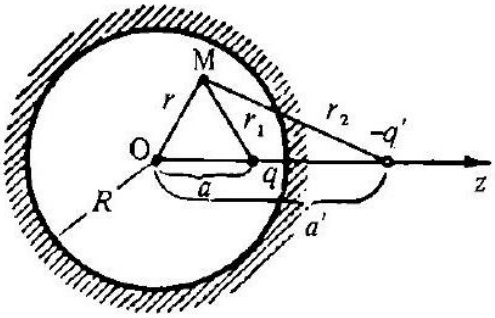


Figure 3.26.1.

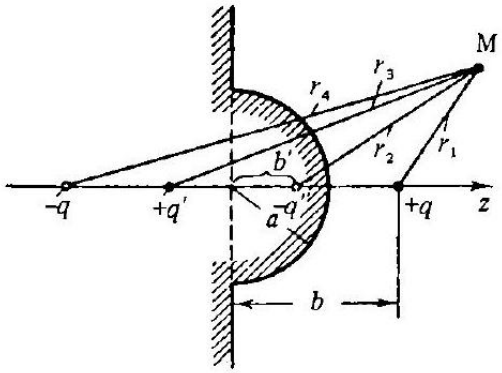


Figure 3.27.1.

3.27

$$\varphi(M) = \frac{q}{r_1} - \frac{q'}{r_2} + \frac{q'}{r_3} - \frac{q}{r_4}$$

where

$$q' = \frac{qa}{b} \quad b' = \frac{a^2}{b}$$

(see figure 3.27.1). The charge on the boss is given by

$$Q = -q\left[1 - \frac{b^2 - a^2}{b\left(a^2 + b^2\right)^{1/2}}\right]$$

3.28 Outside the sphere

$$\varphi \equiv \varphi_i = \frac{q}{\epsilon_1 r}$$

in the conductor

$$\varphi \equiv \varphi_3 = \frac{q}{\epsilon_1 R_1}$$

in the cavity

$$\varphi \equiv \varphi_2 = \frac{q}{\epsilon_2 r_1} - \frac{q'}{\epsilon_2 r_2} + \frac{q}{\epsilon_1 R_1}$$

(see figure 3.28 .1) where

$$q' = \frac{qR_2}{a}, \quad a' = \frac{R_2^2}{a}$$

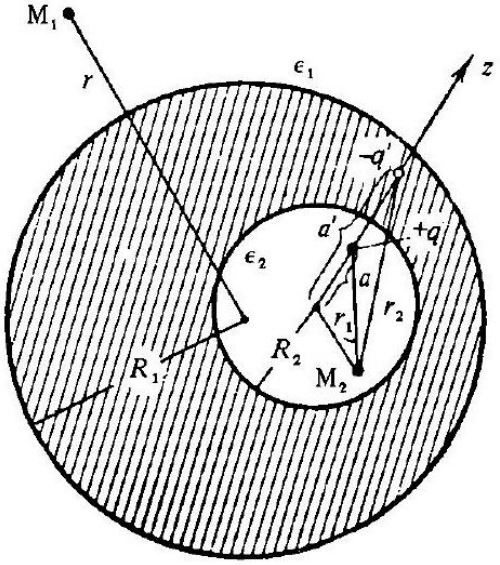


Figure 3.28.1.

3.29

(a) $\varphi_1(r,\vartheta) = q\sum\limits_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{l\epsilon_1+(l+1)\epsilon_2}\frac{r^l}{a^{l+1}}P_l(\cos\vartheta)$, when $\quad r \leqslant R$,

$$\varphi_2(r,\vartheta) = \frac{q}{\epsilon_2 r_1} + q\frac{\epsilon_2-\epsilon_1}{\epsilon_2}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{l}{l\epsilon_1+(l+1)\epsilon_2}\frac{R^{2l+1}}{a^{l+1}}\frac{P_l(\cos\vartheta)}{r^{l+1}},\ \text{when } r \geqslant R$$

where r_1 is the distance between the point charge q and the point of observation. In this case the potential cannot be derived from a simple set of images. As $\epsilon_1 \to \infty$ we get the result of problem 3.25.

(b) $F = -q^2\frac{\epsilon_1-\epsilon_2}{\epsilon_2}\sum\limits_{l=0}^{\infty}\frac{l(l+1)}{l\epsilon_1+(l+1)\epsilon_2}\frac{R^{2l+1}}{a^{2l+3}}$;

$$F = \frac{q^2}{\epsilon_2(2a)^2} - 2q^2\frac{\epsilon_1-\epsilon_2}{\epsilon_2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n(2n+1)}{2n\epsilon_1+(2n+1)\epsilon_2}\frac{R^{4n+1}}{a^{4n+3}}$$

The repulsive charge between charges of the same sign is weakened by the polarisation of the dielectric, when $\epsilon_1 > \epsilon_2$, and is strengthened, when $\epsilon_1 < \epsilon_2$.

3.30

$$\varphi_1 = \frac{q}{\epsilon_1 r_1} + q\frac{\epsilon_1-\epsilon_2}{\epsilon_1}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{l+1}{\epsilon_1 l+\epsilon_2(l+1)}\frac{a^l r^l}{R^{2l+1}}P_l(\cos\vartheta),\ \text{when } r \leqslant R$$

$$\varphi_2 = q\sum_{l=0}^{\infty}\frac{2l+1}{\epsilon_1 l+\epsilon_2(l+1)}\frac{a^l}{r^{l+1}}P_l(\cos\vartheta), \quad \text{when} \quad r \geqslant R$$

where r_1 is the distance between the point of observation and the charge q.

When $a = 0$,

$$\varphi_1 = \frac{q}{\epsilon_1 r} + \left(1-\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}\right)\frac{q}{\epsilon_2 R}, \quad \varphi_2 = \frac{q}{\epsilon_2 r}$$

3.31 Let the surfaces of the inner and outer spheres be denoted by S_1 and S_2, respectively, and suppose that the potential of the inner sphere is zero. It is convenient to solve the problem in terms of polar coordinates with the polar axis joining the centres of the spheres and the

origin at the centre of the inner sphere. The equation of the surface S_1 is then $r = a$. In order to obtain the equation for S_2 we note that in the triangle OO′A (figure 3.31.1):

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{(R^2 + c^2 - 2cR\cos\vartheta)^{1/2}} \tag{3.31.1}$$

On expanding, and neglecting terms of order higher than c, we find from equation (3.31.1) that the equation of S_2 is

$$R(\vartheta) = b + cP_1(\cos\vartheta) \tag{3.31.2}$$

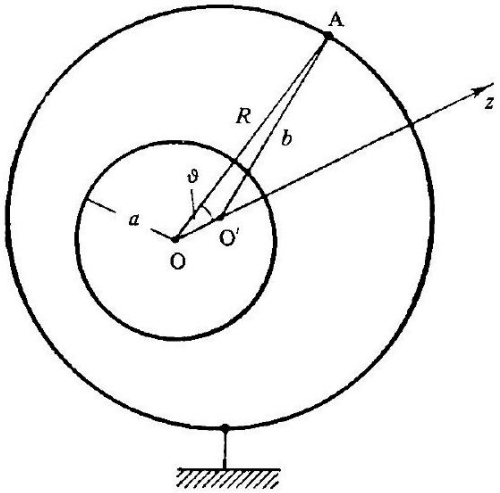


Figure 3.31.1.

where

$$P_1(\cos\vartheta) = \cos\vartheta$$

The term $cP_1(\cos\vartheta) = c\cos\vartheta$ in equation (3.31.2) describes the departure from spherical symmetry and vanishes when $c \to 0$. It is natural to seek the potential in the form of an expansion in spherical harmonics (see appendix 2) and to retain only the first two terms. The second term, which represents the departure from spherical symmetry, should be proportional to c. Thus,

$$\varphi(r,\vartheta) = \left(A_1 + \frac{B_1}{r}\right) + c\left(A_2 r + \frac{B_2}{r^2}\right)\cos\vartheta$$

where the A_i and B_i are determined from the boundary conditions

$$\varphi|_{S_1} = \text{ constant }, \quad \varphi|_{S_2} = 0, \quad \oint_{S_1} \frac{\partial\varphi}{\partial n}\,\mathrm{d}S_1 = -4\pi q$$

The final result is

$$\varphi = q\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b}\right) + \frac{qc}{b^3 - a^3}\left(r - \frac{a^3}{r^2}\right)\cos\vartheta$$

and hence the density of charge on the inner sphere is given by

$$\sigma = \frac{q}{4\pi a^2} - \frac{3qc}{4\pi\,(b^3 - a^3)}\cos\vartheta$$

and the force on the inner sphere is given by

$$F = -\frac{qc}{b^3 - a^3}$$

3.32

$$\Delta C = \frac{a^2 b^2 c^2}{(b-a)^2 (b^3 - a^3)}$$

3.33 When the charge q is increased by $\mathrm{d}q$, the energy U of its interaction with the sphere increases by $\mathrm{d}U = \varphi' \mathrm{d}q$, where φ' is the potential due to charges induced on the sphere. However, this potential is proportional to $q, \varphi' = \text{constant} \times q$, and hence

$$U = \int_0^q \mathrm{d}U = \frac{1}{2} \text{ const. } q^2 = \frac{1}{2}\varphi' q \tag{3.33.1}$$

If the magnitude of φ' were independent of q, then the interaction energy would be larger by a factor of two ($U = \varphi' q$). Using equation (3.33.1) and the results of problem 3.25, we find that

$$U = -\frac{q^2 R}{2\epsilon (a^2 - R^2)}$$

and hence

$$F = -\frac{q^2 a R}{\epsilon (a^2 - R^2)^2}$$

3.34

$$U = \frac{Qq}{\epsilon a} - \frac{q^2 R^3}{2a^2 \epsilon (a^2 - R^2)}; \quad F = \frac{Qq}{\epsilon a^2} - \frac{q^2 R^3 (2a^2 - R^2)}{\epsilon a^3 (a^2 - R^2)^2}$$

When the two charges are of the same sign $Qq > 0$ and the force of interaction may vanish. When q is sufficiently large, or a is very small, the force may even be negative (attraction).
3.35 The test charge q should be small compared with the charges on other conductors and dielectrics, and should not be too near to any irregularities in the medium, e.g. boundaries of conductors and dielectrics, so that the effects due to charges induced by the test body should be small. For example, in measuring the electric field due to a charged conducting sphere, it is necessary for the force due to the electrical image to be small compared with qQ/a^2, where Q is the charge on the sphere and a is the distance between the test charge and the centre of the sphere. This leads to the condition (cf the solution of the preceding problem)

$$\left|\frac{Q}{q}\right| \gg 2\frac{(2a/R - 1)^2}{(a/R)(a/R - 1)^2}$$

This condition will be satisfied provided a/R is not too small and q/Q is not too large.
3.36 The image of the electric dipole

$$p = p (e_x \sin\alpha + e_z \cos\alpha)$$

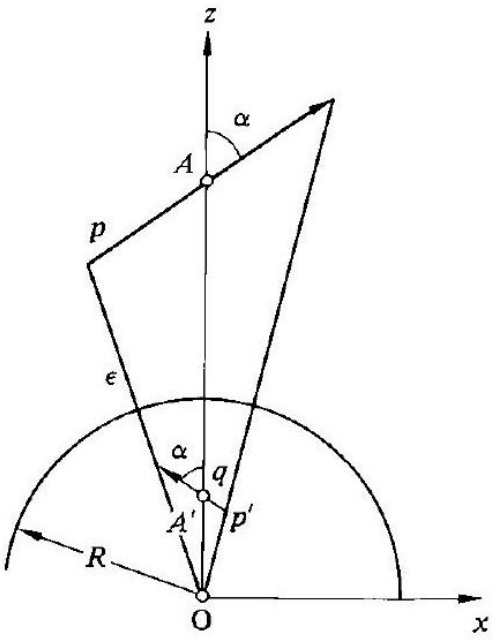


Figure 3.36.1.

in the earthed sphere consists of a point charge

$$q = \frac{pR}{r^2}\cos\alpha$$

and a dipole

$$p' = p\left(\frac{R}{r}\right)^3(-e_x\sin\alpha + e_z\cos\alpha)$$

at the point A' (figure 3.36 .1) which is at a distance $r' = R^2/r$ from the centre of the sphere.

$$U = -\frac{p^2R\left(r^2\cos^2\alpha + R^2\right)}{2\epsilon\left(r^2 - R^2\right)^3}$$

$$F = -\frac{p^2Rr}{\epsilon\left(r^2 - R^2\right)^4}\left[\left(2r^2 + R^2\right)\cos^2\alpha + 3R^2\right]$$

$$N = -\frac{p^2Rr^2\sin 2\alpha}{2\epsilon\left(r^2 - R^2\right)^3}$$

In the limit as $r \to R$, we find on substituting $r = R + z, R \to \infty$, $z =$ constant that the results are identical with those of problem 3.20 (dipole near a conducting plane).

3.37

$$\sigma = -\frac{3p}{4\pi R^3}\cos\vartheta$$

where ϑ is the angle between $\boldsymbol{p}$ and the line joining the centre and the point of observation. Induced charges give rise to a uniform field

$$E' = \frac{p}{R^3}$$

in the cavity.

3.38 The forces acting on the irregularity may be obtained by differentiating the quantity

$$U' = \sum_{l,m} a_{lm} Q^*_{lm}$$

with Q^*_{lm} held constant. The quantity U' differs from the true energy of interaction of the irregularity with the external field; the latter is defined as the work which must be done in order to produce a potential φ in the presence of the irregularity [cf equation (3.a.16)]. It must, however, be remembered that the moments Q_{lm} depend on the external field. In particular, if the irregularity is in the form of an uncharged conductor or dielectric, then the true energy of interaction of the irregularity with the
external field is given by

$$U = \frac{1}{2} \sum_{l,m} a_{lm} Q^*_{lm} \tag{3.38.1}$$

The factor $\frac{1}{2}$ may be obtained as in the solution of problem 3.33 by recalling that the Q_{lm} are proportional to the a_{lm}. In the determination of the generalised forces with the aid of equation (3.38.1), which involves differentiation with respect to the generalised coordinates, both Q_{im} and a_{lm} must be looked upon as variable quantities.
3.39$U_0 = q\varphi_0 - (\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{E}_0)$ and

$$\begin{array}{ll} \varphi_1 = \varphi_0 - (r \cdot \boldsymbol{E}_0)\,, & \varphi_2 = \frac{q}{\epsilon r} + \frac{(\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{r})}{\epsilon r^3} \\ \boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E}_0 + (\boldsymbol{p} \cdot \nabla)\boldsymbol{E}_0, & N = [\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{E}_0] \end{array}$$

(the couple is evaluated about the origin).
3.41 The body tends to occupy a position in which its potential energy $U = \frac{1}{2}(\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{E})$ is a minimum. Suppose that the coordinate axes lie along the principal axes of the tensor β_{ik} so that

$$U = -\frac{1}{2}\left[\beta^{(x)} E_x^2 + \beta^{(y)} E_y^2 + \beta^{(z)} E_z^2\right]$$

It is clear that if $\beta^{(x)} \geqslant \beta^{(y)} \geqslant \beta^{(z)} > 0$, then U will be a minimum when $\boldsymbol{E}$ is parallel to the x-axis. When $\beta^{(x)} \leqslant \beta^{(y)} \leqslant \beta^{(z)} < 0$, the minimum occurs when E is parallel to the z-axis.
3.42 The axis of the rod and the plane of the disc tend to become parallel to the field when $\epsilon_1 > \epsilon_2$, and perpendicular to the field when $\epsilon_1 < \epsilon_2$.
3.43

$$F = \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_2} q^2 \sum_{l=0}^{\infty} \frac{l(l+1)}{l\epsilon_1 + (l+1)\epsilon_2} \frac{R^{2l+1}}{a^{2l+3}}$$

Attraction occurs for $\epsilon_2 < \epsilon_1$ and repulsion for $\epsilon_2 > \epsilon_1$. In the case of a conducting sphere $\epsilon_1 \to \infty$. On summing the geometrical progression we find that the interaction energy is

$$U = -\frac{q^2 R}{2\epsilon_2 (R^2 - a^2)}$$

and hence

$$F = -\frac{q^2 a R}{\epsilon_2 (a^2 - R^2)^2}$$

(cf problem 3.33).
Consider now the calculation of the force with the aid of equation (3.a.16). In the integral

$$U' = \frac{1}{8\pi} \int_{V'} (\epsilon_2 - \epsilon_1)\,(\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{E}_1)\,\mathrm{d}^3 r'$$

the volume V' is bounded by a sphere S which is infinitely close to the surface of the dielectric sphere and lies wholly inside the latter. The integral differs from the potential energy of interaction, U, between the point charge and the sphere by an infinitesimal amount. Instead of the total electric field E and the field of the point charge E_1 in the uniform dielectric ϵ_2, let us use the corresponding potentials φ and φ_1 and take the constant quantity $\epsilon_2 - \epsilon_1$ outside the integral, so that

$$U' = \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{8\pi} \int_{V'} (\nabla\varphi \cdot \nabla\varphi_1)\,\mathrm{d}^3 r'$$

Using Green's formula

$$\int (\nabla\varphi \cdot \nabla\varphi_1)\,\mathrm{d}^3 r = \oint_S \varphi \frac{\partial \varphi_1}{\partial n}\,\mathrm{d}^2 S + \int \varphi \nabla^2 \varphi_1\,\mathrm{d}^3 r$$

and the fact that inside the sphere $\nabla^2\varphi_1 = 0$, we find the following expression for U:

$$U = \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_2} q^2 \sum_{l=0}^{\infty} \frac{l}{l\epsilon_1 + (l+1)\epsilon_2} \frac{R^{2l+1}}{a^{2l+3}}$$

This expression is identical with that obtained from equation (3.38.1) of problem 3.38. Hence the formula for F turns out to be identical with that given above.

3.44

$$C_{\text{mut}} = \frac{\kappa}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{1}{2} \left(\operatorname{arcosh} \frac{a^2 - R_1^2 - R_2^2}{2R_1 R_2} \right)^{-1}$$

3.45

$$\sigma = \pm \frac{|E|}{4\pi} = \pm \frac{4b^2\kappa^2}{\pi \left[(x^2 - y^2 - b^2)^2 + 4x^2 y^2 \right]}$$

where

$$b = \frac{2R^4}{a^2 \left(a^2 - 4R^2\right)^{1/2}}$$

The origin is at the centre of the straight line joining the axes of the cylinders and chosen as the x-axis.

3.46

$$C = \frac{1}{2} \left(\operatorname{arcosh} \frac{R_1^2 + R_2^2 - a^2}{2R_1 R_2} \right)^{-1}$$

3.47 If the x-, y-, and z-axes are parallel to the principal axes of the tensor ϵ_{ik}, then

$$\varphi(x, y, z) = \frac{e'}{r'} = \frac{e}{\left(\epsilon^{(x)} \epsilon^{(y)} \epsilon^{(z)}\right)^{1/2}} \left(\frac{x^2}{\epsilon^{(x)}} + \frac{y^2}{\epsilon^{(y)}} + \frac{z^2}{\epsilon^{(z)}} \right)^{-1/2} \tag{3.47.1}$$

For an arbitrary orientation of the coordinate system, equation (3.47.1) may be written in the form

$$\varphi(r) = \frac{e}{\left(|\epsilon_{ik}|\,\epsilon_{ik}^{-1} x_i x_k\right)^{1/2}}$$

where $|\epsilon_{ik}|$ is the determinant of the tensor ϵ_{ik}.

3.48

$$\boldsymbol{E} = E_0 - \frac{(\epsilon_{ik} - \delta_{ik})\, n_i E_{0k}}{\epsilon_{lm} n_l n_m} n$$

$$C = \frac{S\epsilon^{(z)}}{4\pi d}$$

where z is measured along the normal to the plates of the capacitor.

3.50 If the x - and z-axes lie in the plane $(\boldsymbol{E}_0, \boldsymbol{n})$ and the z-axis is parallel to n, then

$$\tan\vartheta = \frac{E_x}{E_z} = \frac{\epsilon_{zz}\tan\vartheta_0}{1 - \epsilon_{zx}\tan\vartheta_0}$$

where $\tan\vartheta_0 = E_{0x}/E_{0z}$. A given line of force in the dielectric will then remain in the plane (E_0, n).

17.3.1 b Coefficients of potential and capacitance

3.52 Suppose that the charge on the first conductor is q_1 and the charge on the outer surface of the second conductor is q' (the charge on the inner surface of the second conductor is $-q_1$; this follows from the electrostatic Gauss theorem). Equation (3.b.3) then assumes the form

$$\left.\begin{aligned} q_1 &= c_{11}V_1 + c_{12}V_2 \\ -q_1 + q' &= c_{12}V_1 + c_{22}V_2 \end{aligned}\right\} \tag{3.52.1}$$

and hence

$$q' = (c_{11} + c_{12})\,V_1 + (c_{12} + c_{22})\,V_2 \tag{3.52.2}$$

Once q' is specified the field in the external space is defined, including the potential V_2 of the second conductor. Equation (3.52.2) should therefore hold for all values of V_1 at given q' and V_2, which can only be true if

$$c_{11} + c_{12} = 0 \tag{3.52.3}$$

The first of the equations in (3.52.1) then takes the form:

$$q_1 = c_{11}\,(V_1 - V_2) \tag{3.52.4}$$

It follows from equations (3.52.2), (3.52.3) and (3.52.4) that

$$C = c_{11} = -c_{12} = -c_{21}, \quad C' = c_{12} + c_{22}$$

3.53

$$s_{11} = \frac{c_{22}}{c_{11}c_{22} - c_{12}^2}, \quad s_{22} = \frac{c_{11}}{c_{11}c_{22} - c_{12}^2}$$
$$s_{12} = s_{21} = -\frac{c_{12}}{c_{11}c_{22} - c_{12}^2}$$

3.55

$$C = \frac{c_{11}c_{22} - c_{12}^2}{c_{11} + c_{22} + 2c_{12}}$$

3.56

$$q_1 = \frac{s_{11} - 2s_{12} + s_{13}}{s_{11} - s_{12}} \frac{q}{8}, \quad q_2 = \frac{q}{2}$$
$$q_3 = \frac{q}{4}, \quad q_4 = \frac{s_{11} - s_{13}}{s_{11} - s_{12}} \frac{q}{8}$$

3.57

$$q_1 = -\frac{2a}{b}q, \quad q_2 = -\frac{a}{b}q, \quad q_3 = \frac{3a^2}{b^2}q$$

3.58

$$F = \frac{\epsilon C_1 C_2 \left(\epsilon r V_1 - C_2 V_2\right) \left(\epsilon r V_2 - C_1 V_1\right)}{\left(\epsilon^2 r^2 - C_1 C_2\right)^2}$$

3.59

$$q_1 = q\frac{V_0 - V_\mathrm{P}}{V_1 - V_0}, \quad q_0 = q\frac{V_1 - V_\mathrm{P}}{V_0 - V_1}$$

3.61 The self-capacitance of the joined conductors is given by

$$c_{00} = c_{11} + c_{22} + 2c_{12}$$

The mutual capacitance between the joined conductors and the i th conductor of the system is

$$c_{0i} = c_{1i} + c_{2i}$$

3.62 The reduction in the energy is

$$\Delta W = \frac{(q - q')^2}{4} \frac{r - b}{rb}$$

3.63 To within terms of the order of $1/r$ the force F is

$$F = -\frac{bC^2q^2}{r^3\left[C + ab(b-a)^{-1}\right]^2}$$

3.64 When the sphere and the conductor touch, they assume the same potential

$$V_1 = qs_{11} + (Q - q)s_{12} = qs_{12} + (Q - q)s_{22} = V_2$$

and hence

$$\frac{s_{11} - s_{12}}{s_{22} - s_{12}} = \frac{Q}{q} - 1 \tag{3.64.1}$$

where s_{ik} are the coefficients of potential and subscripts 1 and 2 refer to the sphere and the conductor respectively. Let q_k be the charge on the conductor after the k th contact. Since the potentials are equal on contact, it follows that

$$q_k s_{11} + \left(Q + q_{k-1} - q_k\right) s_{12} = q_k s_{12} + \left(Q - q_k + q_{k-1}\right) s_{22}$$

Hence using equation (3.64.1) we obtain the recurrence relation

$$q_k = q + \frac{q}{Q} q_{k-1} \tag{3.64.2}$$

Successive application of equation (3.64.2) yields, as $k \to \infty$,

$$q = \lim_{k\to\infty} q_k = q\left[1 + \frac{q}{Q} + \left(\frac{q}{Q}\right)^2 + \left(\frac{q}{Q}\right)^3 + \ldots\right] = \frac{qQ}{Q-q}$$

17.3.2 c Special methods of electrostatics

3.65 The Laplace equation assumes the form

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\left(R_\xi \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\xi}\right) = 0, \quad R_\xi = \left[\left(\xi + a^2\right)\left(\xi + b^2\right)\left(\xi + c^2\right)\right]^{1/2}$$

This equation must be integrated subject to the boundary conditions: φ = constant when $\xi = 0$ (surface of the ellipsoid), and $\varphi \to 0$ when $\xi \to \infty$. Since $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} \to \infty$ when $\xi \to r^2$ we have

$$\varphi(\xi) = \frac{q}{2\epsilon}\int_\xi^\infty \frac{\mathrm{d}\xi}{R_\xi}, \quad \frac{1}{C} = \frac{1}{2\epsilon}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\xi}{R_\xi}$$

and hence

$$\sigma = -\frac{\epsilon}{4\pi}\frac{\partial\varphi}{\partial n}\bigg|_{\xi=0} = -\frac{\epsilon}{4\pi}\left(\frac{1}{h_1}\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right)_{\xi=0} = \frac{q}{4\pi abc}\left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}\right)^{-1/2}$$

The charge densities at the ends of the semiaxes are proportional to the lengths of the semiaxes, so that

$$\sigma_a : \sigma_b : \sigma_c = a : b : c$$

3.66 When $a = b > c$ (oblate ellipsoid):

$$\varphi = \frac{q}{\epsilon\left(a^2 - c^2\right)^{1/2}} \arctan\left(\frac{a^2 - c^2}{\xi + c^2}\right)^{1/2}, \quad C = \frac{\epsilon\left(a^2 - c^2\right)^{1/2}}{\arccos(c/a)}$$

In particular, when $c = 0$ (disc), $C = 2\epsilon a/\pi$. When $a > b = c$ (prolate ellipsoid)

$$\varphi = \frac{q}{2\epsilon\left(a^2 - b^2\right)^{1/2}} \ln\frac{\left(\xi + a^2\right)^{1/2} + \left(a^2 - b^2\right)^{1/2}}{\left(\xi + a^2\right)^{1/2} - \left(a^2 - b^2\right)^{1/2}}$$

$$C = \frac{\epsilon\left(a^2 - b^2\right)^{1/2}}{\ln\left\{\left[a + \left(a^2 - b^2\right)^{1/2}\right]/b\right\}}.$$

In particular, when $b \ll a$ (a rod)

$$C = \frac{\epsilon a}{\ln(2a/b)}$$

3.67 To start with, let us suppose that the ellipsoid is uncharged and therefore $q = 0$. If the external uniform field $\boldsymbol{E}_0$ is parallel to the x-axis, then

$$\varphi_0 = -E_0 x = \mp E_0 \left[\frac{(\xi + a^2)\,(\eta + a^2)\,(\zeta + a^2)}{(b^2 - a^2)\,(c^2 - a^2)} \right]^{1/2}$$

The negative sign corresponds to $x > 0$ and the positive sign to $x < 0$. Both φ_0 and the potential φ' due to charges induced on the ellipsoid satisfy the Laplace equation. Substituting $\varphi' = \varphi_0 F(\xi)$ into the Laplace equation we obtain the following differential equation for the unknown function $F(\xi)$:

$$\frac{\mathrm{d}^2 F}{\mathrm{d}\xi^2} + \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\xi} \ln\left[R_\xi \left(\xi + a^2\right)\right] = 0$$

This equation can easily be integrated. The solution satisfying the boundary conditions is

$$\varphi|_{q=0} = \varphi_0 \left\{ 1 - \left[\int_\xi^\infty \frac{\mathrm{d}\xi}{(\xi + a^2)\,R_\xi} \right] \Big/ \left[\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\xi}{(\xi + a^2)\,R_\xi} \right] \right\}$$

If the ellipsoid has a total charge q, then the solution satisfying the conditions

$$\varphi|_{\xi=0} = \text{ constant} \qquad \text{and} \qquad -\oint_S \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, \mathrm{d}^2 S = 4\pi q$$

(S is a closed surface surrounding the ellipsoid) may be obtained from the superposition principle (see problem 3.65):

$$\varphi|_q = \varphi_{q=0} + \frac{1}{2} q \int_\xi^\infty \frac{\mathrm{d}\xi}{R_\xi}$$

3.68 The potential is of the same form as in the preceding problem. The integrals entering into the expression for the potential may be expressed in terms of elementary functions whenever the ellipsoid has rotational symmetry. The final result is

$$\varphi = -E_0 x \left\{ 1 - \left[\ln \frac{(1 + \xi/a^2)^{1/2} + e}{(1 + \xi/a^2)^{1/2} - e} - \frac{2e}{(1 + \xi/a^2)^{1/2}} \right] \Big/ \left(\ln \frac{1+e}{1-e} - 2e \right) \right\}$$

where a and b are the semiaxes, $e = (1 - b^2/a^2)^{1/2}$ is the eccentricity of the ellipsoid, and the x-axis is perpendicular to the plane,

$$x = \frac{a}{e} \left(1 + \frac{\xi}{a^2} \right)^{1/2} \left(1 + \frac{\xi}{a^2} \right)^{1/2}$$

(see problem 1.66). The field strength reaches a maximum at the apex of the ellipsoid:

$$\frac{E_{\max}}{E_0} = -\frac{1}{E_0 h_\xi} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}\bigg|_{\xi,0,\zeta=-b^2} = \frac{2e^3\,(1 - e^2)^{-1}}{\ln[(1+e)/(1-e)] - 2e} = \frac{1}{n^{(x)}}$$

where $n^{(x)}$ is a depolarisation coefficient (see problem 3.70). For a sphere, $e = 0$ and $E_{\max}/E_0 = 3$. In the case of a long rod (lightning conductor):

$$\frac{E_{\max}}{E_0} = \frac{a^2}{b^2} \left(\ln \frac{2a}{b} - 1 \right)^{-1}, \quad a \gg b$$

and therefore a discharge is more likely to occur at the end of the rod rather than at any other point on it.

3.69 The field at an arbitrary distance from the ellipsoid may be obtained by superimposing three fields of the form established in problem 3.67 (the field $\boldsymbol{E}_0$ will be resolved along the principal axes of the ellipsoid). At large distances from the ellipsoid

$$\varphi = \varphi_0 + \frac{(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r})}{r^3}$$
$$p_x = \beta^{(x)}E_x, \quad p_y = \beta^{(y)}E_y, \quad p_z = \beta^{(z)}E_z$$

The principal values of the polarisability tensor for the ellipsoid are

$$\beta^{(x)} = \frac{abc}{3n^{(x)}}, \quad \beta^{(y)} = \frac{abc}{3n^{(y)}}, \quad \beta^{(z)} = \frac{abc}{3n^{(z)}}$$

3.70

$$n^{(x)} = \frac{1-e^2}{2e^2}\left(\ln\frac{1+e}{1-e} - 2e\right) \leqslant \frac{1}{3}$$
$$n^{(y)} = n^{(x)} = \frac{1-n^{(x)}}{2}$$

where $e = (1 - b^2/a^2)^{1/2}$ is the eccentricity of the ellipsoid. When $e \to 1$ (a rod),

$$n^{(x)} = 0, \quad n^{(y)} = n^{(z)} = \frac{1}{2}$$

When $e \ll 1$ (nearly spherical shape),

$$n^{(x)} = \frac{1}{3} - \frac{2}{15}e^2, \quad n^{(y)} = n^{(z)} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}e^2$$

3.71

$$n^{(z)} = \frac{1+e^2}{e^3}(e - \arctan e) \geqslant \frac{1}{3}$$
$$n^{(x)} = n^{(y)} = \frac{1-n^{(z)}}{2}, \quad e = \left[\left(\frac{a}{c}\right)^2 - 1\right]^{1/2}$$

For a disc

$$n^{(z)} = 1, \quad n^{(x)} = n^{(y)} = 0$$

3.72 $\varphi = \varphi_x + \varphi_y + \varphi_z$. Inside the ellipsoid,

$$\varphi_x = \varphi_{1x} = -E_0 x\left(1 + \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_2}n^{(x)}\right)^{-1}$$

Outside the ellipsoid,

$$\varphi_x = \varphi_{2x} = -E_0 x\left\{1 - \frac{abc\,(\epsilon_1 - \epsilon_2)}{2\left[\epsilon_2 + (\epsilon_1 - \epsilon_2)\,n^{(x)}\right]}\int_\xi^\infty \frac{\mathrm{d}\xi}{(\xi + a^2)\,R_\xi}\right\}$$

where

$$n^{(x)} = \frac{1}{2}abc\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\xi}{(\xi + a^2)\,R_\xi}$$

The potentials φ_y and φ_z are given by analogous expressions with x replaced by y and z, and a by b and c, respectively. Inside the ellipsoid the field is uniform and is given by

$$E_1 = \frac{E_{0x}e_x}{1+\left[\left(\epsilon_1-\epsilon_2\right)/\epsilon_2\right]n^{(x)}} + \frac{E_{0y}e_y}{1+\left[\left(\epsilon_1-\epsilon_2\right)/\epsilon_2\right]n^{(y)}} + \frac{E_{0z}e_z}{1+\left[\left(\epsilon_1-\epsilon_2\right)/\epsilon_2\right]n^{(z)}}$$

At large distances from the ellipsoid

$$\varphi_2 = -\left(E_0\cdot r\right) + \frac{(p\cdot r)}{r^3}$$

where

$$p_x = \beta^{(x)}E_x, \quad \beta^{(x)} = \frac{abc}{3\left[\epsilon_2/\left(\epsilon_1-\epsilon_2\right)+n^{(x)}\right]}$$

and so on.

3.73 Using equation (3.a.16) we have

$$U = \frac{abc\left(\epsilon_2-\epsilon_1\right)E_0^2\left\{2\left[\epsilon_2+n\left(\epsilon_1-\epsilon_2\right)\right]\sin^2\vartheta+\left[\epsilon_1+\epsilon_2+n\left(\epsilon_2-\epsilon_1\right)\right]\cos^2\vartheta\right\}}{6\left[\epsilon_2+\epsilon_1+n\left(\epsilon_2-\epsilon_1\right)\right]\left[\epsilon_2+n\left(\epsilon_1-\epsilon_2\right)\right]}$$

$$N = -\frac{\partial U}{\partial\vartheta} = \frac{abc\left(\epsilon_2-\epsilon_1\right)^2E_0^2(3n-1)\sin 2\vartheta}{6\left[\epsilon_2+\epsilon_1+n\left(\epsilon_2-\epsilon_1\right)\right]\left[\epsilon_2+n\left(\epsilon_1-\epsilon_2\right)\right]}$$

where ϑ is the angle between the axis of symmetry and the field $\boldsymbol{E}_0$, and n is the depolarisation coefficient with respect to the axis of symmetry of the ellipsoid (see, for example, the solution of the preceding problem). It is clear from the latter formula that the external field tends to turn over the axes of symmetry of prolate $\left(n<\frac{1}{3}\right)$ and oblate $\left(n>\frac{1}{3}\right)$ ellipsoids into positions, respectively, parallel and perpendicular to the field. For a conducting ellipsoid $\epsilon_1\to\infty$, and

$$N = \frac{abc(3n-1)E_0^2\sin 2\vartheta}{6n(1-n)}$$

3.74 The potential energy of a charged drop in the form of an ellipsoid of revolution with an eccentricity $e=\left(1-b^2/a^2\right)^{1/2}$ and volume equal to that of a sphere of radius R and charge q may be written down in the form

$$U(e) = \frac{q^2}{2C}+\alpha S = \frac{q^2\left(1-e^2\right)^{1/3}}{4Re}\ln\frac{1+e}{1-e} + 2\pi R^2\gamma\left[\left(1-e^2\right)^{1/3}+\frac{\arcsin e}{e\left(1-e^2\right)^{1/6}}\right]$$

where we have used the expression for the capacitance of a prolate ellipsoid of revolution given in the solution of problem 3.66.

In order to investigate the stability of a charged spherical drop, consider the function $U(e)$ for small values of e. The expansion for U up to terms of order e^4 is

$$U(e) = \frac{q^2}{2R}+4\pi R^2\gamma+\frac{e^4}{45}\left(8\pi R^2\gamma-\frac{q^2}{2R}\right)$$

It is clear from this formula that if the charge on the drop is such that $q<q_c=\left(16\pi R^3\gamma\right)^{1/2}$, then for small deformations the drop will tend to return to the spherical state and will therefore be stable. When $q>q_c$, the drop will be unstable because the deformation will continue to increase. The process ends with the division of the unstable drop into two or more parts. It is easy to verify that when the charged drop divides into two equal spherical drops the energy

is reduced by a factor $2^{2/3}$. The process finally ends with the formation of stable drops. This is clear from the expression for the critical charge. As the dimensions of the drop are reduced, the critical charge decreases in proportion to the square root of the volume, whereas the total charge on the drop decreases in proportion to the volume. It follows that the stability conditions are satisfied for sufficiently small drop radii.

3.75

$$\varphi = -\frac{E_0 z}{\pi}\left(\arctan\frac{a}{\xi^{1/2}} - \frac{a}{\xi^{1/2}}\right) = -\frac{E_0}{\pi}(-\eta)^{1/2}\left(\frac{\xi^{1/2}}{a}\arctan\frac{a}{\xi^{1/2}} - 1\right)$$

where $\xi^{1/2}$ should be taken with the positive sign for $z > 0$ and the negative sign for $z < 0$. At large distances from the aperture $\xi \approx r^2$ and the field becomes

$$\varphi \approx \frac{E_0 a^3 z}{3\pi r^3}, \qquad \text{when} \qquad z > 0$$

This is the field of an electric dipole lying along the z-axis and having a moment $p = E_0 a^3/3\pi$. Hence it is clear that the lines of force passing through the aperture close on the other side of the metal screen.

3.76

$$\sigma = -\frac{E_0}{4\pi^2}\left[\pi - \arcsin\frac{a}{r_1} + \frac{a}{(r_1^2 - a^2)^{1/2}}\right], \qquad \text{when} \qquad z = -0$$

$$\sigma = -\frac{E_0}{4\pi^2}\left[\frac{a}{(r_1^2 - a^2)^{1/2}} - \arcsin\frac{a}{r_1}\right], \qquad \text{when} \qquad z = +0$$

where $r_1 = (\xi + a^2)^{1/2}$ is the distance between the centre of the aperture and the point of observation on the plane.

3.77 The equation to be solved is $\nabla^2\varphi = -4\pi q\delta(r - r_0)$. In cylindrical coordinates the δ-function is given by

$$\delta(r - r_0) = \frac{1}{r_0}\delta(r - r_0)\,\delta(\phi - \gamma)\delta(z)$$

The Fourier component of the potential $\varphi(r, \phi, z)$

$$\varphi_k(r, \phi) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(r, \phi, z)\cos kz\ \mathrm{d}k$$

satisfies the equation

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi_k}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi_k}{\partial\phi^2} - k^2\varphi_k = -\frac{4q}{r_0}\delta(r - r_0)\,\delta(\phi - \gamma) \tag{3.77.1}$$

and the boundary conditions (see figure 3.77 .1)

$$\varphi_k(r, 0) = \varphi_k(r, \beta) = 0 \tag{3.77.2}$$

$$\varphi_k(\infty, \phi) = 0 \tag{3.77.3}$$

Consider the homogeneous equation corresponding to equation (3.77.1). The particular solutions satisfying equation (3.77.2) are the products $R_n(r)\sin(n\pi\phi/\beta)(n = 1, 2, 3, \ldots)$ where $R_n(r)$ is equal either to $I_{n\pi/\beta}(kr)$ or to $K_{n\pi/\beta}(kr)$ (apart from a constant factor). The solution

of the nonhomogeneous equation (3.77.1) will be sought in the form of a superposition of these particular solutions:

$$\varphi_k = \begin{cases} \sum\limits_{n=1}^{\infty} A_n I_{n\pi/\beta}(kr) \sin\frac{n\pi\phi}{\beta}, & \text{when} \quad r < a \\ \sum\limits_{n=1}^{\infty} B_n K_{n\pi/\beta}(kr) \sin\frac{n\pi\phi}{\beta}, & \text{when} \quad r > a \end{cases} \tag{3.77.4}$$

This solution satisfies equation (3.77.3) and is bounded at $r = 0$ (see appendix 3). In order to determine the constants A_n and B_n we shall first use the fact that the potential is continuous at $r = r_0$. This gives

$$\frac{B_n}{A_n} = \frac{I_{n\pi/\beta}(kr_0)}{K_{n\pi/\beta}(kr_0)}$$

Second, we shall require that the potential given by equations (3.77.4) should satisfy equation (3.77.1). Substitute equation (3.77.4) into equation (3.77.1), multiply both sides by $\sin(m\pi\phi/\beta)(m = 1, 2, 3, \ldots)$ and integrate over ϕ between 0 and β. Since the functions $\sin(n\pi\phi/\beta)$ are orthogonal in the above range, we have

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}R_m}{\mathrm{d}r}\right) - \left(k^2 + \frac{m^2\pi^2}{\beta^2 r^2}\right) R_m = -\frac{8q}{\beta r_0}\delta(r - r_0)\sin\frac{m\pi\gamma}{\beta} \tag{3.77.5}$$

where

$$R_m(r) = \begin{cases} A_m I_{m\pi/\beta}(kr), & \text{when } r < a \\ B_m K_{m\pi/\beta}(kr), & \text{when } r > a \end{cases}$$

The function $R_m(r)$ is continuous at $r = r_0$, but its first derivative with respect to r has a discontinuity at that point and changes by

$$b \equiv R'_m(r_0 + 0) - R'_m(r_0 - 0) = kB_m K'_{m\pi/\beta}(kr_0) - kA_m I'_{m\pi/\beta}(kr_0)$$

The second derivative is $R''_m(r) = b\delta(r - r_0)$.
Substituting this expression into equation (3.77.5) and rejecting terms which are bounded at $r = r_0$ we obtain the second equation for A_n, B_n:

$$kB_n K'_{n\pi/\beta}(kr_0) - kA_n I'_{n\pi/\beta}(kr_0) = -\frac{8q}{\beta r_0}\sin\frac{n\pi\gamma}{\beta}$$

In simplifying the expressions for A_n and B_n it is useful to employ the relation

$$K_\nu(x)I'_\nu(x) - K'_\nu(x)I_\nu(x) = \frac{1}{x}$$

3.79

$$\varphi(r, \phi, z) = \frac{2q}{\pi}\Big\{\frac{1}{R_0}\arctan\left[\frac{\cosh\frac{1}{2}\eta + \cos\frac{1}{2}(\phi - \gamma)}{\cosh\frac{1}{2}\eta - \cos\frac{1}{2}(\phi - \gamma)}\right]^{1/2} - \frac{1}{R'_0}\arctan\left[\frac{\cosh\frac{1}{2}\eta + \cos\frac{1}{2}(\phi + \gamma)}{\cosh\frac{1}{2}\eta - \cos\frac{1}{2}(\phi + \gamma)}\right]^{1/2}\Big\}$$

where

$$R_0 = \left[r_0^2 + r^2 + z^2 - 2rr_0\cos(\gamma - \phi)\right]^{1/2} = [2rr_0]^{1/2}\left[\cosh\eta - \cos(\gamma - \phi)\right]^{1/2},$$
$$R'_0 = \left[r_0^2 + r^2 + z^2 - 2rr_0\cos(\gamma + \phi)\right]^{1/2} = [2rr_0]^{3/2}\left[\cosh\eta - \cos(\gamma + \phi)\right]^{1/2}.$$

3.80$\sigma = \text{const}^{(\pi/\beta-1)}$, where r is the distance from the line of intersection. In the special case of two intersecting surfaces in the field of a point charge (see problem 3.77), we have

$$-\frac{q\sqrt{\pi}r_0^{\pi/\beta}\sin(\pi\gamma/\beta)}{\beta^2\left(r_0^2+z^2\right)^{\pi/\beta+1/2}}\frac{\Gamma\left(\pi/\beta+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\pi/\beta+1)} = \text{ constant .}$$

From this it is clear that $\sigma \to 0$ as $r \to 0$ and $\beta < \pi; \sigma \to \infty$ as $r \to 0$ and $\beta > \pi$. In the special case where the charge lies on the line of intersection, $\sigma \propto r^{-1/2}$.

3.81 Suppose that the charge q is at the origin and the z-axis is perpendicular to the surface of the plate. The equations of the front and rear surfaces will then be $z = a$ and $z = a + c$ respectively. The potential will be sought in the form

$$\left.\begin{aligned}
\varphi_1 &= q\int_0^\infty J_0(kr_1)\exp(-k|z|)\,\mathrm{d}k + \int_0^\infty A_1(k)J_0(kr_1)\exp(kz)\,\mathrm{d}k\,, && -\infty < z < a\,,\\
\varphi_2 &= \int_0^\infty B_1(k)J_0(kr_1)\exp(-kz)\,\mathrm{d}k + \int_0^\infty B_2(k)J_0(kr_1)\exp(kz)\,\mathrm{d}k\,, && a < z < b\,,\\
\varphi_3 &= \int_0^\infty A_2(k)J_0(kr_1)\exp(-kz)\,\mathrm{d}k\,, && b < z < \infty\,,\\
& && \text{where}\quad b = a+c\,.
\end{aligned}\right\}$$

The boundary conditions on the surfaces of the plate are equivalent to four algebraic equations for the coefficients A_1, A_2, B_1, and B_2. On solving these equations we have

$$\begin{aligned}
A_1 &= q\beta\frac{\exp(-2kb)-\exp(-2ka)}{1-\beta^2\exp(-2kc)}, \quad A_2 = q\frac{1-\beta^2}{1-\beta^2\exp(-2kc)}\\
B_1 &= \frac{q(1-\beta)}{1-\beta^2\exp(-2kc)}, \quad B_2 = \frac{q\beta(1-\beta)\exp(-2kb)}{1-\beta^2\exp(-2kc)}
\end{aligned} \tag{3.81.2}$$

where

$$\beta = \frac{\epsilon-1}{\epsilon+1}, \quad b = a+c$$

Equations (3.81.2) and (3.81.1) together give the solution of our problem. At large distances from the plate ($z > 0$), the field is of the form

$$\varphi(r_1, z) \approx \frac{q}{\left(r_1^2+z^2\right)^{1/2}} + \frac{pz}{\left(r_1^2+z^2\right)^{3/2}}$$

where

$$r_1 = \left(x^2+y^2\right)^{1/2}, \quad p = -\frac{(\epsilon-1)^2}{2\epsilon}cq$$

3.82

$$\varphi(\mathrm{M}) = \frac{2q}{\epsilon+1}\int_0^\infty \frac{\sinh k(a-|z|)}{\cosh ka}J_0(kr_1)\,\mathrm{d}k$$

where $r_1 = (x^2+y^2)^{1/2}$ (figure 3.82.1). As $(z^2+r_1^2)^{1/2} \to 0$ (near the charge),

$$\varphi \to \frac{2q}{(\epsilon+1)\left(r_1^2+z^2\right)^{1/2}}$$

(cf problem 3.1). The potential φ may be written in the form

$$\varphi = \frac{2q}{\epsilon + 1} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{[r_1^2 + (z - 2an)^2]^{3/2}}$$

The corresponding system of images is shown in figure 3.87.1.

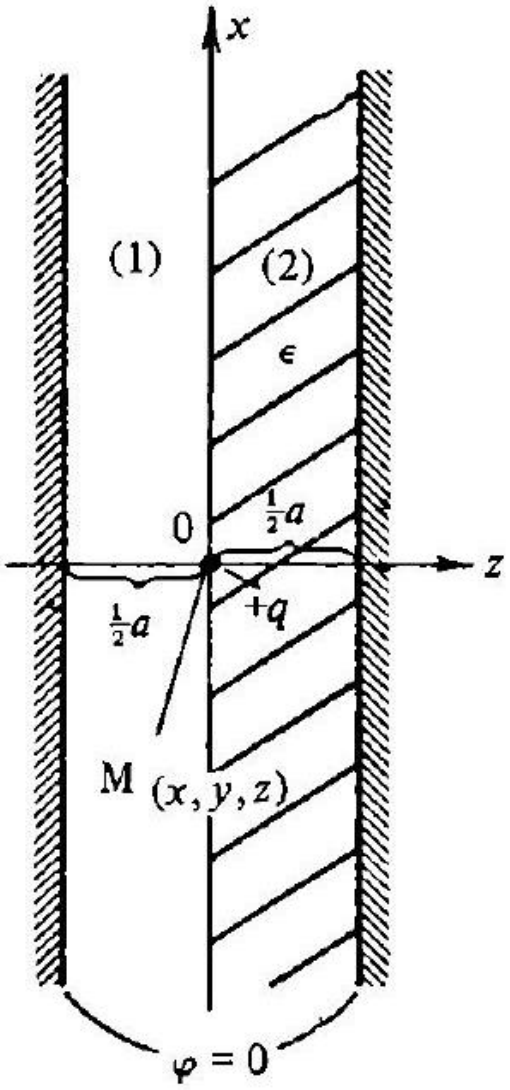


Figure 3.82.1.

3.83 The use of bispherical coordinates will ensure that the surfaces of the inner and outer electrodes will have the equations $\xi = \xi_1$ and $\xi = \xi_2$ respectively. To achieve this the z-axis must be drawn through the centres of the spheres as shown in figure 3.83.1. The coordinates of the centres will then be $z_1 = a \coth \xi_1$ and $z_2 = a \coth \xi_2$, where a is the parameter of the bispherical coordinates. The relations between the radii of the electrodes and the quantities a, ξ_1, ξ_2 are

$$a = a_1 \sinh \xi_1, \quad a = a_2 \sinh \xi_2, \quad b = z_2 - z_1 = a\,(\coth \xi_2 - \coth \xi_1)$$

and hence

$$\cosh \xi_1 = \frac{a_2^2 - a_1^2 - b^2}{2a_1 b}, \quad \cosh \xi_2 = \frac{a_2^2 + b^2 - a_1^2}{2a_2 b}$$

In the space between the electrodes the function ψ satisfies the equation

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2}+\frac{1}{\sin\eta}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\sin\eta\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right)+\frac{1}{\sin^2\eta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}-\frac{1}{4}\psi=0 \tag{3.83.1}$$

Separating the variables in equation (3.83.1) and recalling the fact that ψ is independent of the azimuthal angle ϕ, we find the following special solution which is bounded at $\eta=0,\pi$:

$$\psi_l(\xi,\eta)=\left[A_l\cosh\left(l+\frac{1}{2}\right)\xi+B_l\sinh\left(l+\frac{1}{2}\right)\xi\right]P_l(\cos\eta)$$

where $l=0,1,2,3,\ldots$

The function ψ will be sought in the form of the series

$$\psi(\xi,\eta)=\sum_{l=0}^{\infty}\psi_l(\xi,\eta)$$

The coefficients A_l and B_l will be determined from the boundary conditions

$$\begin{aligned}\psi(\xi_2,\eta)=0,\quad \psi(\xi_1,\eta)&=V\left(2\cosh\xi_1-2\cos\eta\right)^{-1/2}\\&=V\sum_{l=0}^{\infty}\exp\left[-\left(l+\frac{1}{2}\right)\xi_1\right]P_l(\cos\eta)\end{aligned}$$

The final result is

$$\begin{aligned}\varphi(\xi,\eta)=&V(2\cosh\xi-2\cos\eta)^{1/2}\\&\times\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\exp\left[-\left(l+\frac{1}{2}\right)\xi_1\right]\sinh\left(l+\frac{1}{2}\right)(\xi-\xi_2)}{\sinh\left(l+\frac{1}{2}\right)(\xi_1-\xi_2)}P_l(\cos\eta)\end{aligned} \tag{3.83.2}$$

The capacitance is given by

$$C=\frac{q_1}{V}=\frac{1}{4\pi V}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{h_\xi}\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}h_\eta h_\phi\Big|_{\xi=\xi_1}\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\phi$$

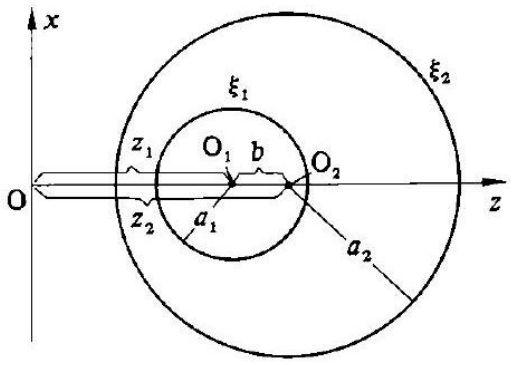


Figure 3.83.1.

Substituting equation (3.83.2) into this expression, and remembering that Legendre polynomials form an orthogonal set, we have

$$C=\frac{a_1}{2}+a_1\sinh\xi_1\sum_{l=0}^{\infty}\exp\left[-(2l+1)\xi_1\right]\coth\left[\left(l+\frac{1}{2}\right)(\xi_2-\xi_2)\right]$$

3.84

$$C = \frac{a_1 a_2}{a_2 - a_1} + \frac{a_1^2 a_2^2 b^2}{(a_2 - a_1)^2 (a_2^3 - a_1^3)}$$

3.85

$$c_{11} = \frac{1}{2}a_1 + a_1 \sinh\xi_1 \sum_{l=0}^{\infty} \exp\left[-\left(l+\frac{1}{2}\right)\xi_1\right] \coth\left[\left(l+\frac{1}{2}\right)(\xi_1+\xi_2)\right]$$

$$c_{22} = \frac{1}{2}a_2 + a_2 \sinh\xi_2 \sum_{l=0}^{\infty} \exp\left[-\left(l+\frac{1}{2}\right)\xi_2\right] \coth\left[\left(l+\frac{1}{2}\right)(\xi_1+\xi_2)\right]$$

$$c_{12} = -a_1 \sinh\xi_1 \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\exp\left[-\left(l+\frac{1}{2}\right)(\xi_1+\xi_2)\right]}{\sinh\left[\left(l+\frac{1}{2}\right)(\xi_1+\xi_2)\right]}$$

where

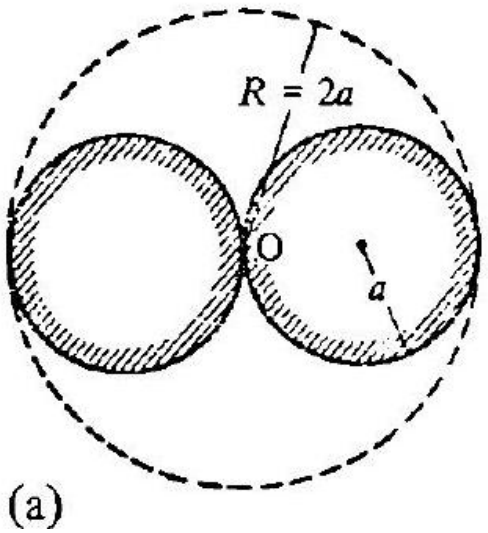
$$\cosh\xi_1 = \frac{b^2 + a_1^2 - a_2^2}{2ba_1}, \quad \cosh\xi_2 = \frac{b^2 - a_1^2 + a_2^2}{2ba_2}$$

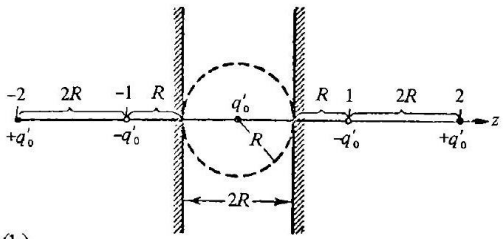
The surfaces of the first and second conductor are given by $\xi = -\xi_1$ and $\xi = \xi_2$, respectively, where $a_1 \sinh\xi_1 = a_2 \sinh\xi_2$.

3.86
$$c_{11} = a_1\left(1 + mn + mn^3 + m^2n^2\right)$$
$$c_{12} = -a_1 n(1 + mn)$$
$$c_{22} = a_2\left(1 + mn + m^3n + m^2n^2\right)$$

where $m = a_1/b$ and $n = a_2/b$.

3.87 Suppose that the potential of the spheres is zero and that the potential at infinity is $-V$. Inversion of the system with respect to a sphere of radius $R = 2a$, whose centre lies at the point of contact of the conducting spheres, yields a plane parallel capacitor with the earthed electrodes at a distance $2R$ from each other. (In figure 3.87 .1 the spheres of inversion are shown by the dashed curves.) The inner regions of the





(b)

Figure 3.87.1.

spheres are then found to correspond to the outer regions of the capacitor. The centre of inversion in the capacitor corresponds to an infinitely distant point of the original system at a potential V. A point charge $q'_0 = -RV$ is therefore located at the centre of inversion. In the inverted system the field may be looked upon as being due to the following infinite system of images (see problem 3.82; $\epsilon = 1$): point charges $(-1)^n q'_0$ which lie at the points $z'_n = 2Rn$ on the z'-axis. The latter passes through the centre of inversion at right angles to the capacitor plates. Since we are interested in the capacitance the total charge of the original system must now be determined:

$$q = 2\sum_{n=1}^{\infty} q_n = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{q'_n R}{z'_n} = q'_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -q'_0 \ln 2 = RV \ln 2$$

In summing up the series, we have made use of the well-known expansion for $\ln 2$. Hence, the capacitance is given by

$$C = \frac{q}{V} = 2a \ln 2$$

In order to determine the potential from equations (3.c.1) and (3.c.2), consider a cylindrical coordinate system with the z-axis lying along the axis of symmetry of the system and the origin at the point of contact of the spheres. In these coordinates

$$z' = \frac{R^2 z}{r^2}, \quad r'_1 = \frac{R^2 r_1}{r^2}, \quad r^2 = r_1^2 + z^2$$

and the potential is given by

$$\varphi(r) = \frac{q}{C} - \frac{R^2 q}{Cr} \int_0^{\infty} \frac{\sinh\{k\,(R - R^2|z|/r^2)\}}{\cosh kR} J_0\left(\frac{kR^2 r_1}{r^2}\right) \mathrm{d}k$$

The term q/C is added in order to ensure that $\varphi(r)$ will vanish as $r \to \infty$.

3.89 The angle β at which the spherical surfaces intersect is given by $\beta = 2\pi - |\xi_2 - \xi_1|$ if ξ_1 and ξ_2 are of the same sign and by $\beta = 2\pi - |\xi_1 + \xi_2|$ if ξ_1 and ξ_2 are of different sign. If we choose the centre of inversion O on the line of intersection of the spheres, and let the radius of inversion be equal to $2a$, then the result of inversion will be a set of two planes intersecting at an angle β with the line of intersection (z'-axis) and perpendicular to the plane of symmetry ($\phi = 0, \pi$) of the conductor under investigation. Figure 3.89.1 illustrates the case $\xi_1 > 0, \xi_2 < 0$. After inversion a charge $q'_0 = -2a$ V appears at O . It can easily be shown that $\gamma = \xi_1$ if γ is measured from the plane into which the spherical surface $\xi = \xi_1$ is transformed. Upon inversion, the surfaces $\xi =$ constant become the half-planes $\phi' =$ constant, where

$$\xi = \begin{cases} \gamma - \phi' & 0 \leqslant \phi' \leqslant \pi + \gamma \\ \gamma - \phi' + 2\pi & \pi + \gamma < \phi' < \beta \quad (\text{ when } \beta > \pi + \gamma) \end{cases} \tag{3.89.1}$$

The distances r and r' can be expressed in terms of the coordinates ρ, ξ of the point of observation M:

$$r = \frac{2a\exp\left(\frac{1}{2}\rho\right)}{[2(\cosh\rho - \cos\xi)]^{3/2}}, \quad r' = 2a\exp(-\rho) \tag{3.89.2}$$

The above equations are obtained by using the relations between Cartesian and toroidal coordinates given in problem 1.68, and considering the congruent triangles $OO'M'$ and $OO'M$. From the expression for the potential of a wedge given in problem 3.78, and also equations (3.89.1) and (3.89.2), the following expression for the capacitance is found:

$$C = \frac{q}{V} = \lim_{\substack{r\to\infty \\ (\text{ or } \rho\to 0, \xi\to 0)}} \frac{r(\varphi + V)}{V} = \frac{a}{\pi}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\zeta}{\sinh\frac{1}{2}\zeta}\left[\frac{\pi}{\beta}\frac{\sinh(\pi\zeta/\beta)}{\cosh(\pi\zeta/\beta) - \cos(2\pi\gamma/\beta)}\right.$$
$$\left. - \frac{\pi}{\beta}\frac{\sinh(\pi\zeta/\beta)}{\cosh(\pi\zeta/\beta) - 1} + \frac{\sinh\zeta}{\cosh\zeta - 1}\right]$$

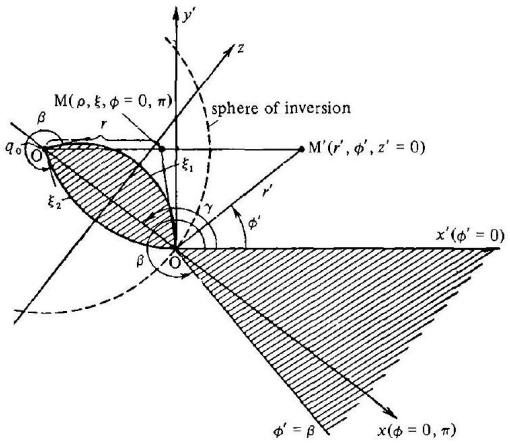


Figure 3.89.1.

3.90

(a) $C = \frac{R}{\pi}(\sin\theta + \theta)$

(b) $C = 2R\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \approx \frac{11}{13}R$,

where the integral from the solution of the preceding problem is evaluated with the aid of the substitution $x = \exp\left(-\frac{1}{2}\zeta\right)$.

3.91

$$C = \frac{a}{2}\left(5 - \frac{4}{\sqrt{3}}\right)$$

17.4 Steady currents

4.1

$$\frac{J}{J_2} = \frac{V_1 - V_2}{V_2 - \mathring{\mathrm{A}}}$$

4.2 The resistance of the galvanometer coil should be equal to the external resistance R.

$$4.3 R = \frac{3}{2}r, \text{ when } \quad n = 2$$
$$R = \frac{13}{7}r, \text{ when } n = 3$$
$$R = \frac{47}{22}r, \text{ when } \quad n = 4$$

The number of circulating currents which must be used may be reduced by making use of the symmetry of the circuit. For example, for $n = 3$, the number of circulating currents may be reduced to three.

4.4 Consider the circulating currents indicated in figure 4.4.1.

Kirchhoff's equation for the circuit $\mathrm{B}_k\ \mathrm{A}_k\ \mathrm{A}_{k+1}\ \mathrm{B}_{k+1}$ is

$$J_{k-1} + J_{k+1} = \left(2 + \frac{R}{r}\right) J_k \tag{4.4.1}$$

This second order linear difference equation has two linearly independent solutions, namely, $\exp(k\alpha)$ and $\exp(-k\alpha)$, where (1)

$$\sinh \frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{2}\left(\frac{R}{r}\right)^{1/2} \tag{4.4.2}$$

The general solution of equation (4.4.1) is of the form

$$J_k = A' \exp(k\alpha) + B' \exp(-k\alpha)$$

It will be convenient to rearrange the terms and rewrite equation (4.4.1) in the form

$$J_k = A \cosh[(\beta - k)\alpha] \tag{4.4.3}$$

where A and β are constants. These constants can be determined from the boundary conditions at the ends of the line. The Kirchhoff equation for the last cell is

$$J_n\,(R + R_a + r) - J_{n-1} r = 0 \tag{4.4.4}$$

Substituting expression (4.4.3) into equation (4.4.4) and using equation (4.4.2), we obtain, after some rearrangement, the following expression

(1) In deriving this equation and some of those which follow, it is useful to bear in mind that the formulae in hyperbolic trigonometry are obtained from those in ordinary trigonometry by the substitutions

$\cos\alpha \to \cosh\alpha, \quad \sin\alpha \to \mathrm{i}\sinh\alpha.$

for β:

$$\tanh \beta\alpha = \frac{R_a \cosh n\alpha + (Rr)^{1/2} \sinh\left(n + \frac{1}{2}\right)\alpha}{R_a \sinh n\alpha + (Rr)^{1/2} \cosh\left(n + \frac{1}{2}\right)\alpha} \tag{4.4.5}$$

The constant A may be determined from Kirchhoff's equation for the first cell:

$$J_0\,(R + R_i + r) - J_1 r = \& \tag{4.4.6}$$

After rearrangement equation (4.4.6) yields

$$A = \frac{\mathscr{C}}{R_i \cosh \beta\alpha + (Rr)^{1/2} \sinh\left(\beta + \frac{1}{2}\right)\alpha}$$

The final expression for the current in the section $\mathrm{A}_k\ \mathrm{A}_{k+1}$ is

$$J_k = \frac{\mathscr{E} \cosh(\beta - k)\alpha}{R_i \cosh \beta\alpha + (Rr)^{1/2} \sinh\left(\beta + \frac{1}{2}\right)\alpha} \tag{4.4.7}$$

The constants α and β in this relation are given by equations (4.4.2) and (4.4.5).

For dry insulation when $r \to \infty, \alpha \to 0$, equation (4.4.7) assumes the expected form

$$J_k = \frac{\&}{R_i + R_a + (n+1)R} \tag{4.4.8}$$

The ratio of the e.m.f.s ensuring the same current through the load for dry and poor insulation can be obtained from equations (4.4.7) and (4.4.8), and is given by

$$\frac{}{\S_0} = \frac{R_i \cosh \beta\alpha + (Rr)^{1/2} \sinh\left(\beta + \frac{1}{2}\right)\alpha}{[R_i + R_a + (n+1)R] \cosh\left(\beta - n + \frac{1}{2}\right)\alpha}$$

When the load resistance is zero ($R_a = 0$), we have from equation (4.4.5) the simple result

$$\beta = n + \frac{1}{2}$$

4.5 Let $J(x)$ and $\varphi(x)$ be the current and potential of the central conductor (relative to ground) at the point x. It follows that

$$\varphi(x) = -\rho' \frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}x}, \quad J = -\rho \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}$$

and

$$\frac{\mathrm{d}^2 J}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\rho}{\rho'} J$$

4.6

$$J(x) = \frac{\& \cosh s\,(x - x_0)}{R_i \cosh s x_0 + (\rho\rho')^{1/2} \sinh s x_0} \tag{4.6.1}$$

where $s = (\rho/\rho')^{1/2}$. The constant x_0 can be determined from

$$\tanh s\,(x_0 - a) = \frac{R_a}{(\rho\rho')^{1/2}} \tag{4.6.2}$$

When $R_i = R_a = 0$, we have

$$J(x) = \frac{\mathscr{E} \cosh s(x - a)}{(\rho\rho')^{1/2} \sinh sa}$$

In the absence of leakage $\rho' \to \infty, x_0 \to a, s \to 0$, and the current along the cable is

$$J_0 = \frac{}{R_i + \rho a + R_a}$$

The following substitutions must be made when using equation (4.4.7) of the solution of problem 4.4:

$$R = \rho \mathrm{d}x, \quad r = \frac{\rho'}{\mathrm{d}x}, \quad k = \frac{x}{\mathrm{d}x}, \quad n = \frac{a}{\mathrm{d}x}$$

It then follows from equation (4.4.2) of the solution of problem 4.4 that $\alpha = s\,\mathrm{d}x$. The quantity β in that solution is related to x_0 by $\beta = x_0/\mathrm{d}x$ so that $\beta\alpha = x_0 s$. Substitution of these expressions into equations (4.4.5) and (4.4.7) of the solution of problem 4.4 leads to equations (4.6.1) and (4.6.2) given above.

4.7

$$E_1 = \frac{\gamma_2 V}{\gamma_1 h_2 + \gamma_2 h_1}, \qquad D_1 = \frac{\epsilon_1 \gamma_2 V}{\gamma_1 h_2 + \gamma_2 h_1}$$
$$E_2 = \frac{\gamma_1 V}{\gamma_1 h_2 + \gamma_2 h_1}, \qquad D_2 = \frac{\epsilon_2 \gamma_1 V}{\gamma_1 h_2 + \gamma_2 h_1}$$
$$j_1 = j_2 = \frac{\gamma_1 \gamma_2 V}{\gamma_1 h_2 + \gamma_2 h_1}$$

At the boundary of separation between the plates

$$\sigma_\mathrm{b} = \frac{E_2 - E_1}{4\pi} - \sigma = \frac{\gamma_2 (\epsilon_1 - 1) - \gamma_1 (\epsilon_2 - 1)}{4\pi (\gamma_1 h_2 + \gamma_2 h_1)} V$$
$$\sigma = \frac{D_2 - D_1}{4\pi} = \frac{(\epsilon_2 \gamma_1 - \epsilon_1 \gamma_2) V}{4\pi (\gamma_1 h_2 + \gamma_2 h_1)}$$

The quantity V is positive, if the first plate is in contact with the positively charged electrode.

At the boundary between the electrode and the first plate
$\sigma = \frac{D_1}{4\pi}, \quad \sigma_\mathrm{b} = \frac{E_1 - D_1}{4\pi}$.

At the boundary between the electrode and the second plate

$$\sigma = -\frac{D_2}{4\pi}, \quad \sigma_\mathrm{b} = -\frac{E_2 - D_2}{4\pi}$$

4.8

$$\frac{\tan \beta_1}{\tan \beta_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_2}$$

where β_1 and β_2 are, respectively, the angles between the current flow-lines and the normal to the separation boundary in the first and second media.

$$\varphi = \begin{cases} \frac{Jz}{\pi a^2 \gamma}, & \text{when} \quad 0 \leqslant r \leqslant a \\ \frac{Jz \ln(r/b)}{\pi a^2 \gamma \ln(a/b)}, & \text{when} \quad a < r \leqslant b \\ 0, & \text{when} \quad b < r \end{cases}$$

It is clear from this formula that the electric field in the space between the conductors is not parallel to the z-axis. The absence of a finite radial component of the electric field E_r shows that the surface charges on the cylindrical surfaces of the conductors are given by

$$\sigma_1 = \left.\frac{\epsilon E_r}{4\pi}\right|_{r=a} = \frac{\epsilon J z}{4\pi^2 a^3 \gamma \ln(a/b)}$$
$$\sigma_2 = \left.\frac{\epsilon E_r}{4\pi}\right|_{r=b} = -\frac{\epsilon J z}{4\pi^2 a^2 b \gamma \ln(a/b)}$$

When $z = 0$, the surface densities σ_1 and σ_2 become equal to zero. The position of the section on which $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ is indeterminate. This section may be displaced if an additional constant charge is placed on the conductor. The relation between the two charges $q_1 = 2\pi a \sigma_1$ and $q_2 = 2\pi b \sigma_2 = -q_1$ per unit length of the conductor and envelope (at the same value of z) and the potential difference between them

$$V = \int_a^b E_r \, \mathrm{d}r = -\frac{Jz}{a^2 \gamma}$$

is

$$\frac{q_1}{V} = \frac{1}{2\ln(b/a)} = \text{ constant}$$

The ratio q_1/V is equal to the capacitance per unit length in the corresponding electrostatic problem (cylindrical capacitor). The magnetic field is, of course, of the same form as for an infinitely long straight conductor carrying a current J. This is explained by the fact that the current density in the infinitely thick envelope vanishes and as a result the reverse current does not produce a magnetic field.

4.10 $E_0 = -k\,(\gamma_2 l_1 + \gamma_1 l_2)\,\varepsilon_0$, $E_1 = k\gamma_2\varepsilon_0$, $E_2 = k\gamma_1\varepsilon_0$, where $k = \gamma_0/l_0\,(\gamma_0\gamma_1 l_2 + \gamma_0\gamma_2 l_1 + \gamma_1\gamma_2 l_0)$ and $\&_0 = E_e l_0$ is the e.m.f. of the source. Inside the source the electric field acts in the opposite direction to the direction of flow of the current ($E_0 < 0$).

The charges responsible for this electric field are located on the separation boundaries between conductors of different conductivities, and may be determined with the aid of the proper boundary conditions. For example, the charge on the boundary 01 is given by

$$q_{01} = \frac{r^2}{4}\,(E_1 - E_0)$$

4.11 Consider, for example, the energy flux through the surface of conductor 0 . The magnetic field near the surface is the same as the field due to an infinitely long straight conductor ($H = 2$ J/cr). The Poynting vector

$$S = \frac{c}{4\pi}\,[E_0 \wedge H]$$

can be easily shown to be parallel to the outward normal to the surface of the conductor ($\boldsymbol{E}_0$ is the field strength in conductor 0 and its direction is opposite to the direction of the current; see problem 4.10). The energy flux through the surface of this conductor is therefore equal to

$$2\pi r l_0 s = JV,$$

where $V = E_0 l_0$ is the potential difference between the ends of the conductor. The quantity JV is the difference between the work done by the e.m.f. and the Joule losses per unit time in the source. The former is equal to $\mathscr{E}_0 J$ where $\mathscr{E}_0 = E_e l_0$.

Per unit time an amount of energy JV leaves the source, flows in the surrounding space (mainly outside the conductors), enters conductors 1 and 2 through their surface, and is converted into Joule heat. The total amount of energy entering conductors 1 and 2 per unit time is JV_1 and JV_2 respectively. This may be easily proved with the aid of the Poynting vector, as indicated above.

4.12 The resistance is given by

$$R = \int_1^2 \frac{\mathrm{d}l}{S\gamma}$$

where $\mathrm{d}l$ is parallel to the normal to the equipotential surface of area S. The limits 1 and 2 represent the bounding surfaces of the conductor.

4.13

(a) $R = \frac{1}{4\pi\gamma}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$;

(b) $R = \frac{1}{4\pi\gamma_1}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{c}\right) + \frac{1}{4\pi\gamma_2}\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{b}\right)$;

(c) $R = \frac{1}{2\pi l\gamma}\ln\frac{b}{a}$.

4.14

$$R = \frac{1}{2\pi\gamma_2}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) + \frac{1}{2\pi\gamma_1}\frac{1}{b}$$

4.15

$$J_k = \frac{4\pi\gamma}{\epsilon}q_k, \quad R_{ik} = \frac{\epsilon}{4\pi\gamma}s_{ik}$$

4.16

$$C = \frac{\epsilon}{4\pi\gamma R}$$

4.17

$$Q = \sum_{i,k} R_{ik}J_iJ_k$$

4.18

$$R = \frac{\epsilon}{4\pi\gamma}\left(s_{11} - 2s_{12} + s_{22}\right) = \frac{\epsilon}{4\pi\gamma}\frac{c_{11} + 2c_{12} + c_{22}}{c_{12}^2 - c_{11}c_{22}}$$

4.19

$$R = \frac{V_1 - V_2}{J} = R_1 + R_2 - \frac{1}{\pi\gamma l} \approx R_1 + R_2,$$

where $R_1 = 1/2\pi\gamma a_1$ and $R_2 = 1/2\pi\gamma a_2$ are the resistances of the joined conductors (cf problem 4.14).

4.20 Let $e_0 = (1 - b^2/a^2)^{1/2}$ be the eccentricity of the ellipsoid of revolution, where b/a is the ratio of the semiminor to semimajor axes. It follows that for an oblate ellipsoid

$$R = \frac{1}{\gamma}\left(\frac{4}{3\pi^2 V}\right)^{1/3}\frac{(1 - e_0^2)^{1/6}}{e_0}\arccos\left(1 - e_0^2\right)^{1/2}$$

while for a prolate ellipsoid

$$R = \frac{1}{\gamma}\frac{(1 - e_0^2)^{1/3}}{(6\pi^2 V)^{1/3}\, e_0}\ln\frac{1 + e_0}{1 - e_0}$$

For a given volume V, the most efficient shape is either a very elongated or a very flattened conductor.

4.21 The current density in the space between the electrodes

$$j = \rho v \tag{4.21.1}$$

is independent of x[$v(x)$ is the particle velocity at a given point x]. The relation between the potential $\varphi(x)$ and the velocity is

$$v = \left(-\frac{2e\varphi}{m}\right)^{1/2} \tag{4.21.2}$$

($\varphi = 0$ when $x = 0$).

It follows from equations (4.21.1) and (4.21.2) that $\rho = j(-m/2e\varphi)^{1/2}$, since the Poisson equation is

$$\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}x^2} = -4\pi j \left(-\frac{m}{2e\varphi}\right)^{1/2} \tag{4.21.3}$$

Integration of equation (4.21.3) subject to the boundary conditions $\mathrm{d}\varphi/\,\mathrm{d}x\big|_{x=0} = 0$ and $\varphi\big|_{x=a} = \varphi_0$ yields

$$j = \frac{1}{9\pi a^2}\left(\frac{2|e|}{m}\right)^{1/2} |\varphi_0|^{3/2}$$

which is the so-called three-halves law (Child-Langmuir law).

17.5 Magnetostatics

5.1

$$H_r = H_z = 0, \quad H_\phi = \begin{cases} \frac{2Jr}{ca^2}, & \text{when } r < a \\ \frac{2J}{cr}, & \text{when } a \leqslant r \leqslant b \\ 0, & \text{when } r > b \end{cases}$$

5.2 Let the z-axis lie along the axis of the cylinder so that the Cartesian components of the vector potential A satisfy the following equation:

$$\nabla^2 A_x = 0, \qquad \nabla^2 A_y = 0, \qquad \nabla^2 A_z = -\frac{4\pi\mu_0}{c} j_z$$

where $j_z = 0$ when $r > a$ and $j_z = J/\pi a^2$ when $r \leqslant a$.
Since the current J does not enter into the equations for A_x and A_y, these components may be put equal to zero. A_z will then depend only on the distance r from the z-axis. If we integrate the equation for A_z and use the continuity conditions for A_z and H_ϕ on the boundary $r = a$, and also the condition that H must be finite at $r = 0$, we have for $r < a$,

$$A_z = C - \frac{\mu_0 J}{c}\left(\frac{r}{a}\right)^2, \quad B_\phi = \frac{2\mu_0 J}{ca^2} r, \quad H_\phi = \frac{2J}{ca^2} r$$

When $r > a$

$$A_z = C - \frac{J}{c}\left(\mu_0 + 2\mu \ln\frac{r}{a}\right), \quad B_\phi = \frac{2\mu J}{cr}, \quad H_\phi = \frac{2J}{cr}$$

where C is an arbitrary constant.
5.3 When $r < a$

$$A_z = C_1, \quad B = 0$$

and when $a \leqslant r \leqslant b$

$$A_z = \frac{2\mu_0 J a^2}{c\,(b^2 - a^2)}\left(\ln\frac{r}{a} - \frac{r^2}{2a^2}\right) + C_2, \quad B_\phi = \frac{2\mu_0 J}{c\,(b^2 - a^2)}\left(r - \frac{a^2}{r}\right)$$

When $r > b$

$$A_z = \frac{2\mu J}{c}\ln\frac{b}{r} + C_3, \quad B_\phi = \frac{2\mu J}{cr}$$

The remaining components of A and B are all equal to zero. Any two of the constants entering into the expression for A_z may be expressed in terms of the third constant by using the continuity of the vector potential at the boundaries.

5.4

$$H_x = \frac{2J}{ca}\left(\arctan\frac{a+2x}{2y} + \arctan\frac{a-2x}{2y}\right)$$
$$H_y = \frac{J}{ca}\ln\frac{(x-a/2)^2+y^2}{(x+a/2)^2+y^2}, \quad H_z = 0.$$

The y-axis is perpendicular to the strip and passes through its axis.

5.5 The repulsive force on each of the plates is given by

$$f = \frac{4\ \mathrm{J}^2}{c^2a^2}\left(a\arctan\frac{a}{b} - \frac{1}{2}b\ln\frac{a^2+b^2}{b^2}\right)$$

5.6

$$A_z = \frac{2J}{c}\ln\frac{r_2}{r_1} = \frac{J}{c}\ln\frac{(a+x)^2+y^2}{(a-x)^2+y^2}$$
$$H_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} = -\frac{8J}{c}\frac{axy}{r_1^2r_2^2}$$
$$H_y = -\frac{\partial A_z}{\partial x} = -\frac{2J}{c}\left(\frac{a-x}{r_1^2} + \frac{a+x}{r_2^2}\right)$$

where the position of the two currents J and $-J$ in the plane perpendicular to them is defined by the coordinates $(a,0)$ and $(-a,0)$, respectively; r_1 and r_2 are the distances from the points $(a,0)$ and $(-a,0)$ to the point of observation.

5.7 (a) in the space between the planes $H = 4\pi i/c$, in the remaining space $H = 0$; (b) in the space between the planes $H = 0$, in the remaining space $H = 4\pi i/c$. The magnetic field is perpendicular to the currents and parallel to the planes in both cases.

5.8

$$H_y = \frac{2Jd}{c\,(b^2-a^2)}, \quad H_x = H_z = 0$$

where the y-axis is perpendicular to the plane containing the axes of the cylinders.

5.9 In the cylindrical system of coordinates whose z-axis is perpendicular to the plane of the ring and passes through its centre

$$A_\phi = \frac{2\mu J}{c}\left(\frac{a}{r}\right)^{1/2}\left[\left(\frac{2}{k}-k\right)K(k) - \frac{2}{k}E(k)\right], \quad A_z = A_r = 0$$

where $k^2 = 4ar/\left[(a+r)^2+z^2\right]$ and $K(k)$ and $E(k)$ are the complete elliptic integrals.

The components of the magnetic field are

$$H_r = \frac{2]z}{cr\left[(a+r)^2+z^2\right]^{1/2}}\left[-K(k) + \frac{a^2+r^2+z^2}{(a-r)^2+z^2}E(k)\right]$$
$$H_z = \frac{2J}{c\left[(a+r)^2+z^2\right]^{1/2}}\left[K(k) + \frac{a^2-r^2-z^2}{(a-r)^2+z^2}E(k)\right], \quad H_\phi = 0$$

On the axis of the ring ($r = 0$) these expressions become

$$H_r = 0, \quad H_z = \frac{2\pi a^2 J}{c\,(a^2+z^2)^{3/2}}$$

5.10 The flux of magnetic induction remains constant along any such tube. Hence the equation of the surface of the tube is

$$N = \int_S (B \cdot \mathrm{d}S) = f(r,z) = \text{ constant}$$

where the surface of integration S has a circular cross-section of radius r in the plane perpendicular to the axis of symmetry (the centre of the circle lies on the axis of symmetry). Since A_ϕ is independent of ϕ, Stokes' theorem gives

$$\int \left(B \cdot \mathrm{d}^2 S\right) = \oint (A \cdot \mathrm{d}l) = 2\pi r A_\phi(r,z) = \text{ constant}$$

The lines of intersection of these surfaces with the planes $\phi =$ constant are the required lines of magnetic induction.

5.11 The components of the magnetic field are given by

$$H_z = -\frac{\partial \psi}{\partial z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} H^{(2n)}(z) \left(\frac{1}{2}r\right)^{2n} = H(z) - \frac{1}{4}r^2 H''(z) + \ldots$$

$$H_r = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n-1)!n!} H^{(2n-1)}(z) \left(\frac{1}{2}r\right)^{2n-1} = -\frac{1}{2}rH'(z) + \ldots$$

$$H_\phi = 0$$

The vector potential can be expressed in terms of the magnetic field with the aid of Stokes' theorem and the relation $H = \operatorname{curl} A$. The result is

$$A_\phi(r,z) = \frac{1}{r}\int_0^r H_z r \, \mathrm{d}r = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(n+1)!} H^{(2n)}(z) \left(\frac{1}{2}r\right)^{2n+1} = \frac{1}{2}rH(r) - \ldots$$

5.12

$$H_z = \frac{2\pi n J}{c}\left(\cos\theta_1 + \cos\theta_2\right)$$

where (see figure 5.12.1):

$$\cos\theta_1 = \frac{h-z}{\left[a^2 + (h-z)^2\right]^{1/2}}, \quad \cos\theta_2 = \frac{z}{\left(a^2+z^2\right)^{1/2}}$$

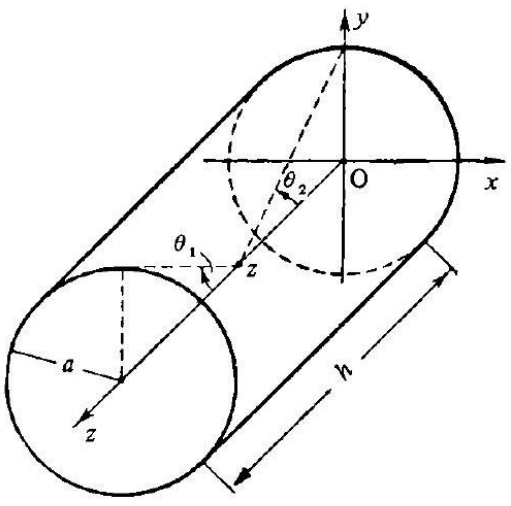


Figure 5.12.1.

5.13 We use the vector potential method to solve this problem. The density of the surface current which is produced as a result of the rotation of the sphere is

$$i = e_\phi \frac{e\omega}{4\pi a} \sin\vartheta$$

where the polar axis lies along the vector ω. The vector potential at all points outside the surface of the sphere satisfies the Laplace equation. In view of the symmetry of the system, the vector potential may be chosen so that A_ϕ is the only finite component. A_ϕ will then be independent of ϕ. It follows that the equation for the vector potential is

$$\nabla^2 A_\phi - \frac{1}{r^2 \sin^2\vartheta} A_\phi = 0 \tag{5.13.1}$$

(see the solution of problem 1.47). Because the current density is proportional to $\sin\vartheta$, it is natural to look for the solution of equation (5.13.1) in the form

$$A_\phi(r, \vartheta) = F(r) \sin\vartheta \tag{5.13.2}$$

It will be seen below that $F(r)$ can be chosen so that it will satisfy both the above equation and the boundary conditions, which justifies the choice (5.13.2). We note that the vector potential (5.13.2) satisfies the condition $\operatorname{div} \boldsymbol{A} = 0$, which is necessary if equation (5.13.1) is to hold. A_ϕ and $H = \operatorname{curl} \boldsymbol{A}$ can be obtained by determining $F(r)$ with the aid of equation (5.13.1) and the boundary conditions. The magnetic field inside the sphere ($r < a$) is

$$H = \frac{2e}{3c}\omega$$

The field outside the sphere ($r > a$) is

$$H = \frac{3r(m \cdot r)}{r^5} - \frac{m}{r^3}$$

where $\boldsymbol{m} = (ea^2/3c)\,\omega$ is the magnetic moment of the system.

5.14 At all points where $j = 0$ it may be assumed that $H = -\operatorname{grad}\psi$. The equation $\operatorname{curl} H = 0$ is then satisfied for all ψ and the equation $\operatorname{div} H = 0$ yields $\nabla^2\psi = 0$. The latter equation may be solved subject to the additional condition

$$\int_l (H \cdot \mathrm{d}l) = \frac{4\pi}{c} J$$

where l is a contour drawn round the current J. Consider the cylindrical coordinates r, ϕ, z and suppose that the solution is of the form $\psi = \psi(\phi)$. The final result is

$$\psi = -\frac{2J}{c}\phi, \quad H_\phi = \frac{2J}{cr}, \quad H_r = H_z = 0$$

5.15 (a) In order to ensure that the scalar potential ψ of the magnetic field is a single-valued function, let us choose a surface S (figure 5.15.1) drawn on the linear current and assume that the change in ψ on passing through this surface is given by

$$\psi(2) - \psi(1) = \frac{4\pi}{c} J \tag{5.15.1}$$

The points 1 and 2 lie infinitely near to each other while still remaining on opposite sides of the surface. The direction of the line drawn from 1 to 2 forms a right-handed system with the direction of the current (see figure 5.15.1). The solution of the Laplace equation may be written in

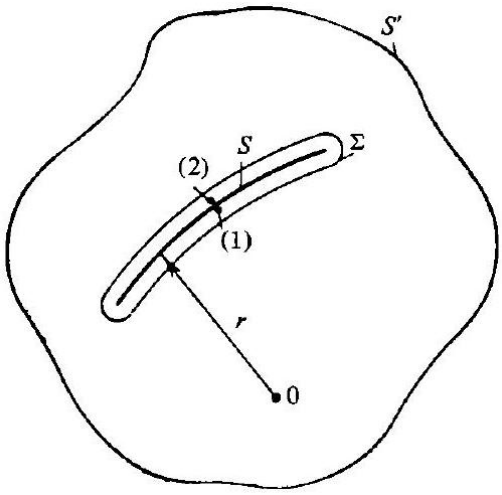


Figure 5.15.1.
the form

$$\psi = \frac{1}{4\pi} \oint \left[\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) \right] \mathrm{d}^2 S \tag{5.15.2}$$

where the integration may be carried out over an infinitely distant closed surface S' and over all closed surfaces Σ_i at a finite distance from the origin, within which ψ and $\partial\psi/\partial n$ have discontinuities. In the example under consideration, the integral over the infinitely distant surface will vanish because the field source (linear current) has finite dimensions. There are no surfaces across which the normal derivative $\partial\psi/\partial n = -H_n$ is discontinuous since H_n is a continuous function. It follows that the integral in equation (5.15 .2) should be taken over a single surface Σ surrounding S.

Let us shrink Σ until it coincides with S. Since $1/r, \partial\psi/\partial n$, and $\partial(1/r)/\partial n$ are all continuous across S, equation (5.15.2) will assume the form

$$\psi = -\frac{1}{4\pi} \int [\psi(1) - \psi(2)] \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) \mathrm{d}^2 S$$

where the integration is now carried out over the open surface S.
Using equation (5.15.1) we have

$$\psi = \frac{J}{c} \int \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) \mathrm{d}^2 S = -\frac{J}{c} \int \frac{\left(r \cdot \ \mathrm{d}^2 S \right)}{r^3} \tag{5.15.3}$$

The integral $\int \left(r \cdot \ \mathrm{d}^2 S \right) / r^3$ represents the solid angle Ω subtended by the linear current at the point of observation, and hence equation (5.15.3) may be rewritten in the form

$$\psi = -\frac{J}{c} \Omega$$

Ω is positive if the radius vector r drawn from the point of observation to any point on the surface S, and the direction of the current form a righthanded system.
(b) Transform the line integral into a surface integral using the result of problem 1.55. Thus,

$$A = \frac{J}{c} \int \left[\ \mathrm{d}^2 S \wedge \nabla (1/r) \right] = \frac{J}{c} \int \left[\nabla_{\mathrm{M}} (1/r) \wedge \mathrm{d}^2 S \right]$$

where ∇_{M} represents differentiation with respect to the coordinates of the point of observation M. Using the relation $\boldsymbol{H} = \operatorname{curl} \boldsymbol{A}$ we have

$$H = \frac{J}{c}\int \left(\ \mathrm{d}^2S\cdot\nabla_{\mathrm{M}}\right)\nabla_{\mathrm{M}}(1/r) = \frac{J}{c}\nabla_{\mathrm{M}}\int\left(\ \mathrm{d}^2S\cdot\nabla_{\mathrm{M}}(1/r)\right) \tag{5.15.4}$$

[In carrying out the transformation, use was made of the result $\nabla^2(1/r) = 0$, and it was assumed that the point $r = 0$ did not lie on the surface of
integration.] Comparing equation (5.15.4) with $\boldsymbol{H} = -\operatorname{grad}\psi$ we have

$$\psi = -\frac{J}{c}\int\left(\ \mathrm{d}^2S\cdot\nabla_{\mathrm{M}}(1/r)\right) = -\frac{J}{c}\int\frac{\left(r\cdot\ \mathrm{d}^2S\right)}{r^3} = -\frac{J}{c}\Omega$$

5.16 $F = 0, \quad N = [m\wedge H]$,
where

$$m = \frac{J}{c}\int n\cdot\ \mathrm{d}^2S$$

is the magnetic moment of the current-carrying conductor.
5.17

$$U = \frac{(m_1\cdot m_2)}{r^3} - \frac{3\,(m_1\cdot r)\,(m_2\cdot r)}{r^5}$$
$$\boldsymbol{F}_2 = -\boldsymbol{F}_1 = \frac{3}{r^5}\left[(m_1\cdot r)\,m_2 + (\boldsymbol{m}_2\cdot r)\,\boldsymbol{m}_1 + (\boldsymbol{m}_1\cdot\boldsymbol{m}_2)\,r\right] - \frac{15}{r^7}\,(\boldsymbol{m}_1\cdot r)\,(\boldsymbol{m}_2\cdot r)\,r$$

where r is the position vector of the second loop relative to the first, $\boldsymbol{F}_1$ and F_2 are the forces on the two loops, and the couples acting on them are given by

$$N_1 = \frac{3\,(m_2\cdot r)\,[m_1\wedge r]}{r^5} + \frac{[m_2\wedge m_1]}{r^3}$$
$$N_2 = \frac{3\,(m_1\cdot r)\,[m_2\wedge r]}{r^5} + \frac{[m_1\wedge m_2]}{r^3}$$

It should be noted that $N_1 \neq -N_2$ and

$$N_1 + N_2 + [r\wedge F_2] = 0$$

If the magnetic moments are parallel ($m_1 = m_1 n, m_2 = m_2 n, r = r r_0$ where n and r_0 are unit vectors) then

$$F_2 = \frac{3m_1m_2\left[2n\cos\vartheta - r_0\left(5\cos^2\vartheta - 1\right)\right]}{r^4}$$

where ϑ is the angle between n and r_0.
5.19 The potential function of the current J_2 in the field of J_1 is

$$u_{21} = \frac{2J_1J_2}{c^2}\ln a + \text{ constant}$$

where a is the distance between the currents. The force per unit length of the second current is given by

$$f = -\frac{\partial u_{21}}{\partial a} = -\frac{2J_1J_2}{c^2a}$$

When the currents are of the same sign they attract each other.
5.20 The force F and the couple N can be obtained by differentiating the potential function

$$U(r,\alpha) = -\frac{J_1 J_2 a}{c^2} \ln \frac{4r^2 + a^2 + 4ar\cos\alpha}{4r^2 + a^2 - 4ar\cos\alpha}$$

5.21

$$N = \frac{4JJ'a}{c}(\sin\varphi - \varphi\cos\varphi)$$

5.22

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\mu_0 + 2\mu \ln\frac{b}{a}$$

5.23

$$\mathcal{L} = 2\mu \ln\frac{b}{a}$$

5.24$L_{12} = 4\pi\left[b - (b^2 - a^2)^{1/2}\right]$;

$$F = \frac{J_1 J_2}{c^2}\frac{\partial L_{21}}{\partial b} = \frac{4\pi J_1 J_2}{c^2}\left[1 - \frac{b}{(b^2 - a^2)^{1/2}}\right]$$

5.25 It is convenient to use equation (5.0.23). As in the solution of problem 2.21, we have

$$L_{12} = 4\pi(ab)^{1/2}\left[\left(\frac{2}{k} - k\right)K(k) - \frac{2}{k}E(k)\right]$$

where

$$K(k) = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\mathrm{d}\psi}{\left(1 - k^2\sin^2\psi\right)^{1/2}}, \quad E(k) = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \left(1 - k^2\sin^2\psi\right)^{1/2}\ \mathrm{d}\psi$$

$$k^2 = \frac{4ab}{(a+b)^2 + l^2}$$

When $l \gg a, b$ the parameter k is small so that

$$k^2 \approx \frac{4ab}{l^2}, \quad k \approx \frac{2(ab)^{1/2}}{l} \ll 1$$

It follows that the following approximate formulae for E and K can be used:

$$K(k) = \frac{1}{2}\pi\left(1 + \frac{1}{4}k^2 + \frac{9}{64}k^4\right), \quad E(k) = \frac{1}{2}\pi\left(1 - \frac{1}{4}k^2 - \frac{3}{64}k^4\right)$$

By retaining in the expression for L_{12} only the terms proportional to k^3, we get the first nonvanishing approximation for L_{12}, which is

$$L_{12} = \frac{2\pi^2 a^2 b^2}{l^3}$$

The latter result can also be obtained from the equation $L_{12} = c\Phi_{12}/J_1$ by regarding the two rings as magnetic dipoles.

When

$$a \approx b \gg l, \quad k \approx 1, \quad K(k) \approx \ln \frac{4}{(1-k^2)^{1/2}}, \quad E(k) \approx 1$$

$$L_{12} = 4\pi a \left\{ \ln \frac{8a}{\left[l^2 + (a-b)^2\right]^{1/2}} - 2 \right\}$$

5.26 In the notation of the preceding problem

$$F = \frac{4\pi J_1 J_2}{c^2} \frac{l}{\left[(a+b)^2 + l^2\right]^{1/2}} \left[-K(k) + \frac{a^2+b^2+l^2}{(a+b)^2+l^2} E(k) \right]$$

5.27 $\mathcal{L} = 4\pi n^2 S$.
For a solenoid having a large though finite length h, the total selfinductance (neglecting edge effects) is $L = 4\pi n^2 Sh$.
5.28 The magnetic energy is given by

$$W = \frac{1}{2c^2} \int \frac{(i_1 \cdot i_2)}{R} \, \mathrm{d}^2 S_1 \, \mathrm{d}^2 S_2$$

where $\mathrm{d}^2 S_1$ and $\mathrm{d}^2 S_2$ are elements of the surface of the solenoid, R is the distance between them, i ($i_1 = i_2 = i = n$ J) is the density of the surface current, by which the actual current flowing in the solenoid may be replaced, and n is the number of turns per unit length. The integral can conveniently be evaluated in terms of cylindrical coordinates:

$$\begin{aligned} W &= \frac{\pi n^2 a^2 J^2}{c^2} \int_0^h \mathrm{d}z_1 \int_0^h \mathrm{d}z_2 \oint \frac{\cos\phi \, \mathrm{d}\phi}{\left[(z_1 - z_2)^2 + 4a^2 \sin^2 \frac{1}{2}\phi\right]^{1/2}} \\ &= \frac{2\pi^2 a^2 n^2 J^2 h}{c^2} \left(1 - \frac{8a}{3\pi h}\right) \end{aligned}$$

where terms of the order of $(a/h)^2$ or higher are neglected. Hence

$$L = 4\pi^2 a^2 n^2 h \left(1 - \frac{8a}{3\pi h}\right)$$

When $a/h \ll 1$, this result will be identical with that obtained in the preceding solution:

$$L = 4\pi^2 a^2 n^2 h = 4\pi n^2 Sh$$

5.29 For a circular cross section

$$L = 4\pi N^2 \left[b - \left(b^2 - a^2\right)^{1/2} \right]$$

The self-inductance per unit length of an infinite solenoid $\mathcal{L} = L/(2\pi b)$ may be obtained by letting $b \to \infty$ at a constant number of turns per
unit length $n = N/(2\pi b)$ (cf problem 5.27):

$$\mathcal{L} = 4\pi^2 n^2 a^2 = 4\pi n^2 S$$

For a rectangular cross section

$$L = 2N^2 h \ln \left(\frac{2b+a}{2b-a} \right)$$

When $b \gg a$, we have $\mathcal{L} = 4\pi n^2 S$ as before.
If the current flows directly along the shell of the torus, the selfinductance is diminished by a

factor N^2 as compared to the self-inductance of a torus with a wire wound around it. Hence we have for a torus of circular cross section

$$L = 4\pi \left[b - \left(b^2 - a^2 \right)^{1/2} \right]$$

and for a torus with a rectangular cross section

$$L = 2h \ln \left(\frac{2b + a}{2b - a} \right)$$

5.30 The magnetic energy per unit length of the system can be calculated with the aid of equation (5.0.16). The vector potential for a straight conductor was obtained in the solution of problem 5.2. For conductor 1 (figure 5.30.1) this potential can be written in the form

$$A_{12} = C - \frac{J r_1^2}{c a^2}, \quad \text{when} \quad r_1 < a \tag{5.30.1}$$
$$A_{12} = C - \frac{J}{c} \left(1 + 2 \ln \frac{r_1}{a} \right), \quad \text{when} \quad r_1 > a$$

The vector potential due to conductor 2 is obtained by making the following substitutions in equation (5.30.1):J $\boldsymbol{J} \to -J, a \to b, r_1 \to r_2$.

The magnetic energy is given by

$$W = \frac{J}{2\pi c a^2} \int\limits_1 (A_{1z} + A_{2z}) \, \mathrm{d}^2 S_1 - \frac{J}{2\pi c b^2} \int\limits_2 (A_{1z} + A_{2z}) \, \mathrm{d}^2 S_2$$

Recalling the relation between the inductance and magnetic energy, we find that

$$\mathcal{L} = 1 + 2 \ln \frac{h^2}{ab}$$

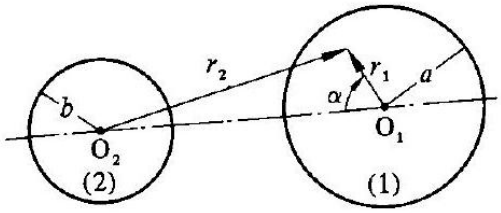


Figure 5.30.1.

5.31 The total magnetic energy of the current flowing in the conductor consists of two parts:

$$W = W_1 + W_2 \tag{5.31.1}$$

where

$$W_1 = \frac{\mu_0}{8\pi} \int H_1^2 \, \mathrm{d}^3 r$$

is the total energy stored inside the conductor (the integration is carried out over the volume of the conductor), and

$$W_2 = \frac{\mu}{8\pi} \int H_2^2 \, \mathrm{d}^3 r$$

is the energy stored in the remaining space. Let us suppose that we may introduce a parameter r_0 which has the dimensions of length and satisfies the condition

$$a \ll r_0 \ll R \tag{5.31.2}$$

where a is the radius of the conductor and R is the radius of curvature of the axial line of the conductor (which in general will not be a constant). It follows that at distances smaller than r_0 the magnetic field can be considered as identical with that due to an infinitely long straight conductor. In particular, inside the conductor

$$H_1 = \frac{2Jr}{ca^2}$$

(cf problem 5.2). This may be used to find the 'internal' energy W_1, which is given by

$$W_1 = \frac{\mu_0 l J^2}{4c^2} \tag{5.31.3}$$

In order to determine the 'external' energy W_2, consider a surface S on an arbitrary contour lying on the surface of the conductor and introduce a scalar potential ψ. This potential will exhibit a discontinuity across S which is given by

$$\psi_+ - \psi_- = \frac{4\pi}{c} J \tag{5.31.4}$$

The integral in the expression for W_2 may be transformed as follows:

$$\int (\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{H}) \mathrm{d}^3 r = -\int (\boldsymbol{B} \cdot \operatorname{grad} \psi) \mathrm{d}^3 r = -\int \operatorname{div}(\psi \boldsymbol{B}) \mathrm{d}^3 r = -\oint \psi B_n \ \mathrm{d}^2 S$$

where the subscript 2 has been omitted and $\operatorname{div} B = 0$. In the final integral the integration should be carried out over both sides of the surface S and the surface of the conductor S' (see figure 5.31 .1, which shows a
cross section of the conductor). The integral over an infinitely distant surface will be zero in view of the finite dimensions of the conductor. Thus

$$W_2 = -\frac{1}{8\pi} \int\limits_{S'} \psi B_n \ \mathrm{d}^2 S + \frac{1}{8\pi} \int\limits_{S} \psi_+ B_n \ \mathrm{d}^2 S - \frac{1}{8\pi} \int\limits_{S} \psi_- B_n \ \mathrm{d}^2 S$$

The first of these integrals is zero because in view of equation (5.31.2) the magnetic field on S' is identical with the field due to a straight conductor and has, therefore, only a tangential component. The remaining integrals may be transformed with the aid of equation (5.31.4) and the fact that B_n is continuous. Thus

$$W_2 = \frac{J}{2c} \int\limits_{S} B_n \ \mathrm{d}^2 S \tag{5.31.5}$$

At large distances from the conductor ($r > r_0$) the magnetic field is independent of the current distribution across the conductor and hence it may be assumed that the current flows along the axis. At small distances ($a \leqslant r < r_0$) the field is identical with the field due to an infinitely long circular cylinder, and again it may be considered that the current flows along the axis. Thus, the integral (5.31.5) represents the flux of magnetic induction due to a current flowing along the axis of the conductor through a surface drawn on a closed contour lying on the surface of the conductor. Using equation (5.0.22) we have

$$W_2 = \frac{J^2}{2c^2} L' \tag{5.31.6}$$

Finally, from equations (5.31.1), (5.31.3) and (5.31.6) and the relation between self-inductance and the magnetic energy, we obtain the required formula for the self-inductance:

$$L = \frac{1}{2}\mu_0 l + L'$$

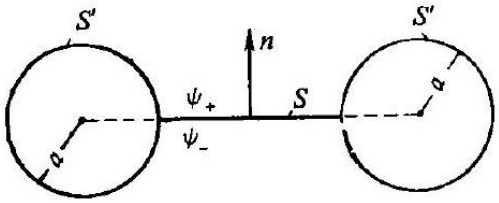


Figure 5.31.1.

5.32 Using the result of the preceding problem we have

$$L' = 4\pi\mu b\left(\ln\frac{8b}{a} - 2\right)$$

where μ is the magnetic permeability of the medium in which the conductor is located. The total self-inductance is

$$L = 4\pi b\left(\mu\ln\frac{8b}{a} - 2\mu + \frac{1}{4}\mu_0\right)$$

or

$$L = 4\pi b\left(\ln\frac{8b}{a} - \frac{7}{4}\right)$$

when $\mu_0 = \mu = 1$.

5.33

$$L_{12} = 2l - 2\left(a^2 + l^2\right)^{1/2} + 2a\ln\frac{a + (a^2 + l^2)^{1/2}}{l}$$

5.34 Using the result of the preceding problem we have

$$L_{12} = 8\left[l - 2\left(a^2 + l^2\right)^{1/2} + \left(2a^2 + l^2\right)^{1/2} + a\ln\frac{a + (a^2 + l^2)^{1/2}}{l}\right.$$
$$\left. - a\ln\frac{a + (2a^2 + l^2)^{1/2}}{(a^2 + l^2)^{1/2}}\right]$$
$$F = \frac{8J_1J_2}{c^2}\left[\frac{a^2 + 2l^2}{l\,(a^2 + l^2)^{1/2}} - \frac{l\,(2a^2 + l^2)^{1/2}}{a^2 + l^2} - 1\right].$$

5.35

$$L = 2\mu_0 b + 8\mu b\left[\ln\frac{2b}{a(1 + \sqrt{2})} + \sqrt{2} - 2\right]$$

5.36 Using equation (5.0.13) in the integration with respect to the angles, and the relation $\overline{n_i n_k} = \frac{1}{3}\delta_{ik}$ (see problem 1.32), we have:
for a uniform volume distribution of charge

$$m = \frac{ea^2}{5c}\omega$$

for a uniform surface distribution of charge

$$m = \frac{ea^2}{3c}\omega$$

For a sphere whose radius is equal to the classical radius of the electron (2.8×10^{-15} m) and whose magnetic moment is equal to the magnetic moment of the electron as measured experimentally $\left(0.9 \times 10^{-24}\ \text{J T}^{-1}\right)$, it turns out that the linear velocity at the equator of the sphere is $v = a\omega \approx 10^{11}$ m s^{-1} and is therefore greater than the velocity of light in vacuo. This indicates that classical ideas cannot be used to describe electron spin (Akhiezer and Berestetskii, 1965).

5.38 For the secondary field, curl $\boldsymbol{H}' = 0$, i.e. it may be described by a scalar potential defined by $\boldsymbol{H}' = -\operatorname{grad}\psi$. Hence the equation for the potential is the same as in electrostatics in the case of a nonuniform medium, i.e.

$\operatorname{div}(\mu \operatorname{grad}\psi) = -4\pi\rho_{\text{m}}$,

where

$$\rho_{\text{m}} = -\frac{1}{4\pi}\left(\boldsymbol{H}_0 \cdot \operatorname{grad}\mu\right)$$

represents the density of magnetic charges. On the boundary of separation between two media the tangential components must satisfy the conditions

$$\boldsymbol{H}'_{1\tau} = \boldsymbol{H}'_{2\tau}, \quad \text{or} \quad \frac{\partial\psi_1}{\partial\tau} = \frac{\partial\psi_2}{\partial\tau}$$

whereas the normal components must satisfy the conditions

$$\mu_2 H'_{2n} - \mu_1 H'_{1n} = (\mu_1 - \mu_2) H_{0n}, \quad \text{or} \quad \mu_1\frac{\partial\psi_1}{\partial n} - \mu_2\frac{\partial\psi_2}{\partial n} = 4\pi\sigma_{\text{m}}$$

In the above expression

$$\sigma_{\text{m}} = \frac{1}{4\pi}(\mu_1 - \mu_2) H_{0n}$$

is the surface density of magnetic charge. We note that the expression for σ_{m} may be obtained from the volume density of charge by means of the following formula

$$\sigma_{\text{m}} = \lim_{h\to 0}\rho_{\text{m}} h$$

Let us replace the separation boundary by a thin layer of thickness h. The vector $\operatorname{grad}\mu$ will then lie along the normal to the layer and will be equal to $(\mu_2 - \mu_1)/h$, and hence

$$\rho_{\text{m}} = -\frac{1}{4\pi h}(\mu_2 - \mu_1) H_{0n}, \quad \sigma_{\text{m}} = \lim_{h\to 0}\rho_{\text{m}} h = \frac{1}{4\pi}(\mu_1 - \mu_2) H_{0n}$$

5.39

$$\boldsymbol{H}_1 = \frac{\mu_2}{\mu_1 + \mu_2}\boldsymbol{H}_0, \quad \boldsymbol{H}_2 = \frac{\mu_1}{\mu_1 + \mu_2}\boldsymbol{H}_0$$

where H_0 is the field due to the circuit in vacuo and H_1, H_2 are the fields in the media with permeabilities μ_1, μ_2.

5.40 The magnetic field in medium 1 is the same as the field produced in vacuo by two straight currents

$$J_1 = \mu J \quad \text{and} \quad J_2 = \frac{\mu_1 (\mu_2 - \mu_1)}{\mu_1 + \mu_2} J$$

where J_1 flows along the same conductor as the original current J, and J_2 flows along a conductor which is a mirror image of the first conductor with respect to the separation boundary between the two media. The magnetic field in medium 2 is identical with the field produced in vacuo
by a current

$$J_1 = \frac{2\mu_1\mu_2}{\mu_1 + \mu_2} J$$

which flows along the same conductor as the original current J.
5.41 The field vectors satisfy the relations $\operatorname{cur} 1H = 0 = \operatorname{div} \boldsymbol{B}$ in all space, and hence it is possible to introduce a scalar potential ψ which is defined by $H = -\operatorname{grad} \psi$ and satisfies the Laplace equation. This reduces the magnetostatic problem to the corresponding electrostatic problem. The solution inside the sphere is (see problem 3.21)

$$H_1 = \frac{3}{\mu + 2} H_0$$

Outside the sphere the solution is

$$H_2 = H_0 + H_\mathrm{d}$$

where H_d is the field due to a magnetic dipole whose moment is given by

$$\boldsymbol{m} = \frac{\mu - 1}{\mu + 2} a^3 H_0$$

Since the field inside the sphere is uniform, the magnetisation is constant and is given by

$$M = \frac{3m}{4\pi a^3} = \frac{3(\mu - 1)}{4\pi(\mu + 2)} H_0$$

The equivalent volume current density is therefore zero, i.e.

$$j_\mathrm{mol} = c \operatorname{curl} M = 0$$

The surface current density is given by

$$i_\mathrm{mol} = c\,[n \wedge (M_2 - M_1)]\,.$$

This expression may be obtained from equation (5.0.3) by taking it to the limit (cf the derivation of the boundary condition for the tangential component H_r from Maxwell's equations). Substituting $M_2 = 0$ and $M_1 = M$ we have

$$i_\mathrm{mol} = e_\phi \frac{3c(\mu - 1)}{4\pi(\mu + 2)} H_0 \sin\vartheta$$

It is interesting to note that the surface current may be obtained by rotating a sphere with a uniform surface charge about one of its diameters (see problem 5.13).
5.42 Consider a coordinate system whose axes lie along the principal axes of the permeability tensor. The field components inside the sphere
will then be equal to

$$\frac{3}{\mu^{(k)} + 2} H_{0k}$$

where H_0 is the external field. Inside the sphere $\boldsymbol{H}_2 = \boldsymbol{H}_0 + \boldsymbol{H}_\mathrm{d}$ where $\boldsymbol{H}_\mathrm{d}$ is the field due to a magnetic dipole having a moment $\boldsymbol{m}$ with

$$m_k = \frac{\mu^{(k)} - 1}{\mu^{(k)} + 2} a^3 H_{0k}$$

The couple acting on the sphere is $N = [m \wedge H_0]$.

5.43

$$H = \left[1 - \frac{1 - (a/b)^2}{(\mu_1 + \mu_2)^2 / (\mu_1 - \mu_2)^2 - (a/b)^2}\right] H_0$$

When $\mu_1 \gg \mu_2$ the field in the cavity is considerably reduced (magnetic screening).

5.44

$$H = \left[1 - \frac{1 - (a/b)^3}{\frac{1}{2}(\mu_1 + 2\mu_2)(2\mu_1 + \mu_2) / (\mu_1 - \mu_2)^2 - (a/b)^3}\right] H_0$$

When $\mu_1 \gg \mu_2$ the field is considerably reduced ($H \ll H_0$).

5.45 The magnetic field is given by $H = \operatorname{curl} A$ where

$$A_z = -\frac{\mu_1 J}{4\pi a^2} r^2 + \frac{2\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} B_0 r \sin\phi, \quad \text{when} \quad r < a$$
$$A_z = \frac{\mu_2 J}{2\pi} \ln\frac{a}{r} + \left[1 + \left(\frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2}\right)\frac{a^2}{r^2}\right] B_0 r \sin\phi, \quad \text{when} \quad r > a$$

The z-axis lies along the axis of the cylinder; the remaining components of $\boldsymbol{A}$ are zero.

5.48

$$f = \frac{2J^2 a^2 (\mu - 1)}{c^2 b (b^2 - a^2)(\mu + 1)}$$

5.49

$$f = \frac{2J^2 b (\mu - 1)}{c^2 (a^2 - b^2)(\mu + 1)}$$

5.50

$$H_i = \frac{1}{\mu_i}\left(\frac{2\pi\mu_1\mu_2\mu_3}{\mu_1\mu_2\alpha_3 + \mu_2\mu_3\alpha_1 + \mu_1\mu_3\alpha_2}\right) H_0$$

where H_0 is the field produced by the current in vacuo.

5.51 Outside the sphere the magnetic induction B and the magnetic field H are related by the usual formula $B_2 = \mu_2 H_2$. According to
equation (5.0.27), the magnetic induction inside the sphere is given by

$$B_1 = \mu_1 H_1 + 4\pi M_0$$

where M_0 is the constant magnetisation. Using the scalar potential as in problem 5.41, we have

$$\psi_1 = -(H_1 \cdot r), \quad \psi_2 = \frac{(m \cdot r)}{r^3}$$

where

$$H_1 = -\frac{4\pi M_0}{2\mu_2 + \mu_1}, \quad m = \frac{4\pi a^3 M_0}{2\mu_2 + \mu_1}$$

Thus the field inside the sphere is uniform and the field outside the sphere is the same as that due to a magnetic dipole of moment $\boldsymbol{m}$.

5.52 The field inside the cylinder is

$$H_1 = -\frac{4\pi M_0}{\mu_2 + \mu_1}$$

The field outside the cylinder is

$$H_2 = \frac{2r(m \cdot r)}{r^4} - \frac{m}{r^2}$$

where M_0 is the constant magnetisation and

$$m = \frac{4\pi a^2 M_0}{\mu_2 + \mu_1}$$

5.53 The field inside the sphere is

$$H_1 = \frac{3}{\mu + 2} H_0 - \frac{4\pi M_0}{\mu + 2}$$

Outside the sphere the field is

$$H_2 = H_0 + \frac{3r(m \cdot r)}{r^5} - \frac{m}{r^3} \tag{5.53.1}$$

where

$$m = \frac{4\pi a^3 M_0}{\mu + 2} + \frac{\mu - 1}{\mu + 2} a^3 H_0$$

Since the external field is uniform, it follows that the resultant force on the sphere is zero. However, the sphere will experience a couple if the directions of M_0 and H_0 are different. This couple may be computed with the aid of the magnetic field stress tensor. The couple is given by

$$N_i = \oint_S e_{ikl} x_k T_{lm} \, \mathrm{d}^2 S_m \tag{5.53.2}$$

where T_{lm} is the stress tensor given by equation (5.0.26) and e_{ikl} is the skew-symmetric unit tensor. The integration is carried out over the surface of the magnet. Substituting equation (5.0.26) into equation (5.53.2) we have (in vector notation)

$$N = \frac{1}{4\pi} \oint [r \wedge H_2] \left(H_2 \cdot \, \mathrm{d}^2 S\right) - \frac{1}{8\pi} \oint H_2^2 \left[r \wedge \, \mathrm{d}^2 S\right] \tag{5.53.3}$$

Since the centre of this sphere is taken as the origin, it follows that r and d^2S are parallel and the second integral in equation (5.53.3) is equal to zero. In order to evaluate the first integral let

$$\mathrm{d}^2 S = n \, \mathrm{d}^2 S = n a^2 \, \mathrm{d}^2 \omega, \quad r = an$$

and substitute for H_2 from equation (5.53.1). This gives

$$N = \frac{1}{4\pi} \int \left\{ a^3 \left[n \wedge H_0 \right] + \left[m \wedge n \right] \right\} \left[(H_0 \cdot n) + \frac{2}{a^3} (m \cdot n) \right] \mathrm{d}^2\omega$$

The components of the couple are therefore given by

$$N_i = a^3 e_{ikl} H_{0l} H_{0m} \overline{n_k n_m} + 2 e_{ikl} H_{0l} m_s \overline{n_k n_s} + e_{ikl} m_k H_{0m} \overline{n_l n_m} + \frac{2}{a^3} e_{ikl} m_k m_s \overline{n_l n_s} \tag{5.53.4}$$

Using the relation $\overline{n_k n_m} = \frac{1}{3}\delta_{km}$ (see problem 1.32) we find that two of the four terms on the right-hand side of equation (5.53.4) are equal to zero, and the remaining terms lead to the following expression for the couple

$$N = \left[m \wedge H_0 \right]$$

Finally, when $\boldsymbol{m}$ is expressed in terms of the constant magnetisation we have

$$N = \frac{4\pi a^3}{\mu + 2} \left[M_0 \wedge H_0 \right]$$

As can be seen from this formula, the induced part of the magnetic moment $[(\mu - 1)/(\mu + 2)]a^3 H_0$ does not contribute to the resultant couple.

5.54

$$F = \frac{3m^2}{16a^4} \frac{\mu - 1}{\mu + 2} \left(1 + \cos^2 \theta \right), \quad N = \frac{m^2}{8a^3} \frac{\mu - 1}{\mu + 2} \sin\theta \cos\theta$$

where a is the distance of the magnet from the plane and θ is the angle between m and the normal to the plane. When $\mu \gg 1$ (soft iron in a weak magnetic field), the result becomes identical to that for an electric dipole in the vicinity of a metal surface (see problem 3.20).

5.55 The required parameters may be obtained by replacing the electrical quantities by the corresponding magnetic quantities in the solution of problem 3.73. In particular, for arbitrary coordinate axes, the internal field H_1 in the ellipsoid is of the form

$$H_{1k} = H_{0k} - 4\pi N_{kl} M_l$$

where M is the magnetisation and the N_{kl} are the demagnetisation coefficients. The principal values of the demagnetisation tensor were denoted by $n^{(i)}$ in problem 3.69 and were referred to as the depolarisation coefficients.

5.56 The formula obtained in the preceding solution will also hold for an anisotropic magnetic material. A further relation connecting M and H_1 is

$$H_{1k} + 4\pi M_k = \mu_{kl} H_{1l}$$

Combining these formulae we have

$$H_{0k} = b_{km} H_{1m}$$

where

$$b_{km} = \delta_{km} - N_{km} + N_{kl}\mu_{lm}$$

and hence

$$H_{1k} = b_{km}^{-1} H_{0m}$$

where b_{km}^{-1} are the components of the reciprocal tensor. They may be determined with the aid of the formulae obtained in problem 1.11.

Consider a special case. Suppose that the coordinate axes lie along the principal axes of the ellipsoid. If the tensor μ_{ik} referred to these axes has the diagonal form

$$\mu_{ik} = \begin{pmatrix} \mu^{(x)} & 0 & 0 \\ 0 & \mu^{(y)} & 0 \\ 0 & 0 & \mu^{(z)} \end{pmatrix}$$

then the tensor b_{ik} and its reciprocal b_{ik}^{-1} will also be diagonal:

$$b_{ik}^{-1} = \begin{pmatrix} \left[1 + N^{(x)}\left(\mu^{(x)} - 1\right)\right]^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \left[1 + N^{(y)}\left(\mu^{(y)} - 1\right)\right]^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \left[1 + N^{(z)}\left(\mu^{(z)} - 1\right)\right]^{-1} \end{pmatrix}$$

17.6 Electrical and magnetic properties of matter

17.6.1 a Polarisation of matter in a constant field

6.1$\beta = \frac{3}{4}a_0^3$.
If the charge of the electron is distributed uniformly within a sphere of radius a_0 then $\beta = a_0^3$. The model considered in this problem is very approximate and yields only the order of magnitude. Accurate quantum mechanical calculations show that for hydrogen $\beta = \frac{9}{2}a_0^3$.
6.2 It is clear from the symmetry of the molecule that one of the principal axes of the polarisability tensor will lie along the axis of the molecule, while the two other axes may be chosen arbitrarily in the plane perpendicular to the axis of the molecule. It follows that of the three principal values of the polarisability tensor, only two will be distinct. In order to determine these principal values, it is necessary to consider the following situations separately.
(a) The external field is parallel to the axis of the molecule. It is clear that the induced dipole moment of each of the atoms will be parallel to the external field. The dipole moments are given by

$$\boldsymbol{p}' = \beta'\left(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{E}'\right), \quad \boldsymbol{p}'' = \beta''\left(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{E}''\right) \tag{6.2.1}$$

where $\boldsymbol{E}$ is the external field and $\boldsymbol{E}'$ and $\boldsymbol{E}''$ are the additional fields produced at the centre of each atom by the other atom. The fields $\boldsymbol{E}'$ and $\boldsymbol{E}''$ may be expressed in terms of the dipole moments of the corresponding atoms by means of the formula for the field strength due to a dipole having a moment $\boldsymbol{p}$ and the fact that all the vectors are parallel to the axis of the molecule. If $\boldsymbol{p}'$ and $\boldsymbol{p}''$ are determined from equation (6.2.1), using the relation $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}' + \boldsymbol{p}'' = \beta^{(1)}\boldsymbol{E}$, we have,

$$\beta^{(1)} = \left[\frac{1}{\beta'} - \frac{2\left(a^3 + 2\beta'\right)}{a^3\left(a^3 + 2\beta''\right)}\right]^{-1} + \left[\frac{1}{\beta''} - \frac{2\left(a^3 + 2\beta''\right)}{a^3\left(a^3 + 2\beta'\right)}\right]^{-1}$$

(b) The external field is perpendicular to the axis of the molecule. Using a similar method, we have

$$\beta^{(2)} = \beta^{(3)} = \left[\frac{1}{\beta'} + \frac{a^3 - \beta'}{a^3\left(a^3 - \beta''\right)}\right]^{-1} + \left[\frac{1}{\beta''} + \frac{a^3 - \beta''}{a^3\left(a^3 - \beta'\right)}\right]^{-1}$$

When $\beta' = \beta''$ the above expressions assume the simpler form

$$\beta^{(1)} = \frac{2\beta'}{1 - 2\beta'/a^3}, \quad \beta^{(2)} = \frac{2\beta'}{1 + \beta'/a^3}$$

The average polarisability is given by

$$\bar{\beta} = \frac{1}{3}\left(\beta^{(1)} + 2\beta^{(2)}\right) = \frac{2}{3}\beta'\left[\frac{1}{1 - 2\beta'/a^3} + \frac{2}{1 + \beta'/a^3}\right]$$

6.5 (a) The dielectric as a whole will be anisotropic. The principal values of the polarisability tensor are [see equation (6.a.4)]

$$\alpha^{(i)} = \frac{N\beta^{(i)}}{1 - \frac{4}{3}\pi N\beta^{(i)}}$$

(b) When the molecules are randomly oriented there will be no preferred macroscopic directions other than the direction of the external field.
Hence, the average dipole moment of a molecule $\bar{p}$ will be proportional to the field E acting on the molecule:

$$\overline{\boldsymbol{p}} = \beta E$$

On the other hand,

$$\bar{p}_i = \bar{\beta}_{ik}E_k = \bar{\beta}_{ik}E_k$$

where the averaging process is carried out over a macroscopically small volume. It follows from the last two expressions that

$$\beta = \bar{\beta}_{11} = \bar{\beta}_{22} = \bar{\beta}_{33}, \quad \bar{\beta}_{ik} = 0, \quad \text{when} \quad i \neq k$$

and hence

$$\beta = \frac{1}{3}\left(\bar{\beta}_{11} + \beta_{22} + \beta_{33}\right)$$

However, as the sum of the diagonal components of a tensor is an invariant and is equal to the sum of the principal values $\beta^{(1)} + \beta^{(2)} + \beta^{(3)}$ (see problem 1.9), we have

$$\beta = \frac{1}{3}\left(\beta^{(1)} + \beta^{(2)} + \beta^{(3)}\right)$$

The polarisation coefficient α of the dielectric is related to β by the usual formula (6.a. 4′).
6.6 If the axis of the molecule is at an angle θ to the direction of the external field, $\boldsymbol{E}_0$, then the energy of the molecule is given by

$$W = -\frac{1}{2}(p \cdot E_0) = -\frac{1}{2}\left(\beta_1 \cos^2\theta + \beta_2 \sin^2\theta\right) E_0^2$$

The number of particles per unit volume whose axes lie at the angle θ to $\boldsymbol{E}_0$ is given by the Boltzmann formula (6.a.6). In the normalisation condition (6.a.7), the quantity N should then represent the number of particles per unit volume. The polarisation vector is given by $\boldsymbol{P} = N\overline{\boldsymbol{p}}$ where $\bar{p}$ is the dipole moment of a molecule averaged over the Boltzmann distribution. Since, in the absence of the field, the molecules are randomly oriented, $\vec{p}$ will be parallel to the direction of the external field.

In view of the above considerations, $\bar{p}$ may be calculated from the formula

$$\bar{p} = \frac{1}{N}\int p_{\parallel}\mathrm{d}N = \frac{E_0 \int\limits_0^{\pi} \exp(-W(\theta)/kT)\left(\beta_1 \cos^2\theta + \beta_2 \sin^2\theta\right)\sin\theta \mathrm{d}\theta}{\int\limits_0^{\pi} \exp(-W(\theta)/kT)\sin\theta \mathrm{d}\theta}$$

where $p_{\parallel}$is the component of the dipole moment of the molecule which is parallel to the field. Since by definition the field is weak, it is sufficient to retain only those terms which are linear in $a = (\beta_1 - \beta_2)\, E_0^2/2kT \ll 1$. Moreover, $P = N\bar{p} = \alpha E_0$, and hence

$$\alpha = N\beta_2 + \frac{1}{3}N\,(\beta_1 - \beta_2)\left[1 + \frac{2}{15}\frac{(\beta_1 - \beta_2)\, E_0^2}{kT}\right]$$

As can be seen from this formula, the relation between P and E_0 is nonlinear and α is a function of E_0. Let us estimate the magnitude of the correction term at room temperatures ($T = 300$ K). Assuming that $\beta_1 - \beta_2$ is of the order of 10^{-30} m^3, we have $kT/\,(\beta_1 - \beta_2) \approx 10^6$. Thus, the correction term is small provided $E_0 \ll 10^5$ V m^{-1}. Neglecting the correction term, we have the same expression for α as before:

$$\alpha = \frac{1}{3}N\,(\beta_1 + 2\beta_2)$$

(see problem 6.5).

6.9 The additional potential due to the quadrupole polarisation of the dielectric is given by

$$\varphi = \frac{1}{2}\int \frac{\partial^2(1/R)}{\partial x_i \partial x_k} Q_{ik}\ \mathrm{d}^3 r \tag{6.9.1}$$

where R is the distance of the point of observation from the volume element $\mathrm{d}^3 r$ and the integration is carried out over the volume of the dielectric. On the other hand, the volume and surface charges will in general give rise to a potential

$$\varphi = \int \frac{\rho'}{R}\ \mathrm{d}^3 r + \int \frac{\sigma'}{R}\ \mathrm{d}^2 S + \int (\tau' \cdot \nabla(1/R))\, \mathrm{d}^2 S \tag{6.9.2}$$

where ρ' is the volume density of charges, σ' is the surface density of charges, and τ' is the strength of the double layer. Comparison of equation (6.9.1) with equation (6.9.2) yields

$$\rho' = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 Q_{ik}}{\partial x_i \partial x_k}, \quad \sigma' = -\frac{1}{2}\frac{\partial Q_{in}}{\partial x_i}, \quad \tau'_k = \frac{1}{2}Q_{ki}n_i \tag{6.9.3}$$

Thus, the quadrupole polarisation is equivalent to a volume density ρ' inside the dielectric, a surface density σ', and an electric double layer of strength τ' on the surface of the dielectric. Since the volume and surface densities in the dielectric are related to the polarisation vector by the formulae $\rho' = -\operatorname{div} P', \sigma' = P'_n$, it follows from equation (6.9.3) that the quadrupole polarisation is equivalent to an additional dipole polarisation given by

$$P'_k = -\frac{1}{2}\frac{\partial Q_{ik}}{\partial x_i}$$

and a double layer of strength τ'_k.

The formulae given by equation (6.9.3) can also be obtained from a consideration of the energy of the dielectric which is caused by the quadrupole polarisation.

$6.10 \epsilon = \frac{1}{4}\left[1 + 3x + 3\left(1 + \frac{2}{3}x + x^2\right)^{1/2}\right]$,

where $x = 4\pi N\beta$. The polarisability β for polar substances in weak fields is given by $\beta = p^2/(3kT)$, where p is the molecular dipole moment, k is the Boltzmann constant, and T is the temperature. When $x \ll 1$ the difference between the field acting on the molecule and the average field is very small and

$$\epsilon = 1 + x = 1 + 4\pi N\beta$$

6.11 The total magnetic susceptibility is equal to the sum of the paramagnetic and diamagnetic susceptibilities

$$\chi = \frac{Nm^2}{3kT} - \frac{Ne^2}{6mc^2}\overline{r^2} \tag{6.11.1}$$

This formula includes the magnetic moment of a rotator m, which may be calculated as follows. In general,

$$\boldsymbol{m} = \frac{e}{2mc}\boldsymbol{K} \tag{6.11.2}$$

where K is the angular momentum of the particle. In the case of the rotator, K is related to the kinetic energy by the formula

$$W_{\mathrm{k}} = \frac{K^2}{2ma^2}$$

It follows that the average of the square of the angular momentum is given by

$$\overline{K^2} = 2ma^2\bar{W}_{\mathrm{k}} \tag{6.11.3}$$

However, the average kinetic energy $\bar{W}_{\mathrm{k}}$ may be found from the theorem of equipartition of energy. Since the rotator has two degrees of freedom, $\bar{W}_{\mathrm{k}} = kT$. Substituting equations (6.11.2) and (6.11.3) into (6.11.1) we find that $\chi = 0$. This result is in accordance with the general theorem which states that the total magnetic moment of a body obeying classical statistics is zero. A finite magnetic moment will be obtained only when it is assumed that there are discrete electronic orbits in atoms. This assumption lies outside the framework of classical theories. [For details see, e.g. the book by Levich (1970).]

6.12 The concentration of ions N and electrons n is given by the Boltzmann formula (6.a.6):

$$N = N_0 \exp\left(-\frac{Ze\varphi}{kT}\right), \quad n = n_0 \exp\left(\frac{e\varphi}{kT}\right) \tag{6.12.1}$$

where $\varphi(x, y, z)$ is the electrostatic potential. The preexponential factors are chosen so that as $T \to \infty$, when the interaction between the particles becomes negligible, N and n become equal to N_0 and n_0 respectively. Using equation (6.12.1), the charge density is given by

$$\rho = ZeN - en = e\left[ZN_0 \exp\left(-\frac{Ze\varphi}{kT}\right) - n_0 \exp\left(\frac{e\varphi}{kT}\right)\right]$$

The potential φ can be determined by solving the Poisson equation

$$\nabla^2\varphi = -4\pi\rho = -4\pi e\left[ZN_0 \exp\left(-\frac{Ze\varphi}{kT}\right) - n_0 \exp\left(\frac{e\varphi}{kT}\right)\right] \tag{6.12.2}$$

In order to solve this equation, we shall assume that the interaction energy is small in comparison with thermal energy, so that

$$\left|\frac{Ze\varphi}{kT}\right| \ll 1, \quad \left|\frac{e\varphi}{kT}\right| \ll 1$$

Expanding the exponentials into series, and retaining only those terms which are linear in φ, we have

$$\rho = -\frac{\kappa^2}{4\pi}\varphi, \quad \kappa^2 = \frac{4\pi e^2\left(Z^2 N_0 + n_0\right)}{kT}$$

where the gas is assumed to be electrically neutral, so that $ZN_0 = n_0$. Hence, equation (6.12.2) may be written in the form

$$\nabla^2\varphi = \kappa^2\varphi \tag{6.12.3}$$

The potential φ can only be a function of the distance r to the ion under consideration. The spherically symmetric solution of equation (6.12.3) is of the form

$$\varphi = C_1\frac{\exp(-\kappa r)}{r} + C_2\frac{\exp(\kappa r)}{r}$$

$C_2 = 0$ because the potential must be finite at infinity. C_1 is determined from the condition that when $r \ll \kappa^{-1}$ the potential should become identical with the Coulomb potential of the ion under consideration

$$\varphi|_{r\ll 1/k} = \frac{Ze}{r} = \frac{C_1}{r}, \quad C_1 = Ze$$

Thus, the ion is surrounded by a cloud of electrons and other ions whose density decreases exponentially and whose mean radius κ^{-1} decreases with decreasing temperature.

The above method of calculating the potential is due to Debye and Hckel and has been used in their theory of strong electrolytes. The constant κ^{-1} is known as the Debye radius.

6.13 The electric induction inside the plate is given by

$$D(x) = E_0\frac{\cosh\kappa x}{\cosh\kappa h}$$

where $\kappa = (4\pi e^2 n_0/\epsilon kT)^{1/2}$. When $\kappa h \gg 1$, near the surfaces $x = \pm h$, we have

$$D(x) = E_0\exp[-\kappa(h - |x|)]$$

and hence it follows that when $|x - h| \gg \kappa^{-1}, D(x) = 0$, i.e. the field penetrates into the conductor to a depth κ^{-1}. A charge

$$\rho = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial D}{\partial x} = \pm\frac{\kappa E_0}{4\pi}\exp[-\kappa(h - |x|)]$$

is concentrated in a layer of this thickness. The density of the 'surface' charge, which is considered in the macroscopic theory, is obtained by integrating ρ. At $x = h$ we have

$$\sigma = \int \rho \mathrm{d}x = -\frac{\kappa E_0}{4\pi}\int_0^\infty \exp\left(-\kappa x'\right)\mathrm{d}x' = \frac{E_0}{4\pi}$$

which is the same as the usual boundary condition at the surface of a conductor.

6.14

$$\varphi = \varphi_0\frac{\sinh\kappa x}{\sinh\kappa h}, \quad \kappa = \left(\frac{8\pi e^2 n_0}{\epsilon kT}\right)^{1/2}$$

The magnitude of κ^2 is found to be twice as large as in the preceding problem, since there are two kinds of moving ions.

17.6.2 b Polarisation of matter in a variable field

$$6.15 \epsilon = 1 + 4\pi N a^3; \quad \mu = 1 - 2\pi N a^3 < 1$$

This type of dielectric is diamagnetic. The permittivity ϵ and the permeability μ are independent of frequency, since it is assumed that the spheres are perfect conductors. In order that the artificial dielectric should behave as a continuous medium, the wavelength must be much greater than both the average distance between the spheres and the radius of each sphere:

$$\lambda \gg l, \quad \lambda \gg a$$

where l is the average distance between the spheres. The difference between the effective field and the average field can only be neglected when the polarisability of the medium is small, i.e. when $4\pi N a^3 \ll 1$.

6.16 The equation of motion for an electron is of the form

$$m\dot{r} + \eta \dot{r} = e\boldsymbol{E}_0 \exp(-\mathrm{i}\omega t) \tag{6.16.1}$$

The special solution of this equation corresponding to forced oscillations is of the form

$$r = -\frac{eE_0 \exp(-\mathrm{i}\omega t)}{m\,(\omega^2 + \mathrm{i}\gamma\omega)}$$

where $\gamma = \eta/m$.

The dipole moment per unit volume is obtained by multiplying r by the charge of the electron e and the number of particles per unit volume N. The polarisability of the medium $\alpha(\omega)$ and the permittivity $\epsilon(\omega)$ can then be determined from

$$\epsilon(\omega) = 1 + 4\pi\alpha(\omega) = 1 - \frac{\omega_\mathrm{p}^2}{\omega^2 + \mathrm{i}\gamma\omega} \tag{6.16.2}$$

where

$$\omega_\mathrm{p}^2 = \frac{4\pi e^2 N}{m}$$

The relation between the resistivity ρ and the coefficient η may be found with the aid of equation (6.16.1) and Ohm's law:

$$\rho \equiv \frac{1}{\sigma} = \frac{\eta}{Ne^2} \tag{6.16.3}$$

This result can also be obtained by comparing the permittivity (6.16.2) with the complex permittivity [equation (8.a.8)] expressed in terms of the conductivity:

$$\epsilon(\omega) = \epsilon' + \mathrm{i}\frac{4\pi\sigma}{\omega} \tag{6.16.4}$$

Separating the real and imaginary parts in equation (6.16.2) we find that

$$\epsilon' = 1 - \frac{\omega_\mathrm{p}^2}{\omega^2 + \gamma^2}, \quad \sigma = \frac{e^2 N\gamma}{m\,(\omega^2 + \gamma^2)}. \tag{6.16.5}$$

It follows from equation (6.16.5) that ϵ' and σ are functions of frequency. When $\omega \ll \gamma$ they assume their static values

$$\epsilon' = 1 - \frac{\omega_{\mathrm{p}}^2}{\gamma} < 1, \quad \sigma = \frac{e^2 N}{m\gamma}$$

It follows from equations (6.16.4) and (6.16.5) that the complex permittivity of a conducting medium becomes infinite at low frequencies ($\omega \to 0$). At high frequencies it is of the form

$$\epsilon(\omega) = \epsilon'(\omega) = 1 - \frac{\omega_{\mathrm{p}}^2}{\omega^2}$$

This dependence of the permittivity on frequency at high frequencies will also hold for dielectrics.

Let us estimate the order of magnitude of $\gamma = \eta/m$ for copper for which the static conductivity is $\sigma = 5 \times 10^{17}$ s^{-1}. Equation (6.16.3) gives

$$\gamma = \frac{Ne^2}{\sigma m} = \frac{N_0 e^2 d}{\sigma m A}$$

where $N_0 \approx 6 \times 10^{23}$ (Avogadro's number), $A \approx 6.35 \times 10^{-2}$ kg mol^{-1} (atomic weight), and $d \approx 8.9 \times 10^3$ kg m^{-3} (density of copper). It follows that $\gamma \approx 10^{14}$ s^{-1}. We recall that in the visible region of the spectrum the frequencies are of the order of 10^{15} s^{-1}.

Thus, it may be concluded that in this example the conductivity remains equal to the static value right up to frequencies lying in the infrared region of the spectrum. However, it must be remembered that at high frequencies, when the mean free path of electrons becomes comparable with the depth of penetration of the field into the metal, spatial nonuniformity of the field becomes important and the macroscopic permittivity ϵ loses its meaning.

The results obtained in this problem can be applied, within a limited range, to a metal and also to a semiconductor or an ionised gas (plasma), provided the motion of the positive ions can be neglected. Calculations of the permittivity of a plasma, taking into account the motion of the positive ions, are given in the solution of problem 6.25 .

6.17 Since the molecules of the dielectric are not spherically symmetric, the external field E_0 will partially orient them and the dielectric as a whole will become anisotropic. Since $\mathscr{E} \ll E_0$, the orienting effect of the alternating field may be neglected. Since the external electric field $\boldsymbol{E}_0$ is responsible for the anisotropy, one of the principal axes of the permittivity tensor will lie in the direction of this field, while the other two principal axes will be perpendicular to $\boldsymbol{E}_0$.

Let β'_{ik} represent the components of the polarisability of the molecule along these axes ($i, k = 1$ correspond to the axis parallel to $\boldsymbol{E}_0$). The components β'_{ik} are given by the usual formula

$$\beta'_{ik} = \alpha_{il}\alpha_{km}\beta_{lm} = (\beta - \beta')\,\alpha_{i1}\alpha_{k1} + \beta'\delta_{ik}$$

where α_{il} are the cosines of the angles between the axis of symmetry of the molecule and the principal axes of the permittivity tensor ($\alpha_{il}\alpha_{kl} = \delta_{ik}$ in view of the orthogonality of the matrix α_{ik}). In order to calculate the permittivity tensor per unit volume of the dielectric, it is necessary to find the statistical average of the quantities β'_{ik} with the aid of the Boltzmann formula, i.e. it is necessary to average the product $\alpha_{i1}\alpha_{k1}$.

The quantities α_{1i} can be expressed in terms of the polar angles of the axis of symmetry of the molecule in the dashed system ϑ, ϕ:

$$\alpha_{11} = \cos\vartheta, \quad \alpha_{12} = \sin\vartheta\cos\phi, \quad \alpha_{13} = \sin\vartheta\sin\phi$$

Using the same averaging procedure as in problem 6.6, we have, to within terms which are linear in $a = (\beta_0 - \beta'_0)\,E_0^2/(2kT)$:

$$\overline{\alpha_{11}^2} = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{4}{15}a\right), \quad \overline{\alpha_{12}^2} = \overline{\alpha_{13}^2} = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{2}{15}a\right)$$
$$\overline{\alpha_{i1}\alpha_{k1}} = 0, \quad \text{when} \quad i \neq k$$

where β_0 and β_0' are the static values of the polarisability tensor. Hence,

$$\overline{\beta_{11}'} = \frac{1}{3}(\beta - \beta')\left(1 + \frac{4}{15}a\right) + \beta'$$
$$\overline{\beta_{22}'} = \overline{\beta_{33}'} = \frac{1}{3}(\beta - \beta')\left(1 - \frac{2}{15}a\right) + \beta'$$

Neglecting the difference between the field acting on the molecule and the average field, we obtain the principal values of the permittivity tensor:

$$\epsilon^{(1)} = 1 + 4\pi N\overline{\beta_{11}'}, \quad \epsilon^{(2)} = \epsilon^{(3)} = 1 + 4\pi N\overline{\beta_{22}'}$$

This result shows that in a strong constant electric field, the dielectric will become anisotropic with respect to high frequency oscillations (for example, visible radiation). The appearance of anisotropy under the action of an electric field is known as the Kerr effect. This effect is a very rapid one: the relaxation time is of the order of 10^{-10} s. It is determined by the time necessary to establish statistical equilibrium in the dielectric. The Kerr effect is widely used in technology for high frequency modulation of the intensity of light.

6.18 Assuming that the parameter $pE_0/(kT) = a$ is small, we have, to within terms of the order of a^2,

$$\overline{\beta_{11}'} = \frac{1}{3}(\beta - \beta')\left(1 + \frac{2}{15}a^2\right) + \beta'$$
$$\overline{\beta_{22}'} = \overline{\beta_{33}'} = \frac{1}{3}(\beta - \beta')\left(1 - \frac{1}{15}a^2\right) + \beta'$$
$$\epsilon^{(1)} = 1 + 4\pi N\overline{\beta_{11}'}, \quad \epsilon^{(2)} = \epsilon^{(3)} = 1 + 4\pi N\overline{\beta_{22}'}$$

The symbols have the same meaning as in the preceding problem.

6.19 Let the field amplitude E increase by $\mathrm{d}E$ ($\mathrm{d}E_x$, $\mathrm{d}E_y$, $\mathrm{d}E_z$). The work done on a molecule is then given by

$$\mathrm{d}A = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\,(\boldsymbol{p}\cdot\ \mathrm{d}E^*) = \frac{1}{4}\left[(\boldsymbol{p}\cdot\ \mathrm{d}E^*) + (\boldsymbol{p}^*\cdot\ \mathrm{d}E)\right]$$

where $p_i = \beta_{ik}E_k$ is the component of the dipole moment of the system. Since there is no absorption of energy, this work is used entirely to increase the average potential energy of the molecule in the external field:

$$\mathrm{d}A = \mathrm{d}\bar{W}$$

Hence, $\mathrm{d}A$ should be a perfect differential of a function of the field amplitude. $d\bar{W}$ may be rewritten in the form

$$\mathrm{d}\bar{W} = \frac{1}{4}\sum_{i,k}(\beta_{ik}E_k\ \mathrm{d}E_i^* + \beta_{ki}^*E_i^*\ \mathrm{d}E_k)$$

It is clear that this quantity is a perfect differential, provided $\beta_{ik} = \beta_{ki}^*$. When this is so we have

$$\mathrm{d}\bar{W} = \frac{1}{4}\sum_{i,k}\beta_{ik}\left(E_k\ \mathrm{d}E_i^* + E_i^*\ \mathrm{d}E_k\right) = \frac{1}{4}\sum_{i,k}\beta_{ik}\ \mathrm{d}\left(E_i^* E_k\right) = \mathrm{d}\left(\frac{1}{4}p\cdot E^*\right)$$

or

$$\bar{W} = \frac{1}{4}\left(\boldsymbol{p}\cdot E^*\right)$$

Similarly, it can be shown that the magnetic polarisability tensor for a system in which there is no dissipation of energy is Hermitian.

6.21 The equation of motion for an atomic electron which is bound to the nucleus by an elastic force is

$$\ddot{r} + \omega_0^2 r = \frac{e}{m}\left\{E_0\exp(-\mathrm{i}\omega t) + \left[\frac{v}{c}\wedge H_0\right]\right\}$$

where ω_0 is the frequency of the eigenoscillations. On solving this equation by the method of successive approximations we obtain the following approximate expression:

$$r = \frac{eE}{m\left(\omega_0^2-\omega^2\right)} - \mathrm{i}\frac{e\omega}{m^2 c\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2}\left[E\wedge H_0\right]$$

In order to obtain the polarisability tensor for the atom we shall use the representation of the vector product involving the skew-symmetric tensor e_{ikl} (see problem 1.26). This gives

$$\beta_{ik} = \frac{e^2}{m\left(\omega_0^2-\omega^2\right)}\delta_{ik} - \mathrm{i}\frac{e^2\omega H_{0l}}{m^2 c\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2}e_{ikl}$$

This tensor is Hermitian, in accordance with the general result established in problem 6.19. The gyration vector (see problem 6.20) is now of the form

$$g = -\frac{e^2\omega}{m^2 c\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2}H_0 = -\frac{2e\omega}{m\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2}\omega_{\mathrm{L}}$$

where $\omega_{\mathrm{L}} = eH_0/(2mc)$ is a vector with its length equal to the Larmor frequency.

6.22

$$\epsilon_{ik} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\left(\epsilon^+ + \epsilon^-\right) & \frac{1}{2}\mathrm{i}\left(\epsilon^+ - \epsilon^-\right) & 0 \\ -\frac{1}{2}\mathrm{i}\left(\epsilon^+ - \epsilon^-\right) & \frac{1}{2}\left(\epsilon^+ + \epsilon^-\right) & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon^0 \end{pmatrix}$$

where

$$\epsilon^{\pm} = 1 - \frac{\omega_{\mathrm{p}}^2}{\omega\left(\omega\pm 2\omega_{\mathrm{l}}\right)-\omega_0^2}, \quad \epsilon^0 = 1 - \frac{\omega_{\mathrm{p}}^2}{\omega^2-\omega_0^2}, \quad \omega_{\mathrm{p}}^2 = \frac{4\pi e^2 N}{m}$$

The magnitude of the gyration vector is given by

$$g = \frac{1}{2}\left(\epsilon^+ - \epsilon^-\right)$$

and its direction is parallel to the z-axis. The result established in the solution of the preceding problem can be obtained from the exact solution above by assuming that $2\omega_{\mathrm{L}}\omega \ll |\omega_0^2 - \omega^2|$.

6.23 The tensor ϵ_{ik} is of the same form as in the preceding problem.

However, its components $\epsilon^{\pm}$and ϵ^0 are given by the following expressions

$$\epsilon^{\pm} = 1 - \frac{\omega_{\rm p}^2}{\omega^2 + \omega(\mathrm{i}\gamma \pm 2\omega_{\rm L})}, \qquad \epsilon^0 = 1 - \frac{\omega_{\rm p}^2}{\omega^2 + \mathrm{i}\omega\gamma}$$
$$\gamma = \frac{\eta}{m}, \quad \omega_{\rm L} = -\frac{eH_0}{2mc} > 0, \quad \omega_{\rm p}^2 = \frac{4\pi e^2 N}{m}$$

Owing to the presence of 'friction' ($\eta \neq 0$) in the electron gas there is dissipation of energy and the tensor ϵ_{ik} is not Hermitian.
6.24$j = \sigma E + [E \wedge a]$,
where

$$\sigma = \frac{e^2 N}{m\gamma}, \quad a = \frac{e^3 N}{m^2\gamma^2 c} H_0, \quad \gamma = \frac{\eta}{m}$$

The magnetic field gives rise to a current whose direction is perpendicular to the electric field (Hall current). The reciprocal relation (in the same approximation) is

$$E = \frac{1}{\sigma} j + R\,[j \wedge H_0]$$

where $R = (ceN)^{-1}$ is the Hall constant. The electrical conductivity tensor is

$$\sigma_{ik} = \sigma\delta_{ik} - e_{ikl}a_l$$

6.25 Let $m, \dot{r}$, and $-e$ be the mass, velocity, and charge of an electron, and let the corresponding quantities for an ion be $M, \dot{R}$, and $+e$. The equations of motion are

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{r} &= -eE_0 \exp(-\mathrm{i}\omega t) - \tfrac{e}{c}[\dot{r} \wedge H_0] - m\gamma(\dot{r} - \dot{\boldsymbol{R}}) \\ M\ddot{R} &= eE_0 \exp(-\mathrm{i}\omega t) + \tfrac{e}{c}\left[\dot{\boldsymbol{R}} \wedge H_0\right] - m\gamma(\dot{R} - \dot{r}) \end{aligned}\right\} \tag{6.25.1}$$

where H_0 is the constant uniform magnetic field and $m\gamma$ is the 'friction' coefficient. The frictional force is proportional to the relative velocity of the electrons and ions, i.e. to the differences $\dot{r} - \dot{R}$ and $\dot{R} - \dot{r}$ for electrons and ions respectively. The electric field $\boldsymbol{E}$ is a harmonic function of time, so that $E = E_0 \exp(-\mathrm{i}\omega t)$.

The solution of equations (6.25 .1) will be sought in the form

$$r = r_0 \exp(-\mathrm{i}\omega t), \quad R = R_0 \exp(-\mathrm{i}\omega t) \tag{6.25.2}$$

Let the z-axis be in the direction of H_0 and introduce the following cyclic components of the vectors r_0 and R_0:

$$r_{0\pm1} = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\,(r_{0x} \pm \mathrm{i}r_{0y}), \quad R_{0\pm1} = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}\,(R_{0x} \pm \mathrm{i}R_{0y})$$

Substituting equation (6.25.2) into equations (6.25.1) we have, after addition,

$$-\mathrm{i}\omega\,(mr_0 + M\boldsymbol{R}_0) = \frac{e}{c}\,[(\boldsymbol{R}_0 - r_0) \wedge H_0]$$

The left-hand side of the latter equation may be rewritten in the form

$$-\mathrm{i}\omega\,[(M+m)\boldsymbol{R}_0 + m\,(\boldsymbol{r}_0 - \boldsymbol{R}_0)]$$

Neglecting m in comparison with M, we have

$$\omega R_{0\pm1} = \left(\pm\Omega_H + \omega\frac{m}{M}\right) s_{\pm1} \tag{6.25.3}$$

where

$$\Omega_H = \frac{eH_0}{Mc} \quad \text{and} \quad s = R_0 - r_0$$

Let us now divide the first of the equations in (6.25.1) by m, and the second by M, and subtract one from the other. Neglecting eE/M in comparison with $eE/m, m\gamma s/M$ in comparison with γs, and $e\left[\dot{R} \wedge H_0\right]/(Mc)$ in comparison with $e\left[\dot{r} \wedge H_0\right]/(mc)$, we have

$$\left.\begin{array}{l} (-\mathrm{i}\omega + \gamma \mp \mathrm{i}\omega_H)\, s_{\pm 1} \mp \mathrm{i}\omega_H R_{0\pm 1} = \frac{e}{m} E_{0\pm 1} \\ -\omega^2 s_z = \frac{eE_{0z}}{m} + \mathrm{i}\omega\gamma s_z \end{array}\right\} \tag{6.25.4}$$

where $\omega_H = eH_0/mc$. Equations (6.25.3) and (6.25.4) can then be used to determine s.

The polarisation vector P may be calculated from the formula $P = Nes\exp(-i\omega t)$, where N is the number of ions per unit volume, which is equal to the number of electrons per unit volume.

The components of the permittivity tensor are

$$\epsilon^{\pm} = 1 - \frac{\omega_{\mathrm{p}}^2}{\omega\left(\omega + \mathrm{i}\gamma \pm \omega_H - \omega_H\Omega_H/\omega\right)}$$

$$\epsilon^{(z)} = 1 - \frac{\omega_{\mathrm{p}}^2}{\omega(\omega + \mathrm{i}\gamma)}$$

The component $\epsilon^{(z)}$ is of the same form as the scalar permittivity in the absence of a magnetic field, which was obtained in problem 6.16. The permittivity becomes infinite when $\omega \to 0$. The components $\epsilon^{\pm}$will contain the extra term $\omega_H\Omega_H$ in the denominator when the motion of the ions is taken into account. It may be neglected when $\Omega_H/\omega \ll 1$, i.e. at high frequencies ω. However, this term becomes important at low frequencies. As $\omega \to 0$ it is responsible for the fact that $\epsilon^{\pm}$remains finite:

$$\epsilon^{\pm} = 1 + \frac{\omega_{\mathrm{p}}^2}{\omega_H\Omega_H}$$

This means that very low frequency waves may exist in a plasma (magnetohydrodynamic waves). The theory of propagation of electromagnetic waves in a plasma, taking the oscillation of the positive ions into account, is considered in problem 8.47.

6.26 In the system of coordinates in which the x_3-axis is parallel to the special direction, the tensor T_{ik} should be of the form

$$T_{ik} = \begin{pmatrix} T & T_a & 0 \\ -T_a & T & 0 \\ 0 & 0 & T_{\|} \end{pmatrix}$$

This is in agreement with the results obtained in problems 6.22, 6.23, and so on.

6.28 Since the field is switched on at $t = 0$, it follows from the principle of causality that $P(t) = 0$ when $t < 0$. Denoting the permittivity by $\alpha = \alpha' + \mathrm{i}\alpha''$, we have

$$\boldsymbol{P}(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \alpha\left(\omega'\right) \boldsymbol{E}\left(\omega'\right) \exp(-\mathrm{i}\omega t)\mathrm{d}\omega' = \frac{E_0}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \alpha\left(\omega'\right) \exp\left(-\mathrm{i}\omega' t\right) \mathrm{d}\omega' \tag{6.28.1}$$

where $\boldsymbol{E}\left(\boldsymbol{\omega}'\right)$ is the Fourier component of the field $\boldsymbol{E}(t) = \boldsymbol{E}_0\delta(t)$. Next, multiply equation (6.28.1) by $\exp(\mathrm{i}\omega t)$ and integrate with respect to t between $-\infty$ and 0 . Since $\boldsymbol{P}(t) = 0$ for $t < 0$, we have

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\omega' \alpha(\omega') \int_{-\infty}^{0} \exp\left[-\mathrm{i}(\omega'-\omega)t\right] \mathrm{d}t = 0$$

By using equation (A1.17), and separating the real and imaginary parts, we have

$$\alpha'(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha''(\omega')}{\omega'-\omega} d\omega', \quad \alpha''(\omega) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha'(\omega')\,\mathrm{d}\omega'}{\omega'-\omega}$$

The Kramers-Kronig relation follows immediately.

6.29

$$\epsilon'(\omega) = 1 + \frac{\epsilon_0 - 1}{1+\omega^2\tau^2}$$

6.31

$$\begin{aligned} &\operatorname{curl} E = -\tfrac{1}{c}\tfrac{\partial B}{\partial t}, \quad \operatorname{curl} B = \tfrac{1}{c}\tfrac{\partial D'}{\partial t} + \tfrac{4\pi}{c} j \\ &\operatorname{div} D' = 4\pi\rho, \qquad\qquad\qquad\qquad \operatorname{div} B = 0 \end{aligned}$$

17.6.3 c Ferromagnetic resonance

6.32 $M_x = A\sin(\omega_0 t + \alpha), \quad M_y = A\cos(\omega_0 t + \alpha), \quad M_z = C$, where $\omega_0 = \gamma H_0, \alpha$ is the initial phase, A and C are constants related by the condition $M^2 = M_0^2$, i.e. $A^2 + C^2 = M_0^2$, where M_0 is the saturation magnetisation. The motion of the magnetisation vector takes the form of the usual Larmor precession.

6.33 The solution of the equation

$$\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t} = -\gamma[M \wedge H_0] + \omega_r(\chi_0 H_0 - M) \tag{6.33.1}$$

will be sought in the form

$$\begin{aligned} &M_x = m_x \exp(-\mathrm{i}\omega t), \quad M_y = m_y \exp(-\mathrm{i}\omega t) \\ &M_z = M_0 + m_z \exp(-\mathrm{i}\omega t) \end{aligned}$$

where ω is the unknown frequency and the z-axis is parallel to H_0.

On taking the components of equation (6.33.1) along the coordinate axes, and substituting for $\boldsymbol{M}$, we obtain a system of algebraic equations. The condition that these equations should be consistent is

$$\omega_0^2 - (\omega + \mathrm{i}\omega_r)^2 = 0$$

The frequency ω turns out to be complex:

$$\omega = \omega_0 - \mathrm{i}\omega_r$$

The presence of losses gives rise to damped motion. The components m_x and m_y exhibit a phase difference of $\frac{1}{2}\pi$. The vector M executes a damped precession about H_0.

6.34 Let the z-axis be parallel to H. The resultant magnetic field will then have the components $h_x \exp(-\mathrm{i}\omega t), h_y \exp(-\mathrm{i}\omega t)$, and $H_0 + h_z \exp(-\mathrm{i}\omega t)$.

The solution of the Landau-Lifshitz equation (6.c.2) will be sought in the form

$$M_x = m_x \exp(-\mathrm{i}\omega t), \quad M_y = m_y \exp(-\mathrm{i}\omega t)$$
$$M_z = M_0 + m_z \exp(-\mathrm{i}\omega t) \tag{6.34.1}$$

where M_0 is the saturation magnetisation. This form of the solution corresponds to the assumption that the Larmor precession has been damped out and the oscillations are maintained by the high frequency (forcing) field. Hence, the quantities m_x, m_y, m_z should be regarded as small (of the order of h or smaller). Substituting equation (6.34.1) into the Landau-Lifshitz equation, and rejecting terms which are quadratic in h and m, we obtain the components of m:

$$m_x = \chi_0 \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2} h_x - \chi_0 \frac{i\omega\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2} h_y$$
$$m_y = \chi_0 \frac{i\omega\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2} h_x + \chi_0 \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2} h_y, \quad m_z = 0$$

It is clear from these formulae that the behaviour of m_x and m_y as functions of ω for fixed $\omega_0 = \gamma H_0$ or as functions of H_0 for given ω has a resonance character; ferromagnetic resonance will occur at $\omega = \omega_0$, i.e. m_x and m_y become infinite.

The infinite magnitude of $\boldsymbol{m}$ at resonance is due to the approximate method used in the solution of the Landau-Lifshitz equation. The exact solution (see problem 6.36) should ensure that $|M|$ remains constant, since it follows from the Landau-Lifshitz equation that $M^2 =$ constant. When the problem is solved by the method of successive approximations, taking losses into account, M will also remain finite.

6.35

$$\chi_{ik} = \begin{pmatrix} \chi_\perp & -\mathrm{i}\chi_a & 0 \\ \mathrm{i}\chi_a & \chi_\perp & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

where

$$\chi_\perp = \chi_0 \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2},$$
$$\mu_{ik} = \begin{pmatrix} \mu_\perp & -\mathrm{i}\mu_a & 0 \\ \mathrm{i}\mu_a & \mu_\perp & 0 \\ 0 & 0 & \mu_\parallel \end{pmatrix}$$

and

$$\mu_\perp = 1 + 4\pi\chi_\perp, \quad \mu_a = 4\pi\chi_a, \quad \mu_\parallel = 1$$

As can be seen from the above formulae, χ_{ik} and μ_{ik} are Hermitian tensors ($\mu_{ik} = \mu_{ki}^*$). This means that the medium is gyrotropic and there are no losses.

Figure 6.35 .1 shows the components μ_{ik} as functions of frequency for $H_{0\,\mathrm{res}} \approx 2.7 \times 10^5$ A m^{-1}.

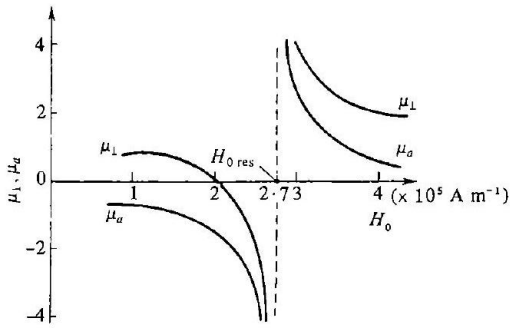


Figure 6.35.1.
6.36

$$M_x = \frac{\omega_1}{\Delta\omega} C\cos\omega t, \quad M_y = -\frac{\omega_1}{\Delta\omega}\sin\omega t, \quad M_z = C$$

where $\Delta\omega = \omega_0 - \omega, \omega_0 = \gamma H_0, \omega_1 = \gamma h$. The constant C may be determined from the condition $M_x^2 + M_y^2 + M_z^2 = M_0^2$, which follows from the Landau-Lifshitz equation:

$$C = \frac{|\Delta\omega|}{\Omega} M_0$$

where $\Omega = (\Delta\omega^2 + \omega_1^2)^{1/2}$.
The expression for C includes the modulus $|\Delta\omega|$ since $M_z > 0$. The components of M are given by

$$\left.\begin{aligned} M_x &= \pm\tfrac{\omega_1}{\Omega} M_0 \cos\omega t = \chi h_x \\ M_y &= \pm\tfrac{\omega_1}{\Omega} M_0 \sin\omega t = \chi h_y, \quad M_z = \tfrac{|\Delta\omega|}{\Omega} M_0 \end{aligned}\right\} \tag{6.36.1}$$

The $\pm$ sign corresponds to the sign of $\Delta\omega$. It follows from these equations that the relation between M and h is nonlinear: the coefficient of proportionality χ is a function of h:

$$\chi = \pm\frac{\gamma M_0}{(\Delta\omega^2 + \omega_1^2)^{1/2}}$$

The precession angle ϑ (the angle between $\boldsymbol{M}$ and $\boldsymbol{H}_0$) is given by

$$\sin\vartheta = \frac{M_\perp}{M_0} = \frac{\omega_1}{\Omega}$$

where $M_\perp = \left(M_x^2 + M_y^2\right)^{1/2}$. At the ferromagnetic resonance $\Delta\omega = 0$ and equations (6.36 .1) yield

$$M_x = \pm M_0\cos\omega t, \quad M_y = \pm M_0\sin\omega t, \quad M_z = 0$$

The vector M will then rotate with a frequency ω in the plane perpendicular to H_0, and its components will remain finite.
6.37 $M = M_0 + m\exp(-\mathrm{i}\omega t)$,
where $\boldsymbol{M}_0$ lies in the direction of $\boldsymbol{H}_0$ and the components of $\boldsymbol{m}$ are given by

$$\begin{aligned} m_x &= \chi_0\frac{\Omega^2 - \mathrm{i}\omega\omega_r}{\Omega^2 - \omega^2 - 2\mathrm{i}\omega\omega_r} h_x - \mathrm{i}\chi_0\frac{\omega\omega_0}{\Omega^2 - \omega^2 - 2\mathrm{i}\omega\omega_r} h_y \\ m_y &= \mathrm{i}\chi_0\frac{\omega\omega_0}{\Omega^2 - \omega^2 - 2\mathrm{i}\omega\omega_r} h_x + \chi_0\frac{\Omega^2 - \mathrm{i}\omega\omega_r}{\Omega^2 - \omega^2 - 2\mathrm{i}\omega\omega_r} h_y \\ m_z &= \chi_0\frac{\omega_r}{\omega_r - \mathrm{i}\omega} h_z, \\ \Omega &= \left(\omega_0^2 + \omega_r^2\right)^{1/2}, \quad \omega_0 = \gamma H_0. \end{aligned}$$

As can be seen from these formulae, the presence of losses ($\omega_r \neq 0$) will ensure that the amplitude of $\boldsymbol{m}$ will remain finite at resonance.
6.38

38

$$\mu_{ik} = \begin{pmatrix} \mu_\perp & -\mathrm{i}\mu_a & 0 \\ \mathrm{i}\mu_a & \mu_\perp & 0 \\ 0 & 0 & \mu_\parallel \end{pmatrix}$$

$$\mu_\perp = \mu'_\perp + \mathrm{i}\mu''_\perp, \quad \mu_a = \mu'_a + \mathrm{i}\mu''_a$$

$$\mu'_\perp = 1 + 4\pi\chi_0 \frac{\Omega^2\left(\Omega^2 - \omega^2\right) + 2\omega^2\omega_r^2}{\left(\Omega^2 - \omega^2\right)^2 + 4\omega^2\omega_r^2}$$

$$\mu''_\perp = 4\pi\chi_0 \frac{\omega\omega_r\left(\Omega^2 + \omega^2\right)}{\left(\Omega^2 - \omega^2\right)^2 + 4\omega^2\omega_r^2}$$

$$\mu'_a = 4\pi\chi_0 \frac{\omega\omega_0\left(\Omega^2 - \omega^2\right)}{\left(\Omega^2 - \omega^2\right)^2 + 4\omega^2\omega_r^2}$$

$$\mu''_a = \frac{\omega^2\omega_0\omega_r}{\left(\Omega^2 - \omega^2\right)^2 + 4\omega^2\omega_r^2}$$

where

$$\Omega = \left(\omega_0^2 + \omega_r^2\right)^{1/2}, \quad \omega_0 = \gamma H_0$$

$$\mu_\parallel = 1 + 4\pi\chi_0 \frac{\omega_r}{\omega_r - \mathrm{i}\omega}$$

$$H_{0\,\mathrm{res}} \approx 2.7 \times 10^5 \mathrm{Am}^{-1}$$

Figure 6.38 .1 shows the dependence of μ'_1 and μ''_1 on the constant field H_0. The dependence of μ'_a and μ''_a on H_0 is similar.

The imaginary parts of μ''_1 and μ''_a have a maximum at $H_0 = H_{0\,\mathrm{res}} \approx \omega/\gamma$, while the real parts of $\mu'_\perp, \mu'_a$ reach extremal values at $H_0 \approx (\omega \pm \omega_r)/\gamma$.

The curves shown in figure 6.38 .1 are similar to the dispersion curves for $\epsilon(\omega)$ (see figure 6.b.1).

The imaginary parts of the components μ''_1, μ''_a, and $\mu''_\parallel$ determine the dissipation of electromagnetic energy. They are zero at $\omega_r = 0$.

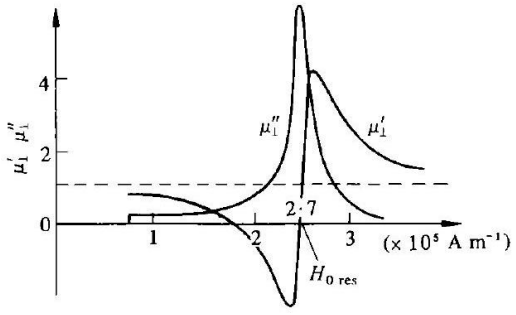


Figure 6.38.1.

6.39

$$\Delta H_0 = \frac{\omega_r}{\gamma}$$

6.40 Let the coordinate axes lie along the principal axes of the ellipsoid, with the z-axis lying along the field H_0. In that system of coordinates the tensor N_{ik} will be diagonal, and hence the components of the LandauLifshitz equation along the coordinate axes will be

$$\left.\begin{aligned}\dot{M}_x &= -\gamma\left[H_0 + 4\pi\left(N^{(y)} - N^{(z)}\right)M_z\right]M_y \\ \dot{M}_y &= \gamma\left[H_0 + 4\pi\left(N^{(x)} - N^{(z)}\right)M_z\right]M_x \\ \dot{M}_z &= -4\pi\gamma\left(N^{(x)} - N^{(y)}\right)M_x M_y\end{aligned}\right\} \tag{6.40.1}$$

The equations are therefore nonlinear. Assuming that the departure of the vector M from the equilibrium position (the direction of the z-axis) is small, the solution will be sought in the form

$$M = M_0 + m\exp(-\mathrm{i}\omega t) \tag{6.40.2}$$

where the vector M_0 is parallel to the z-axis. The system of equations given by (6.40 .1) may be linearised by substituting equation (6.40.2) into it and then neglecting terms containing m^2. Equating the determinant of the system to zero, we have

$$\omega^2 \equiv \omega_k^2 = \gamma^2\left[H_0 + 4\pi\left(N^{(x)} - N^{(z)}\right)M_0\right]\left[H_0 + 4\pi\left(N^{(y)} - N^{(z)}\right)M_0\right]$$

6.41$\omega = \omega_k + \mathrm{i}\omega_r\left[1 + \frac{1}{2}\chi_0\left(N^{(x)} + N^{(y)}\right]\right.$,
$\chi_0 = \frac{M_0}{H_0 - N^{(z)}M_0}$.
The value of ω_k is given in the solution of the preceding problem.
6.42

$$\chi_{ik} = \begin{pmatrix} \chi_1 & -\mathrm{i}\chi_a & 0 \\ \mathrm{i}\chi_a & \chi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

where the z-axis lies along H_0, and

$$\chi_1 = \frac{1}{\Delta}\left\{\gamma^2 M_0\left[H_0 + \left(N^{(y)} - N^{(z)}\right)M_0\right] - \mathrm{i}\chi_0\omega\omega_r\right\}$$
$$\chi_2 = \frac{1}{\Delta}\left\{\gamma^2 M_0\left[H_0 + \left(N^{(x)} - N^{(z)}\right)M_0\right] - \mathrm{i}\chi_0\omega\omega_r\right\}$$

where

$$\Delta = \left(\omega_k^2 - \omega^2\right) - \mathrm{i}\omega\omega_r\left[2 + \chi_0\left(N^{(x)} + N^{(\gamma)}\right)\right],$$
$$\chi_0 = \frac{M_0}{H_0 - N^{(z)}M_0}, \quad \chi_a = -\frac{1}{\Delta}\gamma\omega M_0.$$

Since the demagnetising factors enter into the expressions for the components of the tensor χ_{ik}, the position of the resonance and the width of the resonance line will depend on the shape of the body.
6.43 The equations of motion for the magnetisation vectors M_1 and M_2 are of the form

$$\frac{\mathrm{d}M_1}{\mathrm{d}t} = -\gamma\left[M_1 \wedge (H_0 - \lambda M_2)\right], \quad \frac{\mathrm{d}M_2}{\mathrm{d}t} = -\gamma\left[M_2 \wedge (H_0 - \lambda M_1)\right]$$

The solution will be sought in the form

$$M_1 = M_{10} + m_1\exp(-\mathrm{i}\omega t), \quad M_2 = M_{20} + m_2\exp(-\mathrm{i}\omega t)$$

where M_{10} and M_{20} are the equilibrium values of M_1 and M_2 respectively.
It is convenient to use the cyclic components

$$M_{j\pm} = M_{ix} \pm \mathrm{i}M_{jy} \quad (j = 1, 2)$$

The precession eigenfrequencies are given by

$$\omega_{01} = \gamma H_0, \quad \omega_{02} = \gamma\lambda\,|M_{10} - M_{20}|$$

These formulae will hold provided $\lambda\,|M_{10} - M_{20}| \gg H_0$. The frequency ω_{01} is the same as in the case of a ferromagnetic without sublattices. The frequency ω_{02} depends on the molecular field and is usually much greater than ω_{01}.

17.6.4 d Superconductivity

$$6.44 j_{\mathrm{n}} = 0, \quad \operatorname{div} j_{\mathrm{s}} = 0, \quad E = 0$$
$$\operatorname{curl} \wedge j_{\mathrm{s}} = -\frac{1}{c}H, \quad \operatorname{curl} H = \frac{4\pi}{c} j_{\mathrm{s}}, \quad \operatorname{div} H = 0$$

Eliminating $\boldsymbol{j}_{\mathrm{s}}$ or $\boldsymbol{H}$ from these equations we get

$$\nabla^2 j_{\mathrm{s}} = \frac{1}{\delta^2} j_{\mathrm{s}}, \quad \nabla^2 H = \frac{1}{\delta^2} H$$

where $\delta = (\Lambda c^2/4\pi)^{1/2}$ characterizes the depth to which the magnetic field penetrates into the superconductor (or the thickness of the layer in which the superconducting current is concentrated).
6.45

$$H_x = H_z = 0, \quad H_y = H_0 \exp\left(-\tfrac{x}{\delta}\right)$$
$$j_x = j_y = 0, \quad j_z = \tfrac{c}{4\pi}\tfrac{\partial H_y}{\partial x} = \tfrac{cH_0}{4\pi\delta} \exp\left(-\tfrac{x}{\delta}\right)$$

6.46

$$F_x = -\frac{1}{c}\int_0^\infty j_z H_y \,\mathrm{d}x = \frac{H_0^2}{8\pi}$$

The force F_x tends to expel the superconductor from the field. This is the way the diamagnetism of the superconductor manifests itself.
6.47

$$H_x = H_z = 0, \quad H_y = H_0 \frac{\cosh(x/\delta)}{\cosh(a/\delta)}$$
$$\bar{M}_y = \frac{1}{2a}\frac{1}{2c}\int_{-a}^{a} [r \wedge j_s]_y \,\mathrm{d}x + \frac{1}{8\pi a}\int_{-a}^{a} x\frac{\partial H_y}{\partial x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{8\pi a}\int_{-a}^{a}(H_{0y} - H_0)\,\mathrm{d}x$$
$$= -\frac{H_0}{4\pi}\left(1 - \frac{\delta}{a}\tanh\frac{a}{\delta}\right)$$

$\bar{M}_y$ has the opposite sign from the field (diamagnetism). When $\delta \ll a$ the magnetic moment $\bar{M}_y \approx -H_0/4\pi$. This corresponds to a magnetic susceptibility $\chi = -\frac{1}{4}\pi$ and a permeability $\mu = 1 + 4\pi\chi = 0$.
6.48

$$H_z = H_0 \frac{I_0(r/\delta)}{I_0(a/\delta)}$$
$$\bar{M}_z = \frac{1}{2\pi a^2}\int_0^a (H_z - H_0)\, r \,\mathrm{d}r = -\frac{H_0}{4\pi}\left[1 - 2\frac{\delta}{a}\frac{I_1(a/\delta)}{I_0(a/\delta)}\right]$$

where I_0 and I_1 are modified Bessel functions.

6.49 Outside the sphere

$$H_r = \left(H_0 + \frac{2m}{r^3}\right)\cos\vartheta, \quad H_\vartheta = \left(-H_0 + \frac{m}{r^3}\right)\sin\vartheta$$

where m is a constant, the physical meaning of which is that of a magnetic moment.

Inside the sphere

$$j_\phi = f(r)\sin\vartheta, \quad j_r = j_\vartheta = 0$$

The function $j_\phi(r,\vartheta)$ satisfies the equation

$$\nabla^2 j_\phi - \frac{1}{r^2}\sin^2\vartheta j_\phi = 0$$

(see the answer to problem 1.47), whence

$$j_\phi(r,\vartheta) = \frac{cA}{4\pi r^2}\left(\sinh\frac{r}{\delta} - \frac{r}{\delta}\cosh\frac{r}{\delta}\right)$$

Here A is an integration constant. The components H_r and H_ϑ of the magnetic field inside the sphere can be expressed in terms of $j_\phi(r,\vartheta)$:

$$H_r = \frac{2\delta^2 A}{r^3}\left(\sinh\frac{r}{\delta} - \frac{r}{\delta}\cosh\frac{r}{\delta}\right)\cos\vartheta$$
$$H_\vartheta = \frac{\delta^2 A}{r^3}\left[\left(1 + \frac{r^2}{\delta^2}\right)\sinh\frac{r}{\delta} - \frac{r}{\delta}\cosh\frac{r}{\delta}\right]\sin\vartheta$$

The constants m and A are determined from the condition that H_r and H_ϑ must be continuous at $r = a$:

$$m = -\frac{1}{2}H_0 a^3\left(1 - 3\frac{\delta}{a}\coth\frac{a}{\delta} + 3\frac{\delta^2}{a^2}\right), \quad A = -\frac{3}{2}\frac{H_0 a}{\sinh(a/\delta)}$$

When $\delta \ll a$, we get $m = -\frac{1}{2}H_0 a^3$ (cf the answer to problem 5.41 with $\mu = 0$), $A = 0$. When $\delta \gg a$, we have $m = -H_0 a^5/30\delta^2$.

6.50

$$j_r = j_\phi = 0, \quad j_z = \frac{J}{2\pi a\delta}\left[\frac{I_0(r/\delta)}{I_1(r/\delta)}\right],$$

$$H_r = H_z = 0, \qquad H_\phi = \begin{cases} \frac{J}{2\pi c a}\frac{I_1(r/\delta)}{I_1(a/\delta)}, & \text{when } r < a, \\ \frac{J}{2\pi c r}, & \text{when } r > a; \end{cases}$$

I_0 and I_1 are modified Bessel functions.

6.51 We integrate the Maxwell equation $\operatorname{curl}\boldsymbol{E} = -(1/c)(\partial\boldsymbol{H}/\partial t)$ with $\boldsymbol{E} = \Lambda\partial j_\mathrm{s}/\partial t$, over an arbitrary closed contour ℓ which passes inside the superconductor and goes round the opening. Applying Stokes' theorem gives

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\int\limits_S H_n\,\mathrm{d}^2S + \oint\limits_\ell \Lambda\,(j_\mathrm{s}\cdot\,\mathrm{d}\ell)\right] = 0$$

where S is a surface based on the contour ℓ. If the contour ℓ lies completely outside the limits of the layer of thickness $\approx\delta$ adjoining the surface of the superconductor, along it $\boldsymbol{j}_\mathrm{s} = 0$, and we get

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int H_n \, \mathrm{d}^2 S = 0$$

6.52

$$J' = -\frac{cH_0 S\cos\vartheta}{L} + J$$

6.53

$$J = \frac{c\Phi_0}{L}$$

17.7 Quasi-stationary electromagnetic fields

17.7.1 a Quasi-stationary phenomena in linear conductors

7.1

$$J(t) = \frac{\pi a^2 \omega H_0}{c\left[R^2 + (\omega L/c^2)^2\right]^{1/2}} \sin(\omega t - \varphi)$$

where $\tan\varphi = \omega L/\left(c^2 R\right)$

$$N(t) = -\frac{\omega\left(\pi a^2 H_0\right)^2}{c^2\left[R^2 + (\omega L/c^2)^2\right]^{1/2}} \sin\omega t \sin(\omega t - \varphi)$$

$$\bar{P} = \frac{\omega^2}{2c^2}\frac{\left(\pi a^2 H_0\right)^2 R}{\left[R^2 + (\omega L/c^2)^2\right]} = \frac{1}{2} J_0^2 R$$

In these expressions L is the inductance of the ring (see problem 5.32), R is its resistance, and J_0 is the amplitude of the current in the ring. The origin of time is chosen so that at $t = 0$ the plane of the loop is perpendicular to H_0.

7.2

$$\bar{N} = \frac{\omega}{2c^2}\frac{\left(SH_0\right)^2 R}{R^2 + \left[\omega L/c^2 - 1/(\omega C)\right]^2}$$

7.3 The average generalised force which tends to increase the generalised coordinate q_i is equal to

$$-\frac{J_0^2}{2c^6}\frac{\omega^2 L L_{12}}{R^2 + (\omega L/c^2)^2}\frac{\partial L_{12}}{\partial q_i}$$

where R and L are the resistance and inductance, respectively, of the second circuit and L_{12} is the coefficient of mutual inductance.

7.4

$$\bar{F} = -\frac{\omega^2 L L_{12} \left|\&_0\right|^2}{2\mathrm{c}^6 \left\{\left[R^2 + \omega^2 \left(L_{12}^2 - L^2\right)/c^4\right]^2 + 4\omega^2 L^2 R^2/c^4\right\}} \frac{\partial L_{12}}{\partial q_i}$$

7.5

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{c^2 \left[\left(L_1 + L_2\right) C + L_1 C_1 + L_2 C_2\right]}{2L_1 L_2 \left(C_1 C_2 + C C_1 + C C_2\right)} \pm \frac{c^2 \left\{\left[L_1 \left(C + C_1\right) - L_2 \left(C + C_2\right)\right]^2 + 4 L_1 L_2 C^2\right\}^{1/2}}{2L_1 L_2 \left(C_1 C_2 + C C_1 + C C_2\right)}$$

When there is no coupling between the circuits, i.e. when $C = 0$, the frequencies ω_1 and ω_2 become equal to $c/\left(L_1 C_1\right)^{1/2}$ and $c/\left(L_2 C_2\right)^{1/2}$, which corresponds to independent oscillations in each of the circuits. For very tight coupling ($C \gg C_1, C_2$) there is only a single frequency $\omega = c/\left(L' C'\right)^{1/2}$, where $L' = L_1 L_2/\left(L_1 + L_2\right), C' = C_1 + C_2$. This corresponds to oscillations in a single circuit in which the capacitances C_1, C_2 and inductances L_1, L_2 are connected in parallel.

7.6

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2} c^2 \left(\frac{1}{L C_1} + \frac{1}{L C_2} + \frac{1}{L_1 C_1} + \frac{1}{L_2 C_2}\right) \pm \frac{1}{2} c^2 \left\{\left[\frac{1}{C_1}\left(\frac{1}{L} + \frac{1}{L_1}\right) - \frac{1}{C_2}\left(\frac{1}{L} + \frac{1}{L_2}\right)\right]^2 + \frac{4}{L^2 C_1 C_2}\right\}^{1/2}$$

7.7

$$\omega_{1,2}^2 = c^2 \frac{L_1 C_1 + L_2 C_2 \pm \left[\left(L_1 C_1 - L_2 C_2\right)^2 + 4 C_1 C_2 L_{12}^2\right]^{1/2}}{2 C_1 C_2 \left(L_1 L_2 - L_{12}^2\right)}$$

7.8 When the system of equations for the currents is set up and the determinant of the system is equated to zero, we have after some rearrangement the following fourth-order equation

$$\omega^4 + \mathrm{i}\omega^3 \left(\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2}\right) - \omega^2 \left(\omega_1^2 + \omega_2^2\right) - \mathrm{i}\omega \left(\frac{\omega_1^2}{\tau_2} + \frac{\omega_2^2}{\tau_1}\right) + \omega_1^2 \omega_2^2 = 0 \qquad (7.8.1)$$

where

$$\omega_1 = \frac{c}{\left(L_1 C_1\right)^{1/2}}, \quad \omega_2 = \frac{c}{\left(L_2 C_2\right)^{1/2}}, \quad \tau_1 = R C_1, \quad \tau_2 = R C_2$$

The coefficients of this equation are complex and hence the frequency ω will also be complex, so that $\omega = \omega' + i\omega''$. In the zero-order approximation the terms including τ_1 and τ_2 in equation (7.8.1) may be neglected, so that the equation will assume the simpler form

$$\omega^4 - \omega^2 \left(\omega_1^2 + \omega_2^2\right) + \omega_1^2 \omega_2^2 = 0 \qquad (7.8.2)$$

This equation has the following solutions: $\omega_1^{(0)} = \omega_1$ and $\omega_2^{(0)} = \omega_2$. Thus, in this approximation, $\omega'' = 0$ and there is no dissipation of energy (since it was assumed that R is infinite). The oscillations in each circuit take place independently. In the next approximation $\omega = \omega^{(0)} + \Delta\omega' + \mathrm{i}\omega''$, where ω'' and $\Delta\omega'$ are at least of the order of τ^{-1}. Accordingly we shall

neglect higher-order terms. If ω is substituted into equation (7.8.1), and equation (7.8.2) is used, we have, since the real and imaginary parts are separately zero,

$$\Delta\omega' = 0, \quad \omega_1'' = -\frac{1}{2\tau_2}, \quad \omega_2'' = -\frac{1}{2\tau_1}$$

The correction to ω' which contains R will only appear in the next approximation.

$$J_1 = \frac{\varepsilon}{Z_1\left[1+\omega^2 L_{12}^2/\left(c^4 Z_1 Z_2\right)\right]}, \quad J_2 = \frac{\mathrm{i}\omega L_{12}}{c^2 Z_2} J_1$$
$$Z_1 = R_1 + \mathrm{i}\left(\frac{1}{\omega C_1} - \frac{\omega L_1}{c^2}\right), \quad Z_2 = R_2 + \mathrm{i}\left(\frac{1}{\omega C_2} - \frac{\omega L_2}{c^2}\right)$$
$$J_{1\max} = \frac{\mathscr{E}}{R}, \quad \text{when} \quad \omega = \frac{c}{\left\{L_1 C_1\left[1 - L_{12}^2/\left(L_1 L_2\right)\right]\right\}^{1/2}}$$

7.10

$$Z = \frac{R - \mathrm{i}\omega L/c^2}{1 - \omega^2/\omega_1^2 - \mathrm{i}\omega RC}$$

where $\omega_1 = c(LC)^{-1/2}$ is the eigen frequency of the oscillations in the circuit. The impedance Z becomes infinite when $R = 0$ and $\omega = \omega_1$. This property of the two-terminal network is used in electronics (rejector circuit).

7.11

$$C = C_0, \quad L = L_0, \quad R = \frac{\gamma L_0}{c^2}$$

where

$$L_0 = \frac{c^2}{\omega_\mathrm{p}^2 C_0}$$

7.12

$$Q = \frac{1}{2}\operatorname{Re}\left(UJ^*\right) = \frac{1}{2}|J|^2 \operatorname{Re}\left(\frac{1}{Z}\right) = \frac{1}{2}\frac{\gamma\omega_\mathrm{p}^2}{\omega^2+\gamma^2} C_0 |U_0|^2$$
$$\bar{W} = \frac{1}{4}\left(1 + \frac{\omega_\mathrm{p}^2}{\omega^2+\gamma^2}\right) C_0 |U_0|^2$$

7.13

$$C = C_0, \quad L = \frac{c^2}{\omega_\mathrm{p}^2 C_0}, \quad C_1 = \frac{\omega_\mathrm{p}^2}{\omega_0^2} C_0, \quad R = \frac{\gamma L}{c^2} = \frac{\gamma}{\omega_\mathrm{p}^2 C_0}$$

7.14

$$Q = \frac{1}{2}\frac{\omega^2\omega_\mathrm{p}^2\gamma}{\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2 + \omega^2\gamma^2} C_0 |U_0|^2$$
$$\bar{W} = \frac{1}{4}\left[1 + \frac{\omega_\mathrm{p}^2\left(\omega^2+\omega_0^2\right)}{\left(\omega^2-\omega_0^2\right)^2 + \omega^2\gamma^2}\right] C_0 |U_0|^2$$

7.15 Let the currents flowing through the inductance, capacitance, and the battery be denoted by J_1, J_2, and J_3. According to Kirchhoff's laws

$$J_1 + J_2 + J_3 = 0, \quad \frac{L}{c^2} J_1 = \frac{\dot{q}(t)}{C} = (t) + J_3 R \tag{7.15.1}$$

where $q(t)$ is the charge on the capacitor plate, which is related to J_2 by the formula $J_2 = \dot{q}$, and

$$\&(t) = \begin{cases} 0, & \text{when} \quad t < 0 \\ \&, & \text{when} \quad t > 0 \end{cases}$$

From equation (7.15.1) we obtain a second-order equation for the current J_1. The corresponding characteristic equation has the following roots

$$x = -\frac{1}{2RC} \pm \left[\left(\frac{1}{2RC} \right)^2 - \omega_0^2 \right]^{1/2}, \quad \omega_0^2 = \frac{c^2}{LC}$$

The following three cases are possible, depending on the relation between R, L, and C:
(a) $\omega_0 > \frac{1}{2RC}$.

Using the method of variation of arbitrary constants due to Lagrange (Smirnov, 1964), we have

$$J_1(t) = \frac{\&}{R} \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{2RC} \right) \left(\frac{\sin \omega t}{2\omega RC} + \cos \omega t \right) \right]$$

where $\omega = [\omega_0^2 - (2RC)^{-2}]^{1/2}$.
(b) $\omega_0 < \frac{1}{2RC}$.

Here

$$J_1(t) = \frac{\mathscr{E}}{R} \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{2RC} \right) \left(\frac{\sinh \Omega t}{2\Omega RC} + \cosh \Omega t \right) \right]$$

where $\Omega = \left[(4R^2C^2)^{-1} - \omega_0^2 \right]^{1/2}$.
(c) $\omega_0 = \frac{1}{2RC}$:

$$J_1(t) = \frac{\&}{R} \left[1 - \left(1 + \frac{t}{2RC} \right) \exp\left(-\frac{t}{2RC} \right) \right]$$

Under the conditions (b) and (c) the transients are completely aperiodic and there are no oscillations.

7.16

$$U_2(t) = \begin{cases} 0, & \text{when } t < 0 \\ U_0 \exp\left(-\frac{t}{RC}\right), & \text{when } 0 < t < T \\ U_0 \left\{ \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) - \exp\left[-\frac{(t-T)}{RC}\right], \right. & \text{when } t > T \end{cases}$$

7.17

$$U_2(t) = \begin{cases} 0, & \text{when } t < 0 \\ U_0 \exp\left(-\frac{Rc^2 t}{L}\right), & \text{when} \quad 0 < t < T \\ U_0 \left\{ \exp\left(-\frac{Rc^2 t}{L}\right) - \exp\left[-\frac{Rc^2 (t-T)}{L}\right] \right\}, & \text{when } t > T \end{cases}$$

7.18 The form of the pulse should be

$$U_1(t) = \begin{cases} 0, & \text{when } t < -T \\ hE_0\left(1 + \frac{t}{T} + \frac{RC}{T}\right), & \text{when } -T < t < 0 \\ hE_0\left(1 - \frac{t}{T}\right), & \text{when } 0 < t < T \\ 0, & \text{when } t > T \end{cases}$$

The origin of time is chosen so that the field between the plates of the capacitor is a maximum at $t = 0$.

7.19

$$J(t) = \frac{\varrho_0}{\left[R^2 + (\omega L/c^2)^2\right]^{1/2}} \left[\cos(\omega t + \varphi_0 - \varphi) - \exp\left(-\frac{Rc^2 t}{L}\right)\cos(\varphi_0 - \varphi)\right]$$

where $\tan\varphi = \omega L/(c^2 R)$. The transient is absent when $\tan\varphi_0 = -Rc^2/(\omega L)$. This condition has a simple interpretation: the stationary value of the current should be zero at $t = 0$.

7.20 For a simple harmonic dependence of the currents on time, the Kirchhoff equation for the nth section is of the form

$$-\frac{\omega L}{c^2} J_n + \frac{1}{\omega C}(2J_n - J_{n-1} - J_{n+1}) = 0 \tag{7.20.1}$$

Equation (7.20.1) is a linear difference equation with the independent variable n assuming integral values. It has two linearly independent solutions, namely sinkn and $\cos\kappa n$ (cf problem 4.4); the frequencies of the eigenoscillations can be expressed in terms of the parameter κ:

$$\omega^2 = 4\omega_0^2 \sin^2\frac{1}{2}\kappa, \quad \omega_0 = \frac{c}{(LC)^{1/2}} \tag{7.20.2}$$

Using the boundary conditions $J_0 = J_N = 0$, we have

$$J_n = A\sin\kappa n, \quad \kappa = \frac{\pi r}{N} \tag{7.20.3}$$

where r is an integer, $r = 1, 2, \ldots$. When $r = 0$, the current in the circuit is zero. However, owing to the periodicity of the factor $\sin\frac{1}{2}k$ which
enters into equation (7.20.2), the number of eigenfrequencies of the system will be finite. To obtain the frequency spectrum it is sufficient to vary r within the range $1 \leqslant r \leqslant N$. The parameter κ will then vary in the range $0 < \kappa \leqslant \pi$, and to each κ there will be one eigenfrequency. The total number of such frequencies will be N, as should be the case for a system of N coupled circuits. They will lie in the range $0 < \omega \leqslant 2\omega_0$.

In order to determine the significance of κ introduce the coordinate $y_n = an$, where n refers to the nth section and a is the 'length' of a section. Equation (7.20.3) can then be written in the form

$$J_n(t) = J_0 \sin k y_n \exp(-\mathrm{i}\omega_k t) \tag{7.20.4}$$

where the time factor has been included and $k = \kappa/a$.
Equation (7.20.4) represents a superposition of two waves travelling in opposite directions. The quantity k plays the role of a 'wave vector' for the oscillations which propagate along the line from different discrete sections. The phase and group velocities of these waves are given by the formulae

$$v_{\mathrm{ph}} = \frac{\omega}{k}, \quad v_{\mathrm{g}} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}$$

Since ω is a nonlinear function of k the phase and group velocities are different, i.e. dispersion takes place. From equation (7.20.2) we have

$$v_{\mathrm{ph}} = \frac{2\omega_0}{k} \sin \frac{1}{2} ka, \quad v_{\mathrm{g}} = \omega_0 a \cos \frac{1}{2} ka$$

The quantity $2\pi/k$ may be interpreted as the 'wavelength' in a discrete chain. For long waves ($\lambda \gg a$) we have $ka \ll 1$ and hence $v_{\mathrm{ph}} = v_{\mathrm{g}} = \omega_0 a$, that is, the phase and group velocities are independent of k and there is no dispersion. Figure 7.20 .2 shows plots of v_g and ω as functions of k.

The electrical oscillations of the system considered in this problem are analogous to the mechanical oscillations of a linear atomic chain, which

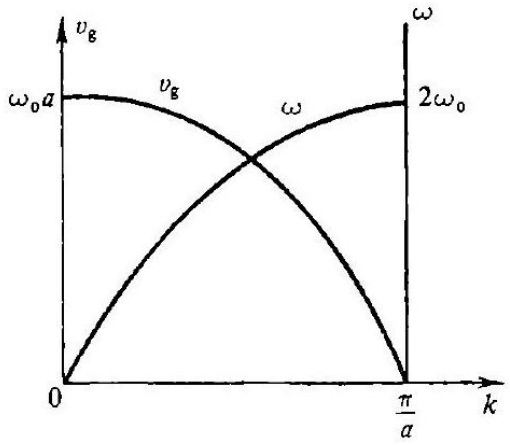


Figure 7.20.2.

may be used as a one-dimensional model of a crystal. The inductance L is then analogous to the mass of an atom, while $1/C$ is analogous to the elastic constant [(1)].

7.21

$$\Delta r = \frac{2N}{\pi} \frac{\Delta\omega}{(4\omega_0^2 - \omega^2)^{1/2}}$$

7.22 Let the currents through the section with self-inductances L_1 and L_2 be J and J'. The Kirchhoff equation will then be of the form

$$-\frac{\omega L_1}{c^2} J_n + \frac{1}{\omega C} \left(2J_n - J'_n - J'_{n-1}\right) = 0$$
$$-\frac{\omega L_2}{c^2} J'_n + \frac{1}{\omega C} \left(2J'_n - J_n - J_{n+1}\right) = 0$$

Substituting $\omega_1 = c\,(L_1 C)^{-1/2}$ and $\omega_2 = c\,(L_2 C)^{-1/2}$ we have

$$\left.\begin{array}{l} \left(2\omega_1^2 - \omega^2\right) J_n = \omega_1^2 \left(J'_n + J'_{n-1}\right) \\ \left(2\omega_2^2 - \omega^2\right) J' = \omega_2^2 \left(T_n + J_{n+1}\right) \end{array}\right\} \tag{7.22.1}$$

The solution of this system of equations will be sought in the form

$$J_n = A \exp(\mathrm{i}kn), \quad J'_n = B \exp(\mathrm{i}kn)$$

where A, B, and κ are constants. Substitution into equation (7.22.1) yields

$$\begin{array}{l} A\left(2\omega_1^2 - \omega^2\right) = B\omega_1^2[1 + \exp(-\mathrm{i}\kappa)] \\ B\left(2\omega_2^2 - \omega^2\right) = A\omega_2^2[1 + \exp(-\mathrm{i}\kappa)] \end{array} \tag{7.22.2}$$

Equating the determinant of this system to zero, we have the following relation between the frequency ω and κ:

$$\omega^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 \pm \left[\left(\omega_1^2 + \omega_2^2\right)^2 - 4\omega_1^2\omega_2^2 \sin^2 \frac{1}{2}\kappa\right]^{1/2} \tag{7.22.3}$$

To obtain the complete spectrum of oscillations, the quantity κ must be varied between 0 and π. As in problem 7.20, the values of κ will be found from the boundary conditions.

The most important difference between the present arrangement and that involving identical sections is the fact that there are now two frequencies to each value of κ, which can be seen from equation (7.22.3). There are, therefore, two branches of oscillations. Let us denote the frequencies of these oscillations by $\omega_+$and $\omega_-$where the subscripts + and - correspond to the same signs in equation (7.22.3). Figure 7.22.2 shows the frequencies as functions of κ. The oscillations corresponding to $\omega_-$are analogous to those in the case of identical sections. In

(1) For details about the oscillations of atomic chains see, e.g. books by Born and Huang (1954) or Wannier (1959). The analogy between electrical and mechanical oscillations is discussed in the book by Brillouin (1946).

particular, for small κ (long waves) we have

$$\omega_- = \frac{\omega_1\omega_2}{\left[2\left(\omega_1^2 + \omega_2^2\right)\right]^{1/2}}\kappa$$

i.e. there is no dispersion. For the ω_+branch, the dispersion relation for small κ is

$$\omega_+ = a + b\kappa^2$$

As $\kappa \to 0$ the phase velocity becomes infinite while the group velocity tends to zero.

To investigate the character of the oscillations in both branches, consider the ratio of the current amplitudes in adjacent sections for very long ($\kappa \ll 1$) and very short ($\kappa \sim \pi$) waves. By using equation (7.22.2), we have for $\kappa \ll 1$ for the ω_- branch:

$$\left(\frac{A}{B}\right)_- \approx 1$$

and for the ω_+branch:

$$\left(\frac{A}{B}\right)_+ \approx -\frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} = -\frac{L_2}{L_1}$$

For the oscillations corresponding to the ω_- branch the amplitudes are equal and the oscillations are in phase. In the other case, the oscillations in adjacent sections are in antiphase while the amplitudes are inversely proportional to the inductances. When $\kappa = \pi$,

$$\omega_+ = 2^{1/2}\omega_1, \quad \omega_- = 2^{1/2}\omega_2$$

On passing to the limit $\kappa \to \pi$ in equation (7.22.2), we have

$$\left(\frac{B}{A}\right)_+ \to 0, \quad \left(\frac{A}{B}\right)_- \to 0$$

Thus in the limit $\kappa = \pi$, oscillations with frequency $\omega_+ = c\left(2/L_1C\right)^{1/2}$ will take place only in the sections with inductances L_1, whereas

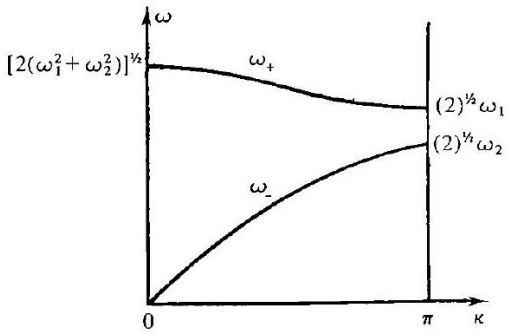


Figure 7.22.2.

oscillations with the frequency $\omega_- = c\,(2/L_2C)^{1/2}$ will take place in sections with inductances L_2.

The oscillations considered in this problem are an analogue of acoustic and optical oscillations in a linear atomic chain consisting of two types of atoms with different masses (see the references in the footnote to problem 7.20).

7.23 $J_n = Aq_1^n + Bq_2^n$

where q_1 and q_2 are the roots of the equation

$$q^2 - \left(2 + \frac{Z_1}{Z_2}\right) q + 1 = 0 \tag{7.23.1}$$

The constants A and B may be determined from the boundary conditions $J_N = 0, (J_0 - J_1)\, Z_2 = U_1$. The second condition means that a voltage U_1 is applied across the points $a'b'$ (see figure 7.23.1). Since $q_1 q_2 = 1$, which follows from equation (7.23.1), we have

$$U_2 = J_{N-1} Z_2 = U_1 \frac{q_2 - q_1}{(1 - q_1)\, q_2^N - (1 - q_2)\, q_1^N}$$

7.24 The transmission coefficient K can be determined from the results obtained in the preceding solution:

$$K = \frac{q_1 - q_2}{(1 - q_2)\, q_1^N - (1 - q_1)\, q_2^N}$$

The denominator of this expression includes q_1^N and q_2^N. Since $q_1 q_2 = 1$, there are two possible cases, namely (a) $|q_1| = |q_2| = 1$ and (b) $|q_1| > 1$, $|q_2| < 1$. In the first case the moduli of q_1^N and q_2^N will be equal to unity and K will also be of the order of unity. In the second case, when $N \gg 1, \left|q_1^N\right| \gg 1, \left|q_2^N\right| \ll 1$ and hence

$$K = \frac{q_1 - q_2}{(1 - q_2)\, q_1^N} \ll 1$$

The frequency ranges for the cases (a) and (b) may be determined from equation (7.23.1) of problem 7.23, from which it follows that

$$q_{1,2} = 1 + \frac{Z_1}{2Z_2} \pm \left[\left(1 + \frac{Z_1}{2Z_2}\right)^2 - 1\right]^{1/2}$$

If the expression in square brackets is negative, then q_1 and q_2 are conjugate roots whose moduli are equal to unity, and this corresponds to $|q_1| = |q_2| = 1$. When this expression is positive, q_1 and q_2 are real and different and this corresponds to $|q_1| > 1, |q_2| < 1$. The range

of Z_1 and Z_2 for the first of the two cases can be found by equating to zero the expression in square brackets, and the result is

$$-4 \leqslant \frac{Z_1}{Z_2} \leqslant 0$$

This corresponds to values of ω^2 lying between $c^2/(L_1C_1)$ and $c^2(4C_1 + C_2)/[C_1C_2(4L_2 + L_1)]$

7.25 Consider the nth closed section of the long artificial transmission line (figure 7.25.1). It may be regarded as the equivalent circuit for a section of a line with distributed parameters having a length a, inductance ΔL, and capacitance ΔC. For an arbitrary time-dependence of the current in the line, the Kirchhoff equation for this section will be of the form

$$-\frac{1}{c^2}\Delta L\frac{\partial J_n}{\partial t} + \frac{q_{n-1,n}}{\Delta C} - \frac{q_{n+1,n}}{\Delta C} = 0 \tag{7.25.1}$$

where $q_{n-1,n}$ and $q_{n+1,n}$ are the charges on the upper plates of the two capacitors. From the derivative of equation (7.25.1) with respect to time and the relations $\dot{q}_{n-1,n} = -J_n + J_{n-1}$ and $\dot{q}_{n,n+1} = J_n - J_{n+1}$, we have

$$\frac{1}{c^2}\Delta L\frac{\partial^2 J_n}{\partial t^2} + \frac{1}{\Delta C}(2J_n - J_{n-1} - J_{n+1}) = 0 \tag{7.25.2}$$

It is now necessary to transform from the variable n to z, which is the distance along the line with distributed parameters. We shall, therefore, substitute

$$J_n(t) = J(z,t), \quad J_{n-1}(t) = J(z-a,t), \quad J_{n+1}(t) = J(z+a,t)$$

and evaluate the differences

$$J_n - J_{n-1} \approx \frac{\partial J}{\partial z}a - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 J}{\partial z^2}a^2, \quad J_n - J_{n+1} \approx -\frac{\partial J}{\partial z}a - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 J}{\partial z^2}a^2$$

If these differences are substituted into equation (7.25.2), together with $L = \Delta L/a$ and $C = \Delta C/a$, which are the inductance and capacitance per unit length, we have

$$\frac{L}{c^2}\frac{\partial^2 J}{\partial t^2} = \frac{1}{C}\frac{\partial^2 J}{\partial z^2} \tag{7.25.3}$$

This is the differential equation for a long lossless line. A real long line will always exhibit losses associated with the finite resistance of the leads and imperfect insulation.

Figure 7.25 .2 shows the equivalent circuit when the insulation is not assumed to be perfect. The equation for a long line of this kind

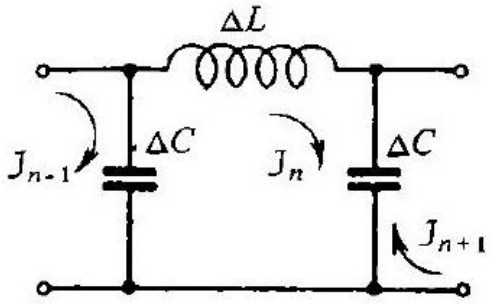


Figure 7.25.1.

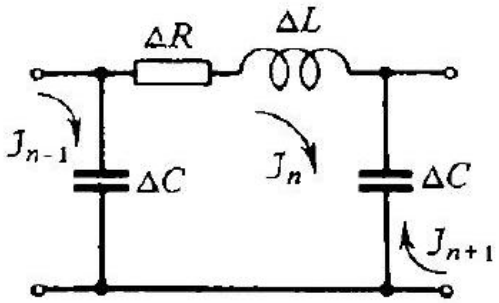


Figure 7.25.2.

(the telegraph equation) can be obtained in a similar way and is

$$\frac{L}{c^2}\frac{\partial^2 J}{\partial t^2} + R\frac{\partial J}{\partial t} = \frac{1}{C}\frac{\partial^2 J}{\partial z^2}$$

where R is the active resistance of the leads per unit length.

7.26 From the solution of equation (7.25.3) obtained in the preceding solution, we have $\omega = vk$, where $v = c(LC)^{-1/2}$ is the velocity of propagation of waves in a long line, $k = \pi r/l, r = 1, 2, 3, \ldots$, and L and C are, respectively, the inductance and capacitance per unit length. In contrast to a line with lumped parameters, here the number of eigenoscillations is infinite. This is due to the fact that a long line has an infinite number of degrees of freedom while with lumped parameters the number of degrees of freedom, N, was finite. The absence of dispersion is characteristic of a perfect long line.

7.27 We shall use Ohm's law in the differential form $\boldsymbol{j} = \sigma(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{E}_\mathrm{e})$, where $\boldsymbol{E}_\mathrm{e}$ is the external field strength. The field strengths can be expressed in terms of the potentials:

$$E = -\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial A}{\partial t}, \quad E_\mathrm{e} = \frac{j}{\sigma} + \nabla\varphi + \frac{1}{c}\frac{\partial A}{\partial t}$$

Assuming that the conductor is thin, we can integrate both parts of the latter equation along the circuit:

$$\oint (E_\mathrm{e} \cdot \mathrm{d}l) = \oint \left(\frac{\dot{j}}{\sigma} \cdot \mathrm{d}l\right) + \oint (\nabla\varphi \cdot \mathrm{d}l) + \frac{1}{c}\oint \left(\frac{\partial A}{\partial t} \cdot \mathrm{d}l\right) \tag{7.27.1}$$

The integral on the left-hand side of equation (7.27.1) is equal to the external e.m.f. $\mathscr{E}_e$ which is applied to the circuit. The integral

$$\oint \left(\frac{\dot{j}}{\sigma} \cdot \mathrm{d}l\right) = JR$$

represents the Joule losses per unit time, while

$$\oint (\nabla\varphi \cdot \mathrm{d}l) = \oint \mathrm{d}\varphi = 0$$

The last integral may be transformed as follows. If

$$A = \frac{1}{c}\oint \frac{J}{r}\left(t - \frac{r}{c}\right)\mathrm{d}l'$$

$$J\left(t - \frac{r}{c}\right) = J_0 \exp\left[-\mathrm{i}\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right], \quad \frac{\partial A}{\partial t} = -\mathrm{i}\omega A$$

is substituted into equation (7.27.1), and the real and imaginary parts are separated, we have

$$\mathcal{E}_e(t) = J(t)\left\{\left[R+\frac{\omega}{c^2}\oint\oint\frac{1}{r}\sin\frac{\omega r}{c}(\mathrm{d}\boldsymbol{l}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}')\right]-\frac{\mathrm{i}\omega}{c^2}\oint\oint\frac{1}{r}\cos\frac{\omega r}{c}(\mathrm{d}\boldsymbol{l}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}')\right\}.$$

The expression in braces represent the complex impedance of the circuit. The effective resistance is equal to $R + R_{\mathrm{r}}(\omega)$ where

$$R_{\mathrm{r}}(\omega) = \frac{\omega}{c^2}\oint\oint\frac{1}{r}\sin\frac{\omega r}{c}\,(\,\mathrm{d}l\cdot\,\mathrm{d}l')$$

The resistance R is associated with losses giving rise to the heating of the conductor, while $R_{\mathrm{r}}(\omega)$ represents the energy lost by radiation and is referred to as the radiation resistance (see the next problem).

The reactance is equal to $-\mathrm{i}\omega L(\omega)/c^2$ where

$$L(\omega) = \oint\oint\frac{1}{r}\cos\frac{\omega r}{c}\,(\,\mathrm{d}l\cdot\,\mathrm{d}l')$$

is the inductance and is a function of frequency.

Consider the limit where $c/\omega = \lambda/2\pi \gg l$, where the quantity l is the linear dimension of the circuit. In the region of integration, $\omega r/c \ll 1$. When the cosine is expanded into a series, and third- and higher-order terms are neglected, we have

$$L(\omega) \approx \oint\oint\frac{1}{r}\,(\,\mathrm{d}l\cdot\,\mathrm{d}l') - \frac{1}{2}\left(\frac{\omega}{c}\right)^2\oint\oint r\,(\,\mathrm{d}l\cdot\,\mathrm{d}l')$$

The first term in this equation is independent of frequency and represents the ordinary inductance, while the second term gives a correction which is significant at high frequencies. In practice, the self-inductance should be calculated from equation (5.0.18), since the integral $\oint\oint(\mathbf{d}l\cdot dl')/r$ is divergent. This divergence is due to the fact that the conductor is assumed to be infinitely thin (linear).

In the expansion for the sine in the expression for $R_{\mathrm{r}}(\omega)$, the thirdorder term must also be included since the integral of the first (linear) term is zero. The radiation resistance is then given by

$$R_{\mathbf{r}}(\omega) = -\frac{\omega^4}{6c^5}\oint\oint r^2\,(\,\mathrm{d}l\cdot\,\mathrm{d}l')$$

7.28

$$L(\omega) = L + \frac{64\pi^4a^4}{3\lambda^3}.\quad R_{\mathbf{r}}(\omega) = \frac{2\pi^2}{3c}\left(\frac{2\pi a}{\lambda}\right)^4$$

The current-carrying ring acts as a magnetic dipole. The energy emitted per unit time is equal to $2\ddot{\boldsymbol{m}}^2/(3c^3)$ where $\boldsymbol{m}$ is the magnetic dipole moment. The coefficient of proportionality between the emitted energy and the mean square current is equal to $2\pi^2a^2\omega^4/(3c^5)$ and is the same as $R_{\mathrm{r}}(\omega)$.

17.7.2 b Eddy currents and skin effect

7.29

$$H(x) = H_0\left[\frac{\sinh^2(x/\delta)+\cos^2(x/\delta)}{\sinh^2(h/\delta)+\cos^2(h/\delta)}\right]^{1/2}$$
$$H_0 = \frac{4\pi}{c}J_0n;\quad \delta = \frac{c}{(2\pi\mu\sigma\omega)^{1/2}}$$

When $\delta \ll h$, the magnetic field is $H(x) = H_0 \exp[-(h - |x|)/\delta]$. When $\delta \gg h$, the field is $H(x) = H_0$ (cf problem 5.7).

7.30 Since the system is symmetric with respect to the axis of the cylinder and the primary magnetic field H_0 is uniform, it is clear that the eddy currents induced in the cylinder will follow circular paths which lie in planes perpendicular to the axis. These currents will produce the same magnetic field as that due to a large number of separate coaxial solenoids. However, the field caused by the solenoid is zero outside the system; inside it will be parallel to the axis of the solenoid. Thus, the total magnetic field outside the cylinder is equal to H_0 while inside the cylinder it is given by the first equation in (7.b.4), which in view of the axial symmetry is of the form

$$\frac{\mathrm{d}^2 H}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}r} + k^2 H = 0$$

where

$$k = \frac{1+\mathrm{i}}{\delta}, \quad H = H_z(r), \quad H_\phi = H_r = 0$$

The boundary condition is $H(a) = H_0$.

The solution which is finite at $r = 0$ and which satisfies this boundary condition can be expressed in terms of the zero-order Bessel function:

$$H = H_0 \frac{J_0(kr)}{J_0(ka)}$$

Outside the cylinder $H = H_0$, when $a \leqslant r \leqslant b$, and $H = 0$, when $r > b$. The current density and the electric field inside the cylinder may be calculated from equation (7.b.3):

$$j = j_\phi = \sigma E_\phi = \frac{kc}{4\pi}\frac{J_1(kr)}{J_0(ka)} H_0, \quad E_r = E_z = 0$$

To determine the electric field outside the cylinder we shall use the Maxwell equation for curl E in the integral form

$$\oint E_l \, \mathrm{d}l = \frac{\mathrm{i}\omega}{c} \int B_n \, \mathrm{d}^2 S$$

Inside the cylinder there is only a single component of the electric field (E_ϕ). It follows from the boundary condition on the surface of the

cylinder and from the symmetry of the system that outside the cylinder the field E will also have the single component E_ϕ which is a function of r only. If the contour of integration is taken to be circular, the line integral turns out to be $2\pi r E_\phi$. The surface integral may be evaluated with the aid of equation (A3.12). The final result is

$$E_\phi = \tfrac{kcH_0}{4\pi\sigma}\tfrac{J_1(ka)}{J_0(ka)}\tfrac{a}{r} + \tfrac{i\omega H_0}{2cr}\left(r^2 - a^2\right), \quad a \leqslant r \leqslant b$$
$$E_\phi = \tfrac{kcH_0}{4\pi\sigma}\tfrac{J_1(ka)}{J_0(ka)}\tfrac{a}{r} + \tfrac{i\omega H_0}{2cr}\left(b^2 - a^2\right), \quad r > b$$

In the absence of the cylinder, i.e. when $a = 0$, the field is given by

$$E_\phi = \frac{\mathrm{i}\omega H_0 r}{2c} \quad (r < b), \quad E_\phi = \frac{\mathrm{i}\omega H_0 b^2}{2cr} \quad (r > b)$$

Thus, the additional magnetic field caused by the presence of the cylinder is equal to zero for $r > a$, even though the additional electric field is finite. This is because of the fact that the exact equation $\operatorname{curl} H = (\partial D/\partial t)/c$, which holds outside the conductor, was replaced by the approximate equation $\operatorname{curl} H = 0$ (the displacement current is neglected in the quasi-stationary

approximation). In the rigorous solution the additional magnetic field outside the conductor will also be finite (see problem 8.54 where the diffraction of a plane wave by a conducting cylinder is considered).

7.31 At low frequencies ($|ka| \ll 1$ or $\delta \gg a$)

$$j = \mathrm{i}\frac{cH_0}{4\pi}\frac{r}{\delta^2} = \frac{\mathrm{i}\sigma\omega H_0}{2c}r$$

and hence the current density is a linear function of r and is proportional to the frequency.

At high frequencies ($|ka| \gg 1$ or $\delta \ll a$) it is possible to use the asymptotic expression for the Bessel function and the result is

$$j = (\mathrm{i}-1)\frac{cH_0}{4\pi\delta}\left(\frac{a}{r}\right)^{1/2}\exp\left[-(1+\mathrm{i})\frac{(a-r)}{\delta}\right]$$

When $a - r \gg \delta$, the current density becomes infinitesimal. Thus at high frequencies the current is largely concentrated in a thin surface layer.

7.32

$$Q = -\frac{\pi a^2 n^2 J_0^2}{\sigma}\,\mathrm{Re}\left[\frac{kJ_1(ka)}{J_0(ka)}\right], \quad k^2 = \mathrm{i}\frac{4\pi\mu\sigma\omega}{c^2}$$

When $|ka| \ll 1$ (low frequencies)

$$Q = \frac{\pi n^2 J_0^2}{16\sigma}\left(\frac{a}{\delta}\right)^4 = \pi^3\sigma\left(\frac{a^2\mu n\omega J_0}{c^2}\right)^2$$

When $|ka| \gg 1$ (high frequencies)

$$Q = \frac{\pi n^2 J_0^2}{\sigma}\left(\frac{a}{\delta}\right) = \frac{an^2 J_0^2}{c}\left(\frac{2\pi^3\mu\omega}{\sigma}\right)^{1/2}$$

The energy dissipation at low and high frequencies is proportional to ω^2 and $\omega^{1/2}$, respectively.

7.33

$$\beta = \beta' + \mathrm{i}\beta'' = -\frac{1}{4}a^2\left[1 - \frac{2}{ka}\frac{J_1(ka)}{J_0(ka)}\right], \quad k^2 = \mathrm{i}\frac{4\pi\sigma\omega}{c^2}$$

When $|ka| \gg 1$ (high frequencies)

$$\beta' = -\frac{1}{4}a^2\left[1 - \frac{c}{a(2\pi\sigma\omega)^{1/2}}\right], \quad \beta'' = \frac{ca}{4(2\pi\sigma\omega)^{3/2}}$$

It follows that at high frequencies $\beta'' \to 0$, i.e. the losses are reduced as a result of the absence of the field in the conductor. When $|ka| \ll 1$ (low frequencies)

$$\beta' = -\frac{\pi^2 a^6\sigma^2\omega^2}{12c^4}, \quad \beta'' = \frac{\pi a^4\sigma\omega}{8c^2}$$

Thus $\beta \to 0$ as $\omega \to 0$; this is related to the fact that $\mu = 1$, i.e. the static magnetic polarisability is zero.

7.34 The magnetic moment due to the induced currents will, in view of the symmetry of the system, be parallel to the external magnetic field. Hence, the total magnetic field H_2 outside the cylinder will be of the form

$$H_2(r) = \frac{4r(m\cdot r)}{r^4} - \frac{2m}{r^2} + H_0$$

where $\boldsymbol{m}$ is the unknown magnetic moment per unit length of the cylinder, which is parallel to H_0, and r is the position vector in the plane perpendicular to the axis of the cylinder. The vector potential corresponding to H_2 is

$$A_2 = \frac{2[m \wedge r]}{r^2} + [H_0 \wedge r]$$

The components of A_2 are

$$A_{2z} \equiv A_2 = \left(\frac{2m}{r} + H_0 r\right) \sin\phi, \quad A_{2r} = A_{2\phi} = 0 \tag{7.34.1}$$

The angle ϕ is measured from the direction of H_0.
Thus, the vector potential in the external space has only a longitudinal component which is proportional to $\sin\phi$. The continuity conditions for the field components at the boundary may be satisfied if the vector potential in the internal region is sought in an analogous form:

$$A_{1z} \equiv A_1 = F(r) \sin\phi, \quad A_{1r} \equiv A_{1\phi} = 0 \tag{7.34.2}$$

The electric field E will in general depend on both A and φ. As usual, we shall impose the additional condition

$$\operatorname{div} A + \frac{\epsilon}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$$

Since $\operatorname{div} \boldsymbol{A} = 0$, which follows from equations (7.34.1) and (7.34.2), we have $\partial\varphi/\partial t = -\mathrm{i}\omega\varphi = 0$ so that

$$E = -\frac{1}{c}\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{i\omega A}{c}$$

It follows that A will satisfy the same equation as the electric field [see equation (7.b.4)]. The solution of this equation which is bounded at $r = 0$ is a Bessel function

$$F(r) = CJ_1(kr), \quad A_1 = CJ_1(kr)\sin\phi \tag{7.34.3}$$

The constants C and m in equations (7.34.1) and (7.34.3) may be determined from the condition that the internal ($\boldsymbol{H}_1$) and external (H_2) fields must be equal at $r = a$ (surface of the cylinder). Using equation (A3.9) we have

$$C = \frac{2H_0}{kJ_0(ka)}, \quad m = -\frac{1}{2}a^2 H_0 \left[1 - \frac{2}{ka}\frac{J_1(ka)}{J_0(ka)}\right] \tag{7.34.4}$$

It follows from the expression for m that the transverse magnetic polarisability of the cylinder,

$$\beta = -\frac{1}{2}a^2 \left[1 - \frac{2}{ka}\frac{J_1(ka)}{J_0(ka)}\right]$$

is larger by a factor of two as compared with its longitudinal polarisability (see problem 7.33). The components of the magnetic field inside the cylinder can be determined from equations (7.34.3) and (7.34.4) and are given by

$$H_{1r} = \frac{1}{r}\frac{\partial A_1}{\partial \phi} = 2H_0 \frac{J_1(kr)}{krJ_0(ka)}\cos\phi, \quad H_{1z} = 0$$
$$H_{1\phi} = -\frac{\partial A_1}{\partial r} = -2H_0 \frac{J_1'(kr)}{J_0(ka)}\sin\phi$$

Finally, the current density is given by $j = (c/4\pi)\,\mathrm{curl}\,H$, and hence

$$j_z = -\frac{cH_0}{2\pi}\frac{J_1(kr)}{J_0(ka)}\sin\phi, \quad j_\phi = j_r = 0$$

It is clear from this formula that the currents in the two halves of the cylinder, $0 \leqslant \phi \leqslant \pi$ and $\pi \leqslant \phi \leqslant 2\pi$, will always flow in opposite directions. The total current through the cross section of the cylinder is zero. The radial dependence of the current is the same as for a cylinder placed in a longitudinal field (see problem 7.31). It should be noted, however, that for a longitudinal field the currents flow over circles in
planes perpendicular to the axis of the cylinder, whereas for a transverse field the currents flow along the axis of the cylinder.

7.35 The average energy dissipation per unit length of the cylinder is most simply calculated with the aid of equation (7.b.9) by considering the flux of energy through the lateral surface of the cylinder. From the results of the preceding problem we have

$$Q = -\frac{ac^2H_0^2}{8\pi\sigma}\,\mathrm{Re}\left[\frac{kJ_1(ka)}{J_0(ka)}\right]$$

The same result can be obtained with the aid of equation (7.b.8) where the integration of the product of Bessel functions can be carried out with the aid of equation (A3.13).

7.36 The electric and magnetic fields inside the cylinder may be found as in problem 7.34 for a linearly polarised external field:

$$H_r = -\frac{2H_0J_1(kr)}{krJ_0(ka)}\exp(\mathrm{i}\phi), \quad H_\phi = -2\mathrm{i}H_0\frac{J_1'(kr)}{J_0(ka)}\exp(\mathrm{i}\phi)$$
$$j_z = \frac{\mathrm{i}ckH_0}{2\pi}\frac{J_1(kr)}{J_0(ka)}\exp(\mathrm{i}\phi)$$

The force per unit volume of the cylinder is given by

$$f = \frac{1}{c}[j \wedge H]$$

where it is assumed that $\mu = 1$ inside the cylinder. The radial component of this fcrce gives rise to a radial pressure, whereas the azimuthal component is responsible for a couple. Since $\boldsymbol{j}$ and $\boldsymbol{H}$ are complex quantities, the average value of the azimuthal component of the force is

$$\overline{f_\phi} = \frac{1}{2c}\,\mathrm{Re}\,(j_zH_r^*) \tag{7.36.1}$$

The couple per unit length of the cylinder may be found by multiplying the average force given by equation (7.36.1) by r and integrating over the cross section of the cylinder. The integral may be evaluated with the aid of equation (A3.13). The result is

$$\bar{N} = -\frac{aH_0^2}{|k|^2}\,\mathrm{Re}\left[k\frac{J_1(ka)}{J_0(ka)}\right] \tag{7.36.2}$$

The same result may be obtained in another way. The moment of the forces may be expressed in terms of the magnetic moment of the system

$$N(t) = [m(t) \wedge H_0(t)]$$

Writing $\bar{N}_z = \bar{N}$ in terms of the complex amplitudes of $\boldsymbol{H}_0$ and $\boldsymbol{m}$, and $\boldsymbol{m}$ in terms of the transverse magnetic polarisability of the cylinder (see problem 7.34), we arrive again at equation (7.36.2).

At low frequencies, equation (7.36.2) yields
$\bar{N} = \frac{a^4 H_0^2}{4\delta^2} = \frac{\pi\sigma\omega}{4c^2} H_0^2 a^4$,
whereas at high frequencies,

$$\bar{N} = \frac{1}{2} a\delta H_0^2 = \frac{ca}{(8\pi\sigma\omega)^{1/2}} H_0^2$$

It is clear from these formulae that the couple is zero both at very low and very high frequencies. If the field is linearly polarised, the average couple is zero (formally this follows from the fact that the integral with respect to ϕ in the formula for N is zero; see problem 7.34 in which j and H are found for this situation). The couple is produced by a 'rotating' field. The induction motor is based on the phenomenon discussed in this problem.

7.37 Together with a fixed system of coordinates with the z-axis along the axis of the cylinder and the x-axis along the external magnetic field H_0, we consider a system of coordinates ξ, η, z which rotates with the cylinder and whose z-axis also lies along the axis of the cylinder. In this system the external magnetic field may be written in the form

$$H_0(t) = (H_{01} - \mathrm{i}H_{02}) \exp(-\mathrm{i}\omega t)$$

where $\boldsymbol{H}_{01}$ and $\boldsymbol{H}_{02}$ are constant vectors of equal length H_0 and are parallel to the ξ and η axes. A field of this kind was discussed in the preceding problem. The couple, which will tend to retard the cylinder, is given by

$$\bar{N} = -\frac{aH_0^2}{|k|^2} \operatorname{Re}\left[k \frac{J_1(ka)}{J_0(ka)}\right]$$

7.38 It was shown in the solution of problem 7.30 that the currents induced in the cylinder as a result of changes in the external longitudinal field do not give rise to an additional magnetic field outside the cylinder. Inside the cylinder, on the other hand, the field due to these currents is longitudinal and is a function of r only. This field satisfies the equation

$$\frac{\partial^2 H}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial H}{\partial r} - \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2}\frac{\partial H}{\partial t} = 0 \tag{7.38.1}$$

It is clear that the magnetic field inside the cylinder will eventually be damped out. Hence, the special solution of equation (7.38.1) will be sought in the form $F(r)\exp(-\gamma t)$ where $\gamma > 0$ is a constant. The function $F(r)$ satisfies the Bessel equation

$$F''(r) + \frac{1}{r}F'(r) + k^2 F(r) = 0 \tag{7.38.2}$$

where $k^2 = 4\pi\mu\sigma\gamma/c^2$

The solution of equation (7.38.2) which is finite at $r = 0$ is of the form $F(r) = CJ_0(kr)$. Since the external field H_0 is switched off, and the additional field caused by the eddy currents outside the cylinder is zero, the condition at the boundary is $H|_{r=a} = 0$, i.e.

$$J_0(ka) = 0$$

It follows that $k_m a = \beta_m, m = 1, 2, \ldots$, where the quantities β_m are the zeros of J_0. The possible values of γ are

$$\gamma_m = \frac{c^2 \beta_m^2}{4\pi\mu\sigma a^2} \tag{7.38.3}$$

The general solution of equation (7.38.1) which corresponds to the boundary value problem under consideration is

$$H(r,t) = \sum_m C_m J_0\left(k_m r\right) \exp\left(-\gamma_m t\right)$$

where the C_m may be determined from the initial condition

$$H(r,0) = \sum_m C_m J_0\left(k_m r\right)$$

By using the orthogonality condition

$$\int_0^1 x J_0\left(k_m x\right) J_0\left(k_n x\right) \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[J_0'\left(k_m\right)\right]^2 \delta_{mn}$$

we have

$$C_m = \frac{2}{a^2\left[J_0'\left(k_m a\right)\right]^2} \int_0^a H(r,0) J_0\left(k_m r\right) r \ \mathrm{d}r$$

Initially, the field $H(r,0)$ is equal to the external field H_0, since the constant magnetic field is unaffected by the presence of an infinite cylinder whose axis is parallel to it. From equations (A3.12) and (A3.9) we have

$$C_m = \frac{2H_0}{\left(k_m a\right) J_1\left(k_m a\right)}$$

The rate of attenuation of the field will be determined by the smallest of the γ_m, i.e. by γ_1. The latter quantity may be obtained by substituting the smallest root of the Bessel function ($\beta_1 \approx 2 \cdot 4$) into equation (7.38.3).

7.39 In the zero-order approximation (in frequency) the magnetic field inside the sphere is given by

$$H = \frac{3}{\mu + 2} H_0 \tag{7.39.1}$$

which was obtained in problem 5.41. The electric field inside the sphere will be zero in this approximation [see equation (7.b.3)], since a constant magnetic field does not give rise to an electric field. In order to
determine the electric field in the next (linear in frequency) approximation we shall use equation (7.b.2) in an integral form.

It is clear from the symmetry of the system that the currents in the sphere will flow in circular paths in planes perpendicular to H_0 and the electric field will be in the same direction. In the spherical system of coordinates with the z-axis parallel to H_0 we have

$$E = \frac{\mathrm{i}\omega H}{2c} r \sin\vartheta, \quad j = \sigma E$$

where H is given by equation (7.39.1). The heat Q liberated in the sphere is obtained by integrating $q = \frac{1}{2}\sigma|E|^2$ over the volume of the sphere. The result is

$$Q = \frac{3\pi a^5 \sigma \omega^2 H_0}{5c^2(\mu+2)^2}$$

7.40 The magnetic field outside the sphere is

$$H = H_0 + \frac{3r(m \cdot r)}{r^5} - \frac{m}{r^3}$$

where $m = -\frac{1}{2}a^3 H_0$ and $\beta = -\frac{1}{2}a^3$ is the magnetic polarisability of the sphere for a strong skin effect. Inside the sphere

$$H_\vartheta = -\frac{3}{2}H_0 \exp\left[-(1-\mathrm{i})\frac{z}{\delta}\right]\sin\vartheta, \quad H_r = H_\phi = 0$$

where z is measured from the surface along the inward normal to the conductor, and the polar axis of the spherical system is parallel to H_0;

$$Q = \frac{3a^2 c}{8}\left(\frac{\mu\omega}{2\pi\sigma}\right)^{1/2} H_0^2$$

7.41 For a strong skin effect the field inside the ellipsoid is zero, whereas the field outside the ellipsoid satisfies the equations $\operatorname{curl} H = 0, \operatorname{div} H = 0$ and the boundary conditions $H_n|_s = 0$, $H|_{r\to\infty} \to H_0$ where H_0 is the external field and S represents the surface of the ellipsoid.

Compare now this problem with the case of a dielectric ellipsoid with $\epsilon = 0$ placed in a uniform electric field. The electric field outside the ellipsoid will satisfy the equations

$$\operatorname{curl} E = 0, \quad \operatorname{div} E = 0 \tag{7.41.1}$$

and the boundary conditions

$$E_n|_S = \epsilon E_{n\ \mathrm{int}}\,|_S = 0, \quad E|_{r\to\infty} \to E_0 \tag{7.41.2}$$

The conditions for the tangential components of $\boldsymbol{E}$ need not be considered since equations (7.41.1) and (7.41.2) uniquely define $\boldsymbol{E}$ in the external region.

We see that the problem of a conducting ellipsoid for a strong skin effect is identical with the problem of a dielectric ellipsoid for which $\epsilon = 0$. The magnetic polarisabilities in the direction of the principal axes of the ellipsoid are obtained by substituting $\epsilon_1 = 0$ into the formulae given in the solution of problem 3.72:

$$\beta^{(i)} = -\frac{V}{4\pi\,(1 - n^{(i)})}$$

where $n^{(i)}$ is the depolarisation coefficient and V is the volume of the ellipsoid.

For a very prolate ellipsoid of revolution with semiaxes a and $b \gg a$ (a rod), we have (see problem 3.70)

$$\beta_\perp = -\frac{2}{3}a^2 b, \quad \beta_\parallel = -\frac{1}{3}a^2 b$$

For a very oblate ellipsoid ($b \ll a$; a disc)

$$\beta_1 = -\frac{2a^3}{3\pi}, \quad \beta_\parallel = -\frac{1}{3}a^2 b \to 0, \quad \text{as} \quad b \to 0$$

7.42 In view of the axial symmetry of the system, both the distribution of eddy currents in the sphere and the electric field will exhibit axial symmetry. Hence, the electric field will have only a single component, which cannot be a function of ϕ, so that $E_\phi = f(r, \vartheta)$.

The solution of equation (7.b.4) for the resultant electric field $\boldsymbol{E}$ will be sought in the form

$$E_\phi = F(r)\sin\vartheta, \quad E_r = E_\vartheta = 0$$

Using the expression for the Laplacian of a vector in spherical coordinates (see problem 1.47), we obtain the equation for $F(r)$, and this can be reduced to the Bessel equation by substituting $F(r) = r^{-1/2}\chi(r)$. The solution of this equation which is bounded at $r = 0$ is

$$\chi(r) = AJ_{3/2}(kr)$$

The magnetic field inside the sphere may be determined from equation (7.b.2). The magnetic field in the external region is the sum of the external field H_0 and the magnetic field due to the dipole m whose direction is parallel to that of H_0. Thus,

$$H_2 = H_0 + \frac{3r(m \cdot r)}{r^5} - \frac{m}{r^3}$$

The constants A and m can be determined from the boundary conditions for H at the surface of the sphere. If the Bessel functions of half-integral order are expressed in terms of trigonometric functions, then

$$m = -\frac{1}{2}a^3 \left(1 - \frac{3}{k^2a^2} + \frac{3}{ka}\cot ka\right) H_0, \quad A = \frac{3\mathrm{i}a\omega}{c \sin ka} \left(\frac{\pi}{8k}\right)^{1/2} H_0$$

7.43

$$Q = -\frac{3}{8}a\delta^2 H_0^2 \left\{1 - \frac{a}{\delta}\left[\frac{\sinh(2a/\delta) + \sin(2a/\delta)}{\cosh(2a/\delta) - \cos(2a/\delta)}\right]\right\}$$

7.44

$$R = \frac{l}{ca}\left(\frac{\omega}{\pi\sigma}\right)^{1/2} \mathrm{Re}\left[(1+\mathrm{i})\frac{J_0(ka)}{J_1(ka)}\right]$$

where $kc = (1+\mathrm{i})(2\pi\sigma\omega)^{1/2}$.
When $|ka| \ll 1$ (low frequencies)

$$R = R_0\left[1 + \frac{1}{12}\left(\frac{\pi\sigma\omega a^2}{c^2}\right)^2\right]$$

where $R_0 = l/\pi\sigma a^2$ is the DC resistance.
When $|ka| \gg 1$ (high frequencies)

$$R = \frac{l}{2\pi\sigma a\delta} = \frac{l}{ca}\left(\frac{\omega}{2\pi\sigma}\right)^{1/2}$$

It follows from the latter formula that the effective cross section of a conductor for a strong skin effect is equal to $2\pi a\delta$.
7.45

$$R = \frac{\omega\delta_2}{2ac^2}\left\{\frac{(\delta_1^2 - \delta_2^2)\sin(2h/\delta_2) - (\delta_1^2 + \delta_2^2)\sinh(2h/\delta_2) + 2\delta_1\delta_2\cos(2h/\delta_2)}{[\delta_1\sin(h/\delta_2) + \delta_2\cos(h/\delta_2)]^2 + (\delta_1^2 + \delta_2^2)\sinh^2(h/\delta_2)}\right\}$$

where

$$\delta_1 = \frac{c}{(2\pi\sigma_1\omega)^{1/2}}, \quad \delta_2 = \frac{c}{(2\pi\sigma_2\omega)^{1/2}}$$

7.46

$$H' = \frac{2H_0}{ka\sin kh + 2\cos kh}$$

where $k = (1+\mathrm{i})/\delta$.
When $|kh| \ll 1$ (low frequencies), $H' = H_0$ and hence the presence of the cylindrical shell has no effect on the magnitude of the field, When $|kh| \geqslant 1$ (high frequencies), we have

$$\sin kh \approx -\mathrm{i}\cos kh \approx \frac{1}{2}\mathrm{i}\exp\left[(1-\mathrm{i})\frac{h}{\delta}\right]$$

Since $a \gg \delta$, it follows that

$$H' = -(1+\mathbf{i})\frac{\delta}{2a}\exp\left[-(1-\mathrm{i})\frac{h}{\delta}\right]H_0, \quad H_0 \gg |H'|$$

The strong reduction in the field is due to the fact that the currents induced in the shell give rise to an additional field in the cavity which acts in the opposite direction.

7.47

$$j = \frac{2\mathrm{i}J_0\mu\sigma\omega}{c^2 ka}\frac{\cos k(h-x)}{\sin kh}$$

where x is measured from the surface along the inward radial direction;

$$R = \frac{1}{2\pi\delta\delta\sigma}\left\{\frac{\sinh(2h/\delta)+\sin(2h/\delta)}{2\left[\sinh^2(h/\delta)+\sin^2(h/\delta)\right]}\right\}$$

When $\delta \ll h$, the hollow and solid conductors have the same resistance.
7.48 Consider the cylindrical system of coordinates illustrated in figure 7.48.1. For a weak skin effect, the component of the magnetic field which is tangential to the wall of the tube at the surface S of this wall must satisfy the condition

$$H_{2\tau} - H_{1\tau} = \frac{4\pi}{c}i \tag{7.48.1}$$

where $i = \sigma hE = \zeta E$ is the surface current and ζ is the surface conductance.
The electric field will clearly have a single component only (z component) and should be continuous across S:

$$E_1 = E_2 = E$$

The remaining steps of the solution are very similar to those in the solution of problem 3.31 . To within terms of the order of l/a, the equation of the boundary may be written in the form

$$r = a + l\cos\phi$$

The vector potential, whose direction is parallel to that of the current, will be sought in the form

$$A_1 = -\frac{2J}{c}\ln\frac{r}{a} + C_1 r\cos\phi + C$$
$$A_2 = -\frac{2J'}{c}\ln\frac{r}{a} + \frac{B_1}{r}\cos\phi$$

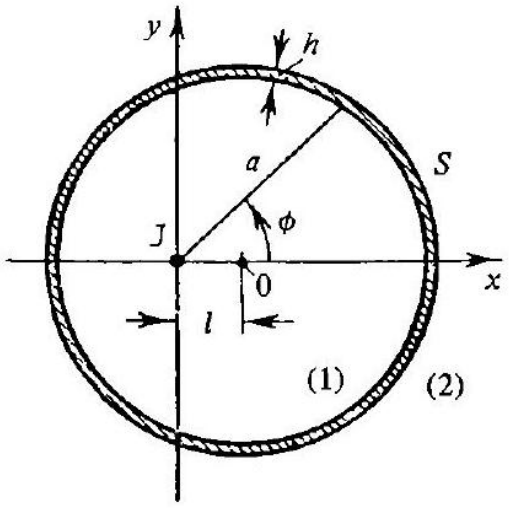


Figure 7.48.1.

where C_1 and B_1 are functions of the time and are of the first order with respect to l/a, and J' is of zero order with respect to l/a.

For a weak skin effect ($h \ll \delta$) the vector potential satisfies the condition

$$A_1 = A_2, \quad \text{for} \quad r = a + l\cos\phi$$

Hence when terms of the order of $(l/a)^2$ are neglected

$$B_1 = a^2 C_1 + \frac{2\,(J' - J)\,l}{c}, \quad C = 0$$

The quantity H_τ in the boundary condition (7.48.1) may be replaced by H_ϕ. It can be easily verified that this will give rise to an error of the order of $(l/a)^2$. Since

$$H_\phi = -\frac{\partial A}{\partial r}, \quad i = \zeta E = -\frac{\zeta}{c}\frac{\partial A}{\partial t}$$

we have on S

$$\frac{\partial A_1}{\partial r} - \frac{\partial A_2}{\partial r} = -\frac{4\pi\zeta}{c^2}\frac{\partial A_1}{\partial t}$$

or, to within terms of the order of l/a,

$$\frac{2\,(J' - J)}{ca} + 2C_1\cos\phi = \frac{4\pi\zeta}{c^2}\left[\frac{2}{ca}\frac{\mathrm{d}(Jl)}{\mathrm{d}t} + a\frac{\mathrm{d}C_1}{\mathrm{d}t}\right]\cos\phi$$

It follows at once that $J = J'$, which is due to the fact that the skin effect was assumed to be weak. The differential equation for C_1 is

$$\frac{\mathrm{d}C_1}{\mathrm{d}t} + \rho C_1 = \frac{2}{a^2 c}\frac{\mathrm{d}(Jl)}{\mathrm{d}t} \tag{7.48.2}$$

The parameter $\rho = c^2/(2\pi a\zeta)$ is equal to the resistance per unit length of the tube in electromagnetic units.

The solution of equation (7.48.2) may easily be obtained by the method of variation of arbitrary constants. It is of the form

$$C_1 = \frac{2}{ca^2}\int_{-\infty}^{t} \exp[\rho(\tau - t)]\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}[J(\tau)l(\tau)]\mathrm{d}\tau$$

where it has been assumed that the current is zero as $t \to -\infty$.
The force f per unit length of the current J may be calculated from the formula

$$f_x = -\frac{1}{c} J H'_y$$

where H'_y is the magnetic field along the straight line parallel to the current J due to the current flowing in the tube. The vector potential
for this field is

$$A' = C_1 r \cos\phi = C_1 y$$

and hence

$$H'_y = -\frac{\partial A'}{\partial y} = -C_1$$

Finally,

$$f_x = \frac{2J(t)}{c^2 a^2} \int_{-\infty}^{t} \exp[\rho(\tau - t)] \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}[J(\tau) l(\tau)] \mathrm{d}\tau$$

Consider some special cases. When $J =$ constant,

$$f_x = \frac{2J^2}{c^2 a^2} \int_{-\infty}^{t} \exp[\rho(\tau - t)] \dot{l}(\tau) \mathrm{d}\tau$$

When the current departs from the axis of the cylinder ($i > 0$) there will be a force tending to prevent this departure. For a slow motion ($\ddot{l} \ll \rho l$), integration by parts will yield

$$f_x = \frac{2J^2}{c^2 a^2} \left(\frac{\dot{l}}{\rho} - \frac{\ddot{l}}{\rho^2} + \dots \right)$$

In particular, for a uniform displacement $l = vt$ the retarding force will be

$$f_x = \frac{2J^2 v}{c^2 a^2 \rho}$$

7.49

$$f_x = \frac{2J^2(t) l(t)}{c^2 a^2}$$

17.8 Propagation of electromagnetic waves

17.8.1 a Plane waves in a homogeneous medium.

8.1 The amplitude of the first wave is $E_1 = a e_x$, the amplitude of the second wave is $\boldsymbol{E}_2 = b \exp(\mathrm{i}x) \boldsymbol{e}_y$; a and b are real. The resultant amplitude is

$$\boldsymbol{E}_0 = \boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2 = a \boldsymbol{e}_x + b \exp(\mathrm{i}x) e_y$$

In order to discuss the polarisation it is convenient to shift the origin from which the phases are measured so that the vibrations taking place along the mutually perpendicular directions differ in phase by $\frac{1}{2}\pi$.

Consider a new amplitude given by $\boldsymbol{E}_0' = \boldsymbol{E}_0 \exp(\mathrm{i}\alpha) = \boldsymbol{E}' - \mathrm{i}\boldsymbol{E}''$, where the vectors $\boldsymbol{E}'$ and $\boldsymbol{E}''$ are real and $(\boldsymbol{E}' \cdot \boldsymbol{E}'') = 0$ (figure 8.1.1). Hence

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{E}' &= a\boldsymbol{e}_x \cos\alpha + b\boldsymbol{e}_y \cos(\alpha - \chi) \\ \boldsymbol{E}'' &= a\boldsymbol{e}_x \sin\alpha + b\boldsymbol{e}_y \sin(\alpha - \chi) \end{aligned}\right\} \tag{8.1.1}$$

The phase difference α may be obtained from the condition $(\boldsymbol{E}' \cdot \boldsymbol{E}'') = 0$:

$$a^2 \cos\alpha \sin\alpha + b^2 \sin(\alpha - \chi)\cos(\alpha - \chi) = 0$$

so that

$$\tan 2\alpha = \frac{b^2 \sin 2\chi}{a^2 + b^2 \cos 2\chi} \tag{8.1.2}$$

Having determined α from equation (8.1.2), we can substitute it into equation (8.1.1) and determine E' and E''. Let us now introduce new axes $x' \| \boldsymbol{E}'$ and $y' \| \boldsymbol{E}''$ in the xy plane. The components along these axes are then given by

$$\begin{aligned} E_{x'} &= E' \cos[(k \cdot r) - \omega t + \alpha] \\ E_{y'} &= E'' \sin[(k \cdot r) - \omega t + \alpha] \end{aligned}$$

It is clear that $E_{x'}^2/E'^2 + E_{y'}^2/E''^2 = 1$, i.e. the end point of the vector E describes an ellipse.

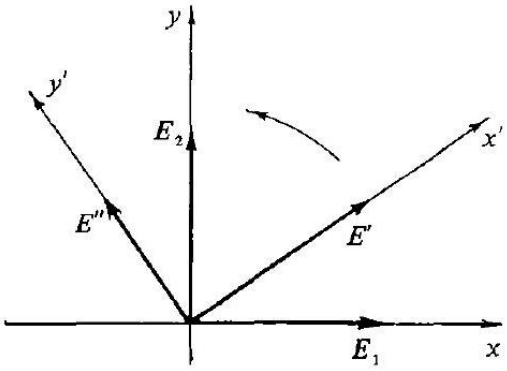
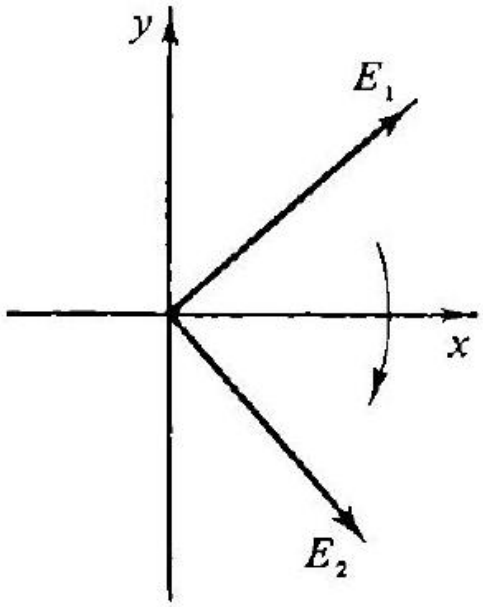


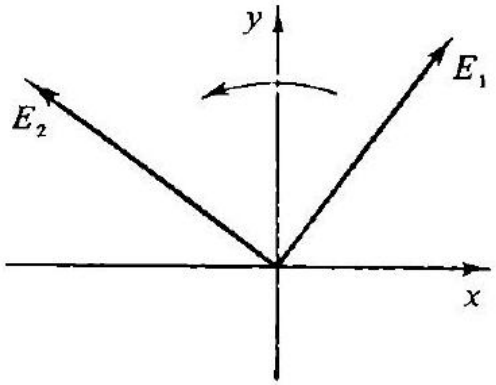
Figure 8.1.1.

In general $\boldsymbol{E}', \boldsymbol{E}'' \neq 0$. The vibrations along the x'-axis lead the vibrations along the y'-axis by $\frac{1}{2}\pi$. If the x', y', z system forms a righthanded set (figure 8.1.1), then for an observer looking along the negative direction of the z-axis, the vector E will rotate in the anticlockwise direction. The polarisation is then said to be elliptical and laevorotatory. If the x'-, y'-, z-axes form a left-handed system, then $\boldsymbol{E}$ will rotate in a clockwise direction and the elliptical polarisation will be dextrorotatory. Circular and linear polarisation corresponds to $E' = E''$ and $E' = 0$ or $E'' = 0$, respectively.

8.2 When $\chi = 0$, the polarisation is linear and the plane of polarisation contains the bisector of the angle between the x - and y-axes. When $\chi = \pi$, the polarisation is also linear and the plane of polarisation passes through the bisector of the angle between the x - and y-axes. When $\chi = \frac{1}{2}\pi$, the polarisation is circular and dextrorotatory (figure 8.2.1a). When $\chi = -\frac{1}{2}\pi$, the polarisation is circular and laevorotatory (figure 8.2.1b). In the remaining cases the polarisation is elliptical and dextrorotatory when $0 < \chi < \pi$ $\left[\cos\frac{1}{2}\chi > 0,\ \sin\frac{1}{2}\chi > 0\right]$, with axes as shown in figure 8.2.1 a and laevorotatory when $-\pi < \chi < 0$ (figure 8.2.1b).



(a)



(b)

Figure 8.2.1.

8.3 When $a = b$ the polarisation is linear. When $a > b$ the polarisation is elliptical and dextrorotatory. When $a < b$ the polarisation is elliptical and laevorotatory. Circular polarisation occurs only when $b = 0$ (dextrorotatory) or $a = 0$ (laevorotatory).

8.4

$$P = \left[1 - 4\,|I_{ik}|\,\{\mathrm{Tr}\,(I_{ik})\}^{-2}\right]^{1/2}$$

where $|I_{ik}|$ is the determinant of the tensor I_{ik}. When $|I_{ik}| = 0$, the degree of polarisation $P = 1$.

8.6 We introduce rectangular axes $x' \| \dot{a}$ and $y' \| b$. In terms of these axes the complex amplitude of the field is

$$\boldsymbol{E}_0 = a e_{x'} \pm \mathrm{i} b e_{y'}$$

where the plus sign corresponds to right-hand and the minus sign to lefthand elliptical polarisation. The phase has been chosen to be zero for the x'-component of the field. The intensity is $I = a^2 + b^2$. If we now express the unit vectors $\boldsymbol{e}_{x'}, \boldsymbol{e}_{y'}$, in terms of $\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y$ we get for the components I_{ik}:

$$I_{11} = a^2 \cos^2\vartheta + b^2 \sin^2\vartheta$$
$$I_{22} = a^2 \sin^2\vartheta + b^2 \cos^2\vartheta$$
$$I_{12} = \left(a^2 - b^2\right) \sin\vartheta \cos\vartheta \mp 2\mathrm{i}ab = I_{21}^*$$

The upper sign corresponds to right-hand and the lower sign to left-hand elliptical polarisation. When $b = 0$ the polarisation is linear and the tensor I_{ik} becomes

$$I_{ik} = I \begin{pmatrix} \cos^2\vartheta & \sin\vartheta\cos\vartheta \\ \sin\vartheta\cos\vartheta & \sin^2\vartheta \end{pmatrix}$$

When $a = b = \left(\frac{1}{2}I\right)^{1/2}$ the polarisation is circular and

$$I_{ik} = \frac{1}{2} I \begin{pmatrix} 1 & \mp\mathrm{i} \\ \pm\mathrm{i} & 1 \end{pmatrix}$$

8.7 The amplitude of the resultant wave is

$$E = E_1 + E_2 = E\left[e^{(1)} + e^{(2)} \exp(\mathrm{i}\alpha)\right]$$

where α is a randomly varying phase difference and $|E|^2 = I$. By definition, the components of the polarisation tensor are given by [see equation (8.a.14)]

$$I_{ik} = \overline{E_i E_k^*} = \overline{I\left[e^{(1)} + e^{(2)} \exp(\mathrm{i}\alpha)\right]_i \left[e^{(1)} + e^{(2)} \exp(-\mathrm{i}\alpha)\right]_k}$$

Averaging with respect to time yields $\overline{\exp(\pm i\alpha)} = 0$ and hence the polarisation tensor becomes

$$I_{ik} = I \begin{pmatrix} 1 + \cos^2\vartheta & \sin\vartheta\cos\vartheta \\ \sin\vartheta\cos\vartheta & 1 - \cos^2\vartheta \end{pmatrix}$$

Hence, using the result from problem 8.4 we get

$$P = |\cos\vartheta|$$

We can obtain the same result by diagonalising the tensor I_{ik}. Equating the determinant of the set of equations (8.a.16) to zero we find that $I_1 = 1 + |\cos\vartheta|, I_2 = 1 - |\cos\vartheta|$. Hence we get again

$$P = \frac{I_1 - I_2}{I_1 + I_2} = |\cos\vartheta|$$

The basis vectors are $e_1 = \left(\cos\frac{1}{2}\vartheta, \sin\frac{1}{2}\vartheta\right)$ and $e_2 = \left(-\sin\frac{1}{2}\vartheta, \cos\frac{1}{2}\vartheta\right)$.
They are real in the case considered.
The resulting wave consists of an unpolarised part of intensity $I(1 - |\cos\vartheta|)$ and a linearly polarised part along the direction of
$e_1 = \left(\cos\frac{1}{2}\vartheta, \sin\frac{1}{2}\vartheta\right)$ with an intensity $I|\cos\vartheta|$:

$$(I_{ik}) = I(1 - |\cos\vartheta|)\,(\delta_{ik}) + I|\cos\vartheta| \begin{pmatrix} \cos^2\frac{1}{2}\vartheta & \sin\frac{1}{2}\vartheta\cos\frac{1}{2}\vartheta \\ \sin\frac{1}{2}\vartheta\cos\frac{1}{2}\vartheta & \sin^2\frac{1}{2}\vartheta \end{pmatrix}$$

The resulting wave is completely polarised (but not monochromatic) when $\vartheta = 0$. When $\vartheta = \frac{1}{2}\pi$ it is completely unpolarised.

8.8 The polarisation tensor is given by

$$I_{ik} = \begin{pmatrix} I_1 + \frac{1}{2}I_2 & \frac{1}{2}I_2 \\ \frac{1}{2}I_2 & \frac{1}{2}I_2 \end{pmatrix}$$

where the x_1-axis lies along the direction of polarisation of the first wave. The degree of polarisation is

$$P = \frac{2\left(I_1^2 + I_2^2\right)^{1/2}}{I_1 + I_2 + \left(I_1^2 + I_2^2\right)^{3/2}}$$

The resulting wave consists of an unpolarised wave of intensity $\frac{1}{2}\left(I_1 + I_2\right)(1 - P)$ and a linearly polarised wave. The angle between the direction of the linear polarisation and the direction of the polarisation of the first wave is

$$\vartheta = \arctan \frac{2I_2\left(I_1^2 + I_2^2\right)^{1/2}}{I_1\left(I_1 + I_2\right) + \left(3I_1 + 2I_2\right)\left(I_1^2 + I_2^2\right)^{1/2}}$$

8.9

$$\rho = \frac{1 - \xi}{1 + \xi}$$

When $\xi = 0$ the wave is unpolarised; when $\xi = 1$ it is completely polarised. Substituting $\xi_i = \xi\eta_i$, where $\eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2 = 1$, we have

$$I_{ik} = \frac{1}{2}I(1 - \xi)\delta_{ik} + \frac{1}{2}I\xi\left(1 + \sum_{l=1}^{3}\eta_l\tau_{ik}^{(l)}\right)$$

The first term in this expression corresponds to a completely unpolarised state, and the second term corresponds to a completely polarised state. In case (a), $\eta_3 = 1, \eta_1 = \eta_2 = 0$.

On comparing

$$I''_{ik} = I\xi\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

with $I_{ik} = In_i n_k^*$, we see that in this case $n_1 = 1, n_2 = 0$, i.e. the tensor I''_{ik} describes a wave which is linearly polarised along the direction of the x-axis (the waves propagating along the z-axis).

Similarly, it is easy to show that in case (b) $\eta_1 = 1, \eta_2 = \eta_3 = 0$ and the wave is linearly polarised along the direction at 45° to the x-axis, whereas in case (c) $\eta_2 = 1, \eta_1 = \eta_3 = 0$ and the wave is circularly polarised.

8.10 Since the vector $\boldsymbol{E}$ is linearly polarised, the amplitude $\boldsymbol{E}_0$ may be assumed to be real. Since $\operatorname{div}\boldsymbol{E} = 0$, we have $(\boldsymbol{k}' \cdot \boldsymbol{E}_0) = 0 = (\boldsymbol{k}'' \cdot \boldsymbol{E}_0)$, i.e. $\boldsymbol{E}_0$ is perpendicular to the $\boldsymbol{k}', \boldsymbol{k}''$ plane. Since $\operatorname{curl}\boldsymbol{E} = -(\mu/c)\partial H/\partial t$, it follows that

$$\frac{\mu\omega}{c}H' = [k' \wedge E_0], \quad \frac{\mu\omega}{c}H'' = [k'' \wedge E_0]$$

i.e. $\boldsymbol{H}'$ and $\boldsymbol{H}''$ are perpendicular to E_0 and $\boldsymbol{H}' \perp \boldsymbol{k}', \boldsymbol{H}'' \perp \boldsymbol{k}''$. The end point of the vector $\boldsymbol{H}$ describes an ellipse in the $\boldsymbol{k}', \boldsymbol{k}''$ plane (figure 8.10.1).

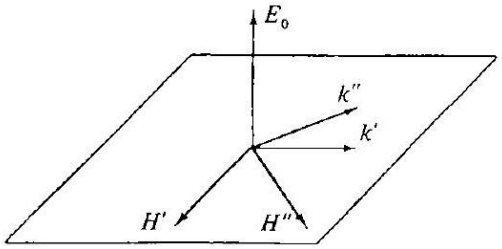


Figure 8.10.1.

8.11 Both waves will be elliptically polarised. One of the principal axes of the polarisation ellipse lies in the plane of incidence while the other is perpendicular to it. The semiaxes are given by the following formulae:

(1) reflected wave:

$$E_{\parallel} = \frac{\tan(\theta_0 - \theta_2)}{\tan(\theta_0 + \theta_2)} E_0, \quad E_{\perp} = \frac{\sin(\theta_2 - \theta_0)}{\sin(\theta_2 + \theta_0)} E_0$$

(2) refracted wave:

$$E_{\parallel} = \frac{2\cos\theta_0 \sin\theta_2}{\sin(\theta_0 + \theta_2)\cos(\theta_0 - \theta_2)} E_0, \quad E_{\perp} = \frac{2\cos\theta_0 \sin\theta_2}{\sin(\theta_0 + \theta_2)} E_0$$

where θ_0 is the angle of incidence, θ_2 is the angle of refraction, and E_0 is the absoiute magnitude of the amplitude of the incident wave. When $\theta_0 = \frac{1}{2}\pi - \theta_2$ (Brewster's angle), the reflected wave is linearly polarised.

8.12 Unpolarised (natural) light may be looked upon as an incoherent superposition of two waves of 'complementary' polarisation and equal intensity. The incident beam can therefore be regarded as consisting of two incoherent components one of which $\left(E_{\parallel}\right)$is polarised in the plane of incidence and the other (E_1) is polarised in the perpendicular plane. The intensities of these waves are equal, so that $I_{\parallel} = I_{\perp} = I$.

After reflection the two components will remain incoherent. Fresnel's formulae then give

$$I_{ik}^{(1)} = I \frac{\sin^2(\theta_0 - \theta_2)}{\sin^2(\theta_0 + \theta_2)} \left[e_i^{\perp} e_k^{\frac{1}{2}} + \frac{\cos^2(\theta_0 + \theta_2)}{\cos^2(\theta_0 - \theta_2)} e_i^{\parallel} e_k^{\parallel} \right]$$

$$\rho_1 = \frac{\cos^2(\theta_0 + \theta_2)}{\cos^2(\theta_0 - \theta_2)} < 1$$

where $e^{\perp}$ and $e^{\parallel}$are unit vectors in the direction of the polarisation of the transverse and longitudinal components. These vectors lie in the plane perpendicular to the direction of propagation of the reflected light. The degree of depolarisation of the incident light is 1 . The light becomes polarised after reflection.

Similarly, for refracted light we have

$$I_{ik}^{(2)} = \frac{4I\cos^2\theta_0 \sin^2\theta_2}{\sin^2(\theta_0 + \theta_2)} \left[e_i^1 e_k^1 + \frac{e_i^{\parallel} e_k^{\parallel}}{\cos^2(\theta_0 - \theta_2)} \right]$$

$$\rho_2 = \cos^2(\theta_0 - \theta_2) < 1$$

8.13

$$R = \frac{(\epsilon_1 - \epsilon_2)^2}{2(\epsilon_1 + \epsilon_2)}, \quad \rho_1 = 0, \quad \rho_2 = \frac{4\epsilon_1\epsilon_2}{(\epsilon_1 + \epsilon_2)^2}$$

where ϵ_1 and ϵ_2 are the permittivities of the two dielectrics.

8.14

$$E_{11} = (-1 + 2\xi\cos\theta_0)\,E_{10}, \quad E_{\|1} = \left(1 - \tfrac{2\zeta}{\cos\theta_0}\right) E_{\|0}$$
$$E_{12} = 2\xi\cos\theta_0 E_{10}, \qquad E_{\|2} = 2\xi E_{\|0}$$

The expressions for $E_{\|_1}$ and $E_{\|_2}$ will hold only if the glancing angle is such that $\varphi_0 = \frac{1}{2}\pi - \theta_0 \gg |\zeta|$. The following formulae will hold for $\varphi_0 \ll 1$:

$$E_{\|1} = \frac{\varphi_0 - \zeta}{\varphi_0 + \zeta} E_{\|0}, \quad E_{\|2} = \frac{\varphi_0 \zeta}{\varphi_0 + \zeta} E_{\|0}$$

where $|\zeta|$ and φ_0 are arbitrary.

8.15$R_\perp = 1 - 4\zeta'\cos\theta_0$.

$R_\perp$ is very nearly equal to unity for all angles of incidence and reaches a minimum at $\theta_0 = 0$ (normal incidence). Moreover,

$$R_\| = 1 - \frac{4\zeta'}{\cos\theta_0} \quad \text{when} \quad \varphi_0 = \frac{1}{2}\pi - \theta_0 \gg 4\zeta'$$
$$R_\| = \frac{(\varphi_0 - \zeta')^2 + \zeta''^2}{(\varphi_0 + \zeta')^2 + \zeta''^2} \quad \text{when} \quad \varphi_0 \ll 1$$

The angle φ_0 at which $R_\|$is a minimum may be found from the condition $\partial R_\|/\partial\varphi_0 = 0$ and the result is

$$\varphi_0 = \Phi_0 = |\zeta|, \quad R_\sharp = \frac{|\zeta| - \zeta'}{|\zeta| + \zeta'}$$

The angle Φ_0 is an analogue of the Brewster angle since the magnitude of $R_\|$is a minimum at $\varphi_0 = \Phi_0$ (when the wave is incident on the boundary of the dielectric at the Brewster angle, the coefficient $R_\|$is also a minimum and is in fact equal to zero).

8.16 The polarisation of the reflected wave depends on the phase difference between the longitudinal and the transverse components. By using the results of the two preceding problems, we find that

$$E_{\perp 1} \approx -E_{\perp 0} = \exp(\mathrm{i}\delta_\perp)\,E_{\perp 0}, \quad \delta_\perp = \pi$$
$$E_{\|1} = \left[\frac{|\zeta| - \zeta'}{|\zeta| + \zeta'}\right]^{1/2} \exp(\mathrm{i}\delta_\|)\,E_{00}, \quad \tan\delta_\| = -\frac{2\Phi_0\zeta''}{\Phi_0^2 - |\zeta|^2} \to \infty$$

i.e. $\delta_\| = \frac{1}{2}\pi$.

Thus, the phase difference is $\delta = \delta_\perp - \delta_\| = \frac{1}{2}\pi$. In general, the reflected wave is elliptically polarised and one of the axes of the ellipse lies in the plane of incidence. When $\left|E_{\|1}\right| = |E_{\perp 1}|$ the polarisation is circular.

When $E_{\|_0} = 0$ or $E_{10} = 0$ the polarisation is linear.

8.17 Fresnel's formulae give

$$n' = \frac{\sin\theta_0\tan\theta_0\cos 2\rho}{1 + \sin^2 2\rho\cos\delta}, \quad n'' = \frac{\sin\theta_0\tan\theta_0\sin 2\rho\sin\delta}{1 + \sin 2\rho\cos\delta}$$

8.18

$$R = \frac{\left(\sqrt{\epsilon} - \sqrt{\epsilon'}\right)^2}{\left(\sqrt{\epsilon} + \sqrt{\epsilon'}\right)^2} + \frac{4}{\left(\sqrt{\epsilon} + \sqrt{\epsilon'}\right)^4}\left(\frac{\epsilon'}{\epsilon}\right)^{1/2}\left(\frac{2\pi\sigma}{\omega}\right)^2$$

where ϵ is the permittivity of the medium from which the light emerges, and ϵ' is the real part of the permittivity of the conducting medium.

8.19 The phase difference between $E_{\perp 1}, E_0$ and $E_{\sharp 1}, E_0$ may be determined from the Fresnel formulae:

$$\tan\frac{1}{2}\delta_\perp = \frac{\left(\sin^2\theta_0 - n^2\right)^{1/2}}{\cos\theta_0}, \quad \tan\frac{1}{2}\delta_\parallel = \frac{\left(\sin^2\theta_0 - n^2\right)^{1/2}}{n^2\cos\theta_0} \tag{8.19.1}$$

Since $\delta_\perp \neq \delta_\sharp$, the wave is elliptically polarised.

The polarisation will become circular when the following conditions are satisfied

$$\delta = \delta_\parallel - \delta_\perp = \frac{1}{2}\pi; \quad E_{\parallel 0} = E_{\perp 0}$$

The second of these conditions requires that the incident wave should be polarised in the plane making an angle of $\frac{1}{4}\pi$ with the plane of incidence. Let us consider whether the first of the above two conditions can be satisfied. From equation (8.19.1) we have

$$\tan\frac{1}{2}\delta = \frac{\cos\theta_0\left(\sin^2\theta_0 - n^2\right)^{1/2}}{\sin^2\theta_0}$$

It follows that $\delta = 0$ when $\theta_0 = \arcsin n$ and $\theta_0 = \frac{1}{2}\pi$. The maximum value of δ occurs between these two points. It is easy to show that $\tan\frac{1}{2}\delta_{\max} = (1-n^2)/(2n)$. In order that $\tan\frac{1}{2}\delta$ should be equal to unity ($\delta = \frac{1}{2}\pi$), the following inequalities must be satisfied: $1 - n^2 \geqslant 2n$, $n \leqslant 0 \cdot 414$.

8.20 When the vector $\boldsymbol{E}_0$ is normal to the plane of incidence, the transverse and longitudinal components of Poynting's vector are given by

$$\left.\begin{aligned} S_\perp &= \tfrac{c^2 k''}{8\pi\omega} E_0^2 \exp\left(-2k''z\right)\sin 2\left(k'x - \omega t\right) \\ S_\parallel &= \tfrac{c^2 k''}{8\pi\omega} E_0^2 \exp\left(-2k''z\right)\left[1 - \cos 2\left(k'x - \omega t\right)\right] \end{aligned}\right\} \tag{8.20.1}$$

where the z-axis is normal to the boundary of the media and the x-axis is the line of intersection of the plane of incidence and the separation boundary,

$$k' = k_2\sin\theta_0, \quad k'' = k_2\left(\sin^2\theta_0 - n^2\right)^{1/2}$$

where $k_2 = \omega n_2/c$ is the wavevector in the second medium and θ_0 is the angle of incidence.

It is clear from equation (8.20.1) that the frequency of the vibrations in the direction perpendicular to the boundary is 2ω. The time average of the energy flux entering the second medium is zero. The average magnitude of S_{11} is not zero, so that there is a finite flow of energy along the separation boundary.

The equation for the Poynting vector lines in the second medium is

$$z = \frac{1}{k''}\ln\frac{|\sin k'x|}{C}$$

where C is a constant of integration. Figure 8.20 .1 illustrates the form of these lines. In the first medium the S lines have a more complicated form.

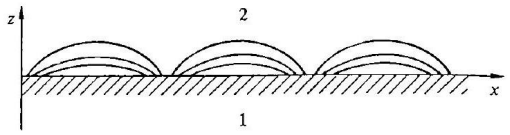


Figure 8.20.1.

8.21 We find from the Fresnel formulae equations (8.a.19) and (8.a.20) that as $\theta_0 \to \frac{1}{2}\pi$ the amplitude of the penetrating wave $E_1 \to \theta$ and the amplitude of the reflected wave $E_2 \to -E_0$. This means that a plane monochromatic wave cannot propagate along the dividing boundary of two dielectrics.

8.22 In this case the law of refraction is

$$k_1 \sin\theta_0 = k_2 \sin\theta_2, \quad k_1 = \frac{\omega}{c}\left(\epsilon_1\right)^{1/2}$$
$$k_2 = \frac{\omega}{c}\left(\epsilon_2' + \mathrm{i}\frac{4\pi\sigma_2}{\omega}\right)^{1/2} = k_2' + \mathrm{i}k_2''$$

where $\sin\theta_2$ and $\cos\theta_2$ are complex quantities. Let $\cos\theta_2 = \rho\exp(\mathrm{i}\alpha)$, where ρ and α are real constants which are functions of θ_0 and of the electrical constants of the medium. The parameters ρ and α can be determined from

$$\rho^2\cos 2\alpha = 1 - \frac{k_1^2}{|k_2|^2}\sin^2\theta_0, \quad \rho^2\sin 2\alpha = \frac{2k_1^2k_2'k_2''}{|k_2|^4}\sin^2\theta_0$$

The wave in the second conducting medium 2 is

$$E_2(r,t) = E_2\exp\left\{\mathrm{i}\left[(k_2e_2\cdot r) - \omega t\right]\right\}$$

If the real and imaginary parts of the product $(k_2e_2\cdot r)$ are separated, we have

$$(k_2e_2\cdot r) = (k_2' + \mathrm{i}k_2'')\left(x\sin\theta_2 + z\cos\theta_2\right) = \mathrm{i}zp\left(\theta_0\right) + xk_1\sin\theta_0 + zq\left(\theta_0\right)$$

where

$$p\left(\theta_0\right) = \rho\left(k_2'\sin\alpha + k_2''\cos\alpha\right), \quad q\left(\theta_0\right) = \rho\left(k_2'\cos\alpha - k_2''\sin\alpha\right).$$

Thus

$$\boldsymbol{E}_2(r,t) = \boldsymbol{E}_2\exp(-pz)\exp\left[\mathrm{i}\left(xk_1\sin\theta_0 + zq - \omega t\right)\right]$$

It is clear that the directions of propagation and damping are not the same. The planes of constant amplitude $z =$ constant are parallel to the surface of the conductor. The planes of constant phase are given by

$$xk_1\sin\theta_0 + zq\left(\theta_0\right) = \text{ constant}$$

from which it follows that the vector $\boldsymbol{k}_2'$ which defines the direction of propagation of the wave makes an angle $\psi = \arctan\left[k_1\sin\theta_0/q\left(\theta_0\right)\right]$ with the z-axis (figure 8.22.1). The phase velocity in the conducting medium is a function of the angle of incidence and is given by

$$v_{\mathrm{ph}} = \frac{\omega}{\left[q^2\left(\theta_0\right) + k_1^2\sin^2\theta_0\right]^{1/2}}$$

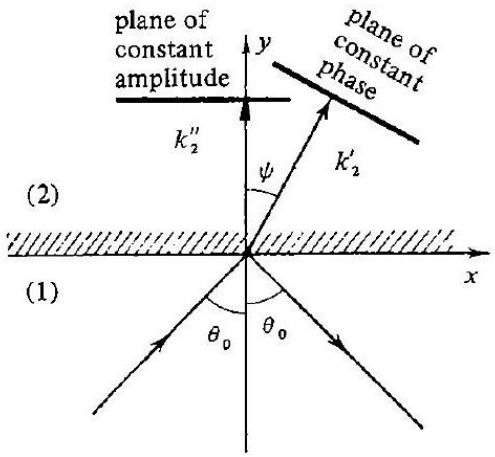


Figure 8.22.1.

8.23 In order to determine the reflection coefficient for the plane layer it is necessary to find the relation between the amplitudes of the reflected and incident waves. This relation may be obtained by two methods.

In the first method it is determined from the boundary conditions. Since the tangential components of the vectors $\boldsymbol{E}$ and $\boldsymbol{H}$ are continuous across the boundaries $z = 0$ and $z = a$, and since in front of the layer there are waves propagating in both directions while behind the layer there is only the transmitted wave propagating in the positive direction of the z-axis, we have from the boundary conditions

$$E_1 = \frac{\alpha_{12} + \alpha_{23} \exp(-2ik_2 a)}{1 + \alpha_{12}\alpha_{23} \exp(-2ik_2 a)} E_0 \tag{8.23.1}$$

where E_1 and E_0 are the amplitudes of the reflected and incident waves respectively, and

$$\alpha_{12} = \frac{1 - n_{12}}{1 + n_{12}}, \quad \alpha_{23} = \frac{1 - n_{23}}{1 + n_{23}}, \quad n_{ik} = \left(\frac{\epsilon_k}{\epsilon_i}\right)^{1/2}, \quad k_2 = \frac{\omega}{c}(\epsilon_2)^{1/2}$$

The second method of solution is based on a consideration of multiple reflections from the separation boundaries. If we use the Fresnel formulae at normal incidence, we find that the amplitude of the wave which has been reflected from the boundary $z = 0$ only once is $E_0' = \alpha_{12} E_0$. The amplitude of the wave which has entered the layer is $E_\alpha' = \beta_{12} E_0$ where

$$\beta_{12} = \frac{2}{1 + n_{12}}.$$

The amplitude of the wave passing from the layer into the region $z < 0$ after single reflection at the $z = a$ plane is

$$E_1' = \beta_{21}\beta_{12}\alpha_{23} E_0 \exp(-2ik_2 a)$$

The amplitude of the wave entering the region $z < 0$ after s reflections at $z = a$ is

$$E_s' = \beta_{21}\beta_{12}\alpha_{23} \exp(-2ik_2 a) \left[\alpha_{21}\alpha_{23} \exp(-2ik_3 a)\right]^{s-1}$$

The total amplitude E_1 of the wave reflected from the plane layer is equal to the sum of all the E_s:

$$E_1 = \sum_{s=0}^{\infty} E_s' = \alpha_{12} E_0 + \beta_{21}\beta_{12}\alpha_{23} \exp(-2ik_2 a) \sum_{s=1}^{\infty} \left[\alpha_{21}\alpha_{23} \exp(-2ik_2 a)\right]^{s-1}$$

By using the formula for the sum of an infinite geometric progression, this expression can be shown to be identical with equation (8.23.1).

The reflection coefficient is defined by $R = |E_1|^2 / |E_0|^2$. The minimum of R may be found in the usual way. The reflection coefficient is a minimum if the thickness of the layer satisfies the condition

$$a = a_n = \frac{1}{4} n \lambda_2, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

where λ_2 is the wavelength inside the layer.

Consider the minimum thickness of the layer $a = \frac{1}{4}\lambda_2$. When R is equated to zero, we find that the condition for the absence of reflection is

$$\epsilon_2 = (\epsilon_1 \epsilon_3)^{1/2}$$

8.24 The equation satisfied by the electric field is [see equation (8.a.12)]

$$\frac{\mathrm{d}^2 E}{\mathrm{d}z^2} + \frac{\omega^2}{c^2}\left(\epsilon - \frac{\Delta\epsilon}{\epsilon^{z/a} + 1}\right) E = 0 \tag{8.24.1}$$

It is required to find the solution of this problem which is bounded for all z and satisfies the appropriate conditions as $z \to \pm\infty$. When $z \to -\infty$, the solution should be

$$E(z) \to A \exp(\mathrm{i}k_0 z) + B \exp(-\mathrm{i}k_0 z) \tag{8.24.2}$$

where $k_0 = \omega/c$. This is a superposition of two waves, namely, the incident and the reflected waves. When $z \to +\infty$, there should only be the transmitted wave, so that

$$E(z) \to C \exp(\mathrm{i}kz) \tag{8.24.3}$$

where $k = \omega\epsilon^{1/2}/c$.

Let us substitute $\xi = -\exp(-z/a)$ into equation (8.24.1). The new variable is such that $-\infty \leqslant \xi \leqslant 0$ when z varies from $-\infty$ to $+\infty$. If we use the substitution $E(\xi) = \xi^{-ika}\psi(\xi)$ we obtain the following equation for the new unknown function $\psi(\xi)$:

$$\xi(1-\xi)\frac{\mathrm{d}^2\psi}{\mathrm{d}\xi^2} + (1 - 2ika)(1-\xi)\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}\xi} + \kappa^2 a^2 \psi = 0 \tag{8.24.4}$$

where $\kappa^2 = \omega^2 \Delta\epsilon / c^2$. This is the hypergeometric equation.

It follows from equation (8.24.3) that the function $\psi(\xi)$ should tend to a constant limit when $\xi \to 0$. The hypergeometric function which is a solution of equation (8.24.4) and satisfies the above conditions is given by

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = 1 + \frac{\alpha\beta}{\gamma(1!)} z + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)(2!)} z^2 + \ldots$$

The solution of equation (8.24.4) may therefore be written in the form

$$\psi = CF\left[-\mathrm{i}\,(k + k_0)\,a, -\mathrm{i}\,(k - k_0)\,a, 1 - 2\mathrm{i}ka, -\exp\left(-\frac{z}{a}\right)\right]$$

In order to find the form of the function ψ when $\xi \to -\infty$, we shall use the asymptotic expression [see Gradshteyn and Ryzhik (1965) equation (7.232, 2)]

$$F(\alpha, \beta, \gamma, \xi) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\beta - \alpha)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma - \alpha)}(-\xi)^{-\alpha} + \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha - \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma - \beta)}(-\xi)^{-\beta}$$

An examination of this equation will show that the condition given by equation (8.24.2) is satisfied.

The reflection coefficient is therefore given by

$$R = \left|\frac{B}{A}\right|^2 = \left|\frac{\Gamma\left(2\mathrm{i}k_0a\right)\Gamma\left[1-\mathrm{i}\left(k+k_0\right)a\right]\Gamma\left[-\mathrm{i}\left(k+k_0\right)a\right]}{\Gamma\left(-2\mathrm{i}k_0a\right)\Gamma\left[1-\mathrm{i}\left(k-k_0\right)a\right]\Gamma\left[-\mathrm{i}\left(k-k_0\right)a\right]}\right|^2$$

This equation may be simplified if we recall that

$$\left|\frac{\Gamma\left(2\mathrm{i}k_0a\right)}{\Gamma\left(-2\mathrm{i}k_0a\right)}\right| = \left|\frac{\Gamma\left(2\mathrm{i}k_0a\right)}{\Gamma^*\left(2\mathrm{i}k_0a\right)}\right| = 1 \quad \text{and} \quad \Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin\pi z}$$

The final expression for R is therefore

$$R = \frac{\sinh^2\pi a\left(k-k_0\right)}{\sinh^2\pi a\left(k+k_0\right)}$$

For small $a(ka \ll 1)$, the expression for the reflection coefficient becomes identical with the well-known expression which holds for a step change in ϵ:

$$R = \frac{\left(k-k_0\right)^2}{\left(k+k_0\right)^2}$$

R is a monotonically decreasing function of a. For large ka, the reduction is exponential:

$$R = \exp\left(-4\pi k_0a\right), \quad ka \gg 1$$

8.25 For normal incidence on a nonhomogeneous layer, the electric field is a function of z only and satisfies the equation

$$\frac{\mathrm{d}^2E}{\mathrm{d}z^2} + \frac{\omega^2}{c^2}\epsilon(\omega, z)E = 0 \tag{8.25.1}$$

Let $z_1 = m\omega^2/\left(4\pi e^2N_0\right)$ so that $\epsilon = 1 - z/z_1$. On substituting $\xi = \left(\omega^2/c^2z_1\right)^{1/3}\left(z_1 - z\right)$ into equation (8.25.1) we have [1]

$$\frac{\mathrm{d}^2E}{\mathrm{d}\xi^2} + \xi E = 0 \tag{8.25.2}$$

The simplest way to obtain the solution of equation (8.25.2) is to expand $E(\xi)$ into a Fourier integral:

$$E(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} E(u)\exp(\mathrm{i}\xi u)\mathrm{d}u, \quad E(u) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} E(\xi)\exp(-\mathrm{i}\xi u)\mathrm{d}\xi$$

Substitution into equation (8.25.2) yields the first-order differential equation

$$\frac{\mathrm{d}E(u)}{\mathrm{d}u} + \mathrm{i}u^2E(u) = 0$$

The solution of this equation is

$$E(u) = A'\exp\left(-\frac{1}{3}\mathrm{i}u^3\right)$$

[1] A similar equation is used in quantum mechanics to describe the motion of a particle in a uniform field.

whence

$$E(\xi) = A' \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\mathrm{i}\left(\frac{1}{3}u^3 - \xi u\right)\right] \mathrm{d}u$$

By rewriting exp-i $\left(\frac{1}{3}u^3 - \xi u\right)$ in its trigonometric form and noting that the integral of $\sin\left(\frac{1}{3}u^3 - \xi u\right)$ is zero, we have

$$E(\xi) = \frac{A}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\infty} \cos\left(\frac{1}{3}u^3 - \xi u\right) \mathrm{d}u$$

The function

$$\Phi(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{0}^{\infty} \cos\left(\frac{1}{3}u^3 + \xi u\right) \mathrm{d}u$$

is known as Airy's function. Airy's function may be expressed in terms of Bessel functions of order $\frac{1}{3}$. Hence, finally,

$$E(\xi) = A\Phi(-\xi)$$

The constant A should be determined from the boundary conditions.
Consider now the behaviour of $E(\xi)$ at large $|\xi|$. By using the asymptotic form of $\Phi(\xi)$ we have, for large positive ξ,

$$E(\xi) = \frac{A}{\xi^{1/4}} \sin\left(\frac{2}{3}\xi^{3/2} + \frac{1}{4}\pi\right)$$

so that the field is oscillatory in character.
For large negative ξ

$$E(\xi) = \frac{A}{2|\xi|^{1/4}} \exp\left(-\frac{2}{3}|\xi|^{3/4}\right)$$

so that the field falls off exponentially. The reason for this is that negative ξ corresponds to negative values of the permittivity ϵ. When $\epsilon < 0$, the wavevector $k = \omega\epsilon^{1/2}/c$ is purely imaginary, i.e. absorption takes place. However, this absorption is not a process in which the electromagnetic energy is converted into heat. In fact, the absorption gives rise to a reflection of the wave from a layer with negative ϵ. This is so because the permittivity is real, and therefore there are no losses.
8.26 $\Psi(x,0) = A(x,0)\exp(\mathrm{i}k_0 x)$,
where $A(x,0) = a_0\sqrt{\pi}\Delta k \exp\left(-\frac{1}{4}x^2\Delta k^2\right)$. The amplitude $A(x,0)$ of the wavepacket is Gaussian. It becomes negligibly small when $|x\Delta k| \geqslant 1$. It follows that the width of the packet in ordinary space is related to its 'width' in k-space by $\Delta k \Delta x \approx 1$. This is a universal relation which holds for electromagnetic or any other wavepackets. It is of particular importance for probability waves in quantum mechanics, since it leads to the Heisenberg relation for the space and momentum coordinates of fundamental particles.
8.27 $\Psi(0,t) = A(0,t)\exp(-\mathrm{i}\omega_0 t)$,
where $A(0,t) = a_0\sqrt{\pi}\Delta\omega \exp\left(-\frac{1}{4}t^2\Delta\omega^2\right)$, and $\Delta t \Delta\omega \approx 1$.
8.28

$$\Delta x_{\min} = \frac{\lambda}{2\pi \sin\theta}$$

where θ is the angle of the cone formed by the rays drawn from the objective of the microscope to the object under consideration.

8.29 The wavepulse sent out by a radar set has a width Δx which is related to the transverse spread k_1 of the wavevectors by $(\Delta x)k_1 \geqslant 1$. On the other hand, it is clear that $\Delta x/l \approx k_\perp/k$. Hence the uncertainty in the position of the object is $\Delta x \geqslant (l\lambda)^{1/2}$.

8.30 The wavepacket is described by

$$\Psi(r,t) = 4\pi a_0 \left(\frac{\pi q^3}{2\rho^3}\right)^{1/2} J_{3/2}(\rho q) \exp\left\{\mathrm{i}\left[(k_0 \cdot r) - \omega_0 t\right]\right\}$$

where $J_{3/2}(x) = (2/\pi x)^{1/2}[\sin x/(x - \cos x)]$ is a Bessel function and $\rho = |r - v_\mathrm{g} t|$. The group velocity $v_\mathrm{g} = \partial\omega/\partial k$ is a vector with components $\partial\omega/\partial k_x, \partial\omega/\partial k_y, \partial\omega/\partial k_z$. The amplitude of the wavepacket is now appreciably different from zero only in the (spherically symmetric) region $\rho q \leqslant 1$.

It is clear from the expression for $\Psi(r,t)$ that the shape of the wavepacket is independent of time. This is due to the linear dispersion law which is strictly true only for waves travelling in a vacuum. When higher terms in the expansion of ω as a function of k are taken into account, the packet will spread out and its form will no longer be time independent. The packet as a whole moves with the group velocity v_g.

8.31 Writing the function $\omega(k)$ in the form

$$\omega = \omega_0 + v_\mathrm{g}(k - k_0) + \beta(k - k_0)^2$$

we have

$$\Psi(x,t) = a_0 \left(\frac{\pi}{\alpha + \mathrm{i}\beta t}\right)^{1/2} \exp\left[-\frac{(x - v_\mathrm{g} t)^2}{4(\alpha + \mathrm{i}\beta t)} + \mathrm{i}(k_0 x - \omega_0 t)\right]$$

It is convenient to consider the square of the modulus of this expression:

$$|A(x,t)|^2 = \frac{\pi a_0^2}{(\alpha^2 + \beta^2 t^2)^{3/2}} \exp\left[-\frac{\alpha(x - v_\mathrm{g} t)^2}{2(\alpha^2 + \beta^2 t^2)}\right]$$

which determines the intensity of the wave. It is clear from this expression that the intensity of the wave as a function of x at given t is a Gaussian curve whose width l is given by

$$l = \left[\frac{2(\alpha^2 + \beta^2 t^2)}{\alpha}\right]^{1/2}$$

Thus the width increases with time, but the height of the packet decreases, owing to the presence of the factor $(\alpha^2 + \beta^2 t^2)^{-1/2}$.

The wavepacket spreads out symmetrically both in the $t = +\infty$ and $t = -\infty$ directions. This spread is not associated with the absorption of energy because k is real. The absence of dissipation is clear from the fact that the integral $\int_{-\infty}^{+\infty} |A(x,t)|^2 \, \mathrm{d}x = (\pi/2\alpha)^{1/2} a_0^2$ is independent of time, i.e. the 'total intensity' is conserved. The reason for the spread of the wavepacket is that the phase velocities $v_\mathrm{ph} = \omega/k$ of the various plane waves entering into the superposition which represents the wavepacket are different; owing to dispersion, the ratio ω/k is a function of k.

8.32 When $\omega \ll \omega_0$

$$v_\mathrm{ph} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_0}}\left(1 - \frac{\omega_\mathrm{p}^2 \omega^2}{2\epsilon_0 \omega_0^4}\right) < c, \quad v_\mathrm{g} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_0}}\left(1 - \frac{3\omega_\mathrm{p}^2 \omega^2}{2\epsilon_0 \omega_0^4}\right) < c$$

where $\epsilon_0 = \epsilon(0)$. When $\omega \gg \omega_0$

$$v_{\rm ph} = c\left(1 + \frac{\omega_{\rm p}^2}{2\omega^2}\right) > c, \quad v_{\rm g} = c\left(1 - \frac{\omega_{\rm p}^2}{2\omega^2}\right) < c$$

In the latter case $p_{\rm ph} v_{\rm g} \approx c^2$. Near the resonance frequency ($\omega \approx \omega_0$), the concept of group velocity loses its significance.

8.33 It follows from the solution of problems 8.30 and 8.31 that the function describing the wavepacket is

$$E(x,t) = E_0(x,t) \exp\left[\mathrm{i}\left(k_0 x - \omega_0 t\right)\right]$$

The amplitude $E_0(x,t)$ varies much more slowly than the function $\exp\left[i\left(k_0 x - \omega_0 t\right)\right]$ (the periods of these functions are in the ratio of $\Delta k/k_0$). If the change in E_0 as compared with $\exp\left[\mathrm{i}\left(k_0 x - \omega_0 t\right)\right]$ is neglected, we find from Maxwell's equations that

$$\begin{aligned} H(x,t) &= \frac{k_0 c}{\omega_0 \mu} E(x,t) \\ &= \left(\frac{\epsilon}{\mu}\right)^{1/2} E_0(x,t) \exp\left[\mathrm{i}\left(k_0 x - \omega_0 t\right)\right] \end{aligned}$$

The energy flux averaged over the period $2\pi/\omega_0$ of the high frequency component is given by

$$\bar{\gamma}(x,t) = \frac{c}{8\pi} \left|\mathrm{Re}\left[E \wedge H^*\right]\right| = \frac{c}{8\pi} \left(\frac{\epsilon}{\mu}\right)^{1/2} E_0(x,t) E_0^*(x,t)$$

Since $\bar{\gamma} = v\bar{w}$, the energy transport velocity is

$$v = \frac{c}{(\,\mathrm{d}/\mathrm{d}\omega)\left[\omega(\epsilon\mu)^{1/2}\right]} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} = v_{\rm g}$$

17.8.2 b Plane waves in anisotropic and gyrotropic media

$$\cos\alpha = \frac{\left(\epsilon_\parallel - \epsilon_\perp\right)\sin\theta\cos\theta}{\left(\epsilon_\parallel^2 \cos^2\theta + \epsilon_\perp^2 \sin^2\theta\right)^{1/2}}, \quad \tan\vartheta = \frac{\epsilon_\perp}{\epsilon_\parallel}\tan\theta$$

8.35 The boundary conditions for the field vectors will be satisfied at all points on the boundary of separation when the tangential components of the wavevectors of the incident, reflected, and both refracted waves, are equal at the boundary of separation. For the ordinary wave this gives

$$k_0 \sin\theta_0 = k_1 \sin\theta_2', \quad \frac{\sin\theta_2'}{\sin\theta_0} = (\epsilon_1\mu)^{1/2}$$

The ray direction (the direction of the Poynting vector) in the ordinary wave is the same as the direction of the wavevector, and is therefore at an angle θ_2' to the normal to the boundary. In the case of the extraordinary wave

$$k_0 \sin\theta_0 = k_2 \sin\theta_2'' = k_0 \sin\theta_2'' \left(\frac{\epsilon_1 \epsilon_\parallel \mu}{\epsilon_\perp \sin^2\theta_2'' + \epsilon_\parallel \cos^2\theta_2''}\right)^{1/2}$$

[see equation (8.b.2)]. Hence,

$$\sin^2\theta_2'' = \frac{\epsilon_\parallel \sin^2\theta_0}{\epsilon_\perp\epsilon_\parallel\mu + \left(\epsilon_\parallel - \epsilon_\perp\right)\sin^2\theta_0}$$

The angle ϑ'' between the ray and the optic axis (which is parallel to the normal to the separation boundary) is, in accordance with the result of the preceding problem, given by

$$\tan\vartheta'' = \frac{\epsilon_\perp}{\epsilon_\parallel}\tan\theta_2'' = \frac{(\epsilon_\perp)^{1/2}\sin\theta_0}{\left[\epsilon_\sharp\left(\epsilon_\parallel\mu - \sin^2\theta_0\right)\right]^{1/2}}$$

The angle of reflection from the crystal is equal to the angle of incidence, just as for an isotropic medium.

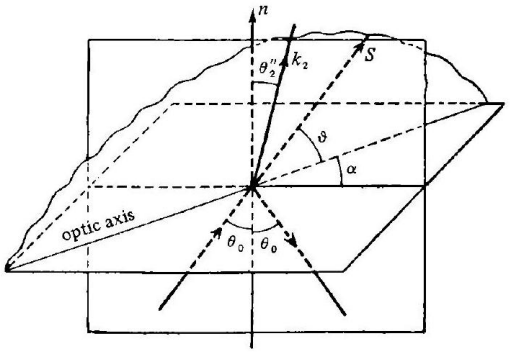


Figure 8.36.1.

8.36 The ordinary ray lies in the plane of incidence, and makes an angle θ_2' with the normal to the surface, where

$$\sin\theta_2' = (\epsilon_\perp\mu)^{1/2}\sin\theta_0$$

The wavevector k_2 of the extraordinary wave lies in the plane of incidence and makes an angle θ_2'' with the normal, which is given by

$$\sin^2\theta_2'' = \frac{\epsilon_\perp \sin^2\theta_0}{\epsilon_\perp\epsilon_\parallel\mu + \left(\epsilon_\perp - \epsilon_\parallel\right)\sin^2\theta_0\cos^2\alpha}$$

The ray direction in the extraordinary wave does not lie in the plane of incidence. The ray direction lies in the same plane as k_2 and the optic axis, and makes an angle ϑ with the latter, where (figure 8.36.1)

$$\tan\vartheta = \frac{\left[\epsilon_\perp^2\epsilon_\parallel\mu + \epsilon_\perp\left(\epsilon_\perp - \epsilon_\parallel\right)\sin^2\theta_0\cos^2\alpha\right]^{1/2}}{\epsilon_\parallel\sin\theta_0\cos\alpha}$$

8.37 Substitution of the plane wave expressions for E and H into Maxwell's equations (8.a.1) to (8.a.4) produces the equation for the amplitudes and the wavevectors of waves which may propagate in the given medium:

$$[k \wedge [k \wedge H_0]] = -\frac{\omega^2\epsilon}{c^2}\hat{\mu}H_0 \tag{8.37.1}$$

Let θ be the angle between the wavevector k and the z-axis, and consider the components of (8.37.1) along the coordinate axes.

A biquadratic equation in k is obtained by equating the determinant of the system to zero. The solution of this equation is

$$k_{1,2}^2 = \frac{\omega^2 \epsilon \mu_\parallel}{2c^2} \frac{\mu \sin^2\theta + \left(2\mu_\perp/\mu_\parallel\right) \pm \left[\mu^2 \sin^4\theta + \left(2\mu_\mathrm{a}/\mu_\parallel\right)^2 \cos^2\theta\right]^{1/2}}{\left(\mu_\perp/\mu_\parallel - 1\right)\sin^2\theta + 1} \tag{8.37.2}$$

where

$$\mu = \frac{\mu_\perp^2 - \mu_\mathrm{a}^2 - \mu_\perp \mu_\parallel}{\mu_\parallel^2}$$

Two waves can propagate in each direction with different phase velocities $v_{1,2} = \omega/k_{1,2}$. These velocities are functions of the angle θ. There are no directions for which the two phase velocities are equal, since the expression in square brackets in equation (8.37.2) does not vanish for any value of θ. With $\mu_a = 0$ in equation (8.37.2), the latter will give the phase velocities of waves which can propagate in a nongyrotropic but magnetically anisotropic crystal:

$$k_1^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\epsilon\mu_\perp, \quad k_2^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\left(\frac{\epsilon\mu_\perp\epsilon_\parallel}{\mu_\parallel \cos^2\theta + \mu_\perp \sin^2\theta}\right)$$

The first of these waves (ordinary wave) has a velocity $v_1 = c/\left(\epsilon\mu_\perp\right)^{1/2}$ which is independent of the direction of propagation. The velocity of the
second wave (extraordinary wave) is a function of the angle between the axis of symmetry of the crystal and the direction of propagation. The two velocities are equal, and the two waves become indistinguishable, when the direction of propagation is along the axis of symmetry ($\theta = 0$).

8.38 Two waves can propagate in any direction with phase velocities $v_{1,2} = \omega/k_{1,2}$, where $k_{1,2}$ is given by equation (8.37.2), in which the magnetic quantities should be replaced (for the purposes of this problem) by the corresponding electrical quantities.

8.39 A plane wave propagating in the direction of a constant magnetic field will split into two waves with opposite circular polarisations and different phase velocities $v_\pm = c\left[\epsilon\left(\mu_\perp \pm \mu_\mathrm{a}\right]^{-1/2}\right.$. When the propagation takes place at right angles to the constant magnetic field, one of the waves [velocity $v = c/\left(\epsilon\mu_\parallel\right)^{1/2}$] will be purely transverse ($\boldsymbol{E} \perp \boldsymbol{k}, \boldsymbol{H} \perp \boldsymbol{k}$). It is analogous to the waves which propagate in an isotropic medium with scalar parameters ϵ and $\mu = \mu_\parallel$. In the case of the second wave $\left\{\text{velocity } v = c\left[\mu_\perp/\epsilon\left(\mu_\mathrm{I}^2 - \mu_\mathrm{a}^2\right)\right]^{1/2}\right\}$ the vector $\boldsymbol{E}$ will be parallel to the constant magnetic field, and the vector H will have a component in the direction of propagation. Thus, a wave with an arbitrary polarisation will split into two linearly polarised waves.

All the results obtained in this problem remain valid when ϵ is a Hermitian tensor and μ is a scalar. All that is required is that the magnetic quantities should be replaced by the corresponding electrical quantities, and vice versa.

8.40 It was shown in the solution of the preceding problem that two waves with different phase velocities and opposite circular polarisations can propagate in the direction of a magnetic field. It follows that a wave whose polarisation is not circular will split into two circularly polarised waves. Since the phase velocities of the two waves are different, the phase difference between them will vary from point to point, and hence the polarisation of the resultant wave will be different at different points.

A detailed calculation will show that the polarisation of the resultant wave will remain linear, but the plane of polarisation will rotate through an angle $\chi = \frac{1}{2}\left(k_+ - k_-\right)z$. This is known as the Faraday effect. The quantities $k_+$and $k_-$are the wavevectors of the two circularly polarised waves, and may be found from the solutions of problems 8.39 and 6.22 . For a weak magnetic field

$$\chi = VHz$$

where V is the Verdet constant. When the atoms of the material may be looked upon as harmonic oscillators, the constant V is given by

$$V = \frac{2\pi e^3 N}{nm^2 c} \frac{\omega^2}{\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2},$$

where $n = \epsilon^{1/2}$ is the refractive index in the absence of the magnetic field.

8.41 It follows from symmetry considerations that the wavevectors of the reflected and transmitted waves should be perpendicular to the separation boundary. Both waves will be circularly polarised in the same direction as the incident wave. The amplitude of the reflected wave is

$$H_1 = \frac{(\epsilon)^{1/2} - (\mu_\perp \pm \mu_\mathrm{a})^{1/2}}{(\epsilon)^{1/2} + (\mu_\perp \pm \mu_\mathrm{a})^{1/2}} H_0$$

where H_0 is the amplitude of the incident wave, ϵ is the permittivity, and $\mu_\perp$ and μ_a are the components of the permeability tensor of the ferrite (see problem 8.37). The amplitude of the transmitted wave is given by

$$H_2 = \frac{2(\epsilon)^{1/2}}{(\epsilon)^{1/2} + (\mu \pm \mu_\mathrm{a})^{1/2}} H_0$$

where the signs + and - correspond to waves with right- and left-handed circular polarisations.

8.42 The wavevectors of the reflected and transmitted waves are perpendicular to the separation boundary. The reflected wave is elliptically polarised with semiaxes

$$H_1' = H_0 \frac{\epsilon - \left(\mu^2 - \mu_\mathrm{a}^2\right)^{1/2}}{\left[(\epsilon)^{1/2} + (\mu + \mu_\mathrm{a})^{1/2}\right]\left[(\epsilon)^{1/2} + (\mu - \mu_\mathrm{a})^{1/2}\right]}$$

$$H_1'' = H_0 \frac{\left[\epsilon\,(\mu - \mu_\mathrm{a})\right]^{1/2} - \left[\epsilon\,(\mu + \mu_\mathrm{a})\right]^{1/2}}{\left[(\epsilon)^{1/2} + (\mu + \mu_\mathrm{a})^{1/2}\right]\left[(\epsilon)^{1/2} + (\mu - \mu_\mathrm{a})^{1/2}\right]}$$

The direction of H_1' is the same as the direction of polarisation of the vector $\boldsymbol{H}$ of the incident wave. The transmitted wave splits into two waves with amplitudes

$$H_2' = \frac{H_0(\epsilon)^{1/2}}{(\epsilon)^{1/2} + (\mu + \mu_\mathrm{a})^{1/2}}, \quad H_2'' = \frac{H_0(\epsilon)^{1/2}}{(\epsilon)^{1/2} + (\mu - \mu_\mathrm{a})^{1/2}}$$

which are circularly polarised in opposite directions. Their velocities of propagation are different (see solution of problem 8.39).

8.43 If the wavelength is much smaller than the radius of the discs and smaller than the distance between neighbouring discs, then the artificial dielectric may be looked upon as a continuous medium. The electric field of the incident wave is parallel to the planes of the discs. Hence, in the absence of the external magnetic field, H_0, the polarisability of the dielectric will be $\alpha = N\beta_\mathrm{e}$, where $\beta_\mathrm{e} = 4a^3/3\pi$ is the longitudinal (relative to the plane of the disc) electrical polarisability of a disc, and N is the number of discs per unit volume.

The longitudinal magnetic polarisability of a disc β_m is zero (see problem 7.41) and hence the magnetic susceptibility of the dielectric for the given direction of the magnetic field is also zero.

The presence of the external magnetic field $\boldsymbol{H}_0$ gives rise to the Hall effect. Thus, conduction electrons which make up the current in each

disc will be deflected under the action of the field H_0 and will give rise to an additional electric field $\boldsymbol{E}_{\mathrm{H}}$ which should balance the deflecting effect of the magnetic field. This gives rise to an additional electric moment in each disc which in turn produces a change in the polarisation vector in the medium and in the electric induction. To calculate the change in the induction, it is convenient to consider the total density of the polarisation current $\partial P/\partial t$ in the dielectric, rather than the current in an isolated disc.

On the first approximation in H_0, the field E_{H} due to the Hall effect is given by

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{H}} = R\,[\boldsymbol{H}_0 \wedge \boldsymbol{j}] = R\left[\boldsymbol{H}_0 \wedge \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t}\right]$$

where R is the Hall constant and $\boldsymbol{P} = \alpha \boldsymbol{E}$ is the polarisation on the zeroorder approximation. Owing to the presence of the field $\boldsymbol{E}_{\mathrm{H}}$, the polarisation vector will increase by

$$\Delta P = \alpha E_{\mathrm{H}} = \alpha^2 R\left[H_0 \wedge \frac{\partial E}{\partial t}\right]$$

and hence the induction D will be given by

$$D = E + 4\pi(P + \Delta P) = \epsilon E + 4\pi\alpha^2 R\left[H_0 \wedge \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\right] \tag{8.43.1}$$

where $\epsilon = 1 + 4\pi N\beta_{\mathrm{e}}$ is the permittivity in the absence of the external magnetic field.

When the electric field E is a simple harmonic function of time, equation (8.43.1) will give the following relation between $\boldsymbol{D}$ and $\boldsymbol{E}$

$$D = \epsilon E + \mathrm{i}[E \wedge g]$$

where $\boldsymbol{g} = 4\pi\alpha^2\omega R H_0$ is the gyration vector [see equation (8.b.4)]. Thus the medium will be gyrotropic. It follows from the results of problem 8.39 that two waves can propagate in the direction of vector g. The two waves are circularly polarised in opposite directions, and have different phase velocities $v_{\pm} = \omega/k_{\pm}$. On calculating $k_{\pm}$in the usual way we find that

$$k_{\pm}^2 = \frac{\omega^2}{c^2}(\epsilon \pm g)$$

8.44 A wave for which the electric vector is parallel to the conductors is reflected from the lattice as from a continuous metal plane. A wave for which the electric vector is at right angles to the conductors will propagate as in free space since it does not excite any currents in the lattice.

8.45 The solution of the Maxwell equations will be sought in the form of plane waves. The amplitude E_0 of such waves must satisfy the following
equations

$$[k \wedge E_0] = \frac{\omega}{c}H_0, \quad [k \wedge H_0] = -\frac{\omega}{c}\epsilon(\omega)E_0$$

However, for a longitudinal electric field $[k \wedge E_0] = 0$, and hence $H_0 = 0$ and $\epsilon(\omega)E_0 = 0$

It follows from the latter result that a longitudinal electric field will exist provided

$$\epsilon(\omega) = 0$$

The frequencies ω_α of the longitudinal oscillations are determined by this equation and are, as a rule complex, $\omega_\alpha = \widetilde{\omega}_\alpha - i\gamma_\alpha$. This means that oscillations, once they are excited, will be damped. If the condition $\gamma_\alpha \ll \widetilde{\omega}_\alpha$ is satisfied, the damping during one period of the oscillations is small. Such oscillations will be long-lived.

In the case of a plasma with dielectric permittivity

$$\epsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_\mathrm{p}^2}{\omega(\omega + i\gamma)}$$

(see problem 6.16) the frequency of the longitudinal oscillations is

$$\omega_0 = \left(\omega_\mathrm{p}^2 + \frac{1}{4}\gamma^2\right)^{1/2} - \frac{1}{2}\mathrm{i}\gamma$$

As $\gamma \to 0$ this frequency becomes the plasma frequency:

$$\omega_0 = \omega_\mathfrak{p} = \left(\frac{4\pi \mathrm{e}^2 N}{m}\right)^{1/2}$$

According to this formula, the frequency ω is independent of the wavevector, and hence the group velocity of longitudinal plasma waves is zero. However, this result holds only on the first approximation, and arises because the spatial nonuniformity of the electric field is not taken into account. Longitudinal plasma waves consist of oscillations of the electron cloud relative to the ion cloud (the ions are assumed to be fixed in the present approximation).

8.46 $\boldsymbol{E}(x, z, t) = \boldsymbol{E}_0 \exp[-\alpha|x| + \mathrm{i}(kz - \omega t)]$,
where the frequency ω is determined from the condition $\epsilon(\omega) = -1$: $\omega = \omega_\mathbf{p}/\sqrt{2}$

The damping coefficient α can be expressed in terms of the wavevector k:

$$\alpha = k\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\omega_\mathrm{p}}{kc}\right)^2\right]^{1/2}$$

In the case of a slow wave $\alpha \approx k$. The wavevector k can have any magnitude. The amplitude $\boldsymbol{E}_0$ has components

$$E_{0y} = 0, \quad E_{0x} = \pm\frac{\mathrm{i}k}{\alpha}E_{0z} \approx \pm\mathrm{i}E_{0z}$$

where the plus (minus) sign corresponds to the region $x > 0 (x < 0)$. The polarisation is thus nearly circular and the vector $\boldsymbol{E}$ rotates in the xz-plane. The amplitude of the magnetic field $H_0\,(0, H_{0y}, 0)$ is small compared to that of E_0 : $H_{0y} = E_{0z}\omega/(kc) \ll E_{0z}$, which is characteristic for plasma oscillations. The wave considered is called a plasma surface wave.

8.47 It follows from the solution of problem 8.39 that two waves with opposite circular polarisations can propagate in the direction of the magnetic field. The wavevectors of these waves are given by (see problem 6.25)

$$\frac{k^2c^2}{\omega^2} = \epsilon_\pm = 1 - \frac{\omega_\mathrm{p}^2}{\omega\left(\omega + \mathrm{i}\gamma \mp \omega_H - \omega_H\Omega_H/\omega\right)}$$

When $\Omega_H \ll \omega$ the effect of the motion of the positive ions is very small and may be neglected. In the opposite case, namely $\Omega_H \gg \omega$ and $\gamma\omega \ll \omega_H\Omega_H$, the positive ions play the leading role in the process, and

$$\frac{k^2c^2}{\omega^2} = 1 + \frac{\omega_\mathrm{p}^2}{\omega_H\Omega_H} = 1 + \frac{4\pi NMc^2}{H_0^2}$$

Both waves propagate with the same phase velocity v_ph , which is equal to their group velocity v_g:

$$v_\mathrm{g} = v_\mathrm{ph} = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\left(1 + 4\pi NMc^2/H_0^2\right)^{1/2}} \tag{8.47.1}$$

or

$$v_{\mathrm{g}} = v_{\mathrm{ph}} = \frac{H_0}{(4\pi NM)^{1/2}} = \frac{H_0}{(4\pi\tau)^{1/2}} \tag{8.47.2}$$

The latter result holds provided that the second term in the denominator of equation (8.47.1) is $\gg 1$. The quantity $\tau = NM$ is the density of the gas (the electron mass can clearly be neglected). If the motion of the positive ions is not taken into account, then instead of the finite constant velocity given by equation (8.47.2), we would have a zero velocity for $\omega \to 0$, and the corresponding waves would not be able to propagate. Thus, mechanical oscillations of a gas and the oscillations of the electromagnetic field are in this case very closely related. Waves propagating with the velocity given by equation (8.47.2) are known as magnetohydrodynamic waves. They are of particular importance in astrophysical and other processes.

8.48 The linearised equation relating the amplitudes of the high-frequency components of the magnetisation ($\boldsymbol{m}_0$) and the magnetic field ($\boldsymbol{h}_0$) can be deduced from equations (6.c.2) and (6.c.3) and is

$$\mathrm{i}\omega m_0 = -\gamma\,[M_0 \wedge h_0] - \gamma\,[m_0 \wedge H_0] + \gamma q k^2\,[M_0 \wedge m_0] \tag{8.48.1}$$

where M_0 is the saturation magnetisation and is parallel to the magnetic field H_0. If the z-axis is chosen to be parallel to $H_0\,(z = x_3)$, then the components of the tensor μ_{ik} are [see equation (8.48.1)]:

$$\begin{aligned} \mu_{11} = \mu_{22} &= 1 + \frac{\omega_M\,(\omega_0 + \alpha k^2)}{(\omega_0 + \alpha k^2) - \omega^2} \\ \mu_{12} = -\mu_{21} &= -\mathrm{i}\frac{\omega\omega_M}{(\omega_0 + \alpha k^2)^2 - \omega^2}, \quad \mu_{33} = 1 \end{aligned} \tag{8.48.2}$$

where

$$\omega_0 = \gamma H_0, \quad \omega_M = 4\pi\gamma M_0, \quad \alpha = q\gamma M_0$$

The remaining components of μ_{ik} are zero.

As can be seen from equation (8.48.2), the magnetic permeability is now a function of both frequency and the wavevector. This is due to the fact that the magnetisation at each point depends on the magnitude of the magnetic field not only at that particular point but also at the neighbouring points (this is because of the term $q\nabla^2 M$ in the expression for H_{eff}). The dependence of the permittivity or the magnetic permeability on the wavevector is called spatial dispersion. The dependence of μ on k is significant only for very nonuniform fields (short wavelengths).

8.49 Consider the plane wave solutions of the Maxwell equations and the equation of motion of the magnetisation vector (6.c.2):

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 \exp[\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}) - \omega t], \quad \boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_0 + \boldsymbol{h}_0 \exp[\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}) - \omega t] \\ &\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}_0 + \boldsymbol{m}_0 \exp[\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}) - \omega t]. \end{aligned}$$

The amplitudes of the fields and of the magnetisation satisfy the following system of equations

$$c\,[k \wedge \boldsymbol{h}_0] = -\omega\epsilon E_0, \quad c\,[k \wedge \boldsymbol{E}_0] = \omega\,(\boldsymbol{h}_0 + 4\pi\boldsymbol{m}_0)$$

$$(k \cdot [\boldsymbol{h}_0 + 4\pi\boldsymbol{m}_0]) = 0 \tag{8.49.1}$$

$$\mathrm{i}\omega\boldsymbol{m}_0 = -\gamma\,[\boldsymbol{M}_0 \wedge \boldsymbol{h}_0] - \gamma\,[\boldsymbol{m}_0 \wedge \boldsymbol{H}_0] + \gamma q k^2\,[\boldsymbol{M}_0 \wedge \boldsymbol{m}_0] \tag{8.49.2}$$

On eliminating $\boldsymbol{E}_0$ and $\boldsymbol{h}_0$ from equations (8.49.1) and (8.49.2) and substituting

$$u = \frac{\omega_M}{\Omega}, \quad x = \frac{\omega}{\Omega}, \quad \xi = \frac{ck}{\Omega\sqrt{\epsilon}}, \quad \Omega = \omega_0 + \omega_1 + \omega_M$$
$$\omega_0 = \gamma H_0, \quad \omega_1 = \gamma q k^2 M_0, \quad \omega_M = 4\pi\gamma M_0$$

we have

$$\mathrm{i}x\boldsymbol{m}_0 = \frac{u}{x^2-\xi^2}\left\{x^2\left[e_z \wedge \boldsymbol{m}_0\right] + \xi^2\left(n \cdot m_0\right)\left[e_z \wedge n\right]\right\} + (1-u)\left[e_z \wedge m_0\right] \tag{8.49.3}$$

where $n = k/k, e_z$ is a unit vector in the direction of H_0, and M_0 is parallel to $\boldsymbol{H}_0$.

Take the x-axis in the $\boldsymbol{n}, \boldsymbol{e}_z$ plane and denote the angle between $\boldsymbol{e}_z$ and n by θ. The following system of linear equations is then obtained from equation (8.49.3):

$$ixm_{0x} + \left(1 + \frac{u\xi^2}{x^2-\xi^2}\right) m_{0y} = 0$$
$$\left(1 + \frac{u\xi^2}{x^2-\xi^2}\cos^2\theta\right) m_{0x} - \mathrm{i}xm_{0y} = 0$$

The condition that these equations should be consistent yields the required dispersion relation:

$$\left(1 + \frac{u\xi^2}{x^2-\xi^2}\right)\left(1 + \frac{u\xi^2}{x^2-\xi^2}\cos^2\theta\right) - x^2 = 0$$

This equation is of the third degree in ω^2 ($\omega^2 = \Omega^2 x^2; \Omega$ is independent of ω) and hence three types of wave with different dispersion relations can propagate in the medium under consideration. Two of these dispersion relations were investigated in the solution of problem 8.37, where it was assumed that $\omega_1 = 0$. They correspond to ordinary electromagnetic waves propagating in a gyrotropic medium. To investigate the third type of wave, let us suppose that $\omega^2\epsilon/c^2k^2 \ll 1\,(x^2 \ll \xi^2)$. If x^2 is neglected in comparison with ξ^2 in the denominator of equation (8.49.3), we have the third dispersion relation

$$\omega^2 = (\omega_0 + \omega_1)\left(\omega_0 + \omega_1 + \omega_M \sin^2\theta\right) \tag{8.49.4}$$

where $\omega_1 = q\gamma k^2 M_0$. Since $\omega^2\epsilon \ll c^2k^2$ we find, assuming that ω_0, ω_1, and ω_M are comparable in magnitude, that the dispersion law (8.49.4) will hold provided $\xi^2 \gg 1$.

Consider now the relative magnitudes of E_0 and h_0 for waves with the dispersion relation (8.49.4). Using the Maxwell equation (8.49.1) and the condition $\omega^2\epsilon/c^2k^2 \ll 1$ we have

$$E_0 \approx \frac{4\pi\omega}{ck^2}[k \wedge m]; \quad h_0 \approx 4\pi n(n \cdot m)$$

Thus, $E_0 \ll h_0$. The waves under consideration are purely magnetic oscillations of the magnetisation vector, for which the electric field does not appear. They are known as spin waves, and determine many magnetic, thermal, and electrical properties of ferromagnetics.

8.50 Let the y-axis be perpendicular to the surface of the metal (positive in the inward direction) and let the z-axis lie along the magnetic field. Since the impedance ζ is independent of the angle of incidence of the wave, we shall consider normal incidence only. Solution of Maxwell's equations and the definition of surface impedance yield

$$\zeta_{xx} = (1-\mathrm{i})\left(\frac{\omega\mu_\parallel}{8\pi\sigma}\right)^{1/2}, \quad \zeta_{zz} = (1-\mathrm{i})\left(\frac{\omega\mu}{8\pi\sigma_3}\right)^{1/2}, \quad \zeta_{xz} = \zeta_{zx} = 0$$

where

$$\sigma = \frac{\sigma_1^2 - \sigma_2^2}{\sigma_1}, \quad \mu = \frac{\mu_\perp^2 - \mu_a^2}{\mu_\perp}$$

The dependence of ζ_{zz} on frequency has a resonance character (see problem 6.35, in which the components of μ_{ik} are calculated). The component ζ_{xx} does not exhibit resonance properties, since $\mu_\parallel = 1$.

8.51

$\zeta_\pm = \pm\frac{E_{\pm1}}{h_{\pm1}} = -(1-\mathrm{i})\left(\frac{\omega\mu^\pm}{8\pi\sigma^\pm}\right)^{1/2}$,

where $\mu^\pm = \mu_\perp \pm \mu_a, \sigma^\pm = \sigma_1 \pm \sigma_2; E_{\pm1}$ and $h_{\pm1}$ are the cyclic components of $\boldsymbol{E}$ and $\boldsymbol{h}\left[h_{\pm1} = \mp\left(h_x \pm \mathrm{i}h_y\right)/\sqrt{2}\right]$.

c Scattering of electromagnetic waves by macroscopic bodies. Diffraction

8.52 It is convenient to introduce cylindrical coordinates with the z-axis lying along the axis of the cylinder, and the angle α measured from the direction of the wavevector k of the incident wave. In view of the symmetry of the problem, the field vectors are independent of z, and the only finite components are E_z, H_r, and H_ϕ. In what follows we shall omit the time factor $\exp(-\mathrm{i}\omega t)$ and will use the wave equation (8.a.6) for $\boldsymbol{E}$ and the Maxwell equation (8.a.1). The first of these equations will give E_z, and the second will give H_r and H_ϕ in terms of E_z:

$$H_r = \frac{1}{\mathrm{i}kr}\frac{\partial E_z}{\partial\phi}, \quad H_\phi = -\frac{1}{\mathrm{i}k}\frac{\partial E_z}{\partial r} \tag{8.52.1}$$

The secondary field $E' = E - E_0$, which is due to the presence of the cylinder, satisfies the equation

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial E'}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 E'}{\partial\phi^2} + k^2E' = 0 \tag{8.52.2}$$

Let $E' = R(r)\Phi(\phi)$ and separate the variables in equation (8.52.2):

$$\frac{\mathrm{d}^2R_m}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}R_m}{\mathrm{d}r} + \left(k^2 - \frac{m^2}{r^2}\right)R_m = 0 \tag{8.52.3}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\Phi_m}{\mathrm{d}\phi^2} + m^2\Phi_m = 0 \tag{8.52.4}$$

where m^2 is the separation constant. The general solution of equation (8.52 .2) is then the sum of the special solutions over all the allowed values of m:

$$E'(r,\phi) = \sum_m \Phi_m(\phi)R_m(r)$$

In order to obtain the solution of the Bessel equation [equation (8.52.3)] in a form convenient for our purposes, consider the boundary

condition for $r \to \infty$. Since E' represents the secondary field, which is due to the currents induced in the cylinder, it follows that when $r \to \infty$ this field will take the form of cylindrical waves, travelling in the outward direction. This means that E' should, in this region, be of the form

$$E' = E_0 f(\phi)\frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{r^{1/2}} \tag{8.52.5}$$

The latter condition will be satisfied if the Hankel function $H_m^{(1)}(kr)$ is taken as the solution of equation (8.52.2). For large r this function is of the form (see appendix 3)

$$H_m^{(1)}(kr) = \left(\frac{2}{\pi kr}\right)^{1/2} \exp\left[\mathrm{i}\left(kr - \frac{1}{2}m\pi - \frac{1}{4}\pi\right)\right] \quad (kr \gg 1)$$

The second linearly independent solution will contain a term of the form constant $\times r^{-1/2}\exp(-\mathrm{i}kr)$ which represents a cylindrical wave flowing in the inward direction. This wave cannot appear under the conditions of the present problem. Hence, the solution of equation (8.52.3) may be written in the form $R_m(r) = H_m^{(1)}(kr)$. Equation (8.52.4) has the following solution:

$$\Phi_m(\phi) = A_m \exp(\mathrm{i}m\phi) + B_m \exp(-\mathrm{i}m\phi)$$

Since the field remains unaltered when ϕ changes by 2π, the number m should be an integer. If it is considered that m may assume both positive and negative values, then the final solution will be of the form

$$E'(r,\phi) = E_0' \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m H_m^{(1)}(kr)\exp(\mathrm{i}m\phi) \tag{8.52.6}$$

At large distances equation (8.52.6) will become identical to equation (8.52.5) and

$$f(\phi) = \left(\frac{2}{\pi k}\right)^{1/2} \sum_m A_m \exp\left[\mathrm{i}\left(m\phi - \frac{1}{2}m\pi - \frac{1}{4}\pi\right)\right]$$

The coefficients A_m in the series given by equation (8.52.6) may be determined from the boundary condition for the surface of the cylinder. Since the cylinder is a perfect conductor, it follows that

$$E' + E_0 = 0 \quad \text{when} \quad r = \mathrm{a}$$

or

$$\exp(\mathrm{i}ka\cos\phi) + \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_m H_m^{(1)}(ka)\exp(\mathrm{i}m\phi) = 0$$

Since the functions $\exp(\mathrm{i}m\phi)$ are orthogonal, we have

$$\int_0^{2\pi} \exp\left[\mathrm{i}\left(ka\cos\phi - m'\phi\right)\right]\mathrm{d}\phi + 2\pi A_{m'} H_{m'}^{(1)}(ka) = 0$$

and hence, by equation (A3.11), we have

$$A_m = \frac{\mathrm{i}^m J_m(ka)}{H_m^{(1)}(ka)}$$

The resultant electric field is therefore given by

$$E(r,\alpha) = E_0'\exp(\mathrm{i}kr\cos\phi) - E_0' \sum_m \frac{\mathrm{i}^m J_m(ka)}{H_m^{(1)}(ka)} H_m^{(1)}(kr)\exp(\mathrm{i}m\phi)$$

The components of the magnetic field can be determined with the aid of equation (8.52.1) and are given by

$$H_r = -E_0' \sin\phi \exp(\mathrm{i}kr\cos\phi) - E_0' \sum_m \frac{\mathrm{i}^m m J_m(ka)}{H_m^{(1)}(ka)} \frac{H_m^{(1)}(kr)}{kr} \exp(\mathrm{i}m\phi)$$

$$H_\phi = -E_0' \cos\phi \exp(\mathrm{i}kr\cos\phi) + E_0' \sum_m \frac{\mathrm{i}^{m-1} J_m(ka)}{H_m^{(1)}(ka)} \frac{\mathrm{d}H_m^{(1)}(kr)}{\mathrm{d}(kr)} \exp(\mathrm{i}m\phi)$$

The secondary electric field is transverse in all space; the secondary magnetic field becomes transverse at large distances from the cylinder $kr \gg 1$ (wave zone), when the longitudinal component H_r vanishes owing to the presence of the factor kr in the denominator.

The surface current density can be determined from the boundary condition for the tangential component of $\boldsymbol{H}$:

$$j(\phi) = j_z(\phi) = \frac{c}{4\pi} H_\phi(a, \phi)$$

Finally, the total current is given by

$$J = -\frac{1}{2}\mathrm{i}caE_0' \left[J_1(ka) - \frac{J_0(ka) H_1^{(1)}(ka)}{H_0^{(1)}(ka)} \right]$$

8.53 Since the field is two-dimensional, the quantity $\mathrm{d}I$ in the general equation (8.c.1) $\mathrm{d}\sigma_\mathrm{s} = \mathrm{d}I/\bar{\gamma}_0$ must be looked upon as the intensity of secondary waves per unit length within an angle $\mathrm{d}\phi$, so that $\mathrm{d}I = \bar{\gamma} r \, \mathrm{d}\phi$. The differential scattering cross section will then have the dimensions of length. With the use of the results of problem 8.52, we have 8.52, we have

$$\mathrm{d}\sigma_\mathrm{s} = |f(\phi)|^2 \, \mathrm{d}\phi$$

where

$$f(\phi) = \left(\frac{2}{\pi k}\right)^{1/2} \sum_m \mathrm{i}^m \frac{J_m(ka)}{H_m^{(1)}(ka)} \exp\left[\mathrm{i}\left(m\phi - \frac{1}{2}m\pi - \frac{1}{4}\pi\right)\right] \tag{8.53.1}$$

In general, the latter result is very complicated. However, it becomes much simpler when $ka \ll 1$. It is then sufficient to retain only the term with $m = 0$, which yields an isotropic distribution of the secondary
radiation:

$$\mathrm{d}\sigma_\mathrm{s} = \frac{\pi \mathrm{d}\phi}{2k \ln^2(ka)} = \frac{\lambda}{4 \ln^2(ka)} \mathrm{d}\phi$$

The total cross section is obtained by integrating equation (8.53.1) over ϕ. Owing to the orthogonality of the functions $\exp(\mathrm{i}m\phi)$, we have

$$\sigma_\mathrm{s} = \frac{4}{k} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left| \frac{J_m(ka)}{H_m^{(1)}(ka)} \right|^2 \tag{8.53.2}$$

When $ka \ll 1$, equation (8.53.2) assumes the simple form

$$\sigma_\mathrm{s} = \frac{\pi\lambda}{2 \ln^2(ka)}$$

8.54

$$H_z = H_0 \left[\exp(\mathrm{i}kr\cos\phi) - \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathrm{i}^m \frac{J'_m(ka)}{H_m^{(1)'}(ka)} H_m^{(1)}(kr) \exp(\mathrm{i}m\phi) \right]$$

$$E_r = H_0 \left[\sin\phi \exp(\mathrm{i}kr\cos\phi) + \frac{1}{kr} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathrm{i}^m \frac{mJ'_m(ka)}{H_m^{()'}(ka)} H_m^{(1)}(kr) \exp(\mathrm{i}m\phi) \right]$$

$$E_\phi = H_0 \left[\cos\phi \exp(\mathrm{i}kr\cos\phi) + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathrm{i}^{m+1} \frac{J'_m(ka)}{H_m^{(1)'}(ka)} H_m^{(1)'}(kr) \exp(\mathrm{i}m\phi) \right]$$

where ϕ is measured from the direction of k, and the axis of the cylindrical system of coordinates lies along the axis of the cylinder.

$$\mathrm{d}\sigma_\mathrm{s}(\phi) = \frac{1}{8}\pi(ka)^3 a(1-2\cos\phi)^2 \ \mathrm{d}\phi$$

$$\sigma_\mathrm{s} = \frac{3}{4}\pi^2 k^3 a^4$$

8.55 $\mathrm{d}\sigma'_\mathrm{s} = \cos^2\varphi \ \mathrm{d}\sigma_\parallel + \sin^2\varphi \ \mathrm{d}\sigma_\perp$,

$$\mathrm{d}\sigma''_\mathrm{s} = \frac{1}{2}\left(\mathrm{d}\sigma_\parallel + \mathrm{d}\sigma_\perp \right)$$

8.56 The unpolarised wave can be looked upon as a superposition of two incoherent components of equal intensity. The electric vector E of one of the two components can be taken to lie along the axis of the cylinder, and the electric vector of the other component is then perpendicular to the axis. The scattering cross sections for the first and second components were obtained in problems 8.53 and 8.54 . The degree of depolarisation ρ is given by the ratio of the intensities of the scattered waves:

$$\rho = \frac{\mathrm{d}\sigma_\perp}{\mathrm{d}\sigma_\parallel} = \frac{1}{4}(ka)^4 \ln^2(ka)(1-2\cos\phi)^2$$

Since $ka \ll 1$, it follows that ρ is very small, i.e. the scattered waves are almost completely polarised for all scattering angles. When $\cos\phi = 0 \cdot 5$, i.e. when $\phi = 60°$, the depolarisation coefficient is zero.

8.57

$$H_z = H_0[\exp(\mathrm{i}kr\cos\phi) + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathrm{i}^m \frac{J'_m(ka) - \mathrm{i}\zeta J_m(ka)}{\mathrm{i}\zeta H_m^{(1)}(ka) - H_m^{(1)}(ka)} H_m^{(1)}(kr) \exp(\mathrm{i}m\phi) \Bigg]$$

where ζ is the surface impedance of the metal,

$$H_\phi = H_r = 0, \quad E = \frac{\mathrm{i}}{k} \operatorname{curl} H$$

8.58

$$Q = \frac{1}{4} ac\xi' H_0^2 \sum_m \left| \frac{J'_m N_m - J_m N'_m}{\mathrm{i}\xi H_m^{(1)} - H_m^{(1)'}} \right|^2$$

where ζ' is the real part of the surface impedance. The cylindrical functions J_m, N_m, and $H_m^{(1)}$ (see appendix 3) and their derivatives are taken at the point ka. The absorption cross section is given by

$$\sigma_{\mathrm{a}} = \frac{Q_0}{\bar{\gamma}_0} = 2\pi a\zeta' \sum_m \left| \frac{J'_m N_m - J_m N'_m}{\mathrm{i}\zeta H_m^{(1)} - H_m^{(1)'}} \right|^2$$

When $ka \ll 1$, i.e. when $\lambda \gg a$, the field in the neighbourhood of the cylinder is quasi-stationary (conducting cylinder in a longitudinal quasistationary magnetic field; see problem 7.30). Hence, if we express ζ' in terms of the conductivity σ with the aid of equations (8.a.9) and (8.a.11), we have the following expression for Q:

$$Q = \frac{1}{8} acH_0^2 \left(\frac{\mu\omega}{2\pi\sigma}\right)^{1/2}$$

which is the same as that found in the solution of problem 7.32 for a strong skin effect.

8.59 When $r > a$

$$E_z = E_0[\exp(\mathrm{i}kr\cos\phi) + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathrm{i}^m \frac{\zeta J'_m(ka) J_m(k'a) - J_m(ka) J'_m(k'a)}{H_m^{(1)}(ka) J'_m(k'a) - \zeta H_m^{(1)'}(ka) J_m(k'a)} H_m^{(1)}(kr) \exp(\mathrm{i}m\phi)]$$

and when $r < a$

$$E_z = E_0\zeta \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathrm{i}^m \frac{J'_m(k'a)\, H_m^{(1)}(ka) - J'_m(k'a)\, H_m^{(1)'}(ka)}{J'_m(k'a)\, H_m^{(1)}(ka) - \zeta J_m(k'a)\, H_m^{(1)}(ka)} J_m(k'r) \exp(\mathrm{i}m\phi)$$

where E_0 is the amplitude of the incident wave, $\zeta = (\mu/\epsilon)^{1/2}$, $k = \omega/c$, $k' = \omega(\epsilon\mu)^{1/2}/c$, and the remaining components of $\boldsymbol{E}$ are zero. The field H may be calculated from the formula

$$H = \frac{c}{\mathrm{i}\omega\mu} \operatorname{curl} \boldsymbol{E}$$

8.60 The dipole moments of the sphere may be written in the form

$$\boldsymbol{p} = \beta_{\mathrm{e}} \boldsymbol{E}_0 \exp(-\mathrm{i}\omega t), \quad \boldsymbol{m} = \beta_{\mathrm{m}} \boldsymbol{H}_0 \exp(-\mathrm{i}\omega t)$$

where β_e and β_m are the electric and magnetic polarisabilities of the sphere, which in general are complex.

The components of the vectors E and H of the scattered wave may be obtained from equations (12.a.17) and (12.a.20):

$$H_\phi = E_\theta = \frac{\omega^2 E_0}{c^2 r} (\beta_{\mathrm{e}} \cos\theta + \beta_{\mathrm{m}}) \cos\phi$$
$$H_\theta = -E_\phi = \frac{\omega^2 E_0}{c^2 r} (\beta_{\mathrm{e}} + \beta_{\mathrm{m}}) \sin\phi$$

The angles θ and ϕ define the direction of scattering as shown in figure 8.60.1.

The differential scattering cross section can be determined from equation (8.c.1) and is given by

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{s}}(\theta, a)}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{\omega^4}{c^4} \left[|\beta_{\mathrm{e}}|^2 \left(\cos^2\theta \cos^2\phi + \sin^2\phi\right) + |\beta_{\mathrm{m}}|^2 \left(\cos^2\theta \sin^2\phi + \cos^2\phi\right) + (\beta_{\mathrm{e}}\beta_{\mathrm{m}}^* + \beta_{\mathrm{e}}^*\beta_{\mathrm{m}}) \cos\theta \right]$$

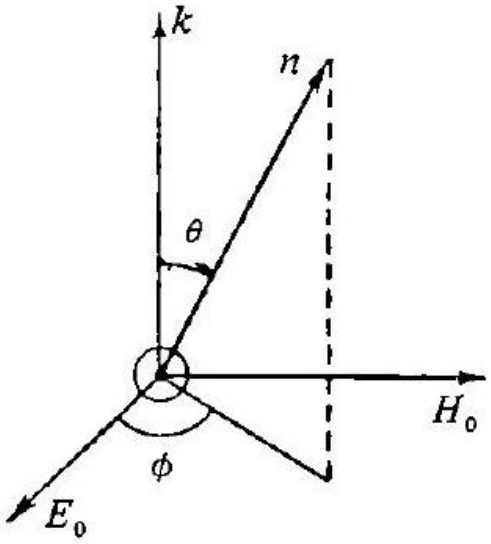


Figure 8.60.1.

8.61

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{s}}(\theta) &= \frac{1}{2}\left[\,\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{s}}(\theta,\phi) + \mathrm{d}\sigma_{\mathrm{s}}\left(\theta,\phi+\frac{1}{2}\pi\right)\right.\\
&= \frac{\omega^4}{2c^4}\left[\left(|\beta_{\mathrm{e}}|^2+|\beta_{\mathrm{m}}|^2\right)\left(1+\cos^2\theta\right)+2\left(\beta_{\mathrm{e}}\beta_{\mathrm{m}}^*+\beta_{\mathrm{e}}^*\beta_{\mathrm{m}}\right)\cos\theta\right]\mathrm{d}\Omega\\
\sigma_{\mathrm{s}} &= \frac{8\pi\omega^4}{3c^4}\left(|\beta_{\mathrm{e}}|^2+|\beta_{\mathrm{m}}|^2\right)
\end{aligned}$$

In order to determine the degree of depolarisation of the scattered radiation, it is necessary to find the principal directions of the polarisation tensor. This can easily be done in the present example because of the symmetry of the problem. For given $\boldsymbol{k}$ and $\boldsymbol{n}$ (cf figure 8.60.1), the special directions for E_0 will be the direction of the normal to the plane of scattering and the direction lying in the plane of scattering and perpendicular to $\boldsymbol{k}$.

The differential cross sections for these two directions were obtained in the solution of the preceding problem. The degree of depolarisation ρ is given by the ratio of the smaller to the larger of these two quantities. When $|\beta_{\mathrm{m}}| < |\beta_{\mathrm{e}}|$,

$$\rho = \frac{\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{s}}(\theta,0)}{\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{s}}\left(\theta,\frac{1}{2}\pi\right)} = \left|\frac{\beta_{\mathrm{m}}+\beta_{\mathrm{e}}\cos\theta}{\beta_{\mathrm{m}}\cos\theta+\beta_{\mathrm{e}}}\right|^2$$

8.62 For a dielectric sphere

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{sd}} &= \frac{\omega^4 a^6}{2c^4}\left(\frac{\epsilon-1}{\epsilon+2}\right)^2\left(1+\cos^2\theta\right)\mathrm{d}\Omega\\
\sigma_{\mathrm{sd}} &= \frac{8\pi\omega^4 a^6}{3c^4}\left(\frac{\epsilon-1}{\epsilon+2}\right)^2; \qquad \rho_{\mathrm{d}} = \cos^2\theta
\end{aligned}$$

For a perfectly conducting sphere

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{scond}} &= \frac{\omega^4 a^6}{8c^4}\left[5\left(1+\cos^2\theta\right)-8\cos\theta\right]\mathrm{d}\Omega\\
\sigma_{\mathrm{scond}} &= \frac{10\pi\omega^4 a^6}{3c^4}. \quad \rho_{\mathrm{cond}} = \left(\frac{1-2\cos\theta}{2-\cos\theta}\right)^2
\end{aligned}$$

It is clear from the formula for $\mathrm{d}\sigma_{sd}$ that the scattering cross section of a dielectric sphere is symmetric with respect to the forward ($\theta = 0$) and the backward ($\theta = \pi$) directions. Moreover, $\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{sd}}(0)/\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{sd}}(\pi) = 1$. The scattering cross section for a conducting sphere is much more anisotropic and asymmetric: $\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{s\ cond}}\,(0)/\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{s\ cond}}\,(\pi) = \frac{1}{9}$. Light scattered by a dielectric sphere through an angle $\theta = \frac{1}{2}\pi$ will be completely polarised. Scattering by a perfectly conducting sphere results in complete polarisation when $\cos\theta = 0 \cdot 5\,(\theta = 60°)$.

The above formulae for the dielectric sphere are rigorous provided it is possible to neglect effects associated with the finite velocity of propagation of the electromagnetic wave inside the sphere, i.e. when the wavelength inside the sphere is large compared with its radius. For a perfectly conducting sphere, the wave will not propagate inside the sphere, and it is sufficient for the condition $a \ll \lambda$ to be satisfied, where λ is the wavelength in the medium surrounding the sphere.

8.63 Just as in problem 8.60 it is necessary to consider the emission of radiation by the induced electric and magnetic dipoles $\boldsymbol{p}$ and $\boldsymbol{m}$. Consider the system of coordinates illustrated in figure 8.63.1. The vector $\boldsymbol{k}$ of the primary wave lies in the xz plane. Consider two cases of polarisation of the incident wave, namely, (a) E_0 lying in the plane of incidence, i.e. the xz plane, and (b) E_0 normal to the plane of incidence. For (a) the component of the electric field which is parallel to the plane of the disc is given by $E_{0\|} = E_0 \sin\phi$, and the perpendicular component is given by $E_{0\perp} = E_0 \cos\phi$. In this approximation ($a \ll \lambda$), the electric moment p
may be calculated on the assumption that it is the same as the static moment of a conducting disc in a uniform electric field.

According to the solutions of problems 3.69 and 3.71, the longitudinal polarisability of the disc is $\beta_{\mathrm{e}}\| = 4a^3/3\pi$, and the transverse polarisability is $\beta_{\mathrm{e}\perp} = 0$. Hence,

$$p_x = \beta_{\mathrm{e}} E_{0x} = -\frac{4a^3}{3\pi} E_0 \sin\phi$$
$$p_y = p_z = 0$$

The magnetic field will only have a longitudinal component. However, the longitudinal magnetic polarisability of the disc is zero (see problem 7.41), and hence $m = 0$.

The differential scattering cross section is given by

$$\mathrm{d}\sigma_s = \frac{16a^6\omega^4}{9\pi^2c^4} \sin^2\phi \left(1 - \sin^2\vartheta \cos^2\varphi\right) \mathrm{d}\Omega \tag{8.63.1}$$

and the total scattering cross section is given by

$$\sigma_{\mathrm{s}} = \frac{128a^6\omega^4}{27\pi c^4} \sin^2\phi \tag{8.63.2}$$

For condition (b) we have

$$p_y = \frac{4a^3}{3\pi} E_0, \quad p_x = p_z = 0$$
$$m_z = \frac{2a^3}{3\pi} E_0 \cos\phi, \quad m_x = m_y = 0$$
$$\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{s}} = \frac{16a^6\omega^4}{9\pi^2c^4} \left[1 + \sin^2\vartheta \left(\frac{1}{4}\cos^2\phi - \sin^2\varphi\right) + \sin\vartheta \cos\phi \cos\varphi\right] \mathrm{d}\Omega \tag{8.63.3}$$
$$\sigma_{\mathrm{s}} = \frac{128a^6\omega^4}{27\pi c^4} \left(1 + \frac{1}{4}\cos^2\phi\right)$$

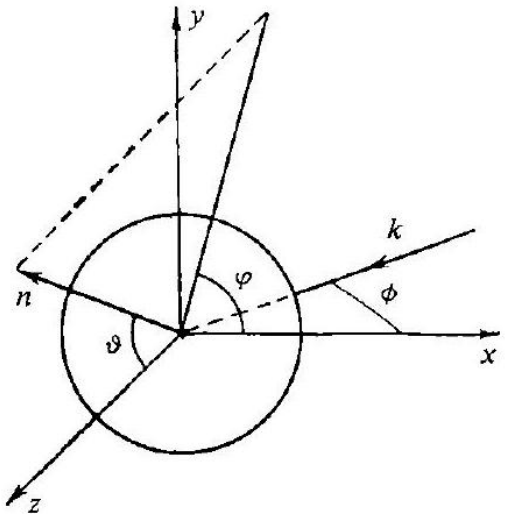


Figure 8.63.1.

For an unpolarised wave, we have from equations (8.63.1), (8.63.2), and (8.63.3)

$$\mathrm{d}\sigma_\mathrm{s} = \frac{8a^6\omega^4}{9\pi^2c^4}\left[1+\sin^2\vartheta\left(1-\frac{1}{4}\cos^2\phi-\cos^2\phi\cos^2\varphi\right)\right.$$
$$\left.+\sin^2\phi+\sin\vartheta\cos\phi\cos\varphi\right]\mathrm{d}\Omega,$$
$$\sigma_\mathrm{s} = \frac{128a^6\omega^4}{27\pi c^4}\left(1-\frac{3}{8}\cos\phi\right).$$

8.64

$$\mathrm{d}\sigma_\mathrm{s} = \frac{a^4h^2\omega^4(\epsilon-1)^2}{18c^4\epsilon^2}\left(1+\cos^2\vartheta\right)\mathrm{d}\Omega$$

where ϑ is the scattering angle, and hence

$$\sigma_\mathrm{s} = \frac{8\pi a^4h^2\omega^4(\epsilon-1)^2}{27c^4\epsilon^2}$$

8.65 Consider the coordinate system shown in figure 8.65.1. The vector k of the primary wave lies in the xz plane. The cylinder may be approximately represented by an elongated ellipsoid of revolution with semiaxes a and h. It follows from the solutions of problems 3.69, 3.70, and 7.41 that the longitudinal component of the electrical polarisability of a very elongated ellipsoid of revolution is larger than its transverse electric and magnetic polarisability by a factor of roughly h/a. Hence, this scattering cross section will be very dependent on whether there is a finite longitudinal component of the electric field in the incident wave. If this component is appreciable, then the secondary radiation will be due

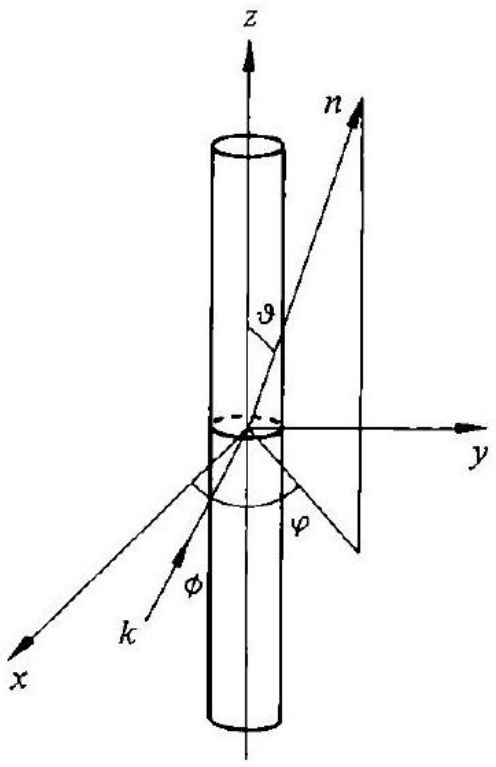


Figure 8.65.1.

to the z-component of the electric dipole moment. The remaining components of the electric moment, and also the magnetic moment, may be neglected. Assuming that E_0 lies in the xz plane, we have

$$\mathrm{d}\sigma_\mathrm{s} = \frac{\omega^4 h^6}{9c^4 \ln^2(h/a)} \sin^2\phi \sin^2\vartheta \, \mathrm{d}\Omega$$
$$\sigma_\mathrm{s} = \frac{8\pi\omega^4 h^6}{27c^4 \ln^2(h/a)} \sin^2\phi$$

If the longitudinal component of $\boldsymbol{E}_0$ is zero, then the scattering is due to the transverse components of the electric moment and the magnetic moment, which have the same order of magnitude. Then,

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\sigma_\mathrm{s} =& \frac{a^4 h^2 \omega^4}{9c^4} \left[(1 + 2n_x \sin\phi)^2 + 3\cos^2\phi + n_z^2\left(4 - \sin^2\phi\right)\right. \\ &\left. + 8n_z \cos\phi + 2n_x n_z \sin 2\phi\right] \mathrm{d}\Omega \\ \sigma_\mathrm{s} =& \frac{40\pi a^4 h^2 \omega^4}{27c^4}\left(1 + \frac{3}{5}\cos^2\phi\right)\end{aligned}$$

where $n_i (i = x, y, z)$ are the components of the unit vector in the direction of scattering. The scattering cross section for an unpolarised wave is given by

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_\mathrm{s}}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{\omega^4 h^6}{18c^4 \ln^2(h/a)} \sin^2\phi \sin^2\vartheta$$
$$\sigma_\mathrm{s} = \frac{4\pi\omega^4 h^6}{27c^4 \ln^2(h/a)} \sin^2\phi$$

8.66 When the vector $\boldsymbol{E}_0$ is polarised in the xz plane (figure 8.65.1),

$$\mathrm{d}\sigma_{s\parallel} = \frac{4\omega^4 a^4 h^2}{9c^4}\left(\frac{\epsilon-1}{\epsilon+1}\right)^2\left[\left(1-n_x^2\right)\cos^2\phi + \frac{1}{4}(\epsilon+1)^2\left(1-n_z^2\right)\sin^2\phi - \frac{1}{2}(\epsilon+1)n_x n_z \sin 2\phi\right]\mathrm{d}\Omega$$

When the vector $\boldsymbol{E}_0$ is polarised at right angles to the xz plane

$$\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{s}\perp} = \frac{4\omega^4 a^4 h^2}{9c^4}\left(\frac{\epsilon-1}{\epsilon+1}\right)^2\left(1-\sin^2\vartheta\sin^2\varphi\right)\mathrm{d}\Omega$$

8.67 The total intensity of the electric field at a general point in space may be written in the form

$$E(r,t) = E_0(r,t) + E'(r,t)$$

where

$$\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{E}_0\exp[\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\circ\boldsymbol{r}) - \mathrm{i}\omega t]$$

represents the incident wave, and $\boldsymbol{E}'(r,t)$ represents the scattered (secondary) radiation. At each point inside the sphere the polarisation vector $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r},t)$ is proportional to $\boldsymbol{E}$ and approximately to $\boldsymbol{E}_0$ since the
scattered field is much smaller than the incident field ($E' \ll |\boldsymbol{E}_0|$) when $(\epsilon-1)/4\pi \ll 1^{(2)}$.

The scattered field $\boldsymbol{E}'$ can be expressed in terms of the Hertz vector [see equation (12.a.13)]

$$Z(r,t) = \int \frac{P\,(r',t)\exp[\mathrm{i}(kR-\omega t)]}{R}\,\mathrm{d}^3 r'$$

through the formula

$$\boldsymbol{E}' = \operatorname{curl}\operatorname{curl} Z - 4\pi\boldsymbol{P} = \operatorname{curl}\operatorname{curl}\boldsymbol{E}_0\frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{r}\int\exp\left(\mathrm{i}[\boldsymbol{k}-k\boldsymbol{n}]\cdot\boldsymbol{r}'\right)\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}'$$

The difference $k-kn$ represents the change in the wavevector on scattering. Let this change be denoted by $\boldsymbol{q}$ where $q = 2k\sin\frac{1}{2}\theta$ and θ is the angle of scattering. In order to evaluate the integral, take the polar axis in the direction of q, when

$$\int\exp\left[\mathrm{i}\,(q\cdot r')\right]r'^2\,\mathrm{d}r'\mathrm{d}\Omega = 4\pi\frac{\sin qa - qa\cos qa}{q^3} \tag{8.67.1}$$

In evaluating the double curl in equation (8.67.1) we retain only terms proportional to $1/r$, so that

$$\operatorname{curlcurl}\boldsymbol{E}_0\frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{r} = k^2\left[\boldsymbol{n}\wedge[\boldsymbol{E}_0\wedge\boldsymbol{n}]\right]\frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{r}$$

Finally, the expression for the scattered field is

$$\boldsymbol{E}' = \frac{1}{3}\frac{\omega^2 a^3}{c^2}\frac{\epsilon-1}{3}\left[n\wedge[\boldsymbol{E}_0\wedge n]\right]\varphi(qa)\frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{r} \tag{8.67.2}$$

where

$$\varphi(qa) = \frac{3(\sin qa - qa\cos qa)}{(qa)^3} = 3\left[\frac{\pi}{(qa)^3}\right]^{1/2}J_{3/2}(qa)$$

Compare the expression given by equation (8.67.2) with the expression which holds for small a (see problem 8.62). If equation (8.67.2) is taken in the limit $qa \ll 1$,

$$\boldsymbol{E}' = \frac{\omega^2 a^3}{c^2}\frac{\epsilon - 1}{3}\left[n \wedge [\boldsymbol{E}_0 \wedge n]\right]\frac{\exp(ikr)}{r} \tag{8.67.3}$$

since $\varphi(qa) \approx 1$ when $qa \ll 1$. On the other hand, if $\boldsymbol{E}'$ is evaluated from the formula

$$\boldsymbol{E}' = [n \wedge [\ddot{\boldsymbol{p}} \wedge n]]\frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{c^2 r}$$

(2) We note that the method involving expansions in powers of a small parameter, which is used in this preceding problem, is analogous to the Born approximation in quantum mechanics. The latter method is widely used in the theory of scattering of particles by quantum mechanical systems.
where

$$p = \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2}a^3 E_0$$

is the static dipole moment of the sphere, we have

$$\boldsymbol{E}' = \frac{\omega^2 a^3}{c^2}\frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 2}\left[n \wedge [\boldsymbol{E}_0 \wedge n]\right]\frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{r} \tag{8.67.4}$$

It is clear that the factor $\frac{1}{3}$ has been replaced by $(\epsilon + 2)^{-1}$. However, this difference between equation (8.67.3) and (8.67.4) is not really significant because equation (8.67.3) is valid only to within a factor $(\epsilon - 1)$.

The differential scattering cross section is

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_s(\theta, \phi)}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{\omega^4 a^6 (\epsilon - 1)^2}{9c^4}\varphi^2(qa)\left(\sin^2\phi + \cos^2\phi\cos^2\theta\right)$$

where the angles θ and ϕ are defined in figure 8.60.1.
This cross section differs from the scattering cross section for a small dielectric sphere (see solution to problem 8.62) by the presence of the new factor $\varphi^2(qa)$ and the fact that the term $(\epsilon + 2)^2$ in the denominator has been replaced by 9 . The new factor, $\varphi^2(qa)$, represents the interference between secondary waves from different elements of the sphere. The degree of depolarisation of the scattered light will therefore be the same as for a small dielectric sphere:

$$\rho = \cos^2\theta$$

Averaging over the polarisations yields

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_\mathrm{s}(\theta)}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{\omega^4 a^6 (\epsilon - 1)^2}{18c^4}\varphi^2(qa)\left(1 + \cos^2\theta\right)$$

Finally, consider a very large sphere ($ka \gg 1$). If the angles are such that $qa \gg 1$, then $\varphi(qa) \to 0$, and the cross section for this range of angles is very small. It follows from the explicit expression for q that $qa \gg 1$ is equivalent to the condition $\theta \gg (ka)^{-1}$. Thus, if the sphere is large, the scattering is mainly in the forward direction, in the angular range $\theta \leqslant (ka)^{-1}$.
8.68 When $ka \gg 1$, the function $\varphi^2(qa)$, which enters into the expression for the differential cross section (see preceding problem), is appreciably different from zero only within the angular range $\theta \leqslant (ka)^{-1}$. In this angular range, the factor $(1 + \cos^2\theta)$ may be regarded as constant and equal to 2. Hence,

$$\sigma_s = \frac{2\pi\omega^4 a^6 (\epsilon - 1)^2}{9c^4}\int_0^\pi \varphi^2(qa)\sin\theta \mathrm{d}\theta$$

Substitute $y = qa = 2ka \sin \frac{1}{2}\theta$. In the limit $ka \gg 1$

$$\sigma_{\mathrm{s}} = \frac{\pi\omega^2 a^4 (\epsilon - 1)^2}{18c^2}$$

For a small sphere ($ka \ll 1$) we can replace $\epsilon + 2$ by 3 (see solution of problem 8.62), so that

$$\sigma_{\mathrm{s}} = \frac{8\pi\omega^4 a^6 (\epsilon - 1)^2}{27c^4}$$

As can be seen from these results, the dependence on the frequency and on the radius of the sphere is different in the two extremes. Thus, the frequency dependence is of the form $\sim \omega^4$ and $\sim \omega^2$, while the dependence on the radius is of the form $\sim a^6$ and $\sim a^4$.

8.69 Consider the result

$$\sigma_{\mathrm{a}} = -\frac{1}{E_0^2} \operatorname{Re} \int ([\boldsymbol{E} \wedge \boldsymbol{H}^*] \cdot \boldsymbol{n})\, r^2 \, \mathrm{d}\Omega \tag{8.69.1}$$

where $n = r/r$ and σ_{a} is the absorption cross section. The integration is carried out over the surface of a large sphere surrounding the scatterer. Equation (8.69.1) expresses the fact that the scattering cross section is proportional to the energy flux through the surface of the sphere in the inward direction. If we substitute the expression for $\boldsymbol{E}$ (as given in the problem) into equation (8.69.1) and the following expression for H

$$H = E_0 \left\{ [n_0 \wedge e] \exp(\mathrm{i}kz) + [\boldsymbol{n} \wedge \boldsymbol{F}(n)] \frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{r} \right\}$$

and remember that

$$(n \cdot F(n)) = 0$$

we have

$$\begin{aligned} \frac{1}{E_0^2} \operatorname{Re} ([\boldsymbol{E} \wedge \boldsymbol{H}^*] \cdot n) = (n_0 \cdot \boldsymbol{n}) + \frac{|\boldsymbol{F}|^2}{r^2} + \frac{1}{2} [(\boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{F}) + (n_0 \cdot n)\,(e \cdot \boldsymbol{F}) \\ - (e \cdot n)\,(n_0 \cdot \boldsymbol{F})] \frac{\exp[ik(r - z)]}{r} \\ + \frac{1}{2} [(e^* \cdot \boldsymbol{F}^*) + (n_0 \cdot n)\,(e^* \cdot \boldsymbol{F}^*) \\ - (e^* \cdot \boldsymbol{n})\,(n_0 \cdot \boldsymbol{F}^*)] \frac{\exp[-\mathrm{i}k(r - z)]}{r} \end{aligned}$$

The integral of the first term over the angles is zero, and the integral of the second term is equal to the total scattering cross section σ_s. The integrals of the remaining components may be transformed by integrating
by parts:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{r} \int (n_0 \cdot n)\,(e \cdot F) \exp[\mathrm{i}k(r - z)] r^2 \, \mathrm{d}\Omega \\ &= \frac{1}{\mathrm{i}k} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \Big[\{(n_0 \cdot n)\,(e \cdot F) \exp[\mathrm{i}kr(1 - \cos\vartheta)]\} \big|_{\vartheta=\pi}^{\vartheta=0} \\ &\quad - \int_0^{\pi} \exp[\mathrm{i}kr(1 - \cos\vartheta)] \frac{\partial}{\partial \cos\vartheta} (n_0 \cdot n)\,(\boldsymbol{e} \cdot \boldsymbol{F}) \mathrm{d}\cos\vartheta \Big] \end{aligned}$$

Repeated integration by parts in the last integral will give terms that are proportional to $1/r$, and may therefore be neglected. Moreover, the term with the oscillating factor exp(2ikr) can also be neglected, since it will not contribute to the total energy flux. In order to show this, we recall that strictly monochromatic waves do not, in fact, exist. In reality, any 'monochromatic' wave is really a superposition of harmonics whose frequencies lie within a more or less narrow interval $\Delta\omega$. Since r is large, the result of averaging the factor exp(2ikr) over any such interval will be zero. It follows that

$$\frac{1}{r}\int (n_0 \cdot n)\,(e \cdot F)\exp[\mathrm{i}k(r-z)]r^2\ \mathrm{d}\Omega = \frac{2\pi\mathrm{i}}{k}\,(e \cdot F\,(n_0))$$

The integrals of the remaining components may be evaluated in a similar way. Terms containing the factors $(e \cdot n)$ and $(e^* \cdot n)$ will not contribute to the final result in view of the fact that $(e \cdot n_0) = 0$. If we substitute the evaluated integrals into equation (8.69.1), we have the following final expression

$$\sigma_\mathrm{t} = \frac{4\pi}{k}\,\mathrm{Im}\,(e \cdot F\,(n_0))$$

The latter result, the so-called optical theorem, admits of a simple physical interpretation. The total cross section is a measure of the attenuation of the primary wave. This attenuation is due to the interference between the incident wave and that part of the scattered wave which has the same polarisation and direction of propagation as the incident wave. It follows that the total cross section depends on the forward scattering amplitude.

8.70 The scattered wave is due to the electric and magnetic dipole moments which are induced by the incident wave. The scattering amplitude $F(n)$ (see preceding problem) can be determined from equations (12.a.17) and (12.a.20).

The final result is

$$\sigma_\mathrm{a} = \frac{4\pi\omega}{c}\,(\beta''_\mathrm{e} + \beta''_\mathrm{m})$$

8.71 $\sigma_\mathrm{a} = 6\pi b^2\zeta$

8.72 The force is in the direction of the wavevector of the incident wave, and is of the form

$$\bar{F} = \frac{\overline{\gamma_0}}{c}\left\{\sigma_\mathrm{a} + \int (1-\cos\vartheta)\left[\frac{\mathrm{d}\sigma_s(\vartheta,\varphi)}{\mathrm{d}\Omega}\right]\mathrm{d}\Omega\right\}$$

where $\overline{\gamma_0}$ is the average energy flux density in the incident wave, and the integration is carried out over the entire solid angle.

8.73 For a perfectly conducting sphere

$$\bar{F} = \frac{43a^6\omega^4}{96c^4}E_0^2$$

For a dielectric sphere

$$\bar{F} = \frac{a^6\omega^4}{3c^4}\left(\frac{\epsilon-1}{\epsilon+2}\right)^2 E_0^2$$

8.74 The diffraction formula (8.c.4) can be used. The plane in which the screen is located can be taken as the plane of integration. It follows that on the surface of integration

$$u = A\frac{\exp(\mathrm{i}kR_1)}{R_1}, \qquad \mathrm{d}^2S_n = 2\pi r\ \mathrm{d}r\cos(R_1,z) = 2\pi\frac{z_1 r}{R_1}\ \mathrm{d}r$$

where A = constant. By substituting these expressions into equation (8.c.4), and transforming to the new variable $\rho = R + R_1$, we have

$$u_{\mathrm{P}}(z) = -\mathrm{i}kAz_1 \int_a^\infty \frac{\exp\left[\mathrm{i}k\left(R+R_1\right)\right]}{RR_1^2} r \, \mathrm{d}r$$
$$= -\mathrm{i}kAz_1 \int_{\rho_0}^\infty \frac{\exp(\mathrm{i}k\rho)}{\rho R_1(\rho)} \mathrm{d}\rho \tag{8.74.1}$$

where

$$\rho_0 = \left(a^2+z^2\right)^{1/2} + \left(a^2+z_1^2\right)^{1/2}$$

Integration by parts may be used to rewrite equation (8.74.1) in the form of a series with increasing negative powers of $k\rho$. Since $\lambda \ll a$, the higher-order terms are negligible, and only the first term need be retained. Hence,

$$u_{\mathrm{P}}(z) = \frac{u_0 z_1 \exp\left[\mathrm{i}k\left(a^2+z^2\right)^{1/2}\right]}{\rho_0}$$

where $u_0 = A\left(a^2+z_1^2\right)^{-1/2} \exp\left[\mathrm{i}k\left(a^2+z_1^2\right)^{1/2}\right]$ is the amplitude of the incident wave at the surface of the screen. Since the intensity is proportional to the square of the amplitude, we have

$$I(z) = I_0 \frac{z_1^2}{\left[\left(a^2+z_1^2\right)^{1/2} + \left(a^2+z^2\right)^{1/2}\right]^2}$$

At a point which is symmetrical with respect to the screen ($z_1 = z$) the intensity is given by

$$I(z) = \frac{1}{4} \frac{I_0 z^2}{a^2+z^2}$$

It follows that a bright axial spot will appear for points which are not too close to the screen. This result, which is in conflict with the hypothesis of the rectilinear propagation of light, was first theoretically predicted by Poisson in 1818. He used it as an argument against Fresnel's theory of diffraction and the wave theory of light as a whole. However, experiments carried out by Arago and Fresnel confirmed the presence of the bright spot which appears as the result of the symmetry of the screen. Waves from the zone which surrounds the periphery of the disc arrive at the axial point in phase. It is clear that all points lying along the axial line will have this property, and at such points the intensity will be much greater than at neighbouring points which do not lie on the z-axis.

8.75 If we use the Babinet principle [see equation (8.c.6)], we have for

$$z = z_1 \gg a$$
$$I = I_0 \sin^2 \frac{ka^2}{2z}$$

where I_0 is the intensity of the primary wave at the aperture.

8.76 When $z \gg a$,

$$I = 4I_0 \sin^2 \frac{ka^2}{4z}$$

The intensity along the axis of the circular aperture oscillates, decreasing to zero for $z \to \infty$. The reduction in the intensity is due to the fact that the parallel incident beam becomes divergent after diffraction at the aperture.

8.77 Using equation (8.c.5) we have, in the case of Fraunhofer diffraction,

$$\mathrm{d}I = I_0 \frac{\left[aJ_1(ak\alpha) - bJ_1(bk\alpha)\right]^2}{\alpha^2}\ \mathrm{d}\Omega$$

where α is the angle of diffraction, and I_0 is the intensity of the incident light. For a circular aperture

$$\mathrm{d}I = I_0' \frac{J_1^2(ak\alpha)}{\pi\alpha^2}\ \mathrm{d}\Omega$$

where $I_0' \approx \pi a^2 \left|u_0\right|^2$ is the total intensity of the radiation incident on the aperture.

8.78 The diffracted wave is given by

$$u_\mathrm{P} = \frac{u_0 \exp\left(\mathrm{i}kR_0\right)}{2\pi\mathrm{i}R_0} \int \exp\left[\mathrm{i}\left(\boldsymbol{q}_\parallel \cdot r\right)\right] \mathrm{d}^2 S_n$$

where $\boldsymbol{k}' - \boldsymbol{k} = \boldsymbol{q}$; $\boldsymbol{q}_\parallel$and $\boldsymbol{q}_\perp$ are respectively the components of $\boldsymbol{q}$ in the plane of the screen and in the perpendicular direction.

It is convenient to use polar coordinates with the origin at the centre of the aperture and the polar axis in the direction of $\boldsymbol{q}_\parallel$. This yields

$$u_\mathrm{P} = \frac{u_0 \exp\left(\mathrm{i}kR_0\right) k\cos\theta}{2\pi\mathrm{i}R_0} \int \exp\left(-\mathrm{i}q_\parallel r\cos\varphi\right) r\ \mathrm{d}r\ \mathrm{d}\varphi$$

where θ is the angle of incidence. Using equations (A3.11), (A3.13), and (A3.9) we have

$$\mathrm{d}I = \left|u_\mathrm{p}\right|^2 R_0^2\ \mathrm{d}\Omega = I_0 \frac{J_1^2\left(q_\parallel a\right)}{\pi q_\parallel^2}\ \mathrm{d}\Omega$$

where $I_0 \sim \left|u_0\right|^2 \pi a^2 \cos\theta$ is the total intensity of the light incident on the aperture.

Assuming that the angle of diffraction α, i.e. the angle between k and $\boldsymbol{k}'$, is small, we have

$$q_\pi = k\alpha\left(1 - \sin^2\theta\cos^2\alpha'\right)^{1/2}, \qquad \mathrm{d}I = I_0 \frac{J_1^2\left(ka\alpha\left[1 - \sin^2\theta\cos^2\alpha'\right]^{1/2}\right)}{\pi\alpha^2\left(1 - \sin^2\theta\cos^2\alpha'\right)}\mathrm{d}\Omega$$

where α' is the azimuthal angle between $\boldsymbol{q}$ and the plane of incidence. The latter formula does not hold at glancing angles $\left(\theta \approx \frac{1}{2}\pi\right)$.

8.79 Application of Kirchhoff's formula in vector form (8.c.7) yields the following expressions for the radiated field

$$E_\vartheta = H_\phi = -\mathrm{i}kabE_0 \frac{\exp(\mathrm{i}kR)}{\pi R}\left(\frac{\sin k_x' a}{k_x' a}\right)\left(\frac{\sin k_y' b}{k_y' b}\right)(1 + \cos\vartheta)\sin\phi$$

$$E_\phi = -H_\vartheta = -\mathrm{i}kabE_0 \frac{\exp(\mathrm{i}kR)}{\pi R}\left(\frac{\sin k_x' a}{k_x' a}\right)\left(\frac{\sin k_y' b}{k_y' b}\right)(1 + \cos\vartheta)\cos\phi$$

where ϑ and ϕ are the polar angles measured from an axis perpendicular to the plane of the aperture; $k_x' = k\sin\vartheta\cos\phi$ and $k_y' = k\sin\vartheta\sin\phi$ are the components of the wavevector of the diffracted wave.

The angular distribution of the radiation is given by

$$\mathrm{d}I = I_0 \frac{abk^2}{4\pi^2} \left(\frac{\sin k'_x a}{k'_x a}\right)^2 \left(\frac{\sin k'_y b}{k'_y b}\right)^2 (1+\cos\vartheta)^2 \,\mathrm{d}\Omega$$

where $I_0 = (cab/2\pi)E_0^2$ is the intensity of the incident wave.

8.80 Let the x-, y-, and z-axes lie in the direction of the vectors $\boldsymbol{E}_0, \boldsymbol{H}_0$, and $\boldsymbol{k}$ respectively. The radiated field will then be given by

$$E_\vartheta = H_\phi = -\frac{1}{2}\mathrm{i}ka^2 E_0 \frac{\exp(\mathrm{i}kR)}{R} \left[\frac{J_1(ka\sin\vartheta)}{ka\sin\vartheta}\right](1+\cos\vartheta)\cos\phi$$

$$E_\phi = -H_\vartheta = \frac{1}{2}\mathrm{i}ka^2 E_0 \frac{\exp(\mathrm{i}kR)}{R} \left[\frac{J_1(ka\sin\vartheta)}{ka\sin\vartheta}\right](1+\cos\vartheta)\sin\phi$$

$$\mathrm{d}I = \frac{1}{4} I_0 \left[\frac{J_1(ka\sin\vartheta)}{\sin\vartheta}\right]^2 (1+\cos\vartheta)^2 \,\mathrm{d}\Omega$$

where $I_0 = (ca^2/8)\,E_0^2$ is the intensity of the incident wave. When $\vartheta \ll 1$, we have

$$\mathrm{d}I = I_0 \frac{J_1^2(ka\vartheta)}{\pi\vartheta^2} \,\mathrm{d}\Omega$$

This result was obtained in the solution of problem 8.77 with the aid of the scalar diffraction formula.

17.8.3 d Coherence and interference

8.83

$$\Delta\Omega = \frac{l_\perp^2}{R^2} \sim \frac{c^2}{v^2 L^2} = \left(\frac{\lambda}{L}\right)^2$$

The solid angle of the coherence is independent of the distance R from the source.

8.84

$$\Delta\lambda \approx 3\cdot 52 \times 10^{-12}\ \mathrm{m}; \quad l_\perp \sim \frac{\lambda R}{L} = 5.4\times 10^{-5}\ \mathrm{m}$$

$$l_\parallel \sim \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda} = 7\cdot 1\times 10^{-2}\ \mathrm{m}; \quad \Delta\Omega \sim 1.3\times 10^{-31}\mathrm{sr}$$

$$\Delta V = l_\perp^2 l_\parallel \sim 2.1\times 10^{-10}\ \mathrm{m}^3$$

8.85 $R = 9.46\times 10^{18}$ km, i.e. larger by a factor 6.3×10^5 than the Earth-Sun distance. Hence it follows that $l_\perp \approx 3.4\times 10$ m, i.e. larger by a factor 6.3×10^5 than $l_\perp$ in the preceding problem. As far as $l_\parallel \approx \lambda^2/\Delta\lambda \approx 7\cdot 1\times 10^{-2}$ m and $\Delta\Omega \approx 1\cdot 3\times 10^{-31}$sr are concerned, they retain the same values as in the preceding problem. The coherence volume $\Delta V \approx 8.3\times 10\ \mathrm{m}^3$ is larger by a factor 4×10^{11} than the coherence volume for the solar radiation on the Earth. The increase in the degree of coherence of light while it propagates is a characteristic feature. This refers only to transverse coherence.

8.86 $l_\parallel \sim \lambda^2/\Delta\lambda \approx 3\times 10^6$ m. As a cone of light with an opening angle $\Delta\vartheta \sim \lambda/D = 10^{-5}$ emerges from the laser the coherence volume close to the laser has the shape of a cone with its vertex at the laser.

$$l_\perp = \begin{cases} D = 5\times 10^{-2}\ \mathrm{m} \text{ at the laser} \\ \frac{2l_\parallel\lambda}{D} \approx 60\ \mathrm{m} \text{ at the base of the coherence cone.} \end{cases}$$

$$\Delta V = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{1}{2} l_{\perp}\right)^2 l_{\parallel} \approx 2.8 \times 10^9 \text{ m}^3$$

8.87

$$\delta = \left[\exp\left(\frac{2\pi\hbar\nu}{kT}\right) - 1\right]^{-1} = \left[\exp\left(\frac{2\pi\hbar c}{\lambda kT}\right) - 1\right]^{-1}$$

with
$\delta \approx \lambda kT/2\pi\hbar c \approx 200$ for $\lambda = 10^{-2}$ m, $T = 273$ K;
$\delta = \exp(-100) \approx 10^{-43}$ for $\lambda = 5 \times 10^{-7}$ m, $T = 273$ K,
$\delta = [\exp(2.73) - 1]^{-1} \approx 0.07$ for $\lambda = 5 \times 10^{-7}$ m, $T = 10000$ K.
8.88 $\delta = 5 \times 10^{18}, \quad T = 1.4 \times 10^{23}$ K.
8.89 $\Gamma(\tau) = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} I(\omega)(1 + \cos\omega\tau)d\omega$.
8.90

$$\Gamma(\tau) = I\frac{\sin\Delta\omega\tau}{2\pi\tau}\cos\omega_0\tau$$

8.91 The path difference for the light from one of the independent emitters which is at the point (x', y') is $s_1 - s_2 \approx (xx' + yy')/R$ (see figure 8.91 .1) if we take into account that the transverse size of the source is much larger than $D = (x^2 + y^2)^{1/2}$. The field at the points $r_1(0,0)$ and $r_2(x,y)$ is produced by all the emitters in the source:

$$u(r_1, t) = \sum_i u_i(t), \quad u(r_2, t) = \sum_i u_i(t) \exp\left[-\frac{\mathrm{i}k(xx_i' + yy_i')}{R}\right]$$

where $u_i(t)$ is the intensity of the field of the i th emitter at the first aperture at time t. The correlation function is

$$\Gamma(r_1, r_2, 0) = \overline{u^*(r_1, t)\, u(r_2, t)} = \sum_i \overline{u_i^*(t) u_i(t)} \exp\left[-\mathrm{i}k(xx_i' + yy_i')/a\right] + \sum_{i \neq j} \overline{u_i^*(t) u_j(t) \exp\left[-\mathrm{i}k\left(xx_j' + yy_j'\right)/R\right]}$$

The second term in Γ arises from the incoherence of the independent emitters. The first term is the averaged intensity of the radiation from the separate emitters where the path difference $s_1 - s_2$ is taken into account. Changing from a sum to an integration we get

$$\gamma(x, y) = \iint I(x', y') \exp\left[-\frac{\mathrm{i}k(xx' + yy')}{R}\right] \mathrm{d}x'\mathrm{d}y' \Big/ \iint I(x', y')\, \mathrm{d}x'\mathrm{d}y'$$

where the integration is over the transverse cross section of the source. 8.92
(a) $B(D) = |\gamma(D, 0)| = \cos\frac{\pi D\alpha}{\lambda}$;
(b) $B(D) = \frac{2\lambda}{\pi D} J_1\left(\frac{\pi\alpha D}{\lambda}\right)$.
8.93
(a) $\rho = \frac{R}{\alpha} = \frac{2DR}{\lambda} = 1.5 \times 10^6$ km;
(b) $d = \frac{R}{\alpha} = \frac{DR}{1 \cdot 22\lambda} = 6.2 \times 10^8$ km;
the diameter of Betelgeuze is approximately 450 times the diameter of the Sun and hence larger than the diameter not only of the Earth's orbit, but also even that of Mars!
8.94 A plane wave $u_1 = A_1 \exp[\mathrm{i}(k_1 \cdot r)] = |A_1| \exp[\mathrm{i}(\boldsymbol{k}_1 \cdot r) + \alpha_1]$ with phase α_1 and amplitude A_1, which both vary randomly such that $\overline{A_1} = 0$, while $\overline{|A_1|^2}$ has a constant nonvanishing value, comes from the first source. A wave $u_2 = A_2 \exp[\mathrm{i}(k_2 \cdot r)]$ with similar properties comes from

the second source. Both these waves enter the photoelements P_1 and P_2. The nonaveraged signal from the photoelement P_1 would be proportional to

$$I(r_1,t) = |u_1(r_1,t) + u_2(r_1,t)|^2 = |A_1|^2 + |A_2|^2 + A_1A_2^* \exp\{\mathrm{i}([k_1 - \boldsymbol{k}_2]\cdot r)\} + A_1^*A_2 \exp\{-\mathrm{i}([k_1 - \boldsymbol{k}_2]\cdot r)\} \tag{8.94.1}$$

The signal (8.94 .1) is subject to random fluctuations owing to the fluctuations of the phases of A_1 and A_2 at frequencies much lower than the frequency of the waves u_1, u_2 coming from the sources. These fluctuations are, nevertheless, not registered and an averaged intensity is observed. When only one of the detectors is included the averaged intensity is

$$I(r_1,t) = |A_1|^2 + |A_2|^2 = I(r_2,t)$$

which is independent of $\boldsymbol{k}_1 - \boldsymbol{k}_2$ (the phases of A_1 and A_2 fluctuate independently so that $\overline{A_1A_2^*} = \overline{A_1^*A_2} = 0$).

Now let the signals from the photoelements P_1 and P_2 from the beginning enter the multiplier in which the intensities $I(r_1,t)$ and $I(r_2,t)$ are multiplied before registration. The signal observed as a result will be proportional to

$$I(r_1,t)\,I(r_2,t) = \left(|A_1|^2 + |A_2|^2\right)^2 + 2|A_1|^2|A_2|^2\cos\{([k_1 - k_2]\cdot[r_1 - r_2])\}$$

It depends on $\boldsymbol{k_1} - \boldsymbol{k}_2$ and, hence, on the angular distance between separated sources. If the distance $r_1 - r_2$ between the detectors is changed and the weakening and strengthening of the signal are observed, one can determine this angular distance.

8.95

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi(n-1)x}{\lambda}$$

where the coordinate x is reckoned from the refracting edge perpendicular to it.

If by any means whatever there is a phase shift given by $\Delta\varphi \propto x$ in the xy-plane, such a plane will turn the front of a plane wave in the direction of increasing x, i.e. it will operate just like a prism.

8.96 The phase shift at a distance x from the axis of the lens is, in the case of a converging lens,

$$\Delta\varphi = -\frac{\pi x^2}{\lambda f}$$

where f is the focal distance determined by the equation

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

In the case of a diverging lens

$$\Delta\varphi = +\frac{\pi x^2}{\lambda f}$$

8.97 The intensity distribution of the light on the photographic plate is

$$I(x) = |A_1\exp(\mathrm{i}kx\vartheta_1) + A_2\exp(\mathrm{i}kx\vartheta_2)|^2 = I_1 + I_2 + 2(I_1I_2)^{1/2}\cos(kx\vartheta)$$

where $\vartheta_2 = \vartheta + \vartheta_1, k = 2\pi/\lambda, I_1 = |A_1|^2, I_2 = |A_2|^2$ and the coordinate x is measured along the photographic plate as shown in figure 8.97.1. The blackening distribution on the developed

photographic plate is determined by the intensity distribution $I(x)$. The transmissivity $T(x)$ is proportional to $[I(x)]^{-\frac{1}{2}\gamma}$, where γ is the gamma of the photographic emulsion, and is a periodic function of x with period λ/ϑ. It can be written in the form $T(x) = a + b\cos(kx\vartheta)$ (a and b are constants) if we retain only the two lowest harmonics. We can consider the developed plate to be a diffraction grating that splits the incident plane wave into plane beams with propagation directions θ which are determined by the relation $(\lambda/\vartheta)\sin\theta = n\lambda, n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ The main beams are the central, zeroth order one and the two first order beams in the directions $\theta = \pm\vartheta$. We note that these three basic beams can be obtained by multiplying the incident wave $A_0\exp(\mathrm{i}kz)$ by the transmissivity $T(x)$. We then get a wave field behind the photographic plate of the form

$$A_0 a\exp(\mathrm{i}kz) + \frac{1}{2}A_0 b\exp[\mathrm{i}k(z + x\vartheta)] + \frac{1}{2}A_0 b\exp[\mathrm{i}k(z - x\vartheta)]$$

where the first term describes the undeflected central beam, the second the first order beam deflected by $+\vartheta$, and the third the first order beam deflected by $-\vartheta$.

8.98 The reference field at the plate has the form

$$u_1 = A_0\exp(-\mathrm{i}\beta x), \quad \beta = \frac{2\pi(n-1)\alpha}{\lambda}$$

We shall omit here, and in what follows, the common factor $\exp(\mathrm{i}kz - \mathrm{i}\omega t)$. The field diffracted by the aperture is:

$$u_2 = A(x)\exp\left(\frac{\mathrm{i}\pi x^2}{\lambda f}\right)$$

The total field is

$$u(x) = u_1 + u_2$$

and the intensity

$$I(x) = |u(x)|^2 = A_0^2 + A^2(x) + 2A_0A(x)\cos\left(\beta x + \frac{\pi x^2}{\lambda f}\right)$$

The intensity distribution contains some information about the phase of the diffracted wave thanks only to the presence of the reference beam.

8.99 The transmissivity $T(x)$ of the developed photographic emulsion is

$$\begin{aligned} T(x) \propto [I(x)]^{-\frac{1}{2}\gamma} &= A_0^{-\gamma}\left[1 + \frac{A^2(x)}{A_0^2} + 2\frac{A(x)}{A_0}\cos\left(\beta x + \frac{\pi x^2}{\lambda f}\right)\right]^{-\frac{1}{2}\gamma} \\ &\approx A_0^{-\gamma-2}\left[A_0^2 - \frac{1}{2}\gamma A^2(x) - \gamma A_0 A(x)\cos\left(\beta x + \frac{\pi x^2}{\lambda f}\right)\right] \end{aligned}$$

if we use the condition $A_0 \gg A(x)$. We can rewrite the last equation in the form

$$\begin{aligned} T(x) \propto 2A_0^2 - \gamma A^2(x) - \gamma A_0 A(x)\exp\left[\mathrm{i}\left(\beta x + \frac{\pi x^2}{\lambda f}\right)\right] \\ -\gamma A_0 A(x)\exp\left[-\mathrm{i}\left(\beta x + \frac{\pi x^2}{\lambda f}\right)\right] \end{aligned} \tag{8.99.1}$$

This is called Gabor's hologram equation.

When the hologram is illuminated by a plane monochromatic light wave $A_0\exp[\mathrm{i}(kz - \omega t)]$ a wave field appears behind the hologram which is the result of diffraction by the hologram. This field can be obtained simply

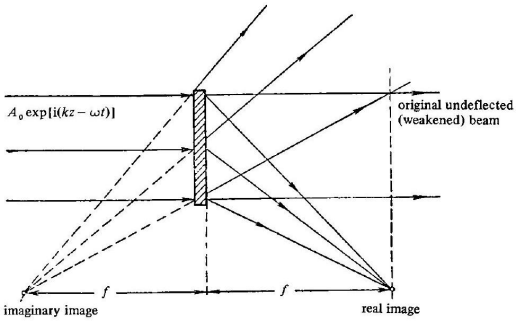


Figure 8.99.1.

(see problem 8.97) by multiplying the original wave field $A_0' \exp[i(kz - \omega t)]$ by the transmissivity $T(x)$ given by Gabor's formula (8.99.1). We then get a field of the form

$$\begin{aligned} u \sim & \left[2A_0^2 - \gamma A^2(x)\right] \exp(\mathrm{i}kz - \mathrm{i}\omega t) \\ & - \gamma A_0 A(x) \exp(\mathrm{i}kz - \mathrm{i}\omega t) \exp\left(\mathrm{i}\beta x - \mathrm{i}\frac{\pi x^2}{\lambda f}\right) \\ & - \gamma A_0 A(x) \exp(\mathrm{i}kz - \mathrm{i}\omega t) \exp\left(-\mathrm{i}\beta x - \mathrm{i}\frac{\pi x^2}{\lambda f}\right) \end{aligned} \tag{8.99.2}$$

The first term in equation (8.99.2) corresponds to the nonuniform diffraction [due to $A^2(x)$] weakening of the incident wave. The angle of diffraction is small since $A(x)$ is a smoothly varying function as compared to the exponentials. The second term acts as a combination of a prism which deflects the beams upwards and a diverging lens with a focusing length f (see problems 8.95 and 8.96). The third term behaves as a combination of a prism which deflects the beams downwards and a converging lens. Finally, when a plane monochromatic wave is transmitted through the hologram the original wave fronts are established (figure 8.99.1): the plane wave and the spherical front from the aperture. The latter is reconstructed twice: in the form of a wave from the real image and a wave from the imaginary image.

8.100

$$\begin{aligned} & \exp(\mathrm{i}k'z)\, T(x) \propto \left[2A_0^2 - 2\gamma A^2 \left(1 + \cos\frac{4\pi D x}{\lambda f}\right)\right] \exp(\mathrm{i}k'z) \\ & - \gamma A_0 A \left\{\exp\left[\frac{\mathrm{i}\pi(x-D)^2}{\lambda f}\right] + \exp\left[\frac{\mathrm{i}\pi(x+D)^2}{\lambda f}\right]\right\} \exp(\mathrm{i}\beta x + \mathrm{i}k'z) \\ & - \gamma A_0 A \left\{\exp\left[-\frac{\mathrm{i}\pi(x-D)^2}{\lambda f}\right] + \exp\left[-\frac{\mathrm{i}\pi(x+D)^2}{\lambda f}\right]\right\} \exp(-\mathrm{i}\beta x + \mathrm{i}k'z) \end{aligned}$$

The second and third terms, as in the preceding problem, describe the field deflected upwards and downwards and focused in two pairs of points. However, the focusing lengths of the corresponding diverging and converging lenses are different, namely

$$f' = \frac{\lambda}{\lambda'} f$$

The linear magnification is given by the formula

$$\frac{2\Delta}{2D} = \frac{p+q}{p} = \frac{\lambda'}{\lambda}\frac{q}{f}$$

where

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{f'}=\frac{\lambda'}{\lambda f}$$

p is the distance of the source of wavelength λ' from the hologram and q the distance of the image from the hologram (figure 8.100.1). To achieve amplification we must use a wavelength $\lambda' > \lambda$, for the reconstruction, and place the source at a finite distance p from the hologram.

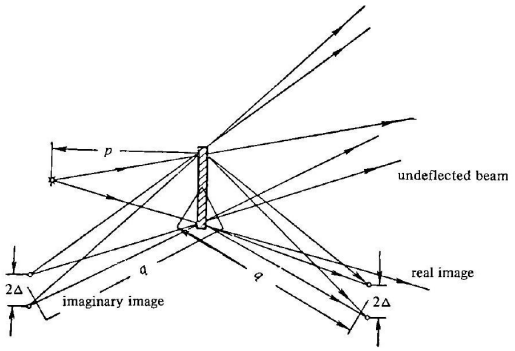


Figure 8.100.1.

8.101 The intensity distribution on the hologram can be transferred without important distortions if the spatial period of the diffraction picture is larger than d,

$$\frac{1}{|\beta+\pi x/\lambda f|}\geqslant d$$

(see the solution of problem 8.98). The maximum size of the hologram in the x-direction, $2x_{\max}\approx 2\lambda f/d$, is restricted by this condition. This size plays the role of the lens diameter in the Rayleigh theory of resolving power (cf problem 8.28). If we apply the Rayleigh criterion for the minimum size s of an object which can be resolved we get

$$s\approx\frac{\lambda}{2\vartheta}\approx\frac{\lambda f}{2x_{\max}}\approx\frac{1}{2}d$$

Here ϑ is half the opening angle of the cone of light going from the hologram to the image.

17.8.4 e X-ray diffraction

8.102 It is necessary that the inequality $\omega\gg\omega_{\text{at}}$ is satisfied. However, this is not sufficient. Let us first of all consider the case when the coherence length l is large compared with the dimensions L of the body. For sufficiently small scattering angles $\vartheta<\lambda/L$ the product $qL\ll 1$ and the exponentials in formulae (8.e.2) or (8.e.4) for the cross sections are close to unity: $\int n\exp[\mathrm{i}(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r})]\mathrm{d}^3r=NZ$. If the wavelength $\lambda\geqslant L$, this is satisfied for any angle. We then get, e.g. from equation (8.e.2)

$$\mathrm{d}\sigma=r_0^2N^2Z^2\sin^2\theta\ \mathrm{d}\Omega \tag{8.102.1}$$

This formula corresponds to the coherent Thomson scattering by all NZ charges in the body. If, however, to take an example, the coherence length is less than the interatomic distance but larger than the size of an atom, when $\vartheta<\lambda/l$ one can add coherently only the contributions from the Z electrons of an atom, and in equation (8.102.1) one must replace N^2Z^2 by NZ^2. For large values of the angle the magnitude of the cross section decreases steeply because of the fast oscillating factor $\exp[\mathrm{i}(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r})]$ in the integrand.

8.103 We can write the electron density in the gas as a sum of terms referring to separate atoms,

$n(r) = \sum_{a=1}^{N} n_{\text{at}}(r - R_a)$, where a characterises the instantaneous position of the ath atom. We have then

$$\left| \int n(\boldsymbol{r}) \exp[\mathrm{i}(\boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{r})] \mathrm{d}^3 r \right|^2 = \left| \sum_a \exp\left[\mathrm{i}\left(\boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{R}_a\right)\right] \int n_{\text{at}}\left(\boldsymbol{r}'\right) \exp\left[\mathrm{i}\left(\boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{r}'\right)\right] \mathrm{d}^3 \boldsymbol{r}' \right|^2$$

$$= \left|F_{\text{at}}(\boldsymbol{q})\right|^2 \left| \sum_a \exp\left[\mathrm{i}\left(\boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{R}_a\right)\right] \right|^2 \tag{8.103:1}$$

where $r' = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{R}_a$, and $F_{\text{at}}(\boldsymbol{q})$ is the atomic formfactor (8.e.6). The averaging in equation (8.103.1) must be over all positions $\boldsymbol{R}_a$. Since the atoms in a gas are distributed randomly we have

$$\overline{\left| \sum_a \exp\left[\mathrm{i}\left(\boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{R}_a\right)\right] \right|^2} = N$$

Altogether, for unpolarised radiation we have

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{2} r_0^2 \left(1 + \cos^2 \vartheta\right) \left|F_{\text{at}}(q)\right|^2 \, \mathrm{d}\Omega \tag{8.103.2}$$

For the density $n_{\text{at}}(r)$ given in the problem the evaluation of the formfactor is elementary and we get

$$F_{\text{at}}(q) = \frac{8\pi}{a\left(a^{-2} + q^2\right)^2}$$

Finally

$$\mathrm{do}(\vartheta) = 32\pi^2 \frac{r_0^2}{a^2} n_{0\ \text{at}}\, N \frac{1 + \cos^2 \vartheta}{\left[a^{-2} + (4\pi/\lambda)^2 \sin^2 \frac{1}{2}\vartheta\right]^4} \, \mathrm{d}\Omega$$

From the experimentally observed cross section [equation (8.103.2)] we can obtain the absolute magnitude of the formfactor. To find the electron distribution, in general, we also need to know the phase of the formfactor.

8.104

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{2} N r_0^2 \left(1 + \cos^2 \vartheta\right) \left|F_{\text{at}}(q)\right|^2 2 \left(1 + \frac{\sin qR}{qR}\right) \mathrm{d}\Omega$$

The cross section differs from the cross section for scattering by isolated atoms by the structure factor $2(1 + \sin qR/qR)$, which depends on the relative position of the atoms in a molecule.

8.105

$$\overline{\mathrm{d}\sigma} = N r_0^2 \left(1 + \cos^2 \vartheta\right) \left|F_{\text{at}}(q)\right|^2 \frac{1}{b\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[1 + \frac{\sin q\left(R_0 + x\right)}{q\left(R_0 + x\right)}\right] \exp\left(-\frac{x^2}{b^2}\right) \mathrm{d}x$$

The relative magnitude of $1/q$ and b is important. When $q \gg 1/b$ the fast oscillating term with $\sin\left[q\left(R_0 + x\right)\right]$ will vanish. The thermal motion annihilates the structure effect under

those conditions. When $q \ll 1/b$ the structure factor has the same form $1 + (\sin qR_0)/qR_0$ as for the case of nonmoving nuclei.

8.107 We take the x-, y-, and z-axes along the edges L_1, L_2, and L_3 of the single crystal.

$$\begin{aligned}\int n(r)\exp[\mathrm{i}(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r})]\mathrm{d}^3r &= F_{\mathrm{at}}(\boldsymbol{q})\sum_{R}\exp\mathrm{i}(\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{R}) \\ &= F_{\mathrm{at}}(\boldsymbol{q})\left[\sum_{n_1=0}^{N_1}\exp\left(\mathrm{i}q_x a n_1\right)\right]\left[\sum_{n_2=0}^{N_2}\exp\left(\mathrm{i}q_y a n_2\right)\right]\left[\sum_{n_3=0}^{N_3}\exp\left(\mathrm{i}q_z a n_3\right)\right] \\ &= F_{\mathrm{at}}(\boldsymbol{q})\left[\frac{1-\exp\left(\mathrm{i}q_x a N_1\right)}{1-\exp\left(\mathrm{i}q_x a\right)}\right]\left[\frac{1-\exp\left(\mathrm{i}q_y a N_2\right)}{1-\exp\left(\mathrm{i}q_y a\right)}\right]\left[\frac{1-\exp\left(\mathrm{i}q_z a N_3\right)}{1-\exp\left(\mathrm{i}q_z a\right)}\right]\end{aligned}$$

where $N_1 = L_1/a, N_2 = L_2/a$, and $N_3 = L_3/a$ are the number of elementary cells along the edges L_1, L_2, and L_3; clearly $N = N_1N_2N_3$. Using equation (8.e.4) we get

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\sigma =& \frac{1}{2}r_0^2\left(1+\cos^2\vartheta\right)\left|F_{\mathrm{at}}(q)\right|^2 \\ &\times\left[\frac{\sin^2\left(\frac{1}{2}q_x a N_1\right)}{\sin^2\left(\frac{1}{2}q_x a\right)}\right]\left[\frac{\sin^2\left(\frac{1}{2}q_y a N_2\right)}{\sin^2\left(\frac{1}{2}q_y a\right)}\right]\left[\frac{\sin^2\left(\frac{1}{2}q_z a N_3\right)}{\sin^2\left(\frac{1}{2}q_z a\right)}\right]\mathrm{d}\Omega\end{aligned} \tag{8.107.1}$$

The positions of the main maxima can be obtained from the condition that the denominators vanish, whence it follows that $q_x = 2\pi m_x/a$, $q_y = 2\pi m_y/a, q_z = 2\pi m_z/a$, where m_x, m_y, and m_z are integers. These equations are the von Laue equations written down in the components, since the components of g can be expressed in terms of the equations $g = (m_x/a, m_y/a, m_z/a)$. In the maxima the cross section is

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{2}r_0^2\left(1+\cos^2\vartheta\right)\left|F_{\mathrm{at}}(2\pi g)\right|^2\frac{\left(L_1L_2L_3\right)^2}{a^6}\,\mathrm{d}\Omega$$

It is proportional to the square of the volume of the crystal. The results of problems 8.107 to 8.111 are valid only if the single crystal is completely within the coherence volume (see section d of chapter 8).

8.108

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\sigma = &\frac{1}{2}r_0^2(1+\cos^2\vartheta)\left|F_{\mathrm{at}}(\boldsymbol{q})\right|^2 \\ &\times\frac{\sin^2\left(\frac{1}{2}q_z a N_3\right)}{4\sin^2\left(\frac{1}{2}q_y a\right)\sin^2\left(\frac{1}{2}q_z a\right)}\left[\left\{\frac{\sin\left(\frac{1}{2}q_x a N_1\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}q_x a\right)}-\frac{\sin\left[\frac{1}{2}\left(q_x+q_y\right)a N_1\right]}{\sin\left[\frac{1}{2}\left(q_x+q_y\right)a\right]}\right\}^2\right. \\ &\left.+4\sin^2\left(\frac{1}{2}q_y a N_1\right)\frac{\sin\left(\frac{1}{2}q_x a N_1\right)\sin\left[\frac{1}{2}\left(q_x+q_y\right)a N_1\right]}{\sin\left(\frac{1}{2}q_x a\right)\sin\left[\frac{1}{2}\left(q_x+q_y\right)a\right]}\right]\mathrm{d}\Omega\end{aligned}$$

where $N_1 = L_1/a, N_3 = L_3/a$. The positions of the main maxima are expressed in terms of the von Laue condition: $\boldsymbol{q} = 2\pi g$, where $g = (m_x/a, m_y/a, m_z/a)$. In the maxima the cross section is

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{2}r_0^2\left(1+\cos^2\vartheta\right)\left|F_{\mathrm{at}}(2\pi g)\right|^2\frac{\left(L_1^2L_3\right)^2}{4a^6}\,\mathrm{d}\Omega$$

The angle ϑ is connected with $\boldsymbol{q} = 2\pi g$ through equation (8.e.3).

8.109 When $k \gg 1/a$ the diffraction picture is concentrated in the small angle region since,

according to equation (8.e.3) and the von Laue equation, $k\vartheta = 2\pi g \sim 1/a$ and $\vartheta \sim 1/ak \ll 1$; in that case $q \ll k$.

If we write $\kappa = q - 2\pi g$, in the region of the diffraction spot close to a given main maximum the magnitude of κ is given by $\kappa \ll 2\pi g \ll k$. If we take the square of the equation

$$k = k_0 + 2\pi g + \kappa$$

and note that $k^2 = k_0^2$ and

$$(g \cdot k_0) = -\pi g^2 \tag{8.109.1}$$

we then find that $([k_0 + 2\pi g] \cdot \kappa) + \kappa^2 = 0$, whence it is clear that when $\kappa \ll g$ we have $\kappa \perp k_0 + 2\pi g$, i.e. the extra vector κ is at right angles to the wavevector corresponding to scattering in the direction of the main maximum. The equation $([k_0 + 2\pi g] \cdot \kappa) = 0$ can be written in the form $\kappa_z \approx -2\pi \left[g_x/k_0 \right) \kappa_x + \left(g_y/k_0 \right) \kappa_y]$, from which it is clear that $|\kappa_z| \ll |\kappa_x|, |\kappa_y|$. With the aid of equation (8.109.1) we find that the ratio

$$\frac{\sin^2\left(\frac{1}{2}q_z a N_3\right)}{\sin^2\left(\frac{1}{2}q_z a\right)} = \frac{\sin^2\left(\frac{1}{2}\kappa_z a N_3\right)}{\sin^2\left(\frac{1}{2}\kappa_z a\right)}$$

is an appreciably flatter function of κ_z than the first two ratios, and it can be replaced by its value N_3^2 in the maximum ($\kappa_z = 0$). The cross section becomes ($\vartheta \ll 1$)

$$\mathrm{d}\sigma = 4r_0^2 \left|F_{\mathrm{at}}(2\pi g)\right|^2 N_3^2 \frac{\sin^2\left(\frac{1}{2}\kappa_x a N_1\right)}{\left(\frac{1}{2}\kappa_x a\right)^2} \frac{\sin^2\left(\frac{1}{2}\kappa_y a N_2\right)}{\left(\frac{1}{2}\kappa_y a\right)^2}\, \mathrm{d}\Omega$$

from which it is clear that the angular width of the main maximum is of the order of magnitude of $(kaN_1)^{-1}$ and $(kaN_2)^{-1}$ in the x - and y-directions
respectively. If we write the element of solid angle in the form $\mathrm{d}\Omega = \mathrm{d}\kappa_x\, \mathrm{d}\kappa_y/k^2$ and integrate over κ_x and κ_y from $-\infty$ to $+\infty$ we get

$$\sigma = 4r_0^2 \left|F_{\mathrm{at}}(2\pi g)\right|^2 \left(\frac{\pi}{ak}\right)^2 N_3^2 N_1 N_2$$

The cross section depends in different ways on the longitudinal and transverse dimensions. If these are approximately the same, the total cross section is proportional to $V^{4/3}$, where V is the volume of the body, and the angular width is proportional to $\left(V^{4/3}/V^2\right)^{1/2} = 1/V^{1/3}$.
8.110

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\sigma = {} & 32r_0^2 \left(1 + \cos^2\vartheta\right) \left|F_{\mathrm{at}}(2\pi g)\right|^2 \\ & \times \frac{\sin^2\left(\frac{1}{2}\kappa_x L_x\right)}{\kappa_x^2} \frac{\sin^2\left(\frac{1}{2}\kappa_y L_y\right)}{\kappa_y^2} \frac{\sin^2\left(\frac{1}{2}\kappa_z L_z\right)}{\kappa_z^2}\, \mathrm{d}\Omega\end{aligned}$$

where

$$\kappa_x k_{gx} + \kappa_y k_{gy} + \kappa_z k_{gz} = 0, \quad k_g = k_0 + 2\pi g$$

8.111

$$\mathrm{d}\sigma = 8\pi r_0^2 \left(1 + \cos^2\vartheta\right) \left|F_{\mathrm{at}}(2\pi g)\right|^2 \frac{(\sin\kappa R - \kappa R\cos\kappa R)}{\kappa^6}\, \mathrm{d}\Omega$$

17.9 Electromagnetic oscillations in finite bodies

9.1 For E-waves

$$E_z = E_0 \sin(\kappa_1 x) \sin(\kappa_2 y)$$

where

$$\kappa_1 = \frac{n_1 \pi}{a}, \quad \kappa_2 = \frac{n_2 \pi}{b}, \quad n_1, n_2 = 1, 2, \ldots$$

and the origin is chosen to lie at the corner of the rectangular cross section with lengths a and b along the x - and y-axes respectively.

For H-waves

$$H_z = H_0 \cos(\kappa_1 x) \cos(\kappa_2 y)$$

with the same κ_1, κ_2, but now one of the n_1 and n_2 can take the value zero. It follows that in transverse directions the field is of the standing wave type. The relation between the propagation constant k and ω is of the form

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \pi^2 \left(\frac{n_1^2}{a^2} + \frac{n_2^2}{b^2} \right)$$

The transverse field components may be expressed in terms of E_z, H_z with the aid of Maxwell's equations.

9.2 For E-waves

$$\alpha = \frac{2\zeta' \omega}{ck\kappa^2 ab} \left(\kappa_1^2 b + \kappa_2^2 a \right)$$

where

$$\kappa^2 = \kappa_1^2 + \kappa_2^2, \quad \zeta' = \operatorname{Re} \zeta$$

For H_{n0} waves

$$\alpha = \frac{\zeta' \omega}{ckab} a + \frac{2\kappa^2 b}{k^2 + \kappa^2}$$

For $H_{n_1 n_2}$ $(n_1, n_2 \neq 0)$:

$$\alpha = \frac{2c\kappa^2 \zeta'}{\omega k a b} \left[a + b + \frac{k^2}{\kappa^4} \left(\kappa_1^2 a + \kappa_2^2 b \right) \right]$$

The notation is the same as in the preceding problem.

9.3 E-waves.

(a) Even solutions [$E_x(x) = E_x(-x), H_y(x) = H_y(-x), E_z(x) = -E_z(-x)$]: when $x > a$
$E_z = A \exp(-sx), \quad E_x = \frac{ik}{s} A \exp(-sx), \quad H_y = \frac{i\omega}{sc} A \exp(-sx);$
when $-a \leqslant x \leqslant a$

$$E_z = B \sin \kappa x, \quad E_x = \frac{ik}{\kappa} B \cos \kappa x, \quad H_y = \frac{i\omega\epsilon}{\kappa c} B \cos \kappa x$$

when $x < -a$

$$E_x = -A\exp(sx), \quad E_x = \frac{\mathrm{i}k}{s}A\exp(sx), \quad H_y = \frac{\mathrm{i}\omega}{sc}A\exp(sx)$$

where $A = B\exp(sa)\sin\kappa a$; the remaining components of E and H are zero. The parameters κ and s may be determined from the following equations

$$\begin{aligned}(\kappa a)^2 + (sa)^2 &= \frac{\omega^2 a^2}{c^2}(\epsilon\mu - 1)\\ sa &= \frac{1}{\epsilon}\kappa a\tan\kappa a\end{aligned} \tag{9.3.1}$$

These equations can easily be solved graphically. The possible values of κ and s correspond to the points of intersection of the curves defined by equation (9.3.1) with the circle of radius $r = (\omega a/c)(\epsilon\mu - 1)^{1/2}$ (figure 9.3.1). For given ω, a, ϵ, and μ there are a finite number of points of intersection, i.e. a finite number of types of wave, for which the field distribution is described by the above equations. In particular, when $r < \pi$, there is a single E_{00} wave.

Consider now the propagation constant

$$k = \left(\frac{\omega^2\epsilon\mu}{c^2} - \kappa^2\right)^{1/2} = \left(\frac{\omega^2}{c^2} + s^2\right)^{1/2} \tag{9.3.2}$$

for given parameters of the dielectric layer and given types of wave. It is clear from figure 9.3.1 that for frequencies near the limiting frequency at which the given type of wave appears, the parameter s approaches zero, while k tends to ω/c. At such frequencies the wave has the same propagation constant as it has in vacuo, and the field penetrates to large distances in the layer. The parameter s increases with increasing ω

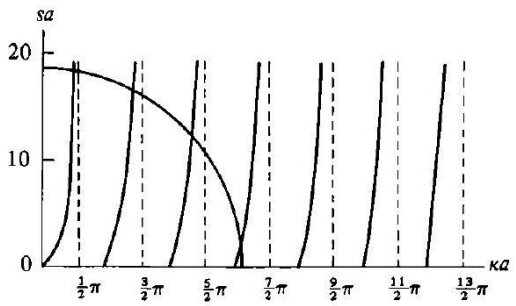


Figure 9.3.1.

while κ remains bounded. At the same time, k tends to $(\omega/c)(\epsilon\mu)^{1/2}$, i.e. to a value which corresponds to a wave propagating in an infinite dielectric medium with parameters ϵ, μ. For sufficiently large ω, and therefore large s, the field is almost entirely concentrated within the dielectric layer.

(b) Odd solutions $[E_x(x) = -E_x(-x), H_y(x) = -H_y(-x), E_z(x) = E_z(-x)]$: when $x > a$

$$E_z = A\exp(-sx), \quad E_x = \frac{\mathrm{i}k}{s}A\exp(-sx), \quad H_y = \frac{\mathrm{i}\omega}{sc}A\exp(-sx)$$

when $-a \leqslant x \leqslant a$

$$E_z = B\cos\kappa x, \quad E_x = -\frac{\mathrm{i}k}{\kappa}B\sin\kappa x, \quad H_y = -\frac{\mathrm{i}\omega\epsilon}{\kappa c}B\sin\kappa x;$$

when $x < -a$

$$E_z = A\exp(sx), \quad E_x = -\frac{ik}{s}A\exp(sx), \quad H_y = -\frac{i\omega}{sc}A\exp(sx)$$

where $A = B\exp(sa)\cos\kappa a$; the remaining components of E and H are zero. The parameters s and κ may be determined from the equations
$(\kappa a)^2 + (sa)^2 = \frac{\omega^2 a^2}{c^2}(\epsilon\mu - 1), \quad sa = -\frac{1}{\epsilon}\kappa a\cot\kappa a.$
The propagation constant k is related to κ and s by equation (9.3.2).
It is easily shown by a graphical method that odd electric waves cannot exist when $r < \frac{1}{2}\pi$. The remaining properties are the same as for even waves.
H-waves may be analysed in a similar way.
9.4 Even E-waves and odd H-waves can propagate along the layer, and their characteristics (propagation constant, field configuration in the region $x > 0$, and so on) are the same as in the preceding problem.

9.5 E-waves.

In order to determine these waves, it is necessary to solve the following equation for the longitudinal component of the electric field:

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial E_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 E_z}{\partial \phi^2} + \kappa^2 E_z = 0$$

This equation can be integrated by the method of separation of variables. Special solutions are of the form

$$E_z(r,\phi) = J_m(\kappa r)\sin(m\phi + \psi_m)$$

where J_m is the Bessel function of order m and ψ_m is an arbitrary constant. In order that the field should return to its original value when ϕ changes by 2π, the quantity m must be an integer ($m = 0, 1, 2, \ldots$).

The transverse components of the electric and magnetic fields can be expressed in terms of E_z with the aid of Maxwell's equations:

$$E_r = \frac{\mathrm{i}k}{\kappa}J'_m(\kappa r)\sin(m\phi+\psi_m), \quad E_\phi = \frac{\mathrm{i}mk}{\kappa^2 r}J_m(\kappa r)\cos(m\phi+\psi_m)$$
$$H_r = -\frac{\mathrm{i}m\omega}{\kappa^2 cr}J_m(\kappa r)\cos(m\phi+\psi_m), \quad H_\phi = \frac{\mathrm{i}\omega}{\kappa c}J'_m(\kappa r)\sin(m\phi+\psi_m)$$

The possible values of κ are determined by the boundary conditions at the waveguide wall:

$$E_r|_{r=a} = 0, \quad E_\phi|_{r=a} = 0$$

This yields $\kappa_{mn}a = \alpha_{mn}$ where α_{mn} is the nth root of the Bessel function: $J_m(\alpha_{mn}) = 0, n = 1, 2, 3, \ldots$

Thus, the above waves are characterised by two subscripts, namely m and n. When $m = 0$ the field exhibits rotation symmetry with respect to the z-axis. For an ideal waveguide, the phases ψ_m are determined by the conditions of excitation. In reality, however, they are very dependent on defects in the waveguide walls (departures from circular cross section, longitudinal cracks, and so on).

The wave propagation along the waveguide is possible when $k = [(\omega/c)^2 - \kappa^2]^{1/2}$ is real. Hence a wave characterised by m, n will propagate in the waveguide, provided its frequency is such that

$$\omega^2 \geqslant \frac{c^2\alpha_{mn}^2}{a^2}$$

The minimum possible frequency for a $(0,1)$ wave is

$$\omega_0 = \frac{c\alpha_{01}}{a} \approx 2 \cdot 4\frac{c}{a}$$

The corresponding wavelength is

$$\lambda_0 = \frac{2\pi c}{\omega_0} \approx 2 \cdot 6a$$

which is of the order of the radius of the waveguide.
The H-waves are

$$H_z = J_m(\kappa r)\sin(m\phi + \psi_m) \quad (m = 0, 1, 2, \ldots)$$

The propagation constant is given by

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\beta_{mn}^2}{a^2} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

where β_{mn} is the nth root of the equation $J'_m(\beta_{mn}) = 0$. The smallest root is $\beta_{11} \approx 1 \cdot 8$, and this corresponds to a limiting frequency $\omega_0 \approx 1 \cdot 8c/a$ and a limiting wavelength $\lambda_0 = 2\pi c/\omega_0 \approx 3 \cdot 5a$.

The limiting frequency is lower for H-waves than for E-waves. When the frequency lies within the limits $\omega_{0,E} > \omega > \omega_{0,H}$ then only H_{11} waves will propagate.
9.6 E-waves:

$$\alpha = \frac{\omega\zeta'}{cak}$$

H-waves of the (m, n) type:

$$\alpha = \frac{c\zeta'\kappa^2}{\omega ak}\left[1 + \frac{m^2\omega^2}{c^2\kappa^2\left(a^2\kappa^2 - m^2\right)}\right]$$

where $\zeta' = \operatorname{Re}\zeta$.
9.7 The wavevector k and the frequency ω of the waves in the waveguide are related by

$$\frac{\omega^2}{c^2} = k^2 + \kappa^2$$

where κ is a constant which depends on the type of waves and the transverse dimensions of the waveguide. Hence

$$v_{\mathrm{ph}} = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{\left[1 - (\lambda/\lambda_0)^2\right]^{1/2}}, \quad v_{\mathrm{g}} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} = c\left[1 - (\lambda/\lambda_0)^2\right]^{1/2}$$

where λ_0 is the limiting wavelength.
It is clear from the above formulae that $v_{\mathrm{ph}} > c, v_{\mathrm{g}} < c$, and $v_{\mathrm{ph}}v_{\mathrm{g}} = c^2$. This result holds for a waveguide in vacuo (the dielectric properties of air may be neglected for the range of phenomena under consideration).

If the waveguide is filled with a dielectric and the dispersion of ϵ and μ may be neglected, then all the above formulae remain valid, provided c is replaced by $v = c/(\epsilon\mu)^{1/2}$. Hence, for this type of waveguide $v_{\mathrm{ph}} = c/(\epsilon\mu)^{1/2}\left[1 - (\lambda/\lambda_0)^2\right]^{1/2}$ may be less than c and the wave is 'slowed down' (see problem 9.13).
9.8 $H_z = \frac{1}{2}H_0\left\{\exp\left[\mathrm{i}\left(\kappa_1 x + kz\right)\right] + \exp\left[\mathrm{i}\left(-\kappa_1 x + kz\right)\right]\right\}\exp(-i\omega t)$.
The directions of propagation of the two plane waves into which H_{10} is resolved are at an angle θ to the axis of the waveguide (figure 9.8.1),

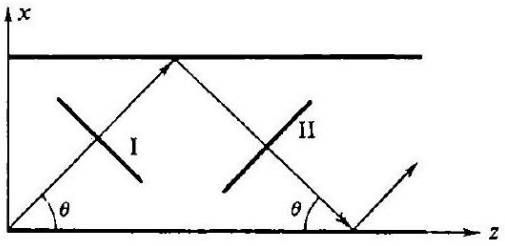


Figure 9.8.1.
where

$$\cos\theta = \frac{k}{(k^2+\kappa_1^2)^{1/2}} = \left[1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_0}\right)^2\right]^{1/2}$$

The phase plane I moves with a velocity c in the direction making an angle θ with the z-axis. However, its velocity along the axis of the waveguide will be larger:

$$v = \frac{c}{\cos\theta} = \frac{c}{\left[1-(\lambda/\lambda_0)^2\right]^{1/2}} = v_{\text{ph}}$$

This is, in fact, the phase velocity of the wave in the waveguide.
The group velocity is equal to the rate of transport of energy. However, for a plane wave propagating in a vacuum, the energy is transported with a velocity c in the direction of propagation of the wave. Each component plane wave of H_{10} will undergo multiple reflections from the walls of the waveguide, and will therefore travel over a zigzag path. The resultant velocity along the axis of the waveguide will then be

$$v = c\cos\theta = c\left[1-\left(\frac{\lambda}{\lambda_0}\right)^2\right]^{1/2}$$

which is equal to the group velocity v_g.

9.9

$$H_\phi = E_r = \frac{A}{r}\exp\left[\mathrm{i}\omega\left(\frac{z}{c}-t\right)\right] \tag{9.9.1}$$

where A is a constant, and the remaining components are all equal to zero.
The energy flux is given by

$$\bar{\gamma} = \frac{A^2 c}{4}\ln\frac{b}{a}$$

For a single perfect conductor, the field outside the conductor is given by equation (9.9.1) and the total energy flux through the $z =$ constant plane is infinite ($\gamma \to \infty$ when $b \to \infty$). It follows that this type of wave cannot be maintained by a source of finite power, and therefore this case is of no physical significance.

9.10 E-waves:

$$E_z = \left[A_{mn}J_m(\kappa_{mn}r) + B_{mn}N_m(\kappa_{mn}r)\right]\sin(m\phi+\psi_m), \quad m = 0,1,2,\ldots$$

where κ_{mn} is the nth root of the equation

$$J_m(\kappa a)N_m(\kappa b) - J_m(\kappa b)N_m(\kappa a) = 0$$

In this expression N_m and J_m are the cylindrical functions (see appendix 3) and A_{mn} and B_{mn} are constants which are related by

$$A_{mn}J_m(\kappa_{mn}a) + B_{mn}N_m(\kappa_{mn}a) = 0$$

H-waves:

$$H_z = [C_{mn}J_m(\kappa_{mn}r) + D_{mn}N_m(\kappa_{mn}r)]\sin(m\phi + \psi_m), \quad m = 0, 1, 2, \ldots$$

where κ_{mn} is the nth root of the equation

$$J'_m(\kappa a)N'_m(\kappa b) - N'_m(\kappa a)J'_m(\kappa b) = 0$$

and C_{mn} and D_{mn} are related by

$$C_{mn}J'_m(\kappa_{mn}a) + D_{mn}N'_m(\kappa_{mn}a) = 0$$

The remaining components of the electric and magnetic fields may be expressed in terms of E_z and H_z by means of Maxwell's equations.

9.11

$$\alpha = \frac{\zeta'(a+b)}{2ab\ln(b/a)}$$

where $\zeta' = \operatorname{Re}\zeta$

9.12 If the field is symmetric with respect to the axis of the conductor, then the longitudinal component E_z will satisfy the following differential equation:

$$\frac{\mathrm{d}^2E_z}{\mathrm{d}r^2} + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}E_z}{\mathrm{d}r} + \kappa^2E_z = 0 \tag{9.12.1}$$

Since the conductor has a finite conductivity the parameters k and κ will be complex. The sign of κ will be defined so that $\operatorname{Im}\kappa = \kappa'' > 0$.

The general solution of equation (9.12.1) may be written in the form

$$E_z(r) = A'H_0^{(1)}(\kappa r) + B'H_0^{(2)}(\kappa r)$$

where $H_0^{(1)}$ and $H_\delta^{(2)}$ are Hankel functions. It follows from the asymptotic behaviour of these functions (see appendix 3) and the condition $\operatorname{Im}\kappa > 0$ that $B' = 0$ since otherwise the field would diverge at infinity. The remaining components of E and H can be expressed in terms of E_z with the aid of Maxwell's equations:

$$E_z = A'H_0^{(1)}(\kappa r), \quad E_r = \frac{ik}{\kappa}A'H_1^{(1)}(\kappa r)$$
$$H_\phi = \frac{\mathrm{i}\omega}{\kappa c}A'H_1^{(1)}(\kappa r) \tag{9.12.2}$$

For sufficiently large κr, the functions $H_0^{(1)}$ and $H_1^{(1)}$ are proportional to $(\kappa r)^{-1/2}\exp(-\kappa'' r)$, and therefore the electromagnetic field is damped out exponentially at large distances from the conductor. The maximum concentration of the field exists near the conductor, and hence the wave is a surface type wave.

The boundary condition

$$E_z = \zeta H_\phi$$

at the surface of the conductor leads to the following characteristic equation for κ:

$$\kappa a \frac{H^{(1)}(\kappa a)}{H_1^{(1)}(\kappa a)} = \mathrm{i}\xi \frac{\omega}{c} a$$

where ζ is the surface impedance of the metal. For a good conductor $|\zeta| \ll 1$, and hence the latter equation can only be satisfied for small κa. If we use the approximate formulae for $H_0^{(1)}$ and $H_1^{(1)}$ (appendix 3) we have

$$(\kappa a)^2 \ln\left(\frac{\gamma \kappa a}{2\mathrm{i}}\right) = \mathrm{i}\zeta \frac{\omega}{c} a, \quad \ln\gamma = 0.5772 \tag{9.12.3}$$

This transcendental equation cannot be solved by a graphical method because it involves complex quantities. It was solved by Sommerfeld, who used an iteration method based on the fact that $\ln \kappa a$ varies much more slowly than κa. Let $(\gamma \kappa a/2\mathrm{i})^2 = u$, $-\mathrm{i}\gamma^2 \omega \zeta a/2c = v$. Equation (9.12.3) can then be written in the form

$$u \ln u = v$$

If an approximate solution u_n (nth order approximation) is known, then a more accurate value $u_{n+1}[(n+1)$ st approximation] may be obtained from the formula

$$u_{n+1} \ln u_n = v$$

In the zero-order approximation $u_0 = v$, and hence

$$u_1 = \frac{v}{\ln v}, \quad u_2 = \frac{v}{\ln(v/\ln v)}, \quad u_3 = \frac{v}{\ln[v/\ln(v/\ln v)]}, \ldots$$

For decimeter waves ($\lambda = 2\pi c/\omega = 3 \times 10^{-1}$ m), which propagate along a copper conductor of radius equal to 1 mm (the conductivity of copper is 5.2×10^{17} s^{-1}), the above method and equations (8.a.9) to (8.a.11) yield

$$u \approx (4 \cdot 2 + 4 \cdot 5i) \times 10^{-8}$$

and hence

$$k = \frac{\omega}{c}\left[1 + (6 \cdot 0 + 6 \cdot 4\mathrm{i}) \times 10^{-5}\right]$$

The phase velocity is given by

$$v_{\mathrm{ph}} = \frac{\omega}{\mathrm{Re}\, k} = \left(1 - 6 \times 10^{-5}\right) c < c$$

and hence the wave is slightly slowed down.
This result can be understood from the following considerations. For a perfect conductor, the transverse electromagnetic wave has phase velocity c
and the field inside the conductor is zero. In the case of a finite conductivity a proportion of the energy will propagate within the conductor, and since the velocity of propagation in the metal is appreciably less than c, it follows that the electromagnetic wave will, on the average, be slowed down. Moreover, damping will appear.

Consider the nature of the field in the limiting case $\zeta \to 0$ (perfect conductor). It follows from equation (9.12.3) that $\kappa \to 0, k \to \omega/c$. Using the expressions for $H_\delta^{(1)}$ and $H_1^{(1)}$ for small arguments of these functions, we have from equation (9.12.2)

$$E_z = \lim_{\kappa\to 0} \frac{2\mathrm{i}A'}{\pi} \ln\left(\frac{\gamma\kappa r}{2\mathrm{i}}\right), \quad E_r = \lim_{\kappa\to 0} \frac{2kA'}{\pi\kappa^2}\frac{1}{r},$$
$$H_\phi = \lim_{\kappa\to 0} \frac{2kA'}{\pi\kappa^2}\frac{1}{r}.$$

Since the field components cannot become infinite, it must be assumed that A' is proportional to κ^2. Let $A' = A\kappa^2/k$, so that

$$E_r = H_\phi = \frac{A}{r}, \quad E_z = 0$$

This is a purely transverse electromagnetic wave propagating with a velocity c.

9.13 The components of the electromagnetic field in the waveguide are given by the following expressions:
when $r \leqslant a$

$$E_z = E_0 J_0(\kappa_1 r), \quad E_r = -\mathrm{i}\frac{k}{\kappa_1} E_0 J_1(\kappa_1 r), \quad H_\phi = -\mathrm{i}\frac{\omega}{c\kappa_1} E_0 J_1(\kappa_1 r)$$

when $a \leqslant r \leqslant b$

$$E_z = AJ_0(\kappa_2 r) + BN_0(\kappa_2 r), \quad E_r = -\mathrm{i}\frac{k}{\kappa_2}\left[AJ_1(\kappa_2 r) + BN_1(\kappa_2 r)\right]$$
$$H_\phi = -\mathrm{i}\frac{\epsilon\omega}{c\kappa_2}\left[AJ_1(\kappa_2 r) + BN_1(\kappa_2 r)\right]$$

where

$$\kappa_1 = \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k^2\right)^{1/2}, \quad \kappa_2 = \left(\frac{\epsilon\omega^2}{c^2} - k^2\right)^{1/2}$$

and E_0, A, and B are constants.
The boundary conditions may be written in the form

$$E_z|_{r=b} = 0, \quad E_z|_{r=a-0} = E_z|_{r=a+0}, \quad H_\phi|_{r=a-0} = H_\phi|_{r=a+0}$$

and the boundary condition for E_ϕ will be satisfied automatically. When the constants A, B, and E_0 are eliminated, we have the following
transcendental equation relating k and ω:

$$\frac{\epsilon\kappa_1}{\kappa_2}\frac{J_0(\kappa_1 a)}{J_1(\kappa_1 a)} = \frac{J_0(\kappa_2 a)N_0(\kappa_2 b) - N_0(\kappa_2 a)J_0(\kappa_2 b)}{J_1(\kappa_2 a)N_0(\kappa_2 b) - N_1(\kappa_2 a)J_0(\kappa_2 b)}$$

This equation can be considerably simplified when $a \ll b$. Consider the wave which has the maximum k. If the waveguide were fully filled with a dielectric ($a = 0$), then the corresponding value of κ_2 would be $\kappa_{02} = \alpha_{01}/b$ where $\alpha_{01} = 2 \cdot 4$, $J_0(\alpha_{01}) = 0$ (see problem 9.5).

We shall seek a solution which is not very different from κ_{02}:

$$\kappa_2 = \kappa_{02} + \kappa_2' = \frac{\alpha_{01}}{b} + \frac{\Delta\alpha}{b}$$

where the order of magnitude of $\Delta\alpha$ is not lower than that of a/b. Assuming that $\alpha_{01}(a/b) \ll 1$, and using the approximate formulae for J_0, N_0, J_1, and N_1 (appendix 3), we have instead of equation (9.13.1)

$$\epsilon\left[(\kappa_2 a)^2 N_0(\kappa_2 b) + \frac{2}{\pi}J_0(\kappa_2 b)\right] = (\kappa_2 a)^2\left[N_0(\kappa_2 b) + \frac{2}{\pi}\ln\frac{2}{\gamma\kappa_2 a}J_0(\kappa_2 b)\right]$$

If we substitute

$$N_0(\kappa_2 b) = N_0(\alpha_{01} + \Delta\alpha) \approx N_0(\alpha_{01}), \quad J_0(\kappa_2 b) = -J_1(\alpha_{10})\Delta\alpha$$

and neglect the small logarithmic term, we have

$$\Delta\alpha = \left(1 - \frac{1}{\epsilon}\right)\frac{\pi\alpha_{01}^2}{4}\frac{N_0(\alpha_{01})}{J_1(\alpha_{01})}\left(\frac{a}{b}\right)^2$$

The phase velocity is then given by

$$v_{\text{ph}} = \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{\left[\epsilon\omega^2/c^2 - \left(\alpha_{01}^2 + 2\alpha_{01}\Delta\alpha\right)/b^2\right]^{1/2}}$$

By substituting $\omega_0 = \alpha_{01}(c/b) \approx 2 \cdot 4(c/b)$ (minimum frequency for a waveguide not containing a dielectric) and using tabulated values for $N_0(\alpha_{01})$ and $J_1(\alpha_{01})$ we have

$$v_{\text{ph}} = c\left\{\epsilon - \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2\left[1 + 3\cdot 7\left(1 - \frac{1}{\epsilon}\right)\frac{a^2}{b^2}\right]\right\}^{-1/2} \tag{9.13.2}$$

When the waveguide is completely filled with the dielectric ($a = 0$), the phase velocity is given by

$$v_{\text{ph}} = c\left[\epsilon - \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2\right]^{-1/2}$$

The limiting frequency of a partially filled waveguide is given by

$$\omega_1 = \frac{\omega_0}{(\epsilon)^{1/2}}\left[1 + 1\cdot 85\left(1 - \frac{1}{\epsilon}\right)\frac{a^2}{b^2}\right]$$

and lies between the limiting frequencies of an empty and fully filled waveguide:

$$\frac{\omega_0}{(\epsilon)^{1/2}} < \omega_1 < \omega_0$$

The phase velocity given by equation (9.13.2) becomes smaller than c at frequencies

$$\omega > \frac{\omega_0}{(\epsilon - 1)^{1/2}}\left[1 + 1\cdot 85\left(1 - \frac{1}{\epsilon}\right)\frac{a^2}{b^2}\right]$$

Thus, a partially or fully-filled waveguide is a retarding system in which the phase velocity of electromagnetic waves may be less than c. An important property of slow waves is the fact that they can effectively interact with charged particle beams. This interaction may be used both for the generation and the amplification of ultra-high frequency electromagnetic oscillations (backward wave oscillator, magnetron) and for the acceleration of particles (linear accelerator).
9.14 The boundary conditions at an anisotropically conducting plane are

$$E_{1x} = E_{2x} = 0, \quad H_{1x} = H_{2x}, \quad E_{1z} = E_{2z}$$

The index 1 corresponds to the region $y > 0$, and the index 2 to the region $y < 0$. The first two equations occur as a consequence of the perfect conductivity of the strips, and the last two express that there is no current in the direction at right angles to the strips. Moreover, $E_y = E_z = 0$ for $x = \pm a$ and all field components must be bounded as $y \to \pm\infty$.

If we solve the Maxwell equations with these boundary conditions we find

$$E_{1x}=0,\quad E_{1y}=-B\exp(-\beta y)\cos\alpha x,\quad E_{1z}=\mathrm{i}B\frac{\beta}{k}\exp(-\beta y)\cos\alpha x$$
$$H_{1x}=B\left(\frac{k_0\epsilon}{k}-\frac{\alpha^2}{k_0k}\right)\exp(-\beta y)\cos\alpha x$$
$$H_{1y}=B\frac{\alpha\beta}{kk_0}\exp(-\beta y)\sin\alpha x,\quad H_{1z}=-\mathrm{i}B\frac{\alpha}{k_0}\exp(-\beta y)\sin\omega x$$

where B is a constant and $k_0=\omega/c$,

$$\alpha=\alpha_m=\frac{1}{2}(2m+1)\pi$$
$$\beta=\beta_m=\left(k^2-k_0^2\epsilon+\alpha_m^2\right)^{1/2},\quad m=0,1,2,\ldots$$

The wavevector can be expressed in terms of ω through the formula

$$k=k_m=\left[\frac{(k_0^2\epsilon/\alpha_m^2-1)\,(1-k_0^2/\alpha_m^2)}{1-(\epsilon+1)k_0^2/\alpha_m^2}\right]^{1/2}$$

For a given m the wave can propagate provided its frequency ω lies within the range

$$\frac{1}{(\epsilon)^{1/2}}\leqslant\frac{\omega}{c\alpha_m}\leqslant\left(\frac{2}{\epsilon+1}\right)^{1/2}$$

k varies then from 0 to ∞.

If $\epsilon=1$ (there is no dielectric) the system becomes a resonator:
oscillations with discrete frequencies $\omega_m=c\alpha_m$ are possible in it. When $\epsilon>1$ the setup considered is a retarding system. The group and phase velocities in it are less than the velocity of light.

9.15 E-waves cannot exist in this instance. The H-waves are given by

$$H_z=\frac{\mathrm{i}E_0c}{\omega\mu}\left(\kappa\cos\kappa x-k\frac{\mu_\mathrm{a}}{\mu_1}\sin\kappa x\right),\quad H_x=\frac{E_0c}{\omega\mu}\left(k\sin\kappa x-\kappa\frac{\mu_\mathrm{a}}{\mu_\perp}\cos\kappa x\right)$$
$$E_z=E_0\sin\kappa x,\quad E_x=E_y=H_y=0$$

where

$$\kappa=\frac{n\pi}{a},\quad k=\left[\frac{\omega^2\epsilon_\sharp\mu}{c^2}-\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2\right]^{1/2},\quad n=1,2,3,\ldots$$
$$\mu=\mu_\perp-\frac{\mu_\mathrm{a}^2}{\mu_\perp}$$

The limiting frequency is $\omega_0^{(n)}=c\kappa_n/\left(\epsilon_\parallel\mu\right)$.

It follows from the above formulae for H_z and H_x that the configuration of the magnetic field for this type of wave depends on the sign of k, i.e. on the direction of propagation of the wave, and on the sign of μ_a, i.e. on the direction of the constant magnetic field. This effect is associated with the gyrotropy of the medium filling the waveguide.

9.16 Maxwell's equations for the complex conjugate amplitudes E_0^*, H_0^* are of the form

$$\operatorname{curl}E_0^*-\mathrm{i}k_0\left[e_z\wedge E_0^*\right]=-\frac{\mathrm{i}\omega}{c}H_0^*,\quad \operatorname{curl}H_0^*-\mathrm{i}k_0\left[e_z\wedge H_0^*\right]=\frac{\mathrm{i}\omega}{c}E_0^*$$

The amplitudes E, H satisfy the equations

$$\operatorname{curl}E+ik\left[e_z\wedge E\right]=\frac{i\omega}{c}\hat{\mu}'H,\quad \operatorname{curl}H+\mathrm{i}k\left[e_z\wedge H\right]=-\frac{\mathrm{i}\omega}{c}\hat{\epsilon}'E$$

where $\hat{\mu}'H, \hat{\epsilon}'E$ are vectors with components $\mu'_{ik}H_k, \epsilon'_{ik}E_k; \mu'_{ik} = \epsilon'_{ik} = \delta_{ik}$ outside the region filled by the dielectric. Inside the region, $\mu'_{ik} = \mu_{ik}$, $\epsilon'_{ik} = \epsilon_{ik}$.

It follows from the equations for curl E_0^* and curl H that

$$H \operatorname{curl} E_0^* - E_0^* \operatorname{curl} H + \mathrm{i}\,(k - k_0)\,[e_z \wedge E_0^*]\,H = -\mathrm{i}\omega\,[(H \cdot H_0^*) - \hat{\epsilon}'\,(E \cdot E_0^*)] \tag{9.16.1}$$

Integrate both parts of this equation over the cross section of the waveguide S. The first two terms may be transformed as follows:

$$\int\limits_S (H \operatorname{curl} E_0^* - E_0^* \operatorname{curl} H)\,\mathrm{d}^2S = \frac{1}{l}\int\limits_V \operatorname{div}\,[E_0^* \wedge H]\,\mathrm{d}^3r$$

The integral on the right-hand side of this expression is evaluated over the volume bounded by the walls of the waveguide and two cross sections at a distance l from each other (the integration is independent of z).

Next, from Gauss' theorem, we have

$$\int \operatorname{div}\,[E_0^* \wedge H]\,\mathrm{d}^3r = \int ([E_0^* \wedge H] \cdot n)\,\mathrm{d}^2S = \int ([\boldsymbol{n} \wedge E_0^*] \cdot H)\,\mathrm{d}^2S$$

On the wall of the waveguide $[n \wedge E_0^*] = 0$ in view of the boundary condition $E_{0\tau} = 0$, while the integrals over the cross sections have opposite signs and cancel out. Hence,

$$\int ([n \wedge E_0^*] \cdot H)\,\mathrm{d}^2S = 0$$

and equation (9.16 .1) gives

$$(k - k_0)\int\limits_S ([E_0^* \wedge H] \cdot e_z)\,\mathrm{d}^2S = -\omega\left[\int\limits_S (H \cdot H_0^*)\,\mathrm{d}^2S - \int\limits_S (E \cdot E_0^*)\,\mathrm{d}^2S - \int\limits_{\Delta S} \Delta\hat{\epsilon}\,(E \cdot E_0^*)\,\mathrm{d}^2S\right] \tag{9.16.2}$$

where $\Delta\hat{\epsilon} = \hat{\epsilon} - \hat{l}$ and ΔS is the cross-sectional area of the region occupied by the dielectric.

Similarly, if we use the equations for curl E and curl H_0^* we have

$$(k - k_0)\int\limits_S ([E \wedge H_0^*] \cdot e_z)\,\mathrm{d}^2S = \frac{\omega}{c}\left[\int\limits_S (H \cdot H_0^*)\,\mathrm{d}^2S - \int\limits_S (E \cdot E_0^*)\,\mathrm{d}^2S + \int\limits_{\Delta S} \Delta\hat{\mu}\,(H \cdot H_0^*)\,\mathrm{d}^2S\right] \tag{9.16.3}$$

where $\Delta\hat{\mu} = \hat{\mu} - \hat{1}$.

By combining equations (9.16.2) and (9.16.3) we obtain the formula given in the problem. This formula represents the exact relation between the change in the propagation constant and the field amplitudes.

However, in the majority of situations the exact solution of the problem of a waveguide partially filled with a dielectric cannot be obtained. The amplitudes of the disturbed field E and H can

only be determined approximately, provided that the transverse dimensions of the region occupied by the dielectric are small. When this is so, the formula for the change in the propagation constant may be used to calculate the value of Δk, which is an important characteristic of the wave propagating in the waveguide. Examples of calculations based on this method are given in the solution of problems 9.17 to 9.19 .

9.17 For a thin plate, the amplitudes of the disturbed fields may be approximately expressed in terms of the undisturbed amplitudes, which for an H_{10} wave are of the form

$$\begin{aligned} H_{0z} &= H_0 \cos \tfrac{\pi x}{a}, \qquad H_{0x} = -\tfrac{ik_0 a}{\pi} H_0 \sin \tfrac{\pi x}{a}, \\ E_{0y} &= \tfrac{i\omega a}{\pi c} H_0 \sin \tfrac{\pi x}{a}, \quad E_{0x} = E_{0z} = H_{0y} = 0. \end{aligned}$$

These expressions may be obtained from the solutions of problem 9.1. Let us now neglect the change in the field amplitudes outside the volume occupied by the plate, and also the variation in the fields within the plate. This is equivalent to neglecting terms of the order of d^2 or higher. The boundary conditions which must be satisfied on the surface of the plate are

$$E_y = E_{0y}, \quad H_z = H_{0z}, \quad \mu_1 H_x - \mathrm{i}\mu_\mathrm{a} H_y = H_{0x}, \quad H_y = H_{0y} = 0$$

where the undisturbed amplitudes on the right-hand side of the equations should be taken at $x = x_1$. These equations define the amplitudes of the disturbed field in the plate.

The integral in the numerator of the expression for Δk (see the preceding problem) is equal to the product of the integrand and the cross-sectional area bd of the plate, since the field is independent of y and the dependence on x is neglected.

The undisturbed amplitudes may be substituted into the integral in the denominator. The final result is

$$\Delta k = \frac{d}{k_0 a} \left\{ \left[\frac{(\epsilon - 1)\omega^2}{c^2} + \left(1 - \frac{1}{\mu_1}\right) k_0^2 \right] \sin^2 \frac{\pi x_1}{a} + \left(\mu_\parallel - 1\right) \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \cos^2 \frac{\pi x_1}{a} \right\}.$$

Since $\mu_\perp$ depends on the magnitude of the constant magnetising field H_0 (see problem 6.35), it follows that Δk will also depend on this field. A change in H_0 gives rise to a change in the phase of the wave. Devices which are based on these phenomena are widely used in electronics for phase transformation.

9.18

$$\Delta k = \frac{\omega d}{4\pi c} \frac{b-a}{ab \ln(b/a)} \left(\epsilon - \frac{1}{\mu_1}\right)$$

9.19

(a) $\Delta k = \frac{\omega d}{4\pi c} \frac{b-a}{ab \ln(b/a)} \left(\epsilon - \frac{1}{\mu_\parallel}\right)$;

(b) $\Delta k = \frac{\omega d}{4\pi c} \frac{b-a}{ab \ln(b/a)} \left(\epsilon - \frac{1}{\mu_\perp}\right)$.

In (a) the change in the propagation constant Δk is practically independent of the magnitude of the constant magnetic field H_0 since $\mu_\parallel \approx 1$ (see problem 6.35). This is explained by the fact that inside the plate the high-frequency magnetic field has the same direction as the constant field, and does not support the precession of the magnetisation vector $\boldsymbol{M}$.

In (b) the high-frequency magnetic field inside the plate is perpendicular to the constant field, $\mu_\perp$ depends on H_0, and this dependence is of the resonance type.

9.20 If we integrate equation (9.0.1) with the boundary conditions (9.0.2) we find

$$\left.\begin{aligned} E_x &= A_1 \cos(k_1 x) \sin(k_2 y) \sin(k_3 z) \\ E_y &= A_2 \sin(k_1 x) \cos(k_2 y) \sin(k_3 z) \\ E_z &= A_3 \sin(k_1 x) \sin(k_2 y) \cos(k_3 z) \end{aligned}\right\} \tag{9.20.1}$$

where the A_i are constants and

$$k_1 = \frac{n_1\pi}{a}, \quad k_2 = \frac{n_2\pi}{b}, \quad k_3 = \frac{n_3\pi}{h}, \quad \omega^2 = c^2\left(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2\right)$$

$n_1, n_2, n_3 = 0, 1, 2, \ldots$, and we have dropped the time factor $\exp(-i\omega t)$.
One can use the Maxwell equations to express the vector H in terms of $\boldsymbol{E}$.

The equation $\operatorname{div} E = 0$ leads to the condition that the waves are transverse, $(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{k}) = 0$, where the vector $\boldsymbol{A} = (A_1, A_2, A_3)$. Hence it follows that oscillations for given $k_x, k_y, k_z \neq 0$ are two-fold degenerate since the vector $\boldsymbol{A}$ can be chosen in the plane perpendicular to $\boldsymbol{k}$ in two independent and arbitrary ways. For each such $\boldsymbol{k}$ we put:

$$A_{k\sigma} = Ae_{k\sigma}, \quad \sigma = 1, 2$$

where $e_{k\sigma}$ is a unit vector such that $(e_{k1}\cdot e_{k2}) = 0$ and $(e_{k\sigma}\cdot k) = 0$, and the constant $A = (32\pi/V)^{1/2}$, where $V = abh$ is the volume of the resonator.

The eigenfunctions are now all mutually orthogonal and normalised:

$$\int (E_{\nu'}\cdot E_\nu)\,\mathrm{d}^3r = 4\pi\delta_{\nu\nu'}$$

By direct integration of equations (9.20.1) one can easily verify that this relation holds. The indices ν, ν' stand for sets of four numbers: n_1, n_2, n_3, and σ.

If one of the components of $\boldsymbol{k}$ vanishes, there is no degeneracy since in that case there is only one constant in the solution (9.20.1).

9.21

$\Delta N = \frac{V}{\pi^2c^3}\omega^2\Delta\omega$.

9.22 The E-waves are

$$E_z = E_0 J_m(\kappa r)\sin(m\phi + \psi_m)\cos kz\exp(-\mathrm{i}\omega t), \quad H_z = 0$$

$$E_r = -\frac{k}{\kappa}E_0 J_m'(\kappa r)\sin(m\phi + \psi_m)\sin kz\exp(-\mathrm{i}\omega t)$$

$$E_\phi = -\frac{mk}{\kappa^2 r}E_0 J_m(\kappa r)\cos(m\phi + \psi_m)\sin kz\exp(-\mathrm{i}\omega t)$$

$$H_r = -\frac{\mathrm{i}m\omega}{\kappa^2 cr}E_0 J_m(\kappa r)\cos(m\phi + \psi_m)\cos kz\exp(-\mathrm{i}\omega t)$$

$$H_\phi = \frac{\mathrm{i}\omega}{\kappa c}E_0 J_m'(\kappa r)\sin(m\phi + \psi_m)\cos kz\exp(-\mathrm{i}\omega t)$$

where $k = l\pi/h, l = 0, 1, 2, \ldots, \kappa_{mn} = \alpha_{mn}/a$, and α_{mn} are the roots of the equation

$$J_m(\alpha_{mn}) = 0, \quad \omega^2 = c^2\left(\kappa_{mn}^2 + k^2\right).$$

The H-waves are

$$H_z = H_0 J_m(\kappa r)\sin(m\phi + \psi_m)\sin kz\exp(-\mathrm{i}\omega t)$$

with $k = l\pi/h, l = 1, 2, \ldots$; the value $l = 0$ is impossible; $\kappa_{mn} = \beta_{mn}/a$ where β_{mn} is a root of the equation $J_m'(\beta_{mn}) = 0; \omega^2 = c^2(\kappa_{mn}^2 + k^2)$. The remaining field components may be expressed in terms of H_z with the aid of Maxwell's equations.

When $m \neq 0$, both E - and H-waves are in general doubly degenerate, since to each eigenfrequency there correspond two eigenfunctions, for example,

$$H_z = H_0 J_m(\kappa r)\sin m\phi\sin kz\exp(-\mathrm{i}\omega t)$$

and

$$H_z = H_0 J_m(\kappa r)\cos m\phi \sin kz \exp(-\mathrm{i}\omega t).$$

9.23 In the quasi-stationary approximation we can consider the given system as an oscillating contour consisting of a capacitor of capacitance $C = R^2/4d$ and an inductive spool which has a self-inductance given by $L = 4\pi b\left[\ln(8b/a) - \frac{7}{4}\right]$. (See problem 5.32 for the calculation of the selfinductance of a given loop.) By making use of Thomson's formula (7.a.3) we find

$$\omega_0 = \frac{c}{(\pi b/d)\left[\ln(8b/a) - \frac{7}{4}\right]^{1/2}}.$$

The quasi-stationary approximation is applicable provided $\lambda_0 = 2\pi c/\omega_0$ is much larger than the dimensions of the system, i.e. $\lambda_0 \gg R, b$.
9.24

$$\omega_0 = \frac{c}{a}\left(\frac{d}{\pi b}\right)^{1/2}$$

9.25 In the quasi-stationary approximation ($\lambda_0 = 2\pi c/\omega_0 \gg a, b$) we assume that the electrical field is completely concentrated between the plates of the capacitor, while the magnetic field is inside the toroidal
cavity. Under those assumptions the resonator is equivalent to a normal oscillating contour consisting of a capacitance and an inductance. The capacitance of the capacitor is $C = (b-a)^2/4d$, and the self-inductance of the torus $L = 4\pi\left[b - (b^2 - a^2)^{1/2}\right]$ (see problem 5.29). The eigenfrequency is

$$\omega_0 = \frac{c}{b-a}\left\{\frac{d}{\pi\left[b - (b^2 - a^2)^{1/2}\right]}\right\}^{1/2}$$

Higher types of oscillations of the resonator considered here cannot be evaluated in the quasi-stationary approximation, since they do not satisfy the condition $\lambda \gg a, b$.
9.26

$$\omega_0 = \frac{2c}{2b-a}\left\{\frac{d}{2\pi h \ln[(2b+a)/(2b-a)]}\right\}^{1/2}$$

9.27 In the coaxial waveguide, which is shorted at one end (at $z = 0$) by the perfectly conducting diaphragm, a standing transverse wave can be realised with field strengths:

$$E_r = \frac{A}{r}\sin\frac{\omega z}{c}\exp(-\mathrm{i}\omega t), \quad H_\phi = -\frac{\mathrm{i}A}{r}\cos\frac{\omega z}{c}\exp(-\mathrm{i}\omega t) \tag{9.27.1}$$

In any plane at right angles to the axis of the waveguide the electrical field distribution is the same as in a cylindrical capacitor and one may assume that it is produced by a potential difference

$$\Delta\varphi = A\ln\frac{b}{a}\sin\frac{\omega z}{c}$$

between the central rod and the outside surface.
This potential difference must be equal to the field strength on the plates of the capacitor which is formed by the end face of the rod and the upper cover of the resonator:

$$\Delta\varphi|_{z=h} = \frac{q}{C} \tag{9.27.2}$$

Here $C = a^2/(4d)$ is the capacitance of the capacitor, and q the charge on one of the plates which can be expressed in terms of the current J which flows along the rod (or the current in the outside surface which has the same magnitude and the opposite direction)

$$J = -\mathrm{i}\omega q$$

If we evaluate the current strength from the known magnetic field (9.27.1) and substitute it, as well as the potential difference, into equation (9.27.2), we find a transcendental equation which determines the eigenfrequency:

$$\cot\frac{\omega h}{c} = \frac{2\pi a^2\omega}{cd}\ln\frac{b}{a}$$

One can easily solve this equation graphically. When $\omega h/c \ll 1$ (which means that $\lambda \gg 2\pi h$ - the quasi-stationary approximation) we find

$$\omega = \frac{c}{[(a^2/4d)\,2h\ln b/a]^{1/2}} = \frac{c}{(LC)^{1/2}},$$

where L is the self-inductance of a section of length h of a coaxial line. In this approximation one can evaluate only one-the lowest-eigenfrequency (cf the solutions of the preceding four problems).

When $d = 0$ (a coaxial waveguide section which is shorted at both ends) we have

$$\omega_m = \frac{\pi c}{h}m, \quad m = 1, 2, \ldots$$

This means that an integral number of half-waves must fit along the length of the resonator: $h = \frac{1}{2}m\lambda_m$.

9.28 The field in the resonator is described by the Maxwell equations (8.a.1) and (8.a.2) with $B = H$ and $D = E$. If we take the scalar product of the first one with $\boldsymbol{H}_\nu$ and of the second one with $\boldsymbol{E}_\nu$ and integrate over the whole of the volume of the resonator we get:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int(\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{H}_\nu)\,\mathrm{d}^3\boldsymbol{r} = -c\int(\boldsymbol{H}_\nu\cdot\operatorname{curl}\boldsymbol{E})\,\mathrm{d}^3\boldsymbol{r} \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}_\nu)\,\mathrm{d}^3\boldsymbol{r} = c\int(\boldsymbol{E}_\nu\cdot\operatorname{curl}\boldsymbol{H})\,\mathrm{d}^3\boldsymbol{r} \end{array}\right\} \tag{9.28.1}$$

If we assume that the eigenfunctions $\boldsymbol{E}_\nu, \boldsymbol{H}_\nu$ are orthonormal, according to equation (9.0.3), we can evaluate the integrals on the left-hand sides of equations (9.28.1):

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int(\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{H}_\nu)\,\mathrm{d}^3\boldsymbol{r} = 4\pi\dot{p}_\nu \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}_\nu)\,\mathrm{d}^3\boldsymbol{r} = 4\pi\dot{q}_\nu \end{array}\right\} \tag{9.28.2}$$

The eigenfunctions $\boldsymbol{E}_\nu, \boldsymbol{H}_\nu$ satisfy the equations

$$\left.\begin{array}{ll} \operatorname{curl}\boldsymbol{E}_\nu = \mathrm{i}k_\nu\boldsymbol{H}_\nu, & \operatorname{curl}\boldsymbol{H}_\nu = -\mathrm{i}k_\nu\boldsymbol{E}_\nu \\ \operatorname{curl}\operatorname{curl}\boldsymbol{E}_\nu = k_\nu^2\boldsymbol{E}_\nu, & \operatorname{curl}\operatorname{curl}\boldsymbol{H}_\nu = k_\nu^2 H_\nu \end{array}\right\} \tag{9.28.3}$$

where the $k_\nu\,(k_1, k_2, k_3)$ are the corresponding eigenwavevectors (they were evaluated in problems 9.20 and 9.22). We can use equations (9.28.3) to transform the integrals on the right-hand sides of equations (9.28.1),

$$\begin{aligned}\operatorname{div}[\boldsymbol{E}\wedge\operatorname{curl}\boldsymbol{E}_\nu] &= (\operatorname{curl}\boldsymbol{E}_\nu\cdot\operatorname{curl}\boldsymbol{E}) - (\boldsymbol{E}\cdot\operatorname{curl}\operatorname{curl}\boldsymbol{E}_\nu) \\ &= \mathrm{i}k_\nu(\boldsymbol{H}_\nu\cdot\operatorname{curl}\boldsymbol{E}) - k_\nu^2(\boldsymbol{E}_\nu\cdot\boldsymbol{E})\end{aligned}$$

whence

$$\int (\boldsymbol{H}_\nu \cdot \operatorname{curl} \boldsymbol{E})\, \mathrm{d}^3\boldsymbol{r} = -\mathrm{i}k_\nu \int (\boldsymbol{E}_\nu \cdot \boldsymbol{E})\, \mathrm{d}^3\boldsymbol{r} + \frac{1}{\mathrm{i}k_\nu} \int \operatorname{div} [\boldsymbol{E} \wedge \operatorname{curl} \boldsymbol{E}_\nu]\, \mathrm{d}^3\boldsymbol{r}$$
$$= -4\pi \mathrm{i}k_\nu q_\nu + \oint (\boldsymbol{H}_\nu \cdot [n \wedge \boldsymbol{E}])\, \mathrm{d}^2 S \tag{9.28.4}$$

where the last integral is taken over the inner surface of the resonator and $\boldsymbol{n}$ is a unit vector directed into the conductor along the normal. However, the field at the wall of the resonator satisfies condition (8.a.i0), which can be written in the form

$$\zeta H_\tau = [n \wedge E] \tag{9.28.5}$$

The eigenfunction H_ν of a resonator with perfect conductivity has only a tangential component on the wall, so that when substituting equation (9.28.5) into the integral in equation (9.28.4) we can replace $\boldsymbol{H}_\tau$ by $\boldsymbol{H}$. As a result, on combining equations (9.28 .1) to (9.28 .5) we get the equation

$$\dot{p}_\nu - \mathrm{i}\omega_\nu q_\nu = -\frac{c\zeta}{4\pi} \oint (H_\nu \cdot H)\, \mathrm{d}^2 S \tag{9.28.6}$$

The second equation can be reduced similarly:

$$\dot{q}_\nu - \mathrm{i}\omega_\nu p_\nu = 0$$

We study the effect of the finite conductivity of the walls on the ν th type of oscillations of the perfect resonator. The perturbed field H must go over into the unperturbed field as $\zeta \to 0$, i.e. in the sum

$$H = \sum_{\nu'} p_{\nu'} H_{\nu'}$$

only the term with $\nu' = \nu$ must remain. Hence, the amplitudes $p_{\nu'}$ with $\nu' \neq \nu$ must be proportional to ζ and substituting them into equation (9.28.6) gives terms of order ζ^2 or higher. If we neglect such terms and replace H in equation (9.28.6) by $p_\nu H_\nu$, we get an equation of the form

$$\dot{p}_\nu - \mathrm{i}\omega_\nu q_\nu = -p_\nu \frac{c\zeta}{4\pi} \oint H_\nu^2\, \mathrm{d}^2 S \tag{9.28.7}$$

If we use equation (9.28.7) to eliminate one of the variables (p_ν), the equation we get for the other one

$$\ddot{q}_\nu + \left(\frac{c\xi}{4\pi} \oint H_\nu^2\, \mathrm{d}^2 S \right) \dot{q}_\nu + \omega_\nu^2 q_\nu = 0 \tag{9.28.8}$$

The quantity within the brackets is complex. Equation (9.28.8) thus describes a harmonic oscillator on which a 'friction force'

$$-\left(\frac{c\zeta'}{4\pi} \oint H_\nu^2\, \mathrm{d}^2 S \right) \dot{q}_\nu$$

acts, where ζ' is the real part of the surface impedance.
On solving the equation we find a complex correction $\Delta\omega_\nu - \mathrm{i}\gamma_\nu$ to the eigenfrequency of the perfect resonator. The losses lead to a damping of the eigenoscillations, with a damping rate

$$\gamma_\nu = \frac{c\zeta'}{8\pi} \oint H_\nu^2\, \mathrm{d}^2 S$$

and to a shift in the eigenfrequencies by an amount

$$\Delta\omega_\nu = \frac{c\zeta''}{8\pi} \oint H_\nu^2 \, \mathrm{d}^2 S$$

where ζ'' is the imaginary part of the surface impedance; the changed eigenfrequency is thus $\widetilde{\omega}_\nu = \omega_\nu + \Delta\omega_\nu$.

The connection between the Q of the resonator and the damping rate is given by formula (9.0.4).

9.29

$$Q_\nu = \frac{\omega_\nu a}{4c\zeta'} = \left(\frac{\pi a^2 \sigma \omega_\nu}{2c^2}\right)^{1/2}$$

The system loses its resonance properties at sufficiently high frequencies when the distance between neighbouring eigenfrequencies becomes comparable with the width of the resonance curve determined by the damping rate $\gamma_\nu = \omega_\nu / 2Q_\nu$. At high frequencies it follows from the results of problem 9.21 that the distance between neighbouring eigenfrequencies is

$$\frac{\Delta\omega}{\Delta N} = \frac{\pi^2 c^3}{a^3} \frac{1}{\omega^2}$$

On equating this quantity to the damping rate γ we find the frequency region for which the system has resonance properties:

$$\omega \leqslant 10^9 \sigma^{1/s} a^{4/5}$$

For $a \approx 10^{-2}$ m and $\sigma = 10^{17}$ s^{-1} we have: $\omega \leqslant 3 \times 10^{12}$ s^{-1}.

9.30 If we expand $\boldsymbol{E}$ and $\boldsymbol{H}$ in terms of the eigenfunctions of a perfect resonator, as was done in problem 9.28, we get for the amplitudes p_v and q_ν the set of equations:

$$\dot{p}_\nu - \mathrm{i}\omega q_\nu + 2\mathrm{i} \sum_{\nu'} \Delta\Omega_{\nu'} j_{\nu'} = 0 \tag{9.30.1}$$

$$\dot{q}_\nu - \mathrm{i}\omega_\nu p_\nu = -\frac{1}{c} j_\nu \exp(-\mathrm{i}\omega t) \tag{9.30.2}$$

where $\Delta\Omega_\nu = \Delta\omega_\nu - \mathrm{i}\gamma_\nu$ is the complex shift in the eigenfrequencies and

$$j_\nu = \int (\boldsymbol{j} \cdot E_\nu) \, \mathrm{d}^3 r$$

We look for the solution of equations (9.30.1) and (9.30.2) in the form

$$p_\nu = p_\nu^0 \exp(-\mathrm{i}\omega t), \quad q_\nu = q_\nu^0 \exp(-\mathrm{i}\omega t)$$

Eliminating the q_ν^0 we get

$$p_\nu^0 \left(\omega^2 - 2\omega\Delta\Omega_\nu - \omega_\nu^2\right) = \frac{\mathrm{i}\omega_\nu}{c} j_\nu + 2\omega \sum_{\nu'}{}' \Delta\Omega_{\nu'} p_{\nu'}^0 \tag{9.30.3}$$

The prime at the summation sign indicates that the term with $\nu' = \nu$ is absent (it has been taken to the other side).

We solve the equation (9.30 .3) by the method of successive approximations. In the zeroth approximation we drop the sum on the right-hand side and obtain

$$p_v^0 = \frac{\mathrm{i}\omega_\nu j_\nu}{c\,(\omega^2 - 2\omega\Delta\Omega_\nu - \omega_\nu^2)} \tag{9.30.4}$$

In the next approximation we get a correction to equation (9.30.4) which is equal to

$$\frac{2\omega}{\omega^2 - 2\omega\Delta\Omega_\nu - \omega_\nu^2} \sum_{\nu'}{}' \Delta\Omega_{\nu'} p_{\nu'}^0$$

It is small if ω is close to ω_ν while all other eigenfrequencies $\omega_{\nu'}$ satisfy the condition $|\omega - \omega_{\nu'}| \gg |\Delta\Omega_{\nu'}|$.

We express the denominator in equation (9.30.4) in terms of the quality factor Q_ν and the changed eigenfrequency $\widetilde{\omega}_\nu = \omega_\nu + \Delta\omega_\nu$. We have

$$\omega\Delta\Omega_\nu = \omega\Delta\omega_\nu - \mathrm{i}\omega\gamma_\nu \approx \omega_\nu\Delta\omega_\nu - \frac{\mathrm{i}\omega\tilde{\omega}_\nu}{2Q_\nu}$$

which is valid near resonance ($|\omega - \omega_\nu| \ll \omega$). Hence

$$p_\nu^0 \approx \frac{\mathrm{i}\omega_\nu j_\nu}{c\,(\omega^2 - \widetilde{\omega}_\nu^2 + \mathrm{i}\omega\widetilde{\omega}_\nu/Q_\nu)}, \quad q_\nu^0 \approx -\frac{\mathrm{i}\omega j_\nu}{c\,(\omega^2 - \widetilde{\omega}_\nu^2 + \mathrm{i}\omega\widetilde{\omega}_\nu/Q_\nu)}$$

The frequency dependence of the field amplitudes has a resonance character. For a given j the field at resonance is larger the higher the Q of the resonator:

$$q_{\nu\mathrm{res}}^0 = p_{\nu\mathrm{res}}^0 = \frac{j_\nu Q_\nu}{c\omega_\nu}$$

It follows also from the formulae obtained here that one must place the conductor with the current in the antinode of the electrical field $\boldsymbol{E}_\nu$ and orient it along $\boldsymbol{E}_\nu$. In that case the quantities j_ν, and hence p_ν^0, q_ν^0, will have their maximum values.

9.31 If the wave field of energy W, which fills the resonator, is reflected once from a mirror, the energy loss is $W(1 - R)$. After a time $\mathrm{d}t$ the
energy loss is

$$\mathrm{d}W = -W(1 - R)\frac{c\ \mathrm{d}t}{L}$$

where $c\ \mathrm{d}t/L$ is the number of reflections. From the definition (9.0.4) of the quality factor we have

$$Q_1 = \frac{\omega W}{-\mathrm{d}W/\mathrm{d}t} = \frac{\omega L}{c(1 - R)}$$

where ω is the frequency of the oscillations considered.

The radiation through the side surface is connected with the fact that a beam of light with a limited extent in the transverse direction cannot be rigorously directed. It necessarily has a transverse wavevector component Δk_1 which can be estimated from the condition $\Delta k_1 D \approx 1$ (see problem 8.26). This leads to the fact that light rays propagating from the one mirror to the other form a slightly diverging beam with opening angle

$$2\theta = \frac{2\Delta k_\perp}{k} = \frac{2c}{D\omega}$$

Part of the beam does not fall on the second mirror (figure 9.31.2) and the energy loss at one reflection is $WL\theta/D$. After a time $\mathrm{d}t$ the losses are

$$\mathrm{d}W = -W\frac{L\theta}{D}\frac{c\ \mathrm{d}t}{L} = -W\frac{c^2}{D^2\omega}\ \mathrm{d}t$$

The Q due to this radiation is

$$Q_2 = \frac{D^2\omega^2}{c^2}$$

If the losses in the mirrors and due to the radiation are small, they are additive. The total Q is then given by the formula

$$\frac{1}{Q} = \frac{1}{Q_1} + \frac{1}{Q_2}$$

For the given parameters we have:

$$Q_1 \approx 4 \times 10^5; \quad Q_2 \approx 4 \times 10^8 \gg Q_1; \quad Q \approx Q_1 \approx 4 \times 10^5$$

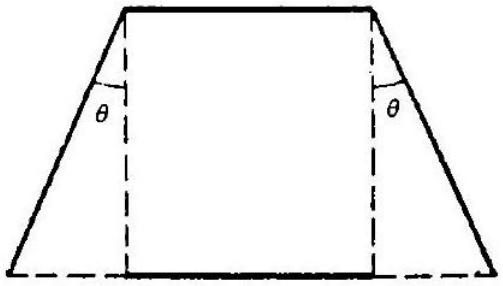


Figure 9.31.2.

9.32 If the beam of light originally propagates along the normal to the plane of one of the mirrors, after the nth reflection the angle between the normal and the beam will be equal to $n\beta$ (figure 9.32.1). After the nth passage between the mirrors the beam is displaced by a distance $n\beta L$; the number of reflections N before the beam leaves the resonator can be estimated from the relation

$$\sum_{n=1}^{N} n\beta L \approx D$$

For $N \gg 1$ we get $N = (2D/\beta L)^{1/2}$, which corresponds to a damping time for the eigenoscillations that is given by

$$\tau = N\frac{L}{c} = \frac{1}{c}\left(\frac{2DL}{\beta}\right)^{1/2}$$

This time can be identified with the reciprocal of the damping rate γ:

$$\gamma = \frac{1}{\tau} = c\left(\frac{\beta}{2DL}\right)^{1/2}$$

The Q due to the mirrors not being parallel is

$$Q_3 = \frac{\omega}{2\gamma} = \frac{\omega}{2c}\left(\frac{2DL}{\beta}\right)^{1/2}$$

In order that the fact that the mirrors are not parallel may not appreciably change the Q of the resonator the condition $Q_3 \leqslant Q$ must be satisfied, where Q is the Q of the resonator with parallel mirrors. Hence

$$\beta \leqslant \frac{\omega^2}{2c^2}\frac{DL}{Q^2}$$

For the parameters given in the preceding problem this leads to

$$\beta \leqslant 0 \cdot 0012$$

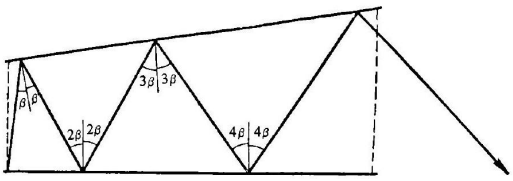


Figure 9.32.1.

9.33 (a) The angle ϑ takes on discrete values given by the formula

$$\frac{L}{\cos\vartheta} = \frac{1}{2}n\lambda$$

where $n \gg 1$ is a positive integer. If, for a given λ, the value $\vartheta = 0$ is possible, which corresponds to $n = n_0 \quad \left(L = \frac{1}{2}n_0\lambda\right)$, the discrete values of the angle $\vartheta_k \ll 1$ are given by the formula

$$\vartheta_k = \left(\frac{k\lambda}{L}\right)^{1/2}$$

(b) We found in problem 9.31 the quality factor Q_1 due to losses in the mirrors. The quality factor Q_2 due to losses through radiation is, as to order of magnitude,

$$Q_2 = \frac{\omega D}{c\vartheta}, \quad \text{when} \quad \vartheta > \theta; \quad Q_2 = \frac{\omega D}{c\theta} = \frac{D^2\omega^2}{c^2}, \quad \text{when} \quad \vartheta < \theta \tag{9.33.1}$$

where θ is the diffraction angle, determined in problem 9.31.

If $Q_1 < Q_{2\,\max}$, the total Q of the resonator, for those kinds of oscillations for which $Q_2(\vartheta) > Q_1$, will be practically the same and close to Q_1. If $Q_1 > Q_{2\max}$, Q will basically be determined by the magnitude of Q_2, in accordance with equation (9.33.1).

17.10 Special theory of relativity

17.10.1 a Lorentz transformations

10.1

$$x - x_0 = \frac{x' - x'_0 + V(t' - t'_0)}{(1-\beta^2)^{1/2}}, \quad y - y_0 = y' - y'_0$$

$$z - z_0 = z' - z'_0, \quad t - t_0 = \frac{t' - t'_0 + (V/c^2)(x' - x'_0)}{(1-\beta^2)^{1/2}}$$

10.4 The coordinates of clocks indicating equal times $t = t'$ in S and S' are

$$x = \frac{c^2}{V}\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)t, \quad x' = -\frac{c^2}{V}\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)t$$

It is clear from these formulae that the point at which $t = t'$ executes a uniform motion in each of the systems. In the system in which this point is at rest, S and S' move in opposite directions with equal velocities $V_0 = (c^2/V)(1 - 1/\gamma)$, where V_0 is the relativistic half of the velocity V in the sense that the relativistic addition of the two velocities V_0 yields V.

10.5 The length of one period in the frame S' is $T' = 2l/c$; in the frame S the time T_1 it takes

the 'spot' to move along the rod in the direction of the relative velocity V can be evaluated from the formula

$$T_1 = \frac{1}{c}\left[l\left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)^{1/2} + VT_1\right]$$

whereas the time T_2 for the motion in the opposite direction is obtained by replacing V by $-V$. For the ratio of T' to $T = T_1 + T_2$ we find

$$\frac{T'}{T} = \left(1-\frac{V^2}{c^2}\right)^{1/2}$$

whence follows equation (10.a.7).

10.7 (a) No. 12 h 00 min can be indicated simultaneously by two clocks in one of the systems and by only one clock in the other system.

(b) The readings of spatially coincident clocks are independent of the choice of the reference frame, so that

$$t_{A'} = 12\text{ h}00\text{ min} + \frac{l_0}{V} = 13\text{ h}00\text{ min}$$

$$t_A = 12\text{ h}00\text{ min} + l_0\frac{(1-V^2/c^2)^{1/2}}{V} = 12\text{ h}36\text{ min}$$

In view of the relativity of simultaneity, the readings of the clocks B and B' will depend on the choice of the reference frame.

For an observer on the 'platform' (figure 10.7.1a)

$$t_{B'} = 12\text{ h}21\cdot 6\text{ min}, \quad t_B = t_A = 12\text{ h}36\text{ min}$$

For an observer on the 'train' (figure 10.7.1b)

$$t_{B'} = t_{A'} = 13\text{ h}00\text{ min}, \quad t_B = 13\text{ h}14\cdot 4\text{ min}$$

(c) For an observer on the 'platform'

$$t_A = 13\text{ h}00\text{ min} = t_B, \quad t_{B'} = 12\text{ h}36\text{ min}, \quad t_{A'} = 13\text{ h}14.4\text{ min}$$

For an observer on the 'train'

$$t_A = 12\text{ h}21.6\text{ min}, \quad t_{A'} = t_{B'} = 12\text{ h}36\text{ min}, \quad t_B = 13\text{ h}00\text{ min}$$

The clocks whose readings are compared with the readings of the two clocks in the other reference frames will always lag behind.

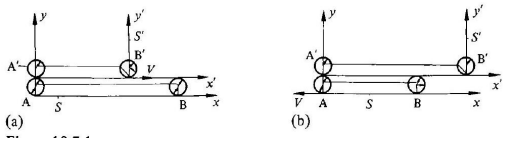


Figure 10.7.1.

10.8 According to the clocks on the earth $\Delta t = 8$ years. In estimating the necessary supplies, a time interval of $\Delta t_0 = 0.01\Delta t \approx 1$ month must be taken (according to clocks on the rocket);

$$T = mc^2(\gamma - 1) \equiv 2.5\times 10^{16}\text{kWh}$$

This amount of energy exceeds the annual world output of electrical energy by a factor of about 10^4.

10.9

$$v = \frac{2l_0\Delta t}{(\Delta t)^2 + l_0^2/c^2}$$

According to the observer moving with the first ruler (figure 10.9.1a), the left-hand ends will pass each other first. For an observer at rest relative to the second ruler (figure 10.9 .1 b), the right-hand ends will meet first. According to an observer relative to whom the two rulers move with equal speeds, the ends will coincide simultaneously.

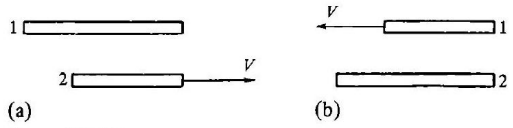


Figure 10.9.1.

10.10 Consider the transverse and longitudinal components of the position vector r:

$$r_\parallel = V\frac{(r\cdot V)}{V^2}, \qquad r'_\parallel = V\frac{(r'\cdot V)}{V^2}$$
$$r_\perp = r - r_\parallel, \quad r'_\perp = r' - r'_\parallel$$

On applying the Lorentz transformation (10.a.1) to $\boldsymbol{r}_\parallel$and $\boldsymbol{r}_\perp$ we have

$$r_\parallel = \gamma\left(r'_\parallel + Vt'\right), \quad r_\perp = r'_\perp$$

Finally,

$$r = \gamma\left(r' + Vt'\right) + (\gamma - 1)\frac{[[r' \wedge V] \wedge V]}{V^2}$$
$$t = \gamma\left[t' + \frac{(r'\cdot V)}{c^2}\right]$$

10.11

$$A = \gamma\left(A' + \frac{V}{c}A'_0\right) + (\gamma - 1)\frac{[[A' \wedge V] \wedge V]}{V^2}$$
$$A_0 = \gamma\left[A'_0 + \frac{(A'\cdot V)}{c^2}\right]$$

10.12

$$v = v_\parallel + v_\perp = \frac{v' + V + (\gamma - 1)\,(V/V^2)\,[(v'\cdot V) + V^2]}{\gamma\,[1 + (v'\cdot V)\,/c^2]}$$

where v and v' are the velocities in the systems S and S'. It is also possible to differentiate with respect to time the radius vector r taken as a function of r' and t' as given by the formula obtained in problem 10.10.

10.16 The angle of the Thomas precession is determined by the relation

$$\varphi = -\arccos\frac{v^2\left(1 - V^2/c^2\right)^{1/2} + V^2\left(1 - v^2/c^2\right)^{1/2}}{V^2 + v^2 - V^2v^2/c^2}$$

In the case where $v, V \ll c$ the angle $\varphi \approx 0$. As $v \to c$, the angle $\varphi \to -\arccos\left(1 - V^2/c^2\right)^{1/2}$; if then also $V \to c$, we have $\varphi \to \frac{1}{2}\pi$.

10.17

$$l = l_0 \frac{1 - v^2/c^2}{1 + v^2/c^2}$$

10.18
(a) $V = 2 \times 0.9c = 1.8c$;
(b) $V = 0.994c$.
10.19 The relative velocity of the two particles in the system in which one of them is at rest is $V = 2v/\left(1 + v^2/c^2\right)$. Hence,

$$\mathfrak{E} = \frac{mc^2}{(1 - V^2/c^2)^{1/2}} = mc^2 \left[2\left(\frac{\mathfrak{E}_0}{mc^2}\right)^2 - 1\right].$$

In the ultrarelativistic case $\varepsilon_0 \gg mc^2$, and hence $\mathfrak{E} = 2\varepsilon_0^2/mc^2$. Suppose that the particles under acceleration are electrons ($mc^2 = 0.5$MeV).
Then for an energy $\varepsilon_0 = 50$MeV, the gain in the power supplied by the accelerator is a factor of 200: $\mathfrak{E} = 10000$MeV.
10.20 This problem is similar to problem 10.12 in that it can be solved in two ways. The result is

$$\dot{v} = \frac{1}{\gamma^2 s^2}\dot{v}' - \frac{(\gamma - 1)(\dot{v}' \cdot V) V}{\gamma^3 s^3 V^2} - \frac{(\dot{v}' \cdot V) v'}{\gamma^2 s^3 c^2}$$

where

$$s = 1 + \frac{(v' \cdot V)}{c^2}$$

It is clear from these formulae that if the particle moves with a constant acceleration $\dot{v}'$ in one system, then the acceleration $\dot{\boldsymbol{v}}$ in another reference system will in general be a function of time (because the variable velocity v' enters into the transformation formulae).
10.21

$$w_i^2 = -\gamma^6 \left\{\dot{v}^2 - \left[\dot{v} \wedge \frac{v}{c}\right]^2\right\} = -\gamma^4 \left[\dot{v}^2 + \gamma^2 v^2 \frac{\dot{v}^2}{c^2}\right] < 0$$

i.e. the 4 -dimensional acceleration is a space-like vector.
10.22 Let S' be the system in which the particle is instantaneously at rest. In accordance with the solution of problem 10.20

$$\dot{v}' = \gamma^2 \left[\dot{v} + \frac{\gamma - 1}{v^2}(\dot{v} \cdot v) v\right]$$

Hence, the square of the acceleration is given by

$$\dot{v}'^2 = \gamma^4 \left[\dot{v}^2 + \frac{\gamma^2 (\dot{v} \cdot v)^2}{c^2}\right] = \gamma^6 \left\{\dot{v}^2 - \left[\dot{v} \wedge \frac{v}{c}\right]^2\right\} \tag{10.22.1}$$

If the velocity of the particle varies in magnitude only, then $\dot{\boldsymbol{v}} \| \boldsymbol{v}$ and

$$\dot{v}' = \gamma^3 \dot{v}$$

If the velocity of the particle varies only in direction, then $v \perp \dot{\boldsymbol{v}}$ and $(v \cdot \dot{v}) = 0$, so that

$$\dot{\boldsymbol{v}}' = \gamma^2 \dot{\boldsymbol{v}}$$

Equation (10.22.1) can also be obtained by another simpler method which involves the use of the expression for the square of the 4-dimensional acceleration which was found in the solution to the preceding problem. The quantity w_i^2 is a 4 -invariant. This means that the evaluation of w_i^2 should yield the same result in S as in S'. Since the velocity of the particle in S' is $v' = 0$, this leads directly to equation (10.22.1).

10.23

$$v(t) = \frac{wt + v_0/\left[1 - (v_0/c)^2\right]^{1/2}}{\left\{1 + \left[(wt)^2/c^2 + (v_0^2/c^2)\,/\,(1 - v_0^2/c^2)\right]^2\right\}^{1/2}}$$

$$x(t) = \frac{c^2}{w}\left\{\left[1 + \left(\frac{wt}{c} + \frac{v_0/c}{1 - v_0^2/c^2}\right)^2\right]^{1/2} - \frac{v_0/c}{1 - v_0^2/c^2}\right\} + x_0$$

In the ultrarelativistic limit:

$$v(t) \approx c, \quad x(t) \approx ct - \frac{c^2}{w}$$

In the nonrelativistic limit:

$$v(t) = v_0 + wt, \quad x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}wt^2$$

10.24 According to clocks in the stationary frame

$$T = \frac{1}{|\dot{v}|}\int_0^V \frac{\mathrm{d}v}{(1 - v^2/c^2)^{3/2}} = \frac{v}{|\dot{v}|\,(1 - v^2/c^2)^{1/2}} = 47 \cdot 5 \text{ years}$$

while according to the clocks at rest in the rocket

$$\tau = \frac{c}{2|\dot{v}|}\ln\left|\frac{1 + v/c}{1 - v/c}\right| = 2 \cdot 5 \text{ years}$$

10.25 Equation (10.25.1) describes a Lorentz transformation with a small relative velocity Δv and a rotation over an angle $\Delta\varphi = |\Delta\varphi|$, where the axis of rotation goes through the origin, parallel to the vector $\Delta\varphi$. As Δv and $\Delta\varphi$ are small, these transformations can be performed in any order. The instantaneously comoving frame is thus a rotating one. This rotation is a purely kinematic relativistic effect and is the so-called Thomas precession (cf problem 10.16).

When $v \ll c$ equation (10.25.2) becomes

$$\Delta v \approx \delta v, \quad \Delta\varphi = \frac{1}{2c^2}[\delta v \wedge v]$$

In that limit one can consider the quantity

$$\omega_{\mathrm{T}} = \frac{\Delta\varphi}{\delta t} = \frac{1}{2c^2}[\dot{v} \wedge v]$$

to be the angular velocity of the Thomas precession of the instantaneously comoving frame relative to the laboratory frame S.

10.26 In S

$$\cos\alpha = \frac{(v_1 \cdot v_2)}{|\boldsymbol{v}_1|\,|v_2|}$$

while in S'

$$\cos\alpha' = \frac{([v_1 - V]\cdot[v_2 - V]) - (1/c^2)([v_1 \wedge V]\cdot[v_2 \wedge V])}{\left\{(v_1 - V)^2 - (1/c^2)[v_1 \wedge V]^2\right\}^{1/2}\left\{(v_2 - V)^2 - (1/c^2)[v_2 \wedge V]^2\right\}^{1/2}}$$

10.27 In S' the angle tends to zero. In order to show this, let $V = V_0 c$, where $|V_0| = 1$. If we use the formula for $\cos\alpha'$ derived in the preceding problem, and the result

$$([a \wedge b]\cdot[a_1 \wedge b_1]) = (a\cdot a_1)(b\cdot b_1) - (a\cdot b_1)(a_1\cdot b)$$

we have

$$\cos\alpha' = \frac{c^2 - (v_1\cdot V) - (v_2\cdot V) + (1/c^2)(v_1\cdot V)(v_2\cdot V)}{\left\{[c - (v_1\cdot V)/c]^2[c - (v_2\cdot V)/c]^2\right\}^{1/2}} = 1$$

and hence $\alpha' = 0$. This contraction of the angular distribution is a specifically relativistic effect which appears in many phenomena.

10.28 The determination of the angle of aberration may be reduced to the determination of the angle α_1 between the direction of the ray AC (figure 10.28 .1) and the direction of the velocity of the Earth, $\boldsymbol{v}$, in its first position, and the angle α_2 between the ray direction BC and the direction of the velocity of the earth, $\boldsymbol{v}'$, in its second position (after six months). The angle of aberration δ is then given by $\delta = (\pi - \alpha_2) - \alpha_1$. The angles α_1 and α_2 may be computed from equation (10.a.15) by expressing them in terms of the angle ϑ which is observed in the reference frame in which the Sun is at rest, and is equal to the angle between the light ray OC and the velocity of the Earth:

$$\tan(\pi - \alpha_1) = \frac{1}{\gamma}\frac{\sin\vartheta}{\cos\vartheta - \beta}, \quad \tan(\pi - \alpha_2) = -\frac{1}{\gamma}\frac{\sin\vartheta}{\cos\vartheta + \beta}$$

where $\beta = v/c$ and $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$. Hence,

$$\tan\frac{1}{2}\delta = \left(\frac{1 - \cos\delta}{1 + \cos\delta}\right)^{1/2} = \beta\gamma\sin\vartheta$$

We note that the three angles in figure 10.28 .1 refer to different reference frames, and the drawing itself is conventional (for example,

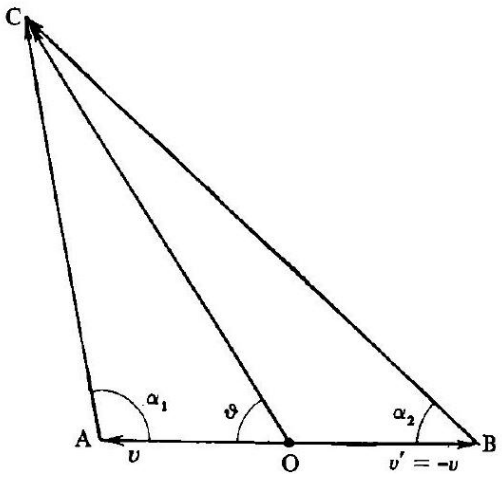


Figure 10.28.1.

AC = CO = CB = c). It is clear from these results that the angle of aberration δ depends only on the relative velocity v of the Earth and the Sun, and is independent of the velocity of the solar system relative to the star.

10.29 If the position of the Earth on the orbit is defined by the azimuth angle φ and $a = (0, a_\vartheta, a_\phi)$ is a vector drawn from the point (ϑ, ϕ) on the celestial sphere to the point of the apparent position of the star on this sphere, then

$$a_\vartheta = -\beta \cos\vartheta \sin(\phi - \varphi), \quad a_\phi = -\beta \cos(\phi - \varphi)$$

It is clear that the apparent position of the star on the celestial sphere will, in the course of a year, describe an ellipse with semi-axes $\beta\cos\vartheta$ and β.
10.30 The beam, which in S lies in the solid angle $\mathrm{d}\Omega = \sin\vartheta \mathrm{d}\vartheta \mathrm{d}\phi$, will be observed in S' in the solid angle $\mathrm{d}\Omega' = \sin\vartheta' \mathrm{d}\vartheta' \mathrm{d}\phi'$. Since $\phi = \phi'$ and $\cos\vartheta' = (\cos\vartheta - \beta)/(1 - \beta\cos\vartheta)$ it follows that

$$\mathrm{d}\Omega' = \sin\vartheta' \mathrm{d}\vartheta' \mathrm{d}\phi' = \frac{1-\beta^2}{(1-\beta\cos\vartheta)^2}\, \mathrm{d}\Omega$$

where, of course,

$$\int \mathrm{d}\Omega' = \int \mathrm{d}\Omega = 4\pi$$

10.31

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}\Omega'} = \frac{N_0}{4\pi}\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}\Omega'} = \frac{N_0}{4\pi}\frac{1-\beta^2}{(1-\beta\cos\vartheta')^2}$$

where N_0 is the total number of visible stars.
10.32

$$\omega = \gamma\omega'\left[1 + \frac{(n'\cdot V)}{c}\right] \text{ or } \quad \omega = \frac{\omega'}{\gamma[1-(n\cdot V)/c]}$$
$$k = \gamma\left(k' + \frac{V\omega'}{c^2}\right) + (\gamma - 1)\left[[k' \wedge V] \wedge \frac{V}{V^2}\right]$$

where

$$n = \frac{k}{k}, \quad n' = \frac{k'}{k'}, \quad k = \frac{\omega}{c}$$

10.33 If ω_0 is the frequency in the frame in which the source is at rest, and V is the velocity of the source relative to the detector, then the detector will record the (lower) frequency $\omega = \omega_0 (1 - V^2/c^2)^{1/2}$ (this is the so-called red shift). The angle α between the ray and the direction
of motion of the source in the frame in which it is at rest is given by $\cos\alpha = -\frac{V}{c}$.

The angle α is close to $\frac{1}{2}\pi$ only when $V \ll c$. As $V \to c, \alpha \to \pi$. 10.34
(a) $\lambda = \lambda_0 \left(\frac{1-V/c}{1+V/c}\right)^{1/2}$;
(b) $\lambda = \lambda_0 \left(\frac{1+V/c}{1-V/c}\right)^{1/2}$
10.35

$$\omega = \omega_0 \frac{(1-\beta^2)^{1/2}}{1-\beta\cos\theta}, \quad J = J_0 \frac{(1-\beta^2)^{3/2}}{(1-\beta\cos\theta)^2}$$

The frequencies are the same, that is $\omega = \omega_0$, when $\theta = \theta_0$ where $\cos\theta_0 = \left[1 - (1-\beta^2)^{2/2}\right]/\beta$; in that case $J = J_0 (1-\beta^2)^{1/2}$. The intensities are the same, $J = J_0$, in the case in which $\theta = \theta_1 < \theta_0$, where $\cos\theta_1 = \left[1 - (1-\beta^2)^{3/4}\right]/\beta$. When the light

source is far from the observer, while approaching him, so that $\theta < \theta_0$, the frequency $\omega > \omega_0$ because of the Doppler effect ('violet' shift). If $\theta < \theta_1$ the intensity J will also be larger than J_0: a moving source looks brighter than a fixed one. The intensity is a maximum for $\theta = 0$ and equals $J_{\max} = J_0(1+\beta)^{3/2}/(1-\beta)^{1/2}$. When $\theta > \theta_0$ the frequency $\omega < \omega_0$ and the observer sees a 'red' shift; the light intensity is now less than for a fixed source. These effects are particularly noticeable when $V \approx c$ when

$$\omega_{\max} = \omega_0 \left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)^{1/2} \gg \omega_0 \quad \text{and} \quad J_{\max} = J_0 \frac{(1+\beta)^{3/2}}{(1-\beta)^{1/2}} \gg J_0$$

while the angle

$$\theta_0 \approx \sqrt{2}(1-\beta)^{1/4} \ll 1$$

so that the reddening of the light starts when the source is still far from the observer, but approaching him. This begins to occur at a distance $l \approx d/\theta_0$.

The number of photons emitted per unit laboratory time in the range of angles $0 < \theta < \theta_0$ is

$$N_1 = J_0\left(1-\beta^2\right) \int_0^{\theta_0} \frac{2\pi \sin\theta \, \mathrm{d}\theta}{(1-\beta\cos\theta)^2} = 2\pi J_0 \left(1-\beta^2\right)^{1/2} \frac{1+\beta-\left(1-\beta^2\right)^{1/2}}{\beta}$$

$$= 2\pi J_0 \left(1-\beta^2\right)^{1/2} (1+\cos\theta_0)$$

and in the range of angles $\theta_0 < \theta < \pi$

$$N_2 = 2\pi J_0 \left(1-\beta^2\right)^{1/2} \frac{\left(1-\beta^2\right)^{1/2} - 1 + \beta}{\beta} = 2\pi J_0 \left(1-\beta^2\right)^{1/2} (1-\cos\theta_0)$$

Clearly $N_1 + N_2 = 4\pi J_0 \left(1-\beta^2\right)^{1/2}$ corresponds to the total number of photons emitted per unit time in all directions. N_1 and N_2 have the same
value when $\beta \ll 1$ and $\cos\theta_0 \approx 0$. If, however, β approaches unity, N_1 becomes much larger than N_2. In the ultrarelativistic case the overwhelming majority of the photons are thus emitted within a narrow angle $\theta < \theta_0$ and are then subject to a violet shift.

10.36 By using the solution of the preceding problem we get

$$I = J\hbar\omega = I_0 \frac{\left(1-\beta^2\right)^2}{(1-\beta\cos\theta)^3}$$

where $I_0 = J_0\hbar\omega_0$ is the isotropically distributed light intensity in the rest frame of the source. The total light flux

$$\Phi = \int_{(4\pi)} I \, \mathrm{d}\Omega = 2\pi I_0 \left(1-\beta^2\right)^2 \int_0^{\pi} \frac{\sin\theta \mathrm{d}\theta}{\left(1-\beta^2\cos^2\theta\right)^3} = 4\pi I_0 = \Phi_0$$

is the same in the rest frame of the source as in the laboratory frame (compare this with the result of problem 12.46).

10.37 Consider the system S' in which the mirror is at rest, and the laboratory system S. Let α_1' and α_2' be the angles between the wavevectors k_1' and k_2' of the incident and reflected waves and the direction of the velocity V of the mirror (figure 10.37.1). Let the frequencies before and after reflection be denoted by ω_1' and ω_2'. The analogous quantities in S will be denoted by the same symbols but without primes. According to the laws of reflection, in S' we have $\omega_1' = \omega_2' = \omega'$ and $\alpha_2' = \pi - \alpha_1'$. Hence $\cos\alpha_2' = -\cos\alpha_1'$. We can now express ω' in terms of ω,

and $\cos\alpha'$ in terms of $\cos\alpha$, with the aid of equations (10.a.4) and (10.a.14). Solution of the resulting equations for ω_2 and $\cos\alpha_2$ yields

$$\cos\alpha_2 = -\frac{(1+\beta^2)\cos\alpha_1 - 2\beta}{1-2\beta\cos\alpha_1+\beta^2}, \quad \omega_2 = \omega_1\frac{1-2\beta\cos\alpha_1+\beta^2}{1-\beta^2}$$

When $\beta \to 1$, then for normal incidence on a receding mirror $\omega_2 \to 0$, while for normal incidence on an approaching mirror $\omega_2 \to \infty$.

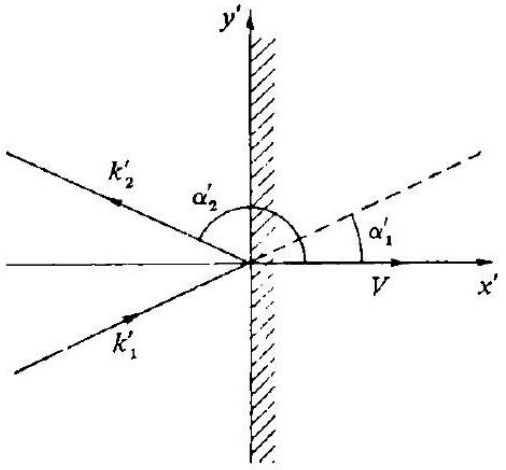


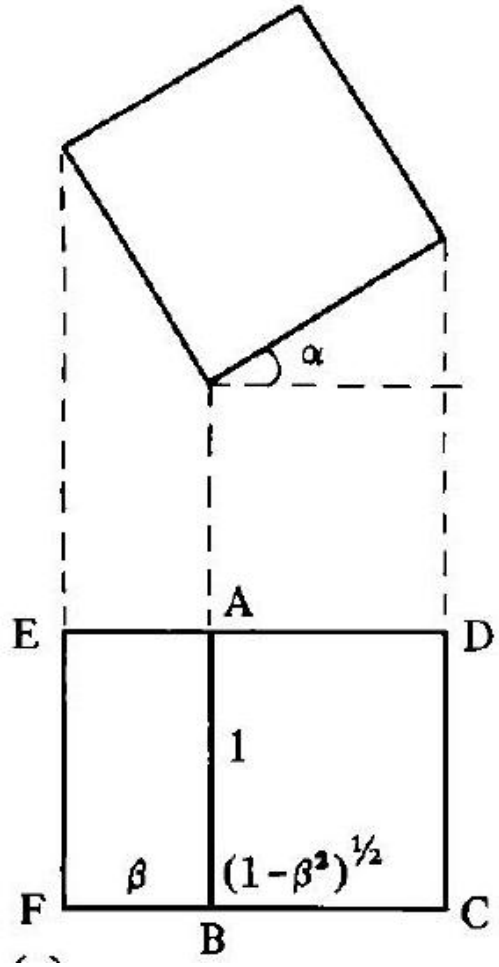
Figure 10.37.1.

10.38$\omega_1 = \omega_2$. The angle of incidence is equal to the angle of reflection.

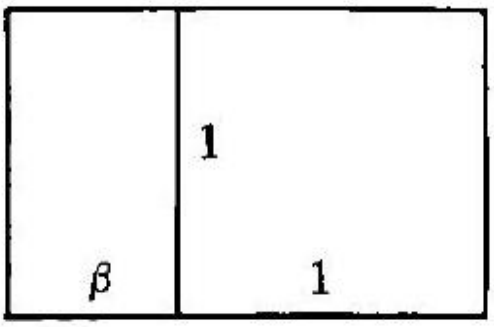
10.39 The image is formed by light quanta which reach the photographic plate simultaneously. However, these quanta were emitted by points of a moving body and, in general, were not emitted simultaneously. This follows as a consequence from the fact that the distances from different points of the body to the photographic plate are not the same and also from the fact that events which are simultaneous in one frame of reference are not simultaneous in another frame. The image of a moving object will therefore not be the same as that of a fixed object.

The quanta which are emitted simultaneously from different points of the edge A′B′ in the system S' (the cube) also reach the photographic plate at the same time. The length of the image AB will be the same as in the case of a fixed cube and will be determined solely by the contraction caused by the distance to the object and the focal distance of the camera. We take this length as 1.

For a fixed cube the image of the edge $E'F'$ would overlap that of A′B′ (in the limiting case of a sufficiently small solid angle when all light rays would be parallel). In the case of a moving cube, quanta from the edge E'F′ reach the photographic plate at the same time as those from the edge A′B′, if the first were emitted earlier by a time interval $\Delta t = l_0/c$ (in the frame S). Before that time interval the edge $E'F'$ occupied the position $\mathrm{E}'_1\mathrm{F}'_1$ and before the edge A′B′ emitted light it traversed a distance Vl_0/c. Therefore the edge EF will not be covered by the edge AB and the images of the edges A′E′ and B′F′ will have length $V/c = \beta$ and not zero, as for a fixed cube, and the whole face A′B′F′E′ will be photographed in the shape of the rectangle ABFE (figure 10.39.2a) with side ratio $1 : \beta$.



(a)



(b)

Figure 10.39.2.

The quanta forming the images of the edges A′B′ and C′D′ are emitted simultaneously by the cube in the frame S. It follows from the Lorentz transformation (10.a.1) that in the system S' the quanta from the edge C′D′ must be emitted earlier than those from the edge A′B′ by a time interval $\Delta t' = \gamma V l/c^2$, where l is the length of the edges B′C′ and A′D′ in the frame S. We may assume that in the system S', at points which are at a distance $\Delta x' = l_0$ from one another, two events occur, at times which are separated by $\Delta t'$. The distance between them in the system S is determined by using equation (10.a.1):

$$l \equiv \Delta x = \gamma \left(\Delta x' - V \Delta t'\right)$$

whence, by substituting for $\Delta x'$ and $\Delta t'$, we find the length of the edges BC and AD in the system $S : l = l_0 \left(1 - \beta^2\right)^{1/2}$. They were subject to the usual Lorentz contraction. If we take the contraction in the camera into account, we find the lengths of their images to be $\left(1 - \beta^2\right)^{1/2}$.

In figure 10.39.2a we show the picture of the image of the cube. It is interesting to note that the same image would be produced by a fixed cube turned over an angle $\alpha = \arcsin(V/c)$ relative to the direction of V. The apparent form of the object in this case is not subject to a distortion due to the Lorentz contraction-the object was only 'turned' over an angle α. It turns out (see the next few problems) that this result is true for any object and any angle between the velocity and the direction of the line of sight. It is merely necessary that the object is seen under a small solid angle.

If the Galilean transformations were valid, the edges A′D′ and B′C′ would not be subject to a Lorentz contraction and the image would be the one shown in figure 10.39 .2 b . The back (with respect to the direction of motion) face of the cube would be photographed, as before. The apparent form of a moving object would thus be subject to a distortion. 10.40

(a) $l = l_0 \left|(1-\beta^2)^{1/2}\cos\alpha' - \beta\sin\alpha'\right|, \quad \beta = \frac{V}{c}.$

The value $\alpha'_{\max}$ for which the function $|\ (1-\beta^2)^{1/2}\cos\alpha' - \beta\sin\alpha'$ has a maximum is determined by the condition $\tan\alpha'_{\max} = -\beta/\left(1-\beta^2\right)^{1/2}$. In that case $l = l_0$: the largest length l is thus equal to l_0. The image is in this case equivalent to the image of a fixed rod which is oriented parallel to the photographic plate. The rod is 'turned' over an angle $\pi - \alpha'_{\max}$.

(b) $\alpha' = \arctan\left[\frac{\left(1-\beta^2\right)^{1/2}}{\beta}\right];$

in this case the image is obtained as if the rod were fixed and oriented at right angles to the photographic plate.

(c) If two observers, fixed in the system S, simultaneously make notches in the xy-plane in the points M and N which the end points of

the rod pass at that moment, the section MN obtained by them will make an angle α with the x-axis, where

$$\alpha = \arctan\left[\frac{\tan\alpha'}{(1-\beta^2)^{1/2}}\right]$$

10.41 The image will have the shape of a circle. The hemisphere shown shaded in figure 10.41 .1 is photographed. It is bounded by the plane A′B′ which makes an angle

$$\alpha' = \arctan\frac{\beta}{(1-\beta^2)^{1/2}}$$

with the direction of V (in the frame of the sphere). In spite of one's natural intuitive ideas, a moving sphere does not appear to an observer as an ellipsoid, flattened in the direction of the velocity. The Lorentz contraction is invisible! This does not, of course, mean that it is not present.

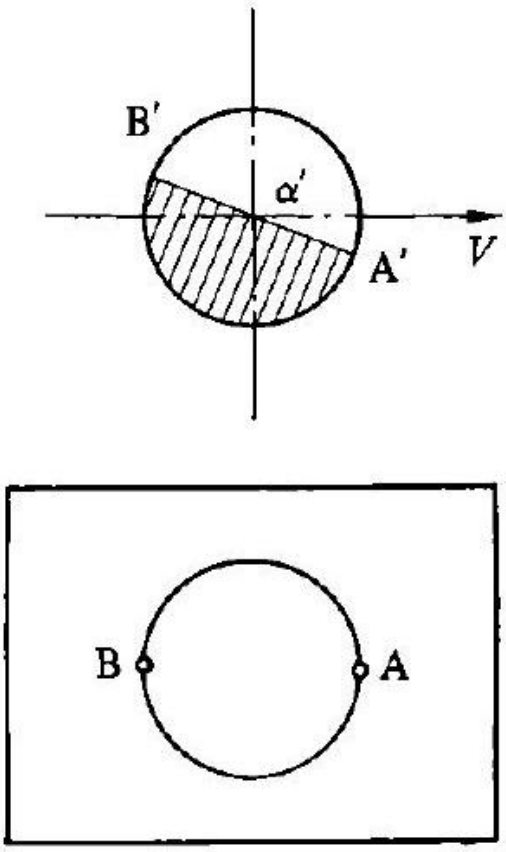


Figure 10.41.1.

10.42 The apparent positions of the cube are shown in figure 10.42.2. When $V/c < \cos\alpha$ we see the leading face A′D′ and the lower face A′B′. If in the optical system of the camera there is no contraction of the dimensions of the object, we have

$$\mathrm{AB} = l_0\left(1-\beta^2\right)^{1/2}\frac{\sin\alpha}{1-\beta\cos\alpha}, \quad \mathrm{AD} = l_0\frac{\cos\alpha-\beta}{1-\beta\cos\alpha}$$

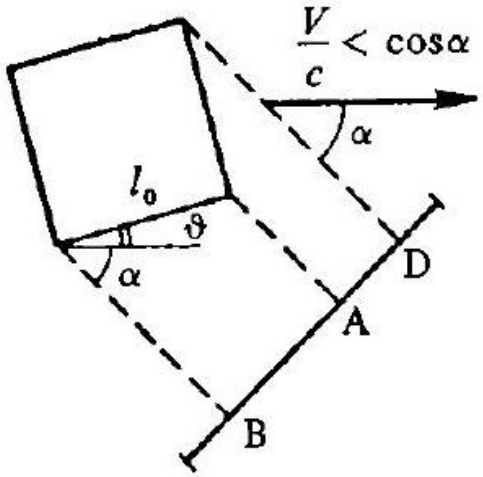
Using these formulae we can find the angle ϑ over which the cube is turned:

$$\vartheta = \frac{1}{2}\pi - \alpha - \theta, \qquad \text{where} \qquad \tan\theta = \frac{\cos\alpha-\beta}{\sin\alpha\,(1-\beta^2)^{1/2}}$$

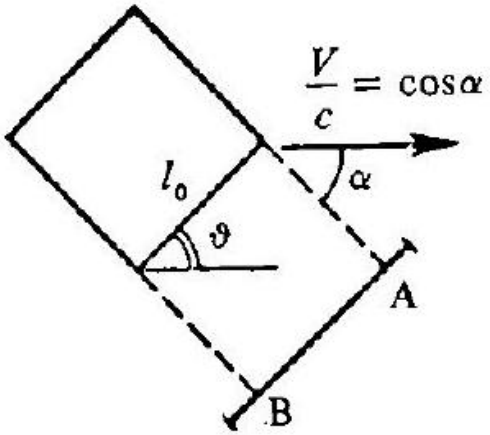
When $V/c = \cos\alpha$, we have $\vartheta = \frac{1}{2}\pi - \alpha$ and only the lower face A′B′ can be seen. When $V/c > \cos\alpha$ the lower and trailing faces are seen,

$$\vartheta = \frac{1}{2}\pi - \alpha + \arctan\frac{\beta-\cos\alpha}{(1-\beta^2\sin\alpha)^{3/2}}$$

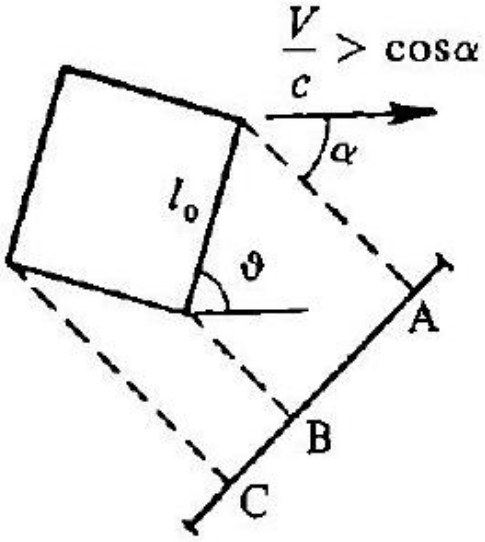
Finally, when $V/c \to 1$, only the trailing face can be seen; the lower face is subject to a Lorentz contraction and vanishes, and $\vartheta = \pi - \alpha$.


$\frac{V}{c} < \cos\alpha$
l_0
ϑ
α
α
D
A
B

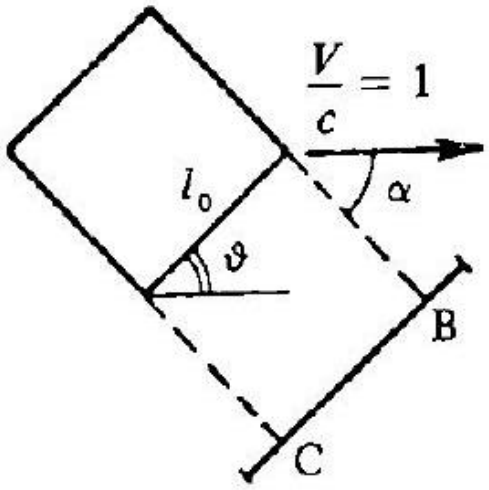
(a)


$\frac{V}{c} = \cos\alpha$
l_0
ϑ
α
A
B

(c)


$\frac{V}{c} > \cos\alpha$
l_0
ϑ
α
A
B
C

(b)



(d)

Figure 10.42.2.

10.43 Consider a plane wave of frequency ω' and wavevector k' $(k'\cos\alpha', k'\sin\alpha', 0)$, $k' \perp \mathrm{O}z$, propagating in a frame S' fixed in the medium. The phase velocity $v' = c/n = \omega'/k'$ in the system S' is independent of angle α' which is determined by the direction of propagation of the wave. The field components are proportional to $\exp(-ik'_i x'_i)$, where $k'_i = (\omega'/c, k')$. Since the phase $k_i x_i = k'_i x'_i$ is invariant under a Lorentz transformation, k_i is a 4 -vector (wave 4 -vector). By using equations (10.a.4) and (10.a.14) we can find the components k_i in the frame S, with respect to which the medium moves with a velocity $V \| Ox$, and hence

$$\omega = \gamma\omega'(1 + \beta n\cos\alpha') \tag{10.43.1}$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha'}{\gamma(\cos\alpha' + \beta/n)}$$

$$v = \frac{\omega}{k} = c\frac{1 + \beta n\cos\alpha'}{\left[(n\cos\alpha' + \beta)^2 + n^2\sin^2\alpha'(1-\beta^2)\right]^{3/2}} \tag{10.43.2}$$

where $\beta = V/c$ and $\gamma = (1-\beta^2)^{-1/2}$. It is clear from equation (10.43.2) that the phase velocity in a moving medium depends on the direction of
propagation. Thus, a particular form of anisotropy appears in a moving medium.

10.44 The required velocity may be found from equation (10.43.2) of the preceding problem $(\alpha' = 0)$:

$$v = c\frac{1 + \beta n(\lambda')}{n(\lambda') + \beta} \approx \frac{c}{n(\lambda')} + V\left[1 - \frac{1}{n^2(\lambda')}\right]$$

where $\lambda' = 2\pi c/\omega'$ and ω' is the frequency observed in the frame S' in which the medium is at rest. Using equation (10.43.1) of the preceding solution, we have, to within terms of the first order in V/c,

$$\frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{\omega}{\omega'} = 1 + \frac{nV}{c}$$

whence,

$$\frac{c}{n(\lambda')} = \frac{c}{n(\lambda)} - \frac{c}{n^2}\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}\lambda}\lambda\frac{nV}{c}$$

and finally,

$$v = \frac{c}{n(\lambda)} + V\left[1 - \frac{1}{n^2(\lambda)} - \frac{\lambda}{n(\lambda)}\frac{\mathrm{d}n(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}\right]$$

17.10.2 b Four-dimensional vectors and tensors

10.48 One three-dimensional tensor of rank 2 $[A_{\alpha\beta}(\alpha, \beta = 1, 2, 3)]$, two three-dimensional vectors $[A_{0\alpha}$ and $A_{\alpha 0}(\alpha = 1, 2, 3)]$, and a threedimensional scalar (A_{00}).
10.49 The skew-symmetric 4-tensor A_{ik} may be written in the form

$$A_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & -B_1 & -B_2 & -B_3 \\ B_1 & 0 & A_3 & -A_2 \\ B_2 & -A_3 & 0 & A_1 \\ B_3 & A_2 & -A_1 & 0 \end{pmatrix}$$

where $\boldsymbol{A} = (A_1, A_2, A_3)$ and $\boldsymbol{B} = (B_1, B_2, B_3)$ are three-dimensional vectors, or more precisely, B is a polar vector and A an axial vector.
10.53 The invariant quantity

$$\mathrm{d}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x_0}\,\mathrm{d}x_0 + \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\,\mathrm{d}x_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\,\mathrm{d}x_2 + \frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\,\mathrm{d}x_3$$

has the same form in all inertial systems of reference; since the $\mathrm{d}x_i$ $(i = 0, 1, 2, 3)$ are the components of a 4 -vector, the set of quantities

$$\nabla_i\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_0}, -\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, -\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}, -\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\right)$$

is also a 4-vector. The four-dimensional gradient operator, defined by the relation

$$\nabla_i = \left(\frac{\partial}{\partial x_0}, -\nabla\right)$$

where ∇ is the three-dimensional gradient operator, thus transforms as a 4 -vector.
10.54

$$T_{ik} = \nabla_k A_i, \quad \nabla_k = \left(\frac{\partial}{\partial x_0}, -\frac{\partial}{\partial x_1}, -\frac{\partial}{\partial x_2}, -\frac{\partial}{\partial x_3}\right)$$

The four-dimensional divergence is

$$\nabla_i A_i = \frac{\partial A_0}{\partial x_0} + \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3} = \text{ invariant}$$

10.55 (a) A scalar;
(b) a 4 -vector.
10.56 The condition for A_i and B_i to be parallel may be written in the form

$$\frac{\alpha_{0i}A_0}{\alpha_{0i}B_0} = \frac{-\alpha_{1i}A_1}{-\alpha_{1i}B_1} = \frac{-\alpha_{2i}A_2}{-\alpha_{2i}B_2} = \frac{-\alpha_{3i}A_3}{-\alpha_{3i}B_3}$$

where the numerator and denominator of each fraction is multiplied by the same number. Hence, using the properties of equal fractions, we have

$$\frac{A_i}{B_i} = \frac{\alpha_{0i}A_0 - \alpha_{1i}A_1 - \alpha_{2i}A_2 - \alpha_{3i}A_3}{\alpha_{0i}B_0 - \alpha_{1i}B_1 - \alpha_{2i}B_2 - \alpha_{3i}B_3} = \frac{A'_i}{B'_i}$$

10.57 There are four different components. Except for the sign, they are identical with the components of the vector $A_i = \frac{1}{6} e_{iklm} A_{klm}$ and hence,

$$A_0 = A_{123} = -A_{213} = \ldots, \quad A_1 = -A_{230} = A_{320} = \ldots$$
$$A_2 = -A_{310} = A_{130} = \ldots, \quad A_3 = -A_{120} = A_{210} = \ldots$$

The remaining components A_{ikl} are all zero (they have at least two equal indices). It follows that the nonzero components of A_{ikl} transform on four-dimensional rotations and reflections as the components of a fourdimensional pseudovector.

10.59 If $x_i = \alpha_{ik} x'_k$, then the matrix $\hat{\alpha}$ is of the form

$$\hat{\alpha} = \begin{pmatrix} \cosh\alpha & -\sinh\alpha & 0 & 0 \\ \sinh\alpha & -\cosh\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

10.60 The required matrix $\hat{g}$ may be written in the form of the product of three matrices:

$$\hat{g} = \hat{g}(\vartheta, \phi)\hat{g}(\alpha)\hat{g}^{-1}(\vartheta, \phi)$$

The matrix

$$\hat{g}(\vartheta, \phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\cos\vartheta\cos\phi & \sin\phi & -\sin\vartheta\cos\phi \\ 0 & -\cos\vartheta\sin\phi & -\cos\phi & -\sin\vartheta\sin\phi \\ 0 & \sin\vartheta & 0 & -\cos\vartheta \end{pmatrix}$$

describes spatial rotation of the reference frame (figure 10.60.1).

$$x_i = \sum_k g_{ik}(\vartheta, \phi) x''_k$$

The matrix

$$\hat{g}(\alpha) = \begin{pmatrix} \cosh\alpha & 0 & 0 & -\sinh\alpha \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \sinh\alpha & 0 & 0 & -\cosh\alpha \end{pmatrix}$$

corresponds to the transition from S''' to S'', where the former moves along the x''_3-axis with the velocity $V = c\tanh\alpha$ [see the special form of the Lorentz transformation (10.a.1)]. Finally, the matrix $\hat{g}^{-1}(\vartheta, \phi)$ describes a rotation as a result of which the frame S' transforms into S''' (figure 10.60 .1), and is identical with the transpose of $\hat{g}(\vartheta, \phi)$. On multiplying the matrices, we have

$$\hat{g} = \begin{pmatrix} \cosh\alpha & -\omega_1\sinh\alpha & -\omega_2\sinh\alpha & -\omega_3\sinh\alpha \\ \omega_1\sinh\alpha & \omega_1^2(1-\cosh\alpha)-1 & \omega_1\omega_2(1-\cosh\alpha) & \omega_1\omega_3(1-\cosh\alpha) \\ \omega_2\sinh\alpha & \omega_1\omega_2(1-\cosh\alpha) & \omega_2^2(1-\cosh\alpha)-1 & \omega_2\omega_3(1-\cosh\alpha) \\ \omega_3\sinh\alpha & \omega_1\omega_3(1-\cosh\alpha) & \omega_2\omega_3(1-\cosh\alpha) & \omega_3^2(1-\cosh\alpha)-1 \end{pmatrix}$$

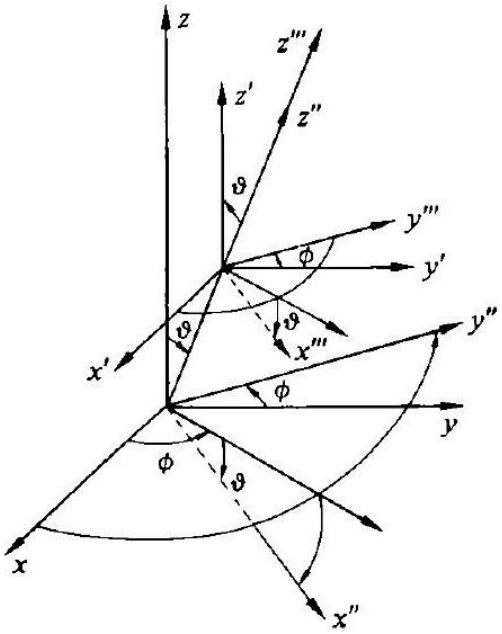


Figure 10.60.1.

where

$$\omega_1 = \sin\vartheta\cos\phi, \quad \omega_2 = \sin\vartheta\sin\phi, \quad \omega_3 = \cos\vartheta$$

17.10.3 c Relativistic electrodynamics

10.61 In vacuo

$$\boldsymbol{E} = \gamma\left(\boldsymbol{E}' - \left[\frac{V}{c}\wedge\boldsymbol{H}'\right]\right) - (\gamma-1)V\frac{(V\cdot\boldsymbol{E}')}{V^2}$$
$$H = \gamma\left(\boldsymbol{H}' + \left[\frac{V}{c}\wedge\boldsymbol{E}'\right]\right) - (\gamma-1)V\frac{(V\cdot H')}{V^2}$$

In a medium

$$\boldsymbol{P} = \gamma\left(\boldsymbol{P}' + \left[\frac{V}{c}\wedge M'\right]\right) - (\gamma-1)V\frac{(V\cdot\boldsymbol{P}')}{V^2}$$
$$M = \gamma\left(M' - \left[\frac{V}{c}\wedge P'\right]\right) - (\gamma-1)V\frac{(V\cdot M')}{V^2}$$

The transformation formulae for the pairs of vectors $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}$ and D, H are analogous to the transformation formulae for $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}$ in vacuo.

10.62 The problem has an infinite number of solutions. If the system S' (moving with a velocity V) in which E' is parallel to H' has been found, then in any other reference frame, which moves relative to S' along this common direction, the vectors E and H will again be parallel [this follows from equation (10.c.3)]. In view of this, let us try to find the reference frame S' which moves at right angles to the plane $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}$. From the condition for the vectors $\boldsymbol{E}'$ and $\boldsymbol{H}'$ to be parallel, i.e. $[\boldsymbol{E}'\wedge\boldsymbol{H}'] = 0$, and the transformation formulae of the previous problem, we have

$$\frac{V}{c} = [E\wedge H]\frac{E^2+H^2-\left[(E^2-H^2)^2+4(E\cdot H)^2\right]^{1/2}}{2[E\wedge H]^2}$$

Using the field invariants we have

$$E'^2 = \frac{1}{2}\left\{E^2 - H^2 + \left[\left(E^2 - H^2\right)^2 + 4(E\cdot H)^2\right]^{1/2}\right\}$$
$$H'^2 = \frac{1}{2}\left\{H^2 - E^2 + \left[\left(E^2 - H^2\right)^2 + 4(E\cdot H)^2\right]^{1/2}\right\}$$

10.63 When $E > H$, a reference frame should exist in which $H' = 0$ and $E' = (E^2 - H^2)^{1/2}$. When $E < H$, there exists a reference frame in which $E' = 0$ and $H' = (H^2 - E^2)^{1/2}$.

When $E > H$ we have

$$\boldsymbol{V} = c\frac{[\boldsymbol{E}\wedge\boldsymbol{H}]}{E^2}\,, \qquad E' = \frac{\boldsymbol{E}}{E}(E^2 - H^2)^{1/2}\,.$$

In any frame S'' moving in the direction of E' with an arbitrary velocity, the magnetic field will also be zero.

When $E < H$

$$V = c\frac{[H\wedge E]}{H^2}, \quad \boldsymbol{H}' = \frac{\boldsymbol{H}}{H}\left(H^2 - E^2\right)^{1/2}$$

10.64 When $\kappa < J/c$ and the reference frame moves with velocity $V = c^2\kappa/J$ parallel to the axis of the cylinder and to $[E\wedge H]$, the electric field E' is zero and the magnetic field is given by

$$H' = \frac{2J}{cr}\left(1 - \frac{c^2\kappa^2}{J^2}\right)^{1/2}$$

When $\kappa > J/c$ and the reference frame moves with velocity $V = J/\kappa$ parallel to the axis of the cylinder and to $[E\wedge H\ ]$, the magnetic field H' is zero and

$$E' = \frac{2\kappa}{r}\left(1 - \frac{J^2}{c^2\kappa^2}\right)^{1/2}$$

When $\kappa = J/c$, there is no reference frame in which there is only an electric or only a magnetic field. As can be seen from the above formulae, when $\kappa \to J/c$, the velocity of such a reference frame tends to the velocity of light, and the magnitude of the two fields tend to zero.

10.65 (a) At a fixed time ($\mathrm{d}t = 0$) we get the equations $[\mathrm{d}r\wedge H] = 0$, $(\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}r) = 0$. The first of these shows that $\mathrm{d}r$ is parallel to H, i.e. $\mathrm{d}r$ is an element of length of a magnetic field line. The set (10.65.2) can be written in the form $F_{ik}\,\mathrm{d}x_k = 0$, whence follows its relativistic invariance. Here F_{ik} is the field tensor and $\mathrm{d}x_k$ the increment of the coordinates.

(b) The compatibility condition for the set is $(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{H}) = 0$. It is relativistically invariant and shows that one can only introduce relativistically invariant magnetic field lines when the electrical and magnetic fields are at right angles to one another.

(c) The integrability conditions of the set of equations has the form

$$\left[H\wedge\left(\operatorname{curl}E + \frac{1}{c}\frac{\partial H}{\partial t}\right)\right] - E\operatorname{div}H = 0$$

or, in covariant form,

$$F_{ik}e_{klmn}\frac{\partial F_{mn}}{\partial x_l} = 0$$

and this is always satisfied, by virtue of the Maxwell equations.

(d) Writing the set (10.65.2) in the form $(\boldsymbol{E}\perp\boldsymbol{H})$

$$\mathrm{d}r = \frac{H(H\cdot\ \mathrm{d}r)}{H^2} + c\frac{[E\wedge H]}{H^2}\ \mathrm{d}t$$

we immediately verify that the statement under (d) is correct.

10.66 If we write the equations given in the problem in three-dimensional form, they become

$$[\mathrm{d}r\wedge E] - c\boldsymbol{H}\ \mathrm{d}t = 0, \quad (\boldsymbol{H}\cdot\ \mathrm{d}r) = 0$$

whence it follows that at any fixed time ($\mathrm{d}t = 0$) the condition $[\mathrm{d}r\wedge E] = 0$ that the increment $\mathrm{d}r$ and the electrical field $\boldsymbol{E}$ are parallel, is satisfied. The compatibility condition is $(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{H}) = 0$, and the equations are integrable when

$$\left[E\wedge\left(\operatorname{curl}H - \frac{1}{c}\frac{\partial E}{\partial t}\right)\right] + H\operatorname{div}E = 0$$

This last equation imposes the following condition on the charge and current distributions:

$$[\boldsymbol{E}\wedge\boldsymbol{j}] + c\boldsymbol{H}\rho = 0$$

If the conditions given here are not satisfied it is impossible to introduce invariant electrical field lines. The field lines move at right angles to their direction with a velocity

$$u = -c\frac{[E\wedge H]}{E^2}$$

10.68

$$\varphi = \frac{e}{R^*}, \quad A = e\frac{V}{cR^*}$$
$$E = \frac{eR}{\gamma^2 R^{*3}} = \frac{eR\left(1-V^2/c^2\right)}{R^3\left[1-\left(V^2/c^2\right)\sin^2\vartheta\right]^{3/2}}, \quad H = \left[\frac{V}{c}\wedge E\right]$$

where $R^* = \left[(x-Vt)^2 + \left(1-\beta^2\right)\left(y^2+z^2\right)\right]^{1/2}$, $(Vt,0,0)$ are the coordinates of the moving charge at time t, $R = (x-Vt, y, z)$ is the position vector of the charge relative to the point of observation at time t, and ϑ is the angle between R and V.

10.69

$$G = \frac{e^2\gamma}{6\pi c^2 R}V$$

10.70 It follows from the formulae derived in the preceding solution that along the line of motion of the charge ($\vartheta = 0, \pi$) the field E is smaller than the Coulomb field $E_{\mathrm{Coul}} = e/R^2$ by a factor $1 - V^2/c^2$, while in the perpendicular direction $\left(\vartheta = \frac{1}{2}\pi\right)$ the field E is greater by a factor $\left(1-V^2/c^2\right)^{-1/2}$. When $V \sim c$ the field is large only within the angular range $\Delta\vartheta \sim \left(1-V^2/c^2\right)^{1/2}$ near the equatorial plane.

The condition $E_\parallel = E'_\parallel$ refers to the same points in the 4 -space. However, if in the rest system of the charge, a point A lies on the x-axis at a distance R from the charge, then in the laboratory system the same point will lie at a distance $R\left(1-\beta^2\right)^{1/2}$. If we compare the values of $E_\parallel$

at the point $R\left(1-\beta^2\right)^{1/2}$ and $E'_\parallel$ at the point R, we have

$$E_\parallel = \frac{eR\left(1-\beta^2\right)^{1/2}\left(1-\beta^2\right)}{\left[R\left(1-\beta^2\right)^{1/2}\right]^3} = \frac{e}{R^2} = E'_\parallel,$$

as was to be expected.

10.71

$$\varphi = \frac{(p_0 \cdot r^*)}{\gamma r^{*3}}, \quad A = \frac{V}{c}\varphi$$
$$E = \frac{3R\,(p_0 \cdot r^*) - p_0 r^{*2}}{\gamma^2 r^{*5}}, \quad H = \left[\frac{V}{c} \wedge E\right]$$

where $\boldsymbol{R} = (x - Vt, y, z), r^* = (x - Vt, y/\gamma, z/\gamma)$; the dipole moves along the x-axis and its position vector at time t is Vt.

10.72

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}' + \left[\frac{V}{c} \wedge m\right] - (\gamma - 1)V\frac{(V \cdot \boldsymbol{p}')}{\gamma V^2}$$
$$\boldsymbol{m} = \boldsymbol{m}' - \left[\frac{V}{c} \wedge \boldsymbol{p}'\right] - (\gamma - 1)V\frac{(V \cdot m')}{\gamma V^2}$$

where $\boldsymbol{p}'$ and $\boldsymbol{m}'$ are the dipole moments in the rest system.

10.73 If we use the formulae for the transformation of the fourdimensional current density, we find that the sides 2 and 4 of the rectangle shown in figure 10.73 .1 are uncharged, whereas the sides 1 and 3 carry charges $q_1 = -q_3 = -(V/c)\,(J'a/c)$ where J' is the current in the system S' in which the loop is at rest. Hence (or from the result of the preceding problem), it follows that the electric dipole moment of the loop as observed in S' is $p = q_3 b = (V/c)m'$, where $m' = J'ab/c$ is the magnetic moment of the loop as observed in S'.

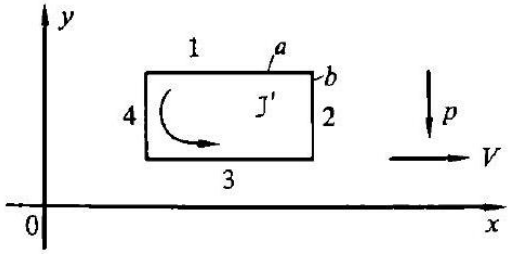


Figure 10.73.1.

10.74 Let u_i be the four-dimensional velocity of the medium. Consider the 4-invariant [see equation (10.c.15)]

$$-f_i u_i = \gamma(f \cdot V) - \gamma[Q + (f \cdot V)] = -\gamma Q = \text{ invariant}$$

If Q_0 is the amount of heat released per unit volume of the medium per unit time in the system in which the medium is at rest, then $Q = Q_0\,(1 - \beta^2)^{1/2}$.

10.75

$$w = \gamma^2\left(w' + \frac{2\beta}{c}S'_x + \beta^2 T'_{xx}\right), \quad S_x = \gamma^2\left[\left(1 + \beta^2\right)S'_x + Vw' + VT'_{xx}\right]$$
$$S_y = \gamma\left(S'_y + VT'_{xy}\right), \quad S_z = \gamma\left(S'_z + VT'_{xz}\right)$$
$$T_{xx} = \gamma^2\left(T'_{xx} + \frac{2\beta}{c}S'_x + \beta^2 w'\right), \quad T_{yy} = T'_{yy}, \quad T_{yz} = T'_{yz}$$
$$T_{zz} = T'_{zz}, \quad T_{xy} = \gamma\left(T'_{xy} + \frac{\beta}{c}S'_y\right), \quad T_{xz} = \gamma\left(T'_{xz} + \frac{\beta}{c}S'_z\right)$$

10.76 $T_{ii} = 0$.

10.77 The momentum and energy of the field in the volume V at time $t = x_0/c$ are given by

the integrals $\int T_{0\alpha}\ \mathrm{d}^3S$ and $\int T_{00}\ \mathrm{d}^3S$ respectively, where d^3S is an element of the hypersurface $x_4 =$ constant (it is evident that $\mathrm{d}^3S = \mathrm{d}^3r$). The momentum and energy of the field at the time $t' = x_0'/c$ is given by analogous integrals. Consider an arbitrary auxiliary constant 4 -vector a_i and evaluate the sum $T_{0i}a_i$. Next, consider the 4 -volume Ω which is bounded by a cylindrical hypersurface S, whose generator is parallel to the x_0-axis, and the two hyperplanes $x_0 =$ constant and $x_0' =$ constant (figure 10.77.1).

Applying the four-dimensional form of Gauss' theorem to the surface integral of the function $T_{0i}a_i$ over this hypersurface, we have

$$\oint T_{0i}a_i\ \mathrm{d}^3S = \int\limits_{\Omega} \frac{\partial T_{0i}}{\partial x_i}a_i\ \mathrm{d}^4\Omega = 0$$

since $\partial T_{0i}/\partial x_i = 0$ in the absence of charges. On the cylindrical hypersurface $T_{0i} = 0$, since the field is zero on the boundary of the volume V. Hence (taking into account the direction of the normal), we have

$$a_i \int T_{0i}\ \mathrm{d}^3r = a_i' \int T_{0i}'\mathrm{d}^3r'$$

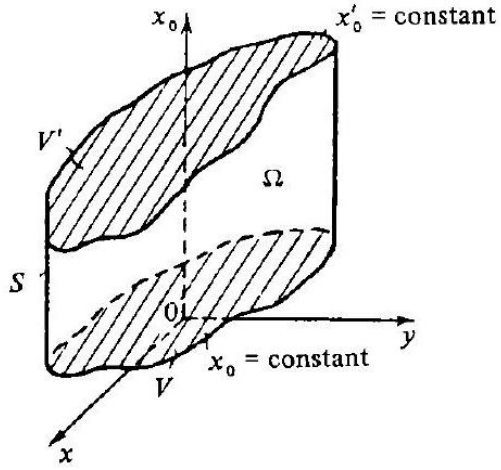


Figure 10.77.1.

In other words, the quantity $a_i \int T_{0i}\ \mathrm{d}^3r$ is invariant with respect to the Lorentz transformation, and hence $\int T_{0i}\ \mathrm{d}^3r$ should be a 4 -vector (cf problems 10.55 and 1.4).

10.78 Consider the change in K_{ik} during a time $\mathrm{d}t$, where K_{ik} is a functional of the space-like hypersurface $t =$ constant. It will be necessary to compare the values of K_{ik} at two hyperplanes $t =$ constant and $t + \mathrm{d}t =$ constant. Since the field at infinity is zero, the difference between integrals over these hyperplanes may be transformed into an integral over a closed hypersurface S which is formed by adding an infinitely distant lateral hyperplane to the above two hyperplanes. The resulting integral may be transformed in accordance with Gauss' theorem:

$$\oint_S A_{ikl}\ \mathrm{d}^3S_l = \int\limits_{\Omega} \frac{\partial A_{ikl}}{\partial x_l}\ \mathrm{d}^4\Omega$$

where Ω is the volume enclosed by the closed hypersurface S. The integrand on the right-hand side may be transformed as follows:

$$\frac{\partial A_{ikl}}{\partial x_l} = \frac{\partial}{\partial x_l}\left(x_i T_{kl} - x_k T_{il}\right) = T_{ki} - T_{ik} + x_i\frac{\partial T_{kl}}{\partial x_l} - x_k\frac{\partial T_{il}}{\partial x_l}$$

where $T_{ik} = T_{ki}$, owing to the symmetry of the stress 4-tensor.

Consider now the integral

$$\int x_i \frac{\partial T_{kl}}{\partial x_l}\ \mathrm{d}^4\Omega = -\frac{1}{c}\int x_i F_{kl}\dot{y}_l\ \mathrm{d}^4\Omega$$

Since we are concerned with a system of point particles, we have

$$\int x_i F_{kl} j_l\ \mathrm{d}^3 r = \sum e x_i F_{kl}\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t}$$

where the right-hand side of this expression involves the coordinates of the particles and functions of them at time t. From the equations of motion of the particles,

$$\frac{e}{c}F_{kl}\frac{\mathrm{d}x_l}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}p_k}{\mathrm{d}t}$$

The integral $\int x_k\,(\partial T_{il}/\partial x_l)\,\mathrm{d}^4\Omega$ may be considered in a similar way. Thus, the integral with respect to Ω becomes equal to $-\sum (x_i\ \mathrm{d}p_k/\mathrm{d}t - x_k\ \mathrm{d}p_i/\mathrm{d}t)\,\mathrm{d}t$ and is cancelled by an equal sum over the particles. Hence,

$$\frac{\mathrm{d}K_{ik}}{\mathrm{d}t} = 0 \quad \text{and} \quad K_{ik} = \text{ constant}$$

10.79 The total angular momentum of the particles and the field within the volume is

$$K_{\alpha\beta}(t) = \sum k_{\alpha\beta} - \frac{1}{c}\int_t (x_\alpha T_{\beta\gamma} - x_\beta T_{\alpha\gamma})\,\mathrm{d}^3 S_\gamma$$

where $k_{\alpha\beta} = x_\alpha p_\beta - x_\beta p_\alpha$ is the angular momentum of one of the particles, and the integral is evaluated over the part of the hyperplane $t =$ constant whose projection on to three-dimensional space is V. $K_{\alpha\beta}(t + \mathrm{d}t)$ may be written down in a similar way. The angular momentum lost by the system in a time $\mathrm{d}t$ is

$$-\mathrm{d}K_{\alpha\beta} = K_{\alpha\beta}(t) - K_{\alpha\beta}(t+\mathrm{d}t) = -\sum \mathrm{d}k_{\alpha\beta} + \frac{1}{c}\int_{t+\mathrm{d}t} \ldots - \frac{1}{c}\int_t \ldots$$

The difference between integrals over near hyperplanes may be rewritten in another form, since

$$\int_t + \int_{t+\mathrm{d}t} + \int_{s_{\text{side}}} = \oint$$

over a closed cylindrical hypersurface (see figure 10.79.1) whose generators are parallel to the time axis [1]. As in the previous solution, it can be shown that $\oint$ is cancelled by $-\sum \mathrm{d}k_{\alpha\beta}$, and hence

$$-\mathrm{d}K_{\alpha\beta} = \frac{1}{c}\int_{S_{\text{side}}} (x_\alpha T_{\beta\gamma} - x_\beta T_{\alpha\gamma})\,\mathrm{d}^3 S_\gamma$$

The elements of the hypersurface S_{side} are normal to the t-axis and may be written in the form $\mathrm{d}S_\gamma = c\ \mathrm{d}t n_\gamma \mathrm{d}^2 f$, where $\mathrm{d}^2 f$ is an element of the ordinary surface enclosing the volume V and n is a unit normal to this element. Hence, the rate of loss of angular momentum of the system is

$$-\frac{\mathrm{d}K_{\alpha\beta}}{\mathrm{d}t} = \int (-x_\alpha T_{\beta\gamma} + x_\beta T_{\alpha\gamma})\,n_\gamma \mathrm{d}^2 f \qquad (10.79.1)$$

Consider now the tensor $R_{\alpha\beta\gamma} = x_\beta T_{\alpha\gamma} - x_\alpha T_{\beta\gamma}$, which is skew-symmetric with respect to the subscripts α, β. This tensor may be interpreted as the angular momentum flux density, as is evident from equation (10.79.1).

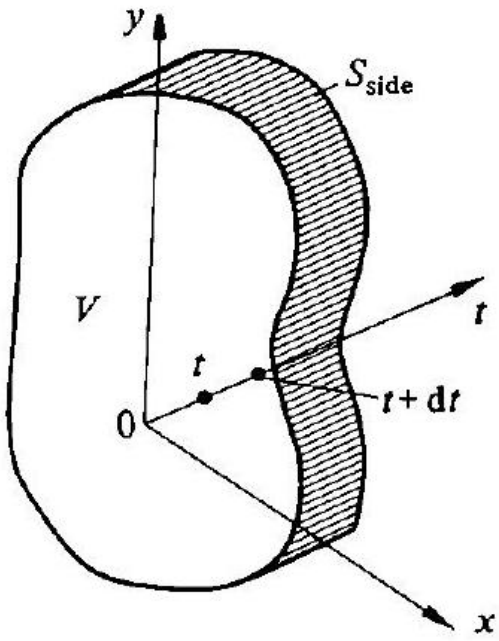


Figure 10.79.1.

(1) It must be remembered that such diagrams are purely conventional.

The component $R_{\alpha\beta\gamma}$ is equal to the $\alpha\beta$ component of the total angular momentum $K_{\alpha\beta}$ which flows per unit time through a unit area at right angles to the x_γ-axis. In a way similar to that in which $K_{\alpha\beta}$ may be replaced by the pseudovector K, it is possible to introduce a pseudovector equivalent of $R_{\alpha\beta\gamma}n_\gamma$. Equation (10.79.1) will then be of the form

$$-\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}t} = \int R \, \mathrm{d}^2 f \tag{10.79.2}$$

$$R = \frac{E^2 + H^2}{8\pi}[r \wedge n] - \frac{1}{4\pi}\{[r \wedge E](n \cdot E) + [r \wedge H](n \cdot H)\} \tag{10.79.3}$$

In deriving equation (10.79.3) use was made of the expression given by equation (10.c.7) for the components $T_{\alpha\beta}$.

17.11 Relativistic mechanics

17.11.1 a Energy and momentum

11.1

$$p = \frac{1}{c}\left[T\left(T + 2mc^2\right)\right]^{1/2}$$

11.2

$$v = \frac{cp}{\left(p^2 + m^2c^2\right)^{1/2}}$$

11.3

$$\beta = \frac{v}{c} = \left[1 - \left(\frac{\text{Å}_0}{\mathscr{Q}_0}\right)^2\right]^{1/2}$$

where $\&_0 = mc^2$. In the nonrelativistic case $\beta \approx (2T/\&_0)^{1/2}$; in the ultrarelativistic case $\beta = 1 - \frac{1}{2}(\&_0/\&)^2$.

11.4
(a) $T = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{3}{8}m\frac{v^2}{c^2} + \ldots$,
(b) $T = \frac{p^2}{2m} - \frac{1}{8}\frac{p^4}{m^3c^2} + \ldots$.

11.5

$$v = \left[\frac{2eV}{m}\frac{1 + eV/2mc^2}{(1 + eV/mc^2)^2}\right]^{1/2}$$

In particular, when $eV \ll mc^2$

$$v = \left(\frac{2eV}{m}\right)^{1/2}\left(1 - \frac{3}{4}\frac{eV}{mc^2}\right) \ll c$$

When $eV \gg mc^2$

$$v = c\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{mc^2}{eV}\right)^2\right] \approx c$$

11.6 (a) $v = 0.0342c$;
(b) $v = 0.9999985c$;
(c) $0.81c$
(d) 0.9956 c .
11.7

$$F = \frac{J}{ce}\left[T\left(T + 2mc^2\right)\right]^{1/2}, \quad W = \frac{J}{e}T$$

11.8

$$p = \frac{2mv^2N}{1 - v^2/c^2}$$

The pressure in the system attached to the body and in the system attached to the gas is the same. This may be verified either by direct calculation of the pressure in each of the systems, or by applying the Lorentz transformation to the 4 -force [see equation (11.b.3)].
11.9 The length of the nth tube is given by

$$L_n = \frac{v_n}{2v} = \frac{c}{2v}\left[1 - \left(\frac{mc^2}{nV_e e + mc^2}\right)^2\right]^{1/2}$$

where v_n is the particle velocity in the nth tube. At the beginning of the acceleration $mc^2 \gg neV_e$ and $L_n \approx (2eV_e n/m)^{1/2}/2\nu$. In the ultrarelativistic limit, $T_n \gg mc^2, v \approx c$, and $L_n \approx c/2v$.

The total length of the accelerator is given by

$$L = \sum_n L_n \approx \frac{c}{2v} \int_0^N \left[1 - \left(\frac{mc^2}{nV_e e + mc^2}\right)^2\right]^{1/2} \mathrm{d}n$$
$$\approx \frac{c}{2veV_e} \left\{ \left[\left(NeV_e + mc^2\right)^2 - m^2c^4\right]^{1/2} - mc^2 \arccos\left(\frac{mc^2}{NeV_e + mc^2}\right)\right\}$$

11.10 The ratio of the intensities is given by

$$\frac{I_h}{I_0} = \exp\left(\frac{h}{v\tau}\right) \approx \exp\left(\frac{h}{\tau_0 c}\frac{m_\mu c^2}{\xi}\right) = 2 \cdot 5$$

where $\tau = \tau_0 \left[1 - (v^2/c^2)\right]^{-1/2}$ is the life-time of a μ-meson moving with a velocity u. In the absence of time dilatation, the intensity ratio is given by (assuming $v = c$)

$$\frac{I'_h}{I'_0} \approx \exp\left(\frac{h}{\tau_0 c}\right) \approx 94 \cdot 4$$

The first result ($I_h/I_0 \approx 2 \cdot 5$) is in agreement with observation and therefore constitutes a direct experimental proof of the existence of a relativistic slowing down of clocks.

11.11

$$\tan\vartheta = \frac{1}{\gamma}\frac{p' \sin\vartheta'}{p' \cos\vartheta' + V\varrho'/c^2} = \frac{1}{\gamma}\frac{\sin\vartheta'}{\cos\vartheta' + V/v'}$$

where

$$\gamma = \frac{1}{\left(1 - V^2/c^2\right)^{1/2}}, \quad \& = \gamma\left(\mathring{\mathrm{A}}' + p'V\cos\vartheta'\right)$$

and p, p' are the momenta of the particle in S and S' respectively.
The approximate formula given in the question may be used provided $\cos\frac{1}{2}\vartheta' \gg |1 - V/v'|^{1/2}$, where $v' = p'c^2/\xi'$ is the velocity of the particle in S'. The energy in the ultrarelativistic limit is $\& \approx pc \approx 2\gamma\varepsilon' \cos^2\frac{1}{2}\vartheta'$.
11.12 Consider the $\mathrm{d}N$ particles moving within the solid angle $\mathrm{d}\Omega'$ in S'. In S these $\mathrm{d}N$ particles will move within a solid angle $\mathrm{d}\Omega = \sin\vartheta \mathrm{d}\vartheta \mathrm{d}\phi$,
generated by the velocity vectors of these particles in S. The angular distribution in S, which is described by the function $F(\vartheta, \phi)$, is then given by

$$F(\vartheta, \phi)\mathrm{d}\Omega = F'(\vartheta', \phi')\,\mathrm{d}\Omega' = \mathrm{d}W = \frac{\mathrm{d}N}{N}$$

The angle ϑ' expressed as a function of ϑ is given by the formula

$$\cos^2\vartheta = \frac{1}{1 + \tan^2\vartheta} = \frac{\left(\cos\vartheta' + V/v'\right)^2}{\left(\cos\vartheta' + V/v'\right)^2 + (1/\gamma^2)\sin^2\vartheta'}$$

which follows from the solution of problem 11.11 ($v' = p'c^2/\varepsilon'$ is the velocity of the particles in S'). Since $\phi = \phi'$, we have

$$F(\vartheta, \phi) = F'\left[\vartheta'(\vartheta), \phi\right] \frac{\gamma^2\left[\left(\cos\vartheta' + V/v'\right)^2 + (1/\gamma^2)\sin^2\vartheta'\right]^{3/2}}{1 + (V/v')\cos\vartheta'}$$

For ultrarelativistic particles $v' = c$, and the angular distribution in S assumes the simpler form (cf problem 10.30)

$$F(\vartheta, \phi) = F'\left[\vartheta'(\vartheta), \phi\right] \frac{\left[1 + (V/c)\cos\vartheta'\right]^2}{1 - V^2/c^2}$$

We note that particles moving at different angles ϑ in S have different energies, in spite of the fact that in S' the energies are the same.

11.13 The distribution function f is an invariant quantity. This means that when we change to another frame of reference S':

$$f'\left(r', \boldsymbol{p}', t'\right) = f(r, p, t)$$

where on the right-hand side of the equation we must use equation (10.a.4) to express r, p, and t in terms of the primed quantities.

11.14 Let n_1 and n_2 be the numbers of scattered and scattering particles per unit volume, and consider the scattering process in the system S. The total number of particles $\mathrm{d}N$ scattered into a solid angle $\mathrm{d}\Omega$ in a time t by target particles lying within a volume V is given by $\mathrm{d}N = \mathrm{d}\sigma_{12} J_{12} n_2 V t$, where σ_{12} is the cross section and $J_{12} = n_1 v_1$. In the S' system, the corresponding expression is $\mathrm{d}N = \mathrm{d}\sigma'_{12} J'_{12} n'_2 V' t'$, where $J'_{12} = n'_1 \left|\boldsymbol{v}'_1 - \boldsymbol{v}'_2\right|$. In the latter system $\mathrm{d}N$ represents the number of particles scattered into the solid angle $\mathrm{d}\Omega'$ which corresponds to $\mathrm{d}\Omega$. Thus,

$$\mathrm{d}\sigma_{12} n_1 n_2 v_1 V t = \mathrm{d}\sigma'_{12} n'_1 n'_2 \left|v'_1 - v'_2\right| V' t'$$

Like the four-dimensional electrical current density $(\rho c, \rho v)$ the quantity (nc, nv) is a 4 -vector. It follows that

$$n_1 n_2 = n'_1 n'_2 \left[1 - \frac{\left(v'_1 \cdot v'_2\right)}{c^2}\right] \tag{11.14.1}$$

since the scalar product of 4 -vectors is an invariant quantity. In view of equation (11.14.1) and the fact that the 4 volume is an invariant quantity,
we have $Vt = V't'$, and hence finally

$$\mathrm{d}\sigma'_{12} = \mathrm{d}\sigma_{12} \frac{v_1 \left[1 - \left(v'_1 \cdot v'_2\right)/c^2\right]}{\left|v'_1 - v'_2\right|} \tag{11.14.2}$$

In the special case, where v'_1 is parallel to v'_2,

$$v_1 = \frac{v'_1 - v'_2}{1 - \left(v'_1 \cdot v'_2\right)/c^2}$$

(see problem 10.12), and it follows from equation (11.14.2) that the cross section is an invariant quantity, i.e.

$$\mathrm{d}\sigma_{12} = \mathrm{d}\sigma'_{12}$$

This case occurs, for example, in the transformation from the laboratory system to the centre of mass system. We note that if the flux is defined by $J_{12} = n_1 \tilde{v}$ where $\tilde{v} = v_1\left[1 - \left(v'_1 \cdot v'_2\right)/c^2\right]$, then the cross section is invariant under any Lorentz transformation.

11.15

$$\mathrm{d}W = \frac{\mathrm{d}\Omega}{4\pi\gamma^2(1 - \beta\cos\vartheta)^2}, \quad \int_{4\pi} \mathrm{d}W = 1$$

where $\beta = v/c$.

11.16

$$f = \frac{1+\beta}{1-\beta}$$

and hence

$$= mc^2 \frac{(1+f)}{2f^{1/2}}$$

where m is the rest mass of the π^0-meson.

11.18 Since the momentum of the photon is $p = \varepsilon/c$, it follows that (cf problem 11.11)

$$\mathscr{E} = \frac{\mathscr{G}'}{\gamma(1-\beta\cos\vartheta)}, \quad \&' = \frac{1}{2}mc^2, \quad \beta = \frac{v}{c}$$

From a comparison of the resulting expression

$$\mathrm{d} = -\frac{\mathring{\mathrm{A}}'\mathrm{d}(1-\beta\cos\vartheta)}{\gamma(1-\beta\cos\vartheta)^2}$$

with the angular distribution of γ-rays found in the answer to problem 11.11, the following probability distribution is found for the energies of photons produced in the disintegration

$$\mathrm{d}W(\&) = \frac{|\mathrm{d}\&|}{\&_{\max} - \&_{\min}},$$

where $\varepsilon_{\min} = \&'(1-\beta)^{1/2/}/(1+\beta)^{1/2}$ is the minimum energy of the γ-rays (at $\vartheta = \pi$) and $\bigotimes_{\max} = \mathring{\mathrm{A}}'(1+\beta)^{1/2}/(1-\beta)^{1/2}$ is the maximum energy (at $\vartheta = 0$). Hence, it is evident that the spectrum of the γ-rays produced as a result of the disintegration is rectangular in the laboratory system, i.e. all energies between $\varepsilon_{\min}$ and $\mathscr{E}_{\max}$ are equally probable.

11.19

$$m = \frac{2\left(\varepsilon_1\varepsilon_2\right)^{1/2}}{c^2}$$

11.20$m^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2\left\{\left[\left(p_1^2 + m_1^2c^2\right)\left(p_2^2 + m_2^2c^2\right)\right]^{1/2} - p_1p_2\cos\vartheta\right\}$; $c = 1$; $m_\pi = 139 \cdot$ 58MeV.

11.21$m_1^2 = m^2 + m_2^2 - 2\left\{\left[\left(p^2 + m^2c^2\right)\left(p_2^2 + m_2^2c^2\right)\right]^{1/2} - pp_2\cos\vartheta_2\right\}$, $c = 1$.

11.22

$$m^2 = \mathscr{G}^2 - c^2p^2 = m_1^2 + m_2^2 + \frac{2m_1m_2}{\left(1 - v^2/c^2\right)^{1/2}},$$

$$V = \frac{p}{\varnothing} = \frac{m_1v}{m_1 + m_2\left(1 - v^2/c^2\right)^{1/2}}, \quad c = 1.$$

11.23

$$p_\mu = \frac{\left(m_\pi^2 - m_\mu^2\right)c}{2m_\pi}, \quad d = \frac{1}{2}c\tau\left(\frac{m_\pi}{m_\mu} - \frac{m_\mu}{m_\pi}\right)$$

11.24

$$T_1 = \mathring{\mathrm{A}}_1 - m_1c^2 = (m_0 - m_1 - m_2)(m_0 - m_1 + m_2)\frac{c^2}{2m_0}$$
$$T_2 = \trianglerighteq_2 - m_2c^2 = (m_0 - m_1 - m_2)(m_0 + m_1 - m_2)\frac{c^2}{2m_0}$$

(a) $\frac{T_\alpha}{T_n} = 58.5$;
(b) $\frac{T_\nu}{T_\mu} = 7 \cdot 27$;
(c) $\frac{T_\gamma}{T_\mathrm{n}} = \frac{2mc^2}{\Delta\varepsilon}$,
where m is the rest mass of the disintegrating nucleus, $\Delta\&$ is the energy of its excitation, while $mc^2 \gg \Delta\&$.

From the general formulae for T_1 and T_2, and also from the examples given here, it is clear that the lighter particle carries away most of the energy.

11.25

$$m_1 = m\frac{(1 - v_1^2/c^2)^{1/2}}{1 + v_1/v_2} \tag{11.25.1}$$

Using equation (11.25.1) we find the following differential equation for the mass of the rocket:

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}m} + w\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = 0$$

whence

$$\frac{v}{c} = \frac{1 - (m/m_0)^{2w/c}}{1 + (m/m_0)^{2w/c}}$$

11.26 The equation of motion is now

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\gamma v = f$$

We find for the mass:

$$m = m_0 \exp\left(-\frac{\chi}{k}\right), \quad \sinh\chi = \frac{ft}{c}$$

11.27

$$Q_a = T_b\left[1 + \frac{T_b + 2m_b}{m_d + (T_b^2 + 2T_bm_b + m_d^2)^{1/2}}\right];$$
$$Q_{\Sigma^+} = 109.6\mathrm{MeV}; \quad M_{\Sigma^+} = 1188.7\mathrm{MeV} \quad \left(\Sigma^+ \to \mathrm{n} + \pi^+\right);$$
$$Q_{\Sigma^+} = 116 \cdot 1\mathrm{MeV}; \quad M_{\Sigma^+} = 1189 \cdot 3\mathrm{MeV} \quad \left(\Sigma^+ \to \mathrm{p} + \pi^0\right).$$

The two values for M_{Σ^+}agree well with one another.

11.28

$$\omega = \frac{\Delta\&}{\hbar}\left(1 - \frac{\Delta\&}{2mc^2}\right)$$

The energy, $\hbar\omega$, carried away by the quantum is less than $\Delta\&$ by an amount $(\Delta\&)^2/(2mc^2)$, which is carried away by the nucleus in its recoil. If the nucleus is rigidly bound to the crystalline lattice, it does not receive any energy (since its mass $M \gg m$ is very large) and the quantum

carries away the whole of the energy $\hbar\omega = \Delta\&$.

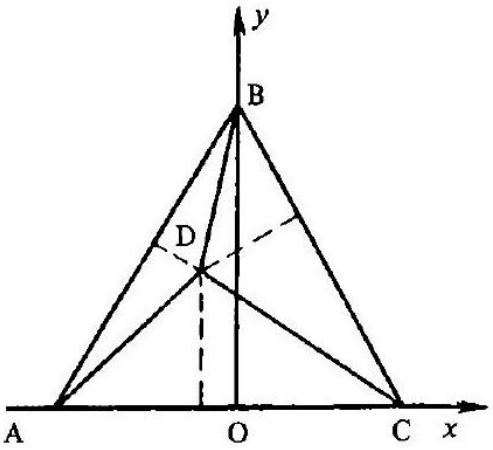
11.29 (a) The energy conservation law determines the bounds of the equilateral triangle ABC (figure 11.29 .1 a), the height of which, BO, is equal to the decay energy $Q = m - m_1 - m_2 - m_3 \quad (c = 1)$. The distance of the point D from the base AC equals T_1 by construction and the distances from D to AB and BC can easily be calculated and turn out to be equal to T_2 and T_3, respectively.

(b) The magnitudes of the momenta, when the masses of all particles are given, are determined by giving two of the energies, e.g. T_1 and T_2 (as $T_3 = Q - T_1 - T_2$), or x and y, which are linear combinations of them. The momenta of the particles which are produced in the decay are the sides of a triangle ($p_1 + p_2 + p_3 = 0$ in the rest frame of the decaying particle). The angles of the triangle characterise the relative directions in which the particles fly off and can be found once we know p_1, p_2, and p_3.

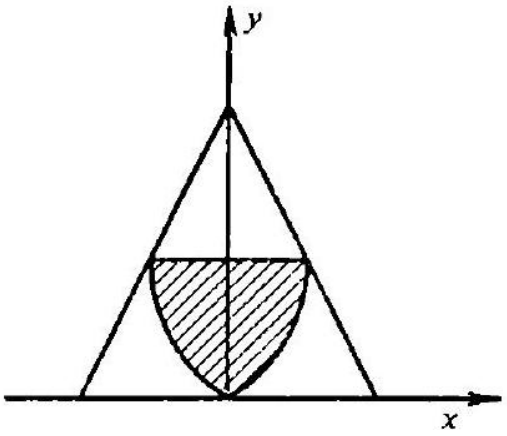
(c) The limits of the allowed region are determined by the conditions

$$p_1 + p_2 \geqslant p_3, \quad -p_3 \leqslant p_1 - p_2 \leqslant p_3$$

These conditions lead to the shaded region in figure 11.29 .1 b . At the top the region is bounded by the line $y = (m - m_1)^2 / 2m$, and below by the hyperbolae $x = \pm \left[\frac{1}{3}\left(y^2 + 2m_1 y\right)\right]^{1/2}$.



(a)



(b)

Figure 11.29.1.

11.30 The Dalitz plot has the form shown in figure 11.29.1b.

(a) $T_{1\,\max} \approx T_{2\,\max} \approx T_{3\,\max} \approx 69 \cdot 8\text{MeV}$.

(b) $T_{1\ \max} = \frac{(m-m_1)^2}{2m} \approx 127\text{MeV}$,

$$T_{2\,\max} = T_{3\,\max} = \frac{(m^2 - m_1^2)}{2m} \approx 228\text{MeV}$$

The maximum momenta of all three particles are the same.

11.31 The Dalitz plot is given in figure 11.31.1 under the assumption that $Q \ll m_\pi$.

$$\text{OB} = Q, \quad R = \frac{1}{3}Q, \quad T_{\max} = \frac{2}{3}Q \approx 50\text{MeV}$$

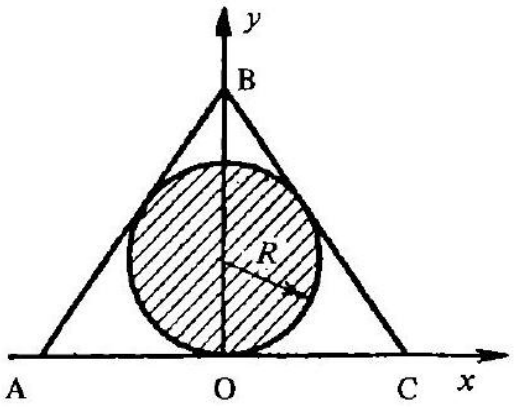


Figure 11.31.1.

11.32 The Dalitz plot is given in figure 11.32.1,

$$\text{OB} = Q, \quad T_{\max} \approx 210\text{MeV}$$

The inner curve is given by the equation

$$x = \pm \left\{ \frac{(2m_\pi y + y^2)\left[(m_\omega - m_\pi)^2 - 4m_\pi^2 - 2m_\omega y\right]}{3\left[(m_\omega - m_\pi)^2 - 2m_\omega y\right]} \right\}^{1/2}$$

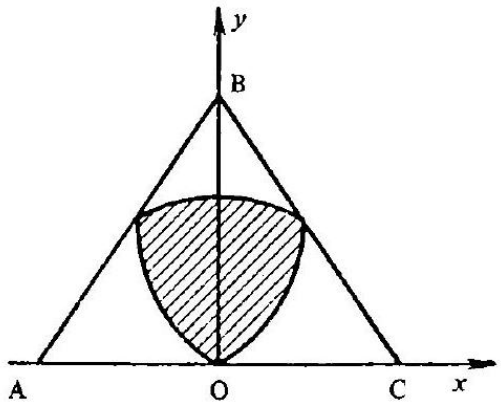


Figure 11.32.1.

11.33 The δ-function of the 4 -vector must be understood to be the product of four δ-functions of its components:

$$\delta(p_i - p_{i1} - p_{i2} - p_{i3}) = \delta(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{p}_3)\delta(\mathbb{E} - \mathbb{E}_1 - \mathbb{E}_2 - \mathbb{E}_3)\,.$$

By integrating over $\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}_3$ and using equation (11.33.1) we get the relation

$$\Gamma = \int \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}_1\ \mathrm{d}^3\boldsymbol{p}_2}{\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3}\delta\left(\left[p_1^2 + p_2^2 + m_3^2 + 2p_1p_2\cos\vartheta\right]^{1/2} - \varepsilon_3\right) \qquad (11.33.2)$$

where $\mathscr{E}_3 = m - \mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_2$ and ϑ is the angle between $\boldsymbol{p}_1$ and $\boldsymbol{p}_2$.
We write $\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}_2$ in the form $\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}_2 = p_2^2\ \mathrm{d}p_2\ \mathrm{d}\Omega_2$, where $\mathrm{d}\Omega_2$ is an element of solid angle. If we take the direction of p_1 as polar axis we have $\mathrm{d}\Omega_2 = 2\pi \sin\vartheta\ \mathrm{d}\vartheta$. Moreover, it follows from equation (11.a.3) that $p_2\ \mathrm{d}p_2 = \&_2\ \mathrm{d}\&_2$. Using equation (A1.18) we can transform the δ-function in equation (11.33.2):

$$\begin{aligned}\delta\left(\left[p_1^2 + p_2^2 + m_3^2 + 2p_1p_2\cos\vartheta\right]^{1/2} - \&_3\right)\\ = 2\&_3\delta\left(2p_1p_2\cos\vartheta + p_1^2 + p_2^2 + m_3^2 - \&_3^2\right)\end{aligned} \tag{11.33.3}$$

Since $-1 \leqslant \cos\vartheta \leqslant 1$, the integral in equation (11.33.2) will be nonvanishing only if the following inequalities hold:

$$p_1 + p_2 \geqslant p_3, \quad p_1 - p_2 \leqslant p_3, \quad p_1 - p_2 \geqslant -p_3$$

these are just the inequalities which determine the boundaries of the allowed region in the Dalitz plot.

Using equations (11.33.3) and (A1.15) and integrating over ϑ we get

$$\Gamma = \pi \int \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}_1\ \mathrm{d}\mathscr{G}_2}{\&_1 p_1} = 4\pi^2 \int \mathrm{d}\mathscr{G}_1\ \mathrm{d}\&_2$$

We now integrate over the variables

$$x = \frac{T_2 - T_3}{\sqrt{3}} = \frac{\&_1 + 2\&_2 + m_3 - m_2 - m}{\sqrt{3}}, \qquad y = T_1 = \&_1 - m_1,$$

which were used to construct the Dalitz plots. If we transform the element $\mathrm{d}\&_1\ \mathrm{d}\&_2$ we find

$$\Gamma = 2\pi^2\sqrt{3}\int \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$$

where the domain of integration is bounded by the inner curves in the plot (see figures 11.29 .1 b to 11.32 .1).

The last formula shows that the phase element $d\Gamma = 2\pi^2\sqrt{3}dxdy$ is proportional to the element of area in the Dalitz plot. The energies T_1, T_2, and T_3 of the particles that are formed in the decay can be measured experimentally and plotted in the Dalitz plot. The density of points is then proportional to the quantity ρ (see the statement of this problem) which can thus be found from experimental data.

11.34 Consider the energy-momentum 4-vector p_i of the system of particles. It is conserved, i.e. the corresponding components of the energymomentum before and after the reaction are equal. At the threshold kinetic energy, T_0, the particles produced in the reaction are at rest in the centre of mass frame (we note that in the laboratory frame the particles cannot be at rest for the threshold energy T_0 since this would violate the law of conservation of momentum). The total 4 -momentum vector of the system before the reaction is (in the laboratory system)

$$p_i^{(0)} = \left(\frac{\mathring{\mathrm{A}}_0}{c} + m_1 c, p_0\right)$$

where ε_0 is the total energy and $\boldsymbol{p}_0$ is the total momentum at the threshold.

After the reaction, the 4 -momentum in the centre of mass system is $p_i' = (Mc, 0)$. In view of the invariance of the square of a 4 -vector, and the law of conservation of 4-momentum, we have $p_i^{(0)2} = p_i'^2$. Explicitly,

$$M^2c^2 = \frac{\mathring{\mathrm{A}}_0^{\,2}}{c^2} + 2m_1\mathring{\mathrm{A}}_0 + m_1^2c^2 - p_0^2$$

and hence,

$$T_0 = \frac{c^2}{2m_1}\left(M - m_1 - m\right)\left(M + m_1 + m\right)$$

11.35
(a) $T_0 = 288\text{MeV}$
(b) $T_0 = 160\text{MeV}$
(c) $T_0 = 763\text{MeV}$
(d) $T_0 = 2\frac{m_\text{p}}{m}\left(m + 2m_\text{p}\right)c^2$,
where m_p is the rest mass of the proton. In the special case of a collision with a proton $m = m_\text{p}$ and hence $T_0 = 6m_\text{p}c^2 = 5 \cdot 63\text{GeV}$. The approximate formula for the threshold energy is

$$T_0 = \frac{2(A+2)}{A}m_\text{p}c^2$$

For large A this may be replaced by $T_0 \approx 2m_\text{p}c^2$.
11.36

$$T_0 = \left(1 + \frac{m}{M}\right)\Delta\text{Å}$$

In case (a) we have $\Delta\mathscr{E} = T_0 = 2 \cdot 18\text{MeV}(m = 0)$, in accordance with the above approximate formula. When the exact formula is used (see problem 11.34), the result is larger by $|Q|^2/2Mc^2 \approx 0.0012\text{MeV}$, where $Q = -\left(M - m_1 - m\right)c^2$. In case (b) the approximate formula yields $T_0 = 2|Q| = 7.96\text{MeV}$, and the difference between this result and the exact value is 0.003 MeV .
11.37 The equation for the reaction is

$$\gamma + (\text{ particle }) \rightarrow e^+ + e^- + (\text{particle })$$

The threshold energy may be found from the general formula (see problem 11.34)

$$T_0 = \hbar\omega_0 = \frac{c^2}{2m_1}\left(m_1 + 2m - m_1\right)\left(m_1 + 2m + m_1\right) = 2mc^2\left(1 + \frac{m}{m_1}\right)$$

where m is the rest mass of the electron (or positron).
When there is no particle, so that $m_1 \rightarrow 0$, the threshold energy T_0 tends to infinity, which means that the reaction is impossible. The latter result may also be obtained by showing that the relation $k_i = p_{+i} + p_{-i}$ cannot be satisfied, where k_i, p_{+i}, and p_{-i} are the 4 -momenta of the photon, positron, and electron, respectively. Indeed, taking the square of both sides of this equation we have

$$k_i^2 = (\mathscr{E}_+ + \mathscr{E}_-)^2 - (\boldsymbol{p}_+ + \boldsymbol{p}_-)^2 .$$

However, $k_i^2 = 0$, while the invariant quantity on the right-hand side does not vanish for any values of $\boldsymbol{p}_+, \boldsymbol{p}_-$. This is clear, if we change to the system of reference in which $\boldsymbol{p}_+ + \boldsymbol{p}_- = 0$.
11.39

$$v = \frac{c\left(\mathscr{Q}^2 - m_1^2c^4\right)^{1/2}}{\& + m_2c^2}$$

11.40 According to the conservation of 4-momentum

$$p_{1i}^{(0)} + p_{2i}^{(0)} = p_{1i} + p_{2i}$$

To determine the angle of scattering of the first particle, take p_{1i} to the left-hand side of the equation, and square both sides, so that

$$p_{1i}^{(0)2} + p_{2i}^{(0)2} + p_{1i}^2 + 2p_{1i}^{(0)}p_{2i}^{(0)} - 2p_{1i}^{(0)}p_{1i} - 2p_{2i}^{(0)}p_{1i} = p_{2i}^2 \tag{11.40.1}$$

In view of equation (11.a.7)

$$p_{1i}^{(0)2} = p_{1i}^2 = m_1^2c^2, p_{2i}^{(0)2} = p_{2i}^2 = m_2^2c^2$$

The scalar products are transformed as follows $\left(p_2^{(0)} = 0\right)$:

$$-p_{1i}^{(0)}p_{2i}^{(0)} = \left(p_1^{(0)} \cdot p_2^{(0)}\right) - \frac{1}{c^2}\mathscr{E}_1^{(0)}\varrho_2^{(0)} = -\mathscr{E}_0 m_2, p_{2i}^{(0)}p_{1i} = m_2\&_1,$$
$$-p_{1i}^{(0)}p_{1i} = \left(p_1^{(0)} \cdot p_1\right) - \frac{1}{c^2}\mathscr{E}_1^{(0)}\mathscr{E}_1 = p_0p_1\cos\vartheta_1 - \frac{\mathscr{E}_0\mathscr{E}_1}{c^2},$$

where $p_0 = \left(\varepsilon_0^2 - m_1^2c^4\right)^{1/2}/c^2$. Substituting these expressions into equation (11.40.1), it is found that

$$\cos\vartheta_1 = \frac{\mathring{\mathrm{A}}_1\left(\varepsilon_0 + m_2c^2\right) - \varepsilon_0 m_2c^2 - m_1^2c^4}{c^2p_0p_1}$$

Similarly,

$$\cos\vartheta_2 = \frac{\left(\mathring{\mathrm{A}}_0 + m_2c^2\right)\left(\mathring{\mathrm{A}}_2 - m_2c^2\right)}{c^2p_0p_2}$$

11.41

$$\mathring{\mathrm{A}}_1 = m_1c^2\frac{\left(\gamma_0 + m_2/m_1\right)\left(1 + \gamma_0m_2/m_1\right) \pm \cos\vartheta_1\left(\gamma_0^2 - 1\right)\left(m_2^2/m_1^2 - \sin^2\vartheta_1\right)^{1/2}}{\left(\gamma_0 + m_2/m_1\right)^2 - \left(\gamma_0^2 - 1\right)\cos^2\vartheta_1} \tag{11.41.1}$$
$$\mathring{\mathrm{A}}_2 = \frac{\left(\gamma_0 + m_2/m_1\right)^2 + \left(\gamma_0^2 - 1\right)\cos^2\vartheta_2}{\left(\gamma_0 + m_2/m_1\right)^2 - \left(\gamma_0^2 - 1\right)\cos^2\vartheta_2}m_2c^2$$

where $\gamma_0 = \varepsilon_0/m_1c^2$

It is evident from these formulae that when $m_1 > m_2$ the scattering angle must be such that $\vartheta_1 < \arcsin\left(m_2/m_1\right)^{1/2}$ and the positive sign should be taken in equation (11.41.1). To each value of ϑ_1 there are two values of $\&_1$.

When $m_1 = m_2$, the scattering angle ϑ_1 will not exceed $\frac{1}{2}\pi$, and to each value of ϑ_1 there is only one value of the energy which corresponds to the positive sign in equation (11.41.1). The negative sign would correspond to $\mathscr{G}_1 = m_1c^2$ whatever the scattering angle, and this is unphysical.

When $m_1 < m_2$ all scattering angles are possible, and to each value of ϑ_1 there is one value of ε_1. The positive sign must be taken in equation (11.41.1) when $0 < \vartheta_1 < \frac{1}{2}\pi$, and the negative sign when $\frac{1}{2}\pi < \vartheta_1 < \pi$. With this choice of signs, the scattering of incident particles through large angles will correspond to large energy losses, as expected.

11.42

$$\approx \frac{\varepsilon_0}{1 + \left(\varepsilon_0/Mc^2\right)\left(1 - \cos\vartheta\right)}$$

11.43

$$\mathcal{E} \approx \frac{\mathcal{E}_0 - \Delta E}{1 + (\mathcal{E}_0/Mc^2)(1 - \cos\vartheta)} .$$

11.44

$$T_1 = \frac{T_0 \cos^2\vartheta_1}{1 + \frac{1}{2}(T_0/mc^2)\sin^2\vartheta_1}$$

11.45

$$T_1 = T_0 \left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\right)^2 \left\{1 + \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2 - 2\sin^2\vartheta_1 \pm 2\cos\vartheta_1 \left[\left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2 - \sin^2\vartheta_1\right]^{1/2}\right\}$$

$$T_2 = \frac{4m_1m_2}{(m_1+m_2)^2} T_0 \cos^2\vartheta_2$$

The signs should be chosen as in the solution to problem 11.41.

11.46 The angle $\chi = \vartheta_1 + \vartheta_2$ between the directions of motion of the particles is given by

$$\tan\chi = \frac{(v_1' + v_2')\,(1 - V^2/c^2)^{1/2}\sin\vartheta'}{(V^2/c^2)\,v_1'\sin^2\vartheta' + (V - v_1')\,(1 - \cos\vartheta')}$$

(cf problem 10.26). When $m_1 = m_2$, we have $v_1' = v_2' = V$ and

$$\tan\chi = \frac{2c^2\,(1 - V^2/c^2)^{1/2}}{V^2\sin\vartheta'}$$

In this case, $\chi < 90°$. In the nonrelativistic limit $\chi \to 90°$.

11.47 Proceeding as in the solution of problem 11.40, we find that

$$\omega = \frac{\omega_0\,(\&_0/c - p_0\cos\vartheta_0)}{\&_0/c - p_0\cos\vartheta_1 + (\hbar\omega_0/c)\,(1 - \cos\vartheta)}$$

where ϑ is the angle between the directions of motion of the primary and secondary photons, and ϑ_1 is the angle between the initial direction of motion of the electron and the direction of motion of the photon after scattering. If the electron is initially at rest, then

$$\omega = \frac{\omega_0}{1 + (\hbar\omega_0/mc^2)\,(1 - \cos\vartheta)}$$

11.48 The energy of the scattered quantum is a maximum when $\vartheta_0 = \vartheta = \pi, \vartheta_1 = 0$, i.e. for a head-on collision in which the quantum is scattered backwards. In that case

$$\hbar\omega \approx \hbar\omega_0 \frac{2\varepsilon_0}{(mc^2)^2/2\&_0 + 2\hbar\omega_0} \tag{11.48.1}$$

It is clear from equation (11.48.1) that the quantum is considerably 'hardened' in the ultrarelativistic case, $\hbar\omega \gg \hbar\omega_0$. We note two particular cases. When $\hbar\omega_0 \ll (mc^2)^2/\text{Å}_0$, equation (11.48.1) gives:

$$\mathcal{E}_0 \gg \hbar\omega \approx 4\hbar\omega_0\left(\frac{\mathcal{E}_0}{mc^2}\right)^2 \gg \hbar\omega_0.$$

If, on the other hand, $\hbar\omega_0 \gg (mc^2)^2/\mathscr{E}_0, \hbar\omega$ approaches $\mathscr{E}_0$.

11.49

$$\mathscr{E} - \mathscr{E}_0 = \hbar\omega_0 \frac{p_0 c\,(\cos\vartheta_0 - \cos\vartheta_1) + \hbar\omega_0(1-\cos\vartheta)}{\mathscr{E}_0 - p_0\cos\vartheta_1 + \hbar\omega_0(1-\cos\vartheta)}$$

The designation of the angles is the same as in problem 11.47. An electron which is initially at rest always increases its energy when it collides with a photon:

$$\& - mc^2 = \frac{(\hbar\omega_0)^2\,(1-\cos\vartheta)}{mc^2 + \hbar\omega_0(1-\cos\vartheta)}$$

If before the scattering the electron had a momentum $p_0 \gg \hbar\omega/c$, its energy increases in the scattering, when $\vartheta_0 < \vartheta_1$, and decreases in the opposite case. The maximum acceleration of the electron occurs when $\vartheta_0 = 0, \vartheta = \vartheta_2 = \pi$. In that case

$$-\varepsilon_0 = 2\hbar\omega_0 \frac{p_0 c + \hbar\omega_0}{\varepsilon_0 + p_0 c + 2\hbar\omega_0}$$

In the case where the electron is nonrelativistic, but $p_0 c \gg \hbar\omega$, we have $\mathscr{G} - \mathscr{E}_0 = 2\hbar\omega_0\,(v_0/c) \ll \hbar\omega_0$. If, instead, the electron is ultrarelativistic, $Å - \varepsilon_0 \approx \hbar\omega_0$ and the conditions for accelerating the electron are an optimum.

11.50 $s = 4\,(m^2 + q^2)\,, \quad t = -2q^2(1-\cos\vartheta), \quad u = -2q^2(1+\cos\vartheta).$

11.51

$$§_a = \frac{(s - m_a^2 - m_b^2)}{2m_b}, \quad p_a = \frac{[\lambda\,(s, m_a^2, m_b^2)]^{1/2}}{2m_b};$$
$$§'_a = \frac{(s + m_a^2 - m_b^2)}{2\sqrt{s}}, \quad p' = \frac{[\lambda\,(s, m_a^2, m_b^2)]^{1/2}}{2\sqrt{s}}, \quad Å'_b = \frac{(s - m_a^2 + m_b^2)}{2\sqrt{s}}$$

where

$$\lambda(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz$$

Since in the centre-of-mass frame $p_a = -p_b$, the meaning of the quantity s is that it is the square of the total energy in that frame of reference:

$$s = \left(Å'_a + Å'_b\right)^2 = \left(Å'_c + \&'_d\right)^2$$

11.52

$$§_c = \frac{(m_b^2 + m_c^2 - u)}{2m_b}, \quad §_d = \frac{(m_b^2 + m_d^2 - t)}{2m_b}; \quad c = 1$$

11.53

$$\cos\theta = \frac{(s - m_a^2 - m_b^2)\,(m_b^2 + m_c^2 - u) + 2m_b^2\,(t - m_a^2 - m_c^2)}{[\lambda\,(s, m_a^2, m_b^2)\,\lambda\,(u, m_b^2, m_c^2)]^{1/2}}$$
$$\cos\theta' = \frac{s^2 + s\,(2t - m_a^2 - m_b^2 - m_c^2 - m_d^2) + (m_a^2 - m_b^2)\,(m_c^2 - m_d^2)}{[\lambda\,(s, m_a^2, m_b^2)\,\lambda\,(s, m_c^2, m_d^2)]^{1/2}}$$

Here $c = 1$ and the quantity λ was defined in the solution to problem 11.51 .

11.54 The meaning of the quantity $s = \left(\mathscr{G}'_\pi + \&'_p\right)^2$ is that it is the square of the total energy

of the two particles in the centre-of-mass frame; it is therefore always positive. Its minimum value $s_{\min} = (m + M)^2$ corresponds to the case where the pion, of mass m, and the proton, of mass M, are at rest in the centre-of-mass frame. Therefore,

$$(m + M)^2 \leqslant s \leqslant \infty$$

The cosine of the scattering angle θ' in the centre-of-mass system is connected with s and t through the relation

$$\cos\theta' = \frac{s^2 + s\,(2t - 2M^2 - m^2) + M^2\,(M^2 - m^2)}{(s - M^2)\left[s^2 - 2s\,(M^2 + m^2) + (M^2 - m^2)^2\right]^{1/2}} \tag{11.54.1}$$

Since $-1 \leqslant \cos\theta' \leqslant 1$, we find, by substituting equation (11.54.1) for $\cos\theta'$ into these inequalities, the values of t which are allowed for a given value of s.

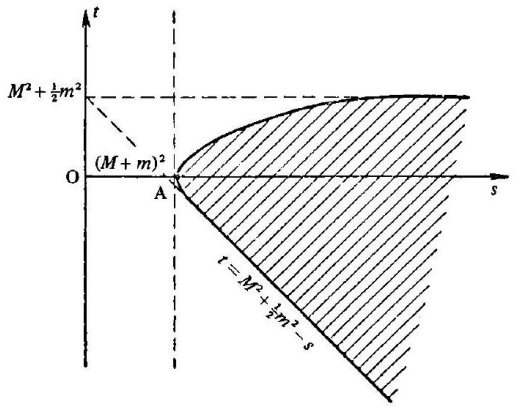


Figure 11.54.1.

The physical region is shaded in figure 11.54.1. The threshold for the reaction corresponds to the point A where

$$s_{\mathrm{A}} = (M + m)^2, \quad t_{\mathrm{A}} = -m^2 M/(M + m)$$
$$T_0 = m + \tfrac{m^2}{2M}, \qquad T_\pi = \tfrac{m^3}{2M(M+m)}$$

11.55 The required regions are shown in figure 11.55.1.

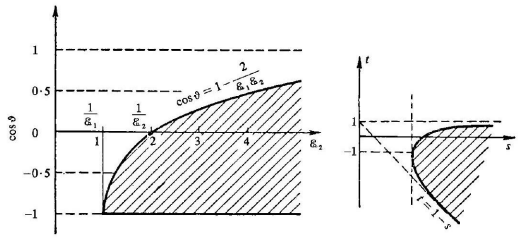
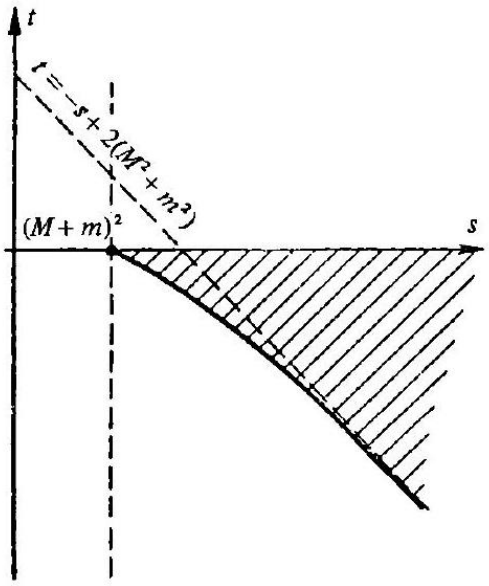


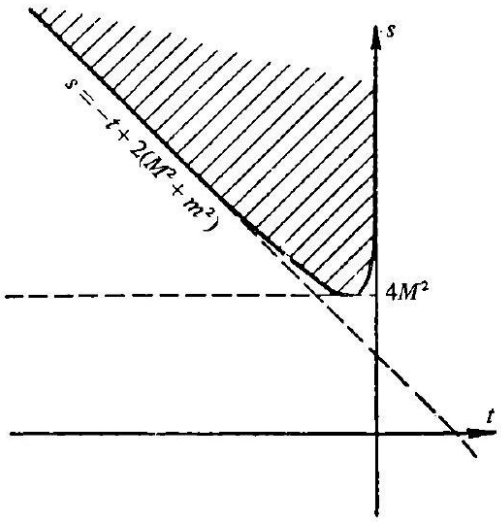
Figure 11.55.1.

11.56 The allowed regions for the first two processes are shown in figure 11.56 .1 a and for the third process in figure 11.56 .1 b .

One can construct a single kinematic diagram for all three processes by considering them as three possible channels for a single reaction in which two nucleons and two pions participate. The initial and final states of the



(a)



(b)

Figure 11.56.1.

pions and nucleons in the channels considered differ in energies, momenta, and charges (and also a few other characteristics which are studied in quantum theory).

In order to construct this diagram (figure 11.56.2) we draw three lines on which $s = 0, t = 0$, and $u = 0$, in such a way that they intersect and form an equilateral triangle with height $h = s + t + u = m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 + m_d^2$ $(c = 1)$. The values $s = s_0 =$ constant correspond to a straight line, parallel to the $s = 0$ axis and at a distance $|s_0|$ from it. This line must be drawn at the side where the triangle is, if $s_0 > 0$ and at the other side, if $s_0 < 0$. The lines $t =$ constant and $u =$ constant are constructed in a similar way.

As a result we have constructed an oblique-angled coordinate system in the plane, such that each point in the plane corresponds to three (positive or negative) numbers s, t, and u. The sum of these three numbers satisfies the necessary relation [equation (11.a.14)]. To verify this we consider an arbitrary point D and draw from it perpendiculars onto the sides AB, BC, and AC, or their extensions. Since

$$\text{area of } ABC = \text{ area of } ABD - (\text{ area of } BCD + \text{ area of } ACD)$$

we have

$$\mathrm{DM} - \mathrm{DN} - \mathrm{DK} = h = m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 + m_d^2$$

However, $-\mathrm{DN} = s, -\mathrm{DK} = t, \mathrm{DM} = u$, whence follows equation (11.a.14).
It is convenient for us to change the definitions of s, t, and u somewhat as compared to equation (11.a.13). Let

$$s = (p_{ai} + p_{bi})^2, \quad t = (p_{ai} + p_{ci})^2, \quad u = (p_{ai} + p_{di})^2$$

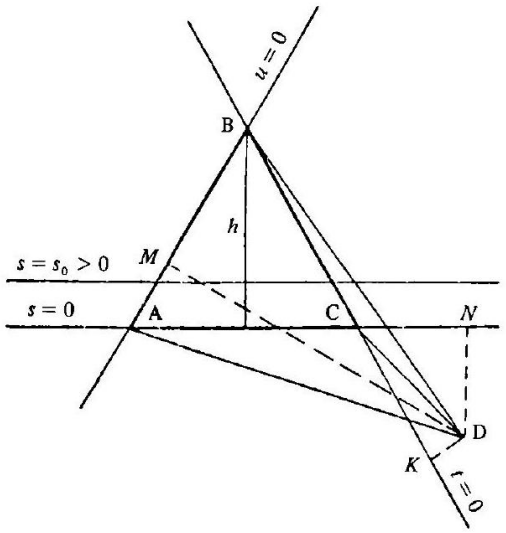


Figure 11.56.2
where we put $p_i = (-\&, -\boldsymbol{p})$ for particles which disappear as a result of the reaction, and $p_i = (\&, \boldsymbol{p})$ for particles produced in the reaction. This rule for the signs corresponds to the fact that $\sum\limits_a p_{ai} = 0$, as in the case of a decay. We indicate the pions by the indices a and b and the nucleons by c and d. For the channel (c) we then have

$$p_{ai} = \left(-\mathring{\mathrm{A}}_a, -\boldsymbol{p}_a\right), \quad p_{bi} = \left(-\mathring{\mathrm{A}}_b, -\boldsymbol{p}_b\right), \quad p_{ci} = \left(\mathring{\mathrm{A}}_c, p_c\right)$$
$$p_{di} = \left(\mathring{\mathrm{A}}_d, \boldsymbol{p}_d\right)$$
$$s = \left(\mathring{\mathrm{A}}'_a + \mathring{\mathrm{A}}'_b\right)^2 = \left(\varepsilon'_c + \mathring{\mathrm{A}}'_d\right)^2 \geqslant 4M^2$$

the allowable values of t are obtained from the condition $|\cos\theta'| \leqslant 1$.
The boundary of the physical region is given by the equation

$$s = -t - \frac{\left(M^2 - m^2\right)^2}{t} + 2\left(M^2 + m^2\right) \geqslant 4M^2 \tag{11.56.1}$$

it is a hyperbola with asymptotes $t = 0$ and $u = 0$ (figure 11.56.3).
In the case of channel (a) we get

$$p_{ai} = \left(-\mathring{\mathrm{A}}_a, -\boldsymbol{p}_a\right), \quad p_{ci} = \left(-\varepsilon_c, -\boldsymbol{p}_c\right), \quad p_{bi} = \left(\mathring{\mathrm{A}}_b, \boldsymbol{p}_b\right)$$
$$p_{di} = \left(\mathring{\mathrm{A}}_d, \boldsymbol{p}_d\right).$$

The physical region is bounded by the line $s = 0$ and the hyperbola

$$s = -t - \frac{\left(M^2 - m^2\right)^2}{t} + 2\left(M^2 + m^2\right), \quad t \geqslant (M + m)^2$$

which is the second branch of the hyperbola given by equation (11.56.1).

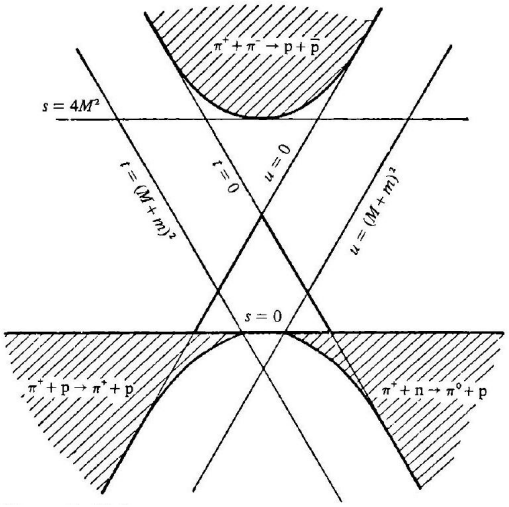


Figure 11.56.3.

One can similarly construct the physical region for the channel (b). From what we have said it is clear that the diagram which we have obtained is very similar to the Dalitz plot for three-particle decay (see problem 11.29).

The similarity is caused by the fact that in both cases four particles participate whose 4 -momenta satisfy the condition $p_{ai}+p_{bi}+p_{ci}+p_{di}=0$, by virtue of the momentum conservation law. Taking into account that for given masses of all particles, we have $m_a^2 = p_{ai}^2$, and so on, and we can therefore construct only two independent invariants from the 4 -momenta, for instance, $s = (p_{ai}+p_{bi})^2$ and $t = (p_{ai}+p_{ci})^2$. Thus we need a two-dimensional space (the kinematic plane) to depict such processes.

11.58 When a particle moving in a medium with a 4 -momentum p_{0i} emits a photon with a 4 -momentum $k_i = (\hbar\omega/c, \hbar\omega n/c)$, then the laws of conservation of energy and momentum may be described by the fourdimensional equation

$$p_{0i} = p_i + k_i$$

where p_i is the 4 -momentum of the particle after the emission of the photon. Put k_i on the left-hand side of this equation and square both sides. After simple rearrangement it is found that

$$\cos\vartheta = \frac{1}{n\beta}\left[1 + \frac{\pi\Lambda}{n\lambda}\left(n^2-1\right)\left(1-\beta^2\right)^{1/2}\right], \tag{11.58.1}$$

where $\Lambda = \hbar/mc$ is the Compton wavelength of the particle, $\lambda = 2\pi c/\omega n$ is the wavelength of the photon, and $\beta = v/c$. The second term, which is of the order of Λ/λ, is usually very small. This term represents quantum corrections (Λ is proportional to $\hbar$). When it is neglected, the relation given by equation (11.58.1) reduces to the classical condition for the emission of Cherenkov radiation, which is

$$\cos\vartheta = \frac{1}{n\beta}$$

11.60 Let p_{0i} and p_i represent the 4 -momenta of the particle before and after the emission and k_i the ' 4 -momentum' of the photon. The law of conservation of energy and momentum may then be written in the form

$$p_{0i} - k_i = p_i$$

On squaring both sides of this equation, and neglecting terms containing $\hbar^2$, it is found that

$$\left(m^2 - m_0^2\right) c^2 - 2(p \cdot k) + \frac{2\varepsilon_0 k}{c} = 0$$

where m_0 is the rest mass of the excited particle and m is the rest mass of the particle in the ground state.

Since $c^2 (m_0 - m)(m_0 + m) \approx 2\hbar\omega_0 m$ we have

$$n(\omega)\beta\cos\vartheta = 1 - \frac{\omega_0}{\omega}\left(1 - \beta^2\right)^{1/2} \tag{11.60.1}$$

where $\beta = v/c$. When $\omega_0 \to 0$, equation (11.60 .1) becomes

$$n(\omega)\beta\cos\vartheta = 1$$

which is the condition for the emission of Cherenkov radiation. It follows that this radiation is not associated in any way with a change in the internal state of the particle.

When $\omega_0 \neq 0$, equation (11.60 .1) is conveniently rewritten in the form

$$\omega = \frac{\omega_0 (1 - \beta^2)^{1/2}}{1 - n(\omega)\beta\cos\vartheta} \tag{11.60.2}$$

which describes the Doppler effect in a refracting medium (cf problem 10.43). It may be used when $n(\omega)\beta\cos\vartheta < 1$ and differs from the corresponding formula for the Doppler effect in a vacuum only by the presence of $n(\omega)$ in the denominator. When $\beta \ll 1$ no fundamentally new effects arise, but when $\beta \approx 1$ and there is dispersion in the medium, the phenomenon becomes more complicated.

In general, equation (11.60.2) is a nonlinear equation in ω (n is a function of ω!), and there may be more than one solution. Instead of a single shifted line, as in the usual Doppler effect, there are then several lines in the laboratory frame (composite Doppler effect).

11.61 Proceeding as in the solution of the preceding problem, the following results are obtained.

Emission at a frequency ω, which is accompanied by excitation of the particle, may occur when the velocity of the particle $v = \beta c$ exceeds the threshold value $c/n(\omega)\cos\vartheta$ where ϑ is the angle between the direction of the velocity v and the direction of the momentum of the photon. The energy necessary for this to occur is taken at the expense of the kinetic energy. This type of emission is observed at a fixed value of ω only in a certain range of acute angles ϑ within the Cherenkov cone whose surface is defined by $n\beta\cos\vartheta = 1$. The observed frequency ω is then given by

$$\omega = \frac{\omega_0 (1 - \beta^2)^{1/2}}{n(\omega)\beta\cos\vartheta - 1}, \quad n(\omega)\beta\cos\vartheta > 1$$

which is an equation in ω as in the preceding problem. In general, this equation has several solutions (composite superrelativistic Doppler effect).

11.62 We denote the angle between the initial electron momentum p_0 and the direction of propagation of the soft quantum by ϑ_1 and the angle between $\boldsymbol{p}_0$ and the direction of propagation of the hard quantum by ϑ_2.

From the law of conservation of 4 -momentum (cf problem 11.58), and by

making the assumption that $\hbar\omega_1 \ll \mathcal{E}_0$, $\hbar\omega_0 \ll \mathcal{E}_0$, we find

$$\cos\vartheta_2 = \frac{c}{v_0 n(\omega_1)} + \frac{\hbar\omega_2}{\hbar\omega_1}\frac{[1 - (v_0/c)\cos\vartheta_1]}{(v_0/c)\, n(\omega_1)} \tag{11.62.1}$$

From this it is clear that the hard Cherenkov quantum propagates inside the Cherenkov cone corresponding to the soft Cherenkov quantum of frequency ω_1. The opening angle of this cone is, in the accuracy to which we are working, determined by the condition $\cos\vartheta_1 = c/v_0 n(\omega_1)$. As in the case of the usual Cherenkov emission, for the occurrence of hard Cherenkov emission it is necessary that the inequality $v_0 > c\ln(\omega_1)$ is satisfied. This is possible only if $n(\omega_1) > 1$. Hence one of the quanta must be sufficiently soft. Solving equation (11.62.1) for $\hbar\omega_2$ we get

$$\hbar\omega_2 = \hbar\omega_1 \frac{[n(\omega_1)\, v_0/c]\cos\vartheta_1 - 1}{1 - (v_0/c)\cos\vartheta_2}$$

The maximum value of the energy $\hbar\omega_2$ is reached for $\vartheta_1 = \vartheta_2 = 0$:

$$(\hbar\omega_2)_{\max} = \hbar\omega_1 \frac{n(\omega_1)\, v_0/c - 1}{1 - v_0/c}$$

11.63

$$\hbar\omega_2 = \frac{2\hbar\omega_1 [n(\omega_1)\cos\vartheta_1 - 1]}{(mc^2/\&_0)^2 + 2(\hbar\omega_1/\mathscr{E}_0)[n(\omega_1)\cos\vartheta_1 - 1] + \vartheta_2^2}$$

The maximum value of $\hbar\omega_2$ is reached for $\vartheta_1 = \vartheta_2 = 0$. Particular cases: when $\varepsilon_0 \ll (mc^2)^2/\hbar\omega_1$, we have

$$(\hbar\omega_2)_{\max} \approx 2\hbar\omega_1 \left(\frac{\mathscr{G}_0}{mc^2}\right)^2 [n(\omega_1) - 1]$$

when $\S_0 \gg (mc^2)^2/\hbar\omega_1$, we have

$$(\hbar\omega_2)_{\max} \approx \&_0$$

It is clear from the last equation that a hard Cherenkov quantum can take away the larger part of the initial energy of an ultrarelativistic electron.

11.64 The scattering angle takes on discrete values, determined by the equation

$$\sin\frac{1}{2}\vartheta = \frac{n\pi\hbar}{ap_0}$$

with

$$\frac{1}{a} = \frac{n_1}{a_1} + \frac{n_2}{a_2} + \frac{n_3}{a_3}$$

where the n_i are integers.

11.66 When $\hbar\omega \ll \mathscr{E}_0$, we have

$$\hbar\omega = \frac{(qc)^2/2\varepsilon_0}{(mc^2/_0)^2 + \vartheta^2 - 2(qc/\varepsilon_0)}$$

The energy $\hbar\omega$ of a bremsstrahlung quantum takes on discrete values for fixed values of the angle ϑ, since the momentum transferred, $\boldsymbol{q} = 2\pi\hbar g$, is discrete.

11.67

$$\nu' = \nu\gamma\left(1 + \frac{v}{c}\cos\psi\right)$$

$$\sin\frac{1}{2}(\psi' - \psi) = \tanh\frac{1}{2}\alpha \sin\frac{1}{2}(\psi' + \psi), \quad \tanh\alpha = \frac{v}{c}$$

b The motion of charged particles in an electromagnetic field 11.68

$$\frac{m}{(1-v^2/c^2)^{1/2}}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+\frac{mvv}{c^2\,(1-v^2/c^2)^{3/2}}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{F}$$

(a) $\frac{m}{(1-v^2/c^2)^{3/2}}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=F$,

(b) $\frac{m}{(1-v^2/c^2)^{1/2}}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=F, \quad v\perp F$;

(c) $m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=F$.

The quantities $m\left[1-(v^2/c^2)\right]^{-3/2}$ and $m\left[1-(v^2/c^2)\right]^{-1/2}$ are sometimes referred to as the longitudinal and transverse masses, respectively.

11.69

$$F=\frac{1}{\gamma}F'+\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)\frac{(v\cdot F')\,v}{v^2}$$

$$F'=\gamma F-(\gamma-1)\frac{(v\cdot F)v}{v^2}$$

where $\gamma=\left[1-(v^2/c^2)\right]^{-1/2}$.

11.70

$$F=\gamma^2\frac{mv^2}{R}$$

11.72

$$\psi(\alpha)=-\frac{2\kappa\,(1-\beta^2)}{\left[(1-\beta^2)\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\right]^{1/2}}\ln r$$

where $\beta=v/c$ and r is the distance of the point of observation from the conductor.

11.73

$$F=\frac{2\epsilon\kappa}{\gamma r}$$

The problem may be solved in different ways: (a) the electromagnetic force on the moving point charge due to the linear charge and current can be computed directly (the Lorentz contraction must be taken into account!), (b) the force can be evaluated in the reference frame in which the magnetic field is zero, with subsequent application of the transformation formulae for the 4 -force, and (c) one can use the convection potential ψ obtained in the preceding problem and defined by $\boldsymbol{F}=-e\,\mathrm{grad}\,\psi$.

11.74

$$F=e\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\frac{2J_r}{vr}$$

where r is the distance of the electron from the axis of the beam. The current through a circle of radius r is given by

$$J_r=\frac{2\pi v}{(1-\beta^2)^{1/2}}\int_0^r\rho(r)r\;\mathrm{d}r$$

and the electron velocity is given by (see preceding problem)

$$v = \left(1 + \frac{eV}{mc^2}\right)^{-1} \left(1 + \frac{eV}{2mc^2}\right) \left(\frac{2eV}{m}\right)^{1/2}$$

At the surface an electron experiences a force $F = e\,(1 - v^2/c^2)\,(2\ \mathrm{J}/va)$ where a is the radius of the beam.

11.75 The acceleration of an outer electron is normal to the axis of the beam and to the electron velocity, and hence in the laboratory system we have (see solutions to problems 11.68 and 11.74)

$$\dot{v}_n = \frac{(1 - v^2/c^2)^{1/2}}{m} F = \frac{2eJ}{\mathrm{mav}} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2}$$

The broadening of the beam is given by

$$\Delta a = \frac{\dot{v}_n t^2}{2} = \frac{\dot{v}_n L^2}{2v^2}$$

Since $\Delta a \ll L$, we have $\dot{v}_n L/v \ll v$ or $\dot{v}_n t \ll v < c$. The broadening Δa can therefore be calculated from a nonrelativistic formula.

The same result may be obtained for Δa by considering the broadening of the beam in the reference frame moving together with the electrons. In this frame the electrons experience only an electrostatic force.

11.76 Let the direction of the x-axis be parallel to $\boldsymbol{E}$. The differential equations of motion in the four-dimensional form are

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}\tau^2} = \frac{|e|E}{mc} \frac{\mathrm{d}(ct)}{\mathrm{d}\tau}, \quad \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}\tau^2} = 0, \quad \frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}\tau^2} = 0, \quad \frac{\mathrm{d}^2 (ct)}{\mathrm{d}\tau^2} = \frac{|e|E}{mc} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}$$

Integration of these equations subject to the initial conditions

$$x = y = z = ct = 0, \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} = \frac{p_{0x}}{m}, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau} = \frac{p_{0y}}{m}$$
$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}\tau} = 0, \quad c\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\S_0}{mc} \quad \text{at} \quad \tau = 0, \quad \text{where} \quad {}_0 = \left(c^2 p_0^2 + m^2 c^4\right)^{1/2}$$

leads to the following equations for the particle trajectory in the fourdimensional space:

$$x = \frac{\mathring{\mathrm{A}}_0}{|e|E} \left(\cosh \frac{|e|E\tau}{mc} - 1\right) + \frac{cp_{0x}}{|e|E} \sinh \frac{|e|E\tau}{mc}$$
$$y = \frac{p_{0y}\tau}{m}, \quad z = 0$$
$$ct = \frac{\mathring{\mathrm{A}}_0}{|e|E} \sinh \frac{|e|E\tau}{mc} + \frac{cp_{0x}}{|e|E} \left(\cosh \frac{|e|E\tau}{mc} - 1\right)$$

From the last equation we have

$$\tau = \frac{mc}{|e|E} \ln \frac{p_{0x} + |e|Et + \left[(p_{0x} + |e|Et)^2 + m^2 c^2 + p_{0y}^2\right]^{1/2}}{p_{0x} + \text{®}_0/c}$$

Using this expression, and eliminating the sinh and cosh terms from the first and last equations, we obtain the following equations for the trajectory in the three-dimensional form

$$x(t) = \frac{c}{|e|E}\left\{\left[(p_{0x} + |e|Et)^2 + m^2c^2 + p_{0y}^2\right]^{1/2} - \frac{\mathring{A}_0}{c}\right\};$$
$$y(t) = \frac{cp_{0y}}{|e|E}\ln\frac{p_{0x} + |e|Et + \left[(p_{0x} + |e|Et)^2 + m^2c^2 + p_{0y}^2\right]^{1/2}}{p_{0x} + \mathscr{E}_0/c};$$
$$z(t) = 0.$$

When $p_0 \ll mc$ and $t \ll mc/|e|E$, the motion is nonrelativistic. Then the expressions for x, y, and z go over into the usual nonrelativistic expressions

$$x(t) = \frac{p_{0x}}{m}t + \frac{|e|E}{2m}t^2; \quad y(t) = \frac{p_{0y}}{m}t$$

After a sufficiently long interval of time ($t \gg mc/|e|E$), the velocity of the particle will approach the velocity of light (even when it is initially small). Then

$$x(t) = ct - \frac{mc^2}{|e|E}, \quad y(t) = \frac{cp_{0y}}{|e|E}\ln\left(\frac{2|e|Et}{mc}\right)$$

and the motion becomes uniform (with velocity c). The functions $x(t)$ and $y(t)$ are illustrated in figures 11.76 .1 a and 11.76 .1 b respectively. The
motion for which $p_{0y} = 0$ (see figure 11.76.1a) is usually referred to as hyperbolic.

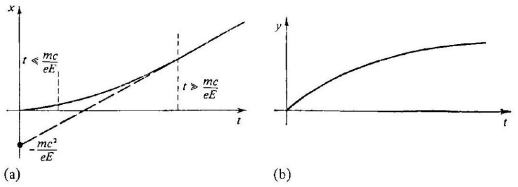


Figure 11.76.1.

11.77 The particle trajectory is given by

$$x = \frac{\mathscr{G}_0}{|e|E}\left[\cosh\left(\frac{|e|E}{cp_{0y}}y\right) - 1\right] + \frac{cp_{0x}}{|e|E}\sinh\left(\frac{|e|E}{cp_{0y}}y\right)$$

In the nonrelativistic limit $\mathscr{G}_0 = mc^2, p_0 \ll mc$, and $|e|Ey/cp_{0y} \ll 1$. The latter result follows from the fact that $|e|E\tau$, which is the momentum given to the particle, should be small in comparison with mc in the nonrelativistic approximation. Thus,

$$x = \frac{m|e|Ey^2}{2p_{0y}^2} + \frac{p_{0x}}{p_{0y}}y$$

11.78

$$l = \frac{-mc^2}{eE}$$

11.79 Let the z-axis be parallel to H and consider the differential equations of motion in the four-dimensional form [1].

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}\tau^2} = \omega_1\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau}, \quad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}\tau^2} = -\omega_1\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}, \quad \frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}\tau^2} = 0, \quad \frac{\mathrm{d}^2t}{\mathrm{d}\tau^2} = 0$$

where $\omega_1 = \mathrm{eH/mc}$.
The first two equations may be conveniently written in the form $\mathrm{d}^2u/\mathrm{d}\tau^2 + \mathrm{i}\omega_1\,\mathrm{d}u/\mathrm{d}\tau = 0$, where $u = x + \mathrm{i}y$. It follows from the latter equation that

$$ct = \frac{\varepsilon_0}{mc}\tau, \quad \varepsilon_0 = c\left(p_0^2 + m^2c^2\right)^{1/2}, \quad \& = mc^2\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} = \varepsilon_0$$

(1) It is possible to start from the three-dimensional equation $\mathrm{d}p/\mathrm{d}t = e[v \wedge H]/c$ by making the substitution $p = \varnothing v/c^2$ and using the fact that $\& =$ constant (the magnetic field does no work on the particle).

The energy of the particle is independent of time, since the forces due to the magnetic field do no work. By integrating the equations for u and z, separating the real and imaginary parts of u, and expressing the proper time τ in terms of t, it is found that

$$\left.\begin{aligned} x &= R_1\cos(\omega_2 t + \alpha) + \tfrac{cp_{0y}}{eH} + x_0 \\ y &= -R_1\sin(\omega_2 t + \alpha) - \tfrac{cp_{0x}}{eH} + y_0 \\ z &= v_{0z}t \end{aligned}\right\} \tag{11.79.1}$$

It is evident from equation (11.79.1) that the particle will travel along a helix. The radius of the helix is $R = |R_1|$ where $R_1 = p_{0\perp}c/eH$ and $p_{0\perp} = \left(p_{0x}^2 + p_{0y}^2\right)^{1/2}$. The associated frequency is given by $\omega = |\omega_2|$ where $\omega_2 = eHc/\&$ (the sign of the charge may be negative). The pitch of the helix is given by

$$\frac{2\pi\,|v_{0z}|}{\omega} = \frac{2\pi\,|v_{0z}|}{|e|Hc}$$

where $v_{0z} = p_{0z}c^2/\varepsilon$.
It is clear that $R = v_{0\perp}/\omega$ where $v_{0\perp} = p_{0\perp}c^2/\mathscr{E}$ is the velocity component perpendicular to the field. At low particle velocities $\& = mc^2$, and

$$R = \frac{mcv_{0\perp}}{|e|H}, \quad \omega = \frac{|e|H}{mc}$$

The angle α is given by

$$\sin\alpha = -\frac{p_{0x}}{p_{0\perp}}, \quad \cos\alpha = -\frac{p_{0y}}{p_{0\perp}}$$

11.80

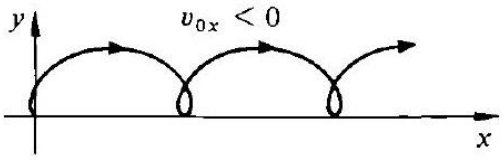
$$x = a\sin\omega t + \frac{cE_y}{H}t, \quad y = a(\cos\omega t - 1), \quad z = \frac{eE_z}{2m}t^2 + v_{0z}t$$

where

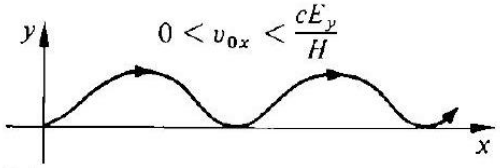
$$a = \frac{1}{\omega}\left(v_{0x} - \frac{cE_y}{H}\right)$$

The motion in the direction of the z-axis takes the form of uniform acceleration under the action of the z component of the electric field. In the x, y plane, the orbit is circular, of radius a, and the centre of the circle moves in the direction perpendicular to the $(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H})$ plane. The drift velocity is $v_{\mathrm{dr}} = cE_y/H$. The possible projections of the trajectories on the x, y plane are shown in figure 11.80.1. The 'curves shown in figures 11.80.1a, 11.80.1c, 11.80.1e, and 11.80 .1 g are trochoids, while those in figures 11.80 .1 b and 11.80 .1 f are cycloids. The motion is nonrelativistic
when $v_0 \ll c, E_y/H \ll 1$, and the time t is not too large, i.e.

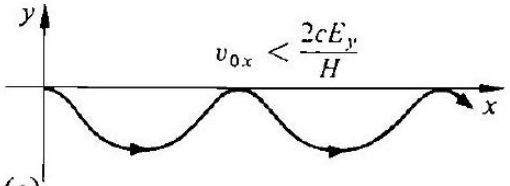
$$t \ll \frac{mc}{eE_z} = \frac{H}{\omega E_z}$$



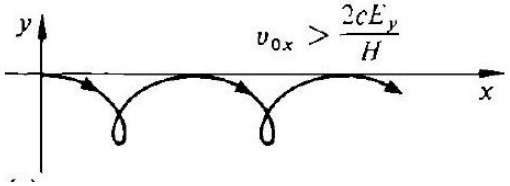
(a)



(c)



(e)



(g)

Figure 11.80.1.

11.81

$$x = \frac{p_{0x}c}{eH}\sin\kappa H\tau + \frac{p_{0y}c}{eH}(\cos\kappa H\tau - 1)$$
$$y = \frac{p_{0x}c}{eH}(\cos\kappa H\tau - 1) + \frac{p_{0y}c}{eH}\sin\kappa H\tau$$
$$z = \frac{\text{Å}_0}{eH}(\cosh\kappa E\tau - 1) + \frac{p_{0z}c}{eH}\sinh\kappa E\tau$$
$$ct = \frac{p_{0z}c}{eE}(\cosh\kappa E\tau - 1) + \frac{\text{Å}_0}{eE}\sinh\kappa E\tau$$

where $\kappa = e/mc$.

11.82 (a) Let the electric field E be parallel to the y-axis, and the magnetic field H be parallel to the z-axis (in the S system). At $t = 0$ the particle is at the point $x = y = z = 0$ and has a momentum p_0. The motion is different when $E > H$ and when $H > E$. In the first case, $(\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{H}) = 0, E^2 - H^2 > 0$, and hence there exists a frame S' in which the magnetic field is zero. It is clear from the Lorentz transformations for the
field that S' should move relative to S with velocity $V = cH/E$ along the x-axis (see problem 10.61). The required equations of motion for the particle in S may be obtained from the equations of motion in a uniform electric field E' with the aid of the Lorentz transformation $x = (x' + Vt')\,/\,(1 - V^2/c^2)^{1/2}$, and so on. In this method $E', p'_{0x}, p'_{0y}, p'_{0z}$ should be expressed in terms of the corresponding quantities without primes. The final result is

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{E\left(cp_{0x}E-\varepsilon_0 H\right)}{mc\left(E^2-H^2\right)}\tau+\frac{H\left(\varepsilon_0 E-cp_{0x}H\right)}{e\left(E^2-H^2\right)^{3/2}}\sinh\kappa\left(E^2-H^2\right)^{1/2}\tau \\
&+\frac{cp_{0y}H}{e\left(E^2-H^2\right)}\left[\cosh k\left(E^2-H^2\right)^{1/2}\tau-1\right], \\
y &= \frac{{}_0E-cp_{0x}H}{e\left(E^2-H^2\right)}\left[\cosh\kappa\left(E^2-H^2\right)^{1/2}\tau-1\right] \\
&+\frac{p_{0y}c}{e\left(E^2-H^2\right)^{1/2}}\sinh\kappa\left(E^2-H^2\right)^{1/2}\tau, \quad z=\frac{p_{0z}}{m}\tau, \\
ct &= \frac{H\left(cp_{0x}E-\mathscr{E}_0 H\right)}{mc\left(E^2-H^2\right)}\tau+\frac{E\left(\mathscr{E}_0 E-cp_{0x}H\right)}{e\left(E^2-H^2\right)^{3/2}}\sinh\kappa\left(E^2-H^2\right)^{1/2}\tau \\
&+\frac{cp_{0y}E}{e\left(E^2-H^2\right)}\left[\cosh\kappa\left(E^2-H^2\right)^{1/2}\tau-1\right],
\end{aligned}
\tag{11.82.1}
$$

where

$$\kappa=\frac{e}{mc}$$

When $H>E$, the transformation to the system in which there is only a magnetic field leads to the same result as that given by equations (11.82.1), except that E is replaced by H. In carrying out this replacement, it must be remembered that $\sinh i\alpha = i\sin\alpha$ and $\cosh i\alpha=\cos\alpha$.

The solution for $E=H$ may be obtained from the above formulae by letting $E\to H$. The result is

$$x=\frac{\kappa^2H^2}{6m}\left(\frac{\varepsilon_0}{c}-p_{0x}\right)\tau^3+\frac{cp_{0y}\kappa^2H}{2e}\tau^2+\frac{p_{0x}}{m}\tau$$

and so on. The solution for limit (b) is similar to the solutions used in problems 11.76 and 11.79

11.83

$$T=mc^2\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}-1\right)$$

and hence, for example, in the system considered in problem 11.81, we have
$T=\&_0\cosh\kappa E\tau+cp_{0z}\sinh\kappa E\tau-mc^2$.

11.84 Using the result obtained in problem 10.61, and evaluating V/c to within terms of the first order in E/H, we find that $V/c=E_y/H$. The solution is similar to that for problem 11.82. In all the calculations, second and higher orders of $E_y/H, E_z/H$, and v_0/c should be neglected. The final result is

$$
\begin{aligned}
x &= a\sin\omega t+\frac{v_{0y}}{\omega}(\cos\omega t-1)+c\frac{E_y}{H}t \\
y &= a(\cos\omega t-1)+\frac{v_{0y}}{\omega}\sin\omega t \\
z &= \frac{eE_zt^2}{2m}+v_{0z}t
\end{aligned}
\tag{11.84.1}
$$

where

$$a=\frac{v_{0x}-cE_y/H}{\omega}\quad\text{and}\quad\omega=\frac{eH}{mc}$$

At $t = 0$ the particle is at the point $x = y = z = 0$. The formulae given by equations (11.84 .1) contain the solution of problem 11.80 as a special case.

11.85 Let the x-axis be parallel to the direction of propagation of the plane wave. The wave field can then be described by two functions of t', for example, $E_y(t')$ and $E_z(t')$:

$$E = [0, E_y(t'), E_z(t')], \quad H = [0, -E_z(t'), E_y(t')]$$

Using equation (11.b.8) we find that $t' = \tau$ and hence the parametric equations of motion are

$$x(\tau) = \tfrac{1}{2m^2c}\int_0^\tau p_\perp^2 \, \mathrm{d}\tau, \quad y(\tau) = \tfrac{1}{m}\int_0^\tau p_y \, \mathrm{d}\tau$$
$$z(\tau) = \tfrac{1}{m}\int_0^\tau p_z \, \mathrm{d}\tau, \qquad t(\tau) = \tau + \tfrac{1}{2m^2c^2}\int_0^\tau p_\perp^2 \, \mathrm{d}\tau$$

where

$$p_\perp = e\int_0^\tau E(t')\,\mathrm{d}t' = e_y p_y + e_z p_z$$

is the component of the momentum of the particle in the E, H plane.

11.86 The particle moves in the x, z-plane, and its equation of motion is $\gamma\dot{z} = c(\gamma - 1)$. The orbit is given by the equations:

$$x = b(1 - \cos\theta), \quad z = \frac{1}{8}kb^2(\sin 2\theta - 2\theta), \quad b = \frac{ea}{mk^2c^2}$$

11.87 The coordinates of the particle are given by

$$x = x_0 \cos\omega t, \quad y = y_0 \cosh\omega t, \quad z = vt$$

where $\omega^2 = 2ek/m$.

It follows from the form of $x(t)$ and $y(t)$ that this type of lens may be used to produce a charged particle beam in the form of a flat ribbon.

11.88

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{m\dot{r}}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}}\right] = \frac{mr\dot{\phi}^2}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} + eE_r + \frac{e}{c}\left(-H_\phi\dot{z} + H_z r\dot{\phi}\right)$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{mr^2\dot{\phi}}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}}\right] = e\left[E_\phi + \frac{1}{c}\left(H\dot{z} - H_z\dot{r}\right)\right] r$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{m\dot{z}}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}}\right] = e\left[E_z + \frac{1}{c}\left(H_\phi\dot{r} - H_r r\dot{\phi}\right)\right]$$

The first and last of these equations have the form of the usual Newtonian laws of motion, except that they contain the variable mass $m/(1 - v^2/c^2)^{1/2}$. Moreover, the right-hand side of the first equation contains the term $mr\dot{\phi}^2/(1 - v^2/c^2)^{1/2}$ which is independent of the form of the electromagnetic forces (centripetal force). The second equation gives the time derivative of the angular momentum of the particle about the z-axis in terms of the z component of the moment of the Lorentz force.

11.89 When $H = 0$, the electron trajectories are rectilinear. As the magnetic field increases, the trajectories become more and more curved in the plane perpendicular to the axis. Consider the cylindrical coordinates r, ϕ, z, where the z-axis lies along the axis of the cylinder. The electrons

will not reach the anode if at $r = b$ their velocity is parallel to the surface of the anode, i.e. when $\dot{r}|_{r=b} = 0$. Moreover, $\dot{\phi}\Big|_{r=b} = v_{\max}/b$. Let us use the second of the equations given in the solution to the preceding problem, which in the present situation assumes the form

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{mr^2\dot{\phi}}{(1-v^2/c^2)^{1/2}}\right] = -\frac{e}{c}H(r)r\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} \tag{11.89.1}$$

Integrating equation (11.89.1) along the particle trajectory between $r = a$ and $r = b$, we have

$$\left.\frac{mr^2\dot{\phi}}{(1-v^2/c^2)^{1/2}}\right|_{r=a}^{r=b} = -\frac{e}{2\pi c}\int_a^b 2\pi Hr\ \mathrm{d}r = -\frac{e\Phi}{2\pi c}$$

Hence

$$\Phi_{\text{crit}} = \frac{2\pi cb}{|e|}p_{\max} = 2\pi cb\left[\frac{2mV}{|e|}\left(1+\frac{|e|V}{2mc^2}\right)\right]^{1/2} \tag{11.89.2}$$

where we have used the result of problem 11.1 and the fact that $T_{\max} = |e|V$.

When the potential difference is small, so that $|e|V \ll mc^2$, which is equivalent to saying that $v \ll c$, equation (11.89.2) assumes the simpler form

$$\Phi_{\text{crit}} = 2\pi cb\left(\frac{2mV}{|e|}\right)^{1/2}$$

11.90 The potential difference V should be larger than

$$V_{\text{crit}} = \left(\frac{4J^2}{c^2}\ln^2\frac{b}{a} + \frac{m^2c^4}{e^2}\right)^{1/2} - \frac{mc^2}{|e|}$$

When $|e|V \ll mc^2$ (nonrelativistic electrons), we have

$$V_{\text{crit}} = \frac{2J^2|e|}{mc^4}\ln^2\frac{b}{a}$$

11.91

$$b = a\exp\left(\frac{p_0c^2}{J|e|}\right)$$

where $p_0 = mv_0/\left(1-v_0^2/c^2\right)^{1/2}$.

11.93 Consider the cylindrical coordinates r, ϕ whose origin coincides with the charge Ze and whose polar axis is parallel to the angular momentum of the particle. The motion will then take place in the $z = 0$ plane and r will be the distance between the charges $-e$ and Ze. The first two equations in the solution to problem 11.88 will then be

$$\left.\begin{aligned}\tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\tfrac{m\dot{r}}{(1-v^2/c^2)^{1/2}}\right] &= \tfrac{mr\dot{\phi}^2}{(1-v^2/c^2)^{1/2}} - \tfrac{Ze^2}{r^2}\\ \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\tfrac{mr^2\dot{\phi}}{(1-v^2/c^2)^{1/2}}\right] &= 0\end{aligned}\right\} \tag{11.93.1}$$

It follows from the second equation that the angular momentum is an integral of the motion, so that

$$\frac{mr^2\dot{\phi}}{(1-v^2/c^2)^{1/2}} = K = \text{ constant} \tag{11.93.2}$$

The second integral of the motion is the total energy of the system:

$$\frac{mc^2}{(1-v^2/c^2)^{3/2}} - \frac{Ze^2}{r} = \& = \text{ constant} \tag{11.93.3}$$

It follows from equation (11.93.3) that there are two main types of trajectories. At large values of r the total energy is $\& = mc^2 + T$ (T is the kinetic energy), since as $r \to \infty$, the potential energy $Ze^2/r \to 0$. Since $T \geqslant 0$, it follows that when $E < mc^2$ the particle cannot reach large distances from the attracting centre, and its trajectory will lie in a finite region (finite motion). When $E > mc^2$, there will be trajectories extending to infinity (infinite motion).

Let us now find the differential equation for the particle trajectory. It follows from equation (11.93.3) that

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \frac{K\left(1-v^2/c^2\right)^{1/2}}{mr^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\phi} \tag{11.93.4}$$

Substituting equations (11.93.3) and (11.93.4) into the first equation in (11.93.1) we obtain the required differential equation:

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\phi^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \left(1-\rho^2\right)\frac{1}{r} = \frac{Ze^2\&}{K^2c^2} \tag{11.93.5}$$

where $\rho = Ze^2/Kc$.

When $\rho \neq 1$, the integration of this equation yields

$$r = \frac{p}{1+\epsilon\cos\left(1-\rho^2\right)^{1/2}\phi}, \quad p = \frac{K^2c^2 - Z^2e^4}{Ze^2\&} \tag{11.93.6}$$

where ϵ is an integration constant. The second integration constant may be eliminated by a suitable choice of the origin of the angle ϕ, and the quantity ϵ may be expressed in terms of $\mathscr{G}$ and K. The trajectories are symmetric with respect to the x-axis ($\phi = 0$).

Consider the case $\rho < 1$ in greater detail. As can be seen from equation (11.93.6), the particle will not approach the centre to distances smaller than $r_{\min} = p/(1+\epsilon)$ if it is assumed that $\epsilon > 0$. In equation (11.93.6) the origin for the angle ϕ is chosen so that $r = r_{\min}$ when $\phi = 0$. The particle can therefore reach the distance $r_{\min}$ from the centre several times. At all such points $\dot{r} = 0$ and the velocity is perpendicular to the radius vector r. Hence,

$$K = \frac{mvr_{\min}}{(1-v^2/c^2)^{1/2}}$$

By eliminating v from this expression and from

$$\S = \frac{mc^2}{(1-v^2/c^2)^{1/2}} - \frac{Ze^2}{r_{\min}}$$

and expressing $r_{\min}$ in terms of ϵ it is found that

$$\epsilon = \frac{1}{\rho}\left[1 - \frac{m^2c^4}{\&^2}\left(1-\rho^2\right)\right]^{1/2} \tag{11.93.7}$$

It follows from equation (11.93.7) that $\epsilon < 1$ when $\& < mc^2$. The motion is then finite, and the trajectory is quasi-ellipsoidal (figure 11.93.1). It takes the form of a rosette lying

between circles of radii $p/(1+\epsilon)$ and $p/(1-\epsilon)$. The rosette may be obtained by rotating the nonrelativistic elliptical trajectory in its own plane. A complete oscillation of r from the minimum value $r_{\min} = p/(1+\epsilon)$ (pericentre) to the maximum value $r_{\max} = p/(1-\epsilon)$ (apocentre) and back to a new minimum, occurs when ϕ increases by $2\pi/\left(1-\rho^2\right)^{1/2}$. The pericentre of the orbit is thus rotated through an angle $2\pi\left[\left(1-\rho^2\right)^{-1/2}-1\right]$ in each period of r. If $\left(1-\rho^2\right)^{1/2}$ is a rational number, then the trajectory will close after a finite number of revolutions.

When $\mathscr{E} > mc^2, \epsilon > 1$. The motion is infinite and the trajectory is quasi-hyperbolic (figure 11.93.2). It has two branches extending to infinity at $\phi = \pm\phi_0$, where $\phi_0 = \arccos(-1/\epsilon)/\left(1-\rho^2\right)^{1/2}$. A particle approaching the charge Ze along one of these branches may execute a number of revolutions about the charge before it leaves it to escape to infinity along the other branch.

The case $\& = mc^2$ corresponds to $\epsilon = 1$. Here, the motion is again infinite and the trajectory is quasi-parabolic.

As $\rho \to 1$, the above trajectories become elliptical ($\epsilon < 1$), hyperbolic ($\epsilon > 1$), and parabolic ($\epsilon = 1$), and correspond to the usual nonrelativistic Keplerian solutions. This is inevitable, since $v/c \ll 1$ when $\rho \ll 1$[(2)].

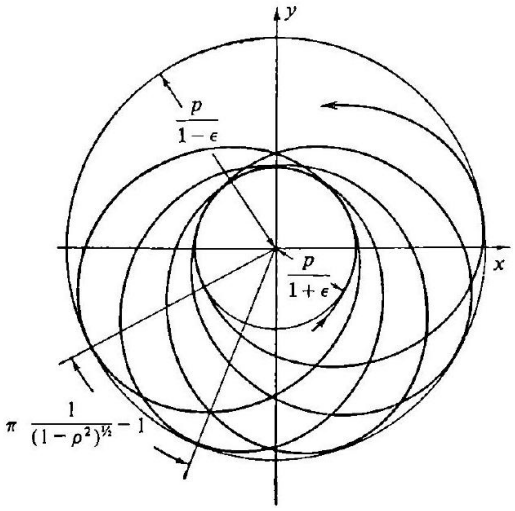


Figure 11.93.1.

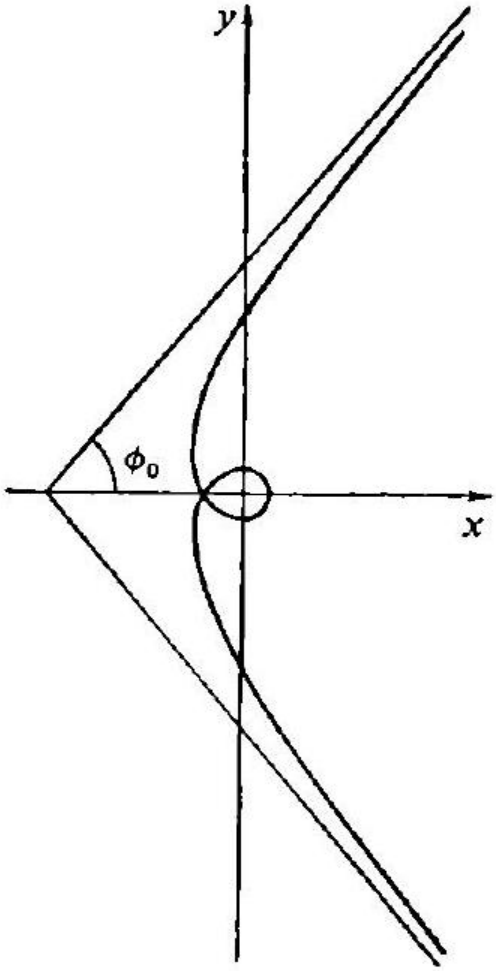


Figure 11.93.2.

11.94 When $\rho > 1$, the solution of equation (11.93.5) in the preceding problem can conveniently be rewritten as

$$r = \frac{p_1}{-1 + \epsilon_1 \cosh\left(\rho^2 - 1\right)^{1/2} \phi} \tag{11.94.1}$$

(2) In the nonrelativistic limit

$$\rho = \frac{Ze^2}{Kc} \sim \frac{Ze^2}{mvc} \sim \frac{|U|}{mvc}.$$

According to the virial theorem $|U| = 2T \approx mv^2$, so that $\rho \approx v/c \ll 1$.

where

$$p_1 = \frac{-K^2c^2 + Z^2e^4}{Ze^2\mathscr{E}}$$

$$\epsilon_1 = \left[\frac{1}{\rho^2} + \frac{m^2c^4}{\mathscr{E}^2}\left(1 - \frac{1}{\rho^2}\right)\right]^{1/2}$$

The trajectories described by equation (11.94.1) become spirals which pass through the origin as $\phi \to \pm\infty$. The particle passes through the centre of force (in the nonrelativistic limit this is only possible if $K = 0, \rho = \infty$). When $\& > mc^2$ we have $\epsilon_1 < 1$ and the trajectory has two branches which reach out to infinity at $\phi = \pm\phi_0$, where $\phi_0 = \operatorname{arcosh}\left(1/\epsilon_1\right) / \left(\rho^2 - 1\right)^{1/2}$ (figure 11.94.1). When $< mc^2$ we have $\epsilon_1 > 1$ and the trajectory is as shown in figure 11.94 .2 .

When $\rho = 1$, the solution given by equation (11.94.1) cannot be used, and the differential equation for the trajectory must be integrated again. The result of this integration is

$$r = \frac{2Ze^2\mathscr{Q}}{\mathscr{G}^2(\phi^2 - 1) + m^2c^4}$$

The trajectory is then also a spiral passing through the centre when $\phi \to \pm\infty$, although the centre is approached much more slowly than in the case $\rho > 1$. The general nature of the trajectory is similar to that illustrated in figures 11.94 .1 and 11.94.2.

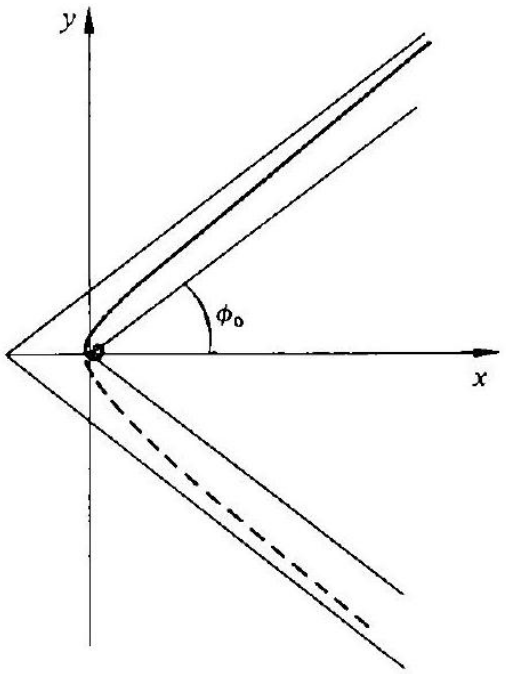


Figure 11.94.1.

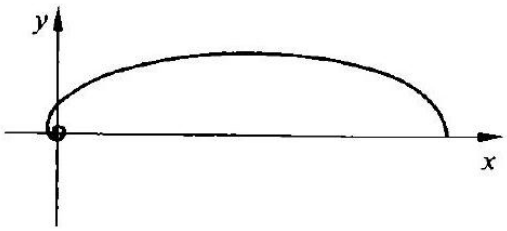


Figure 11.94.2.

11.95 When $Ze^2/Kc < 1$,

$$r = \frac{p}{-1 + \epsilon\cos\phi\,(1 - Z^2e^4/K^2c^2)^{1/2}}$$

where

$$p = -\frac{Z^2e^4 - K^2c^2}{Ze^2}, \quad \epsilon = \frac{c}{Ze^2\varepsilon}\left[K^2\varepsilon^2 - m^2c^2\left(K^2c^2 - Z^2e^4\right)\right]^{1/2} > 1$$

The trajectory is quasi-hyperbolic (figure 11.95.1). Its two branches reach infinity at $\phi = \pm\phi_0$, where

$$\phi_0 = \frac{1}{(1 - Z^2e^4/K^2c^2)^{1/2}}\arccos\frac{1}{\epsilon}$$

When $Ze^2/Kc \ll 1$, the particle moves on a hyperbola. This corresponds to nonrelativistic motion with $v \ll c$ (see footnote to the solution of problem 11.93).

When $Ze^2/Kc > 1$,

$$r = -\frac{p}{1 - \epsilon \cosh \phi \left(Z^2e^4/K^2c^2 - 1\right)^{1/2}}$$

where $\epsilon < 1$. The general character of the trajectory is similar to that in the previous example.

The two branches reach infinity at

$$\phi = \pm \frac{1}{\left(Z^2e^4/K^2c^2 - 1\right)^{1/2}} \operatorname{arcosh} \frac{1}{\epsilon}$$

When $Ze^2/Kc = 1$,

$$r = \frac{2Ze^2}{\mathring{\mathrm{A}}^{\,2} \left(1 - \phi^2\right) - m^2c^4}$$

The two branches of the trajectory reach infinity when

$$\phi = \frac{\left(\varepsilon^2 - m^2c^4\right)^{1/2}}{\varepsilon}$$

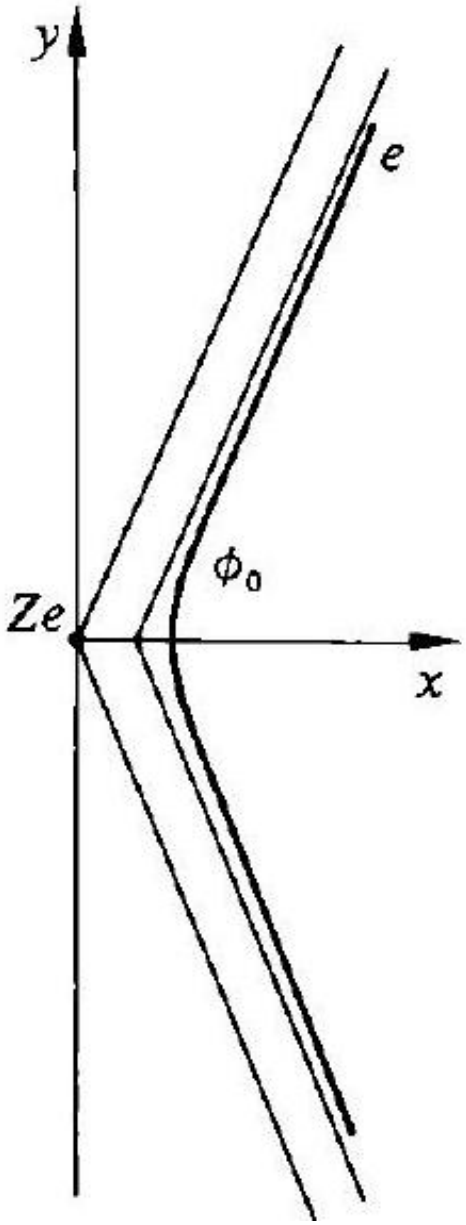


Figure 11.95.1.

11.97 When $ee' < 0$ (attraction)

$$r = \frac{a\,|\epsilon^2 - 1|}{1 + \epsilon\cos\phi}$$

where

$$a = \left|\frac{ee'}{2}\right|, \quad \epsilon = \left(1 + \frac{2K^2}{\mu e^2 e'^2}\right)^{1/2}, \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

$K = \mu r^2\dot{\phi}$ is the angular momentum, & $= ee'/r + \frac{1}{2}\mu v^2$ is the total energy of the particle, and r, ϕ are the polar coordinates. The particle trajectory is a conic section: it is an ellipse ($\epsilon < 1$) when & < 0, a hyperbola with the charge e' at one of its foci ($\epsilon > 1$) when > 0, and a parabola ($\epsilon = 1$) when $\mathscr{G} = 0$.

When $ee' > 0$ (repulsion)

$$r = \frac{a\,(\epsilon^2 - 1)}{-1 + \epsilon\cos\phi}$$

In this case > 0, the eccentricity $\epsilon > 1$, and the trajectory is a hyperbola with the charge e' at the external focus.

11.98 The differential scattering cross section may be calculated from the formula

$$\sigma(\theta) = \frac{s\ \mathrm{d}s}{\sin\theta\ \mathrm{d}\theta} \tag{11.98.1}$$

where θ is the angle of scattering corresponding to a given value of the impact parameter s. The relation between s and θ may be found from the

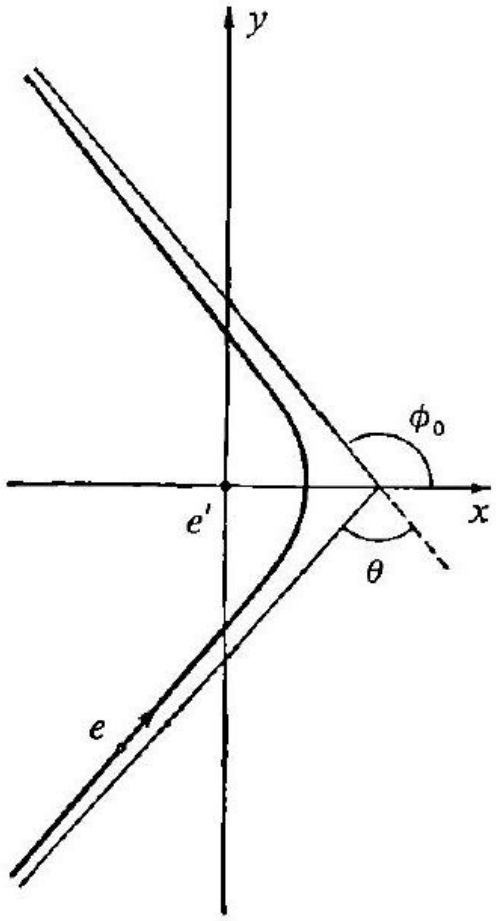


Figure 11.98.1.

equation for the trajectory of the particle (see preceding problem). In the case of attraction ($ee' < 0$), $\cos\phi > -\epsilon^{-1}$. The angle ϕ varies between $-\phi_0$ and ϕ_0 (figure 11.98.1) as the particle traverses its orbit ($\cos\phi_0 = -\epsilon^{-1}$). The scattering angle θ is the complement of the angle between the asymptotes of the hyperbolic trajectory. It follows from figure 11.98.1 that $\frac{1}{2}\theta = -\frac{1}{2}\pi + \phi_0$ and hence

$$\cot^2\frac{1}{2}\theta = \mathrm{cosec}^2\frac{1}{2}\theta - 1 = \sec^2\phi_0 - 1 = \epsilon^2 - 1 = \frac{2\&K^2}{me^2e'^2}$$

The angular momentum is $K = mv_0 s$, so that

$$s^2 = \frac{e^2e'^2}{m^2v_0^4}\cot^2\frac{1}{2}\theta$$

Differentiation and substitution into equation (11.98.1) yields

$$\sigma(\theta) = \left(\frac{ee'}{2mv_0^2}\right)^2 \mathrm{cosec}^4\frac{1}{2}\theta$$

This is the well-known Rutherford formula. The same result is obtained when $ee' > 0$.
11.99 For $ee' < 0$ (attraction),

$$\theta = \left[\frac{2cK}{\left(c^2K^2 - Z^2e^4\right)^{1/2}} - 1\right]\pi - \frac{2cK}{\left(c^2K^2 - Z^2e^4\right)^{1/2}} \arctan \frac{v_0\left(c^2K^2 - Z^2e^4\right)^{1/2}}{cZe^2}$$

where v_0 is the velocity of the charge when $r \to \infty$.
When $ee' > 0$ (repulsion)

$$\theta = \pi - \frac{2cK}{\left(c^2K^2 - Z^2e^4\right)^{1/2}} \arctan \frac{v_0\left(c^2K^2 - Z^2e^4\right)^{1/2}}{cZe^2}$$

11.100 Large impact parameters s correspond to small angles of scattering. Hence, by putting $K = p_0 s$, where p_0 is the momentum at $r \to \infty$, it is possible to find the required dependence of the angle θ on s by letting $s \to \infty$ (evidently, $K > |ee'|/c$) in the general formulae derived in the preceding problem. On passing to the limit, the same result is obtained both for $ee' < 0$ and $ee' > 0$, namely,

$$\theta = \pi - 2 \arctan \frac{v_0 p_0 s}{|ee'|} = \frac{2Ze^2}{v_0 p_0 s} \ll 1$$

and hence $s = 2|ee'|/v_0 p_0 \theta$ and

$$\sigma(\theta) = \frac{s\ \mathrm{d}s}{\theta\ \mathrm{d}\theta} = 4\left(\frac{ee'}{v_0 p_0}\right)^2 \frac{1}{\theta^4}$$

11.101

$$x = vt = \frac{2}{3}\left[\frac{(\epsilon+1)}{(\epsilon-1)}\frac{ma^3}{e^2}\right]^{1/2}.$$

11.102 The accelerating electric field is given by

$$E_\phi = \frac{1}{2\pi rc}\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$$

where r is the radius of the orbit of the electron, Φ is the magnetic flux intercepted by the orbit, and ϕ is the azimuth angle of the electron.

When the electron travels along the orbit through a distance $r\ \mathrm{d}\phi$, the work done by the field E_ϕ is

$$\delta A = E_\phi r\ \mathrm{d}\phi \tag{11.102.1}$$

The acceleration of the electron takes place on an orbit of constant radius $r = cp/eH_0$ (see problem 11.79), where H_0 is the magnetic field at the orbit. This field is perpendicular to the plane of the orbit and increases with time. From the condition $\mathrm{d}r = 0$ we find that

$$\mathrm{d}p = \frac{p}{H_0}\ \mathrm{d}H_0 \tag{11.102.2}$$

The electron energy $= c\left(p^2 + m^2c^2\right)^{1/2}$ is increased by

$$\mathrm{d}\mathscr{E} = \frac{c^2 p\ \mathrm{d}p}{\mathscr{E}} = \frac{c^2p^2\ \mathrm{d}H_0}{\mathscr{E}H_0} \tag{11.102.3}$$

in which equation (11.102.2) has been used. It follows that

$$\delta A = \mathrm{d}\& \tag{11.102.4}$$

Substituting equations (11.102.1) and (11.102.3) into equation (11.102.4), and using the equation $c^2 p/\mathscr{E} = v = r\ \mathrm{d}\phi/\mathrm{d}t$, we have, after integration,

$$\Phi = 2\Phi_0$$

where $\Phi_0 = \pi r^2 H_0$.
The latter result is the required $2:1$ rule.
11.103 The energy of interaction U between the two charged particles is given by equation (11.b.8) into which the charge e_1 of one of the particles and the retarded potentials $\varphi_2, \boldsymbol{A}_2$ for the other particle should be substituted. From the explanations put forward in problem 12.36, we have

$$\varphi_2 = \frac{e_2}{R} + \frac{e_2}{2c^2}\frac{\partial^2 R}{\partial t^2}, \quad A_2 = \frac{e_2 v_2}{cR}$$

where R is the distance between the particles. By writing χ in the form

$$\chi = \frac{e_2}{2c}\frac{\partial R}{\partial t}$$

and carrying out a gauge transformation of the potentials, it is found that the new potentials are

$$\varphi_2' = \varphi_2 - \frac{1}{c}\frac{\partial \chi}{\partial t} = \frac{e_2}{R}, \quad A_2' = A_2 + \operatorname{grad}\chi = \frac{e_2\left[v_2 + (n\cdot v_2)\, n\right]}{2cR}$$

where $n = R/R$. Hence, the energy of interaction is given by the Breit formula

$$U = e_1\varphi_2 - \frac{e_1}{c}(v_1 \cdot A_2) = \frac{e_1 e_2}{R}\left\{1 - \frac{1}{2c^2}\left[(v_1\cdot v_2) + (v_1\cdot n)(v_2\cdot n)\right]\right\}$$

This formula gives an approximate representation of the fact that the force acting on one of the two interacting charged particles at a distance R from one another is determined by the previous position and state of motion of the other charge. Energy and momentum are communicated by the charges to the field and are transported by the field from one charge to the other in the time interval R/c. The particles and the field form a single system, and hence an exact description of the motion of a system of interacting particles cannot be given without considering the degrees of freedom of the field.
11.104

$$L = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_1 v_1^4}{8c^2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} + \frac{m_2 v_2^4}{8c^2} + \frac{e_1 e_2}{R} - \frac{e_1 e_2}{2c^2 R}\left[(v_1\cdot v_2) + (v_1\cdot n)(v_2\cdot n)\right]$$

11.105 The magnetic moment of the particle precesses about the direction of the magnetic field with an angular frequency $\omega = -\chi H$.
11.106 According to equation (10.c.3), in the instantaneously comoving frame there is a magnetic field

$$H' = -\frac{1}{c}[v \wedge E]$$

where E is the electrical field in the fixed frame, and where we have assumed that $v \ll c$. In the comoving frame the spin angular momentum changes according to the law

$$\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)_{\text{comoving}} = [m \wedge H']$$

If we use the equations given in the statement of the problem we find

$$\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)_{\text{fixed}} = \left[m_{\wedge}\left(H' - \frac{mc}{e}\omega_{\mathrm{T}}\right)\right]$$

On comparing this equation with equation (6.c.1) we see that, in the case considered, H_{eff} has the form

$$H_{\text{eff}} = H' - \frac{mc}{e}\omega_{\mathrm{T}}$$

However,

$$\dot{\boldsymbol{v}} = \frac{e}{m}\boldsymbol{E}, \quad \boldsymbol{E} = -\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r}\frac{r}{r}, \quad \text{and} \quad H_{\text{eff}} = -\frac{1}{2mc}\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r}l$$

where l is the orbital angular momentum of the particle. The energy of the interaction between the magnetic moment and the effective field has the usual form

$$U = -(\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{H}_{\text{eff}})$$

and if we take the derivative of this expression with respect to the angle which gives the orientation of m we can find the generalised force acting upon the magnetic moment. Finally we get

$$U = \frac{e}{2m^2c^2}\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r}(l\cdot s)$$

This expression is used in the quantum theory of atoms and is called the spin-orbit interaction energy.

11.107 The interaction energy arises only if we take the Thomas precession into account, and it has the form

$$U = -\frac{1}{2m^2c^2}\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}(l\cdot s) \tag{11.107.1}$$

The situation considered in this problem is approximately realised in atomic nuclei. On the nucleons in a nucleus there act strong nonelectrical (nuclear) forces and relatively weak electrostatic forces which can be neglected. The spin-orbit interaction energy is thus given by equation (11.107.1), where V is the potential of the nuclear forces. When calculating the nuclear energy levels it is very important to take the spinorbit interaction into account.

11.108 A reflection will occur for an antiparallel orientation of the magnetic moment and the field, provided the glancing angle α is such that $\sin\alpha \leqslant (m_0H/T)^{1/2}$.

11.109 The motion of the neutron along the conductor is uniform. The motion in the plane perpendicular to the conductor occurs in the potential $U = \pm 2m_0$ J/cr. It follows that the projections of the neutron trajectories on this plane are similar to the trajectories of the uniform motion of two charges e and e' which interact in accordance with Coulomb's law (see problem 11.97), provided ee' is replaced by $\pm 2m_0J/c$ and Å $= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + K^2/2mr^2 + U(r)$ is regarded as the energy of the transverse motion ($K = mr^2\dot{\phi}$ is the angular momentum). In particular, when & < 0 the neutron executes a finite motion about the conductor.

11.110

$$l(\phi) = \frac{m_0J}{cmv_0^2\sin^2\frac{1}{2}\phi}$$

17.12 Emission of electromagnetic waves

a The Hertz vector and the multipole expansion

12.3

$$\nabla^2\varphi = -4\pi\rho, \quad \nabla^2 A - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = \frac{1}{c}\,\mathrm{grad}\,\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{4\pi}{c}j$$

12.6 We first of all note that the Coulomb gauge, in contrast to the Lorentz gauge, is not a Lorentz invariant concept.

Let A'' and φ'' be the potentials obtained from A and φ through the infinitesimal Lorentz transformation which transforms S into S'. In that case

$$A'' = A + \beta\varphi, \quad \varphi'' = \varphi + (\beta \cdot A) \tag{12.6.1}$$

where $\beta = v/c \quad (\beta = |\beta|)$. Moreover,

$$\nabla' \equiv \nabla - \frac{\beta}{c}\frac{\partial}{\partial t} \tag{12.6.2}$$

Equations (12.6.1), (12.6.2), and $\mathrm{div}\,\boldsymbol{A} = 0$ lead, to first order in β, to the result

$$(\nabla' \cdot A'') + \left(\beta \cdot \left[\frac{1}{c}\frac{\partial A''}{\partial t'} - \nabla'\varphi\right]\right) = 0 \tag{12.6.3}$$

which shows that, indeed, the transformed potentials do not correspond to the Coulomb gauge.

We now look for a gauge transformation

$$A'' = A' + \nabla'\zeta, \quad \varphi'' = \varphi' - \frac{1}{c}\frac{\partial\zeta}{\partial t'} \tag{12.6.4}$$

such that

$$(\nabla' \cdot A') = 0$$

On substituting equation (12.6.4) into (12.6.3), we see that if ζ satisfies the inhomogeneous differential equation

$$\nabla'^2\zeta + \frac{2}{c}(\beta \cdot \nabla')\frac{\partial\zeta}{\partial t'} = \left(\beta \cdot \left[\nabla'\varphi' - \frac{1}{c}\frac{\partial A'}{\partial t'}\right]\right) \tag{12.6.5}$$

A' corresponds to the Coulomb gauge in S'.

12.7 Clearly ζ will be of the form

$$\zeta = \zeta_0 \exp[\mathrm{i}(k \cdot r) - \mathrm{i}\omega t]$$

and by using equation (12.6.5) from the solution to the preceding problem we can find ζ_0. Finally, we find for the required vector potential the expression

$$A' = A - (\hat{n}\beta \cdot A)$$

where $\hat{n} = k/k$.

12.9 The angular momentum flux density is given by

$$R = \frac{[n \wedge \ddot{p}](n \cdot \dot{p})}{2\pi c^3 r^2}$$

In evaluating the quantity $-\mathrm{d}K/\mathrm{d}t = \int Rr^2 \, \mathrm{d}\Omega$ it is convenient to use the formula $\overline{n_i n_k} = \frac{1}{3}\delta_{ik}$ (see chapter 1). The result is

$$-\frac{\mathrm{d}K(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{2}{3c^2}[\dot{\boldsymbol{p}} \wedge \ddot{\boldsymbol{p}}]\Big|_{t'=t-r/c}$$

12.10 The magnetic lines of force are in the form of circles whose planes are perpendicular to the z-axis, and whose centres lie on this axis. The electric lines of force are described by the following equations:

$$C_1 = \sin^2\vartheta \left[\frac{1}{r}\cos(kr-\omega t) + k\sin(kr-\omega t)\right], \quad C_2 = \phi$$

where C_1 and C_2 are constants.

12.11

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{H} &= \frac{1}{c}\frac{\partial \operatorname{curl} Z}{\partial t} \\
&= ea\left[e_\vartheta\left(-\mathrm{i}\frac{\omega^2}{c^2 r} + \frac{\omega}{cr^2}\right) + e_\phi\left(\frac{\omega^2}{c^2 r} + \mathrm{i}\frac{\omega}{cr^2}\right)\cos\vartheta\right]\exp[\mathrm{i}(kr-\omega t+\phi)] \\
E &= \operatorname{curl}\operatorname{curl} Z = ea\left[e_r\left(-\mathrm{i}\frac{\omega}{cr^2} + \frac{1}{r^3}\right)2\sin\vartheta + e_\vartheta\left(\frac{\omega^2}{c^2 r} + \mathrm{i}\frac{\omega}{cr^2} - \frac{1}{r^3}\right)\cos\vartheta\right. \\
&\quad \left. + e_\phi\left(\mathrm{i}\frac{\omega^2}{c^2 r} - \frac{\omega}{cr^2} - \frac{\mathrm{i}}{r^3}\right)\right]\exp[\mathrm{i}(kr-\omega t+\phi)]
\end{aligned}$$

In the wave zone $r \gg \lambda = 2\pi c/\omega$ and the expressions for E and H assume the simpler form:

$$\begin{aligned}
H &= ea\frac{\omega^2}{c^2 r}\left(-\mathrm{i}e_\vartheta + e_\phi\cos\vartheta\right)\exp[\mathrm{i}(kr-\omega t+\phi)] \\
E &= ea\frac{\omega^2}{c^2 r}\left(e_\vartheta\cos\vartheta + \mathrm{i}e_\phi\right)\exp[\mathrm{i}(kr-\omega t+\phi)] = [H \wedge n]
\end{aligned}$$

When the emission takes place into the upper hemisphere ($\cos\vartheta > 0$), the polarisation is in general elliptical and left handed (it becomes circular when $\vartheta = 0$). When the radiation is emitted into the lower hemisphere ($\cos\vartheta < 0$), the elliptical polarisation is right handed, and the special case of circular polarisation occurs at $\vartheta = \pi$. Waves emitted in the equatorial plane are linearly polarised. The angular distribution and the total intensity are respectively given by

$$\frac{\overline{\mathrm{d}I}}{\mathrm{d}\Omega} = \left(\bar{\gamma}\cdot nr^2\right) = \frac{e^2\omega^4 a^2}{8\pi c^3}\left(1+\cos^2\vartheta\right), \quad \bar{I} = \frac{2\omega^4 e^2 a^2}{3c^3}$$

The above situation obtains, for example, in the case of a charge moving in a magnetic field.
12.12$p = m = 0$
$Q \neq 0$,

$$\begin{aligned}
H &= \frac{1}{c}[\dot{A} \wedge n] \\
&= -\frac{4ea^2\omega^3}{c^3 r}\sin\vartheta\left[e_\vartheta\cos(2\omega t' - 2\phi) + e_\phi\cos\vartheta\sin(2\omega t' - 2\phi)\right]
\end{aligned}$$

The frequency of the oscillations in the charge and current distributions, and therefore the frequency of the field, is equal to twice the orbital frequency ω. In general, the polarisation is elliptical, and becomes circular as $\vartheta \to 0, \pi$ and linear when $\vartheta = \frac{1}{2}\pi$.

$$\frac{\overline{\mathrm{d}I}}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{2e^2a^4\omega^6}{\pi c^5}\sin^2\vartheta\left(1+\cos^2\vartheta\right), \quad \bar{I} = \frac{32}{5}\frac{e^2a^4\omega^6}{c^5}$$

When one of the charges is removed, the intensity increases by a factor of the order of $(\lambda/a)^2$, i.e. very considerably, since the condition $a/\lambda \ll 1$ is satisfied.

12.13 If the angle between the position vectors of the charges is equal to $\pi - \varphi$, then

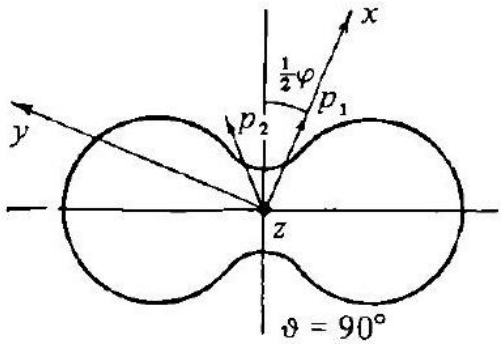
$$\varphi = \left(\frac{12}{5}\right)^{1/2}\frac{a\omega}{c}$$

12.14 Let the dipole moment of the oscillator which leads in phase lie along the x-axis, and let the xy-plane contain the dipole moments of both oscillators. The magnetic field is then given by

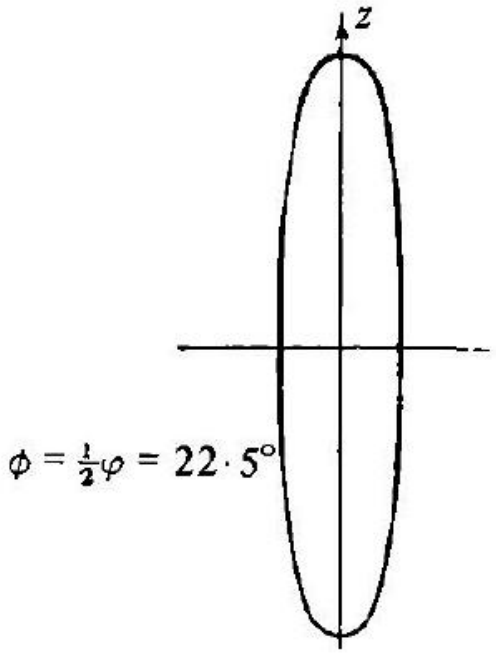
$$H(r,t) = H\exp\left(-\mathrm{i}\omega t'\right) = \frac{\omega^2 p}{c^2 r}\left\{\boldsymbol{e}_\vartheta[\sin\phi + \mathrm{i}\sin(\phi-\varphi)]\right.$$
$$\left.+\boldsymbol{e}_\phi[\cos\phi + \mathrm{i}\cos(\phi-\varphi)]\cos\vartheta\right\}\exp\left(-\mathrm{i}\omega t'\right),$$
$$\frac{\overline{\mathrm{d}I}}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{p^2\omega^4}{8\pi c^3}\left\{2-\left[\cos^2\phi+\cos^2(\phi-\varphi)\right]\sin^2\vartheta\right\}, \quad \bar{I} = \frac{2p^2\omega^4}{3c^3},$$

where the unit vector n in the direction of propagation of the wave is defined by the polar angles $\vartheta = 0, \pi$.

The angular distribution is a maximum in the directions $\vartheta = 0$ and $\vartheta = \pi$, which are perpendicular to the dipole moments. The distribution is illustrated in figure 12.14.1 for $\varphi = 45°$. Figure 12.14.1a shows the
angular (ϕ-) distribution in the plane $\vartheta = 90°$, and the angular (ϑ-) distribution in the plane $\phi = \frac{1}{2}\varphi = 22.5°$ is shown in figure 12.14 .1 b .



(a)



(b)

Figure 12.14.1.

12.15 When the origin of the phase is displaced by γ, the new amplitude becomes $\boldsymbol{H}\exp(-\mathrm{i}\boldsymbol{\gamma}) = \boldsymbol{H}_1 - \mathrm{i}\boldsymbol{H}_2$. Since $(\boldsymbol{H}_1 \cdot \boldsymbol{H}_2) = 0$, we have

$$\tan 2\gamma = 2\frac{\sin\phi\sin(\phi-\varphi) + \cos\phi\cos(\phi-\varphi)\cos^2\vartheta}{\sin^2\phi - \sin^2(\phi-\varphi) + [\cos^2\phi - \cos^2(\phi-\varphi)]\cos^2\vartheta} \tag{12.15.1}$$

$\cos\gamma$ and $\sin\gamma$ can now be determined from equation (12.15.1), and hence H_1 and H_2 may be found as functions of ϑ, ϕ, and φ.

When $\vartheta = 90°$, the polarisation is linear and the plane of polarisation is perpendicular to the xy-plane. When $\vartheta = 0, \pi$, the polarisation is elliptical and the ratio of semi-axes of the ellipse is equal to $\tan\frac{1}{2}\varphi$. In particular, the polarisation is circular when $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ and $\vartheta = 0, \pi$. The values $\phi = \frac{1}{2}\varphi, \frac{1}{2}(\varphi \pm \pi)$, and $\frac{1}{2}\varphi + \pi$ are equally simple to discuss. In all these cases the polarisation is in general elliptical. When $\phi = \frac{1}{2}\varphi, \frac{1}{2}\varphi + \pi$, the polarisation is circular in the directions defined by $\tan\frac{1}{2}\varphi = |\cos\vartheta|$. When $\phi = \frac{1}{2}(\varphi \pm \pi)$, the directions in which the polarisation is circular are defined by $\cot\frac{1}{2}\varphi = |\cos\vartheta|$.

12.16

$$\bar{\gamma} = \frac{e^2a^2\omega^4}{8\pi c^3r^2}\left(1 + \cos^2\vartheta\right)e_r + \frac{e^2a^2\omega^3}{4\pi c^2r^3}\sin\vartheta e_\phi$$
$$N = \frac{2}{3}\frac{e^2a^2\omega^3}{c^3}e_z$$

The latter result may be obtained by recalling that the rate of loss of angular momentum $\mathrm{d}\boldsymbol{K}/\mathrm{d}t = -(2/3c^3)[\dot{\boldsymbol{p}} \wedge \boldsymbol{p}]$ (see problem 12.9) is equal to the couple N on the screen. Alternatively, the couple may be computed directly from the formula

$$N = \frac{1}{c}\int_{r\gg a}\left[r \wedge \bar{\gamma}r^2\right]\mathrm{d}\Omega$$

12.17

$$H = \frac{m\omega^2 \sin\varphi}{c^2 r}\left(e_\vartheta \cos\vartheta + \mathrm{i}e_\phi\right)\exp[\mathrm{i}(kr - \omega t + \phi)]$$
$$E = \frac{m\omega^2 \sin\varphi}{c^2 r}\left(-e_\phi \cos\vartheta + \mathrm{i}e_\vartheta\right)\exp[\mathrm{i}(kr - \omega t + \phi)]$$

where

$$m = \frac{4\pi}{3}a^3 M$$
$$\frac{\overline{\mathrm{d}I}}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{m^2\omega^4 \sin^2\varphi}{8\pi c^3}\left(1 + \cos^2\vartheta\right), \quad \bar{I} = \frac{2m^2\omega^4 \sin^2\varphi}{3c^3}$$

12.18

$$\frac{\overline{\mathrm{d}I}}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{9}{800\pi}\frac{\omega^6 q^2 R_0^4 a^2}{c^5}\sin^2\vartheta\cos^2\vartheta, \quad \bar{I} = \frac{3}{500}\frac{\omega^6 q^2 R_0^4 a^2}{c^5}$$

12.19

$$E = \frac{qr}{r^3}, \quad H = 0$$

12.20 The Hertz vector $Z(r,t)$ may be resolved into monochromatic components. Using the expansion given by equation (A3.20) of appendix 3, we have

$$Z_p(r,t) = \frac{p\,(t')}{r}$$

where $t' = t - (r/c)$ and

$$Z_Q(r,t) = \frac{1}{2r^2}Q\,(t') + \frac{1}{2rc}\dot{Q}\,(t') \tag{12.20.1}$$
$$Z_m(r,t) = \frac{[m\,(t') \wedge n]}{r} + \frac{c}{r^2}\left[\left(\int m\,(t')\,\mathrm{d}t'\right) \wedge n\right] \tag{12.20.2}$$

These formulae will hold for $r \gg a$, where a is a linear dimension of the system. The arbitrary constant which arises as a result of the integration in equation (12.20.2) will have no effect on the magnitude of the field strength.

12.21 The field of the magnetic dipole is

$$E_m(r,t) = -\frac{1}{c}\dot{A}_m = \frac{[n \wedge \ddot{m}\,(t')]}{c^2 r} + \frac{[n \wedge \dot{m}\,(t')]}{cr^2}$$
$$H_m(r,t) = \operatorname{curl} A_m = \frac{3n(m\cdot n) - m}{r^3} + \frac{3n(\dot{m}\cdot n) - \dot{m}}{cr^2} + \frac{[n \wedge [n \wedge \ddot{m}]]}{c^2 r}$$

The field of the electric dipole may be obtained from that due to the magnetic dipole by the substitution

$$m \to p, \quad H_m \to E_\mathrm{e}, \quad E_m \to -H_\mathrm{e}$$

12.22

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{\omega_0^4}{4\pi c^3}\left[p^2\left(1 - \sin^2\vartheta\cos^2\phi\right) + m^2\sin^2\vartheta + mp\sin\vartheta\sin\phi\right]$$
$$I = \frac{2\omega_0^4}{3c^3}\left(p^2 + m^2\right)$$

Here we have used a system of coordinates with the x-axis along $\boldsymbol{p}$ and the z-axis along $\boldsymbol{m}$. The dipole moments in both cases have the values

$$p = p_0 \cos \omega_0 t, \quad m = m_0 \cos \omega_0 t$$

where $p_0 = q_0 d, m_0 = \pi R^2 q_0 \omega_0 / c$, q_0 is the maximum charge of one of the capacitor plates, which is determined by the conditions under which the system is excited, d is the width of the gap, and R is the radius of the ring in case (a) and of the cylindrical shell in case (b).

Averaging the intensity of the radiation over a period of the oscillations we get

$$\frac{\overline{\mathrm{d}I}}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{\omega_0^4}{8\pi c^3} \left\{ p_0^2 \left(1 - \sin^2 \vartheta \cos^2 \phi\right) + m_0^2 \sin^2 \vartheta \right\}, \quad \bar{I} = \frac{\omega_0^4}{3c^3} \left(p_0^2 + m_0^2\right)$$

12.23 The dipole moments of the system are zero, and the electric quadrupole moment has the single nonzero component Q_{zz} (if the z-axis is parallel to p_0).

Hence, the vector Q is parallel to the z-axis and is equal to $Q\left(t'\right) = Q_0 \cos \vartheta \cos \omega t' e_z$ (when the origin of time is suitably chosen), where $Q_0 = 2 p_0 a$.

It is convenient to carry out the calculation in the complex form using expression (12.20.1) of the solution of problem 12.20, and taking the components of Z along the axes of the spherical system of coordinates. Separating out the real part, we have the following final result:

$$H_\phi = \frac{1}{4} Q_0 \sin 2\vartheta \left[\left(\frac{k^3}{r} - \frac{3k}{r^3} \right) \sin(\omega t - kr) - \frac{3k^2}{r^2} \cos(\omega t - kr) \right]$$

$$E_r = \frac{1}{2} Q_0 \left(3 \cos^2 \vartheta - 1\right) \left[\left(\frac{3}{r^4} - \frac{k^2}{r^2} \right) \cos(\omega t - kr) - \frac{3k}{r^3} \sin(\omega t - kr) \right]$$

$$E_\vartheta = \frac{1}{4} Q_0 \sin 2\vartheta \left[\left(\frac{6}{r^4} - \frac{3k^2}{r^2} \right) \cos(\omega t - kr) + \left(\frac{k^3}{r} - \frac{6k}{r^3} \right) \sin(\omega t - kr) \right]$$

$$\frac{\overline{\mathrm{d}I}}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{Q_0^4 \omega^6}{32\pi c^5} \sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta, \quad \bar{I} = \frac{Q_0^2 \omega^6}{60 c^5}$$

where $Q_0 = 2 p_0 a$.

12.24 Consider the coordinate system shown in figure 12.24.1. The current distribution in the antenna is given by

$$J = J_0 \sin k \left(\xi + \frac{1}{2} l \right) \exp(-\mathrm{i}\omega t)$$

where

$$k = \frac{\omega}{c} = \frac{m\pi}{l}$$

According to equation (12.a.9) the electric dipole moment per unit length of the antenna is $P = (\mathrm{i}/\omega)\mathrm{J}$. The element $\mathrm{d}\xi$ of the antenna may be looked upon as an electric dipole oscillator with a moment $\mathrm{d}p = P\ \mathrm{d}\xi$. Since $\mathrm{d}\xi \ll \lambda$, it follows that the magnetic field at the point A due to this element may be calculated from equations (12.a.17) and (12.a.20):

$$\mathrm{d}H_0\left(r_0, t\right) = -\frac{\omega^2}{c^2 r} e_\phi \sin \vartheta P \left(t - \frac{r}{c} \right) \mathrm{d}\xi$$

where

$$r = r_0 - \xi \cos \vartheta$$

Since we are only interested in the field in the wave zone, the quantity $\sin\vartheta/r$, which is a slowly varying function in the region $r \gg l$, may be taken out from under the integral sign. Thus,

$$H_r = H_\vartheta = 0$$

$$H_\phi = -\frac{\mathrm{i}\omega \sin\vartheta}{c^2 r_0} J_0 \exp\left[\mathrm{i}\left(kr_0 - \omega t\right)\right] \int_{-\frac{1}{2}l}^{\frac{1}{2}l} \exp(\mathrm{i}k\xi\cos\vartheta) \sin m\pi \left(\frac{\xi}{l} + \frac{1}{2}\right) \mathrm{d}\xi$$

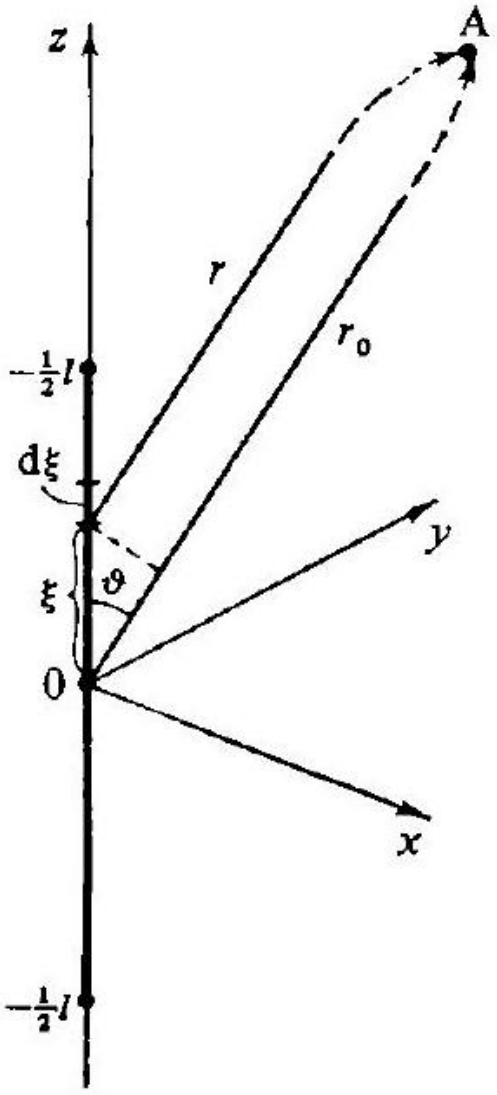


Figure 12.24.1.

The angular distribution may be found by evaluating the above integral, since $\overline{\mathrm{d}//\mathrm{d}\Omega} = (c/4\pi)\overline{H_\phi^2} r_0^2$.

$$\frac{\overline{\mathrm{d}I}}{\mathrm{d}\Omega} = \begin{cases} \frac{J_0^2}{2\pi c} \frac{\cos^2\left(\frac{1}{2}m\pi\cos\vartheta\right)}{\sin^2\vartheta}, & m \text{ odd} \\ \frac{J_0^2}{2\pi c} \frac{\sin^2\left(\frac{1}{2}m\pi\cos\vartheta\right)}{\sin^2\vartheta}, & m \text{ even} \end{cases}$$

The angular distribution is illustrated by the polar diagrams in figure 12.24.2. The dashed curves show the current distribution along the antenna; the continuous curves represent the angular distribution of the emitted radiation.

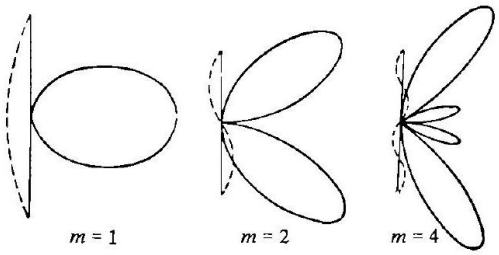


Figure 12.24.2.

12.25

$$\bar{I} = \frac{J_0^2}{2c}[\ln(2\pi m) + C - \mathrm{Ci}(2\pi m)]$$
$$R = 2\frac{\bar{I}}{J_0^2} = \frac{1}{c}[\ln(2\pi m) + C - \mathrm{Ci}(2\pi m)]$$

12.26

$$\frac{\overline{\mathrm{d}I}}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{J_0^2}{2\pi c}\frac{\sin^2\vartheta \sin^2\left[\frac{1}{2}kl(1-\cos\vartheta)\right]}{(1-\cos\vartheta)^2}$$
$$\bar{I} = \frac{J_0^2}{c}\left[C - 1 + \ln\frac{4\pi l}{\lambda} - \mathrm{Ci}\left(\frac{4\pi l}{\lambda}\right) + \frac{\sin(4\pi l/\lambda)}{4\pi l/\lambda}\right]$$

where $\lambda = 2\pi/k$ is the wavelength of the emitted wave, and ϑ is the polar angle measured from the ξ-axis.

It is easy to show that a travelling wave emits more intensely than a standing wave with the same values of l, λ, and J_0.

12.27 If the distance r of the point of observation $\mathrm{A}\,(r_0, \vartheta, \phi)$ (figure 12.27.1) from the loop is large ($r \gg a$), then the position vectors r of all the elements of the ring, $\mathrm{d}l$, may be regarded as parallel and

$$r = r_0 - a\cos\varphi = r_0 - a\sin\vartheta\cos(\phi' - \phi)$$

(see problem 1.1). An element $\mathrm{d}l$ has an electric dipole moment $\mathrm{d}p = P\,\mathrm{d}l = (\mathrm{i}/\omega)J\,\mathrm{d}l$, where P is the electric dipole moment per unit length of the wire which gives rise to a magnetic field at A of magnitude [see equation (12.a.20)]

$$\mathrm{d}H\,(r_0, t) = -\frac{\omega^2}{c^2}\frac{[\,\mathrm{d}p\,(t') \wedge n]}{r}$$
$$= -\mathrm{i}\frac{\omega a}{c^2}\frac{J_0}{r_0}\exp\left[-\mathrm{i}\omega t + \mathrm{i}kr_0 - \mathrm{i}ak\sin\vartheta\cos(\phi' - \phi)\right]\sin n\phi'$$
$$\times\left[\cos(\phi' - \phi)\,e_\vartheta + \cos\vartheta\sin(\phi' - \phi)\,e_\phi\right]\mathrm{d}\phi'.$$

In the denominator of the latter expression quantities of the order of a have been neglected in comparison with r_0. This cannot be done in the exponential, since ak is not small in general and has an important effect on the phase. The field may be found by integration:

$$H_\vartheta = -\frac{\mathrm{i}\omega a}{c^2}\frac{J_0}{r_0}\exp\left[\mathrm{i}\,(kr_0 - \omega t)\right]$$
$$\times\int_{-\pi}^{\pi}\cos(\phi' - \phi)\sin n\phi'\exp\left[-\mathrm{i}ka\sin\vartheta\cos(\phi' - \phi)\right]\mathrm{d}\phi'$$

The expression for H_ϕ may be obtained from that for H_ϑ by replacing $\cos(\phi' - \phi)$ by $\sin(\phi' - \phi)$ in the preexponential factor in the integration.

Substituting $\beta = \phi' - \phi$ we have

$$H_\vartheta = -\frac{\mathrm{i}\omega a}{c^2}\frac{J_0}{r_0}\exp\left[\mathrm{i}\left(kr_0 - \omega t\right)\right] \times \left[\cos n\phi \int_{-\pi}^{\pi} \cos\beta \sin n\beta \exp(-\mathrm{i}ka\sin\vartheta\cos\beta)\mathrm{d}\beta + \sin n\phi \int_{-\pi}^{\pi} \cos\beta\cos n\beta \exp(-\mathrm{i}ka\sin\vartheta\cos\beta)\mathrm{d}\beta\right]$$

The first of the integrals in the brackets will vanish because the integrand is odd. The second integral has an even integrand so that its limits may

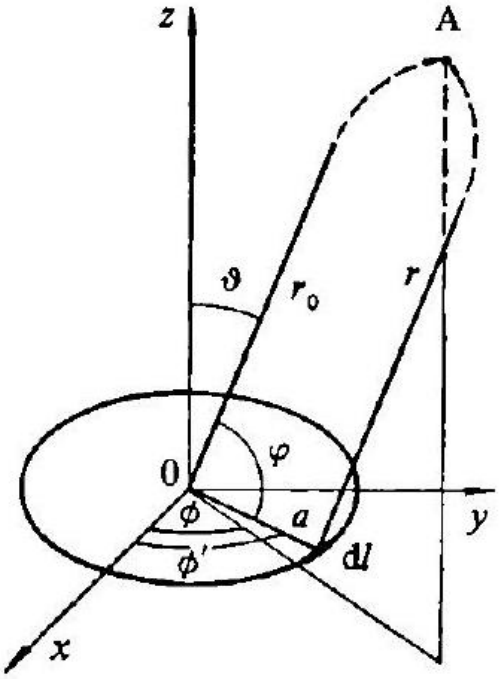


Figure 12.27.1.

be transformed to $0, \pi$ and the integral itself may be expressed in terms of the derivative of a Bessel function (see appendix 3). Thus,

$$H_\vartheta(r_0, t) = -E_\phi = \frac{2\pi\omega a}{c^2}\frac{J_0}{r_0}\exp\left[\mathrm{i}\left(kr_0 - \omega t - \frac{1}{2}n\pi\right)\right]\sin n\phi J_n'(ka\sin\vartheta)$$

Since $J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) = (2n/x)J_n(x)$, similar calculations will yield

$$H_\phi(r_0, t) = E_\vartheta = \frac{2\pi\omega anJ_0\exp\left[\mathrm{i}\left(kr - \omega t - \frac{1}{2}n\pi\right)\right]}{c^2 r_0}\cos n\phi\frac{J_n(ka\sin\vartheta)}{ka\tan\vartheta}$$

12.28

$$\frac{\overline{\mathrm{d}I}}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{\omega^4 p_0^2}{2\pi c^3}\left(1 - \sin^2\vartheta\cos^2\phi\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos^2\frac{1}{2}\vartheta\right)$$

where ϑ, ϕ are the polar angles characterising the direction of emission (see the polar diagrams in figure 12.28.1). The oscillator which leads in phase is in the upper position along the

z-axis.

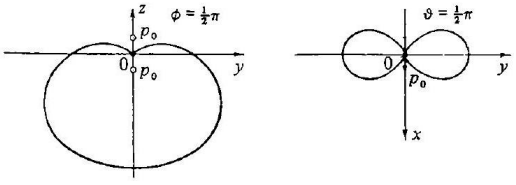


Figure 12.28.1.

12.29 Since $j = \rho v = \rho \mathrm{d}r/\mathrm{d}t$, it follows that $(j_x, j_y, j_z) \to (-j_x, -j_y, +j_z)$ where the reflected currents are calculated at the reflected points. $j_x(r) = -j'_x(r')$, and so on.

Similarly, from the usual definitions and equations (12.a.1) and (12.a.2) in the Cartesian form, we have

$$\begin{aligned} &(p_x, p_y, p_z) \to (-p_x, -p_y, p_z)\,, \qquad (Q_x, Q_y, Q_z) \to (-Q_x, -Q_y, -Q_z) \\ &(m_x, m_y, m_z) \to (m_x, m_y, -m_z)\,, \quad (E_x, E_y, E_z) \to (-E_x, -E_y, E_z) \\ &(H_x, H_y, H_z) \to (H_x, H_y, -H_z)\,. \end{aligned}$$

12.30 The boundary conditions $H_n = 0$ and $E_\tau = 0$ are satisfied at the surface ($z = 0$) of the conductor: this is a direct consequence of the results of the preceding problem. In the special case of the electric dipole oscillator, the electromagnetic field in the half-space $z > 0$ is the same as the field due to an electric dipole oscillator of moment $p = 2e_z f(t) \sin\varphi_0$. The field vanishes when $\varphi_0 = 0$ (dipole parallel to the plane) and reaches a maximum when $\varphi_0 = \frac{1}{2}\pi$ (dipole perpendicular to the plane). The total energy emitted into the half-space $z > 0$ for $\varphi_0 = \frac{1}{2}\pi$ is greater by a factor of 4 than the energy emitted by this oscillator when it is at a large distance from the conducting plane.

12.31

$$\begin{aligned} E_\vartheta = H_\phi &= \frac{\omega^3 p_0 a}{2c^3 r} \cos 2\vartheta \cos\phi \cos\omega t' \\ E_\phi = -H_\vartheta &= \frac{\omega^3 p_0 a}{2c^3 r} \cos\vartheta \sin\phi \cos\omega t' \\ \frac{\overline{\mathrm{d}I}}{\mathrm{d}\Omega} &= \frac{p_0^2 a^2 \omega^6}{32\pi c^6} \left(\cos^2 2\vartheta \cos^2\phi + \cos^2\vartheta \sin^2\phi\right) \end{aligned}$$

12.32

$$\begin{aligned} &H_r = 0, \quad H_\vartheta = -\frac{\mathrm{i}k}{\sin\vartheta}\frac{\partial u}{\partial\phi}, \quad H_\phi = \mathrm{i}k\frac{\partial u}{\partial\vartheta} \\ &E_r = k^2 ur + \frac{\partial^2(ur)}{\partial r^2}, \quad E_\vartheta = \frac{1}{r}\frac{\partial^2(ru)}{\partial r\partial\vartheta}, \quad E_\phi = \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial^2(ru)}{\partial r\partial\phi} \end{aligned}$$

12.34

$$\begin{aligned} u =& \frac{p_0}{b}\frac{\exp(\mathrm{i}kR)}{R} \\ &- \mathrm{i}kp_0 \sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\frac{h_l^{(1)}(kb)}{b}\left.\frac{\mathrm{d}\left[rj_l(kr)\right]/\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\left[rh_l^{(1)}(kr)\right]/\mathrm{d}r}\right|_{r=a} h_l^{(1)}(kr)P_l(\cos\vartheta) \end{aligned}$$

The fields E and H are given by the formulae obtained in the solution of problem 12.32. In order to determine the angular distribution it is necessary to use the asymptotic expressions for the spherical Hankel functions [equation (A3.19)]. This gives

$$E_\phi = H_\vartheta = 0, \quad H_\phi = \mathrm{i}k\frac{\partial u}{\partial\vartheta} = F(\vartheta)\frac{\exp(\mathrm{i}kr)}{r} = E_\vartheta$$

where

$$F(\vartheta) = \frac{p_0 k^2}{b} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{\mathrm{i}^{l-1}} \left. \frac{j_l(kb)\mathrm{d}\left[rh_l^{(1)}(kr)\right]/\mathrm{d}r - h_l^{(1)}(kb)\mathrm{d}\left[rj_l(kr)\right]/\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\left[rh_l^{(1)}(kr)\right]/\mathrm{d}r} \right|_{r=a}$$
$$\times \frac{\mathrm{d}P_l(\cos\vartheta)}{\mathrm{d}\vartheta}$$

$$\frac{\overline{\mathrm{d}I}}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{c}{8\pi}\left|H_\phi\right|^2 r^2 = \frac{c}{8\pi}|F(\vartheta)|^2$$

b The electromagnetic field of a moving point charge

12.35 The potential φ for the field of the particle is given by

$$\varphi(r,t) = \int \frac{\rho\left(r', t - R/c\right)}{R}\, \mathrm{d}^3 r' = e \int \frac{\delta\left[r' - r_0(t - R/c)\right]}{R}\, \mathrm{d}^3 r' \tag{12.35.1}$$

where $R = |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|$. This integral may be evaluated with the aid of the formula $\int f\left(\boldsymbol{R}_1\right) \delta\left(\boldsymbol{R}_1\right) \mathrm{d}^3 \boldsymbol{R}_1 = f(0)$ (see appendix 1).

Let $R_1 = r' - r_0(t - R/c)$. The Jacobian of the transformation is

$$\left|\frac{\partial R_{\mathbf{1}}}{\partial r'}\right| = 1 - \frac{(v \cdot R)}{cR}$$

In terms of the new variables, the integral in equation (12.35.1) becomes

$$\varphi(r,t) = e \int \frac{\delta\left(R_1\right) \mathrm{d}^3 R_1}{R - (v \cdot R)/c} = \left. \frac{e}{R - (v \cdot R)/c} \right|_{R_1 = 0}$$

The condition $R_1 = 0$ means that on the right-hand side of this formula all the quantities are referred to the point $r' = r_0(t - R/c)$ at which the charge was located at the retarded time $t' = t - R/c$. The vector potential may be calculated in a similar way.

12.36

$$\varphi(r,t) = \int \frac{\rho\left(r', t - R/c\right)}{R}\, \mathrm{d}^3 r' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{c^n n!} \frac{\partial^n}{\partial t^n} \int R^{n-1} \rho\left(r', t\right) \mathrm{d}^3 r'$$
$$= e \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{c^n n!} \frac{\mathrm{d}^n R_0^{n-1}}{\mathrm{d}t^n}$$

where $R_0 = |r - r_0(t)|$ and

$$A(r,t) = e \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{c^{n+1} n!} \frac{\mathrm{d}^n \left[v(t) R_0^{n-1}\right]}{\mathrm{d}t^n}$$

All the quantities on the right- and left-hand sides of these equations are to be taken at the same instants of time. The retarded interaction is thus formally reduced to the instantaneous interaction. The above expansions may be used for a sufficiently slow ($v \ll c$) and continuous motion (acceleration and all its derivatives finite), provided R is not too large.

12.39 For small v/c, equation (12.b.3) becomes

$$\boldsymbol{E} = \frac{er}{r^3} + 3\frac{er(r \cdot v)}{cr^4} - \frac{ev}{cr^2} + \left. \frac{e[r \wedge [r \wedge \dot{v}]]}{c^2 r^3} \right|_{t' = t - r/c}$$
$$H = \frac{e[\boldsymbol{v} \wedge r]}{cr^3} + \left. \frac{e[\dot{\boldsymbol{v}} \wedge r]}{c^2 r^2} \right|_{t' = t - r/c}$$

where r is the distance between the point of observation and any point in the region in which the motion of the charge takes place.

The first three terms in the expression for $\boldsymbol{E}$ and the first term in the expression for H are proportional to r^{-2} and are the leading terms at relatively small distances from the charge (quasi-stationary zone). The electric field in this zone is essentially the Coulomb field $E = \mathrm{er}/\mathrm{r}^3$, while the magnetic field is given by the Biot-Savart law $\boldsymbol{H} = e[\boldsymbol{v} \wedge \boldsymbol{r}]/cr^3$. At large distances from the charge (in the wave zone), the leading terms are the last terms, which are proportional to r^{-1}. These terms represent
the radiation field and are of the form

$$E = \frac{e[n \wedge [n \wedge \dot{v}]]}{c^2 r}, \quad H = \frac{e[\dot{v} \wedge n]}{c^2 r}$$

where $n = r/r$. The position of the boundary between the quasistationary and the wave zones is defined by the condition

$$\frac{e/r_{\mathrm{b}}^2}{e|\dot{v}|/c^2 r_{\mathrm{b}}} \sim 1$$

and hence

$$r_{\mathrm{b}} \approx a\left(\frac{c^2}{v^2}\right)$$

since $|\dot{\boldsymbol{v}}| \sim v^2/a$, where a is of the same order of magnitude as the linear dimensions of the region in which the motion of the charge takes place.
12.40

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c^3}[\dot{v} \wedge n]^2, \quad I = \frac{2e^2}{3c^3}\dot{v}^2$$

where $n = r/r$.
12.41 (a) The portion of energy $-\mathrm{d}\&$ emitted by the particle into a solid angle $\mathrm{d}\Omega$ in a time $\mathrm{d}t'$ will travel past the point of observation in a time $\mathrm{d}t$. Hence,

$$-\frac{\mathrm{d}\mathscr{Q}}{\mathrm{d}t'\mathrm{d}\Omega} = \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\Omega}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t'}$$

Since $t = t' + R/c$ and $\partial R/\partial t' = -(n \cdot v)$ where $n = R/R$, we have

$$\mathrm{d}t = \mathrm{d}t'\left[1 - \frac{(n \cdot v)}{c}\right]$$

and hence, finally,

$$-\frac{\mathrm{d}\&}{\mathrm{d}t'\mathrm{d}\Omega} = \left[1 - \frac{(n \cdot v)}{c}\right]\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\Omega}$$

(b) The energy emitted by the charge in a time interval $\mathrm{d}t'$ is localised between two spheres. The first sphere has its centre at the point O at which the charge was located at time t', while the second sphere has its centre at the point O$'$ where the charge was located at time $t' + \mathrm{d}t'$ (figure 12.41.1). The radius of the first sphere is $R + c\ \mathrm{d}t'$ and the radius of the second sphere is R. Consider the volume element

$$\mathrm{d}^3 r = \mathrm{d}^2 S\ \mathrm{d}R = R^2\ \mathrm{d}\Omega[c - (n \cdot v)]\mathrm{d}t'$$

The electromagnetic energy residing in this volume is

$$\mathrm{d}W = \frac{E^2}{4\pi}\,\mathrm{d}^3r = \frac{cE^2}{4\pi}\left[1 - \frac{(n\cdot v)}{c}\right] R^2\,\mathrm{d}\Omega\,\mathrm{d}t'$$

Hence, the rate of loss of energy

$$-\frac{\mathrm{d}\mathring{\mathrm{A}}}{\mathrm{d}t'\mathrm{d}\Omega} = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t'\mathrm{d}\Omega}$$

is given by the expression quoted above.

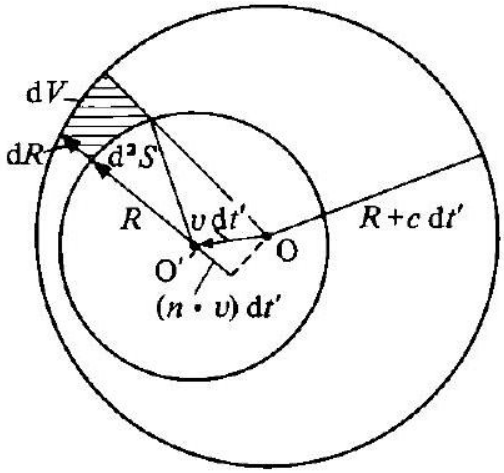


Figure 12.41.1.

12.44

(a) $-\frac{\mathrm{d}\mathscr{Q}}{\mathrm{d}t'} = \frac{2e^2}{3c^3}\gamma^6\left\{\dot{\boldsymbol{v}}^2 - \left[\dot{\boldsymbol{v}}\wedge\frac{\boldsymbol{v}}{c}\right]^2\right\}$

(b) $-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t'} = \frac{2e^4}{3m^2c^3}\frac{\{E+[v\wedge H]/c\}^2-(E\cdot v)^2/c^2}{1-v^2/c^2}$.

12.45

$$-\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t'} = -\frac{v}{c^2}\frac{\mathrm{d}\&}{\mathrm{d}t'}$$

where v is the velocity of the particle at time t'.

12.46 Consider the rate of loss of energy by the particle in two reference frames, namely, the frame S_0 in which the particle is instantaneously at rest, and the laboratory frame S in which the particle has a velocity v. In S_0 the emission is of the electric dipole type, and hence there is no loss of momentum in S_0. This follows from the central symmetry of the angular distribution of the emitted radiation in this reference frame (or from the result of the preceding problem).

Consider now the amount of energy $-\mathrm{d}\dot{\varepsilon}_0$ emitted by the particle in a time $\mathrm{d}t'_0 = \mathrm{d}\tau$ in the frame S_0. The energy loss observed in S in a time interval $\mathrm{d}t' = \mathrm{d}\tau/\left(1 - v^2/c^2\right)^{1/2}$ is then $-\mathrm{d}\& = -\mathrm{d}\mathring{\mathrm{A}}_0/\left(1 - v^2/c^2\right)^{1/2}$.

Hence the rate of loss of energy is given by

$$-\frac{\mathrm{d}\&}{\mathrm{d}t'} = -\frac{\mathrm{d}\&_0/(1-v^2/c^2)^{1/2}}{\mathrm{d}\tau/(1-v^2/c^2)^{1/2}} = -\frac{\mathrm{d}\&_0}{\mathrm{d}\tau}\ .$$

This result is independent of v, which means that the rate of loss of energy integrated over all directions is the same in all reference frames.

The total radiated intensity at a time t is given by the integral of the normal component of the Poynting vector over a sphere of radius R and centred at the point occupied by the particle at the retarded time $t' = t - R/c$. In contrast to the invariant quantity $-\mathrm{d}\&/\mathrm{d}t'$, the total radiated intensity does not exhibit simple relativistic transformation properties.

12.47

$$\frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{c}{4\pi}E^2R^2 = \frac{e^2\dot{v}^2\sin^2\vartheta}{4\pi c^3(1-\beta\cos\vartheta)^6}$$

where ϑ is the angle between the velocity v and the direction of emission $\boldsymbol{n}$, and $\beta = v/c$. The polar diagram of the radiation is shown in figure 12.47.1. At low velocities v, the intensity emitted in the forward and backward directions is the same. Emission in the forward direction predominates when v becomes comparable with c. Maximum emission is observed at an angle ϑ_0 which is given by

$$\cos\vartheta_0 = \frac{1}{4\beta}\left[\left(1+12\beta^2\right)^{1/2} - 1\right]$$

When $\beta \to 0, \vartheta_0 \to \frac{1}{2}\pi$; when $\beta \to 1, \vartheta_0 \to 0$. In the ultrarelativistic limit the emission is thus mainly in directions at small angles to the particle velocity. Putting $\vartheta \ll 1$ we can write $\mathrm{d}I/\mathrm{d}\Omega$ in the form

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{e^2\dot{v}^2\vartheta^2}{2\pi c^3\left[(mc^2/\varepsilon)^2 + \vartheta^2\right]^6}$$

It is clear from this formula that an ultrarelativistic particle emits mainly within a cone of opening angle $\psi = mc^2/\&$.

The total radiation intensity is

$$I = \int \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\Omega}\,\mathrm{d}\Omega = \frac{2e^2\dot{v}^2}{3c^3}\frac{1+\frac{1}{5}\beta^2}{(1-\beta^2)^4}$$

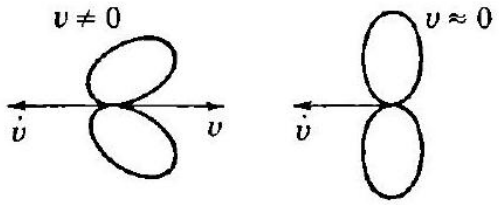


Figure 12.47.1.

The total rate of loss of energy is

$$-\frac{\mathrm{d}\&}{\mathrm{d}t'} = \frac{2e^2}{3c^3}\frac{\dot{v}^2}{(1-\beta^2)^3}$$

12.48 The total bremsstrahlung emitted in the direction $\mathrm{d}\Omega$ over the whole period when the particle passes by is given by

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\Delta W}{\mathrm{d}\Omega} = \int \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\Omega}\,\mathrm{d}t &= \int\left(-\frac{\mathrm{d}\&}{\mathrm{d}\Omega\,\mathrm{d}t'}\right)\mathrm{d}t' \\ &= \frac{e^2v_0^2}{16\pi c^3\tau}\frac{\sin^2\vartheta}{\cos\vartheta}\left\{\frac{1}{\left[1-(v_0/c)\cos\vartheta\right]^4} - 1\right\}\end{aligned}$$

where ϑ is the angle between the direction of motion of the particle and the direction of emission of the radiation n.

The observed duration of the pulse depends on the angle ϑ between tine velocity of the particle and the direction of emission:

$$\Delta t = \tau \left(1 - \frac{v_0}{2c} \cos \vartheta\right)$$

12.49

$$-\frac{\mathrm{d}\mathring{\mathrm{A}}}{\mathrm{d}t'} = \frac{2e^4 H^2 p^2}{3m^4 c^5}$$

12.50

$$-\frac{\mathrm{d}\varepsilon}{\mathrm{d}t'} = \frac{2e^4 H^2 \sin^2 \theta}{3m^2 c \left(1 - \beta^2\right)}$$

When $\theta \gg (1 - v^2/c^2)^{1/2}$ a fixed observer, far from the electron, registers separate pulses of radiation emitted at those moments when the electron velocity is directed at the observer (within a cone with opening angle

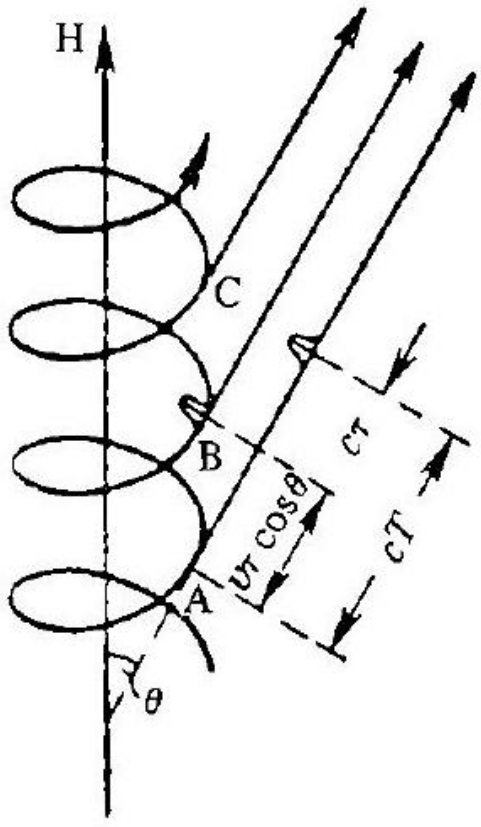


Figure 12.50.1.

$\psi \approx (1 - v^2/c^2)^{1/2}$, see problem 12.47). The time between the pulses is (figure 12.50.1)

$$\tau = T \left(1 - \frac{v_\parallel \cos \theta}{c}\right) \approx T \sin^2 \theta$$

where $T = 2\pi \& / ecH$ is the period of the cyclotron rotation, & is the particle energy, and $v_\parallel = v \cos \theta$ is the component of the velocity along the direction of the field. Thus, owing to the translational motion of an electron with velocity $v_\parallel$the radiation emitted over a time T passes through a fixed sphere after a time τ. Hence

$$I = -\frac{\mathrm{d}\&}{\mathrm{d}t'} \frac{T}{\tau} = \frac{2e^4 H^2}{3m^2 c \left(1 - v^2/c^2\right)}$$

When $\theta \leqslant \psi \ll 1$, we have

$$I = \frac{2e^4H^2}{3m^2c\,(1-v^2/c^2)}\,\frac{\theta^2}{\frac{1}{2}\,(mc^2/)^2+\theta^2}$$

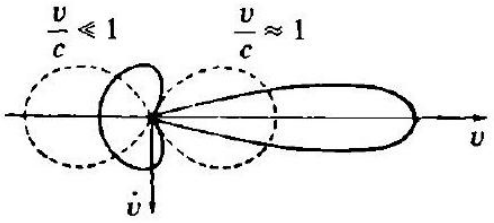
12.51

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{e^2|\dot{v}|^2}{4\pi c^3}\,\frac{(1-\beta\cos\vartheta)^2-(1-\beta^2)\sin^2\vartheta\cos^2\phi}{(1-\beta\cos\vartheta)^6}$$

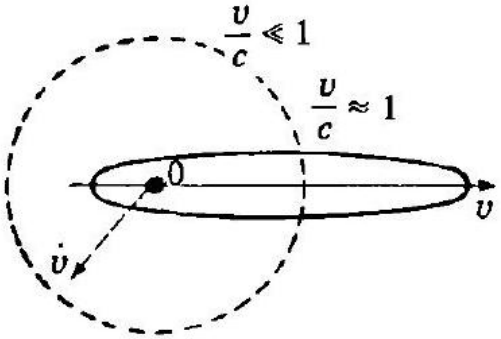
where $\beta = v/c$.
Suppose that the polar axis is in the direction of the velocity and the azimuth angle ϕ is measured from the direction of the acceleration. The angular distribution of the emitted radiation is shown in figure 12.51.1. No radiation is emitted in directions defined by

$$\gamma\left(1-\frac{v}{c}\cos\vartheta\right) = \sin\vartheta|\cos\phi|$$

In particular, when $\phi = 0, \pi$ (figure 12.51 .1 a) no radiation is emitted at $\vartheta = \cos^{-1}(v/c)$. When $\phi = \frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi$ (figure 12.51 .1 b) the intensity is finite for all ϑ



(a)



(b)

Figure 12.51.1.
12.52

$$\frac{\overline{\mathrm{d}I}}{\mathrm{d}\Omega} = -\frac{\overline{\mathrm{d}\varepsilon}}{\mathrm{d}\Omega\;\mathrm{d}t'} = \frac{e^4H^2\beta^2}{8\pi^2m^2c^3}\left(1-\beta^2\right)\int_0^{2\pi}\frac{(1-\beta^2)\cos^2\vartheta+(\beta-\sin\vartheta\cos\phi)^2}{(1-\beta\sin\vartheta\cos\phi)^5}\,\mathrm{d}\phi$$

$$= \frac{e^4H^2\beta^2\,(1-\beta^2)}{8\pi m^2c^3}\,\frac{1+\cos^2\vartheta-\frac{1}{4}\beta^2\,(1+3\beta^2)\sin^4\vartheta}{\left(1-\beta^2\sin^2\vartheta\right)^{7/2}}$$

where $\beta = v/c$.
The origin of the azimuth angle is chosen so that the direction of the vector n is characterised by the polar angles $\vartheta, \frac{1}{2}\pi$. In the ultrarelativistic case, the emission of radiation is confined to the neighbourhood of the plane of the orbit in the angular range $\Delta\vartheta \approx (1-\beta^2)^{1/2}$.
12.53

$$\left.\begin{aligned} A_{n\vartheta} &= \tfrac{e\beta\exp(\mathrm{i}kR_0)}{2\pi R_0}\cos\vartheta\int_0^{2\pi}\cos\phi'\exp\left[\mathrm{i}\left(n\phi'-n\beta\sin\vartheta\sin\phi'\right)\right]\mathrm{d}\phi' \\ A_{n\phi} &= \tfrac{e\beta\exp(\mathrm{i}kR_0)}{2\pi R_0}\int_0^{2\pi}\sin\phi'\exp\left[\mathrm{i}\left(n\phi'-n\beta\sin\vartheta\sin\phi'\right)\right]\mathrm{d}\phi' \end{aligned}\right\}$$

where $k = (\omega/c)n$, the origin of coordinates is at the centre of the orbit, the z-axis is perpendicular to the plane of the orbit, the direction of k is characterised by the polar angles $\vartheta, \frac{1}{2}\pi$, and R_0 is the distance from the centre of the orbit to the point of observation. Hence

$$\left.\begin{aligned} H_{n\phi} &= \mathrm{i}\tfrac{\omega}{c}nA_{n\vartheta} \approx \mathrm{i}\tfrac{\beta en\exp(\mathrm{i}kR_0)}{aR_0}\cot\vartheta J_n(n\beta\sin\vartheta) \\ H_{n\vartheta} &= -\mathrm{i}\tfrac{\omega}{c}nA_{n\phi} = \tfrac{e\beta^2 n\exp(\mathrm{i}kR_0)}{aR_0}J_n'(n\beta\sin\vartheta) \end{aligned}\right\} \tag{12.53.1}$$

The polarisation of the emitted radiation is, in general, elliptical. The ratio of the semi-axes of the ellipse is equal to

$$\beta\tan\vartheta\left[\frac{J_n'(n\beta\sin\vartheta)}{J_n(n\beta\sin\vartheta)}\right].$$

The sense in which the ellipse is traversed is determined by the sign of this ratio. When $\vartheta = 0$ and $\vartheta = \frac{1}{2}\pi$, the polarisation is, respectively, circular and linear. For sufficiently large n and β, the polarisation is linear in those directions for which J_n'/J_n is zero or has a pole.

12.54 The presence of higher harmonics in the spectrum of the radiated field is explained by the fact that the time taken by the field between equivalent points on the orbit is finite, and is, in general, comparable to the orbital period (provided the velocity of the charge is comparable to the velocity of light, c). Hence, the time taken by the field emitted during one-half of an orbital period to travel past the point of observation, when the particle approaches this point, is smaller than the corresponding time during the next half-period. Since the coordinates of the particle are
not simple harmonic functions of time, it follows that the field is a complicated periodic function of time which can be represented as a superposition of Fourier components.

It is to be expected that when $\beta \to 0$ the higher harmonics will vanish. In fact, when $x \approx 0, n > 0$ we have (see appendix 3)

$$J_n(x) \approx \frac{x^n}{2^n n!}, \quad J_n'(x) \approx \frac{x^{n-1}}{2^n(n-1)!}$$

It is clear from these equations that when $\beta \to 0$, the important harmonics are those with $|n| = 1$. Thus (cf solution of problem 12.11),

$$H_\phi = H_{1\phi} + H_{-1\phi} = -\frac{e\beta^2}{a}\frac{\cos\vartheta\sin kR_0}{R_0}$$
$$H_\vartheta = H_{1\vartheta} + H_{-1\vartheta} = \frac{e\beta^2}{a}\frac{\cos kR_0}{R_0}$$

12.55

$$\frac{\mathrm{d}I_n}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{c}{2\pi}|H_n|^2 R_0^2 = \frac{cn^2e^2\beta^2}{2\pi a^2}\left[\cot^2\vartheta J_n^2(n\beta\sin\vartheta) + \beta^2 J_n'^2(n\beta\sin\vartheta)\right]$$

If the circular motion occurs under the action of a constant uniform magnetic field H, then

$$a = \frac{mc^2\beta}{eH\left(1-\beta^2\right)^{1/2}}$$

12.56 The nth harmonic of the field emitted by a single charge was obtained in the solution of problem 12.53 [equation (12.53.1)]. The expressions for the harmonics due to a number of charges will clearly differ from each other only in the initial phases. Let ψ_l be the phase difference between the field due to the l th electron relative to the electron which we shall agree to call electron number 1, so that the final field (in real form) is

$$H_{n\vartheta} = \frac{e\beta^2 n}{aR_0} J_n'(n\beta \sin\vartheta) \sum_{l=1}^{N} \cos n\left(\omega t - \frac{\omega R_0}{c} + \psi_l\right)$$

There is an analogous expression for $H_{n\phi}$. The average intensity over the period $T = 2\pi/\omega$ is

$$\mathrm{d}I_{nN} = \frac{c}{4\pi}\frac{1}{T}\int_0^T \left(H_{n\vartheta}^2 + H_{n\phi}^2\right) \mathrm{d}t R_0^2 \, \mathrm{d}\Omega = S_N \, \mathrm{d}I_n$$

where $\mathrm{d}I_n$ is the intensity due to a single electron (see preceding problem) and S_N is a factor which represents interference effects between the fields
emitted by the electrons (the so-called coherence factor):

$$S_N = N + \sum_{\substack{l,l'=1 \\ (l\neq l')}}^{N} \cos n\,(\psi_l - \psi_{l'})$$

Consider three special cases:
(a) electrons distributed at random along the orbit:

$$\sum \cos n\,(\psi_l - \psi_{l'}) = 0$$

(b) uniform distribution of electrons along the orbit

$$\psi_l = \frac{2\pi}{N}(l-1)$$

and

$$\begin{aligned} S_N &= N\sum_{l=2}^{N} \cos 2\pi(l-1)\frac{n}{N} \\ &= \frac{1}{2}N\left\{\sum_{l=1}^{N} \exp\left[2\pi \mathrm{i}(l-1)\frac{n}{N}\right] + \sum_{l=1}^{N} \exp\left[-2\pi \mathrm{i}(l-1)\frac{n}{N}\right]\right\} \\ &= N(-1)^n \frac{\sin n\pi}{\tan(n\pi/N)} = \begin{cases} 0, & \text{if } \frac{n}{N} \text{ is not an integer} \\ N^2, & \text{if } \frac{n}{N} \text{ is an integer.} \end{cases} \end{aligned}$$

(c) if the electrons form a bunch, then all the differences $\psi_l - \psi_{l'}$ are small, provided n is not too large, so that the linear dimensions of the bunch are small compared with the corresponding wavelength. All the $\cos n\,(\psi_l - \psi_{l'})$ in the expression for S_N can then be replaced by 1. Hence, $S_N = N^2$. The factor S_N decreases with increasing n. The actual value of S_N depends on the precise distribution of the electrons in the bunch, and cannot be given in a general form.
12.57 Let the origin be at the centre of inertia of the system of charges. The electric dipole moment of the system is then given by

$$p = e_1 r_1 + e_2 r_2 = \mu\left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2}\right) r$$

where $r = r_1 - r_2$ and $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$.
Since the ratios e/m are different, it follows that $p \neq 0$ and the system will radiate as an electric dipole ($v/c \ll 1$). The instantaneous intensity is

$$I(t) = \frac{2\ddot{p}^2}{3c^3} = \frac{2\mu^2}{3c^3}\left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2}\right)^2 \ddot{r}^2(t')$$

Since the equation of motion of the charges is $\mu\ddot{r} = e_1 e_2 r / r^3$,

$$I = \frac{2e_1^2 e_2^2}{3c^3}\frac{(e_1/m_1 - e_2/m_2)^2}{r^4}$$

To calculate the time average of the intensity, $\bar{I} = T^{-1}\int_0^T I \, \mathrm{d}t'$, we can replace integration with respect to t' by integration with respect to the angle ϕ by substituting $\mathrm{d}t' = (\mu r^2/K)\,\mathrm{d}\phi$ (K is the angular momentum) and using the equation of the trajectory. The result is

$$\bar{I} = \frac{2^{3/2}}{3c^3}\left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2}\right)^2 \frac{\mu^{5/2}\left|e_1 e_2\right|^3 |\&|^{3/2}}{K^5}\left(3 - \frac{2|\text{Å}|K^2}{\mu e_1^2 e_2^2}\right)$$

12.58

$$\overline{\frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}t}} = -\frac{2^{7/2}\mu^{3/2}|\mathscr{G}|^{3/2}}{3c^3}\left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2}\right)^2 \frac{K}{K^3}$$

12.59 If we proceed as in the solution of problem 12.57, we can write the second derivative of the dipole moment as

$$\ddot{p} = \left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2}\right)\frac{e_1 e_2 r}{r^3} \tag{12.59.1}$$

The evaluation of A presents no difficulties. To determine B it is necessary to know $\ddot{p}_z$, i.e. the component of $\ddot{p}$ in the direction of the initial motion of the scattered particles as a function of the coordinates r, ϕ (the polar coordinates in the plane of the relative motion of the particles). It must be remembered that in the equation for the trajectory of relative motion $[-1 + \epsilon\cos\phi = a(\epsilon^2 - 1)/r]$, the angle ϕ is measured from the axis of symmetry (z'-axis) of the trajectory. Thus, $y' = r\sin\phi, z' = r\cos\phi$. The angle between the z - and z'-axes is $\pi - \phi_0$ ($\cos\phi_0 = 1/\epsilon$), and hence

$$z = -z'\cos\phi_0 - y'\sin\phi_0 = -\frac{r}{\epsilon}\left[\cos\phi + \left(\epsilon^2 - 1\right)^{1/2}\sin\phi\right]$$

By using equation (12.59.1), and recalling that $\sin\phi$ is an odd function, we have

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^{+\infty} \ddot{p}_z^2 \, \mathrm{d}t s \, \mathrm{d}s = e_1^2 e_2^2 \left(\frac{e_z}{m_1} - \frac{e_2}{m_2}\right)^2 \int_0^\infty \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos^2\phi + (\epsilon^2 - 1)\sin^2\phi}{\epsilon^2 r^4} \, \mathrm{d}t s \, \mathrm{d}s$$

The equation for the trajectory may be used to express $\cos^2\phi$ and $\sin^2\phi$ in terms of r and ϵ. On substituting $\epsilon^2 = u, s\,\mathrm{d}s = \frac{1}{2}a^2\,\mathrm{d}u$ we find that the above integral can be transformed to

$$\frac{a}{v_0}\int_{2a}^\infty \frac{\mathrm{d}r}{r^3} \int_1^{(r/a-1)^2} \left[-\frac{a^2}{r^2}u + \left(4\frac{a^2}{r^2} - 2\frac{a}{r} + 1\right) + \left(-5\frac{a^2}{r^2} + 6\frac{a}{r} - 2\right)\frac{1}{u} + 2\left(\frac{a}{r} - 1\right)^2 \frac{1}{u^2}\right] \frac{\mathrm{d}u}{[(r/a-1)^2 - u]^{1/2}}$$

The evaluation of the integral with respect to u leads to a logarithmic term which may be transformed by integration by parts. To evaluate the integral with respect to r it is convenient to substitute $x = 2a/r$ which
converts this integral into a sum of a number of B-functions which are defined by

$$\mathrm{B}(k,l) = \int_0^1 x^{k-1}(1-x)^{l-1}\,\mathrm{d}x = \frac{\Gamma(k)\Gamma(l)}{\Gamma(k+l)}$$

The final result is

$$A = \frac{8\pi}{9}e_1e_2\left(\frac{e_1}{m_1} - \frac{e_2}{m_2}\right)^2 \mu v_0, \quad B = 0$$

12.60 In the approximation considered here $v =$ constant and the trajectory of the particle is a straight line. Suppose that the motion of the particle takes place in the xz-plane in the direction parallel to the z-axis. In terms of these coordinates.

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{n} = (n_x, n_y, n_z)\,, \quad \text{where} \quad n_x = \sin\vartheta\cos\phi, \quad n_y = \sin\vartheta\sin\phi,\\
&n_z = \cos\vartheta, \quad r = (s, 0, vt')\,, \quad r = \left(s^2 + v^2t'^2\right)^{1/2},\\
&v = (0, 0, v).
\end{aligned}$$

Since $\boldsymbol{v} = c^2\boldsymbol{p}/\varepsilon$ where $\varepsilon = mc^2/\left(1-\beta^2\right)^{1/2}$ and $\beta = v/c$, we have $\dot{v} = \frac{c^2\dot{\boldsymbol{p}}}{\mathscr{D}} - \frac{c^2\boldsymbol{p}\dot{\varepsilon}}{\mathring{\mathrm{A}}^2}$.

Moreover, from the equation of motion of the particle we have $\dot{p} = e_1e_2r/r^3$, and the law of conservation of energy requires that $\mathscr{E} + e_1e_2/r =$ constant. When the last equation is differentiated with respect to t' we have

$$\dot{\mathscr{E}} = \frac{e_1e_2\dot{r}}{r^2} = \frac{e_1e_2(r\cdot v)}{r^3}$$

so that

$$\dot{\boldsymbol{v}} = \frac{e_1e_2c^2}{\mathscr{E}}\left[\boldsymbol{r} - \frac{\boldsymbol{p}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v})}{\mathscr{E}}\right] = \frac{e_1e_2c^2}{\mathscr{E}r^3}\left[s\boldsymbol{e}_x + vt'(1-\beta^2)\boldsymbol{e}_z\right].$$

Substituting these expressions into equation (12.b.4) we have

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\Delta W_n}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{e_1^4e_2^2c^4}{4\pi c^3\varepsilon^2\left(1-\beta n_z\right)^5}\Bigg\{ & s^2\left[\left(1-\beta n_z\right)^2 - n_x^2\left(1-\beta^2\right)\right]\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t'}{\left(s^2+v^2t'^2\right)}\\
& + c^2\beta^2\left(1-\beta^2\right)^2\left(1-n_z\right)^2\int_{-\infty}^{\infty}\frac{t'^2\,\mathrm{d}t'}{\left(s^2+v^2t'^2\right)^3}\Bigg\}
\end{aligned}$$

Integration yields

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\Delta W_n}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{e_1^4e_2^2\left(1-\beta^2\right)}{32m^2c^3s^3v\left(1-\beta n_z\right)^5}\Big[& 4 - 3n_x^2 - n_z^2 - 6\beta n_z + \beta^2\left(-2 + 3n_x^2 + 5n_z^2\right)\\
& + \beta^4\left(1-n_z^2\right)\Big] \qquad (12.60.1)
\end{aligned}$$

In the nonrelativistic limit $\beta \to 0$ and

$$\frac{\mathrm{d}\Delta W_n}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{e_1^4e_2^2}{32m^2c^3s^3v}\left(4 - 3n_x^2 - n_z^2\right)$$

In the ultrarelativistic limit $\beta \approx 1$ and

$$\frac{\mathrm{d}\Delta W_n}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{3e_1^4 e_2^2 (1-\beta)}{2^9 m^2 c^4 s^3 \sin^4 \frac{1}{2}\vartheta}$$

When $\vartheta \leqslant (1-\beta)^{1/2}$, the latter formula becomes incorrect, and the exact expression (12.60 .1) must be employed.

12.61

$$\Delta W = \frac{\pi e_1^4 e_2^2}{12 m^2 c^3 s^3 v} \frac{4-\beta^2}{1-\beta^2}, \quad \Delta p = \frac{v \Delta W}{c^2}$$

12.62

$$\frac{\mathrm{d}\Delta W_\omega}{\mathrm{d}\omega} = \frac{8 e_1^4 e_2^2 \omega^2 c}{3\pi v^4} \left[K_1^2 \left(\frac{\omega s}{v} \right) + K_0^2 \left(\frac{\omega s}{v} \right) \right]$$

12.63 Equation (12.b.11) will hold for all frequencies ω since the collision time $\tau = 0$. For scattering by a perfectly hard sphere, the angle of incidence equals the angle of scattering, and hence $|v_2 - v_1|^2 = 2v \sin \frac{1}{2}\vartheta$, where ϑ is the angle of scattering which is related to the impact parameter s by $s = a \sin \frac{1}{2}\vartheta$ when $s \leqslant a$. When $s > a$, the particle is not scattered. Hence,

$$\mathrm{d}\kappa_\omega = \frac{2e^2}{3\pi c^3} 4v^2 \int_0^a \sin^2 \frac{1}{2}\vartheta 2\pi s \, \mathrm{d}s \, \mathrm{d}\omega = \frac{4e^2 a^2 v^2}{3c^3} \, \mathrm{d}\omega$$

The above differential emission is independent of frequency. Hence, the total emission is

$$\kappa = \int_0^\infty \mathrm{d}\kappa_\omega = \infty$$

This is due to the fact that the sphere was assumed to be perfectly hard. In fact, perfectly hard spheres do not exist, $\tau \neq 0$, and for large values of ω the above expression for $\mathrm{d}\kappa_\omega$ is invalid.

12.64 Equation (12.b.8) for the differential emission may be written in the form

$$\frac{\mathrm{d}\kappa_n}{\mathrm{d}\Omega} = 2\pi \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \frac{\overline{\mathrm{d}I}}{\mathrm{d}\Omega} \, \mathrm{d}t s \, \mathrm{d}s \tag{12.64.1}$$

The intensity is given by $\mathrm{d}/\!/\mathrm{d}\Omega = (c/4\pi) H^2 r^2$, where $H = [A \wedge n]/c$. In equation (12.64.1), the averaging of the radiated intensity should be carried out over all directions in the plane perpendicular to the direction of the incident beam. It is convenient to write the vector product in the

expression for H in the form $H_\alpha = e_{\alpha\beta\gamma} \dot{A}_\beta n_\gamma / c$ where $e_{\alpha\beta\gamma}$ is the skewsymmetric unit pseudotensor (cf problems 1.24 and 1.26), and the summation is carried out over the repeated indices. The components of the vector potential $\boldsymbol{A}_\beta$ may be expressed in terms of the components of the quadrupole moment $Q_{\beta\epsilon}$ which are given by equation (12.a.19):

$$A_\beta = \frac{1}{2c^2 r} \ddot{Q}_{\beta\epsilon} n_\epsilon$$

Thus,

$$H_\alpha = \frac{1}{2c^3 r} e_{\alpha\beta\gamma} \dddot{Q}_{\beta\epsilon} n_\gamma n_\epsilon$$

and

$$\frac{\overline{\mathrm{d}I}}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{1}{16\pi c^5} \dddot{Q}_{\beta\epsilon} \dddot{Q}_{\beta'\epsilon'} e_{\alpha\beta\gamma} e_{\alpha\beta'\gamma'} \overline{n_\gamma n_\epsilon n_{\gamma'} n_{\epsilon'}}$$

Consider a polar system of coordinates with the polar axis in the direction of the incident beam, and the particle e_2, m_2 at the origin. The average should be taken for a fixed value of the component $n_z \equiv n_3 = \cos\vartheta$, where ϑ represents the direction in which the radiation is emitted. It is easy to show that

$$\left.\begin{aligned} &\overline{n_i n_k} = \tfrac{1}{2}\delta_{ik}\left(1 - n_3^2\right) \\ &\overline{n_i n_k n_l n_m} = \tfrac{1}{8}\left(\delta_{ik}\delta_{lm} + \delta_{il}\delta_{km} + \delta_{im}\delta_{kl}\right)\left(1 - n_3^2\right)^2 \\ &\overline{n_i} = \overline{n_i n_k n_l} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{12.64.2}$$

where the subscripts i, k, l assume the values 1,2 .
Using equation (12.64.2) and the equation

$$e_{\alpha\beta\gamma} e_{\alpha\beta'\gamma'} = \delta_{\beta\beta'}\delta_{\gamma\gamma'} - \delta_{\beta\gamma'}\delta_{\gamma\beta'}$$

we have

$$\begin{aligned} \frac{\overline{\mathrm{d}I}}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{1}{16\pi c^5} \Bigg\{ &\left(\dddot{Q}^2_{\beta 3} - \dddot{Q}^2_{33}\right)\cos^4\vartheta + \frac{1}{2}\left(\dddot{Q}^2_{\beta\beta'} - 3\dddot{Q}^2_{\beta 3} + 6\dddot{Q}^2_{33} - 2\dddot{Q}_{33}\ddot{Q}_{\beta\beta}\right) \\ &\times \sin^2\vartheta\cos^2\vartheta + \frac{1}{8}\left[2\dddot{Q}^2_{\beta\beta'} - \left(\ddot{Q}_{\beta\beta}\right)^2 - 3\dddot{Q}^2_{33} + 2\ddot{Q}_{33}\ddot{Q}_{\beta\beta}\right]\sin^4\vartheta \Bigg\} \end{aligned} \tag{12.64.3}$$

Substituting equation (12.64.3) into equation (12.64.1) we have finally

$$\frac{\mathrm{d}\kappa_n}{\mathrm{d}\Omega} = A + BP_2(\cos\vartheta) + CP_4(\cos\vartheta) \tag{12.64.4}$$

where P_2 and P_4 are the Legendre polynomials (see appendix 2) and

$$\left.\begin{aligned} A &= \tfrac{1}{120c^5}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\left[3\dddot{Q}^2_{\beta\beta'} - \left(\ddot{Q}_{\beta\beta}\right)^2\right] s\ \mathrm{d}s\ \mathrm{d}t \\ B &= \tfrac{1}{168c^5}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\left[-3\dddot{Q}^2_{\beta\beta'} + 2\left(\ddot{Q}_{\beta\beta}\right)^2 + 9\dddot{Q}^2_{\beta 3} - 6\ddot{Q}_{33}\ddot{Q}_{\beta\beta}\right] s\ \mathrm{d}s\ \mathrm{d}t \end{aligned}\right\} \tag{12.64.5}$$

$$\left.\begin{aligned} C = \tfrac{1}{280c^5}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty}[&-2\ddot{Q}^2_{\beta\beta'} + 2\ddot{Q}^2_{\beta 3} - (\ddot{Q}_{\beta\beta})^2 \\ &-35\ddot{Q}^2_{33} + 10\ddot{Q}_{33}\ddot{Q}_{\beta\beta}]\, s\ \mathrm{d}s\ \mathrm{d}t\ . \end{aligned}\right\}$$

12.65 The total emission is

$$\kappa = \int \frac{\mathrm{d}\kappa_n}{\mathrm{d}\Omega}\ \mathrm{d}\Omega$$

Using equations (12.64.4) and (12.64.5) of the preceding solution, we have (see appendix 2):

$$\kappa = 4\pi A = \frac{\pi}{30c^5}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\left[3\dddot{Q}^2_{\alpha\beta} - \dddot{Q}^2_{\beta\beta}\right] s\ \mathrm{d}s\ \mathrm{d}t. \tag{12.65.1}$$

Let x_α be the Cartesian components of the relative position vector of the particles and $v_\alpha = \dot{x}_\alpha$ the Cartesian components of the corresponding velocities. Hence, bearing in mind the equation of relative motion of the particles, we have

$$\ddot{x}_\alpha = \frac{2e^2 x_\alpha}{mr^3}, \quad \ddot{x}_\alpha = \frac{2e^2}{m}\frac{(rx_\alpha - 3x_\alpha v_r)}{r^6}$$

where $v_r = \dot{r}$. Substituting these expressions into equation (12.65.1) we have

$$\kappa = \frac{4\pi e^6}{15m^2c^5}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\frac{v^2 + 11v_\Phi^2}{r^4}s\ \mathrm{d}s\ \mathrm{d}t \tag{12.65.2}$$

where $v^2 = v_\phi^2 + v_r^2$.
In view of the conservation of energy and angular momentum, $v^2 = v_0^2 - 4e^2/mr$ and $v_\phi = v_0 s/r$. In order to evaluate the integral in equation (12.65.2) it is convenient to substitute $\mathrm{d}t = \mathrm{d}r/v_r = \mathrm{d}r/\left(v^2 - v_\phi^2\right)^{1/2}$. The final result is

$$\kappa = \frac{4\pi}{9}\frac{e^4 v_0^3}{mc^5}$$

c Interaction of charged particles with radiation
12.66 The momentum of the field is

$$G = \int g\ \mathrm{d}^3 r$$

where $g = [\boldsymbol{E} \wedge \boldsymbol{H}]/4\pi c$ and the integral is evaluated over all space. The magnetic field of the moving particle is $H = [\boldsymbol{v} \wedge E]/c$, since in the rest system of the particle (S') the magnetic field is zero. Hence,

$$g = \frac{1}{4\pi c^2}\left[vE^2 - E(v \cdot E)\right]$$

Using equation (12.b.3) we have

$$E_x = E'_x, \quad E_y = \frac{E'_y}{(1-\beta^2)^{1/2}}, \quad E_z = \frac{E'_z}{(1-\beta^2)^{1/2}}$$

where the x-axis is parallel to v. Moreover, in view of the Lorentz contraction, the relation between the volume elements is $\mathrm{d}^3 r = \mathrm{d}^3 r' \left(1-\beta^2\right)^{1/2}$ and hence,

$$G = \frac{v}{4\pi c^2 \left(1-\beta^2\right)^{1/2}}\int\left(E'^2_y + E'^2_z\right)\mathrm{d}^3 r' = \frac{v}{4\pi c^2 \left(1-\beta^2\right)^{1/2}}\int\frac{2}{3}\int E'^2\ \mathrm{d}^3 r' \tag{12.66.1}$$

The last transformation is a consequence of the spherical symmetry of the field in the S' system.

If it is assumed that the rest mass of the particle is of purely electromagnetic origin, i.e. it is the mass of its electric field and is given by Einstein's relation $W' = m_0 c^2$, then

$$m_0 = \frac{1}{c^2}\frac{1}{8\pi}\int E'^2\ \mathrm{d}^3 r' \tag{12.66.2}$$

The momentum of the field should then be equal to $m_0 v/\left(1-\beta^2\right)^{1/2}$, although it follows from equation (12.66.1) that this cannot be so [(1)]. The momentum of the field depends on the velocity v just as for a particle, i.e.

$$G = \frac{m'_0 v}{\left(1-\beta^2\right)^{1/2}}$$

However, the 'mass' is $m_0' = \frac{4}{3}m_0 \neq m_0$, i.e. it is not equal to the rest mass of the particle m_0 as given by equation (12.66.2).

The presence of the coefficient $\frac{4}{3}$ in the expression for G shows that the energy and momentum of the electromagnetic field of the particle do not form a 4 -vector and cannot be identified with the energy and momentum of the particle.

It should be noted that the electromagnetic mass defined by equation (12.66.2) is infinite for a point particle.

$$W_m = \frac{1}{8\pi}\int H^2 \, \mathrm{d}^3 r = \frac{1}{2}\frac{m_0' v^2}{(1-\beta^2)^{1/2}}$$

where m_0' is defined in the preceding problem.
The total electromagnetic energy of the particle is

$$W = \frac{1}{8\pi}\int \left(E^2 + H^2\right) \mathrm{d}^3 r = m_0 c^2 \left[\frac{1}{(1-\beta^2)^{1/2}} - \frac{1}{4}\left(1-\beta^2\right)^{1/2}\right]$$

which is different from the velocity dependence $m_0 c^2/\left(1-\beta^2\right)^{1/2}$ of the energy of a particle (cf preceding problem).

(1) On this assumption the energy of the field should be equal to $m_0 c^2/\left(1-\beta^2\right)^{1/2}$; it will be shown in the next problem that this is not correct.

12.68 We shall neglect terms of the order of v/c and higher, and consider the effect of an element $\mathrm{d}e_1$ on another element $\mathrm{d}e_2$. The Coulomb part of the electric field is spherically symmetric and does not contribute to the self-force. The quasi-stationary magnetic field cannot contribute to it either. Thus, it is sufficient to consider only that part of the electric field strength $\mathrm{d}E$ of the element $\mathrm{d}e_1$ which depends on the acceleration. The force acting on the element $\mathrm{d}e_2$ is

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F} = -\mathrm{d}e_2 \, \mathrm{d}\boldsymbol{E} = \frac{\mathrm{d}e_1 \, \mathrm{d}e_2}{c^2 r}\left[\dot{\boldsymbol{v}} - r_0\left(r_0 \cdot \dot{\boldsymbol{v}}\right)\right]$$

where $r_0 = r/r$, and r is the position vector of $\mathrm{d}e_2$ relative to $\mathrm{d}e_1$. The total force acting on the particle is

$$F = \int \mathrm{d}F = -\frac{4}{3}\frac{W_0}{c^2}\dot{v}$$

where $W_0 = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}e_1 \, \mathrm{d}e_2/r$ is the energy of the electromagnetic field of the particle at rest. The factor $\frac{4}{3}$ is obtained as a result of integration over the directions r_0. If the rest mass of the particle is defined by $m_0' = 4W_0/3c^2$ (see problem 12.66) then the total self-force is given by

$$\boldsymbol{F} = -m_0'\dot{\boldsymbol{v}}$$

Thus, when retarded effects are neglected, this force becomes identical with the inertial force.

12.69 The force acting on an element of charge $\mathrm{d}e_2$ due to an element $\mathrm{d}e_1$ is determined by the acceleration $\dot{v}$ of the latter at the time t':

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}(t) = -\left.\frac{\mathrm{d}e_1 \, \mathrm{d}e_2}{c^2 r}\left[\dot{\boldsymbol{v}} - r_0\left(r_0 \cdot \dot{\boldsymbol{v}}\right)\right]\right|_{t'=t-r/c}$$

Expanding the acceleration $\dot{v}$ in powers of $|t'-t| = r/c$ we have

$$\dot{v}\left(t'\right) = \dot{v}(t) + \left(t'-t\right)\ddot{v}(t) = \dot{v}(t) - \frac{r}{c}\ddot{v}(t)$$

The required force is found by integrating with respect to e_1 and e_2 (see preceding solution):

$$F = -m_0'\dot{v} + \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\dot{v}$$

The second term on the right-hand side is the force of radiative friction. It is independent of the structure of the particle and retains its form as the size of the particle tends to zero. The proper energy W_0, and therefore the electromagnetic mass m_0, become infinite in the limit of a point particle. The terms which have been neglected are of the order of $(t'-t)^n$, where $n \geqslant 2$, and are proportional to r_0^{n-1} and tend to zero in the limit of a point particle (r_0 is the radius of the particle).

12.70

$$T = \frac{m^2c^3a_0^3}{4e^4} = 3 \cdot 2 \times 10^{-13} \text{ s}$$

The approximations made in the solution will be valid if the energy loss per period is small in comparison with the total energy of the electron,

i.e. $\tau|\mathrm{d}\&/\mathrm{d}t| \ll |\&|$, and hence $ac/v \gg r_0 = e^2/mc^2$, where r_0 is the classical radius of the electron. This condition ceases to be valid at distances of the order of 10^{-15} m, when classical electrodynamics breaks down.

The very short lifetime obtained from the above calculations clearly shows that classical ideas about the motion of an electron in an atom (definite orbits and so on) are incorrect. These (and other) fundamental difficulties of classical physics have been removed by quantum mechanics.

12.71

$$\&(t) = mc^2 \coth\left(\frac{2e^4H^2}{3m^3c^5}t + \tfrac{1}{2}\ln\frac{\&_0 + mc^2}{\&_0 - mc^2}\right).$$

When $t \to \infty$ we have $\&(t) \to mc^2$, i.e. the particle comes to rest. The radius of the orbit can be expressed in terms of $\&(t)$:

$$r(t) = \frac{cp}{eH} = \frac{1}{eH}\left[\&^2(t) - m^2c^4\right]^{1/2}$$

When $t \to \infty$ we have $r(t) \to 0$, i.e. the particle moves on a closing spiral.

12.72

$$\varepsilon_{\mathbf{cr}} = mc^2\left(\frac{3a^2\omega}{2cr_0}\right)^{1/3}$$

where $r_0 = e^2/mc^2$.

12.73 The equation of motion (including the radiative friction term) is

$$\ddot{r} + \omega_0^2 r = \frac{2}{3}\frac{e^2}{mc^3}\dddot{r} \tag{12.73.1}$$

The characteristic equation corresponding to equation (12.73.1) is

$$k^2 + \omega_0^2 = \frac{2}{3}\frac{e^2}{mc^3}k^3 \tag{12.73.2}$$

Since the radiative friction force is small in comparison with the quasielastic force, equation (12.73.2) can be solved by successive approximations. In the zero-order approximation the right-hand side is neglected and $k \approx k_0 = \pm\mathrm{i}\omega_0$. In the first-order approximation k_0 may be substituted for k in the right-hand side of equation (12.73.2) so that $k \approx k_1 = \pm\mathrm{i}\omega_0 - \frac{1}{2}\gamma$ where

$$\gamma = \frac{2}{3}\frac{e^2\omega_0^2}{mc^3}$$

Consider the solution corresponding to the negative sign:

$$r = r_0 \exp\left(-\frac{1}{2}\gamma t\right) \exp\left(-\mathrm{i}\omega_0 t\right) \quad (t > 0)$$

This solution holds when $\gamma \ll \omega_0$ and represents damped oscillations.
The energy of the oscillator falls off as the square of the modulus of its amplitude:

$$W = W_0 \exp(-\gamma t)$$

The quantity $1/\gamma$ can therefore be called the lifetime of the excited state of the oscillator.
The electric field strength of the radiation is proportional to r so that

$$\boldsymbol{E} = \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{E}_\omega \exp(-\mathrm{i}\omega t)\mathrm{d}\omega = \begin{cases} \boldsymbol{E}_0 \exp\left(-\mathrm{i}\omega_0 t\right) \exp\left(-\frac{1}{2}\gamma t\right), & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

and

$$\boldsymbol{E}_\omega = \frac{\boldsymbol{E}}{2\pi} \int_0^\infty \exp\left[-\left(\frac{1}{2}\gamma + \mathrm{i}\omega_0\right) t + \mathrm{i}\omega t\right] \mathrm{d}t = \frac{\boldsymbol{E}_0}{2\pi\left[\mathrm{i}\left(\omega - \omega_0\right) - \frac{1}{2}\gamma\right]}$$

Hence, the spectral distribution of the emitted intensity is

$$\frac{\mathrm{d}I_\omega}{\mathrm{d}\omega} = \frac{I_0\gamma}{2\pi} \frac{1}{\left(\omega - \omega_0\right)^2 + \frac{1}{4}\gamma^2} \tag{12.73.3}$$

where $I_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}I_\omega$ is the total intensity. The spectral distribution (12.73.3) is of the characteristic resonance form (figure 12.73.1).

The width of the spectral line is characterised by the quantity $\Delta\omega = \gamma$. The natural width is very small [in terms of wavelengths it is $\Delta\lambda = \Delta(2\pi c/\omega) = 4\pi r_0/3 = 1 \cdot 17 \times 10^{-14}$ m].

If it is assumed that the radiation is emitted in discrete portions (this assumption does, of course, take us outside the framework of classical electrodynamics), then the uncertainty in the energy of the photons, $\Delta\& = \hbar\Delta\omega = \hbar\gamma$, is related to the lifetime of the excited state, $\tau = 1/\gamma$, by
$(\Delta\varepsilon)\tau = \hbar$

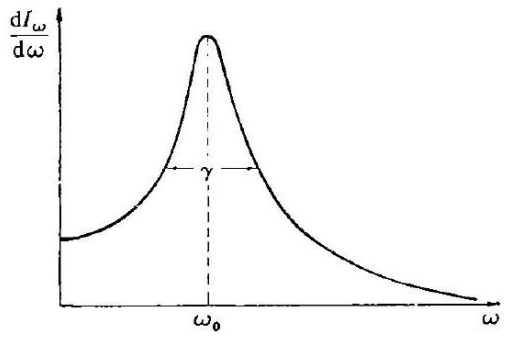


Figure 12.73.1.

This is a special case of the very general quantum mechanical uncertainty relation for energy and time.

12.74

$$\frac{\mathrm{d}I_\omega}{\mathrm{d}\omega} = I_0 \exp\left[-\left(\frac{\omega-\omega_0}{\gamma_\mathrm{D}}\right)^2\right]$$

where $\gamma_\mathrm{D} = (2kT\omega_0^2/mc^2)^{1/2}$ is the Doppler line width and I_0 is the intensity at $\omega = \omega_0$. The line width is a function of temperature and may be used as a measure of the temperature of a gas.

12.75

$$\frac{\mathrm{d}I_\omega}{\mathrm{d}\omega} = \frac{I\Gamma}{2\pi}\frac{1}{(\omega-\omega_0)^2 + \frac{1}{4}\Gamma^2}$$

where $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{d}I_\omega$.

12.76 If the wave is polarised along the x-axis then

$$x_\omega = \frac{eE_{x\omega}}{m}\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - \mathrm{i}\omega\gamma}$$

where $\gamma = \frac{2}{3}(e^2\omega_0^2/mc^3)$.

The energy absorbed by the oscillating electron is [(2)]

$$\Delta W = \int_{-\infty}^{+\infty} eE_x(t)\dot{x}(t)\mathrm{d}t = \frac{2\pi e^2}{m}\int_0^\infty |E_{x\omega}|^2 \frac{2\omega^2\gamma}{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + \omega^2\gamma^2}\,\mathrm{d}\omega$$

since $(\dot{x})_\omega = -i\omega x_\omega$. The integrand in the latter expression represents the spectral distribution of the absorption. It follows that γ is a measure of the width of the absorption line, just as in the case of emission. Since, by definition, the width of the spectral distribution is large compared with the natural line width γ, it follows that

$$\Delta W = \frac{2\pi e^2}{m}|E_{x\omega_0}|^2 2\omega_0^2\gamma \int_{-\omega_0}^\infty \frac{\mathrm{d}\xi}{(2\omega_0\xi)^2 + \omega_0^2\gamma^2}$$

where $\xi = \omega - \omega_0$. The lower limit may be replaced by $-\infty$ since $\gamma \ll \omega_0$. The result of the integration is

$$\Delta W = \frac{2\pi^2 e^2}{m}|E_{x\omega_0}|^2 = 2\pi^2 r_0 c S_{\omega_0}$$

where $r_0 = e^2/mc^2$ is the classical radius of the electron. We see that the result is independent of γ. The dependence on frequency is

[(2)] It is easy to show that

$$\int_{-\infty}^{+\infty} A(t)B(t)\mathrm{d}t = 2\pi\int_0^\infty (A_\omega B_\omega^* + A_\omega^* B_\omega)\,\mathrm{d}\omega$$

indirect: the quantity ΔW is proportional to the spectral density S_{ω_0} at the resonant frequency ω_0 of the oscillator. It is clear from the above derivation that the same result would be obtained for an unpolarised wave group incident on an anisotropic oscillator. The density S_ω would then be the sum of the intensities of all the polarised waves of frequency ω entering into this group.

12.77 (a) $\Delta W = 2\pi^2 r_0 c S_{\omega_0} \cos^2\vartheta$
(b) $\Delta W = \pi^2 r_0 c S_{\omega_0} \sin^2\theta$
(c) $\Delta W = \frac{2}{3}\pi^2 r_0 c S_{\omega_0}$
12.78 The equation of motion of the harmonic oscillator is

$$\ddot{\boldsymbol{r}} + \omega_0^2 r = \frac{2e^2}{3mc^3}\dddot{\boldsymbol{r}} + \frac{e}{m}\boldsymbol{E}_0 \exp(-\mathrm{i}\omega t) \tag{12.78.1}$$

where it is assumed that the electric field is uniform in the region occupied by the oscillator, and the effects of the magnetic force, which are effects of the order of v/c, can be neglected.

The solution of equation (12.78 .1) which corresponds to forced oscillations is

$$r = \frac{e}{m}\frac{E}{\omega_0^2 - \omega^2 - \mathrm{i}\omega\gamma}$$

Hence the time average of the intensity scattered in a given direction is given by

$$\frac{\overline{\mathrm{d}I}}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{1}{4\pi c^3}\overline{|e[\ddot{r} \wedge n]|^2} = \frac{cE_0^2 r_0^2}{8\pi}\frac{\omega^4 \sin^2\vartheta}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \omega^2\gamma^2}$$

where ϑ is the angle between the direction of propagation of the scattered radiation, $\boldsymbol{n}$, and the direction of polarisation of the incident wave. The time average of the energy flux density in the incident wave is $\bar{\gamma}_0 = cE_0^2/8\pi$. The differential scattering cross section is given by

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{1}{\bar{\gamma}_0}\frac{\overline{\mathrm{d}I}}{\mathrm{d}\Omega} = r_0^2\frac{\omega^4 \sin^2\vartheta}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \omega^2\gamma^2}$$

The total scattering cross section is therefore given by

$$\sigma = \int \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\,\mathrm{d}\Omega = \frac{8\pi}{3}r_0^2\frac{\omega^4}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \omega^2\gamma^2}$$

For a strongly bound electron, when $\omega_0 \gg \omega$,
$\sigma = \frac{8\pi}{3}\frac{r_0^2\omega^4}{\omega_0^4}$.
A characteristic feature of this relation is the frequency-dependence: $\sigma \propto \omega^4$.

For a weakly bound electron and small radiative friction $\gamma \approx 0, \omega \approx 0$, and $\sigma = 8\pi r_0^2/3$.
12.79

$$H = -\frac{Ae^2}{mc^2 r}\left(e_\phi \cos\vartheta - \mathrm{i}e_\vartheta\right)\exp\left[-\mathrm{i}\left(\omega t' - \phi\right)\right]$$

where ϑ, ϕ are the polar angles of the direction of propagation of the scattered wave (the incident wave is assumed to propagate in the direction of the z-axis) and A is the amplitude of the incident wave.

It is clear from the expression for H that the scattered wave will, in general, be elliptically polarised. The waves scattered in the forward and backward directions will be circularly polarised, while the waves scattered into the xy-plane will be linearly polarised. The differential and total scattering cross sections are given by

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{1}{2}r_0^2\left(1 + \cos^2\vartheta\right), \quad \sigma = \frac{8\pi}{3}r_0^2$$

12.80 $\rho = \cos^2\vartheta$
12.81 For a linearly polarised wave

$$\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{pol}} = r_0^2\frac{\left(1-\beta^2\right)(1-\beta)^2}{(1-\beta\cos\vartheta)^6}\left[(1-\beta\cos\vartheta)^2 - \left(1-\beta^2\right)\sin^2\vartheta\cos^2\phi\right]$$

where ϑ, ϕ are the polar angles of the direction of propagation of the scattered wave, the z-axis is parallel to the velocity v of the charge, $\beta = v/c$, and the azimuth angle ϕ is measured from the direction of the vector E in the incident wave.

For an unpolarised wave

$$\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{unpol}} = r_0^2 \frac{(1-\beta^2)\,(1-\beta)^2}{(1-\beta\cos\vartheta)^6}\left[\frac{1}{2}\left(1+\beta^2\right)\left(1+\cos^2\vartheta\right) - 2\beta\cos\vartheta\right]$$

12.82 Consider the motion of the oscillator in a magnetic field H parallel to z and suppose that

$$\omega_0 \gg \frac{eH}{2mc} = \omega_{\mathrm{L}}$$

Following the method employed in the solution of problem 11.79, we have

$$r = A_1\,(e_x + \mathrm{i}e_y)\exp\left[-\mathrm{i}\,(\omega_0-\omega_{\mathrm{L}})\,t\right] + A_2\,(e_x - \mathrm{i}e_y)\exp\left[-\mathrm{i}\,(\omega_0+\omega_{\mathrm{L}})\,t\right] + A_3 e_z \exp(-\mathrm{i}\omega t)$$

where A_1, A_2, and A_3 are the constants of integration which can be determined from the initial conditions.

It is clear from the expression for r that when the oscillator is placed in the magnetic field it becomes anisotropic and the frequency of its
oscillations splits into three frequencies ω_0 and $\omega_0 \pm \omega_L$. When the radiation is observed in an arbitrary direction, the polarisation of each of the monochromatic components is in general found to be elliptical. In particular, two spectral lines are observed along the z-axis (along the field H). These lines are circularly polarised in opposite directions. All three monochromatic components are observed in the direction perpendicular to the field and are linearly polarised. In this situation, the electric vector of the undisplaced spectral line is parallel to the magnetic field, while the electric vectors of the two displaced lines are perpendicular to this direction.

d Expansion of an electromagnetic field in terms of plane waves 12.84

$$\begin{array}{ll} E_\omega(r) = -\operatorname{grad}\varphi_\omega(r) + \mathrm{i}\frac{\omega}{c}A_\omega(r), & H_\omega(r) = \operatorname{curl} A_\omega(r) \\ E_k(t) = -\mathrm{i}k\varphi_k(t) - \frac{1}{c}\dot{A}_k, & H_k(t) = \mathrm{i}\,[k \wedge A_k(t)] \\ E_{k\omega} = -\mathrm{i}k\varphi_{k\omega} + \mathrm{i}\frac{\omega}{c}A_{k\omega}, & H_{k\omega} = \mathrm{i}\,[k \wedge A_{k\omega}] \end{array}$$

12.85

(a) $\operatorname{curl}\boldsymbol{E}_\omega = \frac{\mathrm{i}\omega\mu}{c}\boldsymbol{H}_\omega$, $\operatorname{div}\epsilon\boldsymbol{E}_\omega = 4\pi\rho_\omega$, $\operatorname{curl}\boldsymbol{H}_\omega = -\frac{\mathrm{i}\omega\epsilon}{c}\boldsymbol{E}_\omega + \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}_\omega$, $\operatorname{div}\mu\boldsymbol{H}_\omega = 0$;

(b) $\mathrm{i}\,[\boldsymbol{k} \wedge E_k] = -\frac{1}{c}\dot{B}_k$, $\mathrm{i}\,(k \cdot D_k) = 4\pi\rho_k$, $\mathrm{i}\,[\boldsymbol{k} \wedge \boldsymbol{H}_k] = \frac{1}{c}\dot{\boldsymbol{D}}_{\boldsymbol{k}} + \frac{4\pi}{c}\dot{j}_k$, $(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{B}_k) = 0$;

(c) $[\boldsymbol{k} \wedge \boldsymbol{E}_{k\omega}] = \frac{\omega\mu}{c}\boldsymbol{H}_{k\omega}$, $\mathrm{i}\,(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{E}_{k\omega}) = \frac{4\pi\rho_{k\omega}}{\epsilon}$, $\mathrm{i}\,[k \wedge H_{k\omega}] = -\frac{\mathrm{i}\omega\epsilon}{c}E_{k\omega} + \frac{4\pi}{c}j_{k\omega}$, $(k \cdot H_{k\omega}) = 0$.

12.86

(a) $\nabla^2\varphi_\omega + \frac{\epsilon\mu\omega^2}{c^2}\varphi_\omega = -\frac{4\pi\rho_\omega}{\epsilon}$, $\nabla^2 A_\omega + \frac{\epsilon\mu\omega^2}{c^2}A_\omega = -\frac{4\pi\mu j_\omega}{c}$, $\operatorname{div}\boldsymbol{A}_\omega - \frac{\mathrm{i}\omega\epsilon\mu}{c}\varphi_\omega = 0$

(b) $\epsilon\mu\ddot{\varphi}_k + k^2c^2\varphi_k = \frac{4\pi c^2\rho_k}{\epsilon}$, $\epsilon\mu\ddot{A}_k + k^2c^2A_k = 4\pi c\mu j_k$, $-\mathrm{i}c\,(k \cdot A_k) + \epsilon\mu\dot{\varphi}_k = 0$

(c) $\left(k^2 - \frac{\epsilon\mu\omega^2}{c^2}\right)\varphi_{k\omega} = \frac{4\pi}{\epsilon}\rho_{k\omega}$, $\left(k^2 - \frac{\epsilon\mu\omega^2}{c^2}\right)A_{k\omega} = \frac{4\pi\mu}{c}j_{k\omega}$,

$$(k \cdot A_{k\omega}) - \frac{\omega\epsilon\mu}{c}\varphi_{k\omega} = 0$$

12.87 Consider equation (12.d. 2′). Integration with respect to the angles yields

$$\varphi_k = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \varphi(r)\exp[-\mathrm{i}(k \cdot r)]\mathrm{d}^3r = \frac{e}{2\pi^2 k}\int_0^\infty \sin kr\ \mathrm{d}r$$

The last integral does not, in general, have a definite value, since the quantity

$$I_N = \int_0^N \sin kr \, \mathrm{d}r = \frac{1 - \cos kN}{k}$$

does not tend to any particular limit as $N \to \infty$. It is easy to see, however, that the indeterminate term containing $\cos kN$ does not contribute to the potential $\varphi(r)$ when I_N is substituted into equation (12.d.2) with $N \to \infty$.

This follows from the fact that as $N \to \infty$, owing to rapid oscillations,

$$\int_0^\infty \frac{\cos kN}{k} \exp[\mathrm{i}(k \cdot r)] \mathrm{d}^3 k \to 0$$

Thus, in effect,

$$\varphi_k = \frac{e}{2\pi^2 k^2}$$

We note that the result $I = \lim_{N\to\infty} I_N = 1/k$ may be obtained for example, if I is defined as the limit of $\int_0^{N\to\infty} \exp(-br) \sin kr \, \mathrm{d}r$ as $b \to 0$.

The same result can also be obtained in another way. The application of the Laplace operator ∇^2 to both sides of the equation

$$\varphi(r) = \int \varphi_k \exp[\mathrm{i}(k \cdot r)] \mathrm{d}^3 k$$

yields

$$\left(\nabla^2 \varphi\right)_k = -k^2 \varphi_k$$

On the other hand, we may obtain the expression for the Fourier component $(\nabla^2\varphi)_k = -e/2\pi^2$ from a Fourier expansion of both sides of

Poisson's equation $\nabla^2\varphi = -4\pi e\delta(r)$. The required result is obtained by equating these two expressions for $(\nabla^2\varphi)_k$.

12.88

$$E_k = -\mathrm{i}k\varphi_k = -\frac{\mathrm{i}ek}{2\pi^2 k^2}$$

12.89 Since the volume density is $\rho(r,t) = e\delta(r - vt)$ it follows that

$$\rho_{k\omega} = \frac{e}{(2\pi)^4} \iint \delta(r - vt) \exp[-\mathrm{i}(k \cdot r) + \mathrm{i}\omega t] \mathrm{d}^3 r \, \mathrm{d}t$$

$$= \frac{e}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\{\mathrm{i}[\omega - (k \cdot v)]t\} \mathrm{d}t = \frac{e}{8\pi^3} \delta[(k \cdot v) - \omega]$$

Hence, using the results of the preceding solution, we have

$$\varphi_{k\omega} = \frac{e}{2\pi^2} \frac{\delta[(k \cdot v) - \omega]}{k^2 - \omega^2/c^2}$$

and similarly

$$A_{k\omega} = \frac{ev}{2\pi^2 c} \frac{\delta[(k \cdot v) - \omega]}{k^2 - \omega^2/c^2}$$

Using the expressions for the component of the field strength (see solution of problem 12.84) we have

$$\begin{aligned} E_{k\omega} &= \mathrm{i}\frac{e}{2\pi^2}\frac{\delta[(k\cdot v)-\omega]}{k^2-\omega^2/c^2}\left(-k+\frac{v\omega}{c^2}\right) \\ H_{k\omega} &= \mathrm{i}\,[k\wedge A_{k\omega}] \\ &= \mathrm{i}\frac{e}{2\pi^2 c}[k\wedge v]\frac{\delta[(k\cdot v)-\omega]}{k^2-\omega^2/c^2} \end{aligned}$$

All the field components contain the factor $\delta[(k\cdot v)-\omega]$ which is due to the dispersion relation $\omega=(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v})$. Hence, all the Fourier expansions of the electromagnetic field in this case are, in fact, three rather than four-dimensional. For example, the potential is given by

$$\begin{aligned} \varphi &= \int_{(k)}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e}{2\pi^2}\frac{\delta[\omega-(k\cdot v)]}{k^2-\omega^2/c^2}\exp\{\mathrm{i}[(k\cdot r)-\omega t]\}\mathrm{d}^3k\ \mathrm{d}\omega \\ &= \int\varphi_k(t)\exp[\mathrm{i}(k\cdot r)]\mathrm{d}^3k \end{aligned}$$

where

$$\varphi_k(t)=\frac{e}{2\pi^2}\frac{\exp[-\mathrm{i}(k\cdot v)t]}{k^2-\omega^2/c^2}$$

12.91 Consider the scalar potential. According to equations (c) of the solution of problem 12.86($\epsilon=\mu=1$)

$$\varphi_{k\omega}=\frac{4\pi\rho_{k\omega}}{k^2-\omega^2/c^2}$$

The Fourier component of the charge density is given by

$$\begin{aligned} \rho_{k\omega} &= -\frac{1}{(2\pi)^4}\left\{(\boldsymbol{p}\cdot\operatorname{grad}\delta(r-vt))\exp\left\{-\mathrm{i}[(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})-\omega t]\mathrm{d}^3r\ \mathrm{d}t\right.\right. \\ &= \frac{1}{(2\pi)^4}\int(\boldsymbol{p}\cdot\operatorname{grad}\exp\{-\mathrm{i}[(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})-\omega t]\})\delta(r-vt)\mathrm{d}^3r\ \mathrm{d}t \\ &= -\mathrm{i}\frac{(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{k})}{(2\pi)^3}\delta[\omega-(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v})] \end{aligned}$$

The dispersion relation $\omega=(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v})$ is identical with that for the field of a uniformly moving point charge (see problem 12.89). Using the method given in the solution of the preceding problem we have

$$\varphi(r,t)=-(p\cdot\operatorname{grad})\frac{1}{r^*}=\frac{(p\cdot r_0)}{r^{*3}}$$

where

$$r_0=\left(x-vt,\frac{y}{\gamma^2},\frac{z}{\gamma^2}\right),\quad r^*=\left[(x-vt)^2+\frac{1}{\gamma^2}\left(y^2+z^2\right)\right]^{1/2}$$

A similar calculation of the vector potential yields

$$A(r,t)=\frac{[m\wedge r^*]}{r^{*3}}+\frac{v\,(p\cdot r_0)}{cr^{*3}}$$

12.92
(a) $A = \frac{[m_0 \wedge r^*]}{\gamma r^{*3}}, \quad \varphi = 0;$
(b) $A = \frac{[m_0 \wedge r^*]}{r^{*3}}, \quad \varphi = \frac{(v \cdot A)}{c}.$
12.95 Let us expand all the vectors in Maxwell's equations into irrotational and solenoidal parts [(3)] (or longitudinal and transverse; see preceding problem):

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_{\parallel} + E_{\perp}, \quad j = \boldsymbol{j}_{\parallel} + \boldsymbol{j}_{\perp}, \quad H = \boldsymbol{H}_{\perp}, \quad \boldsymbol{H}_{\parallel} = 0$$

(3) The expansion of the electromagnetic field into longitudinal and transverse parts is used in one of the variants of quantum electrodynamics. In this expansion the transverse part of the field is quantised while the longitudinal part is not quantised: photons correspond to the former part.

Equating the transverse parts of the vectors, we have from Maxwell's equations,

$$\begin{array}{ll} \operatorname{curl} E_{\perp} = -\frac{1}{c}\dot{H}, & \operatorname{curl} H = \frac{1}{c}\dot{E}_{\perp} + \frac{4\pi}{c} j_{\perp} \\ \operatorname{div} E_{\perp} = 0, & \operatorname{div} H = 0 \end{array}$$

The longitudinal (irrotational) part of the electric field is given by

$$\operatorname{div} E_{\parallel}(r,t) = 4\pi\rho(r,t), \quad \operatorname{curl} E_{\parallel}(r,t) = 0$$

which resemble the equations of electrostatics. The time enters into them as a parameter. It follows that $\boldsymbol{E}_{\parallel}$is the Coulomb field.
12.96 According to the solution of problem 12.86(b), we have

$$\ddot{q}_{k\lambda} + \omega_k^2 q_{k\lambda} = 0$$

where $\omega_k = kc$.
This is the equation of a linear harmonic oscillator. Its general solution is

$$q_{k\lambda}(t) = a_{k\lambda} \exp(-\mathrm{i}\omega t) + b_{k\lambda} \exp(\mathrm{i}\omega t)$$

The coefficients $a_{k\lambda}$ and $b_{k\lambda}$ are related by

$$e_{k\lambda} a_{k\lambda} = e^*_{-k\lambda} b^*_{-k\lambda}, \quad e_{k\lambda} b_{k\lambda} = e^*_{-k\lambda} a^*_{-k\lambda}$$

which follow from the fact that $A(r,t) = A^*(r,t)$.
If the unit vectors which describe the main states of polarisation of waves with opposite wavevectors, k and $-k$, are such that

$$e_{k\lambda} = e^*_{-k\lambda}$$

then

$$\left.\begin{array}{l} a_{k\lambda} = b^*_{-k\lambda}, \quad b_{k\lambda} = a^*_{-k\lambda} \\ q_{k\lambda}(t) = a_{k\lambda} \exp(-i\omega t) + a^*_{-k\lambda} \exp(\mathrm{i}\omega t) \end{array}\right\} \tag{12.96.1}$$

The fields can be expressed in terms of the coordinates $q_{k\lambda}(t)$:
$E = -\frac{1}{c}\frac{\partial A}{\partial t} = -\frac{1}{\pi\sqrt{2}} \int e_{k\lambda} q_{k\lambda} \exp[\mathrm{i}(k \cdot r)] \mathrm{d}^3 k,$
$\boldsymbol{H} = \operatorname{curl} \boldsymbol{A} = \frac{\mathrm{i}c}{\pi\sqrt{2}} \int [\boldsymbol{k} \wedge \boldsymbol{e}_{k\lambda}]\, q_{k\lambda} \exp[\mathrm{i}(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r})] \mathrm{d}^3 \boldsymbol{k}.$
Consider the energy of the electromagnetic field
$W = \frac{1}{8\pi} \int (E^2 + H^2)\, \mathrm{d}^3 r.$

Since $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}$ are real, we have

$$\begin{aligned}\frac{1}{8\pi}\int E^2\ \mathrm{d}^3r =& \frac{1}{8\pi}\int (E\cdot E^*)\,\mathrm{d}^3r\\ =& \frac{1}{2\pi^2}\frac{1}{8\pi}\iiint\sum_{\lambda\lambda'}\left[(e_{k\lambda}\cdot e_{k'\lambda'})\,\dot{q}_{k\lambda}\dot{q}^*_{k'\lambda'}\right.\\ &\left.\times\exp\left\{\mathrm{i}\left([k-k']\cdot r\right)\right\}\right]\mathrm{d}^3r\ \mathrm{d}^3k\ \mathrm{d}^3k'\\ =& \frac{1}{2}\int\sum_{\lambda}\dot{q}_{k\lambda}\dot{q}^*_{k\lambda}\ \mathrm{d}^3k\end{aligned}$$

where we have used equation (A1.15) of appendix 1 and the orthogonality of the polarisation unit vectors belonging to the same k but different $\lambda\,[(e_{k1}\cdot e^*_{k2})=0]$. The energy of the magnetic field may be calculated in a similar way. The total energy of the electromagnetic field is thus given by

$$W=\frac{1}{2}\int\sum_{\lambda}\left(\dot{q}_{k\lambda}\dot{q}^*_{k\lambda}+\omega_k^2 q_{k\lambda}q^*_{k\lambda}\right)\mathrm{d}^3k \tag{12.96.2}$$

It consists of the energies of the separate field oscillators

$$W_{k\lambda}=\frac{1}{2}\left(\dot{q}_{k\lambda}\dot{q}^*_{k\lambda}+\omega_k^2 q_{k\lambda}q^*_{k\lambda}\right)$$

The field energy (12.96.2) may be expressed directly in terms of the coefficients $a_{k\lambda}$ with the aid of equation (12.96.1):

$$W=2\int\sum_{\lambda}\omega_k^2 a_{k\lambda}a^*_{k\lambda}\ \mathrm{d}^3k \tag{12.96.3}$$

Similarly, the momentum of the field may be shown to be

$$\begin{aligned}\boldsymbol{G}=&\frac{1}{4\pi c}\int[\boldsymbol{E}\wedge\boldsymbol{H}]\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}=\frac{1}{8\pi c}\int\left\{[\boldsymbol{E}\wedge\boldsymbol{H}^*]+[\boldsymbol{E}^*\wedge\boldsymbol{H}]\right\}\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}\\ =&\frac{\mathrm{i}}{2}\int\sum_{\lambda}k\left(\dot{q}_{k\lambda}q^*_{k\lambda}-\dot{q}^*_{k\lambda}q_{k\lambda}\right)\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

The oscillator coordinates $q_{k\lambda}$ are analogous to the coordinates describing the normal oscillations of a mechanical system. The main difference is that the field is a system with an infinite number of degrees of freedom. This analogy may be employed in the application of formal methods of quantum mechanics to the solution of problems in quantum electrodynamics.

12.97

$$A(r,t)=\frac{c}{\pi\sqrt{2}}\int\sum_{\lambda}e_{k\lambda}\left[Q_{k\lambda}(t)\cos(k\cdot r)-\frac{1}{\omega}\dot{Q}_{k\lambda}(t)\sin(k\cdot r)\right]\mathrm{d}^3k$$

$$E(r,t)=-\frac{1}{\pi\sqrt{2}}\int\sum_{\lambda}e_{k\lambda}\left[\dot{Q}_{k\lambda}\cos(k\cdot r)+\omega Q_{k\lambda}\sin(k\cdot r)\right]\mathrm{d}^3k$$

$$H(r,t)=-\frac{1}{\pi\sqrt{2}}\int\sum_{\lambda}[k\wedge e_{k\lambda}]\left[Q_{k\lambda}\sin(k\cdot r)+\frac{1}{\omega}\dot{Q}_{k\lambda}\cos(k\cdot r)\right]\mathrm{d}^3k$$

In deriving the expression for $E(r,t)$ we have made use of the fact that

$$\ddot{Q}_{k\lambda}+\omega_k^2 Q_{k\lambda}=0$$

The expression for the field energy can be derived most simply from equation (12.96.3) of the preceding solution by expressing the coefficients $a_{k\lambda}$ and $a^*_{k\lambda}$ in terms of $Q_{k\lambda}$ and $\dot{Q}_{k\lambda}$:

$$a_{k\lambda} = \frac{1}{2}Q_{k\lambda}\exp(\mathrm{i}\omega t) + \frac{\mathrm{i}}{2\omega}\dot{Q}_{k\lambda}\exp(\mathrm{i}\omega t)$$
$$a^*_{k\lambda} = \frac{1}{2}Q_{k\lambda}\exp(-\mathrm{i}\omega t) - \frac{\mathrm{i}}{2\omega}\dot{Q}_{k\lambda}\exp(-\mathrm{i}\omega t)$$

Hence,

$$W = \frac{1}{2}\sum_{\lambda}\int\left(\dot{Q}^2_{k\lambda} + \omega^2_k Q^2_{k\lambda}\right)\mathrm{d}^3k$$

It is evident from the latter equation that the energy of a free electromagnetic field may be written as a sum of the energies of field oscillators, which is similar in form to the corresponding expression for a mechanical oscillating system:

$$W = \int\sum_{\lambda} w_{k\lambda}\ \mathrm{d}^3k$$

where

$$W_{k\lambda} = \frac{1}{2}\left(\dot{Q}^2_{k\lambda} + \omega^2_k Q^2_{k\lambda}\right)$$

Evaluation of the field momentum G yields

$$\boldsymbol{G} = \int\sum_{\lambda} W_{k\lambda}\frac{\boldsymbol{k}}{kc}\ \mathrm{d}^3\boldsymbol{k} = \frac{1}{4\pi c}\int[\boldsymbol{E}\wedge\boldsymbol{H}]\mathrm{d}^3r$$

The relation between the momentum of a single oscillator, $G_{k\lambda}$, and its energy is

$$G_{k\lambda} = \frac{kW_{k\lambda}}{kc}$$

A similar equation relates the energy and the momentum of particles moving with the velocity of light in the direction k (photons!).

12.98 If the equations given in the solution of problem 12.86(b) are multiplied by $e^*_{k\lambda}$ then it is found that the transverse component of the potential $\boldsymbol{A_k}(t)$ is given by

$$\ddot{q}_{k\lambda}(t) + \omega^2_k q_{k\lambda}(t) = F_{k\lambda}(t) \tag{12.98.1}$$

where

$$F_{k\lambda}(t) = \frac{ec}{2\pi^2}\left(e^*_{k\lambda}\cdot v(t)\right)\exp\left[-\mathrm{i}\left(k\cdot r_0(t)\right)\right]$$

and $r_0(t)$ is the position vector of the particle and v is its velocity at time t. In the nonrelativistic limit

$$m\ddot{r}_0 = F + eE\left(r_0\right) \tag{12.98.2}$$

where m is the mass of the particle, $\boldsymbol{F}$ is that part of the force on the particle which is of nonelectromagnetic origin, and

$$E\left(r_0\right) = -\frac{1}{\pi\sqrt{2}}\int e_{k\lambda}\dot{q}_{k\lambda}\exp\left[\mathrm{i}\left(k\cdot r_0\right)\right]\mathrm{d}^3k$$

is the field strength at the point at which the particle is located. The force on the particle which is due to the magnetic field is neglected, since it is assumed that $v \ll c$. Equation

(12.98.1) is, in fact, the equation of forced oscillations of the oscillator under the action of the external force $F_{k\lambda}(t)$. The motion of the particle and of the electromagnetic field which interact with each other is described by the system of equations (12.98.1) and (12.98.2)
12.99 The change in the energy of one oscillator is

$$\frac{\mathrm{d}W_{k\lambda}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\left(F_{k\lambda}\dot{q}^*_{k\lambda} + F^*_{k\lambda}\dot{q}_{k\lambda}\right)$$

The rate of change of the field energy is

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}\int\sum_{\lambda}\left(F_{k\lambda}\dot{q}^*_{k\lambda} + F^*_{k\lambda}\dot{q}_{k\lambda}\right)\mathrm{d}^3k$$

12.100 The force $F_{k\lambda}(t)$ is given by

$$F_{k\lambda}(t) = b_{k\lambda}\cos\omega_0 t$$

where

$$b_{k\lambda} = \frac{e}{\pi\sqrt{2}}\left(v_0 \cdot e_{k\lambda}\right), \quad v_0 = \omega_0 r_0$$

(for the sake of simplicity the discussion is confined to linearly polarised field oscillators, so that the unit vectors $e_{k\lambda}$ are real). Integration of equation (12.98 .1) yields

$$q_{k\lambda} = \frac{b_{k\lambda}}{\omega_k^2 - \omega_0^2}\left(\cos\omega_0 t - \cos\omega_k t\right)$$

if the oscillators are not excited at $t = 0$. Substituting this expression for $q_{k\lambda}$ into the expression for the rate of change of the field energy $\mathrm{d}W_{k\lambda}/\mathrm{d}t$
found in the solution of the preceding problem, we have

$$\frac{\mathrm{d}W_{k\lambda}}{\mathrm{d}t} = \frac{b_{k\lambda}^2}{\omega_k^2 - \omega_0^2}\left(\omega_k\cos\omega_0 t\sin\omega_k t - \omega_0\cos\omega_0 t\sin\omega_0 t\right)$$

Integration of this expression with respect to t between 0 and t yields the amount of energy transmitted by the particle to the field oscillator (k, λ) in a time t:

$$W_{k\lambda} = \int_0^t \frac{\mathrm{d}W_{k\lambda}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \frac{b_{k\lambda}^2}{\omega_k^2 - \omega_0^2}\left[\frac{1}{2}\omega_k\frac{1-\cos\left(\omega_k+\omega_0\right)t}{\omega_k+\omega_0}\right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\omega_k\frac{1-\cos\left(\omega_k-\omega_0\right)t}{\omega_k-\omega_0} - \frac{1}{4}\omega_0\frac{1-\cos 2\omega_0 t}{\omega_0}\right]$$

When $\omega_k = \omega_0$ and as $t \to \infty$ the second term in brackets is very large in comparison with the first and third terms. The excitation of the oscillators is therefore found to exhibit a resonance property: the oscillators whose frequency is close to the frequency of the exciting force $F_{k\lambda}$ are excited first. We shall therefore retain only the resonance term, and sum the energies received by the field oscillators whose frequencies are near ω_0, with k lying inside a solid angle $\mathrm{d}\Omega$ and the polarisation unit vector $e_{k1}\,(e_{k2})$ fixed in direction:

$$\mathrm{d}W = \sum_{k,\lambda} W_{k\lambda} = \frac{\mathrm{d}\Omega}{2c^3}\int_{\omega_0-\delta}^{\omega_0+\delta}\sum_{\lambda}\frac{\omega_k^3 b_{k\lambda}^2}{\omega_k+\omega_0}\frac{1-\cos\left(\omega_k-\omega_0\right)t}{\left(\omega_k-\omega_0\right)^2}\,\mathrm{d}\omega_k$$

The integrand in the latter expression has a sharp maximum at $\omega_k = \omega_0$. This maximum is particularly narrow for large t. For sufficiently large t the slowly varying factor

$\sum_{\lambda} \omega_k^3 b_{k\lambda}^2 / (\omega_k + \omega_0)$ can be taken outside the integral sign and ω_k may be replaced by ω_0. In the remaining integral δ may be allowed to tend to infinity so that (see appendix 1)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos \alpha t}{\alpha^2} \, \mathrm{d}\alpha = \pi t, \quad t \to \infty$$

The final result is therefore

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{\pi \left(b_{k1}^2 + b_{k2}^2\right) \omega_0^2}{2c^3} t$$

Hence, the intensity emitted in a given direction is given by the following well-known formula

$$\frac{\overline{\mathrm{d}I}}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{1}{t} \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{e^2 \omega_0^2 \overline{v^2} \sin^2 \vartheta}{4\pi c^3}$$

where $\overline{v^2} = \frac{1}{2} v_0^2$ is the mean square velocity of the oscillating particle and ϑ is the angle between $\boldsymbol{v}_0$ and $\boldsymbol{k}$. In deriving the latter formula we
have used the following relation, which can easily be proved:

$$\left(v_0 \cdot e_{k1}\right)^2 + \left(v_0 \cdot e_{k2}\right)^2 = v_0^2 \sin^2 \vartheta$$

Integration with respect to the angles yields the total intensity:

$$\bar{I} = \frac{2e^2 \omega_0^2 \overline{v^2}}{3}$$

12.102 Consider the approximate solution of equations (12.98.1) and (12.98.2) in the solution of problem 12.98. Neglect the reaction of the radiation, and substitute the field strength $E = E_0 \cos \omega t$ of the incident wave into equation (12.98.2). The solution corresponding to forced oscillations is

$$r(t) = \frac{e}{m} \boldsymbol{E}_0 \frac{\cos \omega t}{\omega_0^2 - \omega^2} \tag{12.102.1}$$

The motion of the particle under the action of the incident wave will excite radiation field oscillators in accordance with equation (12.98.1) of problem 12.98, in which the force $F_{k\lambda}$ should be expressed in terms of $r(t)$ so that

$$F_{k\lambda} = \frac{e^2 \omega}{m\pi\sqrt{2}} \frac{\left(e_{k\lambda} \cdot E_0\right)}{\omega^2 - \omega_0^2} \sin \omega t$$

The polarisation unit vectors are chosen to be real. The solution of equation (12.98.1) of problem 12.98, subject to the initial condition $q_{k\lambda}(0) = 0$, is

$$q_{k\lambda}(t) = \frac{e^2}{m\pi\sqrt{2}} \frac{\omega \left(E_0 \cdot e_{k\lambda}\right)}{\left(\omega_k^2 - \omega^2\right)\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)} \left(\sin \omega t - \sin \omega_k t\right)$$

Proceeding as in the solution of problem 12.100, we obtain the following expression for the intensity in the direction k, corresponding to polarisation characterised by the unit vector $e_{k\lambda}$:

$$\frac{\mathrm{d}I_{k\lambda}}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{1}{t} \frac{\mathrm{d}W_{k\lambda}}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{e^4}{8\pi m^2 c^3} \frac{\omega^4 \left(E_0 \cdot e_{k\lambda}\right)^2}{\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2}$$

It follows from equation (12.102.1) that the scattered radiation is linearly polarised in the plane containing $\boldsymbol{E}_0$ and $\boldsymbol{k}$. If ϑ is the angle between E_0 and k, then

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{8\pi}{cE_0^2}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}\Omega} = \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \frac{\omega^4}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2}\sin^2\vartheta$$

which is in agreement with the result of problem 12.78. Integration with respect to the angles yields the following expression for the total scattering cross section:

$$\sigma = \frac{8\pi}{3}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \frac{\omega^4}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2}$$

17.13 The radiation emitted during the interaction of charged particles with matter

13.1 By expressing the field vectors in the form of the Fourier integral over the space and time coordinates

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{R}, t) = \int E(k,\omega)\exp\{\mathrm{i}[(k\cdot R) - \omega t]\}\mathrm{d}^3k\ \mathrm{d}\omega\ldots$$

we obtain the following system of algebraic equations for the Fourier amplitudes from Maxwell's equations:

$$\begin{aligned}
&\kappa[n\wedge E(k,\omega)] = H(k,\omega)\\
&\kappa[n\wedge H(k,\omega)] = -\epsilon(\omega)E(k,\omega) - \mathrm{i}\frac{ev}{2\pi^2\omega^2}\delta\left[\frac{\kappa}{c}(n\cdot v) - 1\right]\\
&\kappa\epsilon(\omega)(n\cdot E(k,\omega)) = -\mathrm{i}\frac{ec}{2\pi^2\omega^2}\delta\left[\frac{\kappa}{c}(n\cdot v) - 1\right]\\
&\kappa(n\cdot H(k,\omega)) = 0
\end{aligned} \tag{13.1.1}$$

where $H(k,\omega)$ is the Fourier amplitude of the magnetic field, $k = (\omega/c)kn$, κ is a parameter which can be expressed in terms of ω and k, and n is a unit vector. In deriving equations (13.1.1) it must be remembered that the Fourier amplitude of the function $\delta(R - vt)$ is equal to $\delta[(k\cdot v) - \omega]/8\pi^3$ and that $\delta(\alpha x) = \delta(x)/|\alpha|$. The system (13.1.1) yields

$$\left.\begin{aligned}
E(k,\omega) &= -\tfrac{\mathrm{i}ec}{2\pi^2\omega^2}\tfrac{\kappa n - (v/c)\epsilon}{\epsilon(\kappa^2-\epsilon)}\delta\left[\tfrac{\kappa}{c}(n\cdot v) - 1\right]\\
H(k,\omega) &= \tfrac{\mathrm{i}e\kappa}{2\pi^2\omega^2}\tfrac{[n\wedge v]}{\kappa^2-\epsilon}\delta\left[\tfrac{\kappa}{c}(n\cdot v) - 1\right]
\end{aligned}\right\} \tag{13.1.2}$$

The fields may be determined by the inverse Fourier transformation. Consider $E_z(R,t)$ first. It follows from equations (13.1.2) that

$$E_z(k,\omega) = -\frac{\mathrm{i}ec}{2\pi^2\omega^2}\frac{\kappa\cos\theta - \beta\epsilon}{\epsilon\left(\kappa^2 - \epsilon\right)}\delta(\beta\kappa\cos\theta - 1)$$

and hence,

$$\begin{aligned}
E_z(R,t) = &-\frac{\mathrm{i}e}{2\pi^2c^2}\int_{-\infty}^{\infty}\omega\mathrm{d}\omega\exp(-\mathrm{i}\omega t)\int_0^{\infty}\kappa^2\ \mathrm{d}\kappa\\
&\times\int\left[\frac{\kappa\cos\theta - \beta\epsilon}{\epsilon\left(\kappa^2-\epsilon\right)}\exp\left\{\mathrm{i}\frac{\omega}{c}\kappa[r\sin\theta\cos(\Phi-\varphi) - z\cos\theta]\right\}\right.\\
&\left.\times\,\delta(\beta\kappa\cos\theta - 1)\sin\theta\right]\mathrm{d}\theta\ \mathrm{d}\Phi
\end{aligned} \tag{13.1.3}$$

where r is the component of R in the xy plane, φ is the angle between r and the x-axis, $\beta = v/c$, and θ and Φ are the polar angles of n.

The integral with respect to Φ may be expressed in terms of the Bessel function $J_0[(\omega/c)\kappa r \sin\theta\,]$ [see equation (A3.11) of appendix 3].

The integral with respect to θ takes the form

$$\int_0^{\pi} f(\theta)\delta(\beta\kappa\cos\theta - 1)\sin\theta \mathrm{d}\theta = \frac{1}{\beta\kappa}\int_{-\beta\kappa}^{\beta\kappa} \varphi(y)\delta(y-1)\mathrm{d}y \tag{13.1.4}$$

This integral has a nonzero value only when $\beta\kappa \geqslant 1$ and hence the lower limit of κ is equal to $1/\beta$. In equation (13.1.3) this is automatically allowed for because of the presence of the δ-function. However, after integration with respect to y, the δ-function will vanish and it will be necessary to take into account explicitly the lower limit of integration. Integration of equation (13.1.4) with respect to y yields

$$\frac{1}{\beta\kappa}\varphi(1) = \left.\frac{1}{\beta\kappa}f(\theta)\right|_{\cos\theta = 1/\beta\kappa} \tag{13.1.5}$$

Now substitute equation (13.1.5) into (13.1.3), and change the variable so that $x = (\kappa^2 - \beta^{-2})^{1/2}$. Since κ varies between $1/\beta$ and infinity, the limit of x will be 0 and infinity. $E_z(R,t)$ will then be of the form

$$E_z(R,t) = \frac{\mathrm{i}e}{\pi c^2}\int_{-\infty}^{\infty} \omega \mathrm{d}\omega \exp\left[\mathrm{i}\omega\left(\frac{z}{v} - t\right)\right]\left(1 - \frac{1}{\beta^2\epsilon}\right)\int_0^{\infty} \frac{J_0[(\omega/c)rx]x\ \mathrm{d}x}{x^2 + 1/\beta^2 - \epsilon}$$

Equation (A3.16) of appendix 3 may be used to complete the integration with respect to x:

$$E_z(R,t) = \frac{\mathrm{i}e}{\pi c^2}\int_{-\infty}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{\beta^2\epsilon}\right)K_0(sr)\exp\left[\mathrm{i}\omega\left(\frac{z}{v} - t\right)\right]\omega\mathrm{d}\omega \tag{13.1.6}$$

where $s^2 = (\omega^2/v^2) - (\omega^2/c^2)\,\epsilon(\omega)$. The sign of s should be chosen so that $\mathrm{Re}\, s > 0$ since otherwise the integral with respect to ω will diverge. The integration with respect to ω in equation (13.1.6) can only be completed by specifying the precise form of the function $\epsilon(\omega)$.

In order to evaluate $E_x(R,t)$, let us again begin with integration with respect to Φ.

Integration with respect to θ can be carried out with the aid of the δ-function, and the subsequent integration with respect to $x = (\kappa^2 - \beta^{-2})^{1/2}$ may be completed with the aid of the formula

$$\int_0^{\infty} \frac{J_1(xr)x^2\ \mathrm{d}x}{x^2 + k^2} = kK_1(kr)$$

which is obtained in appendix 3 [equation (A3.16)] after differentiation with respect to r ($J_0' = -J_1, K_0' = -K_1$).

The result is

$$E_x(R,t) = \cos\varphi\frac{e}{\pi v}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{s}{\epsilon}K_1(sr)\exp\left[\mathrm{i}\omega\left(\frac{z}{v} - t\right)\right]\mathrm{d}\omega$$

$E_y(R,t)$ and $H(R,t)$ may be determined in a similar way. E_y differs from E_x in that $\cos\varphi$ is replaced by $\sin\varphi$. Hence, in cylindrical coordinates

$$E_r(R,t) = \frac{e}{\pi v}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{s}{\epsilon} K_1(sr)\exp\left[\mathrm{i}\omega\left(\frac{z}{v}-t\right)\right]\mathrm{d}\omega, \quad E_\varphi = 0 \tag{13.1.7}$$

The result for H is

$$H_\varphi(R,t) = \frac{e}{\pi c}\int\limits_{-\infty}^{\infty} sK_1(sr)\exp\left[\mathrm{i}\omega\left(\frac{z}{v}-t\right)\right]\mathrm{d}\omega, \quad H_z = H_r = 0 \tag{13.1.8}$$

It follows from equations (13.1.6) to (13.1.8) that the electromagnetic field is axially symmetric.

The above formulae will hold only in the region $r \gg a$, where a is of the order of the interatomic distance. When $r \leqslant a$, it is necessary to take into account the spatial dispersion of the permittivity.

13.2 It follows from equations (13.1.6) to (13.1.8) of the preceding solution that the monochromatic components of the fields, $E_\omega(R,t)$ and $H_\omega(R,t)$, are

$$E_{\omega z}(R,t) = \frac{\mathrm{i}e\omega}{\pi c^2}\left(1-\frac{1}{\beta^2\epsilon}\right)K_0(sr)\exp\left[\mathrm{i}\omega\left(\frac{z}{v}-t\right)\right]\ldots \tag{13.2.1}$$

where

$$s^2 = \frac{\omega^2}{v^2} - \frac{\omega^2}{c^2}\epsilon(\omega), \quad \operatorname{Re} s > 0 \tag{13.2.2}$$

and K_n are the modified Bessel functions.

In the wave zone $|sr| \gg 1$ and hence the asymptotic expression given by equation (A3.8) of appendix 3 may be used:

$$K_n(sr) = \left(\frac{\pi}{2sr}\right)^{1/2}\exp(-sr) \tag{13.2.3}$$

It follows from equation (13.2.2) that when $\epsilon(\omega)$ is real s will also be real provided $\beta^{-2} > \epsilon(\omega)$ or $\beta n(\omega) < 1$ [$n(\omega)$ is the refractive index at frequency ω]. When $\beta n(\omega) > 1$, the quantity s will be purely imaginary.

For real s[$s > 0$ in view of equation (13.2.2)], the field will decay exponentially in the wave zone, and there will be no emission of radiation. For a purely imaginary s, the field amplitude in the wave zone will vary as $r^{-1/2}$, which corresponds to cylindrical waves. We shall now show that these waves will diverge, i.e. radiation will, in fact, be emitted.

Suppose that

$$s = \pm\frac{\omega}{c}\left[\frac{1}{\beta^2}-\epsilon(\omega)\right]^{1/2} = \pm\mathrm{i}\frac{\omega}{c}n\left(\beta^2n^2-1\right)^{1/2} \tag{13.2.4}$$

and consider the sign in front of the square root. The lossless dielectric under consideration is the limiting case of a weakly absorbing dielectric

with a complex refractive index $n = n' + \mathrm{i}n''$. In order that the imaginary part of the refractive index, n'', should, in fact, represent the absorption of energy (so that the amplitude of the corresponding wave will decrease rather than increase), it is necessary to satisfy the condition $n'' > 0$ when $\omega > 0$ and $n'' < 0$ when $\omega < 0$. Assuming that n'' is very small, we may write

$$\left[\beta^2\left(n'+\mathrm{i}n''\right)^2-1\right]^{1/2} \approx \left(\beta^2n'^2-1\right)^{1/2}\left(1+\frac{\beta n'n''}{\beta^2n'^2-1}\right)$$

It follows that the condition $\operatorname{Re} s > 0$ will be satisfied provided the negative sign is taken in equation (13.2.4). Letting $n'' \to 0$, we have

$$s = -\mathrm{i}\frac{\omega n}{c}\left(\beta^2 n^2 - 1\right)^{1/2}$$

The negative sign corresponds to diverging waves, since the exponential factor in equation (13.2.1) will be of the form

$$\exp\{\mathrm{i}[(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{R}) - \omega t]\} = \exp\{\mathrm{i}[k(z\cos\theta + r\sin\theta) - \omega t]\}$$

where $k = \omega n/c, \cos\theta = (\beta n)^{-1}, \sin\theta = \left[1 - (\beta n)^{-2}\right]^{1/2}, k\cos\theta = k_z = k_\parallel$, and $k\sin\theta = k_1$ (the components of the wavevector). Thus, when the condition $\beta n(\omega) > 1$ is satisfied, a particle moving in the dielectric with a constant velocity $v = \beta c$ will emit electromagnetic waves of frequency ω (Cherenkov radiation).

The condition $\beta n > 1$ means that the velocity of the particle should exceed the phase velocity of the wave of frequency ω in the given medium. It follows from the expression for the wavevector k that the radiation will be emitted at an angle θ to the velocity of the particle, where

$$\cos\theta = \frac{1}{\beta n(\omega)}$$

This characteristic directional property of the radiation is a consequence of the coherence of the waves emitted by the particle at the various points along its trajectory (see problem 13.4).

The phase velocity of Cherenkov waves

$$v_{\mathrm{ph}} = \frac{\omega}{c} = \frac{c}{n}$$

is the same as for all the transverse electromagnetic waves. The polarisation of the radiation can easily be determined from equation (13.2.1). Thus, the vector H is perpendicular to the plane containing the trajectory of the particle and the wavevector k, while the vector E lies in this plane and is perpendicular to k in the wave zone. The fact that k and $\boldsymbol{E}$ are perpendicular may be verified by evaluating the scalar product $(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E_\omega})$. The total energy per unit path length of the Cherenkov
radiation, w_{Ch}, is equal to the time integral of the flux of the Poynting vector through an infinitely distant cylindrical surface of unit length, surrounding the trajectory of the particle:

$$w_{\mathrm{Ch}} = 2\pi r\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{c}{4\pi}[E\wedge H]_r\,\mathrm{d}t = -\frac{cr}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}H_\varphi E_z\,\mathrm{d}t$$

This equation may be rewritten with the aid of the formula given in the solution to problem 12.76:

$$w_{\mathrm{Ch}} = -2\pi cr\,\operatorname{Re}\int\limits_{\beta n(\omega)>1}H^*_{\omega\varphi}E_{\omega z}\,\mathrm{d}\omega \tag{13.2.5}$$

where the monochromatic components $H_{\omega\varphi}, E_{\omega z}$ should be taken in the wave zone, and the integration should be carried out over the frequency region in which the radiation condition $\beta n(\omega) > 1$ is satisfied. From equations (13.2.1) to (13.2.3) we have, finally,

$$w_{\mathrm{Ch}} = \frac{e^2}{c^2}\int\limits_{\beta n(\omega)>1}\left(1 - \frac{c^2}{v^2 n^2}\right)\omega\mathrm{d}\omega$$

13.3

$$w_{\mathrm{Ch}} = \frac{e^2\omega_0^2}{2v^2}\left(\beta^2 - 1\right) + \frac{e^2\omega_0^2}{2v^2}\left(\epsilon_0 - 1\right)\ln\frac{\epsilon_0}{\epsilon_0 - 1}$$

Under the conditions given in the problem, $w_{\mathrm{Ch}} \approx 5 \times 10^5 \mathrm{eVm}^{-1}$. The radiation is largely concentrated in the angular range $\theta_0 \leqslant \theta \leqslant \frac{1}{2}\pi$ where $\beta^2\epsilon_0\cos^2\theta_0 = 1$.

13.4 Each point of the trajectory may be regarded as a source of elementary excitation propagating in the form of a spherical wave with a velocity $v_{\mathrm{ph}} = c/n$ (figure 13.4 .1). The resultant wave front will be the envelope of the elementary spherical waves. The normal to the wave front will be at an angle θ to the trajectory. It follows from the figure that $\cos\theta = 1/\beta n$.

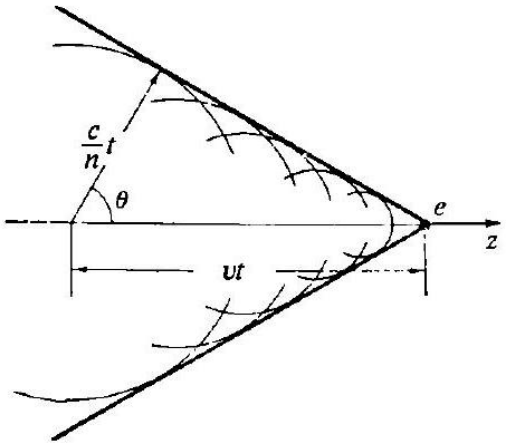


Figure 13.4.1.

13.5 The field due to a uniformly moving charged particle is a result of the superposition of plane waves with frequencies $\omega = (k\cdot v)$, where v is the velocity of the particle and k is the wavevector (see problem 12.89). In an infinite dielectric, the possible oscillations have frequencies $\omega = kc/n$, where n is the refractive index of the medium. It follows from the resonance condition

$$\frac{kc}{n} = (k\cdot v) = kv\cos\theta$$

that $\cos\theta = c/vn$. Since $\cos\theta \leqslant 1$, it follows that $vn/c \geqslant 1$, which is the condition for the existence of the Cherenkov radiation.

13.6

$$\tau = \frac{l}{v}\tan^2\theta, \quad I = w_{\mathrm{Ch}} v\cot^2\theta$$

where $\cos\theta = c/nv$, while w_{Ch} is the Cherenkov radiation energy per unit length, which was evaluated in problem 13.2.

13.8 When $\beta n < 1$, i.e. when $v < v_{\mathrm{ph}}$,

$$\varphi = \frac{e}{\epsilon\left[(z-vt)^2 + r^2\left(1-\beta^2n^2\right)\right]^{1/2}}$$

This expression may be obtained by the method used in the solution of problem 12.90

When $\beta n > 1$, this method cannot be used, since the integrand will then have a pole at $k^2 = \epsilon\mu(k\cdot v)^2/c^2$.

In terms of cylindrical coordinates in k-space,

$$\varphi(R,t) = \frac{e}{2\pi^2\epsilon}\int \frac{\exp\left[\mathrm{i}k_z(z-vt) + \mathrm{i}k_\perp r\cos\phi\right]}{k_\perp^2 - k_z^2\left(\beta^2n^2 - 1\right)} k_\perp \mathrm{d}k_\perp \mathrm{d}k_z\ \mathrm{d}\phi$$

The integral with respect to k_z may be evaluated by the method of residues. The denominator will have zeros at $k_z = \pm k_\perp / \left(\beta^2 n^2 - 1\right)^{1/2}$. Suppose that n has a small imaginary part $n'' > 0$ when $k_z > 0$ and $n'' < 0$ when $k_z < 0$ (see the analogous analysis in problem 13.2); here, the sign of ω is the same as the sign of k_z, since $\omega = (k \cdot v)$. Hence, both zeros will be displaced into the lower half-plane of the complex variable k_z. When $z > vt$, the contour of integration may be completed by an arc of infinite radius in the upper half-plane (on which the integrand will be zero). Since the denominator has no zeros in the upper half-plane, the integral with respect to k_z will then vanish. When $z < vt$, the contour of integration will be closed in the lower half-plane. Both poles will then contribute to the integral and the result will be

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\left[\mathrm{i}k_z(z-vt)\right]}{k_\perp^2 - k_z^2\left(\beta^2 n^2 - 1\right)} \mathrm{d}k_z = -\frac{2\pi}{k_\perp\left(\beta^2 n^2 - 1\right)^{1/2}} \sin \frac{k_\perp (z - vt)}{\left(\beta^2 n^2 - 1\right)^{1/2}}$$

The integral over ϕ may be expressed in terms of the Bessel function $J_0(k_1 r)$ [see equation (A3.11)]. Thus, when $\beta n > 1$

$$\varphi(R,t) = \begin{cases} \frac{2e}{\epsilon\left[(z-vt)^2 - r^2(\beta^2 n^2 - 1)\right]^{1/2}}, \\ 0, \quad \text{when } z < vt - r\left(\beta^2 n^2 - 1\right)^{1/2} \\ 0, \quad \text{in the remaining space} \end{cases}$$

The vector potential A may be obtained by multiplying φ by $\epsilon\mu v/c$.
Equation (13.8.1) shows that when the Cherenkov condition $\beta n > 1$ is satisfied, the field is discontinuous. It exists only within a cone whose surface is described by the equation

$$z - vt + r\left(\beta^2 n^2 - 1\right)^{1/2} = 0 \tag{13.8.2}$$

The normal to the surface of the cone is at an angle $\theta = \arccos(1/\beta n)$ to the direction of motion of the particle. It follows from equation (13.8.2) that the conical wave propagates along the z-axis with the velocity of the particle.

Electromagnetic waves are not the only waves which may have the above structure. For example, discontinuous acoustic waves of the above type may be excited by a projectile moving in air with a velocity greater than the velocity of sound (ballistic shock wave). Similar waves may be produced on the surface of water by a fast-moving vessel.

13.9 The Cherenkov radiation will be emitted provided $\beta n > 1$ where $n(\omega) = [\epsilon(\omega)\mu(\omega)]^{1/2}$; the vector potential is of the form

$$A_x = \frac{\mathrm{i}J}{c} \int \frac{\exp\left\{\mathrm{i}(\omega/v)\left[y - vt + \left(\beta^2 n^2 - 1\right)^{1/2}|z|\right]\right\}}{\left(\beta^2 n^2 - 1\right)^{1/2}} \frac{\mu(\omega)\mathrm{d}\omega}{\omega}$$

$$w_{\mathrm{Ch}} = \frac{2J^2}{c^2 v} \int \frac{\mu(\omega)\mathrm{d}\omega}{\left(\beta^2 n^2 - 1\right)^{1/2}}$$

The retarding force may be calculated from the formula $F = [j \wedge B]/c$ where B should be taken at the point $z = 0, y = vt$. The force acts in the negative direction of the y-axis, and its absolute magnitude equals the energy loss per unit path length: $F_y = -w_{\mathrm{Ch}}$. This result is a direct consequence of the law of conservation of energy.

$$13.10 w_{\mathrm{Ch}} = \frac{2e^2}{c^2} \int\limits_{\beta n > 1} \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2}\right)\left(1 \pm \cos\frac{\omega l}{v}\right)\omega \mathrm{d}\omega$$

The positive and negative signs correspond respectively to the two cases quoted in the problem. The spectral density of the radiation emitted by two identical charges differs from

the spectral density of the radiation emitted by a single charge by a factor of $2[1+\cos(\omega l/v)]$. Hence, the
intensity of the harmonics with frequencies $\omega = (2\pi v/l)n(n = 0, 1, 2, \ldots)$ will increase by a factor of 4, while harmonics with frequencies $\omega = (\pi v/l)(2n+1)$ will vanish. The reverse situation will occur when the charges differ in sign.

In order to obtain the energy loss for a point dipole lying along the direction of motion, the quantity $1-\cos(\omega l/v)$ should be expanded into a series. This yields

$$w_{\text{Ch}} = \frac{p^2}{c^2 v^2} \int\limits_{\beta n>1} \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2}\right) \omega^3 \, \mathrm{d}\omega$$

where p is the electric moment of the dipole in the laboratory system.

13.11

$$w_{\text{Ch}} = \frac{p^2}{c^2 v^2} \int\limits_{\beta n>1} \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2}\right) \left[\cos^2\phi + \frac{1}{2}\sin^2\phi\left(\beta^2 n^2 - 1\right)\right] \omega^3 \, \mathrm{d}\omega$$

where $n = \epsilon^{1/2}$ and p is the electric dipole moment in the laboratory system.
13.12

$$w_{\text{Ch}} = \frac{m^2}{c^2 v^2} \int\limits_{\beta n>1} \left(1 - \frac{1}{\beta^2 n^2}\right) n^2 \omega^3 \, \mathrm{d}\omega$$

13.13 The energy loss per unit path length is given by the time integral of the energy flux through a cylindrical surface of unit length and radius a, which surrounds the trajectory of the particle. The losses may be calculated with the aid of equation (13.2.5) in the solution of problem 13.2, in which the fields should be taken at $r = a$ and the integration should be carried out over all frequencies between 0 and infinity. Using the expressions for the field components obtained in the solution of problem 13.1, we have

$$-\frac{\mathrm{d}\&}{\mathrm{d}l} = \frac{2e^2\omega_0^2}{\pi v^2} \operatorname{Re}\mathrm{i} \int\limits_0^\infty \left(\frac{1-x^2}{\epsilon_0 - x^2} - \beta^2\right) s^* a K_1(s^* a) K_0(sa) x \, \mathrm{d}x \tag{13.13.1}$$

where $x = \omega/\omega_0, \epsilon(0) = \epsilon_0 = 1 + \omega_{\text{p}}^2/\omega_0^2$ is the static permittivity, and

$$s^2 = \frac{\omega_0^2}{c^2}\left(\frac{1}{\beta^2} - 1\right)\frac{b - x^2}{1 - x^2}x^2, \quad b = \frac{c^2 - \epsilon_0 v^2}{c^2 - v^2} \tag{13.13.2}$$

It follows from equation (13.13.1) that the imaginary part of the integral is the only one to contribute to the losses. The functions K_0 and K_1 are real for a real argument, and hence the imaginary part of the integral will be determined by the range of values of x for which s is complex. As can be seen from equation (13.13.2), this range will depend on the sign and magnitude of the parameter b. When $b > 0$ (this means
that $v < c/\epsilon_0^{1/2}$), s will be purely imaginary for x in the range $\left(b^{1/2}, 1\right)$, and real outside this interval. When $b < 0$ (this corresponds to $v > c/\epsilon_0^{1/2}$), s will be imaginary for $0 \leqslant x \leqslant 1$ and real for $x > 1$.

In addition to the above intervals of x, certain individual points at which the denominator $\epsilon_0 - x^2$ is zero will contribute to the imaginary part of the integral. At these points $x = \pm\epsilon_0^{1/2}$, and since the integration in equation (13.13 .1) is carried out for $x > 0$, it is sufficient to

consider the single pole at $x = \epsilon_0^{1/2} > 1$. When losses are neglected this pole will lie on the real axis. It will be displaced into the lower half-plane of the complex variable, ω, when the losses are taken into account (1). This can easily be seen from the explicit expression for $\epsilon(\omega)$ [see equation (6.b.5)]. The integral may be evaluated either by introducing a damping parameter which tends to zero after the integration, or by slightly deforming the path of integration and by-passing the pole by a circle of infinitely small radius in the upper half-plane. Denoting integration over this semicircle by $\cap$, we have

$$\oint \frac{1-x^2}{\epsilon_0 - x^2} s^* a K_1(s^* a)\, K_0(sa) x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{i}\,(1-\epsilon_0)\,\frac{\omega_0 a\,(\epsilon_0)^{1/2}}{v} \times K_0\left[\frac{\omega_0 a\,(\epsilon_0)^{1/2}}{v}\right] K_1\left[\frac{\omega_0 a\,(\epsilon_0)^{1/2}}{v}\right] \tag{13.13.3}$$

Next, consider the integral over the region in which s is purely imaginary. We note that for purely imaginary argument the cylindrical functions K_0 and K_1 are related by

$$s^* a K_1(s^* a)\, K_0(sa) - sa K_1(sa) K_0(s^* a) = \frac{1}{2}\pi\mathrm{i}$$

which follows from the properties of the Wronskian of the system of solutions of the Bessel equation. Hence,

$$\mathrm{Re}\mathrm{i} \int\limits_{s^2<0} \left(\frac{1-x^2}{\epsilon_0 - x^2} - \beta^2\right) s^* a K_1(s^* a)\, K_0(sa) x \, \mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\pi \int\limits_{s^2<0} \left(\frac{1-x^2}{\epsilon_0 - x^2} - \beta^2\right) x \, \mathrm{d}x$$

The latter integral may be evaluated by elementary methods. The limits of integration are chosen as indicated above.

Substituting equations (13.13.3) and (13.13.4) into (13.13.1), we have for $v < c/\epsilon_0^{1/2}$,

$$-\frac{\mathrm{d}\mathring{\mathrm{A}}}{\mathrm{d}l} = \frac{2\pi e^4 N}{mv^2}\left\{\frac{2a\omega_0\,(\epsilon_0)^{1/2}}{v} K_0\left[\frac{a\omega_0\,(\epsilon_0)^{1/2}}{v}\right] K_1\left[\frac{a\omega_0\,(\epsilon_0)^{1/2}}{v}\right] - \beta^2 - \ln\left(1-\beta^2\right)\right\} \tag{13.13.5}$$

(1) This is in accordance with the general theorem according to which $\epsilon(\omega)$ has no zeros in the upper half-plane.

and for $v > c/\epsilon_0^{1/2}$

$$-\frac{\mathrm{d}\mathscr{G}}{\mathrm{d}l} = \frac{2\pi e^4 N}{mv^2}\left\{\frac{2a\omega_0\,(\epsilon_0)^{1/2}}{v} K_0\left[\frac{a\omega_0\,(\epsilon_0)^{1/2}}{v}\right] K_1\left[\frac{a\omega_0\,(\epsilon_0)^{1/2}}{v}\right] - \frac{1-\beta^2}{\epsilon_0 - 1} + \ln\frac{\epsilon_0}{\epsilon_0 - 1}\right\} \tag{13.13.6}$$

The part of total losses which does not vanish when $a \to \infty$ [terms which do not contain a in equations (13.13.5) and (13.13.6)] will represent the energy loss by the emission of transverse waves (Cherenkov effect):

$$-\left(\frac{\mathrm{d}\mathscr{C}}{\mathrm{d}l}\right)_{\mathrm{Ch}} \equiv w_{\mathrm{Ch}} = \frac{e^2\omega_{\mathrm{p}}^2}{2v^2}\left[-\beta^2 - \ln\left(1-\beta^2\right)\right] \quad v < \frac{c}{(\epsilon_0)^{1/2}}$$

$$-\left(\frac{\mathrm{d}\mathscr{C}}{\mathrm{d}l}\right)_{\mathrm{Ch}} \equiv w_{\mathrm{Ch}} = \frac{e^2\omega_{\mathrm{p}}^2}{2v^2}\left(-\frac{1-\beta^2}{\epsilon_0 - 1} + \ln\frac{\epsilon_0}{\epsilon_0 - 1}\right) \quad v > \frac{c}{(\epsilon_0)^{1/2}}$$

The latter expression was obtained in the solution of problem 13.3.
The terms with K_0, K_1 in equations (13.13.5) and (13.13.6), which depend on a, enter as a result of integration round the pole $\omega \equiv \Omega = \left(\omega_0^2 + \omega_\mathrm{p}^2\right)^{1/2}$ at which ϵ becomes equal to zero. Longitudinal oscillations are excited at these frequencies (see problem 8.45) and hence the expression

$$-\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}l}\right)_{\mathrm{tot}} = \frac{e^2\omega_\mathrm{p}^2\Omega a}{v^3} K_0\left(\frac{\Omega a}{v}\right) K_1\left(\frac{\Omega a}{v}\right) \tag{13.13.7}$$

describes the losses on excitation of longitudinal oscillations (polarisation losses). When $\Omega a/v \ll 1$, equation (13.13.7) assumes the simple form [see equation (A3.6)]

$$-\left(\frac{\mathrm{d}\&}{\mathrm{d}l}\right)_{\mathrm{tot}} = \frac{e^2\omega_\mathrm{p}^2}{v^2} \ln\frac{v}{\Omega a}$$

When $\Omega a/v \gg 1$, the quantity $-(\mathrm{d}\&/\mathrm{d}l)_{\mathrm{tot}}$ becomes very small [it is proportional to $\exp(-\Omega a/v)$]. This shows that the effect of the polarisation of the medium is small at low velocities.

The above macroscopic method of calculating the losses is due to Fermi.
13.14

$$-\frac{\mathrm{d}\&}{\mathrm{d}l} = \frac{e^2\omega_\mathrm{p}^3 a}{v^3} K_0\left(\frac{\omega_\mathrm{p} a}{v}\right) K_1\left(\frac{\omega_\mathrm{p} a}{v}\right) \tag{13.14.1}$$

When $\omega_\mathrm{p} a/v \ll 1$, which occurs when the velocity of the particle is sufficiently large, one can use the approximate formula (A3.6) for K_n. Equation (13.14.1) will then become

$$-\frac{\mathrm{d}\&}{\mathrm{d}l} = \frac{e^2\omega_\mathrm{p}^2}{v^2} \ln\frac{2v}{\gamma\omega_\mathrm{p} a} \tag{13.14.2}$$

It follows from equations (13.13.1) and (13.13.2) that the losses experienced by the particle will be very dependent on ω_p [the frequency of longitudinal plasma oscillations (see problem 8.45)].

Cherenkov radiation is not emitted by a plasma, since the condition $\beta^2\epsilon \geqslant 1$ is not satisfied, in view of the fact that $\epsilon(\omega) < 1$ at all frequencies (however, Cherenkov emission will become possible if the plasma is placed in a magnetic field).

In a quantum mechanical interpretation, the excitation of plasma waves is equivalent to the appearance of certain discrete elementary excitations (these are the quasi-particles known as plasmons). The energy of each plasmon is equal to $\hbar\omega_\mathrm{p}$ where $\hbar = 1.05 \times 10^{-34}$ J s (Dirac's constant; $\hbar = h/2\pi$, where h is Planck's constant). For metals, the energy $\hbar\omega_\mathrm{p}$ lies between 5 and 30 eV . Thus, when plasma oscillations are excited, the particle will lose energy in discrete steps. Studies of these discrete energies yield valuable information about the properties of solids.
13.15 Consider the expansion of the current density (figure 3.15 .1)

$$j = j_z = \begin{cases} -ev\delta(z - vt)\delta(x)\delta(y), & z \geqslant 0 \\ -ev\delta(z + vt)\delta(x)\delta(y), & z \leqslant 0 \end{cases}$$

$(-\infty < t \leqslant 0)$, in the Fourier integral with respect to the time:

$$j = \int j_\omega \exp(-\mathrm{i}\omega t)\mathrm{d}t, \quad j_\omega = \begin{cases} -\frac{e}{2\pi}\exp\left(-\mathrm{i}\frac{\omega}{v}z\right)\delta(x)\delta(y), & z \geqslant 0 \\ -\frac{e}{2\pi}\exp\left(\mathrm{i}\frac{\omega}{v}z\right)\delta(x)\delta(y), & z \leqslant 0 \end{cases}$$

Next, introduce the polarisation vector (12.a.9)

$$P_\omega = -\frac{j_\omega}{i\omega} \tag{13.15.2}$$

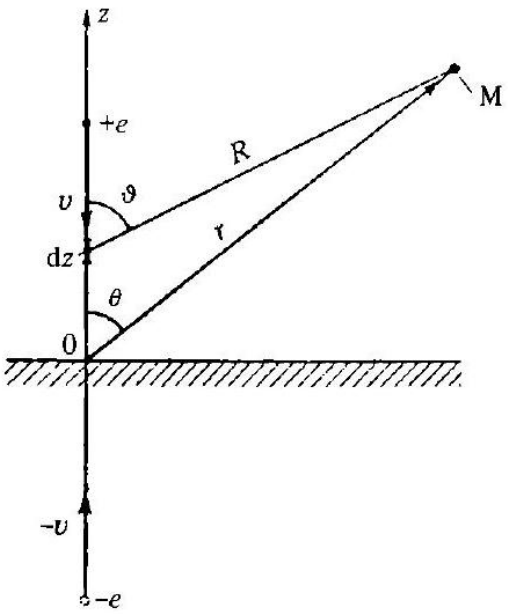


Figure 13.15.1.

and suppose that P_ω lies along the z-axis.

Equations (13.15.1) and (13.15.2) show that the charge and current densities due to the moving particle can be represented by a set of harmonic oscillators whose spatial distribution is of the form

$$P_\omega = \begin{cases} -\frac{ie}{2\pi\omega}\exp\left(-i\frac{\omega}{v}z\right)\delta(x)\delta(y), & z \geqslant 0 \\ -\frac{ie}{2\pi\omega}\exp\left(i\frac{\omega}{v}z\right)\delta(x)\delta(y), & z \leqslant 0 \end{cases} \tag{13.15.3}$$

The presence of $\delta(x)\delta(y)$ in equation (13.15.3) shows that the oscillators are, in fact, distributed along the line of motion of the charge.

The oscillators lying along the element $\mathrm{d}z$ will produce at a point M in the wave zone a magnetic field (see figure 13.15.1)

$$\mathrm{d}\boldsymbol{H}_\omega = -\frac{\omega^2\exp(ikR)}{c^2R^2}\left[\boldsymbol{P}_\omega \wedge R\right]\mathrm{d}z = -\frac{\omega^2\exp(ikR)}{c^2R}P_\omega\sin\vartheta e_\phi \mathrm{d}z \tag{13.15.4}$$

After integrating equation (13.15.4) with respect to z the following expression for the total field is obtained:

$$H_{\omega\phi} = \frac{ie\omega}{2\pi c^2}\left\{\int_{-\infty}^{0}\frac{\exp[i(\omega z/v + kR)]\sin\vartheta}{R}\,\mathrm{d}z + \int_{0}^{\infty}\frac{\exp[-i(\omega z/v - kR)]\sin\vartheta}{R}\,\mathrm{d}z\right\}$$

In the latter expression the integrands are the products of oscillating and decreasing functions, and therefore the main contribution to the integral will be that due to the region near $z = 0$. This is owing to the fact that the emission takes place at the boundary between the vacuum and the metal. To evaluate the integrals approximately, let $R = r - z\cos\theta$ in the exponentials. Expressing $\sin\vartheta$ in terms of R we have

$$H_{\omega\phi} = \frac{\mathrm{i}e\omega \exp(\mathrm{i}kr) r \sin\theta}{2\pi c^2} \left\{ \int_{-\infty}^{0} \frac{\exp[\mathrm{i}(\omega/v)(1-\beta\cos\theta)z]}{R^2}\, \mathrm{d}z + \int_{0}^{\infty} \frac{\exp[-\mathrm{i}(\omega/v)(1+\beta\cos\theta)z]}{R^2}\, \mathrm{d}z \right\}$$

These integrals can be expanded into series in powers of R^{-1} after integrating by parts. Retaining only terms up to $1/R$, we have

$$H_\phi = E_\theta = \frac{e\omega}{2\pi c^2} \left[\frac{1}{(\omega/v)(1-\beta\cos\theta)} + \frac{1}{(\omega/v)(1+\beta\cos\theta)} \right] \frac{\sin\theta \exp(\mathrm{i}kr)}{r(13.15.5} \tag{13.15.5}$$

The second term in this expression represents the radiation field due to the sudden deceleration of the charge, while the first term represents the radiation due to the image.

The intensity of the radiation of frequency ω which is emitted into a solid angle $\mathrm{d}\Omega$ is given by

$$\mathrm{d}I(\omega,\theta) = c|E(\omega,\theta)|^2 r^2\, \mathrm{d}\Omega = \frac{e^2v^2}{\pi^2c^3} \frac{\sin^2\theta\, \mathrm{d}\Omega}{(1-\beta^2\cos^2\theta)^2} \tag{13.15.6}$$

In the nonrelativistic limit ($\beta \ll 1$) equation (13.15.6) gives the dipole radiation

$$\mathrm{d}I(\omega,\theta) = \frac{e^2v^2}{\pi^2c^3} \sin^2\theta\, \mathrm{d}\Omega \tag{13.15.7}$$

whose intensity is proportional to the square of the velocity of the particle. We note that the intensity of the radiation is independent of the mass of the particle.

The integrals of equations (13.15.6) and (13.15.7) with respect to ω, which represent the angular distribution of the total radiation, will be found to diverge. This is due to the fact that the metal is regarded as a perfect conductor. In reality, the metal cannot be looked upon as a perfect conductor even in the infrared region, so that at high frequencies both equations (13.15.6) and (13.15.7) will not hold.

The spectral distribution of the total radiation may be obtained by integrating equation (13.15 .6) over the upper hemisphere:

$$I(\omega) = \frac{4e^2v^2}{3\pi c^3} \left(\frac{3}{8} \frac{\beta^2-1}{\beta^3} \ln\frac{1+\beta}{1-\beta} - \frac{3}{4\beta^2} \right) \tag{13.15.8}$$

In the ultrarelativistic limit, when the total energy, $\mathscr{E}$, of the particle is much smaller than the rest energy, mc^2, equation (13.15.8) may be simplified to read

$$I(\omega) = \frac{2e^2}{\pi c} \ln\frac{\S}{mc^2}$$

The intensity of the radiation increases logarithmically with the energy.

In the nonrelativistic limit the expression in brackets in equation (13.15.8) becomes equal to unity and

$$I(\omega) = \frac{4e^2v^2}{3\pi c^3}$$

13.16 The Fourier component of the polarisation vector is

$$P_\omega = -\frac{\mathrm{i}e}{2\pi\omega}\exp\left(-\mathrm{i}\frac{\omega}{v}z\right)\delta(x)\delta(y)$$

To begin with, consider the field at the point A due to oscillators lying in the region $z > 0$ (figure 13.16.1). It is sufficient to consider the oscillators lying near $z = 0$, since they will be largely responsible for the radiated field (see preceding problem).

Consider an oscillator $\boldsymbol{p}_\mathrm{B}$ on the z-axis near $z = 0$ (point B) and an oscillator $\boldsymbol{p}_\mathrm{A}$ at the point A at which the field is to be calculated. Suppose they are equal in absolute magnitude and parallel to the z-axis, and that the distance between them is large compared with the wavelength. The oscillator $\boldsymbol{p}_\mathrm{B}$ will produce a field at A whose amplitude $\boldsymbol{E}_+$will be at an angle to the z-axis which is approximately equal to $\frac{1}{2}\pi - \theta$ (figure 13.16.1). The waves from A and B will arrive by two routes, namely, directly and after reflection from the boundary of the dielectric. In the figure, the corresponding amplitudes are denoted by $\boldsymbol{E}'$ and $\boldsymbol{E}''$. These two amplitudes are at angles $\frac{1}{2}\pi - \vartheta' \approx \frac{1}{2}\pi - \theta$ to the z-axis. Hence, according to the reciprocity theorem, $E_+ = E' + E''$ or, since in the wave zone $\boldsymbol{H} = [\boldsymbol{n} \wedge \boldsymbol{E}]$, we have $\boldsymbol{H}_+ = -\boldsymbol{H}' - \boldsymbol{H}''$ (all the three vectors $\boldsymbol{H}_+$, $\boldsymbol{H}'$, and $\boldsymbol{H}''$ are perpendicular to the AOz plane).

The wave emitted by A and reaching B directly will give rise to a field

$$\mathrm{d}H' = \frac{\omega^2\exp(\mathrm{i}kR)}{c^2R}P_\omega\sin\theta\mathrm{d}z$$

The amplitude of the reflected wave may be determined with the aid of the Fresnel formulae, since the distance AC is large and the wave emitted at A may be looked upon as a plane wave near the point C. Using equation (8.a.20), and remembering that there is a phase change and that $\vartheta' \approx \theta$, we have

$$\mathrm{d}H'' = \frac{\omega^2 f\exp\left(\mathrm{i}kR'\right)}{c^2R'}P_\omega\sin\theta\mathrm{d}z$$

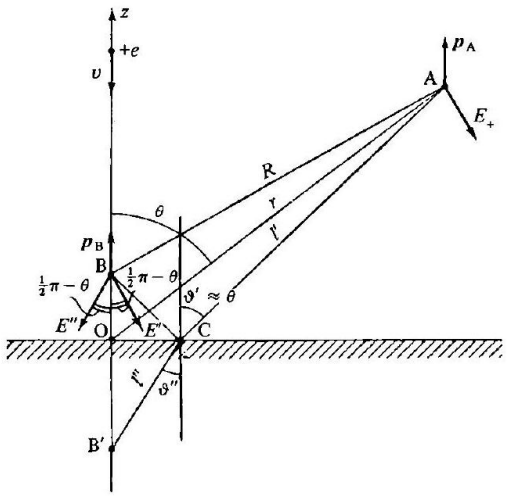


Figure 13.16.1.

where

$$f = \frac{\epsilon\cos\theta - \left(\epsilon - \sin^2\theta\right)^{1/2}}{\epsilon\cos\theta + \left(\epsilon - \sin^2\theta\right)^{1/2}}, \qquad R' = \mathrm{ACB}$$

The field $\boldsymbol{H}_+$, which is produced at A by all the oscillators lying in the region $z > 0$, may be obtained by integrating the sum $-(\mathrm{d}H' + \mathrm{d}H'')$ with respect to z between 0 and ∞. The integration may be carried out precisely as in the preceding problem. The result is

$$H_+ = \frac{ev}{2\pi c^2}\left(\frac{1}{1+\beta\cos\theta}+\frac{f}{1-\beta\cos\theta}\right)\frac{\sin\theta\exp(\mathrm{i}kr)}{r}$$

This formula may easily be interpreted by comparison with the analogous formula (13.15.5) in the solution to the preceding problem. The first term represents the field of the particle moving in the vacuum and suddenly coming to rest at the point $z = 0$. The second term represents the field due to the image $(-ef)$ which moves in the dielectric towards the particle and also comes to rest at $z = 0$. In contrast to a perfect conductor, the strength of the image is reduced by a factor f and its magnitude depends on the frequency ω of the particular harmonic [through $\epsilon(\omega)$] and on the position of the point of observation (through the angle θ).

The field $H_{\cdot}$due to the dipoles at $z < 0$ can be determined in a similar way. The wave leaving A will arrive at B after refraction at the separation boundary. Using the Fresnel formulae again, we have

$$\mathrm{d}H_- = -\frac{\omega^2}{\epsilon c^2 R''}(1+f)P_\omega\sin\vartheta'\exp(\mathrm{i}\varphi)\mathrm{d}z \tag{13.16.1}$$

where $R'' = l' + l''$ is the length of the broken line ACB′ (see figure 13.16.1). The phase φ is retarded, so that

$$\varphi = \frac{\omega}{c}l' + \frac{\omega}{c}(\epsilon)^{1/2}l''$$

When $|z| \ll r \quad (z < 0)$, we have $l' = r + z\tan\vartheta''\sin\theta, l'' = -z/\cos\vartheta''$. Since the law of refraction is $\sin\vartheta'' = \epsilon^{-1/2}\sin\vartheta'$ we have, on substituting θ for ϑ'

$$\varphi = \frac{\omega}{c}r - \frac{\omega}{c}z\left(\epsilon - \sin^2\theta\right)^{1/2}$$

The field due to the dipoles at $z < 0$ may be obtained by integrating equation (13.16.1) between $-\infty$ and 0, and the result is

$$H_- = -\frac{ev}{2\pi\epsilon c^2}(1+f)\frac{1}{1-\beta\left(\epsilon-\sin^2\theta\right)^{1/2}}\frac{\sin\theta\exp(\mathrm{i}kr)}{r}$$

The total field at A is equal to $H_+ + H_{\cdot}$. The intensity of the radiation of frequency ω which is emitted into a solid angle $\mathrm{d}\Omega$ is

$$\mathrm{d}/(\omega,\theta) = \frac{e^2v^2}{4\pi^2c^3}A^2(\omega,\theta)\sin^2\theta\ \mathrm{d}\Omega$$

where

$$A(\omega,\theta) = \frac{2\beta\cos\theta}{1-\beta\cos^2\theta} + (1+f)\left\{\frac{1}{\epsilon\left[1-\beta\left(\epsilon-\sin^2\theta\right)^{1/2}\right]} - \frac{1}{1-\beta\cos\theta}\right\}$$

The quantity A depends on the frequency through $\epsilon(\omega)$.
In the nonrelativistic limit $\beta \ll 1$, and hence
$\mathrm{d}/(\omega,\theta) = \frac{e^2v^2}{\pi^2c^3}\frac{(\epsilon-1)^2\sin^2\theta\cos^2\theta}{\left[\epsilon\cos\theta+\left(\epsilon-\sin^2\theta\right)^{1/2}\right]^2}\ \mathrm{d}\Omega.$

17.14 Plasma physics

17.14.1 a The motion of separate particles in a plasma

14.3

$$\mathrm{d}w(\vartheta) = \frac{1}{2}(n)^{1/2}\frac{\sin\vartheta\ \mathrm{d}\vartheta}{[1+(n-1)\cos^2\vartheta]^{3/2}}, \quad \overline{\varepsilon^2} = \frac{2n+1}{3}\&_0^2 - \frac{2(n-1)}{3}m^2c^4$$

In the nonrelativistic case for the average kinetic energy $\bar{T}$ in the final state we have

$$\bar{T} = \frac{2n+1}{3}T_0, \quad T_0 = \frac{p_0^2}{2m}$$

14.4 To evaluate v_d we must find the additional particle velocity caused by the presence of a field gradient ∇H and averaged over the cyclotron rotation period. We write down the equation of motion for the transverse particle velocity $v_\perp$:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_\perp}{\mathrm{d}t} = \frac{eH}{mc}[\boldsymbol{v}_\perp \wedge \boldsymbol{h}] \tag{14.4.1}$$

Here $\boldsymbol{h}$ is the unit vector in the direction of the magnetic field. $H(\boldsymbol{r})$ occurs in this equation, that is, the value of the field at the position of the particle. For this quantity we write

$$H(r) = H(R) + (r\cdot\nabla H) \tag{14.4.2}$$

where R is the position of the guiding centre, and r is the position of the particle when reckoned from the guiding centre as origin. To a first approximation we may assume that the guiding centre is not displaced in a transverse direction during a single rotation of the particle. Substituting equation (14.4.2) into (14.4.1) we get an equation of motion of the form

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_\perp}{\mathrm{d}t} = [\boldsymbol{v}_\perp \wedge \Omega]\left[1 + \frac{(r\cdot\nabla H)}{H}\right] \tag{14.4.3}$$

where $\Omega = eH(R)h/mc$.
We split $v_\perp$ into two components: the velocity $v_0 = \mathrm{d}r_0/\mathrm{d}t$ in a uniform field and a small correction v_1:

$$v_\perp = v_0 + v_1$$

In the correction term in equation (14.4.3) we can replace the quantities $v_\perp$ and r by $\boldsymbol{v}_0$ and $\boldsymbol{r}_0$. Bearing in mind that

$$\frac{\mathrm{d}v_0}{\mathrm{d}t} = [v_0 \wedge \Omega] \tag{14.4.4}$$

we get the following equation for v_1:

$$\frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}t} = [\{\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_0\,(r_0\cdot\nabla H)\}\wedge\Omega]$$

We take the average over a rotation period of the particle of both sides of this equation. When averaging the derivative $\mathrm{d}v_1/\mathrm{d}t$ we get

$$\overline{\frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}t}} = \frac{v_1(t+T)-v_1(t)}{T} \approx 0$$

up to terms in first order in the small quantity ∇H. If we average the right-hand side we find

$$v_{\mathrm{d}} = \overline{v_1} = -\overline{v_0 \left(r_0 \cdot \nabla H\right)}$$

The quantities $\boldsymbol{v}_0$ and $\boldsymbol{r}_0$ correspond to the motion of the particle in a uniform field and can be obtained from equation (14.4.4). We can choose them such that

$$r_0 = R_1 \left(e_1 \sin \Omega t + e_2 \cos \Omega t\right), \quad v_0 = v_1 \left[r_0 \wedge h\right]$$

where e_1 and e_2 are unit vectors orthogonal to h and to one another. If we now carry out the averaging we get the required expression for v_{d}.

14.5 The quantity $\gamma\mu$ is the adiabatic invariant for a relativistic particle, where $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ and $\mu = p_\perp v_\perp / 2H$ is the magnetic moment. If the kinetic energy of the particle is conserved, we have $\gamma =$ constant and $\mu =$ constant. The latter relation is satisfied for a nonrelativistic particle, for which $\gamma \approx 1$, even when its energy is not conserved.

$$14.6 F = -(\mu \cdot \nabla H)$$

where $\mu = p_\perp v_1 h / 2H$ is the magnetic moment produced by the rotation of the particle. This expression is the same as the right-hand side of equation (14.a.2), if we put $\boldsymbol{E} = 0$ in it, since it follows from the Maxwell equation $\operatorname{div} H = 0$ that $H \operatorname{div} \boldsymbol{h} = -(\boldsymbol{h} \cdot \nabla H)$.

14.7

$$\sin \vartheta > \left(\frac{H}{H_{\mathrm{m}}}\right)^{1/2}$$

14.8

$$R = 1 - \frac{H}{H_{\mathrm{m}}}$$

14.9

$$r = r_0 \left(\frac{H_0}{H}\right)^{1/2}$$

where r_0 is the distance of the guiding centre from the axis of the trap in the field H_0, and r is the same distance after the field has been changed
to H. Increasing the field causes the plasma to be compressed towards the axis of the trap.

14.10 The guiding centre will go over to the field line

$$r = l, \quad \phi = \frac{2cq}{H v_{\|} l^2}$$

14.11 The guiding centre of a proton moves uniformly along a circle of radius $r = 2r_*$ which lies in the equatorial plane with an angular velocity

$$\omega_{\mathrm{d}} = \frac{3c\S}{e\mu} r - \frac{3GmM}{e\mu}$$

where G is the gravitational constant; $R \approx 226$ km, $T \approx 14.9$ s.

14.12 (a) If we evaluate the products $[\boldsymbol{h} \wedge \nabla H]$ and $[\boldsymbol{h} \wedge (\boldsymbol{h} \cdot \nabla)\boldsymbol{h}]$ for the field of a magnetic dipole, we find from equation (14.a.1) that motion across the magnetic field lines reduces to azimuthal drift for which the distance from the Earth's centre and the latitudinal angle remain unchanged. Moreover, the guiding centre moves along the line of force, the equation of which is

$$r = r_0 \cos^2 \lambda \tag{14.12.1}$$

where r_0 is the distance in the equatorial plane of the line of force to the centre. As we neglect the gravitational field the particle energy remains constant.

On using the well-known expressions for the field strength of a magnetic dipole, and also equations (14.12.1), (14.a.1), and (14.a.5) we find the angular velocity of the azimuthal drift:

$$\omega_{\mathrm{d}} = \frac{(v_{\mathrm{d}})_\phi}{r} = -\frac{3cpvr_0 \sin^2\phi}{2e\mu} \frac{1+\sin^2\lambda}{\cos^3\lambda\left(3\sin^2\lambda+1\right)} - \frac{cpvr_0}{e\mu} \frac{\cos^3\lambda\left(3\sin^2\lambda-1\right)}{\left(3\sin^2\lambda+1\right)}$$

where p and v are the proton momentum and velocity.

(b) By using equation (14.a.5) we find the condition determining $\lambda_m > 0$:

$$\frac{\cos^6\lambda_m}{\left(3\sin^2\lambda_m+1\right)^{1/2}} = \sin^2\alpha$$

The particles move in the region $-\lambda_m \leqslant \lambda \leqslant \lambda_m$.

(c) The proton will reach the Earth's surface provided

$$r_0 \cos^2\lambda_{\mathrm{m}} \leqslant r_*$$

where $r*$ is the radius of the Earth's sphere.

14.13 Through an area $\mathrm{d}\sigma = s\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\phi$ of the plane perpendicular to the direction of motion of the particle, nv do particles will pass per unit time.

They transfer to the fixed particle a momentum equal to

$$m\Delta v_z nv\,\mathrm{d}\sigma \tag{14.13.1}$$

where Δv_z is the change in the z-component of the velocity of a single particle when it is scattered by the fixed particle.

The required force which equals the total momentum transferred per unit time is obtained by integrating equation (14.13.1) over the total cross section of the particle beam. We must express Δv_z in terms of the impact parameter s. Since the collisions are elastic we have

$$\Delta v_z = -2v\sin^2\frac{1}{2}\theta \tag{14.13.2}$$

where θ is the scattering angle. We found in problem 11.98 the connection between θ and s:

$$s^2 = \frac{e^2e'^2}{m^2v^4}\cot^2\frac{1}{2}\theta \tag{14.13.3}$$

After substituting equations (14.13.2) and (14.13.3) into (14.13.1) and integrating over ϕ we get an expression for the force:

$$\boldsymbol{F} = \frac{4\pi}{m}e^2e'^2n\Lambda\frac{\boldsymbol{v}}{v^3}$$

where

$$\Lambda = \ln\left(s_{\mathrm{m}}\frac{mv^2}{ee'}\right)$$

As $s_{\mathrm{m}} \to \infty$, which corresponds to an unbounded beam, the quantity Λ diverges. This result is explained by the long-range nature of the Coulomb forces, as a result of which even particles that fly past at however large a distance interact with the fixed particle. In actual fact in a plasma any charge is screened by charges of the opposite sign so that with a given particle only those particles interact which fly past it at a distance which does not exceed the

screening radius. The screening radius [Debye radius (cf problem 14.31) or Debye-Hckel radius] was evaluated for a static, equilibrium plasma in problem 6.12 (see also problem 14.31):

$$s_{\mathrm{m}} = \frac{kT}{4\pi\left(e'^2 N + e^2 n\right)}$$

where e and e' are the electronic and ionic charges, and n and N their densities.

The quantity Λ is called the Coulomb logarithm. Neglecting the weak v-dependence of Λ, we may assume that $\Lambda =$ constant, with a value of the order 10 .

14.14

$$\bar{F}(v) = -\frac{4\pi}{\mu} e^2 e'^2 \Lambda \int \frac{v - v'}{\left|\boldsymbol{v} - v'\right|^3} f\left(v'\right) \mathrm{d}^3 v' \tag{14.14.1}$$

where $\mu = mm'/\left(m + m'\right)$ is the reduced mass.
It is useful to bear in mind the following electrostatic analogue: we can write expression (14.14.1) in the form of an electrical force $F = q\boldsymbol{E}$, acting upon a charge $q = -4\pi e^2 e'^2 \Lambda/\mu$ due to an 'electrostatic field'

$$E(v) = -\operatorname{grad}_v \varphi(v)$$

where

$$\varphi(v) = \int \frac{f\left(v'\right) \mathrm{d}^3 v'}{\left|v - v'\right|}$$

is the 'electrostatic potential', satisfying the Poisson equation

$$\nabla_v^2 \varphi(v) = -4\pi f(v)$$

14.15 The energy of the test particle is not changed when it collides with fixed, infinitely heavy particles. The change in its mean momentum is described by the equation

$$\frac{\mathrm{d}\overline{\boldsymbol{p}}}{\mathrm{d}t} = \overline{\boldsymbol{F}} \tag{14.15.1}$$

where $\bar{F}$ is the average force. It is convenient to evaluate it using the electrostatic analogue shown in the preceding problem. The velocity distribution of the particles in the medium is described by the function $f(v) = n\delta(v)$. Therefore $\varphi(v) = n/v, E = nv/v^3$,

$$\bar{F} = -\frac{4\pi}{m} e^2 e'^2 \Lambda \frac{v}{v^3}$$

$\overline{\boldsymbol{F}}$ has the nature of a 'friction force' tending to diminish the directed velocity of the particles. However, this friction is smaller the larger the particle velocity ($\bar{F} \propto 1/v^2$, 'decreasing friction').

Integrating equation (14.15 .1) we find

$$v(t) = v_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

where $\tau = mv^3/4\pi e^2 e'^2 n\Lambda$ is a characteristic time of loss of directed particle velocity.
14.16

$$\overline{\boldsymbol{F}} = \begin{cases} 0, & \text{when } v < v_0 \\ 4\pi e^2 e'^2 \Lambda \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m'}\right) \frac{nv}{v^3}, & \text{when } v > v_0 \end{cases}$$

14.17

$$\bar{F} = \begin{cases} -4\pi e^2 e'^2 \Lambda n \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m'}\right) \frac{v_0}{v_0}, & \text{when } (v \cdot v_0) > v_0^2 \\ 4\pi e^2 e'^2 \Lambda n \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m'}\right) \frac{v_0}{v_0}, & \text{when } (v \cdot v_0) < v_0^2 \end{cases}$$

14.18 A friction force

$$\overline{\boldsymbol{F}} = -\frac{4\pi e^4 n \Lambda}{m} \frac{v}{v^3} \tag{14.18.1}$$

acts upon an electron moving with velocity v in a medium of fixed equally charged ions (see the solution of problem 14.15). We note that the velocity dependence of the force F can also be obtained from the following considerations. The friction force is the loss of momentum of a particle per unit time owing to collisions. If the average time between collisions is τ, and in each collision a particle loses momentum of the order of its total momentum mv (which means that as the result of a collision the electron is deflected over a large angle), we have

$$F \approx \frac{mv}{\tau} \tag{14.18.2}$$

In such a collision the electron approaches the ion at a distance at which its kinetic energy is of the order of its potential energy:

$$\frac{1}{2} m v^2 \approx \frac{e^2}{r} \tag{14.18.3}$$

This approximate equality enables us to estimate the collision cross section:

$$\sigma \approx \pi r^2 \approx \frac{4\pi e^4}{m^2 v^4} \tag{14.18.4}$$

and the average time between collisions

$$\tau \approx \frac{1}{n\sigma v} \approx \frac{m^2 v^3}{4\pi n e^4} \tag{14.18.5}$$

Substituting τ into equation (14.18.2) we find $F \approx 4\pi n e^4 / m v^2$, or, taking into account the retarding nature of the force,

$$F \approx -\frac{4\pi n e^4 v}{m v^3}$$

which differs from equation (14.18.1) by the absence of the Coulomb logarithm Λ. This is natural: when using the estimates (14.18.2) to (14.18.5) we neglected distant collisions with small momentum transfers, and their contributions lead to the Coulomb logarithm.

Let us now average equation (14.18.1) over the possible electron velocities. To do this we put

$$v = u + v_{\text{th}}$$

where $\boldsymbol{v}_{\text{th}}$ is the thermal velocity and $\boldsymbol{u}$ the velocity acquired under the influence of the electrical field E. If $u \ll v_{\text{th}}$ we can put $v^3 \approx v_{\text{th}}^3$ in the denominator of equation (14.18.1). It is, however, impossible to neglect u as compared to v_{th} in the enumerator since we get $\bar{v}_{\text{th}} = 0$ when we average over the directions of the thermal velocity. As a result we get

$$\overline{\boldsymbol{F}} = \frac{4\pi n e^4 \Lambda}{m v_{\text{th}}^3} \boldsymbol{u} \tag{14.18.6}$$

where now v_{th} is a quantity of the order of magnitude of the mean thermal velocity. In the case of a Maxwell distribution we have $v_{\text{th}}^2 = 3kT/m$. For $u \ll v_{\text{th}}$ we thus get $F \propto u$.

When $u \gg v_{\text{th}}$, we put $v \approx u$ and obtain

$$\bar{F} \approx \frac{4\pi n e^4 \Lambda}{m u^2} \tag{14.18.7}$$

i.e. $\bar{F} \propto 1/u^2$. The maximum of $\bar{F}$ will clearly correspond to a value of $u \sim v_{\text{th}}$; then both equations (14.18.6) and (14.18.7) give the same value

$$\bar{F} \approx \frac{4\pi n e^4 \Lambda}{m v_{\text{th}}^2} \tag{14.18.8}$$

The function $\bar{F}(u)$ is sketched in figure 14.18.1.
If the field in the plasma $E < \bar{F}_{\max}/e = E_{\text{D}}$, the braking force for a value of u satisfying the equation $\bar{F}(u) = eE$ will exceed the accelerating force eE and the electrons cannot be further accelerated. This is the range of fields E for which the normal Ohm law holds. In the case $E > E_{\text{D}}$ the accelerating force is larger than the braking force and the electrons have a possibility of being accelerated without limit. (In actual fact the electron gas as a whole is not accelerated because of collective

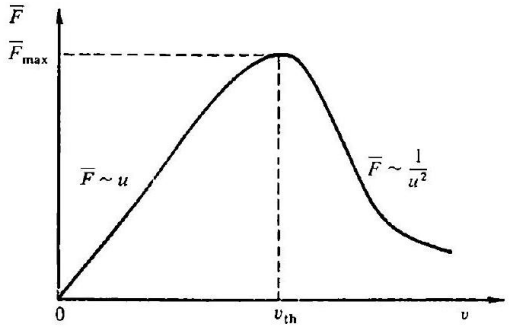


Figure 14.18.1.

effects and its resistance may even increase.) This is called the effect of 'run-away electrons'.

If we substitute $v_{\text{th}}^2 = 3kT/m$ into equation (14.18.8) we get

$$E_{\text{D}} = \frac{1}{3}\frac{e\Lambda}{D^2}, \quad D^2 = \frac{kT}{4\pi n e^2}$$

An exact calculation for the same case gives (Leontovich, 1965, volume 1)

$$E_{\text{D}} = 0 \cdot 214 \frac{e\Lambda}{D^2}$$

Our order-of-magnitude estimate gave a result which was close to the exact value. The critical field value $E = E_{\text{D}}$ is called the Dreicer field.

17.14.2 b Collective motions in a plasma

14.19 It is obvious to assume that the velocity of the liquid motion is along the z-axis and only depends on the transverse coordinate x. Since a moving conducting liquid carries along its magnetic lines of force, during the motion there must arise a longitudinal magnetic field component $H_z(x)$. We therefore look for the unknown functions v and H in the form $v(0, 0, v(x))$ and $\boldsymbol{H}\,(H_0, 0, H_z(x))$; equations (14.b.3) and (14.b.4) are then identically satisfied. Equations (14.b.1) and (14.b.2) take the form

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} + \frac{c^2}{4\pi\sigma H_0}\frac{\mathrm{d}^2 H_z}{\mathrm{d}x^2} = 0 \tag{14.19.1}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}x^2} + \frac{H_0}{4\pi\eta}\frac{\mathrm{d}H_z}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\eta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(p + \frac{H^2}{8\pi}\right) \tag{14.19.2}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(p + \frac{H^2}{8\pi}\right) = 0$$

From the last equation it follows that $p + H^2/8\pi$ depends on z only. However,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(p + \frac{H^2}{8\pi}\right) = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = \text{ constant}$$

since $H^2/8\pi$ is independent of z. Equations (14.19.1) and (14.19.2) are thus ordinary linear differential equations to determine the unknown functions $v(x)$ and $H_z(x)$. Eliminating $\mathrm{d}H_z/\mathrm{d}x$ we get the following equation for $u = \mathrm{d}v/\mathrm{d}x$:

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}x^2} - \frac{1}{x_0^2}u = 0, \quad x_0 = \frac{c}{H_0}\left(\frac{\eta}{\sigma}\right)^{1/2}$$

whence we find

$$v = x_0\left[A\exp\left(\frac{x}{x_0}\right) - B\exp\left(-\frac{x}{x_0}\right)\right] + C \tag{14.19.3}$$

The boundary conditions have the form $v(\pm a) = 0$, since a viscous liquid sticks at the walls. Moreover, from symmetry considerations it follows that $v(x) = v(-x)$. From the boundary conditions and equation (14.19.3) we find

$$v(x) = v_0\frac{\cosh(a/x_0) - \cosh(x/x_0)}{\cosh(a/x_0) - 1} \tag{14.19.4}$$

where v_0 is a new constant which has the meaning of the velocity at the middle plane $x = 0$; we can express v_0 in terms of the pressure gradient:

$$v_0 = -\frac{ax_0}{\eta}\frac{\cosh(a/x_0) - 1}{\sinh(a/x_0)}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}$$

The magnetic field is determined from equations (14.19.2) and (14.19.4) and the boundary conditions $H_z(\pm a) = 0$:

$$H_z(x) = -\frac{4\pi\eta}{c}(\sigma\eta)^{1/2}v_0\frac{(x/a)\sinh(a/x_0) - \sinh(x/x_0)}{\cosh(a/x_0) - 1}$$

The ratio $a/x_0 = M$ is called the Hartmann number. When $M \ll 1$, we have

$$v_0 = \frac{a^2}{\eta}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}, \quad v(x) = v_0\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \tag{14.19.5}$$

as in ordinary hydrodynamics. The magnetic field $H_z = 0$ to first order in the Hartmann number. The longitudinal field H_z only appears in the higher approximations.

In the opposite limiting case, $M \gg 1$, we get

$$v_0 = -\frac{a^2}{\eta M}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}; \quad v(x) = v_0\left\{1 - \exp\left[-\frac{(a - |x|)}{x_0}\right]\right\} \tag{14.19.6}$$

A comparison of equations (14.19.5) and (14.19.6) shows that the mean velocity of the liquid decreases with increasing H_0, while the velocity profile becomes flatter in the main part of the flow, but varies steeply in a layer of thickness x_0 at the walls. The longitudinal magnetic field in this limit has the form

$$H_z(x) = \frac{4\pi a^2(\sigma\eta)^{1/2}}{cM}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}\left[\frac{x}{a} - \sinh\left(\frac{x}{x_0}\right)\exp\left(-\frac{a}{x_0}\right)\right]$$

One can see from this formula that the field decreases with increasing Hartmann number. The largest value of H_z occurs for $M \approx 1$.

The current density in the moving liquid can be evaluated from the Maxwell equation $\boldsymbol{j} = (c/4\pi)$ curl H. Only the y-component of the current is different from zero:

$$j_y(x) = \frac{c}{H_0}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z}\left[1 - \frac{a}{x}\frac{\cosh(x/x_0)}{\sinh(a/x_0)}\right]$$

The magnetic field H_z produced by it vanishes everywhere outside the region occupied by the liquid. There remains only the transverse field H_0. 14.20

$$v(x) = v_0\left[\frac{\sinh(x/x_0)}{\sinh(a/x_0)}\right]$$

The current density is

$$j_y(x) = \frac{c\eta v_0}{H_0 x_0^2}\left[\frac{\sinh(x/x_0)}{\sinh(a/x_0)}\right]$$

This current produces a magnetic field

$$H_z(x) = \frac{4\pi\eta v_0}{H_0 x_0}\frac{\cosh(a/x_0) - \cosh(x/x_0)}{\sinh(a/x_0)}$$

which vanishes for $|x| \geqslant a$.

14.21 The magnetic field has one component

$$H_\phi \equiv H(r) = \frac{4\pi}{cr}\int_0^r rj(r)\mathrm{d}r$$

If we integrate the equation of motion (14.b.1) with the boundary condition $p|_{r\geqslant a} = 0$ we obtain

$$p(r) = \frac{1}{8\pi}\int_r^a \frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2H^2\right)\mathrm{d}r \tag{14.21.1}$$

where $H = (4\pi/cr)\int_0^r rj(r)\mathrm{d}r$ for $r < a$, and $H = 2J/cr$ for $r > a$.

In order to connect the current strength J with T and N we put $p = n(r)kT$, where k is Boltzmann's constant, and integrate both sides of equation (14.21.1) over the cross-sectional area of the plasma column. We get

$$J = 2c(NkT)^{1/2}$$

For $T \approx 10^8$ K and $N \approx 10^{21}$ m^{-3} (values which are characteristic for thermonuclear investigations) we have

$$J = 7 \cdot 5 \times 10^4 \text{ A}$$

14.22 The current must flow in a thin surface layer. In that case the pressure inside the column will be constant:

$$p = \frac{J^2}{2\pi c^2 a^2}$$

14.23 By taking the r-component of equation (14.b.6) and putting $v = vr/r, v =$ constant, we get the following equation to determine H_r:

$$\frac{\partial H_r}{\partial t} = -\frac{2v}{r} H_r - v\frac{\partial H_r}{\partial r}$$

The solution of this equation can be expressed in terms of an arbitrary function of the arguments $r - vt, \vartheta$, and ϕ:

$$H_r(r, \vartheta, \phi) = \frac{1}{r^2} F(r - vt, \vartheta, \phi) \tag{14.23.1}$$

The boundary condition has the form

$$H_r|_{r=a} = H_{0r}(\vartheta, \phi + \Omega t) = \frac{1}{a^2} F(a - vt, \vartheta, \phi)$$

(the argument has been written $\phi + \Omega t$ since we want to go over to the fixed system of coordinates). Thus we have

$$F(a - vt, \vartheta, \phi) = a^2 H_{0r}(\vartheta, \phi + \Omega t)$$

Hence equation (14.23.1) can be written in the form

$$H_r(r, \vartheta, \phi, t) = \frac{a^2}{r^2} H_{0r}\left[\vartheta, \phi - \frac{(r-a)\Omega}{v} + \Omega t\right] \tag{14.23.2}$$

Similarly we get

$$H_\vartheta = \frac{a}{r} H_{0\vartheta}\left[\vartheta, \phi - \frac{(r-a)\Omega}{v} + \Omega t\right], H_\phi = \frac{a}{r} H_{0\phi}\left[\vartheta, \phi - \frac{(r-a)\Omega}{v} + \Omega t\right]$$

We obtain the following connection between the components of the vector H_0 from the equation $\operatorname{div} H = 0$:

$$-\frac{a\Omega}{v}\frac{\partial H_{0r}}{\partial \phi}\sin\vartheta + \frac{\partial}{\partial \vartheta}(H_{0\vartheta}\sin\vartheta) + \frac{\partial H_{0\phi}}{\partial \phi} = 0$$

For $H_{0\vartheta} = 0$ we find $H_\vartheta = 0$ and

$$H_{0\phi} = \frac{a\Omega}{v} H_{0r}\sin\vartheta + f(\vartheta)$$

if we put $f(\vartheta) = 0$ we find

$$H_\phi(r, \vartheta, \phi, t) = \frac{a^2\Omega}{vr} H_{0r}\left[\vartheta, \phi - \frac{(r-a)\Omega}{v} + \Omega t\right]\sin\vartheta \tag{14.23.3}$$

Parker has used the model considered here as a model to describe the interplanetary magnetic field produced by solar plasma currents (the solar wind). In Parker's model of the interplanetary magnetic field $H_\vartheta = 0$ and H_r and H_ϕ are given by equations (14.23.2) and (14.23.3). Measurements of the interplanetary magnetic field performed by satellites and rockets show

that the average magnetic field in the neighbourhood of the Earth's orbit is satisfactorily described by Parker's model.

14.24 The lines of force have the form of an Archimedean spiral:

$$r = \frac{v}{\Omega}\left(\phi - \phi_0\right), \quad \phi_0 = \text{ constant}$$

$$\theta = \arctan\frac{r_0\Omega}{v} \approx 56^\circ; \quad H \approx 3.6 \times 10^{-3} \text{ A m}^{-1}$$

14.25

$$\epsilon_\perp = 1 + \frac{4\pi c^2 \rho}{H^2}$$

where ρ is the plasma density. The value of $\epsilon_\perp$ found here is obtained from the results of problem 6.25 in the limit as $\omega \to 0$.

14.26

$$\omega = \omega_\mathrm{p} = \left(\frac{4\pi n e^2}{m}\right)^{1/2}$$

where m is the electron mass.

14.27 When $\omega < \omega_\mathrm{p}$ we have $R = 1$,

$$E = \frac{2\mathrm{i}q}{k + \mathrm{i}q} E_0 \exp(-qz - \mathrm{i}\omega t)$$

where $q = (\omega/c)\left[\left(\omega_\mathrm{p}^2/\omega^2\right) - 1\right]^{1/2}, k = \omega/c$, and E_0 is the amplitude of the incident wave. The penetration depth is

$$\delta = \frac{1}{q} = \frac{c}{\left(\omega_\mathrm{p}^2 - \omega^2\right)^{1/2}}$$

$\delta \approx c/\omega_\mathrm{p}$ when $\omega \ll \omega_\mathrm{p}$. The damping of the wave is caused not by the dissipation of energy, but by the appearance of currents in the plasma which produce a field of the opposite sign.

When $\omega > \omega_p$

$$R = \left(\frac{k-q}{k+q}\right)^2, \quad E = \frac{2q}{k+q} E_0 \exp(\mathrm{i}qz - \mathrm{i}\omega t)$$

where $q = \left(\omega^2 - \omega_p^2\right)^{\frac{1}{2}}/c$; the wave propagates in the plasma without being damped.

14.28 The position vector of a particle can be written in the form

$$R(t) = R_0 + v_0 t + R_1(t)$$

where v_0 is the particle velocity when there is no field present (its thermal velocity); R_0 is the position vector at $t = 0$; and $R_1(t)$ is the extra term caused by the action of the electrical field of the plane wave (we assume that the particles are nonrelativistic and neglect the magnetic field).

The quantity R_1 satisfies the equation

$$m\ddot{\boldsymbol{R}}_1 = e\boldsymbol{E}_0 \exp\left\{\mathrm{i}\left[(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{R}_0) + (\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}_0)\,t + (\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{R}_1) - \omega t\right]\right\} \tag{14.28.1}$$

In the index of the exponential we can neglect the term $(k \cdot R_1)$, by assuming that the inequality $kR_1 \ll 1$ holds. In this approximation,
which is the one linear in $\boldsymbol{E}_0$, the solution of equation (14.28.1), which corresponds to forced oscillations, has the form

$$\boldsymbol{R}_1(t) = -\frac{e}{m}\frac{E_0 \exp\langle \mathrm{i}\left\{(k \cdot \boldsymbol{R}_0) - [\omega - (k \cdot v_0)]\, t\right\}\rangle}{[\omega - (k \cdot v_0)]^2} \tag{14.28.2}$$

The particle velocity can be written in the form [1]

$$v(t) = v_0 + \frac{\mathrm{i}e}{m}\frac{E_0}{[\omega - (k \cdot v_0)]} \exp\langle \mathrm{i}\left\{(k \cdot R_0) - [\omega - (k \cdot v_0)]\, t\right\}\rangle \tag{14.28.3}$$

The current produced by a single particle with initial position and velocity equal to $\boldsymbol{R}_0$ and v_0, respectively, can be written as

$$j_1(r,t) = ev(t)\delta[r - R(t)] \tag{14.28.4}$$

where $\boldsymbol{v}(t)$ is the velocity at the point $r = \boldsymbol{R}(t)$. To evaluate the total current $j(r,t)$ we must multiply equation (14.28.4) by the number of particles with initial velocity $\boldsymbol{v}_0$ in the volume element $\mathrm{d}^3\boldsymbol{R_0}$ and integrate over all possible values of R_0 and v_0:

$$j(r,t) = en \int v(t)\delta[r - R(t)] f\,(v_0)\, \mathrm{d}^3 v_0\ \mathrm{d}^3 R_0$$

First of all we integrate over $\boldsymbol{R_0}$. The argument of the δ-function depends in a complicated way on $\boldsymbol{R}_0$, so that we change to a new integration variable $R = R_0 + v_0 t + R_1\,(R_0, t)$. If we evaluate the Jacobian of the transformation up to terms linear in $\boldsymbol{E}_0$ we get

$$\mathrm{d}^3 R_0 = \frac{\partial\,(R_{0x}, R_{0y}, R_{0z})}{\partial\,(R_x, R_y, R_z)} \mathrm{d}^3 R \approx [1 - \mathrm{i}\,(k \cdot R_1)]\, \mathrm{d}^3 R \tag{14.28.5}$$

After this the integration over R is easy and can be performed with the use of a formula such as (A1.4). By substituting expression (14.28.5) in the integrand and again neglecting terms $(k \cdot R_1)$ in the index of the exponentials, we get

$$j(r,t) = en \int \left\{ v_0 + \frac{\mathrm{i}eE}{m\,[\omega - (k \cdot v_0)]} + \frac{\mathrm{i}ev_0(k \cdot E)}{m\,[\omega - (k \cdot v_0)]^2} \right\} f\,(v_0)\, \mathrm{d}^3 v_0 \tag{14.28.6}$$

where $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 \exp[\mathrm{i}(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r}) - \mathrm{i}\omega t]$. The point $(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{v}_0) = \boldsymbol{\omega}$ is not a singularity of the integrand since we have assumed that $f\,(v_0) = 0$ for $(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{v}_0) = \omega$. We can thus expand in the ratio $v_0/v_{\mathrm{ph}} = kv_0/\omega$, with the assumption that the characteristic velocities are small compared to the
(1) The divergence of equations (14.28.2) and (14.28.3) when $(k \cdot v_0) = \omega$ is connected with the fact that 'resonance' particles have not been taken into account properly; 'resonance' particles are those with velocities that satisfy the condition $(k \cdot v_0) = \omega$. In order to remove this difficulty we assume that there are no particles in the plasma with such velocities, i.e. we exclude from our considerations the range of velocities which satisfy the inequality $|v - v_0| \ll v_0$.
phase velocity. This enables us to write equation (14.28.6) in the form

$$j(r,t) = \int \{v_0 + \frac{\mathrm{i}eE_0}{m\omega}\left[1 + \frac{(k \cdot v_0)}{\omega} + \frac{(k \cdot v_0)^2}{\omega^2}\right] + \frac{ie(k \cdot E)v_0}{m\omega^2}\left[1 + \frac{2\,(k \cdot v_0)}{\omega}\right]\Bigg\} f\,(v_0)\, \mathrm{d}^3 v_0$$

If we assume that $f(v_0)$ is independent of the angles, we get

$$j(r,t) = \frac{\mathrm{i}ne^2}{m\omega}\left[\left(1+\frac{k^2\overline{v_\parallel^2}}{\omega^2}\right)E_1 + \left(1+\frac{3k^2\overline{v_\parallel^2}}{\omega^2}\right)E_\parallel\right] \tag{14.28.7}$$

Here

$$E_\parallel = \frac{(k\cdot E)k}{k^2}, \quad E_\perp = \boldsymbol{E} - E_\parallel, \quad \overline{v_\parallel^2} = 2\pi\int v_\parallel^2 f(v) v_\perp \mathrm{d}v_\perp \mathrm{d}v_\parallel$$

In the case of a Maxwell distribution $\overline{v_\parallel^2} = T/2m$.
From equation (14.28.7) we find the conductivity tensor:

$$\sigma_{\alpha\beta} = \frac{\mathrm{i}ne^2}{m\omega}\left[\left(1+\frac{k^2\overline{v_\parallel^2}}{\omega^2}\right)\left(\delta_{\alpha\beta}-\frac{k_\alpha k_\beta}{k^2}\right) + \left(1+\frac{3k^2\overline{v_\parallel^2}}{\omega^2}\right)\frac{k_\alpha k_\beta}{k^2}\right]$$

It is purely imaginary, and corresponds to the absence of energy dissipation. If we now use the formula

$$\epsilon_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} + \frac{4\pi\mathrm{i}}{\omega}\sigma_{\alpha\beta}$$

to evaluate the dielectric permittivity tensor, we find

$$\epsilon_{\alpha\beta}(\omega,k) = \epsilon_\perp\left(\delta_{\alpha\beta}-\frac{k_\alpha k_\beta}{k^2}\right) + \epsilon_\parallel\frac{k_\alpha k_\beta}{k^2}$$

where

$$\epsilon_\perp = 1-\frac{\omega_\mathrm{p}^2}{\omega^2}\left(1+\frac{k^2\overline{v_\parallel^2}}{\omega^2}\right), \quad \epsilon_\parallel = 1-\frac{\omega_\mathrm{p}^2}{\omega^2}\left(1+\frac{3k^2\overline{v_\parallel^2}}{\omega^2}\right), \quad \omega_\mathrm{p}^2 = \frac{4\pi ne^2}{m}$$

When this result is compared with that obtained when there is no thermal motion $\left(\overline{v_\parallel^2}=0\right)$ we see that an important new effect appears: the wavevector dependence of ϵ-spatial dispersion. At the same time the dielectric permittivity becomes a tensorial quantity. The k-dependence of ϵ is explained by the fact that the current in any given point is produced by particles coming from neighbouring regions where the field is not the same as in that point. The spatial inhomogeneity of the field together with the thermal motion of the particles leads to the spatial dispersion of the dielectric permittivity.

In this problem we have not sufficiently correctly considered the behaviour of the resonance particles [for which $(k\cdot v_0)=\omega$]; this has led to the loss of a small imaginary part of $\epsilon_\parallel$which describes the transfer
of energy from the wave to the particles (Landau damping which exists even in a collisionless plasma; see problem 14.38).

14.29

$$v_\mathrm{ph} = \frac{\omega_\mathrm{p}}{k} + \frac{3k\overline{v_\parallel^2}}{2\omega_\mathrm{p}} \approx \frac{\omega_\mathrm{p}}{k}; \quad v_\mathrm{g} = \frac{3k\overline{v_\parallel^2}}{\omega_\mathrm{p}}$$

When there is no thermal motion $v_\mathrm{g}=0$. The plasma oscillations propagate therefore as the result of the transport of electromagnetic energy by the particles.

14.30 (a) $\rho(r,t) = \rho(r,0)\cos\omega_\mathrm{p}t$

(b) $\rho(x,t) = \mathrm{Re}\left\{\rho_0 x_0^2 \frac{x}{\left(x_0^2+4\mathrm{i}\beta t\right)^{3/2}}\exp\left[-\frac{x^2}{\left(x_0^2+4\mathrm{i}\beta t\right)}-\mathrm{i}\omega_\mathrm{p}t\right]\right\}$,

where $\beta = 3\overline{v_{\parallel}^2}/2\omega_{\mathrm{p}}$. In the case (b) we see not only the plasma oscillations of the charge density with frequency ω_p, but also its relaxation due to the thermal motion of the particles: $\rho(x,t) = 0$ as $t \to \infty$.

14.31 The function $\varphi(r)$ must satisfy Poisson's equation

$$\nabla^2\varphi = 4\pi e n(r) - 4\pi e n_0 - 4\pi q\delta(r) \tag{14.31.1}$$

At equilibrium $n(r)$ is related to $\varphi(r)$ through Boltzmann's formula

$$n(r) = A\exp\left(\frac{e\varphi}{kT}\right) \tag{14.31.2}$$

where k is Boltzmann's constant and where A is a normalisation constant which follows from the condition

$$\int n(r)\mathrm{d}^3r = n_0$$

At infinity, where the influence of q can be neglected and where we can put $\varphi(\infty) = 0$, we can determine A and we find that $A = n_0$.

If equation (14.31.2) is substituted into (14.31.1) and the assumption that $e\varphi/kT \ll 1$ is used so that the exponential can be expanded and only the term which is linear in φ is retained we find

$$\nabla^2\varphi - \kappa^2\varphi = -4\pi q\delta(r)$$

where κ satisfies the equation

$$\kappa^2 = 4\pi n_0\frac{e^2}{kT} \tag{14.31.3}$$

Since the system has spherical symmetry, we find the following solution of equation (14.31.3):

$$\varphi(r) = \frac{q}{r}\exp(-\kappa r)$$

We note that this is a screened potential with the so-called Debye radius r_{D} as the screening distance, which is given by the expression

$$r_{\mathrm{D}} = \frac{1}{\kappa} = \left(\frac{kT}{4\pi n_0 e^2}\right)^{1/2} \tag{14.31.4}$$

14.32 The derivation in the preceding solution is valid only if the system can really be treated as a quasi-continuum, which means that the change in $n(r)$ or $\varphi(r)$ is small over distances d that are of the order of the mean interparticle distance, that is, for d satisfying the relation

$$d \sim n^{-1/3}$$

This means that the following condition must be satisfied:

$$r_{\mathrm{D}} \gg d \sim n^{-1/3}$$

By using equation (14.31.4) we see that this condition can be written in the form

$$kT \gg \frac{e^2}{d} \sim e^2 n_0^{1/3} \tag{14.32.1}$$

which expresses the fact that the derivation is valid, provided the average kinetic energy of an electron is large compared to its average potential energy. A plasma for which condition

(14.32.1) is satisfied is called a hot dilute plasma, and the approximation used in that case is called the Debye approximation.

14.33 By using the Boltzmann formula [equation (14.31.2) of problem 14.31] and the approximation $e\varphi/kT \ll 1$ [compare condition (14.32.1) from the preceding problem] we find

$$n(r) = n_0 + \frac{q\kappa^2}{4\pi e}\varphi(r) \tag{14.33.1}$$

when the additional infinitesimal point charge is present.

14.34 With the use of equation (14.33.1) we find

$$n_{\text{exc}} = \int [n(r) - n_0]\, \mathrm{d}^3 r = \frac{q\kappa^2}{e} \int_0^\infty \exp(-\kappa r)\mathrm{d}r = \frac{q}{e}$$

14.35

$$E_{\text{int}} = \int \frac{qe\,[n(r) - n_0]}{r}\, \mathrm{d}^3 r = \frac{q^2}{r_{\text{D}}}$$

14.36

$$E_{\text{D}} = \frac{1}{2} \int \mathrm{d}^3 r \int \mathrm{d}^3 r' \frac{e^2\,[n(r) - n_0]\,[n\,(r') - n_0]}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}$$

If we use equation (A2.13) we can evaluate E_{D}:

$$E_{\text{D}} = \frac{1}{2} q^2 \kappa^4 \left[\int_0^\infty \mathrm{d}r \exp(-\kappa r) \int_0^r r' \mathrm{d}r' \exp\left(-\kappa r'\right) + \int_0^\infty r\ \mathrm{d}r \exp(-\kappa r) \int_r^\infty \mathrm{d}r' \exp\left(-\kappa r'\right) \right] = \frac{q^2}{4r_{\text{D}}}$$

14.37

$$n_{\text{D}} \approx \frac{4}{3}\pi n_0 r_{\text{D}}^3 = \frac{1}{3(4\pi)^{1/2}} \left(\frac{kT}{e^2 n_0^{1/3}} \right)^{3/2}$$

We see from equation (14.32.1) of the solution to problem 14.32 that when the Debye approximation is valid n_{D} is a very large number.

14.38 The electric field corresponds to a potential φ in which the electrons will move. Consider this potential in a frame moving with the phase velocity ω/k of the wave. In this frame electrons with velocities close to ω/k may be trapped in the field of the wave. If $\varphi_0\,(= E_0/k)$ is the amplitude of the potential, electrons with velocities between $\omega/k - v_{\text{c}}$ and $\omega/k + v_c$ will have insufficient kinetic energy in the moving frame to pass over the potential barrier in the sinusoidal potential, if $\boldsymbol{v}_{\text{c}}$ satisfies the relation $\frac{1}{2}mv_{\text{c}}^2 = e\varphi_0$. This means that electrons with velocities between $\omega/k - v_c$ and ω/k will be accelerated in order to keep up with the wave while those with velocities between ω/k and $\omega/k + v_{\text{c}}$ will be decelerated. Since in a Maxwell distribution there are more electrons in the first velocity range than in the second, on average the wave will give up energy to the electrons, and thus be damped. The damping rate γ will be proportional to the number of electrons with velocity in the neighbourhood of ω/k. In the case of a Maxwell distribution we thus have (we use k_{B} for the Boltzmann constant to avoid confusion with the wavenumber k)

$$\gamma \propto \exp\left[-\frac{m(\omega/k)^2}{2k_{\mathrm{B}}T}\right] \tag{14.38.1}$$

In the case where the wave is a Langmuir wave, so that the frequency is given by equation (14.b.8), we get from equation (14.38.1)

$$\gamma \propto \exp\left(-\frac{m\omega_{\mathrm{p}}^2}{2k^2k_{\mathrm{B}}T}\right) = \exp\left(-\frac{1}{2k^2r_{\mathrm{D}}^2}\right) \tag{14.38.2}$$

where we have used equation (14.31.4) of problem 14.31 for the Debye radius r_{D} (we note in passing that if we introduce a thermal velocity v_T by the relation $v_T^2 = k_{\mathrm{B}}T$, we can write $r_{\mathrm{D}} = v_T/\omega_{\mathrm{p}}$).

We note from equation (14.38 .2) that Landau damping only becomes significant for wavenumbers of the order of $1/r_{\mathrm{D}}$ whereas for smaller wavenumbers Landau damping is negligibly small.

Part VII
Special Electrodynamics in a Nutshell

18 Special Phenomena in a Nutshell

(потом подумаю про последовательность, соберу логически это!)

18.1 Other phenomena with currents

18.1.1 The Galvanic Cell According to Landau (??)

(???)

18.1.2 Electrocapillarity (??)

(see Landau)

18.1.3 Thermoelectric Phenomena

(see Landau)

Термомагнитные явления в слабом магнитном поле

XII
(?? related to Hall effect???)

Термомагнитные явления в сильном магнитном поле

XIII
(?? related to Hall effect???)

18.1.4 Thermohalvanomagnetic Phenomena

(see Landau)

18.1.5 Diffusion-Electrical Phenomena

(see Landau)

18.1.6 Electrodynamics of Moving Media According to Bolotov, Stolyarov

(??? write firs it in the theory)

Уравнения Максвелла и материальные уравнения Минковского

2. Тензорная форма уравнений Максвелла в движущейся среде

(????)

3. Введение потенциалов в электродинамике движущихся сред

$$\varepsilon_{ikst} = \mu^{-1} \left(\delta_{is} - x u_i u_s\right) \left(\delta_{kt} - x u_k u_t\right);$$

здесь u_i - четырехмерная скорость переноса среды, определенная формулой (2.7), δ_{is} - единичный тензор,

$$x = \varepsilon\mu - 1.$$

Выразим тензор H_{ik} через четырехмерный потенциал A_i, для чего используем соотношения (2.8), (3.1) и (3.2). Если полученное таким образом выражение для H_{i_k} подставить в уравнение (2.3), эквивалентное первой паре уравнений Максвелла (1.1), получим уравнение, которому должны удовлетворять компоненты четырехмерного потенциала A_i[26]:

$$\left(\delta_{is} - x u_i u_s\right) \left\{ \left[\frac{\partial^2}{\partial x_k^2} - x \left(u_k \frac{\partial}{\partial x_k} \right)^2 \right] A_s - \right. \quad \left. - \frac{\partial}{\partial x_s} \left(\frac{\partial A_k}{\partial x_k} - x u_k u_t \frac{\partial A_t}{\partial x_k} \right) \right\} = -\frac{4\pi}{c} \mu j_i.$$

Если это уравнение умножить на выражение вида

$$\delta_{i\alpha} + \frac{x}{1+x} u_i u_\alpha$$

то получим уравнение для четырехмерного потенциала в другой форме [27]:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x_k^2} - x \left(u_k \frac{\partial}{\partial x_k} \right)^2 \right] A_\alpha - \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\frac{\partial A_k}{\partial x_k} - x u_k u_t \frac{\partial A_t}{\partial x_k} \right) = \quad = -\frac{4\pi}{c} \mu \left(\delta_{i\alpha} + \frac{x}{1+x} u_i u_\alpha \right) j_i.$$

При этом было использовано тождество

$$\left(\delta_{is} - x u_i u_s\right) \left(\delta_{i\alpha} + \frac{x}{1+x} u_i u_\alpha \right) = \delta_{\alpha s},$$

4. Смысл понятий диэлектрической и магнитной проницаемостей в движущейся изотропной среде с дисперсией

5. Решение уравнений для потенциалов в движущейся среде

6. Принцип излучения в электродинамике движущихся сред

7. Свободные волны в движущейся среде

8. Функция Грина в движущейся среде без дисперсии

9. Функция Грина для монохроматических полей

10. Функция Грина в движущейся среде с дисперсией

Приложение. Поля простейших источников в движущейся среде

а) Поле покоящегося точечного заряда в движущейся среде

б) Поле покоящегося точечного магнитного диполя

в) Потенциалы Льенара—Вихерта в движущейся среде

18.1.7 Skin effect

Основные формулы

Количественная оценка типичных полей

Соберу значения полей, чтобы ориентироваться.

Вытеснение переменного тока из объёма проводника

(хз, кирич отдельно писал про это, я укажу, если нужно будет, пока так.)

Нормальный скин-эффект

(даже Киселев у себя это делал ведь)

Это определение поверхностного импеданса можно преобразовать к другому виду с помощью уравнения Максвелла (13.2):

$$Z = \frac{E_y(0)}{-\frac{c}{4\pi}\int\limits_0^\infty \nabla_x H_z dx} = \frac{4\pi}{c}\frac{E_y(0)}{H_z(0)}.$$

А с помощью уравнения Максвелла (13.1) теперь можно написать

$$Z = \frac{4\pi}{c}\frac{E_y(0)}{H_z(0)} = \frac{4\pi}{c^2}\frac{\omega}{k}.$$

Обратите внимание, что формулы (13.8) и (13.9) справедливы при любой связи между j и **E**. В случае же локальной связи, подставляя (13.5), находим

$$Z = \sqrt{\frac{4\pi\omega}{ic^2\sigma}} = \sqrt{\frac{2\pi\omega}{c^2\sigma}}(1-i).$$

Таким, образом в случае нормального скин-эффекта имеем

$$R = X = \sqrt{\frac{2\pi\omega}{c^2\sigma}}.$$

Аномальный скин-эффект

Из формул (13.6) видно, что глубина скин-слоя δ должна уменьшаться с уменьшением температуры (из-за роста σ), а также с увеличением частоты поля. С другой стороны, при понижении температуры растёт длина свободного пробега l. Поэтому при низких температурах и высоких частотах δ может стать меньше l. В этом случае локальная связь тока с полем $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$, основанная на предположении однородного поля, перестаёт работать, т.к. поле становится неоднородным на масштабе длины свободного пробега.

Рассмотрим предел $\delta \ll l$ - этот случай называется аномальным скин-эффектом.

Глубина скин-слоя - величина, обратная мнимой части k, поэтому

$$\delta = \left(\frac{c^2 l}{4\pi a\sigma\omega}\right)^{1/3}\frac{1}{\sin(\pi/3)}.$$

В то же время, подставляя k, для поверхностного импеданса получаем

$$Z = \frac{4\pi}{c^2}\frac{\omega}{k} = \left(\frac{4\pi\omega}{c^2}\right)^{2/3}\left(\frac{l}{a\sigma}\right)^{1/3}e^{-i\pi/3} = \left(\frac{2}{a}\right)^{1/3}\left(\frac{\pi\omega}{c^2}\right)^{2/3}\left(\frac{l}{\sigma}\right)^{1/3}(1-i\sqrt{3}).$$

Важные следствия: - $Z \propto \omega^{2/3}$ (а при нормальном скин-эффекте было $Z \propto \omega^{1/2}$) - $X = \sqrt{3}R$ (а при нормальном скин-эффекте было $X = R$) - Комбинация $\sigma/l = n_e e^2/p_0$, а значит и Z в целом, не зависит от температуры и определяется только электронным спектром (а при нормальном скин-эффекте было $Z \propto 1/\sigma^{1/2}(T)$)

Аномальный скин-эффект. Решение кин.уравнения

XVI

18.1.8 Foucault's currents

(подробно про них)

Applications of Foucault's currents

Induction cooker

s are working by this mechanism, right?

18.1.9 Contact Potential Difference

(???)

Суть (???)

О другом про это (???)

18.1.10 Very specific models with current

Currents in unlimited media (??)

$\mathbf{j} = \lambda \mathbf{E} \Rightarrow$ полный ток, стекающий с электрода A:

$$J = \oint \mathbf{j} d\mathbf{S} = \lambda \oint \mathbf{E} d\mathbf{S}$$

(??)

$$J = \lambda \cdot \frac{4\pi}{\varepsilon} C \left(\varphi_A - \varphi_B\right)$$

$$R = \frac{\varphi_A - \varphi_B}{J}$$

$$R = \frac{\varepsilon}{4\pi\lambda C}$$

$C \sim \varepsilon$, поэтому сопротивление не зависит от ε.

Telegraph poles between cities (?)

что-то про это

18.2 Hall effect

(тут подробные указания, в 1й части - где-то параграф вставлю и все.)

18.2.1 Typical Hall Effects

(all basics)

18.2.2 Other about Hall Effects

(там много всего, просто укажу)

18.2.3 Hall Effect at the Micro Level

(пока такая структура, тут особые методы про это.)

Эффект Холла и магнитосопротивление в слабом магнитном поле

Кин.уравнение принимает вид

$$\frac{\partial \psi}{\partial t_1} + \frac{\psi}{\tau} = e\mathbf{v}\left(t_1\right)\mathbf{E}$$

Это линейное неоднородное уравнение, для его решения используем метод вариации произвольной постоянной:

$$\psi\left(t_1\right) = a\left(t_1\right)e^{-t_1/\tau},$$
$$\frac{\partial a}{\partial t_1} = e\mathbf{v}\left(t_1\right)\mathbf{E}e^{t_1/\tau},$$

в результате решение записывается в виде

$$\psi\left(t_1\right) = \int\limits_C^{t_1} e\mathbf{v}\left(t_2\right)\mathbf{E}e^{-(t_1-t_2)/\tau}dt_2$$

В изотропном случае все орбиты замкнуты (т.к. изоэнергетическими поверхностями являются сферы), поэтому функции ψ и $\mathbf{v}$ должны быть периодическими. В этом случае получается

$$\begin{pmatrix} j_x \\ j_y \end{pmatrix} = \frac{n_e e^2}{m_*}\cdot\frac{1}{\Omega^2+\tau^{-2}}\begin{pmatrix} \tau^{-1}E_x + \Omega E_y \\ -\Omega E_x + \tau^{-1}E_y \end{pmatrix}.$$

Если постановка эксперимента такова, что ток течёт только в x-направлении, то

$$j_y = 0, \quad j_x = \frac{n_e e^2 \tau}{m_*}E_x,$$
$$E_y = \Omega\tau E_x.$$

В магнитном поле в плоскости xy движение происходит по окружности, имеющей ларморовский радиус

$$r_L = \frac{v}{\Omega} = \frac{cp_0}{eH}.$$

Пусть между двумя рассеяниями электрон проходит дугу с угловым размером 2φ, тогда $l = 2r_L\varphi$. При этом вдоль направления тока он переместится на расстояние, равное длине хорды, на которую опирается дуга. Разность длин дуги и хорды составляет

$$2r_L\varphi - 2r_L\sin\varphi \approx \frac{r_L\varphi^3}{3} \sim l\left(\frac{l}{r_L}\right)^2.$$

Таким образом, эффективная длина свободного пробега вдоль направления тока отличается от l в меньшую сторону на величину, имеющую относительный порядок $(l/r_L)^2 \sim (\Omega l/v)^2 \sim (\Omega\tau)^2$. В результате получаем положительное поперечное (т.к. магнитное поле перпендикулярно току) магнитосопротивление

$$\Delta\rho \sim \rho(\Omega\tau)^2.$$

Эффект Холла в сильном магнитном поле

В первом приближении

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial t_1} - I_1(\psi_0) = e\mathbf{v}\mathbf{E}$$

Во втором и последующих приближениях

$$\frac{\partial \psi_k}{\partial t_1} - I_1(\psi_{k-1}) = 0, \quad k = 2, 3, \ldots$$

Получаем

$$\psi_0 = C_0,$$
$$\psi_1 = \int_0^{t_1} [I_1(C_0) + e\mathbf{v}(t_2)\mathbf{E}]\, dt_2 + C_1 \equiv \tilde{\psi}_1 + C_1,$$
$$\psi_k = \int_0^{t_1} I_1(\psi_{k-1})\, dt_2 + C_k \equiv \tilde{\psi}_k + C_k, \quad k = 2, 3, \ldots$$

Константы C здесь не зависят от t_1, но могут зависеть от двух других наших независимых переменных, ε и p_z. Их можно найти, усреднив по времени уравнения (9.3)-(9.4). В силу ограниченности ψ усреднение производной всегда даёт нуль:

$$\overline{\frac{\partial \psi}{\partial t_1}} = \lim_{T_1 \to \infty} \frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} \frac{\partial \psi}{\partial t_1} dt_1 = \lim_{T_1 \to \infty} \frac{\psi(T_1) - \psi(0)}{T_1} = 0$$

$$j_x = -\frac{2e}{(2\pi\hbar)^3} \int dp_z \left\{ \frac{c}{H} E_y \int_0^T p_x(t_1) \frac{dp_y}{dt_1} dt_1 + E_z \int_0^T \varphi(t_1) \frac{dp_y}{dt_1} dt_1 \right\}.$$

Рассмотрим xy-компоненту тензора проводимости:

$$\sigma_{xy} = -\frac{2ec}{(2\pi\hbar)^3 H} \int dp_z \int_0^T p_x \frac{dp_y}{dt_1} dt_1 = -\frac{2ec}{(2\pi\hbar)^3 H} \int dp_z \oint p_x dp_y =$$
$$= \frac{2ec}{(2\pi\hbar)^3 H} \int dp_z \left[S_e(p_z, \mu) - S_h(p_z, \mu) \right].$$

Для константы Холла получаем:

$$R_H = \frac{E_y}{j_x H} = \frac{\rho_{yx}}{H} = \frac{1}{\sigma_{xy} H} = \frac{1}{(n_e - n_h)\, ec}.$$

Термоэлектрические явления

$$\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E} + \beta\nabla T,$$
$$\mathbf{q} = \gamma\mathbf{E} + \zeta\nabla T$$

$$\mathbf{j} = -\sigma T \left(-\frac{\mathbf{E}}{T} \right) + \beta T^2 \left(\frac{\nabla T}{T^2} \right)$$
$$\mathbf{q} = -\gamma T \left(-\frac{\mathbf{E}}{T} \right) + \zeta T^2 \left(\frac{\nabla T}{T^2} \right)$$

$$\gamma = -\beta T.$$

Найдём дифференциальную термо-э.д.с. (коэффициент Q) для изотропного металла в предположении упругости столкновений. Как и при вычислении теплопроводности, будем работать в представлении квазичастиц, поэтому пишем кин.уравнение в форме (3.5):

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v}\,\mathrm{sgn}\,\xi \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} + e\mathbf{E}\,\mathrm{sgn}\,\xi \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = -\frac{f - f_0}{\tau}$$

$$\left(\frac{\partial f_0}{\partial |\xi|}\right)\left[e\mathbf{E}\mathbf{v} - \frac{\xi}{T}(\mathbf{v}\nabla T)\right] = -\frac{f_1}{\tau}$$

Для случая, когда мы рассматриваем свободные электроны, рассеивающиеся на примесях, зависимость от μ под производной следующая:

$$\tau = \frac{l}{v}, \quad l \propto \text{ const}, \quad v \propto \nu \propto \sqrt{\mu}.$$

Поэтому

$$\frac{d \ln (v^2 \tau \nu)_\mu}{d\mu} = \frac{1}{\mu}$$

Тогда получаем

$$Q = \frac{\pi^2}{3e} \cdot \frac{T}{\mu}.$$

Теперь можно вернуться к формуле (10.14) и объяснить, почему мы считали $\varkappa \approx -\zeta$. Согласно закону Видемана-Франца, вычислявшаяся нами $\varkappa$ (которая, на самом деле, $-\zeta$), имеет порядок

$$\varkappa \sim \frac{1}{e^2}\sigma T.$$

18.3 Magnetism: other models and properties

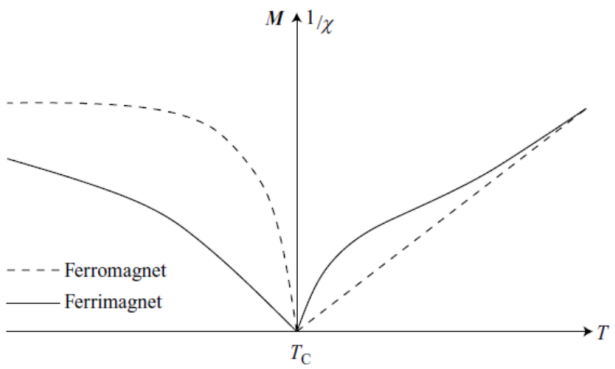
18.3.1 Review of Magnetic Bodies and Theories of Magnetism

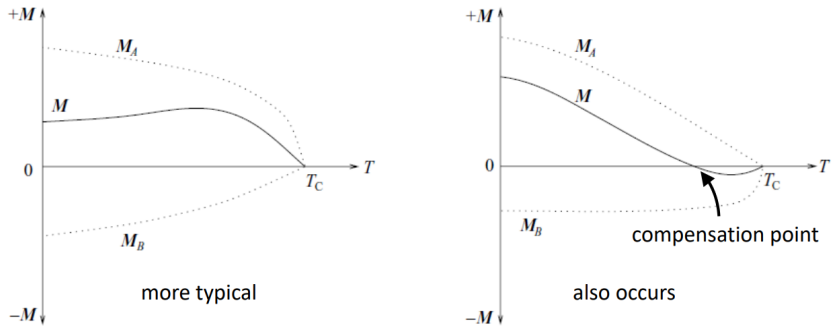
(в духе - есть такое-то, тут такая-то идея и такая формула, и т.п.)

О типах магнетизма

18.3.2 Ferrimagnets, Antiferromagnets: Basics

О ферримагнитах





18.3.3 Ferrimagnets, Antiferromagnets: Special Properties

(разделю потом на несколько разделов)

37. Магнитная симметрия кристаллов

38. Магнитные классы и пространственные группы

39. Ферромагнетик вблизи точки Кюри

40. Энергия магнитной анизотропии

41. Кривая намагничения ферромагнетиков

42. Магнитострикция ферромагнетиков

(???)

43. Поверхностное натяжение доменной стенки

44. Доменная структура ферромагнетиков

45. Однодоменные частицы

46. Ориентационные переходы

47. Флуктуации в ферромагнетике

48. Антиферромагнетик вблизи точки Кюри

(???)

49. Бикритическая точка антиферромагнетика

50. Слабый ферромагнетизм

Существуют кристаллы, в которых обменное взаимодействие устанавливает антиферромагнитную структуру, но сравнительно слабые релятивистские взаимодействия приводят к небольшому искажению этой структуры, в результате чего появляется намагничение $\mathbf{M}$ - «аномально» малое в меру малости релятивистских взаимодействий по сравнению с обменными. Это явление называют слабым ферромагнетизмом [2]).

Члены разложения должны быть инвариантны по отношению ко всем преобразованиям группы $\boldsymbol{D}^6_{3d}$. Первые члены такого разложения:

$$\Phi = \Phi_0(L) + BM^2 + D(\mathbf{lM})^2 - \frac{\beta}{2}M_z^2 - \frac{\gamma L^2}{2}l_z^2 + \zeta L\,(M_x l_y - M_y l_x)$$

51. Пьезомагнетизм и магнитоэлектрический эффект

52. Геликоидальная магнитная структура

18.3.4 Magnetic Groups, Symmetries (?!!)

(тоже тут много указать нужно, это весь ЛЛ8 и использует в плане магнетизма.)

18.3.5 Magnetic Hydrodynamics: Main Models (???)

(раз Ландау про это много думал, то я хотя бы один раздел себе создам.)

Уравнения движения жидкости в магнитном поле

Диссипативные процессы в магнитной гидродинамике

Магнитогидродинамическое течение между параллельными плоскостями

Равновесные конфигурации

Магнитогидродинамические волны

Условия на разрывах

Тангенциальные и вращательные разрывы

Ударные волны

Условие эволюционности ударных волн

Турбулентное динамо

18.4 Typical Superconductivity in a Nutshell (??)

(пока это в записи про сверхпроводимость, потом сюда самое важное перенесу)

18.4.1 Superconductivity According to Ginzburg Landau and London

(see note on SC)

18.4.2 BCS Superconductivity

(see note on SC)

18.4.3 Josephson, Meissner, Field Penetrations, Films, Rods

Об эффекте Мейсснера (???)

Об эффекте Джозефсона (???)

18.4.4 Vortices and Superconductors of the 2nd Kind in a Nutshell

(там очень много всего, мне минимум 2 недели бы додумывать и тренировать пришлось, если бы было нужно.)

18.5 Light waves and particles in media

18.5.1 Main Models of Electromagnetic Wave Propagation

(по Ландау опять, мб переделывать потом буду, в прошлые части перекину по идее многое, пока могу не особо думать про это, итак сойдет для настоящего уровня структура)

85. Геометрическая оптика

86. Отражение и преломление волн. Поверхностный импеданс металлов

88. Распространение волн в неоднородной среде

89. Принцип взаимности

О линиях передачи энергии

(общефиз)

18.5.2 Typical scattering, diffraction of waves

(просто не думаю, что темы тут настолько важны, что параграфа стоят)

92. Рассеяние электромагнитных волн на малых частицах

93. Поглощение электромагнитных волн на малых частицах

94. Дифракция на клине

95. Дифракция на плоском экране

18.5.3 Special, exotic scatterings in media

(only specific phenomena)

122. Рассеяние в жидких кристаллах

123. Рассеяние в аморфных твердых телах

18.5.4 Spatial Dispersion, Optical Activity

(см ЛЛ8, готов думать про это, но не до этого)

103. Пространственная дисперсия

104. Естественная оптическая активность

105. Пространственная дисперсия в оптически неактивных средах

106. Пространственная дисперсия вблизи линии поглощения

18.5.5 Waves in anisotropic media

(специфические модели, так пока вижу этот раздел)

96. Диэлектрическая проницаемость кристаллов

97. Плоская волна в анизотропной среде

98. Оптические свойства одноосных кристаллов

99. Двухосные кристаллы

100. Двойное преломление в электрическом поле (эффект Керра)

$$\varepsilon_{ik} = \varepsilon^{(0)}\delta_{ik} + \alpha E_i E_k$$

$$\varepsilon_{ik} = \varepsilon_{ik}^{(0)} + \alpha_{ikl} E_l$$

(??? додумаю, мелкий параграф!)

101. Магнитооптические эффекты

$$\eta''_{ik} = e_{ikl} G_l$$

а в компонентах:

$$\eta''_{xy} = G_z, \quad \eta''_{zx} = G_y, \quad \eta''_{yz} = G_x.$$

Связь $E_i = \eta_{ik} D_k$ между электрической индукцией и напряженностью принимает при этом вид:

$$E_i = \left(\eta'_{ik} + i e_{ikl} G_l\right) D_k = \eta'_{ik} D_k + i[\mathbf{DG}]_i.$$

Аналогичным образом выглядит прямая зависимость $\mathbf{D}$ от $\mathbf{E}$:

$$D_i = \varepsilon'_{ik} E_k + i[\mathbf{Eg}]_i.$$

Связь между коэффициентами в (101.7) и (101.8) дается формулами:

$$\eta'_{ik} = \frac{1}{|\varepsilon|}\left\{\varepsilon'^{-1}_{ik}\,|\varepsilon'| - g_i g_k\right\}, \quad G_i = -\frac{1}{|\varepsilon|}\varepsilon'_{ik} g_k,$$

$$\frac{1}{n^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n_{01}^2} + \frac{1}{n_{02}^2}\right) \pm \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n_{01}^2} - \frac{1}{n_{02}^2}\right)^2 + G_z^2}.$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon}\mathbf{D} + i[\mathbf{DG}], \quad \mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E} + i[\mathbf{Eg}]$$

(там вообще много формул)

$$D_x = \frac{1}{2} e^{ikz}\left(e^{i\varkappa z} + e^{-i\varkappa z}\right) = e^{ikz}\cos\varkappa z$$

$$D_y = \frac{i}{2} e^{ikz}\left(-e^{i\varkappa z} + e^{-i\varkappa z}\right) = e^{ikz}\sin\varkappa z$$

при выходе волны из слоя будем иметь

$$\frac{D_y}{D_x} = \operatorname{tg}\varkappa l = \operatorname{tg}\left(l\frac{\omega g}{2cn_0}\right).$$

Вещественность этого отношения означает, что волна остается линейно поляризованной, но с повернутым относительно первоначального направлением поляризации (эффект Фарадея).

Рассмотрим квадратичный зффект, возникающий при взаимно перпендикулярных **n** и **g** (эффект Коттона-Мутона). В уравнениях (101.11), (101.12) имеем в этом случае $G_z = 0$, а n_{01}^{-2} и n_{02}^{-2} равны соответственно $\eta_{\|}$и $\eta_{\perp}$. Таким образом, в одной из волн

$$n^{-2} = \eta_{\|}, \quad D_y = 0;$$

эта волна линейно поляризована с вектором **D**, направленным параллельно оси x. В другой же волне

$$n^{-2} = \eta_{\perp}, \quad D_x = 0,$$

102. Динамооптические явления

18.5.6 Typical Nonlinear Optics

(по идее больше об этом - в оптике, просто набор интересных явлений)

Преобразование частот в нелинейных средах

Нелинейная проницаемость

Самофокусировка

Генерация второй гармоники

Сильные электромагнитные волны

Вынужденное комбинационное рассеяние

18.5.7 Fast Particles in Matter, Ionization, Cherenkov Radiation

(мб сделаю раздел большим, интересный раздел, просто мб не буду так много им заниматься, не знаю.)

113. Ионизационные потери быстрых частиц в веществе. Нерелятивистский случай

114. Ионизационные потери быстрых частиц в веществе. Релятивистский случай

115. Излучение Черенкова

116. Переходное излучение

18.5.8 X-Ray Diffraction in Crystals

124. Общая теория дифракции рентгеновых лучей

125. Интегральная интенсивность

126. Диффузное тепловое рассеяние рентгеновых лучей

127. Температурная зависимость сечения дифракции

18.5.9 Waveguides, Optical Fibers and Resonators: Basics (!!??)

(важное указание, много приложений может быть.)

90. Электромагнитные колебания в полых резонаторах

ЛЛ8-91. Распространение электромагнитных волн в волноводах

О приложениях

(раскрою, что типа сейчас многие этим занимаются, что они там делают?)

18.5.10 Waveguides, Optical Fibers and Resonators: Extra Properties (!!??)

(there are big books about them, so I'll write some extra properties, which are useful sometimes)

19 Special properties of electrodynamics

(очень похожее в теорполе пропишу.)

19.1 Deeper understanding of basics of electrodynamics

19.1.1 The Nature of Electricity and Magnetism (???)

(чисто теоретические указания, что же там происходит, что скрывается за формулами и какие подтверждения этому, какие еще известные идеи были? много тут глубоких идей, пока не нужно было думать про это, но смотрел статьи. фундаментальная физика...)

19.2 Special Peculiar Theoretical Constructions

19.2.1 Maxwell's Equations in Curved Space (????)

(пока это не нужно, но начинал про это читать, специфическая тема)

О типичных общих преобразованиях

On Riemann-Silberstein vector (!?!??!?)

$$\boldsymbol{F} := \sqrt{\epsilon_0/2}(\boldsymbol{E} + ic\boldsymbol{B}) \qquad \text{(Riemann-Silberstein vector)}$$
$$i\partial_t \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r},t) = c\nabla \times \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r},t)$$

(?? откуда это ур?) The energy density and the Poynting vector are bilinear expressions in $\boldsymbol{F}$: $\mathcal{E} = \boldsymbol{F}^* \cdot \boldsymbol{F}$ and $\mathcal{P} = -ic\boldsymbol{F}^* \times \boldsymbol{F}$

19.2.2 Connections with Quantum Electrodynamics

(пока не готов писать про это, но указать это важно для понимания электродинамики)

Основные формулы КЭД

Переход из электродинамики в КЭД

19.2.3 Complex Form of Maxwell's Equations

(статья про это есть, даже в этой записи про это вроде бы написано)

Об уравнениях Максвелла в комплексной форме (???)

(статьи про это пишут, но я еще не применял это.)
Introduction of two complex fields

$$\mathbf{F} = \mathbf{E} + i\mathbf{H}, \quad \mathbf{G} = \mathbf{D} + i\mathbf{B}$$

allows one to rewrite the phenomenological Maxwell equations in the following compact form

$$\frac{i}{c}\left(\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t} + 4\pi\mathbf{j}\right) = \operatorname{curl}\mathbf{F}, \quad \mathbf{j} = \mathbf{j}^*$$
$$\operatorname{div}\mathbf{G} = 4\pi\rho, \quad \rho = \rho^*,$$

where the asterisk stands for complex conjugation.

19.2.4 Electromagnetic Fluctuations: Formalism

(пи Киричу, потом еще добавлю Ландау, больше не планирую писать про это)

Дробовой шум

Тепловые шумы в электрических цепях

19.2.5 Electromagnetic Fluctuations: Consequences

(discuss applications and related phenomena)

19.3 Hypothetical Effects and Theories

(see the note on special field theories and other special notes about them)

19.3.1 Typical Monopoles (??)

(типичная теор модель, продумаю потом!!!)

20 Electronics in a Nutshell

(отдельное занятие на всю жизнь, тут самые полезные только темы будут.)

20.1 Other applications of electrodynamics: overview

20.1.1 Computer: general principle

(важная тема для полного понимания, но не актуально сейчас вообще.)

принципиально, как создать компьютер?

Самое главное ведь, вот и нужно указать это.
(так что это можно делать и в разных симуляциях, куча видео на ютубе, все - из этой части)

Part VIII
Applications of Electrodynamics and Experiments

(a part, in which I'll write how exactly and what exactly one can do something with theory before. Currently, I don't know, so it is a section for future.)

21 Electromagnetic Devices, Electrical Engineering

(некоторые - тут, другие - в отдельной записи. идея хорошая, но не до этих тем вообще.)
Некоторые механико- электрические приборы

21.1 Applied Circuit Theory (??)

(вдруг нужна будет - раздел на неё)

21.2 Typical Electrical Appliances

21.2.1 Arduino (??)

научимся еще создавать проекты прямо на самом деле нормальные.

21.2.2 Oscilloscope

задача с респы!

21.2.3 Lamp Generator

(??????????)

коэффициент стоячей волны

согласованная нагрузка???

21.2.4 Resonators

(????)

21.2.5 Other Electrical Devices for Experiments

Обсудим этот класс приборов, и какие эксперименты с ними можно создавать?

21.2.6 Wi-Fi

21.2.7 Transition Lines (????)

(мб где-то подробнее разберу, пока тут так, не до них.)

21.2.8 Antennas

21.2.9 Electromagnets

(??)

вычисление подъемной силы электромагнита

(интересная задача.
стр 163 кирича)

21.3 Mechanics of Electrodynamic Devices

(?? maybe see note on mechanics, or find an engineer that knows it)

трансформация электрической энергии в механическую

как это происходит?
пока не знаю.

21.4 Fundamentals of Robotics

(????)

21.5 Other Information About Experiments with Electricity

21.5.1 Measurements of Charge

измерения q/m по отклонению траектории в электрическом поле

(стр 142 кирич)

$$\mathbf{a} = \frac{q}{m}\mathbf{E}, \mathbf{a} \perp \mathbf{v}_0 \tag{21.1}$$

$$y_1 = \frac{at^2}{2} = \frac{qE}{2m}t^2 = \frac{q}{2m}E\frac{l^2}{v_0^2} \tag{21.2}$$

$$v_y = at = \frac{qE}{m}\frac{l}{v_0} \tag{21.3}$$

измерения q/m по отклонению траектории в магнитном поле

(тут в двух словах описание метода)
вроде все понятно, траекторию получаем, дальше ее радиус дает нам все.

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{F}}{m} = \frac{q}{mc}\mathbf{v} \times \mathbf{B} \tag{21.4}$$

$$v_x \approx v_0, \mathbf{a} \approx \frac{q}{mc}\mathbf{v}_0 \times \mathbf{B}, a = |\mathbf{a}| \approx \frac{q}{mc}v_0 B \tag{21.5}$$

$$y_1 = \frac{1}{2}at^2 = \frac{q}{2m}B\frac{l^2}{v_0 c} \tag{21.6}$$

Метод Томсона измерения заряда

(мб он не нужен вообще, чуть что - у кирича написано, мб когда-то встречу, пока запишу пару формул и все.)

Эта схема позволяла не измерять предварительно скорость частиц.

Суть метода в следующем.

Сначала Томсон включал Только Магнитное поле (как описано выпне) и измерял отклонение пучка заряженных частиц:

$$y = \frac{qB}{mv_0c} l \left(\frac{1}{2} l + L \right) \tag{21.7}$$

$$y = \frac{q}{m} \frac{B^2}{c^2 E} l \left(\frac{1}{2} l + L \right) \tag{21.8}$$

21.6 Semiconductor Devices

(тут прикладные приборы уже, то есть введнеие в их физику, типа введение в физику твердого тела)

есть предложение - идти из [**?**] - так как я физику с оптики и начинаю учить.

22 Experimental Confirmations of Laws of Electrodynamics

(I'll write them here later, it is a very big topic)

23 Some Rare Applications

23.1 Electrochemistry

23.1.1 Fundamentals of Electrochemistry (???)

(there are big books about it, maybe I'll understand at least something about it later)

23.1.2 Operation of Electric Batteries (???)

(кстати, важный вопрос, разберу потом.)

23.1.3 Cyclic Voltammetry

23.1.4 Other Things in Electrochemistry and Applications

On involvement of nanoparticles in the electrodeposition of hydrous iridium oxide films (???)

(ну вот пойму потом мб.)

23.2 Important Experiments from the Past

(write what was done and what had a big impact on science)

Part IX
Numerical Methods and Simulations

24 Numerical Methods and Simulations

24.1 FDTD: Main Ideas

(see special note about it, I'll write main ideas here)

24.2 Meep

(I'll later write about it)

Part X
Specific Electrodynamics for Theoreticians

25 Peculiar Forms of Electrodynamics for Exotic Applications

25.1 Theoretical Derivations of Maxwell Equations

(all them, which are known)

25.1.1 Derivation of Maxwell Equations from Poincare Group

25.2 Special Theoretical Models

25.2.1 Electrodynamics of moving media according to Bolotovek, Stolyarov 1

по СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ ДВИЖУЩИХСЯ СРЕД (Безграничные среды) Б. М. Болотовекий, С. Н. Столяров

(мне это пока не по уровню, пока обычные темы доучиваю, потом мб научусь такое когда-то описывать тоже.)

введение

(почтиаю, напишу в другие места, пока не знаю просто. в историю скорее всего перенесу)

Первые наблюдения, от которых берет свое начало эпектродинамика движущихся сред, появились в первой половине XVIII века, задолго до того, как была создана Максвелловская электродинамика.

В 1675 г. датский астроном О. Рёмер при наблюдении спутников Юпитера обнаружил, что время между двумя последующими их затмениями возрастает при удалении Юпитера от Земли и уменьшается, если Юпитер приближается к Земле. Из этого факта Рёмер сделал вывод о конечности скорости распространения света, а по данным наблюдений сумел онределить величину этой скорости 214000 km/*сек*, довольно близкую (если учесть сравнительно низкую точность измерений) к принятому ныне ее значению. В 1725 г. профессор Оксфордского университета астроном Ддж. Брадли обнаружил эффект аберрации, а через три года дал правильное его объяснение. Объяснение было основано как на конечности скорости распространения света, так и на учете движения Земли. Для аберрационного угла из объяснения Брадлп получилась величина порядка v/c, где v - скорость Земти, c - скорость света.

В 1842 г. профессор Пражского универеитета Х. Допплер теоретически рассмотрел вопрос о том, какое влияние оказывает движение источника или паблгдателя на воспринимаемую частоту света. Предсказапный Допплером эффект был в последующие годы подтвержден в целом ряде экспериментальных исстедований.

В первой половине XIX века появляются экспериментальные исследования, ставившие целью выяснить, жаким образом движение среды влияет на законы распространепия света в этой среде. В 1851 г. А. Физо впервые экспериментально измерил скорость света в движущейся воде и подтвердил выводы, к которым ранее в 1818 г. прищел О. Френель при теоретическом рассмотрении распространения света в медленно движуддейся среде.

Отметим, тто рассмотрение Френеля было проведено на основе механической модели распространения света в упругой среде - эфире.

Современные уравнения элелтромагнитного поля были сформулированы Дж. Максвелтом во второй половине XIX века. Эти уравнения явились той основой, на которой строилось все дальнейшее развитие теории электромагнитных явлений в вакууме и в сплопных средах. В частности, электронная теория Г. А. Лоренца [1] явилась известным завершением классической теории электромагнитного поля в сплошных средах.

В 1890 г. Г. Герц предпринял попытку описать электромагнитныеявления в движущихся средах на основе электродинамики Максвелла, Однако уравнения Герца были получены из уравнений Максвелла для покоящихся сред с помощью преобразования Галилея, и поэтому, как мы теперь знаем, они были справедливы только для медленно движущихся сред (если опустить то обстоятельство, что Герц измерял скорость среды относительно неподвижного эфира) 50 . В конце XIX века был выполнен ряд экспериментов, ставящих целью изучение электромагнитных явлений в движущихся средах. В опытах Г. Роуланда, В. Рентгена, А. Эйхенвальда и Г. Вильсона было показано, что движение поляризованного диэлектрика приводит к появлению электрических токов и намагничению образца и, наоборот, движение магнетика приводит к появлению электрической поляризации и электрического заряда. С современной точки зрения этот результат неудивителен и легко объясняется преобразованиями Лоренца для полей и токов, а также видом материальных уравнений в движущихся средах.

Важное значение по измерению скорости света в движущеиися системе отсчета имел опыт А. Майкельсона, выполненный более чем за 20 лет до создания А. эйнштейном спедиальной теории относительности [2]. Однако, по-видимому, результаты ртого опыта не оказали решающего влияния на Эйншгтейна.

Появление в 1905 г. специальной теории относительности положило конед поискам неподвижного эфира и вообще изгнало из теории преимущественную систему координат. На этой основе эффект Допплера и аберрация света в пустоте получили физически ясное объяснение, принимающее во внимание только относительное движение источника и приемника. Уравнения Максвелла для поля в пустоте вопли в теорию относительности без всякого изменения - это был первый пример релятивистски-инвариантных уравнений. Теория относительности в сочетании с уравнениями Максвелла явилась надежным фундаментом для электродинамики движущихся сред. Действительно, уравнения для электромагнитного поля в движупейся среде могут быть выведены двумя способами. С одной стороны, они могут быть получены усреднением микроскопических уравнений электронной теории, когда у всех частиц, составляющих среду, имеется скорость упорядоченного движения. С друтой стороны, уравнения макроскопического электромагнитного поля в движущейся среде могут быть получены с помощью преобразовавий Jоренца из известных уравнений поля для покоящейся среды. По второму пути пошел T. Минковский, показавший, что из уравнений Максвелла для покоящихся сред и принципа относителє-

ности однозначно следуют уравнения электроматнитного поля для движущихся сред [3].

Приведенный нами краткий исторический обзор отнюдь не претендует на полноту, и желающие ознакомиться подробнее с историей вопроса могут это сделать по книгам Франкфурта и Френка 4.

Исходные уравнения электродинамики движущихся сред, полученные Минковским полвека назад, позволяют дать полное описание электромагнитного поля в среде, движущейся равномерно и с произвольной скоростью *). Экспериментальная проверка теории ограничивалась, как правило, исследованием эффектов первого порядка по и/с,

где и — скорость переноса среды, а с — скорость света в вакууме. Это объяснялось тем, что в первые годы после создания теории достижимые скорости движения сред в лабораторных условиях были настолько малы в сравнении со скоростью света в пустоте, что об измерении эффектов второго или более высокого порядка по и/с нечего было и думать. Не случайно, например, в классических учебниках Беккера «Электронная теория» и Тамма «Основы теории электричества» изложение электродинамики движущихся сред ограничивается только рассмотрением медленно движущихся сред. По-видимому, именно ограниченными возможностями опыта и объясняется тот факт, что в течение нескольких десятков лет (примерно с 1920 г.) число экспериментальных и теоретических исследований, посвященных электродинамике движущихся сред, было незначительным. Начиная примерно с середины 50-х годов положение существенно изменилось, и снова возрос интерес к электромагнитным явлениям в движущихся средах. Объясняется это двумя причинами. Во-первых, возросли экспериментально достижимые значения скорости среды. Например, насильноточных ускорителях плазмы можно сейчас получать макроскопические сгустки плазмы, движущиеся как целое со скоростями 10^8 см/сек и выше.

Кроме того, стало возможным получение плотных пучков, быстрых электронов. Взаимодействие таких объектов с электромагнитными волнами в некоторых случаях может быть описано с помощью электродинамики движущихся сред. При этом достижимые скорости таковы, что становится возможным наблюдение эффектов более высокого порядка по и/с.

Во-вторых, следует подчеркнуть, что отношение скорости движения среды к скорости света в вакууме не всегда является параметром, определяющим, по сути дела, релятивистские эффекты. Дело в том, что существуют так называемые замедляющие системы, в которых скорость распространения электромагнитных волн может быть существенно меньше скорости света в вакууме. Примером таких замедляющих систем является волновод, частично заполненный диэлектриком, цепочка связанных резонаторов, спиральный волновод и т. п. Обозначим скорость распространения электромагнитных волн в таких системах через с'. Тогда параметром, определяющим релятивистские эффекты движения среды в таких системах, является не и/с, а и/с'. Последняя величина может быть сделана близкой к единице даже при малых скоростях движения среды и. Указанные возможности, вызванные к жизни развитием физики в последнее десятилетие, снова привлекли внимание к различным вопросам электродинамики движущихся сред. За последнее время появилось значительное количество теоретических и экспериментальных работ, посвященных как дальнейшему развитию теории, так и исследованию возможностей практического применения.

Здесь следует указать на ряд возможных практических применений релятивистских эффектов, таких, как умножение частоты и усиление электромагнитной волны при отражении ее от движущейся границы, диагностика движущихся сред по их взаимодействию с электромагнитными волнами, исследование конвективных неустойчивостей в системах типа плазма — пучок и т. д. Немалый интерес представляет также рассмотрение и некоторых нерелятивистских эффектов, например, явлений генерации, отражения и преломления волн при наличии движущихся слоев ионосферы. Большое количество исследований по электродинамике движущихся сред, опубликованных за последние годы в советских и зарубежных журналах, делает своевременной попытку рассмотреть то развитие, которое получила электродинамика движущихся сред, сопоставить и критически проанализировать результаты, полученные различными авторами. Если говорить о том новом, что внесено за последние годы в развитие электродинамики движущихся сред, то следует прежде всего отметить, что большое признание и распространение получил метод формулировки основных

уравнений, предложенный в 1924 г. Мандельштамом и Таммом.

Этот метод значительно упрощает решение уравнений электродинамики движущихся сред, так как позволяет ввести потенциалы поля. В связи с этим первая половина обзора посвящена изложению указанного метода для случая изотропных движущихся сред (т. е. сред, изотропных в системе покоя). Изложение ведется с учетом дисперсии, как частотной, так и пространственной. Рассмотрены особенности распространения свободных электромагнитных волн в движущейся среде, приведены выражения для групповой и фазовой, скоростей, а также для показателя преломления волн в движущейся среде в зависимости от направления распространения волн, скорости движения среды и других параметров. На основе метода Мандельштама — Тамма рассматривается также поле в движущейся среде при наличии заданных источников. Как известно, в этом случае поле в среде может быть выражено через функцию Грина. Обсуждаются так называемые «принципы излучения», т. е. способы выделения таких решений, которые удовлетворяют определенным физическим условиям. Приводятся выражения для функции Грина в движущейся изотропной среде При наличии дисперсии и в пренебрежении дисперсией. Полученные выражения позволяют определить поле любого заданного источника в движущейся среде, например, поле покоящегося заряда, поле диполя (статического и переменного), поле движущихся зарядов и диполей (эффект Допплера, потенциалы Льенара — Вихерта и излучение Вавилова — Черенкова в движущейся среде) *) и т. п. Однако требования к объему настоящего обзора не позволили нам рассмотреть эти задачи, и мы ограничились только вычислением функции Грина. Не включены в обзор также весьма интересные задачи, касающиеся отражения и преломления волн на границах раздела с движущимися средами. Авторы надеются рассмотреть эти вопросы в дальнейшем. При составлении списка литературы мы использовали указатель, составленный Глуцюком, которому мы выражаем свою признательность

Мы не касались вопроса о виде тензора энергии-импульса в движущейся среде. Желающие ознакомиться с состоянием вопроса могут это сделать по обзорам Скобельцына и Гинзбурга и по приведенной в них литературе. В этих обзорах, правда, не рассматриваются движущиеся среды. Но обсуждаемые там выражения для тензора энергии-импульса в покоящейся среде легко могут быть переписаны для движущейся среды с помощью релятивистских преобразований.

Уравнения Максвелла и материальные уравнения Минковского

В этом разделе мы приведем основные уравнения электродинамики двиньущихся сред, сформулированные еще Минковским. Оли понадобятся нам для дальнейшего изложения. Более подробно с теорией можно ознакомиться как по оригинальной работе Минковского 12, так и по ггвестным и ставпими узке классическими учебникам [3,5,6,13].

Электромагнитное поле в движущихся средах формально оппсывается теми же уравнениями Максвелла, что и в покоящейся среде:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\mathbf{H} = \ & \tfrac{1}{c}\tfrac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \tfrac{4\pi}{c}\mathbf{j}, \qquad \operatorname{rot}\mathbf{E} = -\tfrac{1}{c}\tfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ & \operatorname{div}\mathbf{D} = 4\pi\rho, \qquad \operatorname{div}\mathbf{B} = 0 \end{aligned}$$

здесь под величинами $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ понимаются электрическое и магиитное ио.тя, а под $\mathbf{D}$ и $\mathbf{B}$ - электрическая и магнитная индукции в двияущейся средс, ρ и $\mathbf{j}$ - плотность сторонних зарядов и токов в этой среде.

Система уравнений (1.1) долльна быть дополнена материальыми уравнениями, выражающими связь между полямп и индукциямп. Эти уравнения для движущейся изотропной среды были предложены Мпгковским [12] и носят его пмя. Рассмотрим среду,

которая в системе погоя изотропна. Если скорость переноса среды есть и, то уравнения Минковского имеют вид

$$\mathbf{D} + \left[\frac{\mathbf{u}}{c}, \mathbf{H}\right] = \varepsilon \left(\mathbf{E} + \left[\frac{\mathbf{u}}{c}, \mathbf{B}\right]\right),$$
$$\mathbf{B} + \left[\mathbf{E}, \frac{\mathbf{u}}{c}\right] = \mu \left(\mathbf{H} + \left[\mathbf{D}, \frac{\mathbf{u}}{c}\right]\right).$$

В этом разделе мы приведем основные уравнения электродинамики движущихся сред, сформулированные еде Минковским. Ощи понадобятся нам для дальнейшего изложения. Более подробно с теорией модио ознакомиться как по оригинальной работе Минковского [12], так и по ;звестным и ставпими уже классическими учебникам [3,5,6,13],

Электромагнитное поле в движущихся средах формально оппсывается теми же уравнениями Максвелла, что и в покоящейея среде:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$
$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0;$$

здесь под величинами $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ понимаются эдектрическое и магнитное но.я,, а под $\mathbf{D}$ и $\mathbf{B}$ - электрическая и магпитная индукции в двинущейся срете, ρ и $\mathbf{j}$ - плотность сторонних зарядов и токов в этой среде.

Система уравнений (1.1) должна быть донолнена материальными уравнениями, выражающими связь между полямп и индукциямп. Эти уравнения для движущейся изотропной среды были предложены Мннковским [12] и носят его пмя. Рассмотрим среду, ноторая в системе покоя изотропна. Если скорость переноса среды есть $\mathbf{u}$, то уравнения Минковского имеют вид

$$\mathbf{D} + \left[\frac{\mathbf{u}}{c}, \mathbf{H}\right] = \varepsilon \left(\mathbf{E} + \left[\frac{\mathbf{u}}{c}, \mathbf{B}\right]\right),$$
$$\mathbf{B} + \left[\mathbf{E}, \frac{\mathbf{u}}{c}\right] = \mu \left(\mathbf{H} + \left[\mathbf{D}, \frac{\mathbf{u}}{c}\right]\right).$$

В этих формулах в и и-диэлектрическая п магшитная пронпцаемости покояцейся среды. Соотношения (1.2) были получены Минковским из известных соотношений между индуюцией и полем в пояояцейся пзотропной среде путем преобразований Лоренца.

Сислема уравнений (1.1) с материальными уравлепиями (1.2) является полдой и достаточной для репешия задач в безграничной изотропной двиЖудейся среде. Если в двикущейся среде имеется граница раздела, то систему уравненпий (1.1) и (1.2) следует доподнить граничнымп устовиямп, которым должны удовлетворять поля и индукции. Рассмотрим границу раздела двух сред, движущуюся со скоростью v. Поля по одну сторону границы будем обозначать инденсом 1, а по другую сторону - иддесом 2. Тогда на границе между ними должны выполнятьея следуюпие соотнопения [3], 13.

$$[\mathbf{n}, \mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1] = \frac{v_n}{c}(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1)$$
$$[\mathbf{n}, \mathbf{H}_2 - \mathbf{H_1}] = -\frac{c_n}{c}(\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1)$$

где $\mathbf{n}$ - нормаль к границе раздела, а v_n - проекция скорости транпцы раздела на эту нормаль.

Из этих граничных условий видно, что если граница раздсла перемещается только в своей ллоскости, то граничные условия имеют такой же вид, как и для покояцейся границы.

Подчеркнем, что в соотношении (1.3) величина ν η является скоростью переноса границы раздела, а не скоростью движения сред по обе стороны от нее. В принципе все три величины — скорость среды по одну сторону от границы раздела и ъ скорость границы раздела ν и скорость среды по по другую сторону от границы и2 — могут быть различны. Отметим, что при выводе формул (1.3) предполагалось отсутствие поверхностных токов и зарядов на движущейся границе раздела. Следует иметь в виду, что для получения граничных условий на поверхности раздела нужно эту поверхность рассматривать как предельный случай переходного слоя конечной толщины. Поэтому, вообще говоря, характер решений может зависеть от структуры переходного слоя

1 б . Предыдущие формулы справедливы в случае, когда свойства среды в системе покоя не зависят явно от координат и времени, т. е. среда является стационарной и пространственно-однородной, и, кроме того, скорость переноса среды и также не зависит от координат и времени. В общем случае, когда скорость движения среды и ее преломляющие свойства являются произвольными функциями координат и времени, рассмотрение задачи резко усложняется. Можно указать на два предельных случая, когда это рассмотрение может быть проведено достаточно просто. Если масштаб неоднородности, характеризующий изменение свойств среды (например, расстояние, на котором существенно меняется скорость переноса среды и ее преломляющие свойства, или время, за которое существенно меняются эти параметры), много больше соответствующих величин, характеризующих электромагнитную волну (длина волны или ее период колебаний), то материальные уравнения могут быть получены методом разложения по малому параметру (отношение масштаба неоднородности волны к масштабу неоднородности среды). В этом случае в материальные уравнения входят не только сами параметры среды, но и их производные по координатам и времени 16 19 . Во втором предельном случае, когда свойства среды сильно меняются в пространстве и (или) во времени, т. е. за период колебаний или на длине волны свойства среды (показатель преломления, скорость переноса и т. п.). меняются существенным образом, можно воспользоваться материальными уравнениями для стационарных и однородных сред, а неоднородность учитывать с помощью соответствующих «граничных» условий (см. формулы (1.3), а также работы 20 22 , где ставятся условия на временном скачке).

Тензорная форма уравнений Максвелла в движущейся среде

Запись уравнений Максвелла в тензорной форме использовалась главным образом для доказательства релятивистской инвариантности электродинамики движущихся сред. Нам она потребуется в дальнейшем для введения четырехмерных потенциалов электромагнитного поля в движущихся средах. Следуя Минковскому, составим два тензора

$$F_{ih} = \begin{pmatrix} 0 & B_z & -B_y & -iE_x \\ -B_z & 0 & B_x & -iE_y \\ B_y & -B_x & 0 & -iE_z \\ iE_x & iE_y & -iE_z & 0 \end{pmatrix}$$

и

$$H_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & H_z & -H_y & -iD_x \\ -H_z & 0 & H_x & -iD_y \\ H_y & -H_x & 0 & -iD_z \\ iD_x & iD_y & iD_z & 0 \end{pmatrix}.$$

Компонентами тепзора F_{ik} являются составляющие электрического поля и магнитной ипдукцип, а компонентами тенаора H_{ik} - составляющие магнитного поля и э.ектрической индукции.

С помощью введенных тензоров первые два уравнения системы (1.1) (первую пару уравнений Максвелла) можно записать в виде

$$\frac{\partial H_{ik}}{\partial x_k} = \frac{4\pi}{c} j_i,$$

где j_i - четырехмерный вектор тока с компопентами j_x, j_y, j_2 п $ic\rho$, а четырехмерпые координаты мы выберем в следующем виде:

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z, \quad x_4 = ict.$$

Как всегда, по повторяющимся индексам проводится суммирование, поэтоау

$$A_i B_i = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3 + A_4 B_4,$$

где $A_i = (\mathbf{A}, A_4)$. Вторая пара уравнений Максвелла также записывается в виде одного тензорного уравнения:

$$\frac{\partial F_{ih}}{\partial x_l} + \frac{\partial F_{hl}}{\partial x_i} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x_h} = 0.$$

Материальные уравнепия Минковского (1.1) в тензорной форме принимают вид

$$H_{ik} u_k = \varepsilon F_{ik} u_k$$
$$F_{ik} u_l + F_{kl} u_i + F_{li} u_k = \mu \left(H_{i\hat{k}} u_l + I_{kl} u_i + H_{ii} u_h \right)$$

где u_h - четырехмерный вектор скорости перемещения среды, который выражается через трехмерный вектор $\mathbf{u}$:

$$u_{1,2,3} = \frac{u_{x,y,z}}{c\sqrt{1 - (u^2/c^2)}}, u_4 = \frac{i}{\sqrt{1 - (u^2/c^2)}}.$$

Тензорная формулировка электродинамики движущихся сред полностью эквивалентна системе уравнений (1.1) — (1-2), записанной в векторной форме. Однако обе эти формулировки иногда оказываются неудобными при решении конкретных электродинамических задач. Причина здесь та же самая, что и в обычной электродинамике покоящихся сред, когда приходится определять слишком много неизвестных функций (компоненты полей и индукций), входящих в исходные уравнения. В электродинамике движущихся сред ситуация оказывается еще более сложной, ибо в материальные уравнения (2.6) дополнительно входит скорость движения среды. В ряде случаев гораздо более удобной является формулировка материальных уравнений, предложенная Таммом 8 . В этой формулировке свойства движущейся среды описываются четырехмерным тензором четвертого ранга $\varepsilon_{\text{ihst}}$, дающим прямую связь между тензорами поля F_{st} и H_{ik},

$$H_{ik} = \varepsilon_{ikst} F_{\text{st}*}$$

это соотношение заменяет пару материальнх уравнепий Мипковского (1.2) или эквивалентных им уравнений (2.6).

Соотношение (2.8) может быть ааписано в другой эквивалентной форме sin [5]

$$H_{ik} = F_{ik} + 4\pi P_{ik};$$

здесь тензор $\mathscr{P}_{i\,\text{h}}$ является-четырехмерным тензором поляризуемостп движущейся среды. Явный вид этого тепзора может быть получен из 2.8), если известно выражепие для тендора ε_{ikst}.

Запись материальных уравнений в виде (2.8), предложенная И. Е. Таммом, удобна в том отношении, что она позволяет перейти от полей к потенциалам так же просто, как это делается в случае покоящейся среды. Переход же от полей к потенциалам в ряде случаев облегчает решение задачи, так как уменьшает число функций, подлежащих определению.

Введение потенциалов в электродинамике движущихся сред

Как и в случае покоящейся среды, введем четырехмерный вектор-потенциал A_i с компонентам $A_x, A_y, A_z, i\varphi$, через который компоненты тензора $F_{i\text{Å}}$ в (2.1) выражаґтся следугппи образом:

$$F_{ik} = \frac{\partial A_h}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_h}.$$

Ірн таком выборе вектор-потенпиала A_i уравненпе (2.5), содержапее вторую пару уравнений Максвелла в движупейся среде, удовлетворяется тождественно. Выразив $H_{i\hbar}$ эерез F_{tk} по формуле (2.8) п подставив полученное выраякение в уравнение (2.3), содержапее первую пару уравнений Максвелла, получим уравнение, которому должны удовлетворять компоненты вектор-потенциала A_i. При этом мы используем релятивистскиже запись матерпальных уравнеший для движущихея сред в форме Ватсона п Нуха 24,25):

$$\varepsilon_{lkst} = \mu^{-1}\left(\delta_{is} - x u_i u_s\right)\left(\delta_{kt} - x u_k u_t\right)$$

здесь u_i - тетырехмерная скорость переноса среды, определенная формупой $(2.7), \delta_{is}$ - единичный тензор,

$$x = \varepsilon\mu - 1.$$

Выразим тензор H_{ik} через четырехмерный потенпиал A_i, для пего испольауем соотношения $(2.8), (3.1)$ и (3.2). Если полученное таким образом выражение ддя H_{ii} подставить в уравнение (2.3), эквивалентное первой паре уравнепий Максвелла (1.1), получим уравнение, поторому должны удовлетворять компоненты четырехмерґого потендиала A_t^{26}:

$$\left(\delta_{is} - x u_i u_s\right)\left\{\left[\frac{\partial^2}{\partial x_k^a} - x\left(u_h\frac{\partial}{\partial x_h}\right)^2\right]A_s - \frac{\partial}{\partial x_s}\left(\frac{\partial A_k}{\partial x_h} - x u_k u_t \frac{\partial A_t}{\partial x_k}\right)\right\} = -\frac{4\pi}{c}\mu j_{t^*}$$

Если это уравнение умножить на выражение вида

$$\delta_{i\alpha} + \frac{x}{1+x}u_i u_\alpha$$

то получим уравнение для четырехмерного потенциала в другой форме:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x_k^3} - x\left(u_k\frac{\partial}{\partial x_k}\right)^2\right]A_\alpha - \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial A_h}{\partial x_k} - x u_k u_t\frac{\partial A_t}{\partial x_k}\right) = -\frac{4\pi}{c}\mu\left(\delta_{i\alpha} + \frac{x}{1+x}u_i u_\alpha\right)j_t$$

При этом было пспользовано тождество

$$\left(\delta_{is} - w_i u_s\right)\left(\delta_{i\alpha} + \frac{\kappa}{1+x}u_i u_{\alpha'}\right) = \delta_{\alpha s}$$

если учесть, что в прпнятых нами обозначениях $u_i u_i = -1$. Четыре компоненты $\mathbf{A}$ и $A_4 = i\varphi$ вектор-потенциала A_8 определяются пз системы четырех линейных дифференцпальных уравнений второго порядка в частных производных. эта система уравнений может быть унропена с помощью удачно выбранного дополнительного условия, палагаемого па компопенты четырехмерного потенциала. Такая возмояность, как известно, вытекает из градиентной ин вариантности: как видно из опредедения потендиала (3.1), мы можем добавить к вектору A_i четырехмерный градиент $\partial\Phi/\partial x_i$ произвольной функции Ф от координат и времени. При этом тензор F_{ii} останется без изменения. Дополнительное условие, налагаемое на четырехмерный потенциал A_1, эювивалентно выбору подходящей фуннции Ф.

Мы будем подьзоваться в дальнейшем дополнительным условием

$$\frac{\partial A_{\hat{k}}}{\partial x_k} - x u_k u_t \frac{\partial A_t}{\partial x_k} = (\delta_{kt} - x u_h u_t) \frac{\partial A_t}{\partial x_h} = 0,$$

которое яв.тяется обобщением дополнительного условия Jоренца $\partial A_h/\partial x_k + +(x/c)\partial\varphi/\partial t = 0$ лля случая покоядейся среды. При таком выборе доподнитеиьного условия система уравнений (3.4) пріншмает следующий более простой вид:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x_k^t} - x\left(u_k \frac{\partial}{\partial x_k}\right)^2\right](\delta_{is} - x u_t u_s) A_s = -\frac{4\pi\mu}{c} j_i,$$

а уравнение (3.5) ааписывается соответственно в виде [2e, бз]

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x_k^k} - x\left(u_k \frac{\partial}{\partial x_h}\right)^2\right] A_\alpha = -\frac{4\pi\mu}{c}\left(\delta_{\alpha i} + \frac{x}{1+x} u_\alpha u_l\right) j_l.$$

Уравнения для потенциалов могут быть также получены с помощью преобразований Jоренца из соответствующих уравнегий для поколщейся среды [27–29].

Решения системы уравнений (3.8) или (3.9), удовлетворяющие веобходимым граничным (и начальным) условиям, определяют поле в движудейся среде, вызванное заданным распределеппем зарядов и токов j_i.

Система уравнений (3.8) содержит четыре неизвестные фупкции - компонепты четырехмерпого потепциала Λ_l. Но в силу дополпительного условия (3.7) незавпсимымк являются только три из четырех функцпй A_i. Рассмотренный способ введения потенциалов не является единственно возможным. Можно ввести потенциа.т, который яв.яется обобщением понятия вектора Герда на случай движущейся среды. С этой целью введем тензор Π_{ih}, определив его соотношением [28,29]

$$A_i = \left(\delta_{ik} + \frac{\kappa}{1+x} u_l u_k\right) \frac{\partial \Pi_{hl}}{\partial x_l}.$$

Тогда дополнительное условие (3.7) в силу соотнотения (3.6) примет нпд

$$\frac{\partial^2 \Pi_{ht}}{\partial x_h \partial z_l} = 0.$$

Для выполнения этого условпя достаточно считать, что тензор Π_{kl} является антпсимметричным. Подстановка вектор-потенциала в виде (3.10) в уравнение (3.9) прпводит κ уравнениям

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_k^2} - * \left(u_k \frac{\partial}{\partial x_k}\right)^2\right] \Pi_{ij} = -4\pi\mu P_{ij}$$

где компоненты тензора моментов P_{ij} определятся из соотнонения

$$j_i = c\frac{\partial P_{ij}}{\partial x_j}$$

Из последнего соотношения видно, что тензор P_{ij} также можно считать антисимметричным тензором. Действительно, в силу известного закона сохранения заряда компоненты четырехмерного тока $j_i = (\mathbf{j}, ic\rho)$ удовлетворяют условию

$$\frac{\partial j_i}{\partial x_i} = 0.$$

Если теперь в это выражение подставить четырехмерпый ток j_t, записанный согласно формуле (3.13) через тензор P_{ij}, то нетрудно убедитися, тто в случае антисимметричности этого тензора выражение $\partial^2 P_{ij}/\partial x_i \partial x_j$ тождественно обращается в нудь. В силу антисимметричности тензоров Π_{ij} п P_{ij} они содержат только по шесть независнмых компонент. Поля выражаются через потендиалы Π_{ij} по формулам

$$F_{ik} = \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial \Pi_{ht}}{\partial x_l} - \frac{\partial}{\partial x_h}\frac{\partial \Pi_{il}}{\partial x_l} + \frac{x}{1T^x}\left(u_h \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial u_n \Pi_{nt}}{\partial x_l} - u_i \frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial u_n \Pi_{nt}}{\partial x_l}\right).$$

Смысл понятий диэлектрической и магнитной проницаемостей в движущейся изотропной среде с дисперсией

578

В полученых выше уравнешиях (3.8) и (3.9) ддя четырехмерного потенциала A_i и в уравнениях (3.12) для тензора Герца II учитываются путем задания скорости ее перемещения и ее преломляющих свойств, определяемых значениями диэлектрической ε и магнитной μ проницаемостей в системе покоя этой среды. При этом ε и μ следует считать операторами, которые зависят от смещения по времени и пространстве. Поясним это на простом примере. Рассмотрим покоящуюся среду, в которой задан закон дисперсии. В дальнейшем, если это не будет оговорено, мы будем считать, что среда в системе покоя не обладает пространственной дисперсией *). Диэлектрическая проницаемость такой среды имеет, вообще говоря, различные значеппя для воли различных частот. Соотношение

$$D = \varepsilon \mathbf{E}$$

следует понимать так. Разложим $\mathbf{D}$ и $\mathbf{E}$ в интегралы Фурье по времени, т. е. представнм электридеское поле и индукцню в виде суперпозидии колебаний с разными частотами:

$$\mathbf{E}(t) = \int \mathbf{E}_\omega \exp(-i\omega t) d\omega, \quad \mathbf{D}(t) = \int \mathbf{D}_\omega \exp(-i\omega t) d\omega.$$

Тогда соотношение (4.1) может быть в фурье-представ.еении записано в виде соотношения

$$\mathbf{D}_\omega = \varepsilon(\omega)\mathbf{E}_\omega,$$

где $\varepsilon(\omega)$ - затение диэлектрической проницаемости иа частоте ω. Отсюда равенство (4.1) принимает следующий вид:

$$\mathbf{D}(t) = \int \mathbf{D}_\omega \exp(-i\omega t) d\omega = \int \varepsilon(\omega)\mathbf{E}_\omega \exp(-i\omega t) d\omega.$$

Если считать, что мы всегда можем представить поля в внде интеграла Фурье по времени, то соотношению (4.1) можно прндать операторный смысл

$$\mathbf{D}(t) = \varepsilon\left(i\frac{\partial}{\partial t}\right)\mathbf{E}(t),$$

тде ε - та яе функция, что и в соотношении (4.3), но аргументом ее является оператор смешения по времени. Действительно, если в это соотношение подставить $\mathbf{E}(t)$ и $\mathbf{D}(t)$ нз разложений (4.2), мы подучим соотнолиения (4.3), (4.4). Такшм образом, диэдектритеская проницаемость нояоящейся средм с дисперсией ммеет смыс.т оператора, зависящего ол смепения по времени. При наличии пространственной дисдерспи оператор & будет, очевидно, записеть не тольюо от $i\partial/\partial t$, но и от оператора

смещения в пространстве $(-i\nabla)$. То же самое относится, очевидно, и к оператору магнитной проницаемости:

$$\varepsilon = \varepsilon\left(i\frac{\partial}{\partial t}, -i\nabla\right), \mu = \mu\left(i\frac{\partial}{\partial t}, -i\nabla\right)$$

Если теперль перейти к случаю двильущейся среды, то фуункциональная зависимость операторов & и μ от свомх аргументов сохранится, но самн артументы должны быть преобразонаны по Jоренцу. это приводит к замене аргументов в (4.6) по следующему правилу з1:

$$\frac{\partial}{\partial t} \to cu_i\frac{\partial}{\partial x_i} = \gamma\left[(\mathbf{u}\boldsymbol{v}) + \frac{\partial}{\partial t}\right]$$

$$\boldsymbol{\nabla} \to \boldsymbol{\nabla} + \frac{\mathbf{u}}{u^2}\gamma\left[(1-\nu)(\mathbf{u}\boldsymbol{\nabla}) + \beta^2\frac{\partial}{\partial t}\right] +$$

ғде принято обозпачение

$$\theta = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad \beta = \frac{u}{c}.$$

Здесь i в дальнейшем мы предполагаем, что все поля могут быть разлонены по волпам вида exp $[i(\mathbf{kr} - \omega t)]$.

Из приведенных соотношений вытекает одно любопытное с.тедствне. Предполоним, что в системе покоя среда имела тодлько времепню дисперсию. Это 0значает, что ε и μВ(4.6) аависели только от аргумента $\partial/\partial t$:

$$\varepsilon = \varepsilon\left(i\frac{\partial}{\partial t}\right), \mu = \mu\left(i\frac{\partial}{\partial t}\right).$$

В фурье-представлении это соответствует тому случаґо, когда ε и μ зависят тольґо от частоты волны ω и не зависят от волнового вектора k. Если такая среда перемещается со скоростью и, в аргументах ε п μ следует проиавести замену по формуле (4.7), в реаультате чего диэлектрическая и маґнитная проницаемости двпэущейся среды будут иметь вид

$$\varepsilon = \varepsilon\left[i\gamma\frac{\partial}{\partial t} + i\gamma(\mathbf{u}\nabla)\right], \mu = \mu\left[i\gamma\frac{\partial}{\partial t} + i\gamma(\mathbf{u}\nabla)\right].$$

Появление в аргументе производных по пространственным координатам означает, что в движущейся среде появилась пространственная дисперсия. Таким образом, если в покоящейся среде в ряде случаев можно не учитывать пространственную дисперсию, в движущейся среде учет пространственной дисперсии принципиально необходим. Физическая причина этого заключается в следующем. Пространственная дисперсия возникает при нелокальной связи между полем и индукцией, когда, например, значепие индукции в данной точке пространства определяется значениями поля в некоторой области, окружающей данную точку, а не только в той же самой точке. В движущейся среде такая нелокальпость возникает всегда из-за увлечения поля средой. Грубо говоря, значение поля в данной точке движущейся среды связано со значением поля в точке, которая находится «выше по течению». Пространственную дисперсию такого вида можно определить как конвективную пространственную дисперсию.

Рассмотрим случай, когда поле в среде описывается волнами вида exp$[(i(\mathbf{kr} - \omega t)]$. Тогда аргументы ε и μ в (4.10) будут выражаться через частоту ω й волновой вектор $\mathbf{k}$:

$$\varepsilon = \varepsilon\left(\frac{\omega - \mathbf{ku}}{\sqrt{1-(u^2/c^2)}}\right), \quad \mu = \mu\left(\frac{\omega - \mathbf{ku}}{\sqrt{1-(u^2/c^2)}}\right).$$

Отсюда видно, что значения ε и μ зависят от направления распространения волны по отнотению к нацравлению движения среды. Движение нарушает изотропию среды.

Анизотропия вызывается не только указапной выше причиной, но также и тензорним характером связи между амшлитудами подей и индукцией в движущейся среде. Последнее обстоятельство обусловлено специфическим видом материальных уравнений (1.2) в движудейся изотропной среде.

Решение уравнений для потенциалов в движущейся среде

Мы рассмотрим решение уравнения для потепциалов на примере урав нения (3.9). Разложим потенциалы и токи в интегралы Фурье по всем частотам ω и волновым векторам $\mathbf{k}$:

$$A_\omega(\mathbf{r},t) = \int d\mathbf{k} \int d\omega A_\alpha(\omega,\mathbf{k}) \exp[i(\mathbf{kr}-\omega t)],$$

$$j_i(\mathbf{r},t) = \int d\mathbf{k} \int d\omega j_i(\omega,\mathbf{k}) \exp[i(\mathbf{kr}-\omega t)]$$

тде интегрирование ведется в бесконечных пределах. Подстановка этих разложений в систему (3.9) позволяет выразить компоненты Фурье четырехмерного потенциала $A_\alpha(\omega,\mathbf{k})$ череа компоненту Фурье токов $j_i(\omega,\mathbf{k})$[26]:

$$A_\alpha(\omega,\mathbf{k}) = \frac{4\pi\mu(\omega,\mathbf{k})}{c} \frac{\{\delta_{\alpha i} + [\boldsymbol{k}/(1+x)]u_\alpha u_i\}\, j_i(\omega,\mathbf{k})}{\mathbf{k}^2 - (\omega^2/c^2) - \kappa(\omega,\mathbf{k})\gamma^2\sigma^{-2}(\omega-\mathbf{ku})^2}.$$

Напомним, что в данной формуле $x(\omega,\mathbf{k}) = \varepsilon(\omega,\mathbf{k})\mu(\omega,\mathbf{k}) - \mathbf{1}$, а $\gamma^{-2} = 1 - (u^2/c^2)$

Если в среде отсутствуют токи и заряды, то, как нетрудно видеть из формул (5.2), числитель выражений для $A_\alpha(\omega,\mathbf{k})$ обращается в нуль. В этом случае $A_\alpha(\omega,\mathbf{k})$ отличны от нуля только при выполнении условия [26]

$$\Delta(\omega,\mathbf{k}) = \mathbf{k}^2 - \left(\omega^2/c^2\right) - \varkappa(\omega,\mathbf{k})\gamma^2 c^{-2}(\omega-\mathbf{ku})^2 = 0.$$

Уравнение (5.3) определяет, таким образом, закон распространения свободных электромагнитных волн в движущейся среде. Это уравнение может быть такге получено с помощью преобразования Jоренца дисперсионного ураввения

$$\mathbf{k}^2 - \varepsilon\mu\frac{\omega^2}{c^2} = 0$$

для покоящейся среды. Действительпо, запишем (5.4) в виде

$$\left(\mathbf{k}^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right) - (\varepsilon\mu - 1)\frac{\omega^2}{c^2} = 0.$$

Первые два слагаемых обравуют релятнвистски-инвариантное выражение и не меняются при преобразовании Jоренда. Последнее слагаемое в резудьтате преобразования Jоренца прпобретает тот же вид, что и последнее слагаемое в девой части уравнения (5.3).

Рашенство (5.2) можно занисать в виде где

$$A_\alpha(\omega,\mathbf{k}) = G_{\alpha\beta}(\omega,\mathbf{k}) j_\beta(\omega,\mathbf{k}),$$

- тензор, являющийся фурье-образом тензорной функции Грнна псходного уравнения (3.9). Переходя от равенства (5.6) к соответствующезу равенству в координатном представлениI, получим

$$A_\alpha(\mathbf{r},t) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int G_{\alpha\beta}\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}', t-t'\right) j_\beta\left(\mathbf{r}', t'\right) d\mathbf{r}' dt',$$

где тензор $G_{\alpha\beta}(\mathbf{r}-\mathbf{r}', t-t')$ получается из $G_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{k})$ в (5.7) с помодью обратного преобразовапия Фурье и называется тензорной функцией Грнна. Вид этой функции для ряда частшых случаев (безграншчная среда, огсутствие дисперсии, нерелятивистские скорости, сверхсветовое и досветовое движенпе среды) вычис.тялся в работах [28,33–36].

Аналогичным образом можпо записать выраикение для фурье-компонент $\Pi_{ij}(\omega, \mathbf{k})$ тензорного потенциала Герца Π_{ij}, удовлетворяющего уравпепию (3.12):

$$\Pi_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = -\frac{4\pi\mu}{\Delta(\omega, \mathbf{k})} P_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = G_0(\omega, \mathbf{k}) P_{ij}(\omega, \mathbf{k}),$$

где $G_0(\omega, \mathbf{k}) - \phi$ фрье-компонента функции Грина уравнения (3.12). Jегко видеть, что в данпом случае функция Грина является скалярной величиной. Переходя в равепстве (5.9) к координатному п временнОму представлению, аналогично (5.8) получаем

$$\Pi_{ij}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int G_0(\mathbf{r}-\mathbf{r}', t-t') P_{ij}(\mathbf{r}', t') \, d\mathbf{r}' dt',$$

где $G_0(\mathbf{r}-\mathbf{r}', t-t')$ получается лз $G_0(\omega, \mathbf{k})$ обратным фурье-преобразованием.

Тензорная фупкция Грина $G_{\alpha\beta}$ связана со скалярной функцией Грина G_0 соотнотением

$$G_{\alpha\beta}(\omega, \mathbf{k}) = \frac{1}{c}\left(\delta_{\alpha\beta} + \frac{x}{1-x} u_\alpha u_\beta\right) G_0(\omega, \mathbf{k}).$$

В этом легко убедиться, сравнивая равенства (5.7) и (5.9). В случае, когда в среде нет дисперсии, из соотношения (5.11) следует, что

$$G_{a\beta}(\mathbf{r}-\mathbf{r}', t-t') = c^{-1}\left(\delta_{\alpha\beta} + \frac{x}{1+x} u_\alpha u_\beta\right) G_0(\mathbf{r}-\mathbf{r}', t-t').$$

25.2.2 Electrodynamics of moving media according to Bolotovek, Stolyarov 2

Принцип излучения в электродинамике движущихся сред

Запишем выражение для скалярпой функции Грина G_0 в координатном пространстве:

$$G_0(\mathbf{r}, t) = 4\pi \int \frac{\mu(\omega, \mathbf{k}) \exp[\imath(\mathbf{kr} - \omega t)]}{\Delta(\omega, \mathbf{k})} d\mathbf{k} d\omega =$$
$$= 4\pi \int \frac{\mu(\omega, \mathbf{k}) \exp[i(\mathbf{kr} - \omega t)] d\mathbf{k} d\omega}{\mathbf{k}^2 - (\omega^2/c^2) - x(\omega, \mathbf{k}) \left[(\omega - \mathbf{ku})^2 / (c^2 - u^2)\right]}.$$

Иятегрирование по k и ω проводится в бесконечнмх пределах. Функция Грина $G_0(\mathbf{r}, t)$, определяемая выранением (6.1), является формальньм решением уравнения

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_h^2} - * \left(u_h \frac{\partial}{\partial x_h}\right)^2\right] G_0(\mathbf{r}, t) = 4\pi\mu(2\pi)^4 \delta(\mathbf{r})\delta(t)$$

7.

Свободные волны в движущейся среде

584

Функция Грина в движущейся среде без дисперсии

Для движущейся среды, не обладающей дисперсией, функция Грина (6.1) может быть вычислена точно. Введем цилиндрическую систему координат, ось z которой паправлена по скорости переноса среды. Компоненту волнового вектора k по оси z обознатим через k_z, а его проекцию на плоскость, перпендикулярную к оси z, - через k_ρ. Аналогичные проекции радиуса-вектора $\mathbf{r}$ обозначим соответственно через z и ρ. Проводя в (6.1) интегрирование по азимутальному углу между векторами $\mathbf{k}_\rho$ и $\boldsymbol{\rho}$, получим

$$G_0(\mathbf{r},t)=8\pi^2\mu\int\frac{J_0\left(k_\rho\rho\right)\exp\left[t\left(k_z z-\omega t\right)\right]k_\rho dk_\rho dk_z d\omega}{k_\rho^2+\frac{\varepsilon\mu-\beta^2}{1-\beta^2}\frac{\omega^2}{c^2}+2\frac{\varepsilon\mu-1}{1-\beta^2}\beta\frac{\omega}{c}k_z+\frac{1-\varepsilon\mu\beta^2}{1-\beta^2}k_z^3},$$

где $J_0\left(k_\rho\rho\right)$ - функция Бесселя первого рода нудевого порядка, а $\beta=u/c$. С помощью известной формулы [45])K_0 - функция Макдональда) интетрал (8.1) приводится к виду

$$G_0(\mathbf{r},t)=8\pi^2\mu\int K_0\left(\gamma\rho\sqrt{\left(\beta^2-\varepsilon\mu\right)\frac{\omega^2}{c^2}+2(\varepsilon\mu-1)\beta\frac{\omega}{c}k_z-\left(\beta^2\varepsilon\mu-1\right)k_z^2}\right)\times$$
$$\times\exp\left[i\left(k_z z-\omega t\right)\right]dk_z d\omega$$

где $\gamma^{-2}=1-\beta^2,\beta=u/c$. При этом пеобходимо выбирать такую ветвь аргумента функции K_0, чтобы было

$$\mathrm{Re}\sqrt{\left(\beta^2-\varepsilon\mu\right)\frac{\omega^2}{c^2}+2(\varepsilon\mu-1)\beta k_z\frac{\omega}{c}-\left(\beta^2\varepsilon\mu-1\right)k_z^2}>0.$$

это требование эквивалентно шринципу излучения, сформулированному в виде (6.3).

Представление функции Грина в виде раз.ожения (8.3) оказывается удобным для аадач с цилиндрической симметрией. Вычисление интеграла в (8.3) удобно провести, введя вместо ω новую переменную

$$\omega'=\omega-\frac{(\varepsilon\mu-1)\beta ck_2}{\varepsilon\mu-\beta^2}.$$

Тогда формула (8.3) запишется в виде

$$G_0(\mathbf{r},t)=4\pi^3\mu i\int H_0^{(1)}\left(\rho\sqrt{\frac{\varepsilon\mu-\beta^2}{c^2\left(1-\beta^2\right)}\omega'^2-\varepsilon\mu\frac{1-\beta^2}{\varepsilon\mu-\beta^2}k_z^2}\right)\times$$
$$\times\exp\left(-i\omega' t\right)\exp\left[ik_z\left(z-\frac{\varepsilon\mu-1}{\varepsilon\mu-\beta^2}ut\right)\right]dk_z d\omega',$$

где $H_0^{(1)}-\phi$ ункция Ганкеля. Здесь мы воспользовались известным соотношением из теории бесселевых функций [46]

$$K_0(z)=\frac{\pi i}{2}H_0^{()}(z).$$

Естественно, что в этом случае условие (8.4) удобно записать несколько иначе:

$$\mathrm{Im}\sqrt{\frac{\varepsilon\mu-\beta^2}{c^2\left(1-\beta^2\right)}\omega'^2-\varepsilon\mu\frac{1-\beta^2}{\varepsilon\mu-\beta^2}k_z^*}>0.$$

Проведя в формуле (8.6) интегрирование по переменной k_z с помощью формулы [48]

$$\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itx}H_0^{(1)}\left(r\sqrt{\alpha^2-t^2}\right)dt=-2i\frac{\exp\left(i\alpha\sqrt{r^2+x^2}\right)}{\sqrt{r^2+x^2}}$$
$$\left(\mathrm{Im}\sqrt{\alpha^2-t^2}>0,\quad\mathrm{Im}\,\alpha>0\right),$$

получим следующее выражение для функции Грина:

$$G_0(\mathbf{r},t)=8\pi^3\mu\left[\rho^2\frac{\varepsilon\mu\left(1-\beta^2\right)}{\varepsilon\mu-\beta^2}+\left(z-\frac{\varepsilon\mu-1}{\varepsilon\mu-\beta^2}ut\right)^2\right]^{-1/2}\times$$
$$\times\int\limits_{-\infty}^{+\infty}d\omega'\exp\left\{-i\omega'\left[t-\frac{\left(\varepsilon\mu-\beta^2\right)c^{-1}}{\left(1-\beta^2\right)}\sqrt{\varepsilon\mu}\sqrt{\rho^2\frac{\varepsilon\mu\left(1-\beta^2\right)}{\varepsilon\mu-\beta^2}+\left(z-\frac{\varepsilon\mu-1}{\varepsilon\mu-\beta^2}ut\right)^2}\right]\right\}.$$

Ивтегрируя по $d\omega'$, получаем окончательное выражение для функции Грина в среде, движущейся со скоростью и вдоль оси z:

$$G_0(\mathbf{r},t)=16\pi\pi^4\mu\left[\rho^2\frac{\varepsilon\mu\left(1-\beta^2\right)}{\varepsilon\mu-\beta^2}+\left(z-\frac{\varepsilon\mu-1}{\varepsilon\mu-\beta^2}ut\right)^2\right]^{-1/2}\times$$
$$\times\delta\left(t-\frac{1}{c}\frac{\varepsilon\mu-\beta^2}{\left(1-\beta^2\right)\sqrt{\varepsilon\mu}}\sqrt{\rho^2\frac{\varepsilon\mu\left(1-\beta^2\right)}{\varepsilon\mu-\beta^2}+\left(z-\frac{\varepsilon\mu-1}{\varepsilon\mu-\beta^2}ut\right)^2}\right).$$

Это выражение другим путем подучил Комптон [3].

Как видно из решения (8.10), функция Грина отлична ог нудя только для тех значений переменных ρ,z и t, для которых аргумент &-функции обращаетея в дуль. При этом в соответствии с принципом излучения (6.3) в решении (8.10) следует учитывать лишь положительные значения времени t (при $t<0\quad G_0(\mathbf{r},t)\equiv 0$). вика, расположенного в начале координат $\mathbf{r}=0$ и включенного в момент времени $t=0$.

Если источник расположен в точке $\mathbf{r}_0$ и включается в момент времени t_0, то аргументами функций Грина будут величины $(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)$ и $(t-t_0)$, и мы соответстненно получим $G\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0,t-t_0\right)$, где $(\mathbf{r}_0,t_0)$ - координаты источника, а $(\mathbf{r},t)$ - координаты точкй наблюдения.

Функдия $G\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0,t-t_0\right)$ обладает следующим свойством симметрии, которое можно рассматривать как обобщеение теоремы взаимности *) на случай движущихся сред. Если поменять местами точку наблюдения $\mathbf{r}$ и точку $\mathbf{r}_0$, где расположен источник, и одновременно изменить знак скорости среды (т. е. перейти к рассмотрению среды, движущейся с той же скоростью в противоположном направленин), то функция Грина останется без пзменения:

$$G_0\left(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0,t-t_0,\mathbf{u}\right)=G_0\left(\mathbf{r}_0-\mathbf{r},t-t_0,-\mathbf{u}\right).$$

При $\beta=u/c=0$ или при $\varepsilon\mu=1$ функция Грина (8.10) переходит в хорошо пзвестное выражение для функции Грина в покоящейся среде без дисперсии:

$$G_0(\mathbf{r},t)|_{\mathrm{u}=0}=\frac{16\pi^4\mu}{R}\delta\left(t-\frac{R}{c/\sqrt{\varepsilon\mu}}\right),$$

где $R=\sqrt{\rho^2+z^2}$ есть расстояние от точки источника до точки наблюдения. С помощью соотнопения

$$\delta(f(t))=\sum_8\frac{\delta\left(t-t_8\right)}{\left|f'\left(t_B\right)\right|},$$

где $f'(t)=df/dt$, а t_s-s-корень уравнения $f(t)=0$, Функцию Грина (8.10) можно преобразовать к более удобному внду:

$$G_0(\mathbf{r},t)=16\pi^4\mu\frac{(1/2)\left(1+\operatorname{sgn}t_1\right)\delta\left(t-t_1\right)+(1/2)\left(1+\operatorname{sgn}t_2\right)\delta\left(t-t_2\right)}{\sqrt{z^2+\left[\left(1-\varepsilon\mu\beta^2\right)/\left(1-\beta^2\right)\right]\rho^2}},$$

где

$$t_{1,2} = \frac{1}{c}\frac{-(\varepsilon\mu-1)\beta z \pm \sqrt{\varepsilon\mu}\,(1-\beta^2)\,\sqrt{z^2+\left[\left(1-\varepsilon\mu\beta^2\right)/\left(1-\beta^2\right)\right]\rho^2}}{1-\varepsilon\mu\beta^2}$$

- те значения времени t, для которых аргумент δ-функдии в (8.10) обращается в нуль, а $\operatorname{sgn} t_{1,2} - 3$ наковая функция (см. $(6,6)$). Естественно, что в выражениях (8.12) и (8.13) следует учитывать только действитедьные значения величин t_1 и t_2.

Сомножители перед δ-функциями в (8.12) вида $\left(1+\operatorname{sgn} t_{1,2}\right)/2$ ввыключают?-функцию, у которой значенне t_1 (или t_2) становнтся отрицательным.

Случаи разных скоростей среды

Функдия Грина (8.12) зашисывается по-разному, в зависимости от того, какова скорость перемещения среды и по сравнению с фазовой скоростью света $c/\sqrt{\varepsilon\mu}$. Рассмотрим три случая:

1. Скорость движения среды меньше фазовой скорости света в покоятейся среде $(u < c/\sqrt{\varepsilon\mu})$**.**

В этом случае пз двух порпей $t_{1,2}$ в (8.13) норень t_1 оказывается положптельным, а корень t_2 отрицательньм. Поэтому Функдия Грина принимает вид

$$G_0(\mathbf{r},t) = 16\pi^4\mu\delta\left(t-t_0\right)\left(z^2+\frac{1-\varepsilon\mu\beta^2}{1-\beta^2}\rho^2\right)^{-1/2},$$

где

$$t_1 = \frac{1}{c}\frac{-(\varepsilon\mu-1)\beta z + \sqrt{\varepsilon\mu}\,(1-\beta^2)\,\sqrt{z^2+\left[\left(1-\varepsilon\mu\beta^2\right)/\left(1-\beta^2\right)\right]\rho^2}}{1-\varepsilon\mu\beta^2}.$$

Функция Грина (8.14) отлична от нуля на поверхности, уравнением которой в каждый фиксировавный момент времени t лвляется

$$t = \frac{1}{c}\frac{\varepsilon\mu-\beta^2}{\sqrt{\varepsilon\mu}\,(1-\beta^2)}\sqrt{\rho^2\frac{\varepsilon\mu\,(1-\beta^2)}{\varepsilon\mu-\beta^2}+\left(z-\frac{\varepsilon\mu-1}{\varepsilon\mu-\beta^2}ut\right)^2}.$$

Это — эллипсоид вращения, ось симметрии которого совпадает со скоро стью движения среды (рис. 3, а). Уравнение эллиисонда имеет вид

$$\frac{\rho^2}{a^2}+\frac{\left(z-z_0\right)^2}{b2} = -1,$$

где полуоси эллипса равны $a = ct\sqrt{\frac{1-\beta^2}{\varepsilon\mu-\beta^2}}, b = \frac{ct\sqrt{\varepsilon\mu}\left(1-\beta^2\right)}{\varepsilon\mu-\beta^2}$ (при $\varepsilon\mu > 1 a > b$), а положение центра эллипса z_0 определяется соотношением $z_0 = \frac{ut(z\mu-1)}{\varepsilon_\mu-\beta^2}$.

Как видно из приведенных формул, поверхность, на которой функция Грина отлична от нуля, расширяется в пространстве, а центр ее перемещается в направлении движения среды со скоростью

$$u_0 = \frac{dz_0}{dt} = \frac{u(\varepsilon\mu-1)}{\varepsilon\mu-\beta^2}.$$

Эта скорость отлична от скорости перемещения среды и. При нерелятивистских скоростях среды

$$u_0 = u\left(1-\frac{1}{\varepsilon\mu}\right)$$

т е скорость, с ьоторой «сносится» центр эл.типсоида, равна скорости перемещения среды, умноженной на коэффициент увлечения Френеля (см. формулы (7.16))

Поверхность, несущая сигнал расширяется во все стороны от точки, где находится единичный мтновепный точечный источник ($\rho = 0, z = 0,\ t = 0$, хотя скорость этого расширепия, как видно из формул (815) - (8 18) и из рис $3, a$, различна в разных направлепиях. Поэтому рапо или поздно сигнал дойдет до наблюдателя, находящегося в любой точке пространства. Иными словами, иабтюдатель, который до прихода сигнала находился вне поверхности, после приема сигнала окажется внутри этой раслширяющейся поверхности и в дальнейшем будет всегда ославаться внутри нее.

(???)

2. Скорость движения среды больше фазовой сьорости света в системе покоя среды ($u > c/\sqrt{\varepsilon\mu}$)

В этом случле в области $z > 0$ оба корня, t_1 и t_2, в формуле (8 13) потокительны и функция Грина имеет вид

$$G_0(\mathbf{r}, t) = 16\pi^4\mu\left[\delta\left(t - t_1\right) + \delta\left(t - t_2\right)\right]\left(z^2 - \frac{\varepsilon\mu\beta^2 - 1}{1 - \beta^2}\rho^2\right)^{-1/2}$$

где

$$ct_1 = \left[(\varepsilon\mu - 1)\beta z - \sqrt{\varepsilon\mu}\left(1 - \beta^2\right)\sqrt{z^2 - \frac{\varepsilon\mu\beta^2 - 1}{1 - \beta^2}\rho^2}\right]\left(\varepsilon\mu\beta^2 - 1\right)^{-1},$$

$$ct_2 = \left[(\varepsilon\mu - 1)\beta z + \sqrt{\varepsilon\mu}\left(1 - \beta^2\right)\sqrt{z^2 - \frac{\varepsilon\mu\beta^2 - 1}{1 - \beta^2}\rho^2}\right]\left(\varepsilon\mu\beta^2 - 1\right)^{-1}$$

В области $z < 0$ оба корня t_1 з в формулах (8.22) становятся отрицательными и, следовательно, функция Грина $G_0(\mathbf{r}, t)$ тождественно обращается в нуль.

Функция $G_0(\mathbf{r}, t)$ тождественно обращается в нуль также в той области пространства, где

$$z^2 < \frac{\varepsilon\mu\beta^2 - 1}{1 - \beta^2}\rho^2,$$

так как в этой области значения t_1 и t_2 в формуле (8.22) становятся комплексными

При сверхсветовом движении среды, как и в досветовом случае, функция Грипа отлична от нуля на поверхности, уравнение которой в фиксированный момент времени имеет вид (8 15). Эта поверхность является эллипсоидом вращения, ось которого направлена по скорости движения среды. Уравнение этого эллипсоида по-прежнему имеет вид (8 16). Однако распространение сигнала в сверхсветовом случае существенно отличается от распространения сигнала в среде, движущейся со скоростью, меньшей фазовой скорости света Действительно, в досветовом случае источник всегда находится внутри расширяющейся поверхности, несущей сигнал. Это видно из того факта, что при $\varepsilon\mu\beta^2 < 1$ тина ма той полуоси эллипсоида b в выражении (8 17) бочьше, чем координатd z_0 центра эллипсоида, определяемая виражением (8 18)

В сверхсветовом случае ($\varepsilon\mu\beta^2 > 1$) длипа b малой полуоси эллипсоида врацения становится меньше, чем расстояние z_0 центра эллипсоида от ндчала координат В этом слу чае источник всегда находится вне поверхности, на которой функция Гргнд отлгчна от нуля (см рис 3, в) Вся эта поверхность «сносится» движущейся средой так, что она оказывается по одну сторону от источника, т. е в области $z > 0$ (напомнич, что скорость среды направлена по оси z. Иа уравнения э тлипсоида (8.16) видно, что на оси z (при

$\rho = 0$) поверхность занимает область значений z, определяемую неравенством

$$z_0 - b < z < z_0 + b.$$

В случае сверхсветового движения среды обе границы неравенства положительны и растут со временем.

Рассмотрим положение расширяющейся поверхности в несколько последовательных моментов времени (см. рис. 3,8). Все они расположены внутри конуса

$$z = \sqrt{\frac{\varepsilon\mu\beta^2 - 1}{1 - \beta^2}}\rho = \sqrt{\frac{z\mu\beta^2 - 1}{1 - \beta^2}}\sqrt{x^2 + y^2},$$

угол раствора которого равен (см. формулу (7.13))

$$\operatorname{tg}\theta_0 = \sqrt{\frac{1 - \beta^2}{\varepsilon\mu\beta^2 - 1}} = \operatorname{tg}\vartheta_g.$$

Образующие этого конуса являются касательными ко всем поверхностям семейства (8.16).

Пусть теперь наблюдатель расположен в некоторой точке P с координатами $\left(z, \rho = \sqrt{x^2 + y^2}\right)$, и в момент времени $t = 0$ в начале координат «вспыхивает» мгновенный источник. Если наблюдатель находится вне конуса (8.24), то поле источника для него все время тождественно равно нулю. Если же выбранная точка находится внутри конуса (8.24), т. е. в области

$$\rho < \sqrt{\frac{1 - \beta^2}{\varepsilon\mu\beta^2 - 1}}z,$$

то сигнал от мгновенного источника дважды пройдет через эту точку. Сначала в момент времени t_1 передняя часть поверхности пройдет через точку P, а затем в момент времени $t_2 > t_1$ задняя часть поверхности пройдет через точку P. Эта картина изображена на рис. $3, \varepsilon$.

Мы видим, что в сверхсветовом случае сигнал от мгновенного точечного источника, расположенного в начале координат, воспринимается в точке наблюдения P как два разделенных во времени сигнала. ВременнОй интервал $\Delta t = (t_2 - t_1)$ между этими сигналами определяется с помощью формул (8.22),

$$\Delta t = t_2 - t_1 = 2\frac{\sqrt{\varepsilon\mu}\,(1 - \beta^2)}{\varepsilon\mu\beta^2 - 1}\frac{1}{c}\sqrt{z^2 - \frac{\varepsilon\mu\beta^2 - 1}{1 - \beta^2}\rho^2}.$$

Из этой формулы видно, что только на поверхности конуса (8.24) эти два сигнала «сливаются» в один. Это видно и из рис. 3, е: если точка наблюдения P находится на поверхности конуса, то сигнал проходит через нее только один раз.

3. Скорость движения среды совпадает с фазовой скоростью света в системе покоя среды $(u = c/\sqrt{\varepsilon\mu})$**.**

В этом случае из формул (8.13) в области $z > 0$ можно получить следующие выражения для t_1 и t_2 : ***l***

$$t_1 = \frac{\sqrt{\varepsilon\mu}}{2c!}\left[\left(1 + \frac{1}{\varepsilon\mu}\right)z + \frac{\rho^2}{z}\right], \quad t_2 = \infty.$$

Функция Грина (8.12) в этом случае принимает вид

$$G_0(\mathbf{r},t)=\frac{16\pi^4\mu}{z}\delta\left(t-t_1\right).$$

Поскольку в области $z<0$ величина t_1 в (8.28) становится отрицательной, то в этой области функция Грина тождественно обращается в нуль. Поверхность, на которой функция Грина в выражении (8.29) отлична от нуля, является эллипсоидом вращения вида (8.16), у которого $z_0=b$ (см. рис. 3, б). Это означает, что поверхность эллипсоида расширяется таким образом, что в любой момент времени касается плоскости $z=0$. Точкой касания является начало координат, где расположен точечный источник.

(я хз вообще)

Функция Грина для монохроматических полей

В праптических задачах часто бывает необходимо знать не сами поля, а их спектральные компоненты, соответствующие определенной частоте ω. Для их вычисления полезно знать спектральную компоненту $G_{0,\omega}(\mathbf{r})$ функции Грина $G_0(\mathbf{r},t)$, отвечающую заданному значению частоты ω. Очевидно, функция $G_{0,\omega}(\mathbf{r})$ может быть получена из $G_0(\mathbf{r},t)$ с помощью преобразования Фурье по времени:

$$G_0(\mathbf{r},t)=\int G_{0,\omega}(\mathbf{r})\exp(-i\omega t)d\omega,$$
$$G_{0,\omega}(\mathbf{r})=\frac{1}{2\pi}\int G_0(\mathbf{r},t)\exp(i\omega t)dt.$$

С помощью равенства (9.1) функция $G_{0,\omega}(\mathbf{r})$ может быть вычислена, если в интегральпом выраянении (6.1) для $G_0(\mathbf{r},t)$ провести интегрирование по dk_x,dk_y,dk_z, не вычисляя интеграл по частотам. Однако этот путь является довольно утомительным и для отыскания функции $G_{0,\omega}(\mathbf{r})$ шроще воспользоваться определением (9.2) и найденшым ранее выражением (8.12) для $G_0(\mathbf{r},t)$. Это дает

$$G_{0,\omega}(\mathbf{r})=8\pi^3\mu\left(\frac{1-1\operatorname{sgn}t_1}{2}e^{i\omega t_1}+\frac{1+\frac{1}{\operatorname{sgn}t_2}}{2}e^{i\omega t_2}\right)\left(z^2+\frac{1-\varepsilon\mu\beta^2}{1-\beta^2}\rho^2\right)^{-1/2},$$

где t_1 и $t_2-\phi$ фикции координат, опредеияемые равепством (8.13). Напомним, что если t_1 или t_2 принимают комплексные значения, то соответствующие члены в (9.3) следует считать равными нулю.

Посмотрим, какой вид принимает выражение (9.3) для функции $G_{0,\omega}(\mathbf{r})$ в различных предположениях относительно скорости движения среды. 1) Досветовая слорость перемещения среды, т. е. $u<c/\sqrt{\varepsilon\mu}$. В этом случае

$$G_{0,\omega}(\mathbf{r})=8\pi^3\mu\exp\left(i\omega t_1\right)\left(z^2+\frac{1-\varepsilon\mu\beta^2}{1-\beta^2}\rho^2\right)^{-1/2}=$$
$$=8\pi^3\mu\left(z^2+\tfrac{1-\varepsilon\mu\beta^2}{1-\beta^2}\rho^2\right)^{-1/2}\exp\left[i\tfrac{\omega}{c}\tfrac{\sqrt{\varepsilon\mu}\left(1-\beta^2\right)\sqrt{z^2+[(1-\varepsilon\mu\beta^2)/(1-\beta^2)]\rho^2}-(\varepsilon\mu-1)\beta z}{1-\varepsilon\mu\beta^2}\right].$$

Пример (??)

(я хз, о чем речь?)

Рассмотрим точку, находящуюся на расстоянии R от начала координат, так что

$$z=R\cos\theta,\rho=-R\sin\theta.$$

Подстановюа координат z Iг ρ в виде (9.5) в выражепие (9.4) для функции Грина $G_{0,\omega}(\mathbf{r})$ дает Подстановка координат z iг ρ в виде (9.5) в выражепие (9.4) для функцци Грина $G_{0,\omega}(\mathbf{r})$ дает

$$G_{0,\omega}(\mathbf{r}) = \frac{8\pi^3\mu \exp\left[i(\omega/c)Rn_{\text{эфф}}\left(\theta\right)\right]}{R\sqrt{1-\gamma\beta^2\gamma^2\sin^2\bar{\theta}}},$$

где величина x определена формулой (3.3), γ - формулой (4.8), а «дффективный показатель преломления» $n_{\text{эфф}}\left(\theta\right)$ записывается в виде

Легко убедиться в том, что величина /гЭфф (θ) не равна показателю преломления η (v) движущейся среды в направлении наблюдения θ. Это видно из сравнения с формулой (7.8) для величины 1//г (Ф). Более подробное рассмотрение 4 4 показывает, что величина /гЭфф (θ) действительно совпадает со значением показателя преломления η (O1 ') в некотором направлении V)', не совпадающем с направлением θ. Это направление O1 ' определяется следующим образом. /R Построим поверхность показателей преломления η (O), т. е. в каждом заданном направлении, составляющем угол θ с направлением скорости перемещения среды (ось ξ), будем откладывать от начала координат отрезки, длина которых равна η (O1) (рис. 4). Концы отложенных отрезков лежат на некоторой поверхности, которая в рассматриваемом нами случае является поверхностью вращения с осью симметрии вдоль скорости движения среды и. Полученная таким образом поверхность обладает следующим свойством. Проведем от начала координат отрезок длиной η (θ ') в направлении '. Конец этого отрезка определит некоторую точку поверхности показателя преломления. Через эту точку проведем внешнюю нормаль к поверхности (см., например, рис. 2).

Эта нормаль будет составлять с осью ξ угол θ, отличный от угла θ '. Известно, что если угол Ф' определяет направление фазовой скорости волны в рассматриваемой среде, то направление нормали к поверхности показателя преломления, задаваемое углом θ, определяет направление групповой скорости той же волны. Как показано в 44 , величина гаЭфф (θ) следующим образом связана с показателем преломления:

$$n_{\partial\Phi\Phi}(\theta) = n\left(\vartheta'\right)\cos\left(\theta-\vartheta'\right),$$

где $\hat{\vartheta}'$ - направление фазовой скорости, если направление групповой скорости определяется углом θ. Соотношение (9.8) при заданном угле наблюдения θ представляет собой уравнение относительно угла ϑ'. Как видно из рис. $2, a$, в случае досветовой скорости перемещения среды каждому направлению θ отвечает одна определенная точка поверхности показателя преломления (та, в которой внешняя нормаль к поверхности составляет угол θ со скоростью среды).

В покоящейся изотропной среде направление фазовой и групповой скоростей совпадают друг с другом и формула (9.7) дает

$$n_{\partial\Phi\Phi}(\theta)|_{\beta=0} = \sqrt{\varepsilon\mu}.$$

Функция Грина $G_{0,\omega}(\mathbf{r})$, определяемая формулой (9.6), представляет собой волну, расходящуюся во все стороны от начала координат. Это следует из того, что величина $n_{\Phi}\left(\theta\right)R/c$ равна величине t_1 в (8.14), т. е. всегда положительна. 2) Сверхсветовой случай движения среды [33], т. е. случай $u > c/\sqrt{\varepsilon\mu}$. В этом случае величины t_1 и t_2 положительны и поэтому в формуле (9.3)

Функция Грина в движущейся среде с дисперсией

Приложение. Поля простейших источников в движущейся среде

601

25.2.3 Electrodynamics of moving media according to Bolotovek, Stolyarov 3

а)

Поле покоящегося точечного заряда в движущейся среде

(601). б)

Поле покоящегося точечного магнитного диполя

(604). в)

Потенциалы Льенара-Бихерта в движущейся среде

26 Peculiar Forms of Electrodynamics for Theoreticians

(!!!! they will be mostly in the note on the field theory!!!)

26.1 Complex Form of Classical and Quantum Electrodynamics by Kryuchkov et al.

Abstract

We consider a complex covariant form of the macroscopic Maxwell equations, in a moving medium or at rest, following the original ideas of Minkowski. A compact, Lorentz invariant, derivation of the energy-momentum tensor and the corresponding differential balance equations are given. Conservation laws and quantization of the electromagnetic field will be discussed in this covariant approach elsewhere.

26.1.1 Introduction

Although a systematic study of electromagnetic phenomena in media is not possible without methods of quantum mechanics, statistical physics and kinetics, in practice a standard mathematical model based on phenomenological Maxwell's equations provides a good approximation to many important problems. As is well-known, one should be able to obtain the electromagnetic laws for continuous media from those for the interaction of fields and point particles [18], [34], [42], [51], [57], [66], [91]. As a result of the hard work of several generations of researchers and engineers, the classical electrodynamics, especially in its current complex covariant form, undoubtedly satisfies Dirac's criteria of mathematical beauty[1], being a state of the art mathematical description of nature.

In macroscopic electrodynamics, the volume (mechanical or ponderomotive) forces, acting on a medium, and the corresponding energy density and energy flux are introduced with the help of the energy-momentum tensors and differential balance relations [24], [31], [51], [72], [86], [91]. These forces occur in the equations of motion for a medium or individual charges and, in principle, they can be experimentally tested [32], [69], [74], [92] (see also the references therein). But interpretation of the results should depend on the accepted model of the interaction between the matter and radiation.

In this methodological note, we discuss a complex version of Minkowski's phenomenological electrodynamics (at rest or in a moving medium) without assuming any particular form

[1] During a seminar at Moscow State University on October 3, 1956, when asked to summarize his philosophy of physics, Dirac wrote the above cited sentence on the blackboard in capital letters [25], [38], [88].

of material equations as far as possible. Lorentz invariance of the corresponding differential balance equations is emphasized in view of long-standing uncertainties about the electromagnetic stresses and momentum density, the so-called "Abraham-Minkowski controversy" (see, for example, [5], [15], [19], [22], [24], [30], [31], [32], [34], [36], [51], [62], [63], [67], [68], [69], [72], [73], [74], [78], [80], [85], [89], [92], [93], [94], [95] and the references therein).

The paper is organized as follows. In sections 2 to 4, we describe the 3D-complex version of Maxwell's equations and derive the corresponding differential balance density laws for the electromagnetic fields. Their covariant versions are given in sections 5 to 9. The case of a uniformly moving medium is discussed in section 10 and complex Lagrangians are introduced in section 11. Some useful tools are collected in appendices A to C for the reader's benefit.

26.1.2 Maxwell's Equations in 3D-Complex Form

Traditionally, the macroscopic Maxwell equations in a fixed frame of reference are given by

$$\operatorname{curl}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \ \text{(Faraday)}, \qquad \operatorname{div}\mathbf{B} = 0 \ \text{(no magnetic charge)} \tag{26.1}$$

$$\operatorname{curl}\mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_{\text{free}} \ \text{(Biot\&Savart)}, \quad \operatorname{div}\mathbf{D} = 4\pi\rho_{\text{free}} \ \text{(Coulomb)}\,[2]. \tag{26.2}$$

Here, $\mathbf{E}$ is the electric field, $\mathbf{D}$ is the displacement field; $\mathbf{H}$ is the magnetic field, $\mathbf{B}$ is the induction field. These equations, which are obtained by averaging of microscopic Maxwell's equations in the vacuum, provide a good mathematical description of electromagnetic phenomena in various media, when complemented by the corresponding material equations. In the simplest case of an isotropic medium at rest, one usually has

$$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}, \qquad \mathbf{B} = \mu\mathbf{H}, \qquad \mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}, \tag{26.3}$$

where ε is the dielectric constant, μ is the magnetic permeability, and σ describes the conductivity of the medium (see, for example, [1], [6], [7], [15], [16], [18], [21], [23], [28], [34], [37], [51], [57], [70], [72], [82], [86], [88], [90], [91] for fundamentals of classical electrodynamics).

Introduction of two complex fields

$$\mathbf{F} = \mathbf{E} + i\mathbf{H}, \qquad \mathbf{G} = \mathbf{D} + i\mathbf{B} \tag{26.4}$$

allows one to rewrite the phenomenological Maxwell equations in the following compact form

$$\frac{i}{c}\left(\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial t} + 4\pi\mathbf{j}\right) = \operatorname{curl}\mathbf{F}, \qquad \mathbf{j} = \mathbf{j}^*, \tag{26.5}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{G} = 4\pi\rho, \qquad \rho = \rho^*, \tag{26.6}$$

where the asterisk stands for complex conjugation (see also [6], [47] and [79]). As we shall demonstrate, different complex forms of Maxwell's equations are particularly convenient for study of the corresponding "energy-momentum" balance equations for the electromagnetic fields in the presence of the "free" charges and currents in a medium.

[2] From this point, we shall write $\rho_{\text{free}} = \rho$ and $\mathbf{j}_{\text{free}} = \mathbf{j}$. A detailed analysis of electromagnetic laws for continuous media from those for point particles is given in [34] (statistical description of material media).

26.1.3 Hertz Symmetric Stress Tensor

We begin from a complex $3D$-interpretation of the traditional symmetric energy-momentum tensor [72]. By definition,

$$T_{pq} = \frac{1}{16\pi}\left[F_p G_q^* + F_p^* G_q + F_q G_p^* + F_q^* G_p - \delta_{pq}\left(\mathbf{F}\cdot\mathbf{G}^* + \mathbf{F}^*\cdot\mathbf{G}\right)\right] = T_{qp} \qquad (p,q=1,2,3) \tag{26.7}$$

and the corresponding "momentum" balance equation,

$$\begin{aligned}&\left(\rho\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{j}\times\mathbf{B}\right)_p + \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{4\pi c}\left(\mathbf{D}\times\mathbf{B}\right)\right]_p \\ &= \frac{\partial T_{pq}}{\partial x_q} + \frac{1}{16\pi}\left[\operatorname{curl}\left(\mathbf{F}\times\mathbf{G}^* + \mathbf{F}^*\times\mathbf{G}\right)\right]_p \\ &\quad + \frac{1}{16\pi}\left(F_q\frac{\partial G_q^*}{\partial x_p} - G_q\frac{\partial F_q^*}{\partial x_p} + F_q^*\frac{\partial G_q}{\partial x_p} - G_q^*\frac{\partial F_q}{\partial x_p}\right),\end{aligned} \tag{26.8}$$

can be obtained from Maxwell's equations (26.5)–(26.6) as a result of elementary but rather tedious vector calculus calculations usually omitted in textbooks. (We use Einstein summation convention over any two repeated indices unless otherwise stated. In this paper, Greek indices run from 0 to 3, while Latin indices may have values from 1 to 3 inclusive.)

Proof. Indeed, in a $3D$-complex form,

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial x_q}\left(F_p G_q^* + F_q G_p^* - \delta_{pq}\mathbf{F}\cdot\mathbf{G}^*\right) \\ &= \frac{\partial F_p}{\partial x_q}G_q^* + F_p\frac{\partial G_q^*}{\partial x_q} + \frac{\partial F_q}{\partial x_q}G_p^* + F_q\frac{\partial G_p^*}{\partial x_q} - \frac{\partial}{\partial x_p}\left(F_q G_q^*\right) \\ &= F_q\left(\frac{\partial G_p^*}{\partial x_q} - \frac{\partial G_q^*}{\partial x_p}\right) + \left(\frac{\partial F_p}{\partial x_q} - \frac{\partial F_q}{\partial x_p}\right)G_q^* \\ &\quad + F_p\operatorname{div}\mathbf{G}^* + G_p^*\operatorname{div}\mathbf{F} \\ &= F_p\operatorname{div}\mathbf{G}^* - \left(\mathbf{F}\times\operatorname{curl}\mathbf{G}^*\right)_p + G_p^*\operatorname{div}\mathbf{F} - \left(\mathbf{G}^*\times\operatorname{curl}\mathbf{F}\right)_p\end{aligned} \tag{26.9}$$

due to an identity [86]:

$$\left(\mathbf{A}\times\operatorname{curl}\mathbf{B}\right)_p = A_q\left(\frac{\partial B_q}{\partial x_p} - \frac{\partial B_p}{\partial x_q}\right). \tag{26.10}$$

Taking into account the complex conjugate, we derive

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_q}\left[F_p G_q^* + F_p^* G_q + F_q G_p^* + F_q^* G_p - \delta_{pq}\left(\mathbf{F}\cdot\mathbf{G}^* + \mathbf{F}^*\cdot\mathbf{G}\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}\left(\mathbf{F}\operatorname{div}\mathbf{G}^* - \mathbf{G}^*\times\operatorname{curl}\mathbf{F} + \mathbf{F}^*\operatorname{div}\mathbf{G} - \mathbf{G}\times\operatorname{curl}\mathbf{F}^*\right)_p \\ &\quad + \frac{1}{2}\left(\mathbf{G}\operatorname{div}\mathbf{F}^* - \mathbf{F}^*\times\operatorname{curl}\mathbf{G} + \mathbf{G}^*\operatorname{div}\mathbf{F} - \mathbf{F}\times\operatorname{curl}\mathbf{G}^*\right)_p\end{aligned} \tag{26.11}$$

as our first important fact.

On the other hand, in view of Maxwell's equations (26.5)–(26.6), one gets

$$\begin{aligned}&\mathbf{F}\operatorname{div}\mathbf{G}^* - \mathbf{G}^*\times\operatorname{curl}\mathbf{F} \\ &= 4\pi\rho\mathbf{F} + \frac{i}{c}\left(\frac{\partial\mathbf{G}}{\partial t}\times\mathbf{G}^* + 4\pi\mathbf{j}\times\mathbf{G}^*\right)\end{aligned} \tag{26.12}$$

and, with the help of its complex conjugate,

$$\begin{aligned}&\mathbf{F}\,\mathrm{div}\,\mathbf{G}^* - \mathbf{G}^* \times \mathrm{curl}\,\mathbf{F} + \mathbf{F}^*\,\mathrm{div}\,\mathbf{G} - \mathbf{G} \times \mathrm{curl}\,\mathbf{F}^* \\ &\quad = 4\pi\rho\,(\mathbf{F} + \mathbf{F}^*) + \frac{i}{c}\frac{\partial}{\partial t}\,(\mathbf{G} \times \mathbf{G}^*) + \frac{4\pi i}{c}\mathbf{j} \times (\mathbf{G}^* - \mathbf{G})\,,\end{aligned} \tag{26.13}$$

or

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\,(\mathbf{F}\,\mathrm{div}\,\mathbf{G}^* - \mathbf{G}^* \times \mathrm{curl}\,\mathbf{F} + \mathbf{F}^*\,\mathrm{div}\,\mathbf{G} - \mathbf{G} \times \mathrm{curl}\,\mathbf{F}^*) \\ &\quad = 4\pi\left(\rho\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{j} \times \mathbf{B}\right) + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\,(\mathbf{D} \times \mathbf{B})\,,\end{aligned} \tag{26.14}$$

providing the second important fact. (Up to the constant, the first term in the right-hand side represents the density of Lorentz's force acting on the "free" charges and currents in the medium under consideration [85], [86].)

In view of (26.14) and (26.11), we can write

$$\begin{aligned}&4\pi\left(\rho\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{j} \times \mathbf{B}\right)_p + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\,(\mathbf{D} \times \mathbf{B})_p \\ &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_q}\left[F_p G_q^* + F_p^* G_q + F_q G_p^* + F_q^* G_p - \delta_{pq}\,(\mathbf{F}\cdot\mathbf{G}^* + \mathbf{F}^*\cdot\mathbf{G})\right] \\ &\quad - \frac{1}{2}\,(\mathbf{G}\,\mathrm{div}\,\mathbf{F}^* - \mathbf{F}^* \times \mathrm{curl}\,\mathbf{G} + \mathbf{G}^*\,\mathrm{div}\,\mathbf{F} - \mathbf{F} \times \mathrm{curl}\,\mathbf{G}^*)_p \\ &= \frac{1}{4}\frac{\partial}{\partial x_q}\left[F_p G_q^* + F_p^* G_q + F_q G_p^* + F_q^* G_p - \delta_{pq}\,(\mathbf{F}\cdot\mathbf{G}^* + \mathbf{F}^*\cdot\mathbf{G})\right] \\ &\quad - \frac{1}{4}\,(\mathbf{G}\,\mathrm{div}\,\mathbf{F}^* - \mathbf{F}^* \times \mathrm{curl}\,\mathbf{G} + \mathbf{G}^*\,\mathrm{div}\,\mathbf{F} - \mathbf{F} \times \mathrm{curl}\,\mathbf{G}^*)_p \\ &\quad + \frac{1}{4}\,(\mathbf{F}\,\mathrm{div}\,\mathbf{G}^* - \mathbf{G}^* \times \mathrm{curl}\,\mathbf{F} + \mathbf{F}^*\,\mathrm{div}\,\mathbf{G} - \mathbf{G} \times \mathrm{curl}\,\mathbf{F}^*)_p \\ &= 4\pi\frac{\partial T_{pq}}{\partial x_q} + \frac{1}{4}\,(\mathbf{F}\,\mathrm{div}\,\mathbf{G}^* - \mathbf{G}^*\,\mathrm{div}\,\mathbf{F} + \mathbf{F}^*\,\mathrm{div}\,\mathbf{G} - \mathbf{G}\,\mathrm{div}\,\mathbf{F}^*)_p \\ &\quad + \frac{1}{4}\,(\mathbf{F} \times \mathrm{curl}\,\mathbf{G}^* - \mathbf{G}^* \times \mathrm{curl}\,\mathbf{F} + \mathbf{F}^* \times \mathrm{curl}\,\mathbf{G} - \mathbf{G} \times \mathrm{curl}\,\mathbf{F}^*)_p\,.\end{aligned} \tag{26.15}$$

Finally, in the last two lines, one can utilize the following differential vector calculus identity,

$$\begin{aligned}&[\mathbf{A}\,\mathrm{div}\,\mathbf{B} - \mathbf{B}\,\mathrm{div}\,\mathbf{A} + \mathbf{A} \times \mathrm{curl}\,\mathbf{B} - \mathbf{B} \times \mathrm{curl}\,\mathbf{A} - \mathrm{curl}\,(\mathbf{A} \times \mathbf{B})]_p \\ &\quad = A_q\frac{\partial B_q}{\partial x_p} - B_q\frac{\partial A_q}{\partial x_p},\end{aligned} \tag{26.16}$$

see (26.124), with $\mathbf{A} = \mathbf{F}$, $\mathbf{B} = \mathbf{G}^*$ and its complex conjugates, in order to obtain (26.8) and/or (26.22), which completes the proof. (An independent proof will be given in section 7.)

Derivation of the corresponding differential "energy" balance equation is much simpler. By (26.5),

$$\mathbf{F}\cdot\frac{\partial\mathbf{G}^*}{\partial t} + \mathbf{F}^*\cdot\frac{\partial\mathbf{G}}{\partial t} + 4\pi\mathbf{j}\cdot(\mathbf{F} + \mathbf{F}^*) = \frac{c}{i}\,\mathrm{div}\,(\mathbf{F} \times \mathbf{F}^*) \tag{26.17}$$

due to a familiar vector calculus identity (26.120):

$$\mathrm{div}\,(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B}\cdot\mathrm{curl}\,\mathbf{A} - \mathbf{A}\cdot\mathrm{curl}\,\mathbf{B}. \tag{26.18}$$

In a traditional form,

$$\frac{1}{4\pi}\left(\mathbf{E}\cdot\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H}\cdot\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\right) + \mathbf{j}\cdot\mathbf{E} + \mathrm{div}\left(\frac{c}{4\pi}\mathbf{E} \times \mathbf{H}\right) = 0 \tag{26.19}$$

(see, for example, [18], [86]), where one can substitute

$$\mathbf{E}\cdot\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}+\mathbf{H}\cdot\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}+\mathbf{H}\cdot\mathbf{B}\right) \tag{26.20}$$
$$+\frac{1}{2}\left(\mathbf{E}\cdot\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}-\mathbf{D}\cdot\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}+\mathbf{H}\cdot\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}-\mathbf{B}\cdot\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}\right).$$

As a result, $3D$-differential "energy-momentum" balance equations are given by

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}+\mathbf{H}\cdot\mathbf{B}}{8\pi}\right)+\operatorname{div}\left(\frac{c}{4\pi}\mathbf{E}\times\mathbf{H}\right)+\mathbf{j}\cdot\mathbf{E} \tag{26.21}$$
$$+\frac{1}{8\pi}\left(\mathbf{E}\cdot\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}-\mathbf{D}\cdot\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}+\mathbf{H}\cdot\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}-\mathbf{B}\cdot\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}\right)=0$$

and

$$-\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{4\pi c}\left(\mathbf{D}\times\mathbf{B}\right)\right]_p+\frac{\partial T_{pq}}{\partial x_q}-\left(\rho\mathbf{E}+\frac{1}{c}\mathbf{j}\times\mathbf{B}\right)_p \tag{26.22}$$
$$+\frac{1}{8\pi}\left[\operatorname{curl}\left(\mathbf{E}\times\mathbf{D}+\mathbf{H}\times\mathbf{B}\right)\right]_p$$
$$+\frac{1}{8\pi}\left(\mathbf{E}\cdot\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial x_p}-\mathbf{D}\cdot\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial x_p}+\mathbf{H}\cdot\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial x_p}-\mathbf{B}\cdot\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial x_p}\right)=0,$$

respectively (see also [32], [62]). The real form of the symmetric stress tensor (26.7), namely,

$$T_{pq}=\frac{1}{8\pi}\left[E_pD_q+E_qD_p+H_pB_q+H_qB_p\right. \tag{26.23}$$
$$\left.-\delta_{pq}\left(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}+\mathbf{H}\cdot\mathbf{B}\right)\right]\qquad(p,q=1,2,3),$$

is due to Hertz [72].

Equations (26.21)–(26.22) are related to a fundamental concept of conservation of mechanical and electromagnetic energy and momentum. Here, these balance conditions are presented in differential forms in terms of the corresponding local field densities. They can be integrated over a given volume in $\mathbb{R}^3$ in order to obtain, in a traditional way, the corresponding conservation laws of the electromagnetic fields (see, for example, [50], [51], [88], [90], [91]). These laws made it necessary to ascribe a definite linear momentum and energy to the field of an electromagnetic wave, which can be observed, for example, as light pressure.

Note. At this point, the Lorentz invariance of these differential balance equations is not obvious in our $3D$-analysis. But one can introduce the four-vector $x^\mu=(ct,\mathbf{r})$ and try to match (26.21)–(26.22) with the expression,

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu}T_\mu{}^\nu=\frac{\partial T_\mu{}^0}{\partial x_0}+\frac{\partial T_\mu{}^q}{\partial x_q}\qquad(\mu,\nu=0,1,2,3;\quad p,q=1,2,3), \tag{26.24}$$

as an initial step, in order to guess the corresponding four-tensor form. An independent covariant derivation will be given in section 7.

Note. In an isotropic nonhomogeneous variable medium (without dispersion and/or compression), when $\mathbf{D}=\varepsilon(\mathbf{r},t)\,\mathbf{E}$ and $\mathbf{B}=\mu(\mathbf{r},t)\,\mathbf{H}$, the "ponderomotive forces" in (26.21) and (26.22) take the form [86]:

$$\mathbf{E}\cdot\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial x^\nu}-\mathbf{D}\cdot\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial x^\nu}+\mathbf{H}\cdot\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial x^\nu}-\mathbf{B}\cdot\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial x^\nu} \tag{26.25}$$
$$=\frac{\partial\varepsilon}{\partial x^\nu}\mathbf{E}^2+\frac{\partial\mu}{\partial x^\nu}\mathbf{H}^2=\begin{pmatrix}\frac{1}{c}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}\mathbf{E}^2+\frac{\partial\mu}{\partial t}\mathbf{H}^2\right)\\ \mathbf{E}^2\nabla\varepsilon+\mathbf{H}^2\nabla\mu\end{pmatrix},$$

which may be interpreted as a four-vector “energy-force” acting from an inhomogeneous and time-variable medium. Its covariance is analyzed in section 7.

26.1.4 “Angular Momentum” Balance

The $3D$-“linear momentum” differential balance equation (26.22), can be rewritten in a more compact form,

$$\frac{\partial T_{pq}}{\partial x_q} = \mathcal{F}_p + \frac{\partial \mathcal{G}_p}{\partial t}, \qquad \overrightarrow{\mathcal{G}} = \frac{1}{4\pi c}\left(\mathbf{D}\times\mathbf{B}\right), \tag{26.26}$$

with the help of the Hertz symmetric stress tensor $T_{pq} = T_{qp}$ defined by (26.23). A “net force” is given by

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_p = &\left(\rho\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{j}\times\mathbf{B}\right)_p - \frac{1}{8\pi}\left[\operatorname{curl}\left(\mathbf{E}\times\mathbf{D} + \mathbf{H}\times\mathbf{B}\right)\right]_p \\ &- \frac{1}{8\pi}\left(\mathbf{E}\cdot\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial x_p} - \mathbf{D}\cdot\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial x_p} + \mathbf{H}\cdot\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial x_p} - \mathbf{B}\cdot\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial x_p}\right).\end{aligned} \tag{26.27}$$

In this notation, we state the $3D$-“angular momentum” differential balance equation as follows

$$\frac{\partial M_{pq}}{\partial x_q} = \mathcal{T}_p + \frac{\partial \mathcal{L}_p}{\partial t}, \qquad \overrightarrow{\mathcal{L}} = \mathbf{r}\times\overrightarrow{\mathcal{G}}, \quad \overrightarrow{\mathcal{T}} = \mathbf{r}\times\overrightarrow{\mathcal{F}}, \tag{26.28}$$

where the “field angular momentum density” is defined by

$$\overrightarrow{\mathcal{L}} = \frac{1}{4\pi c}\mathbf{r}\times\left(\mathbf{D}\times\mathbf{B}\right) \tag{26.29}$$

and the “flux of angular momentum” is described by the following tensor [37]:

$$M_{pq} = e_{prs}x_r T_{sq}. \tag{26.30}$$

(Here, e_{pqr} is the totally anti-symmetric Levi-Civita symbol with $e_{123} = +1$). An elementary example of conservation of the total angular momentum is discussed in [86].

Proof. Indeed, in view of (26.26), one can write

$$\begin{aligned}\frac{\partial M_{pq}}{\partial x_q} &= e_{prs}T_{sr} + e_{prs}x_r\frac{\partial T_{sq}}{\partial x_q} \\ &= e_{pqr}x_q\mathcal{F}_r + \frac{\partial}{\partial t}\left(e_{pqr}x_q\mathcal{G}_r\right),\end{aligned} \tag{26.31}$$

which completes the proof.

Note. Once again, in $3D$-form, the Lorentz invariance of this differential balance equation for the local densities is not obvious. An independent covariant derivation will be given in section 8.

26.1.5 Complex Covariant Form of Macroscopic Maxwell’s Equations

With the help of complex fields $\mathbf{F} = \mathbf{E} + i\mathbf{H}$ and $\mathbf{G} = \mathbf{D} + i\mathbf{B}$, we introduce the following anti-symmetric four-tensor,

$$Q^{\mu\nu} = -Q^{\nu\mu} = \begin{pmatrix} 0 & -G_1 & -G_2 & -G_3 \\ G_1 & 0 & iF_3 & -iF_2 \\ G_2 & -iF_3 & 0 & iF_1 \\ G_3 & iF_2 & -iF_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{26.32}$$

and use the standard four-vectors, $x^\mu = (ct, \mathbf{r})$ and $j^\mu = (c\rho, \mathbf{j})$ for contravariant coordinates and current, respectively.

Maxwell's equations then take the covariant form [47], [54]:

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu} Q^{\mu\nu} = -\frac{\partial}{\partial x^\nu} Q^{\nu\mu} = -\frac{4\pi}{c} j^\mu \tag{26.33}$$

with summation over two repeated indices. Indeed, in block form, we have

$$\frac{\partial Q^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = \frac{\partial}{\partial x^\nu} \begin{pmatrix} 0 & -G_q \\ G_p & ie_{pqr}F_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\operatorname{div}\mathbf{G} = -4\pi\rho \\ \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial \mathbf{G}}{\partial t} + i\operatorname{curl}\mathbf{F} = -\dfrac{4\pi}{c}\mathbf{j} \end{pmatrix}, \tag{26.34}$$

which verifies this fact. The continuity equation,

$$0 \equiv \frac{\partial^2 Q^{\mu\nu}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = -\frac{4\pi}{c}\frac{\partial j^\mu}{\partial x^\mu}, \tag{26.35}$$

or in the $3D$-form,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}\mathbf{j} = 0, \tag{26.36}$$

describes conservation of the electrical charge. The latter equation can also be derived in the complex $3D$-form from (26.5)–(26.6).

Note. In vacuum, when $\mathbf{G} = \mathbf{F}$ and $\rho = 0$, $\mathbf{j} = 0$, one can write due to (26.129)–(26.130):

$$Q^{\mu\nu} = F^{\mu\nu} - \frac{i}{2}e^{\mu\nu\sigma\tau}F_{\sigma\tau}, \qquad F^{\mu\nu} = g^{\mu\sigma}g^{\nu\tau}F_{\sigma\tau}, \qquad g_{\mu\sigma}g_{\nu\tau}Q^{\sigma\tau} = Q_{\mu\nu}. \tag{26.37}$$

As a result, the following self-duality property holds

$$e_{\mu\nu\sigma\tau}Q^{\sigma\tau} = 2iQ_{\mu\nu}, \qquad 2iQ^{\mu\nu} = e^{\mu\nu\sigma\tau}Q_{\sigma\tau} \tag{26.38}$$

(see, for example, [8], [48] and appendix B). Two covariant forms of Maxwell's equations are given by

$$\partial_\nu Q^{\mu\nu} = 0, \qquad \partial^\nu Q_{\mu\nu} = 0, \tag{26.39}$$

where $\partial^\nu = g^{\nu\mu}\partial_\mu$, $\partial_\mu = \partial/\partial x^\mu$ and $g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$. The last equation can be derived from a more general equation, involving a rank three tensor,

$$g^{\alpha\alpha}e_{\alpha\mu\nu\tau}\partial^\nu Q^{\tau\beta} - g^{\alpha\alpha}e_{\beta\mu\nu\tau}\partial^\nu Q^{\tau\alpha} = -i\partial_\mu Q^{\alpha\beta} \tag{26.40}$$

($\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3$ are fixed; no summation is assumed over these two indices), which is related to the Pauli-Lubański vector from the representation theory of the Poincaré group [47]. Different spinor forms of Maxwell's equations are analyzed in [48] (see also the references therein).

26.1.6 Dual Electromagnetic Field Tensors

Two dual anti-symmetric field tensors of complex fields, $\mathbf{F} = \mathbf{E} + i\mathbf{H}$ and $\mathbf{G} = \mathbf{D} + i\mathbf{B}$, are given by

$$\begin{aligned} Q^{\mu\nu} &= \begin{pmatrix} 0 & -G_1 & -G_2 & -G_3 \\ G_1 & 0 & iF_3 & -iF_2 \\ G_2 & -iF_3 & 0 & iF_1 \\ G_3 & iF_2 & -iF_1 & 0 \end{pmatrix} = R^{\mu\nu} + iS^{\mu\nu} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -D_1 & -D_2 & -D_3 \\ D_1 & 0 & -H_3 & H_2 \\ D_2 & H_3 & 0 & -H_1 \\ D_3 & -H_2 & H_1 & 0 \end{pmatrix} + i\begin{pmatrix} 0 & -B_1 & -B_2 & -B_3 \\ B_1 & 0 & E_3 & -E_2 \\ B_2 & -E_3 & 0 & E_1 \\ B_3 & E_2 & -E_1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{26.41}$$

and

$$P_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & F_1 & F_2 & F_3 \\ -F_1 & 0 & iG_3 & -iG_2 \\ -F_2 & -iG_3 & 0 & iG_1 \\ -F_3 & iG_2 & -iG_1 & 0 \end{pmatrix} = F_{\mu\nu} + iG_{\mu\nu} \tag{26.42}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ -E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ -E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 & H_1 & H_2 & H_3 \\ -H_1 & 0 & D_3 & -D_2 \\ -H_2 & -D_3 & 0 & D_1 \\ -H_3 & D_2 & -D_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

The real part of the latter represents the standard electromagnetic field tensor in a medium [6], [72], [91]. As for the imaginary part of (26.41), which, ironically, Pauli called an "artificiality" in view of its non-standard behavior under spatial inversion [72], the use of complex conjugation restores this important symmetry for our complex field tensors.

The dual tensor identities are given by

$$e_{\mu\nu\sigma\tau} Q^{\sigma\tau} = 2iP_{\mu\nu}, \qquad 2iQ^{\mu\nu} = e^{\mu\nu\sigma\tau} P_{\sigma\tau}. \tag{26.43}$$

Here $e^{\mu\nu\sigma\tau} = -e_{\mu\nu\sigma\tau}$ and $e_{0123} = +1$ is the Levi-Civita four-symbol [27]. Then

$$6i \frac{\partial Q^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = e^{\mu\nu\lambda\sigma} \left(\frac{\partial P_{\lambda\sigma}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial P_{\nu\lambda}}{\partial x^\sigma} + \frac{\partial P_{\sigma\nu}}{\partial x^\lambda} \right) \tag{26.44}$$

and both pairs of Maxwell's equations can also be presented in the form [47]

$$\frac{\partial P_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial P_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial P_{\lambda\mu}}{\partial x^\nu} = -\frac{4\pi i}{c} e_{\mu\nu\lambda\sigma} j^\sigma \tag{26.45}$$

in addition to the one given above

$$\frac{\partial Q^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = -\frac{4\pi}{c} j^\mu. \tag{26.46}$$

The real part of the first equation traditionally represents the first (homogeneous) pair of Maxwell's equation and the real part of the second one gives the remaining pair. In our approach both pairs of Maxwell's equations appear together (see also [6], [8], [9], [54], and [87] for the case in vacuum). Moreover, a generalization to complex-valued four-current may naturally represent magnetic charge and magnetic current not yet observed in nature [79].

An important cofactor matrix identity,

$$P_{\mu\nu} Q^{\nu\lambda} = (\mathbf{F} \cdot \mathbf{G})\, \delta_\mu^\lambda = \frac{1}{4} \left(P_{\sigma\tau} Q^{\tau\sigma} \right) \delta_\mu^\lambda, \tag{26.47}$$

was originally established, in a general form, by Minkowski [65]. Once again, the dual tensors are given by

$$P_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & F_q \\ -F_p & ie_{pqr} G_r \end{pmatrix}, \quad Q^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -G_q \\ G_p & ie_{pqr} F_r \end{pmatrix}, \tag{26.48}$$

in block form. A complete list of relevant tensor and matrix identities is given in appendix B.

26.1.7 Covariant Derivation of Energy-Momentum Balance Equations

Preliminaries

As has been announced in [47] (see also [48]), the covariant form of the differential balance equations can be presented as follows

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\left[\frac{1}{16\pi}\left(P^{*}_{\mu\lambda}Q^{\lambda\nu}+P_{\mu\lambda}\overset{*}{Q}{}^{\lambda\nu}\right)\right]\\&+\frac{1}{32\pi}\left(P^{*}_{\sigma\tau}\frac{\partial Q^{\tau\sigma}}{\partial x^{\mu}}+P_{\sigma\tau}\frac{\partial \overset{*}{Q}{}^{\tau\sigma}}{\partial x^{\mu}}\right)\\&=-\frac{1}{c}F_{\mu\lambda}j^{\lambda}=\begin{pmatrix}-\mathbf{j}\cdot\mathbf{E}/c\\ \rho\mathbf{E}+\mathbf{j}\times\mathbf{B}/c\end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{26.49}$$

In our complex form, when $\mathbf{F}=\mathbf{E}+i\mathbf{H}$ and $\mathbf{G}=\mathbf{D}+i\mathbf{B}$, the energy-momentum tensor is given by

$$\begin{aligned}&16\pi T_{\mu}{}^{\nu}=P^{*}_{\mu\lambda}Q^{\lambda\nu}+P_{\mu\lambda}\overset{*}{Q}{}^{\lambda\nu}\\&=\begin{pmatrix}\mathbf{F}\cdot\mathbf{G}^{*}+\mathbf{F}^{*}\cdot\mathbf{G} & 2i\left(\mathbf{F}\times\mathbf{F}^{*}\right)_{q}\\ -2i\left(\mathbf{G}\times\mathbf{G}^{*}\right)_{p} & 2\left(F_{p}G^{*}_{q}+F^{*}_{p}G_{q}\right)-\delta_{pq}\left(\mathbf{F}\cdot\mathbf{G}^{*}+\mathbf{F}^{*}\cdot\mathbf{G}\right)\end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{26.50}$$

Here, we point out for the reader's convenience that

$$\begin{aligned}&i\left(\mathbf{F}\times\mathbf{F}^{*}\right)=2\left(\mathbf{E}\times\mathbf{H}\right),\qquad i\left(\mathbf{G}\times\mathbf{G}^{*}\right)=2\left(\mathbf{D}\times\mathbf{B}\right),\\&\mathbf{F}\cdot\mathbf{G}^{*}+\mathbf{F}^{*}\cdot\mathbf{G}=2\left(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}+\mathbf{H}\cdot\mathbf{B}\right)\end{aligned}\tag{26.51}$$

and, in real form,

$$4\pi T_{\mu}{}^{\nu}=\begin{pmatrix}\left(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}+\mathbf{H}\cdot\mathbf{B}\right)/2 & \left(\mathbf{E}\times\mathbf{H}\right)_{q}\\ -\left(\mathbf{D}\times\mathbf{B}\right)_{p} & E_{p}D_{q}+H_{p}B_{q}-\delta_{pq}\left(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}+\mathbf{H}\cdot\mathbf{B}\right)/2\end{pmatrix}.\tag{26.52}$$

The covariant form of the differential balance equation allows one to clarify the meanings of different energy-momentum tensors. For instance, it is worth noting that the non-symmetric Maxwell and Heaviside form of the $3D$-stress tensor [72],

$$\widetilde{T}_{pq}=\frac{1}{4\pi}\left(E_{p}D_{q}+H_{p}B_{q}\right)-\frac{1}{8\pi}\delta_{pq}\left(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}+\mathbf{H}\cdot\mathbf{B}\right),\tag{26.53}$$

appears here in the corresponding "momentum" balance equation [86]:

$$\begin{aligned}&-\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{4\pi c}\left(\mathbf{D}\times\mathbf{B}\right)\right]_{p}+\frac{\partial\widetilde{T}_{pq}}{\partial x_{q}}-\left(\rho\mathbf{E}+\frac{1}{c}\mathbf{j}\times\mathbf{B}\right)_{p}\\&+\frac{1}{8\pi}\left(\mathbf{E}\cdot\frac{\partial\mathbf{D}}{\partial x_{p}}-\mathbf{D}\cdot\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial x_{p}}+\mathbf{H}\cdot\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial x_{p}}-\mathbf{B}\cdot\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial x_{p}}\right)=0.\end{aligned}\tag{26.54}$$

At the same time, in view of (26.22), use of the form (26.53) differs from Hertz's symmetric tensors in (26.7) and (26.23) only in the case of anisotropic media (crystals) [72], [85]. Indeed,

$$8\pi\frac{\partial}{\partial x_{q}}\left(\widetilde{T}_{pq}-T_{pq}\right)=\left[\operatorname{curl}\left(\mathbf{E}\times\mathbf{D}+\mathbf{H}\times\mathbf{B}\right)\right]_{p}.\tag{26.55}$$

Moreover, with the help of elementary identities,

$$\left[\mathrm{curl}\,(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\right]_p = \frac{\partial}{\partial x_q}\left(A_pB_q - A_qB_p\right) \tag{26.56}$$

and

$$2\frac{\partial}{\partial x_q}\left(A_pB_q\right) = \frac{\partial}{\partial x_q}\left(A_pB_q + A_qB_p\right) + \left[\mathrm{curl}\,(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\right]_p, \tag{26.57}$$

one can transform the latter balance equation into its "symmetric" form, which provides an independent proof of (26.22).

Proof

The fact that Maxwell's equations can be united with the help of a complex second rank (anti-symmetric) tensor allows us to utilize the standard Sturm-Liouville type argument in order to establish the energy-momentum differential balance equations in covariant form. Indeed, by adding matrix equation

$$P^*_{\mu\lambda}\left(\frac{\partial Q^{\lambda\nu}}{\partial x^\nu} = -\frac{4\pi}{c}j^\lambda\right) \tag{26.58}$$

and its complex conjugate

$$P_{\mu\lambda}\left(\frac{\partial \overset{*}{Q}{}^{\lambda\nu}}{\partial x^\nu} = -\frac{4\pi}{c}j^\lambda\right) \tag{26.59}$$

one gets

$$P^*_{\mu\lambda}\frac{\partial Q^{\lambda\nu}}{\partial x^\nu} + P_{\mu\lambda}\frac{\partial \overset{*}{Q}{}^{\lambda\nu}}{\partial x^\nu} = -\frac{8\pi}{c}F_{\mu\lambda}j^\lambda. \tag{26.60}$$

A simple decomposition,

$$f\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(fg\right) + \frac{1}{2}\left(f\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x}g\right) \tag{26.61}$$

with $f = P^*_{\mu\lambda}$ and $g = Q^{\lambda\nu}$ (and their complex conjugates), results in

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial x^\nu}\left[\frac{1}{16\pi}\left(P^*_{\mu\lambda}Q^{\lambda\nu} + P_{\mu\lambda}\overset{*}{Q}{}^{\lambda\nu}\right)\right]\\ &+\frac{1}{16\pi}\left[\left(P^*_{\mu\lambda}\frac{\partial Q^{\lambda\nu}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial P_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu}\overset{*}{Q}{}^{\lambda\nu}\right) + (\mathrm{c.c.})\right] = -\frac{1}{c}F_{\mu\lambda}j^\lambda.\end{aligned} \tag{26.62}$$

By a direct substitution, one can verify that

$$\begin{aligned}Z_\mu &= P^*_{\mu\lambda}\frac{\partial Q^{\lambda\nu}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial P_{\mu\lambda}}{\partial x^\nu}\overset{*}{Q}{}^{\lambda\nu} = \frac{1}{2}P^*_{\sigma\tau}\frac{\partial Q^{\tau\sigma}}{\partial x^\mu}\\ &= -\frac{1}{2}\overset{*}{Q}{}^{\sigma\tau}\frac{\partial P_{\tau\sigma}}{\partial x^\mu} = \mathbf{F}^*\cdot\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial x^\mu} - \mathbf{G}^*\cdot\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x^\mu}.\end{aligned} \tag{26.63}$$

(An independent covariant proof of these identities is given in appendix C.) Finally, introducing

$$16\pi X_\mu = Z_\mu + Z^*_\mu, \tag{26.64}$$

we obtain (26.49) with the explicitly covariant expression for the ponderomotive force (26.25), which completes the proof.

As a result, the covariant energy-momentum balance equation is given by

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu} T_\mu{}^\nu + X_\mu = -\frac{1}{c} F_{\mu\lambda} j^\lambda, \tag{26.65}$$

in a compact form. If these differential balance equations are written for a stationary medium, then the corresponding equations for moving bodies are uniquely determined, since the components of a tensor in any inertial coordinate system can be derived by a proper Lorentz transformation [72].

26.1.8 Covariant Derivation of Angular Momentum Balance

By definition, $x_\mu = g_{\mu\nu} x^\nu = (ct, -\mathbf{r})$ and $T_{\mu\lambda} = T_\mu{}^\nu g_{\nu\lambda}$, where $g_{\mu\nu}$ =diag$(1,-1,-1,-1) = \partial x_\mu / \partial x^\nu$. In view of (26.65), we derive

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x^\nu} \left(x_\lambda T_\mu{}^\nu - x_\mu T_\lambda{}^\nu \right) = \left(T_{\mu\lambda} - T_{\lambda\mu} \right) \\ &- \left(x_\lambda X_\mu - x_\mu X_\lambda \right) - \frac{1}{c} \left(x_\lambda F_{\mu\nu} - x_\mu F_{\lambda\nu} \right) j^\nu \end{aligned} \tag{26.66}$$

as a required differential balance equation.

With the help of familiar dual relations (26.128), one can get another covariant form of the angular momentum balance equation:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x^\nu} \left(e^{\mu\lambda\sigma\tau} x_\sigma T_\tau{}^\nu \right) + e^{\mu\lambda\sigma\tau} T_{\sigma\tau} \\ &+ e^{\mu\lambda\sigma\tau} x_\sigma X_\tau + \frac{1}{c} e^{\mu\lambda\sigma\tau} x_\sigma F_{\tau\nu} j^\nu = 0^{\mu\lambda}. \end{aligned} \tag{26.67}$$

In $3D$-form, the latter relation can be reduced to (26.28)–(26.30).

Indeed, when $\mu = 0$ and $\lambda = p = 1, 2, 3$, one gets

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{4\pi c} \frac{\partial}{\partial t} \left[e_{pqr} x_q \left(\mathbf{D} \times \mathbf{B} \right)_r \right] + \frac{\partial}{\partial x_s} \left(e_{pqr} x_q \widetilde{T}_{rs} \right) \\ &+ e_{pqr} \widetilde{T}_{qr} + e_{pqr} x_q \left(X_r + Y_r \right) = 0, \end{aligned} \tag{26.68}$$

where $-\mathbf{Y} = \rho \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}/c$ is the familiar Lorentz force. Substitution, $\widetilde{T}_{rs} = T_{rs} + \left(\widetilde{T}_{rs} - T_{rs} \right)$, results in (26.28) in view of identity (26.55). The remaining cases, when $\mu, \nu = p, q = 1, 2, 3$, can be analyzed in a similar fashion. In $3D$-form, the corresponding equations can be reduced to (26.21) and (26.54). Details are left to the reader.

Thus the angular momentum law has the form of a local balance equation, not a conservation law, since in general the energy-momentum tensor will not be symmetric [34]. A torque, for instance, may occur, which cannot be compensated for by a change in the electromagnetic angular momentum, though not in contradiction with experiment [72].

26.1.9 Transformation Laws of Complex Electromagnetic Fields

Let $\mathbf{v}$ be a constant real-valued velocity vector representing uniform motion of one frame of reference with respect to another one. Let us consider the following orthogonal decompositions,

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_\parallel + \mathbf{F}_\perp, \qquad \mathbf{G} = \mathbf{G}_\parallel + \mathbf{G}_\perp, \tag{26.69}$$

such that our complex vectors $\{\mathbf{F}_{\parallel}, \mathbf{G}_{\parallel}\}$ are collinear with the velocity vector $\mathbf{v}$ and $\{\mathbf{F}_{\perp}, \mathbf{G}_{\perp}\}$ are perpendicular to it (Figure 1). The Lorentz transformation of electric and magnetic fields $\{\mathbf{E}, \mathbf{D}, \mathbf{H}, \mathbf{B}\}$ take the following complex form

$$\mathbf{F}'_{\parallel} = \mathbf{F}_{\parallel}, \qquad \mathbf{G}'_{\parallel} = \mathbf{G}_{\parallel} \tag{26.70}$$

and

$$\mathbf{F}'_{\perp} = \frac{\mathbf{F}_{\perp} - \dfrac{i}{c}(\mathbf{v} \times \mathbf{G})}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \qquad \mathbf{G}'_{\perp} = \frac{\mathbf{G}_{\perp} - \dfrac{i}{c}(\mathbf{v} \times \mathbf{F})}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{26.71}$$

Although this transformation was found by Lorentz, it was Minkowski who realized that this is the law of transformation of the second rank anti-symmetric four-tensors [58], [65]; a brief historical overview is given in [72].) This complex $3D$-form of the Lorentz transformation of electric and magnetic fields was known to Minkowski (1908), but apparently only in vacuum, when $\mathbf{G} = \mathbf{F}$ (see also [88]). Moreover,

$$\mathbf{r}'_{\parallel} = \frac{\mathbf{r}_{\parallel} - \mathbf{v}t}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \qquad \mathbf{r}'_{\perp} = \mathbf{r}_{\perp}, \qquad t' = \frac{t - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{r})/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \tag{26.72}$$

in the same notation [72].

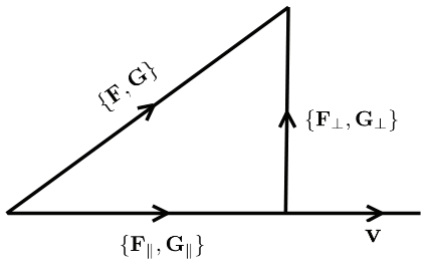


Figure 26.1: Complex electromagnetic fields decomposition.

The latter equations can be rewritten as follows

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \left[(\gamma - 1)\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}}{v^2} - \gamma t\right]\mathbf{v}, \qquad t' = \gamma\left(t - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}}{c^2}\right), \tag{26.73}$$

where $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$. In a similar fashion, one gets

$$\mathbf{F}' = \gamma\left(\mathbf{F} - \frac{i}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{G}\right) - (\gamma - 1)\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{F}}{v^2}\mathbf{v}, \tag{26.74}$$

$$\mathbf{G}' = \gamma\left(\mathbf{G} - \frac{i}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{F}\right) - (\gamma - 1)\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{G}}{v^2}\mathbf{v}, \tag{26.75}$$

as a compact $3D$-version of the Lorentz transformation for the complex electromagnetic fields.

In complex four-tensor form,

$$Q'^{\mu\nu}(x') = \Lambda^{\mu}{}_{\sigma}\Lambda^{\nu}{}_{\tau}Q^{\sigma\tau}(x), \qquad x' = \Lambda x. \tag{26.76}$$

Although Minkowski considered the transformation of electric and magnetic fields in a complex $3D$-vector form, see Eqs. (8)–(9) and (15) in [65] (or Eqs. (25.5)–(25.6) in [50]), he seems never to have combined the corresponding four-tensors into the complex forms (26.41)–(26.42). In the second article [66], Max Born, who used Minkowski's notes, didn't mention the complex

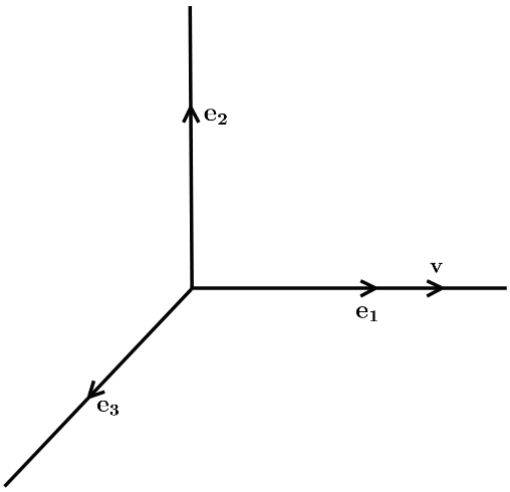


Figure 26.2: Example of moving frame velocity.

fields. As a result, the complex field tensor seems only to have appeared, for the first time, in [54] (see also [87]). The complex identity, $\mathbf{F}\cdot\mathbf{G}=$ invariant under a similarity transformation, follows from Minkowski's determinant relations (26.147)–(26.149).

Example. Let $\{\mathbf{e}_k\}_{k=1}^3$ be an orthonormal basis in $\mathbb{R}^3$. We choose $\mathbf{v}=v\mathbf{e}_1$ and write $x'^\mu=\Lambda^\mu{}_\nu x^\nu$ with

$$\Lambda^\mu{}_\nu=\begin{pmatrix}\gamma & -\beta\gamma & 0 & 0\\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\qquad \beta=\frac{v}{c},\quad \gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{26.77}$$

for the corresponding Lorentz boost (Figure 2). In view of (26.76), by matrix multiplication one gets

$$\begin{pmatrix}\gamma & -\beta\gamma & 0 & 0\\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -G_1 & -G_2 & -G_3\\ G_1 & 0 & iF_3 & -iF_2\\ G_2 & -iF_3 & 0 & iF_1\\ G_3 & iF_2 & -iF_1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\gamma & -\beta\gamma & 0 & 0\\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}0 & -G_1 & -\gamma G_2-i\beta\gamma F_3 & -\gamma G_3+i\beta\gamma F_2\\ G_1 & 0 & \beta\gamma G_2+i\gamma F_3 & \beta\gamma G_3-i\gamma F_2\\ \gamma G_2+i\beta\gamma F_3 & -\beta\gamma G_2-i\gamma F_3 & 0 & iF_1\\ \gamma G_3-i\beta\gamma F_2 & -\beta\gamma G_3+i\gamma F_2 & -iF_1 & 0\end{pmatrix}. \tag{26.78}$$

Thus $G'_1=G_1$ and

$$G'_2=\gamma G_2+i\beta\gamma F_3=\frac{G_2+i\,(v/c)\,F_3}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=\frac{G_2-\dfrac{i}{c}\,(\mathbf{v}\times\mathbf{F})_2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \tag{26.79}$$
$$G'_3=\gamma G_3-i\beta\gamma F_2=\frac{G_3-i\,(v/c)\,F_2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=\frac{G_3-\dfrac{i}{c}\,(\mathbf{v}\times\mathbf{F})_3}{\sqrt{1-v^2/c^2}}.$$

In a similar fashion, $F_1' = F_1$ and

$$F_2' = \gamma F_2 + i\beta\gamma G_3 = \frac{F_2 - \dfrac{i}{c}\left(\mathbf{v}\times\mathbf{G}\right)_2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \tag{26.80}$$
$$F_3' = \gamma F_3 - i\beta\gamma G_2 = \frac{F_3 - \dfrac{i}{c}\left(\mathbf{v}\times\mathbf{G}\right)_3}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

The latter relations are in agreement with the field transformations (26.70)–(26.71).

In block form, one gets

$$\begin{pmatrix} F_1' \\ F_2' \\ G_3' \\ G_2' \\ F_3' \\ G_1' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(i\theta) & \sin(i\theta) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin(i\theta) & \cos(i\theta) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(i\theta) & \sin(i\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin(i\theta) & \cos(i\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ G_3 \\ G_2 \\ F_3 \\ G_1 \end{pmatrix}, \tag{26.81}$$

where, by definition,

$$\cos(i\theta) = \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad \sin(i\theta) = i\beta\gamma = \frac{i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad \beta = \frac{v}{c}. \tag{26.82}$$

As a result, the transformation law of the complex electromagnetic fields $\{\mathbf{F}, \mathbf{G}\}$ under the Lorentz boost can be thought of as a complex rotation in $\mathbb{C}^6$, corresponding to a reducible representation of the one-parameter subgroup of $SO(3,\mathbb{C})$. (Cyclic permutation of the spatial indices cover the two remaining cases; see also [88].)

26.1.10 Material Equations, Potentials, and Energy-Momentum Tensor for Moving Isotropic Media

Electromagnetic phenomena in moving media are important in relativistic astrophysics, the study of accelerated plasma clusters and high-energy electron beams [15], [16], [26], [91].

Material equations

Minkowski's field- and connecting-equations [65], [66] were derived from the corresponding laws for the bodies at rest by means of a Lorentz transformation (see [15], [18], [34], [51], [67], [72], [91]). Explicitly covariant forms, which are applicable both in the rest frame and for moving media, are analyzed in [15], [16], [34], [39], [40], [67], [71], [72], [75], [77], [88], [91] (see also the references therein). In standard notation,

$$\beta = v/c, \qquad \gamma = \left(1-\beta^2\right)^{-1/2}, \qquad v = |\mathbf{v}|, \qquad \kappa = \varepsilon\mu - 1, \tag{26.83}$$

one can write [15], [16], [18], [91]:

$$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E} + \frac{\kappa\gamma^2}{\mu}\left[\beta^2\mathbf{E} - \frac{\mathbf{v}}{c^2}\left(\mathbf{v}\cdot\mathbf{E}\right) + \frac{1}{c}\left(\mathbf{v}\times\mathbf{B}\right)\right], \tag{26.84}$$
$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu}\mathbf{B} + \frac{\kappa\gamma^2}{\mu}\left[-\beta^2\mathbf{B} + \frac{\mathbf{v}}{c^2}\left(\mathbf{v}\cdot\mathbf{B}\right) + \frac{1}{c}\left(\mathbf{v}\times\mathbf{E}\right)\right].$$

In covariant form, these relations are given by

$$R^{\lambda\nu} = \epsilon^{\lambda\nu\sigma\tau} F_{\sigma\tau} = \frac{1}{2}\left(\epsilon^{\lambda\nu\sigma\tau} - \epsilon^{\lambda\nu\tau\sigma}\right) F_{\sigma\tau} \tag{26.85}$$
$$= \frac{1}{4}\left(\epsilon^{\lambda\nu\sigma\tau} - \epsilon^{\lambda\nu\tau\sigma} + \epsilon^{\nu\lambda\tau\sigma} - \epsilon^{\nu\lambda\sigma\tau}\right) F_{\sigma\tau}$$

(see [14], [15], [16], [39], [40], [75], [77], [91] and the references therein). Here,

$$\epsilon^{\lambda\nu\sigma\tau} = \frac{1}{\mu}\left(g^{\lambda\sigma} + \kappa u^{\lambda} u^{\sigma}\right)\left(g^{\nu\tau} + \kappa u^{\nu} u^{\tau}\right) = \epsilon^{\nu\lambda\tau\sigma} \tag{26.86}$$

is the four-tensor of electric and magnetic permeabilities[3] and

$$u^{\lambda} = (\gamma, \gamma\mathbf{v}/c), \qquad u^{\lambda} u_{\lambda} = 1 \tag{26.87}$$

is the four-velocity of the medium ([75], [77], a computer algebra verification of these relations is given in [52]). In a complex covariant form,

$$\left(Q^{\mu\nu} + \overset{*}{Q}{}^{\mu\nu}\right) = \epsilon^{\mu\nu\sigma\tau}\left(P_{\sigma\tau} + \overset{*}{P}{}_{\sigma\tau}\right). \tag{26.88}$$

In view of (26.85) and (26.129)–(26.130), we get

$$Q^{\mu\nu} = \left(\epsilon^{\mu\nu\sigma\tau} - \frac{i}{2} e^{\mu\nu\sigma\tau}\right) F_{\sigma\tau}, \qquad P_{\mu\nu} = \left(\delta^{\lambda}_{\mu}\delta^{\rho}_{\nu} - \frac{i}{2} e_{\mu\nu\sigma\tau}\epsilon^{\sigma\tau\lambda\rho}\right) F_{\lambda\rho}, \tag{26.89}$$

in terms of the real-valued electromagnetic field tensor.

Potentials

In practice, one can choose

$$F_{\sigma\tau} = \frac{\partial A_{\tau}}{\partial x^{\sigma}} - \frac{\partial A_{\sigma}}{\partial x^{\tau}}, \tag{26.90}$$

for the real-valued four-vector potential $A_{\lambda}(x)$. Then

$$\partial_{\nu} Q^{\lambda\nu} = \epsilon^{\lambda\nu\sigma\tau}\partial_{\nu}\left(\partial_{\sigma}A_{\tau} - \partial_{\tau}A_{\sigma}\right) - \frac{i}{2} e^{\lambda\nu\sigma\tau}\partial_{\nu}\left(\partial_{\sigma}A_{\tau} - \partial_{\tau}A_{\sigma}\right)$$
$$= \frac{1}{\mu}\left(g^{\lambda\sigma} + \kappa u^{\lambda}u^{\sigma}\right)\left(g^{\nu\tau} + \kappa u^{\nu}u^{\tau}\right)\partial_{\nu}\left(\partial_{\sigma}A_{\tau} - \partial_{\tau}A_{\sigma}\right)$$

by (26.86). Substitution into Maxwell's equations (26.46) or (26.45) results in

$$\left(g^{\lambda\sigma} + \kappa u^{\lambda}u^{\sigma}\right)\left\{-\left[\partial^{\tau}\partial_{\tau} + \kappa\left(u^{\tau}\partial_{\tau}\right)^2\right] A_{\sigma}\right. \tag{26.91}$$
$$\left. + \partial_{\sigma}\left(\partial^{\tau}A_{\tau} + \kappa u^{\nu}u^{\tau}\partial_{\nu}A_{\tau}\right)\right\} = -\frac{4\pi\mu}{c} j^{\lambda},$$

where $-\partial^{\tau}\partial_{\tau} = -g^{\sigma\tau}\partial_{\sigma}\partial_{\tau} = \Delta - (\partial/c\partial t)^2$ is the D'Alembert operator. In view of an inverse matrix identity,

$$\left(g_{\lambda\rho} - \frac{\kappa}{1+\kappa} u_{\lambda}u_{\rho}\right)\left(g^{\lambda\sigma} + \kappa u^{\lambda}u^{\sigma}\right) = \delta^{\sigma}_{\rho}, \tag{26.92}$$

[3] Originally introduced by Tamm for a general case of the moving anisotropic medium [83], [84].

the latter equations take the form[4]

$$\begin{aligned}&\left[\partial^\tau\partial_\tau+\kappa\left(u^\tau\partial_\tau\right)^2\right]A_\sigma-\partial_\sigma\left(\partial^\tau A_\tau+\kappa u^\nu u^\tau\partial_\nu A_\tau\right)\\&\quad=\frac{4\pi\mu}{c}\left(g_{\sigma\lambda}-\frac{\kappa}{1+\kappa}u_\sigma u_\lambda\right)j^\lambda.\end{aligned}\tag{26.93}$$

Subject to the subsidiary condition,

$$\partial^\tau A_\tau+\kappa u^\nu u^\tau\partial_\nu A_\tau=\left(g^{\nu\tau}+\kappa u^\nu u^\tau\right)\partial_\nu A_\tau=0,\tag{26.94}$$

these equations were studied in detail for the sake of development of the phenomenological classical and quantum electrodynamics in a moving medium (see [13], [14], [15], [16], [71], [75], [76], [77], [91] and the references therein). In particular, Green's function of the photon in a moving medium was studied in [39], [75], [76] (with applications to quantum electrodynamics).

Hertz's tensor and vectors

We follow [15], [16], [91] with somewhat different details. The substitution,

$$A^\mu\left(x\right)=\left(\frac{\kappa}{1+\kappa}u^\mu u_\lambda-\delta^\mu_\lambda\right)\partial_\sigma Z^{\lambda\sigma}\left(x\right)\tag{26.95}$$

(a generalization of Hertz's potentials for a moving medium [15], [91]), into the gauge condition (26.94) results in $Z^{\lambda\sigma}=-Z^{\sigma\lambda}$, in view of

$$\begin{aligned}&\left(g_{\nu\mu}+\kappa u_\nu u_\mu\right)\partial^\nu A^\mu\\&\quad=\left(g_{\nu\mu}+\kappa u_\nu u_\mu\right)\left(\frac{\kappa}{1+\kappa}u^\mu u_\lambda-\delta^\mu_\lambda\right)\partial^\nu\partial_\sigma Z^{\lambda\sigma}\\&\quad=-g_{\nu\lambda}\partial^\nu\partial_\sigma Z^{\lambda\sigma}=-\partial_\lambda\partial_\sigma Z^{\lambda\sigma}\equiv 0.\end{aligned}$$

Then, equations (26.93) take the form

$$\left[\partial^\tau\partial_\tau+\kappa\left(u^\tau\partial_\tau\right)^2\right]\partial_\sigma Z^{\lambda\sigma}=-\frac{4\pi\mu}{c}j^\lambda.\tag{26.96}$$

Indeed, the left-hand side of (26.93) is given by

$$\begin{aligned}&\left[\partial^\tau\partial_\tau+\kappa\left(u^\tau\partial_\tau\right)^2\right]A_\sigma=\left[\partial^\tau\partial_\tau+\kappa\left(u^\tau\partial_\tau\right)^2\right]g_{\sigma\mu}A^\mu\\&\quad=\left[\partial^\tau\partial_\tau+\kappa\left(u^\tau\partial_\tau\right)^2\right]g_{\sigma\mu}\left(\frac{\kappa}{1+\kappa}u^\mu u_\lambda-\delta^\mu_\lambda\right)\partial_\rho Z^{\lambda\rho}\\&\quad=\left[\partial^\tau\partial_\tau+\kappa\left(u^\tau\partial_\tau\right)^2\right]\left(\frac{\kappa}{1+\kappa}u_\sigma u_\lambda-g_{\sigma\lambda}\right)\partial_\rho Z^{\lambda\rho}\\&\quad=\frac{4\pi\mu}{c}\left(g_{\sigma\lambda}-\frac{\kappa}{1+\kappa}u_\sigma u_\lambda\right)j^\lambda,\end{aligned}$$

from which the result follows due to (26.92).

Finally, with the help of the standard substitution,

$$j^\lambda=c\partial_\sigma p^{\lambda\sigma},\qquad p^{\lambda\sigma}=-p^{\sigma\lambda}\tag{26.97}$$

[4]Equations (26.90) and (26.93), together with the gauge condition (26.94), may be considered as the fundamentals of the theory [39]. Our complex fields are given by (26.89).

(in view of $\partial_\lambda j^\lambda = c\partial_\lambda\partial_\sigma p^{\lambda\sigma} \equiv 0$), we arrive at

$$\partial_\sigma \left\{ \left[\partial^\tau \partial_\tau + \kappa \left(u^\tau \partial_\tau \right)^2 \right] Z^{\lambda\sigma} + 4\pi\mu p^{\lambda\sigma} \right\} = 0. \tag{26.98}$$

Therefore, one can choose

$$\left[\partial^\tau \partial_\tau + \kappa \left(u^\tau \partial_\tau \right)^2 \right] Z^{\lambda\nu} = -4\pi p^{\lambda\nu}. \tag{26.99}$$

Here, by definition,

$$p^{\lambda\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -p_1 & -p_2 & -p_3 \\ p_1 & 0 & m_3 & -m_2 \\ p_2 & -m_3 & 0 & m_1 \\ p_3 & m_2 & -m_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{26.100}$$

is an anti-symmetric four-tensor [15], [16], [91]. The "electric" and "magnetic" Hertz vectors, $\mathbf{Z}^{(e)}$ and $\mathbf{Z}^{(m)}$, are also introduced in terms of a single four-tensor,

$$Z^{\lambda\nu} = \begin{pmatrix} 0 & Z_1^{(e)} & Z_2^{(e)} & Z_3^{(e)} \\ -Z_1^{(e)} & 0 & -Z_3^{(m)} & Z_2^{(m)} \\ -Z_2^{(e)} & Z_3^{(m)} & 0 & -Z_1^{(m)} \\ -Z_3^{(e)} & -Z_2^{(m)} & Z_1^{(m)} & 0 \end{pmatrix}. \tag{26.101}$$

In view of (26.95), for the four-vector potential, $A^\lambda = (\varphi, \mathbf{A})$, we obtain

$$\varphi = -\left(1 - \frac{\kappa\gamma^2}{1+\kappa} \right) \operatorname{div} \mathbf{Z}^{(e)} + \frac{\kappa\gamma^2}{(1+\kappa)\, c} \mathbf{v} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{Z}^{(e)}}{c\partial t} + \operatorname{curl} \mathbf{Z}^{(m)} \right) \tag{26.102}$$

and

$$\begin{aligned} \mathbf{A} = {} & \frac{\partial \mathbf{Z}^{(e)}}{c\partial t} + \operatorname{curl} \mathbf{Z}^{(m)} \\ & + \frac{\kappa\gamma^2 \mathbf{v}}{(1+\kappa)\, c^2} \left[c \operatorname{div} \mathbf{Z}^{(e)} + \frac{\partial}{c\partial t} \left(\mathbf{v} \cdot \mathbf{Z}^{(e)} \right) + \mathbf{v} \cdot \operatorname{curl} \mathbf{Z}^{(m)} \right]. \end{aligned} \tag{26.103}$$

Then, equations (26.99) take the form

$$\left[\partial^\tau \partial_\tau + \kappa \left(u^\tau \partial_\tau \right)^2 \right] \mathbf{Z}^{(e)} = 4\pi\mu \mathbf{p}, \qquad \left[\partial^\tau \partial_\tau + \kappa \left(u^\tau \partial_\tau \right)^2 \right] \mathbf{Z}^{(m)} = 4\pi\mu \mathbf{m} \tag{26.104}$$

and, for the four-current, $j^\lambda = (c\rho, \mathbf{j})$, one gets

$$\rho = -\operatorname{div} \mathbf{p}, \qquad \mathbf{j} = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} + c \operatorname{curl} \mathbf{m} \tag{26.105}$$

(see [15], [16], [91] for more details).

The Hertz vector and tensor potentials, for a moving medium and at rest, were utilized in [15], [16], [28], [41], [86], [91], [96] (see also the references therein). Many classical problems of radiation and propagation can be consistently solved by using these potentials.

Energy-momentum tensor

In the case of the covariant version of the energy-momentum tensor given by (26.50), the differential balance equations under consideration are independent of the particular choice of the frame of reference. Therefore, our relations (26.89) are useful for derivation of the expressions for the energy-momentum tensor and the ponderomotive force for moving bodies from those for bodies at rest which were extensively studied in the literature. For example, one gets

$$4\pi T_\mu{}^\nu = F_{\mu\lambda} \epsilon^{\lambda\nu\sigma\tau} F_{\sigma\tau} + \frac{1}{4} \delta_\mu^\nu F_{\sigma\tau} \epsilon^{\sigma\tau\lambda\rho} F_{\lambda\rho} \tag{26.106}$$

with the help of (26.85)–(26.86) and (26.138) (see also [84]).

26.1.11 Real versus Complex Lagrangians

In modern presentations of the classical and quantum field theories, the Lagrangian approach is usually utilized.

Complex forms

We introduce two quadratic "Lagrangian" densities

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_0^* &= \frac{1}{2}\left(P_{\sigma\tau}Q^{\tau\sigma} + P^*_{\sigma\tau}\overset{*}{Q}{}^{\tau\sigma}\right) \\ &= \frac{i}{4}e^{\sigma\tau\kappa\rho}\left(P_{\sigma\tau}P_{\kappa\rho} - P^*_{\sigma\tau}P^*_{\kappa\rho}\right) \\ &= F_{\sigma\tau}R^{\tau\sigma} - G_{\sigma\tau}S^{\tau\sigma} = 2F_{\sigma\tau}R^{\tau\sigma} \\ &= 4\left(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D} - \mathbf{H}\cdot\mathbf{B}\right)\end{aligned} \tag{26.107}$$

and

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_1 = -\mathcal{L}_1^* = P^*_{\sigma\tau}Q^{\tau\sigma} &= \frac{1}{2}\left(P^*_{\sigma\tau}Q^{\tau\sigma} - P_{\sigma\tau}\overset{*}{Q}{}^{\tau\sigma}\right) \\ = \frac{i}{2}e^{\sigma\tau\kappa\rho}P_{\sigma\tau}P^*_{\kappa\rho} &= 4i\left(\mathbf{E}\cdot\mathbf{B} - \mathbf{H}\cdot\mathbf{D}\right).\end{aligned} \tag{26.108}$$

Then, by formal differentiation,

$$\frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial P_{\alpha\beta}} = Q^{\beta\alpha}, \qquad \frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial P^*_{\alpha\beta}} = \overset{*}{Q}{}^{\beta\alpha} \tag{26.109}$$

and

$$\frac{\partial\mathcal{L}_1}{\partial P^*_{\alpha\beta}} = Q^{\beta\alpha}, \qquad \frac{\partial\mathcal{L}^*_1}{\partial P_{\alpha\beta}} = \overset{*}{Q}{}^{\beta\alpha} \tag{26.110}$$

in view of (26.131).

The complex covariant Maxwell equations (26.33) take the forms

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial P_{\nu\mu}}\right) = -\frac{4\pi}{c}j^\mu, \qquad \frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\frac{\partial\mathcal{L}_1}{\partial P_{\nu\mu}}\right) = \frac{4\pi}{c}j^\mu \tag{26.111}$$

and the covariant energy-momentum balance relations (26.49) are given by

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial x^\nu}\left[\frac{1}{16\pi}\left(P^*_{\mu\lambda}\frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial P_{\nu\lambda}} + P_{\mu\lambda}\frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial P^*_{\nu\lambda}}\right)\right] \\ &\quad + \frac{1}{32\pi}\left[P^*_{\sigma\tau}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial P_{\sigma\tau}}\right) + P_{\sigma\tau}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{\partial\mathcal{L}_0}{\partial P^*_{\sigma\tau}}\right)\right] = -\frac{1}{c}F_{\mu\lambda}j^\lambda\end{aligned} \tag{26.112}$$

and

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial x^\nu}\left[\frac{1}{16\pi}\left(P_{\mu\lambda}\frac{\partial\mathcal{L}_1}{\partial P_{\nu\lambda}} + P^*_{\mu\lambda}\frac{\partial\mathcal{L}^*_1}{\partial P_{\nu\lambda}}\right)\right] \\ &\quad + \frac{1}{32\pi}\left[P_{\sigma\tau}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{\partial\mathcal{L}_1}{\partial P_{\sigma\tau}}\right) + P^*_{\sigma\tau}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{\partial\mathcal{L}^*_1}{\partial P^*_{\sigma\tau}}\right)\right] = \frac{1}{c}F_{\mu\lambda}j^\lambda\end{aligned} \tag{26.113}$$

in terms of the complex Lagrangians under consideration, respectively.

Finally, with the help of the following densities,

$$L_0 = \mathcal{L}_0 - \frac{4\pi}{c} j^\nu A_\nu, \qquad L_1 = \mathcal{L}_1 + \frac{4\pi}{c} j^\nu A_\nu, \tag{26.114}$$

one can derive analogs of the Euler-Lagrange equations for electromagnetic fields in media:

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu}\left(\frac{\partial L_{0,1}}{\partial P_{\nu\mu}}\right) - \frac{\partial L_{0,1}}{\partial A_\mu} = 0. \tag{26.115}$$

In the case of a moving isotropic medium, a relation between $P_{\nu\mu}$ and A_μ is given by our equations (26.89)–(26.90).

Real form

Taking the real and imaginary parts, Maxwell's equations (26.46) can be written as follows

$$\partial_\nu R^{\mu\nu} = -\frac{4\pi}{c} j^\mu, \qquad \partial_\nu S^{\mu\nu} = 0. \tag{26.116}$$

Here,

$$-6\partial_\nu S^{\mu\nu} = e^{\mu\nu\lambda\sigma}\left(\partial_\nu F_{\lambda\sigma} + \partial_\sigma F_{\nu\lambda} + \partial_\lambda F_{\sigma\nu}\right) \equiv 0,$$

with the help of (26.44) and (26.90). Thus the second set of equations is automatically satisfied when we introduce the four-vector potential. For the inhomogeneous pair of Maxwell's equations, the Lagrangian density is given by

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{4} F_{\sigma\tau} R^{\tau\sigma} - \frac{4\pi}{c} j^\sigma A_\sigma \\ &= \frac{1}{4} F_{\sigma\tau} \epsilon^{\tau\sigma\lambda\rho} F_{\lambda\rho} - \frac{4\pi}{c} j^\sigma A_\sigma, \end{aligned} \tag{26.117}$$

in view of (26.85). Then, for "conjugate momenta" to the four-potential field A_μ, one gets

$$\frac{\partial L}{\partial\left(\partial_\nu A_\mu\right)} = \frac{\partial L}{\partial F_{\sigma\tau}} \frac{\partial F_{\sigma\tau}}{\partial\left(\partial_\nu A_\mu\right)} = R^{\mu\nu} \tag{26.118}$$

and the corresponding Euler-Lagrange equations take a familiar form

$$\partial_\nu\left(\frac{\partial L}{\partial\left(\partial_\nu A_\mu\right)}\right) - \frac{\partial L}{\partial A_\mu} = 0. \tag{26.119}$$

The latter equation can also be derived with the help of the least action principle [72], [88], [90]. The corresponding Hamiltonian and quantization are discussed in [35], [39], [75] among other classical accounts.

In conclusion, it is worth noting the role of complex fields in quantum electrodynamics, quadratic invariants and quantization (see, for instance, [2], [8], [9], [20], [39], [40], [44], [46], [53], [55], [56], [75], [76], [77], [90], [97]). The classical and quantum theory of Cherenkov radiation is reviewed in [3], [11], [13], [29], [31], [81], [85]. For paraxial approximation in optics, see [28], [43], [45], [60], [61], and the references therein. Maxwell's equations in the gravitational field are discussed in [17] [27]. One may hope that our detailed mathematical consideration of several aspects of macroscopic electrodynamics will be useful for future investigations and pedagogy.

26.1.12 Formulas from Vector Calculus

Among useful differential relations are

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) . \tag{26.120}$$

$$\nabla \cdot (f\mathbf{A}) = (\nabla f) \cdot \mathbf{A} + f (\nabla \cdot \mathbf{A}) . \tag{26.121}$$

$$\nabla \times (f\mathbf{A}) = (\nabla f) \times \mathbf{A} + f (\nabla \times \mathbf{A}) . \tag{26.122}$$

$$\begin{aligned} &\mathbf{A} \cdot (\nabla \times (f\nabla \times \mathbf{B})) - \mathbf{B} \cdot (\nabla \times (f\nabla \times \mathbf{A})) \\ &\quad = \nabla \cdot (f (\mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}))) . \end{aligned} \tag{26.123}$$

$$\begin{aligned} &\mathbf{A} (\nabla \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B} (\nabla \cdot \mathbf{A}) + \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) - \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) \\ &- \nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \sum_{\alpha=1}^{3} A_\alpha^2 \nabla \left(\frac{B_\alpha}{A_\alpha} \right) = - \sum_{\alpha=1}^{3} B_\alpha^2 \nabla \left(\frac{A_\alpha}{B_\alpha} \right) . \end{aligned} \tag{26.124}$$

(See also [1], [79] and [90].) Here, $\operatorname{div} \mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A}$ and $\operatorname{curl} \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A}$.

26.1.13 Dual Tensor Identities

In this article, $e^{\mu\nu\sigma\tau} = -e_{\mu\nu\sigma\tau}$ and $e_{0123} = +1$ is the Levi-Civita four-symbol [27] with familiar contractions:

$$e^{\mu\nu\sigma\tau} e_{\mu\kappa\lambda\rho} = - \begin{vmatrix} \delta^\nu_\kappa & \delta^\nu_\lambda & \delta^\nu_\rho \\ \delta^\sigma_\kappa & \delta^\sigma_\lambda & \delta^\sigma_\rho \\ \delta^\tau_\kappa & \delta^\tau_\lambda & \delta^\tau_\rho \end{vmatrix} , \tag{26.125}$$

$$e^{\mu\nu\sigma\tau} e_{\mu\nu\lambda\rho} = -2 \begin{vmatrix} \delta^\sigma_\lambda & \delta^\sigma_\rho \\ \delta^\tau_\lambda & \delta^\tau_\rho \end{vmatrix} = -2 \left(\delta^\sigma_\lambda \delta^\tau_\rho - \delta^\sigma_\rho \delta^\tau_\lambda \right) , \tag{26.126}$$

$$e^{\mu\nu\sigma\tau} e_{\mu\nu\sigma\rho} = -6\delta^\tau_\rho , \qquad e^{\mu\nu\sigma\tau} e_{\mu\nu\sigma\rho} = -24. \tag{26.127}$$

Dual second rank four-tensor identities are given by [27]:

$$e^{\mu\nu\sigma\tau} A_{\sigma\tau} = 2B^{\mu\nu} , \qquad e_{\mu\nu\sigma\tau} B^{\sigma\tau} = A_{\nu\mu} - A_{\mu\nu} . \tag{26.128}$$

In particular,

$$Q^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} + iS^{\mu\nu} = R^{\mu\nu} - \frac{i}{2} e^{\mu\nu\sigma\tau} F_{\sigma\tau} , \tag{26.129}$$

$$P_{\mu\nu} = F_{\mu\nu} + iG_{\mu\nu} = F_{\mu\nu} - \frac{i}{2} e_{\mu\nu\sigma\tau} R^{\sigma\tau} . \tag{26.130}$$

$$e_{\mu\nu\sigma\tau} Q^{\sigma\tau} = 2iP_{\mu\nu} , \qquad 2iQ^{\mu\nu} = e^{\mu\nu\sigma\tau} P_{\sigma\tau} . \tag{26.131}$$

$$2R^{\mu\nu} = e^{\mu\nu\sigma\tau} G_{\sigma\tau} , \qquad -2S^{\mu\nu} = e^{\mu\nu\sigma\tau} F_{\sigma\tau} . \tag{26.132}$$

$$2G_{\mu\nu} = -e_{\mu\nu\sigma\tau} R^{\sigma\tau} , \qquad 2F_{\mu\nu} = e_{\mu\nu\sigma\tau} S^{\sigma\tau} . \tag{26.133}$$

$$P_{\mu\nu} Q^{\mu\nu} = 2F_{\mu\nu} R^{\mu\nu} - \frac{i}{2} \left(e^{\mu\nu\sigma\tau} F_{\mu\nu} F_{\sigma\tau} + e_{\mu\nu\sigma\tau} R^{\mu\nu} R^{\sigma\tau} \right) . \tag{26.134}$$

By direct calculation,

$$F_{\mu\nu} R^{\mu\nu} = 2 (\mathbf{H} \cdot \mathbf{B} - \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}) , \tag{26.135}$$

$$e^{\mu\nu\sigma\tau} F_{\mu\nu} F_{\sigma\tau} = 8\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} , \qquad e_{\mu\nu\sigma\tau} R^{\mu\nu} R^{\sigma\tau} = 8\mathbf{H} \cdot \mathbf{D} . \tag{26.136}$$

As a result,

$$\frac{1}{4}P_{\mu\nu}Q^{\mu\nu} = \mathbf{H}\cdot\mathbf{B} - \mathbf{E}\cdot\mathbf{D} - i\left(\mathbf{E}\cdot\mathbf{B} + \mathbf{H}\cdot\mathbf{D}\right). \tag{26.137}$$

An important decomposition,

$$\begin{aligned} P^*_{\mu\lambda}Q^{\lambda\nu} + P_{\mu\lambda}\overset{*}{Q}^{\lambda\nu} &= 2\left(F_{\mu\lambda}R^{\lambda\nu} + G_{\mu\lambda}S^{\lambda\nu}\right) \\ &= 4F_{\mu\lambda}R^{\lambda\nu} + \delta^\nu_\mu F_{\sigma\tau}R^{\sigma\tau} \\ &= 4F_{\mu\lambda}R^{\lambda\nu} - 2\delta^\nu_\mu\left(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D} - \mathbf{H}\cdot\mathbf{B}\right), \end{aligned} \tag{26.138}$$

is complemented by an identity,

$$\begin{aligned} P_{\mu\lambda}Q^{\lambda\nu} + P^*_{\mu\lambda}\overset{*}{Q}^{\lambda\nu} &= \frac{1}{4}\left(P_{\sigma\tau}Q^{\tau\sigma} + P^*_{\sigma\tau}\overset{*}{Q}^{\tau\sigma}\right)\delta^\nu_\mu \\ &= \frac{1}{2}\left(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D} - \mathbf{H}\cdot\mathbf{B}\right)\delta^\nu_\mu. \end{aligned} \tag{26.139}$$

In matrix form,

$$PQ = (F + iG)(R + iS) = (FR - GS) + i(FS + GR), \tag{26.140}$$

$$P^*Q = (F - iG)(R + iS) = (FR + GS) + i(FS - GR). \tag{26.141}$$

Here,

$$FS = \frac{1}{4}\mathrm{Tr}\,(FS)\,I = (\mathbf{E}\cdot\mathbf{B})\,I, \tag{26.142}$$

$$GR = \frac{1}{4}\mathrm{Tr}\,(GR)\,I = (\mathbf{H}\cdot\mathbf{D})\,I. \tag{26.143}$$

$$FR - GS = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\,(FR)\,I = (\mathbf{E}\cdot\mathbf{D} - \mathbf{H}\cdot\mathbf{B})\,I, \tag{26.144}$$

$$\begin{aligned} FR + GS &= 2FR - \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\,(FR)\,I \\ &= 2FR - (\mathbf{E}\cdot\mathbf{D} - \mathbf{H}\cdot\mathbf{B})\,I. \end{aligned} \tag{26.145}$$

$$\mathrm{Tr}\,(FR + GS) = 0, \tag{26.146}$$

where I =diag$(1,1,1,1)$ is the identity matrix.

Also,

$$PQ = QP = (\mathbf{F}\cdot\mathbf{G})\,I, \tag{26.147}$$

$$\det P = \det Q = -\left(\mathbf{F}\cdot\mathbf{G}\right)^2 \tag{26.148}$$

and

$$\begin{aligned} \mathbf{F}\cdot\mathbf{G} &= (\mathbf{E} + i\mathbf{H})\cdot(\mathbf{D} + i\mathbf{B}) \\ &= (\mathbf{E}\cdot\mathbf{D} - \mathbf{H}\cdot\mathbf{B}) + i\left(\mathbf{E}\cdot\mathbf{B} + \mathbf{H}\cdot\mathbf{D}\right). \end{aligned} \tag{26.149}$$

Other useful dual four-tensor identities are given by [27]:

$$e^{\mu\nu\sigma\tau}A_{\nu\sigma\tau} = 6B^\mu, \qquad A_{\mu\nu\lambda} = e_{\mu\nu\lambda\sigma}B^\sigma. \tag{26.150}$$

In particular,

$$6i\frac{\partial Q^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} = e^{\mu\nu\lambda\sigma}\left(\frac{\partial P_{\lambda\sigma}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial P_{\nu\lambda}}{\partial x^\sigma} + \frac{\partial P_{\sigma\nu}}{\partial x^\lambda}\right), \tag{26.151}$$

and

$$\frac{\partial P_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} + \frac{\partial P_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial P_{\lambda\mu}}{\partial x^\nu} = ie_{\mu\nu\lambda\sigma}\frac{\partial Q^{\sigma\tau}}{\partial x^\tau} \tag{26.152}$$

(see also [47]).

26.1.14 Proof of Identities

In view of (26.43), or (26.131), and (26.152), we can write

$$\left(\frac{\partial P_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}}+\frac{\partial P_{\nu\lambda}}{\partial x^{\mu}}+\frac{\partial P_{\lambda\mu}}{\partial x^{\nu}}=ie_{\mu\nu\lambda\sigma}\frac{\partial Q^{\sigma\tau}}{\partial x^{\tau}}\right)\overset{*}{Q}{}^{\lambda\nu}, \tag{26.153}$$

or

$$\begin{aligned}&2\overset{*}{Q}{}^{\lambda\nu}\frac{\partial P_{\mu\nu}}{\partial x^{\lambda}}+\overset{*}{Q}{}^{\lambda\nu}\frac{\partial P_{\nu\lambda}}{\partial x^{\mu}}\\&\quad=i\left(e_{\mu\nu\lambda\sigma}\overset{*}{Q}{}^{\lambda\nu}\right)\frac{\partial Q^{\sigma\tau}}{\partial x^{\tau}}=-2P^{*}_{\mu\sigma}\frac{\partial Q^{\sigma\tau}}{\partial x^{\tau}}\end{aligned}$$

by (26.131). Therefore,

$$P^{*}_{\mu\lambda}\frac{\partial Q^{\lambda\nu}}{\partial x^{\nu}}-\frac{\partial P_{\mu\lambda}}{\partial x^{\nu}}\overset{*}{Q}{}^{\lambda\nu}=-\frac{1}{2}\overset{*}{Q}{}^{\sigma\tau}\frac{\partial P_{\tau\sigma}}{\partial x^{\mu}}. \tag{26.154}$$

In addition, with the help of (26.131) one gets

$$\begin{aligned}&2i\left(P^{*}_{\sigma\tau}\frac{\partial Q^{\tau\sigma}}{\partial x^{\mu}}\right)=P^{*}_{\sigma\tau}e^{\tau\sigma\lambda\nu}\frac{\partial P_{\lambda\nu}}{\partial x^{\mu}}\\&\quad=e^{\sigma\tau\nu\lambda}P^{*}_{\sigma\tau}\frac{\partial P_{\lambda\nu}}{\partial x^{\mu}}=-2i\left(\overset{*}{Q}{}^{\sigma\tau}\frac{\partial P_{\tau\sigma}}{\partial x^{\mu}}\right),\end{aligned}$$

which completes the proof.

26.2 The Response of Optical Fibres to Gravitational Waves by Mieling

Abstract

The response of optical fibre modes to plane gravitational waves of low frequency is computed. By solving perturbatively the Maxwell equations for step-index optical fibres in a gravitational wave background and implementing appropriate boundary conditions to describe single-mode fibres, explicit formulae for the perturbations of the phase and the polarisation of the fibre modes are obtained.

26.2.1 Introduction and Summary

While free space laser interferometric detectors of gravitational waves (GW's) such as LIGO and VIRGO are mainly analysed in the low-frequency regime $\omega_g \ll \omega$ where the GW frequency is much smaller than the laser frequency (using either the geodesic deviation equation [37, 38, 39], geometrical optics [34, 28, 13, 14, 33, 36] or Maxwell's equations directly [8, 12, 9]), GW detectors employing electromagnetic waveguides are typically discussed in the high-frequency regime [11, 12, 7, 6, 10]. In this work, we bring together aspects of both of these kinds of analyses by studying an electromagnetic waveguide in the low-frequency regime.

One of our main motivations for such calculations is to study the effect of GW's on light in regimes which are beyond a description in terms of geometrical optics. While such descriptions suffice to describe light propagation in vacuum or in dielectrics of large extensions (generally, whenever the wavelength is small compared to all other relevant length scales), light propagating in waveguides is only consistently described by wave optics, since the diameter of optical fibres is comparable to the optical wavelength. As a consequence, polarisation-dependent effects are not necessarily as strongly suppressed as in geometrical optics, where the transport equation for

the polarisation arises only at second order in the $1/\lambda$-expansion, see e.g. the general discussion in Ref. [23, Chapter III].

Further motivation for such investigations is provided by recent analyses of the perturbation of fibre-modes by Earth's gravitational field [3] and by Earth's rotation [19]. These calculations assume time-independent metrics, and the study of the influence of GW's illustrates how optical fibres react to time-dependent perturbations of the space-time metric.

Of course, there are still many technical challenges still to be overcome before fibre-optic interferometers could be used in experimental gravitational wave detection, see e.g. the discussion in Ref. [31, Appendix B]. Apart from the limited power handling capacity of optical fibres due to intensity damage and the emergence of non-linear effects at high power levels, the main obstructions seem to be shot noise (which is much more pronounced than in free-space interferometers due to fibre attenuation, cf. Refs. [Sect. 5.1] of Saulson1994,[Sect. 2.2 and 4.2] of Adhikari2004), as well as thermal and mechanical noises inside the fibre (both of which are absent in free-space interferometers). As these noise sources are more pronounced for long interferometer arms, we expect the detection of GW's in fibre-optic interferometers to be viable only for signals of higher frequencies than those measured in LIGO and Virgo (which are in the frequency range of roughly 30 to 250 Hz, see e.g. Refs. [40, 41, 42, 43]). Consequently, it is to be expected that fibre-optic interferometers would be most suitable for searching for continuous signals (recent searches for continuous GW's in LIGO data can be found e.g. in Refs. [46, 47, 45]). Moreover, since such interferometers can be made much smaller than the hitherto constructed free-space interferometers, it is conceivable to construct fibre-optic interferometers of multiple arms, providing more detailed position information on the GW source than the standard two-arm Michelson interferometers. We plan to assess the experimental feasibility of such fibre-optic interferometers in the near future.

To summarise our findings: we consider a gravitational wave in transverse-traceless gauge of the form

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \varepsilon A_{\mu\nu} \cos(\omega_g(t - \hat{\kappa}_i x^i)) \,, \tag{26.155}$$

propagating in an arbitrary direction $\hat{\kappa}$. (Here, we restrict the discussion to monochromatic plane waves. For arbitrary waveforms, one may use the Fourier transform and apply the analysis provided here to every Fourier component separately.) Within this GW background, we solve perturbatively the Maxwell equations for (single-mode) step-index optical fibres and obtain the following result. Choosing the z-axis to be the symmetry axis of the waveguide, we find the perturbed optical phase for fibres much shorter than the GW wavelength ($\omega_g z \ll 1$) to be

$$\psi = \omega t - \beta z + m\theta - \tfrac{1}{2}\varepsilon c_1 A_{zz}\, \omega z \cos(\omega_g t) \,, \tag{26.156}$$

where ω is the angular frequency of the mode, β the propagation constant and m the azimuthal mode index. The Jones matrix, describing the perturbation of the polarisation (see e.g. Refs. [Chap. 3] of Hodgson2005, [Sect. 1.4] of Damask2004 for an introduction to the Jones formalism), is found to be

$$M = \mathbf{1} - i\varepsilon c_2 \Delta^2\, \omega z \cos(\omega_g t) \begin{pmatrix} +\frac{1}{2}(A_{xx} - A_{yy}) & A_{xy} \\ A_{xy} & -\frac{1}{2}(A_{xx} - A_{yy}) \end{pmatrix} , \tag{26.157}$$

where $\Delta = (n_1 - n_2)/n_1$ is the relative difference of the refractive indices in the core (n_1) and the cladding (n_2). The coefficients c_1 and c_2 arising here are computed numerically for typical single-mode fibres. We find that $c_1 \approx \bar{n}$, where $\bar{n}$ is the (frequency dependent) effective refractive index of the fibre, and $c_2 \approx 0.3$. The diagonal terms (of opposite sign) describe birefringence, while the off-diagonal terms (of equal sign) describe a deformation of linear polarisation to elliptic polarisation.

Figure 26.3 shows how these three effects (phase shift, birefringence and polarisation deformation) depend on the angle ϑ between the direction of light propagation and the direction of

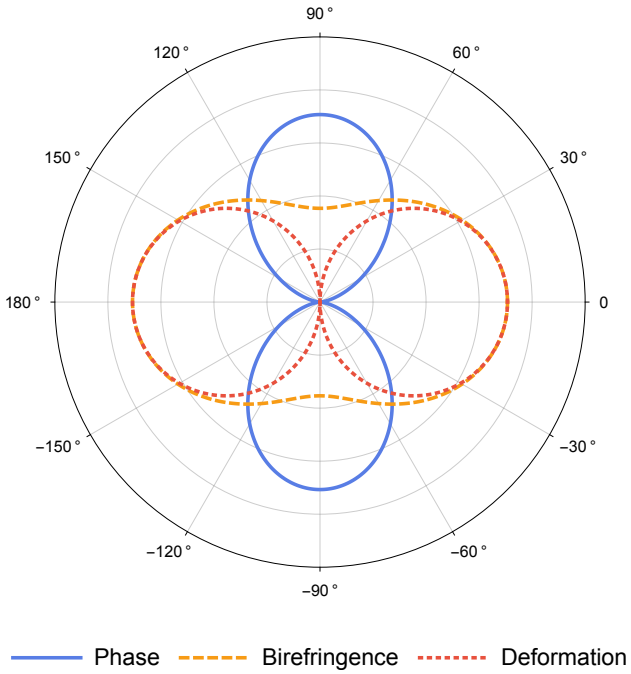


Figure 26.3: Dependence of three terms A_{zz}, $\frac{1}{2}(A_{xx} - A_{yy})$ and A_{xy} (in absolute value) on the angle ϑ formed by the optical and the gravitational wave-vectors. The blue curve ("phase") describes the angular dependence of the overall phase shift, the dashed orange line ("birefringence") describes the difference in phase shift between the two polarisation states of light, and the dotted red curve ("deformation") quantifies the mixing of the polarisation states.

the gravitational wave. The precise dependence on this angle and on the polarisation of the gravitational wave is discussed in detail in Section 26.2.8.

It is seen that the phase shift is maximal when the gravitational wave propagates orthogonally to the fibre axis, and vanishes when it propagates collinearly with the light ray (i.e. parallel or antiparallel). For collinear propagation, the polarisation-dependent effects are maximal: the birefringence effect is then sensitive to the + polarisation of the gravitational wave, while the deformation effect is sensitive to the × polarisation.

26.2.2 Statement of the Problem

Consider the gravitational wave (GW) metric

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \varepsilon A_{\mu\nu} \cos(\kappa.x)\,, \tag{26.158}$$

where $\kappa.x = \kappa_\mu x^\mu$, $\kappa = \omega_g(\mathrm{d}t - \hat{\kappa}_i \mathrm{d}x^i)$ with $\hat{\kappa}_i = \hat{\kappa}^i$ being a "spatial" unit vector (normalised with respect to the unperturbed metric) determining the direction of wave propagation, ε is the amplitude of the gravitational wave (we assume $\varepsilon \ll 1$), and A is a symmetric matrix of constant entries which is transverse ($A_{\mu 0} = A_{\mu i}\hat{\kappa}^i = 0$) and traceless ($\eta^{\mu\nu}A_{\mu\nu} = 0$), so we are using TT coordinates.

We wish to describe the propagation of light in a cylindrical waveguide at rest in this coordinate system. More precisely, we consider a cylindrical step-index fibre consisting of a linear dielectric with constant refractive index n_1 in the core and n_2 in the cladding (with $n_1 > n_2$). Such waveguides are typically non-magnetic (i.e. of permeability $\mu = 1$) and hence the permittivity is $\epsilon = \sqrt{n}$.

We will neglect boundary effects from the ends of the waveguide and the outer boundary of the cladding (the waveguide is thus modelled as infinitely long and the cladding as infinitely

thick), and we shall neglect deformations of the fibre, so that in cylindrical coordinates r, θ, z (related to the above TT coordinates as in flat space) the core-cladding interface is located at $r = \rho$. A more accurate model would have to take into account the perturbation of the spatial metric when formulating the boundary conditions, but at such a level of accuracy we estimate that one would also have to consider elastic deformations of the waveguide due to the gravitational wave, which is beyond the scope of this article.

Being concerned with *weak* gravitational waves of *low* frequency, we work in a perturbative setting with two expansion parameters

$$\varepsilon \ll 1\,, \qquad\qquad \Omega := \omega_g/\omega \ll 1\,, \tag{26.159}$$

where ε is the GW amplitude, ω_g its frequency, and ω is the laser frequency.

26.2.3 Decomposition of the Maxwell Equations

In this section, we write the Maxwell equations in the GW background (26.158) in a 3+1 form, following Ref. [3] with $c = 1$. To this end, set

$$\mathrm{g}_{ij} = g_{ij} = \delta_{ij} + \varepsilon A_{ij} \cos(\kappa.x)\,, \tag{26.160}$$

which is the time-dependent "spatial" metric induced on the hypersurfaces of constant time t, and denote by ∇ the associated (spatial) Levi-Civita derivative.

Since $g_{00} = -1 + O(\varepsilon^2)$ and $\partial_0(\det \mathrm{g}) = O(\varepsilon^2)$, the space-time split of the Faraday two-form F and the displacement bivector $\bar{F}$ given in Ref. [3] yields

$$D^i = \bar{F}^{0i}\,, \qquad H_i = \tfrac{1}{2}\epsilon_{ijk}\bar{F}^{jk}\,, \qquad E_i = F_{i0}\,, \qquad B^i = \tfrac{1}{2}\epsilon^{ijk}F_{jk}\,, \tag{26.161}$$

where ϵ is the spatial volume form (not to be confused with the gravitational wave amplitude ε). Here and henceforward, we neglect terms of second and higher order in ε and, for brevity, we will not write the error term $O(\varepsilon^2)$ explicitly. The field equations then take the standard form

$$\dot{B}^i + \epsilon^{ijk}\nabla_j E_k = 0\,, \qquad \dot{D}^i - \epsilon^{ijk}\nabla_j H_k = 0\,, \qquad \nabla_i B^i = 0\,, \qquad \nabla_i D^i = 0\,, \tag{26.162}$$

where an overset dot indicates a time derivative. Following Ref. [16], we define the optical metric

$$\gamma^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} + (1 - n^2)u^\mu u^\nu\,, \tag{26.163}$$

where u is the four-velocity of the dielectric and n its refractive index. This allows to write the constitutive equation in the form

$$\mu\bar{F}^{\alpha\beta} = \gamma^{\alpha\rho}\gamma^{\beta\sigma}F_{\rho\sigma}\,. \tag{26.164}$$

In the considered case, we have $u^\mu = \delta^\mu_0$ and

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - \varepsilon A^{\mu\nu}\cos(\kappa.x)\,, \tag{26.165}$$

where the indices of A were raised with the unperturbed metric η. The constitutive equations then reduce to

$$D^i = \epsilon \mathrm{g}^{ij}E_j\,, \qquad\qquad B^i = \mu \mathrm{g}^{ij}H_j\,. \tag{26.166}$$

As the spatial metric is perturbed by the gravitational wave, this is the only part where the field equations differ from those of flat space.

To further simplify the equations, we define the Riemann-Silberstein vector

$$Z^i := \mu D^i + jnB^i\,, \tag{26.167}$$

where j is an imaginary unit ($j^2 = -1$), such that the Maxwell equations take the form

$$n\dot{Z}^i + j\epsilon^{ijk}\nabla_j(\mathrm{g}_{kl}Z^l) = 0\,, \tag{26.168}$$

$$\nabla_i Z^i = 0\,, \tag{26.169}$$

wherever n is locally constant.

In the following calculations, we will use *two* independent (commuting) imaginary units i and j, where i is reserved for the usual complex description of waves (i.e. the physical fields are the i-real parts) and j is used for this compact formulation of the field equations.

As a side remark: the algebraic structure here is that of the complex vector space $\mathbf{C}^2$ with 1 identified with $(1,0)$ and j identified with $(0,1)$, and the product $(a,b)\times(c,d) := (ac-bd, ad+bc)$, where a,b,c,d are usual complex numbers. In particular, the product $ij = ji$ is represented by $(i,0)\times(0,1) = (0,i)$, which is not equal to -1, here identified with $(-1,0)$.

Using only a single complex unit, it would not be possible to use this complex description of waves while simultaneously encoding the entire electromagnetic field in a single vector field. Indeed, if D and B are complex, then a field of the form $Z' = \mu D + inB$ would only provide incomplete information about D and B, as it mixes the real part of D with the imaginary part of B, and vice versa. To recover those two fields entirely, one would have to use a second complex field $Z'' = \mu D - inB$. In contrast, the field Z defined in (26.167) allows obtaining the i-complex fields D and B simply by separating the j-real and j-imaginary parts.

26.2.4 The Unperturbed Modes

In this section, we briefly review the unperturbed solution to the problem in a notation which is convenient for the following calculations.

Adapted Basis

To describe the modes in a cylindrical waveguide, it is useful to use the complex frame

$$\mathfrak{e}_\parallel \equiv \mathfrak{e}_z\,, \qquad \mathfrak{e}_+ = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(\mathfrak{e}_r - i\mathfrak{e}_\theta)\,, \qquad \mathfrak{e}_- = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(\mathfrak{e}_r + i\mathfrak{e}_\theta)\,, \tag{26.170}$$

where $(\mathfrak{e}_r, \mathfrak{e}_\theta, \mathfrak{e}_z)$ is the standard orthonormal frame adapted to cylindrical coordinates (r,θ,z). The associated coframe is given by

$$\mathfrak{e}^\parallel = \mathrm{d}z\,, \qquad \mathfrak{e}^+ = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(\mathrm{d}r + ir\mathrm{d}\theta)\,, \qquad \mathfrak{e}^- = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(\mathrm{d}r - ir\mathrm{d}\theta)\,. \tag{26.171}$$

The metric of flat space can then be written as

$$\delta = \mathfrak{e}^+\otimes\mathfrak{e}^- + \mathfrak{e}^-\otimes\mathfrak{e}^+ + \mathfrak{e}^\parallel\otimes\mathfrak{e}^\parallel\,, \tag{26.172}$$

so raising and lowering of indices interchanges $+$ and $-$, e.g. for a vector v one has $v^\pm = v_\mp$ but $v^\parallel = v_\parallel$. The only non-vanishing components of the spatial Levi-Civita connection one-form are

$$\omega^+{}_+ = +i\mathrm{d}\theta = \tfrac{1}{\sqrt{2}r}\left(\mathfrak{e}^+ - \mathfrak{e}^-\right)\,, \qquad \omega^-{}_- = -i\mathrm{d}\theta = \tfrac{1}{\sqrt{2}r}\left(\mathfrak{e}^- - \mathfrak{e}^+\right)\,. \tag{26.173}$$

We find the cross-products to be

$$\mathfrak{e}_\parallel\times\mathfrak{e}_\pm = \pm i\mathfrak{e}_\pm\,, \qquad \text{and} \qquad \mathfrak{e}_+\times\mathfrak{e}_- = i\mathfrak{e}_\parallel\,, \tag{26.174}$$

and consequently

$$\mathfrak{e}_+\cdot(\mathfrak{e}_-\times\mathfrak{e}_\parallel) = +i\,, \tag{26.175}$$

so that for the Levi-Civita tensor (the volume form) we obtain

$$\epsilon_{+-\parallel} := \epsilon(\mathfrak{e}_+,\mathfrak{e}_-,\mathfrak{e}_\parallel) = +i\,, \qquad \text{and} \qquad \epsilon^{+-\parallel} = -i\,. \tag{26.176}$$

Unperturbed Bessel Modes

The computation of the electromagnetic modes in a cylindrical step-index waveguide is a standard calculation which is discussed in many textbooks, e.g. Refs. see [Chapter 8] of Jackson1998, [Section 3.1] of Liu2005, [Section 16.10] of Davis2009. Here, we merely state the result, expressed in terms of the j-complex field Z and referred to the i-complex basis introduced above.

The unperturbed Bessel modes take the concise form

$$Z^{(0)\parallel} = f_0(\alpha; r) e^{i(\omega t - \beta z + m\theta)}\,, \tag{26.177}$$

$$i\zeta Z^{(0)\pm} = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\rho^2(\beta \pm ijn\omega) c_m^{\pm} Z^{(0)\parallel}\,, \tag{26.178}$$

where

$$\zeta = \rho^2(n^2\omega^2 - \beta^2)\,, \tag{26.179}$$

and

$$c_m^{\pm} = \partial_r \mp \tfrac{m}{r}\,. \tag{26.180}$$

Here, ω is the angular frequency of the wave, β the propagation constant, m is the azimuthal mode index, and ρ is the radius of the fibre core. The radial function f_0 is given by

$$f_0(\alpha_1, \alpha_2; r) = \begin{cases} \alpha_1 J_m(Ur/\rho)\,, & r < \rho\,, \\ \alpha_2 K_m(Wr/\rho)\,, & r > \rho\,, \end{cases} \tag{26.181}$$

where α_1, α_2 are j-complex constants (related by appropriate continuity conditions discussed below), and

$$U = \sqrt{\rho^2(n_1^2\omega^2 - \beta^2)}\,, \qquad \text{and} \qquad W = \sqrt{\rho^2(\beta^2 - n_2^2\omega^2)}\,. \tag{26.182}$$

The function f_0 satisfies the Bessel equation

$$\mathrm{B}_0 f_0(\alpha; r) \equiv \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{m^2}{r^2} + \frac{\zeta}{\rho^2}\right] f_0(\alpha; r) = 0\,, \tag{26.183}$$

both in the core and the cladding of the fibre.

In passing, let us note that the $c_m^{\pm}$ act as "ladder operators", i.e. for any real number λ one has the identities

$$c_m^{\pm} J_m(\lambda r) = \mp\lambda J_{m\pm1}(\lambda r)\,, \qquad \text{and} \qquad c_m^{\pm} K_m(\lambda r) = -\lambda K_{m\pm1}(\lambda r)\,, \tag{26.184}$$

see e.g. Ref. [1, Eq. 9.1.27 on p. 361 and Eq. 9.6.26 on p. 376], so that we may write the $\pm$-components of the field as

$$i\zeta Z^{(0)\pm} = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\rho(\beta \pm ijn\omega) f_{\pm}(\alpha; r) e^{i(\omega t - \beta z + m\theta)}\,, \tag{26.185}$$

where

$$f_{\pm}(\alpha_1, \alpha_2; r) = \rho c_m^{\pm} f_0(\alpha_1, \alpha_2; r) = \begin{cases} \mp\alpha_1 U J_{m\pm1}(Ur/\rho)\,, & r < \rho\,, \\ -\alpha_2 W K_{m\pm1}(Wr/\rho)\,, & r > \rho\,. \end{cases} \tag{26.186}$$

The dispersion relation is then obtained by imposing continuity conditions at the core-cladding interface. As we will discuss these conditions extensively for the perturbed problem, we merely outline the basic reasoning here.

1. Maxwell's equations imply that the field components $D^r, E_\theta, E_z, B^r, H_\theta, H_z$ are continuous at the core-cladding interface (at $r = \rho$).

2. Only four of these six continuity conditions are linearly independent.

3. Since the fields have two j-complex, and thus four j-real parameters, there is a j-real equation of the form (jumps) $= \Pi_0$(parameters), where Π_0 is a 4×4 matrix.

4. The continuity conditions are thus only solvable if $\det \Pi_0 = 0$, which constitutes the dispersion relation for β and ω. This equation is transcendental (as it contains various Bessel functions) and must thus be solved numerically.

26.2.5 The Perturbed Modes

As we shall see in this section, the effect of weak GW's on light in waveguides is twofold: (i) the phase is modulated by the GW, and (ii) due to the tensorial nature of the GW amplitude, optical sidebands with an angular dependence of the form $e^{i(m+k)\theta}$, with $k \neq 0$, arise. We find the dominant effects to be (a) the correction of the phase ($k = 0$) and (b) the perturbation of the polarisation, which arises when $m + k = -m$.

Outline

Let us first give an outline of the calculation. We start by deriving and solving the first order correction to the wave equation for the longitudinal field component. From this, we derive the transverse components of the electromagnetic field, finding structures similar to the ones of the unperturbed case. Schematically, the correction to the central mode can be written as

$$Z_0^{(1)} = [f^+(\alpha) + g^+(\sigma^+)]e^{i(\omega t - \beta z + m\theta + \kappa.x)} + [f^-(\alpha) + g^-(\sigma^-)]e^{i(\omega t - \beta z + m\theta - \kappa.x)}\,, \tag{26.187}$$

where the coefficients α describe the unperturbed field (they act as source terms in the wave equation for $Z^{(1)}$) and the coefficients $\sigma^\pm$ parametrise homogeneous solutions of the wave equation. The continuity condition then takes the schematic form

$$\Pi_0\alpha + \varepsilon[\mathrm{P}\boldsymbol{\alpha} + \Sigma^+\boldsymbol{\sigma}^+]e^{+i\kappa.x} + \varepsilon[\mathrm{P}\boldsymbol{\alpha} + \Sigma^-\boldsymbol{\sigma}^-]e^{-i\kappa.x} = 0\,, \tag{26.188}$$

where $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\sigma}^\pm$ are column vectors, each comprising four j-real numbers which parametrise α and $\sigma^\pm$, and $\Pi_0, \mathrm{P}, \Sigma^\pm$ are j-real 4×4-matrices.

The first term is the same as in the unperturbed problem, so the dispersion relation $\det \Pi_0 = 0$ and the coefficients $\boldsymbol{\alpha}$ remain unchanged. The coefficients $\boldsymbol{\sigma}^\pm$ are then determined from

$$\Sigma^\pm\boldsymbol{\sigma}^\pm + \mathrm{P}\boldsymbol{\alpha} = 0\,. \tag{26.189}$$

For the central mode, we find that $\Sigma^\pm$ is close to the singular matrix Π_0 and its inverse has the form $(\Sigma^\pm)^{-1} = \pm\Omega^{-1}\Sigma' + O(\Omega^0)$, so that the parameters $\boldsymbol{\sigma}$ are given by

$$\boldsymbol{\sigma}^\pm = \mp\Omega^{-1}\Sigma'\mathrm{P}\boldsymbol{\alpha} + O(\Omega^0)\,. \tag{26.190}$$

In Section 26.2.6, we show that this correction of order $1/\Omega$ amounts to a perturbation to the phase of the electromagnetic wave.

For the sidebands, we obtain similar equations. In almost all cases ($m + k \neq -m$), the coefficient matrices are *not* close to being singular, and hence no terms of order $1/\Omega$ arise there. However, in the exceptional case $m + k = -m$ we have $\det \Pi_k = \det \Pi_0 = 0$, so that we again obtain terms of order $1/\Omega$ there. We show in Section 26.2.7 that these terms describe the perturbation of the polarisation of the electromagnetic wave.

The Polarisation of the Gravitational Wave

We start by writing the polarisation tensor A of the GW, as defined in (26.158), in the complex frame introduced above. Using

$$\mathrm{d}x = \tfrac{1}{\sqrt{2}}[\mathfrak{e}^+ e^{+i\theta} + \mathfrak{e}^- e^{-i\theta}]\,, \qquad \mathrm{d}y = \tfrac{-i}{\sqrt{2}}[\mathfrak{e}^+ e^{+i\theta} - \mathfrak{e}^- e^{-i\theta}]\,, \tag{26.191}$$

one finds the components of

$$A = A_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \otimes \mathrm{d}x^\nu = A_{ij}\mathfrak{e}^i \otimes \mathfrak{e}^j \tag{26.192}$$

in the basis $\mathfrak{e}_+, \mathfrak{e}_-, \mathfrak{e}_\parallel$ to be

$$A_{\parallel\parallel} = A_{zz}\,, \tag{26.193}$$
$$A_{+-} = A_{-+} = \tfrac{1}{2}(A_{xx} + A_{yy})\,, \tag{26.194}$$
$$A_{\pm\parallel} = A_{\parallel\pm} = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(A_{xz} \mp iA_{yz})e^{\pm i\theta}\,, \tag{26.195}$$
$$A_{++} = \tfrac{1}{2}(A_{xx} - A_{yy} - 2iA_{xy})e^{+2i\theta}\,, \tag{26.196}$$
$$A_{--} = \tfrac{1}{2}(A_{xx} - A_{yy} + 2iA_{xy})e^{-2i\theta}\,. \tag{26.197}$$

The condition that A is traceless now translates to

$$2A_{+-} + A_{\parallel\parallel} = 0\,, \tag{26.198}$$

while the transversality condition takes the form

$$A_{i+}\hat{\kappa}_- + A_{i-}\hat{\kappa}_+ + A_{i\parallel}\hat{\kappa}_\parallel = 0\,, \tag{26.199}$$

where the frame components of $\hat{\kappa}$ are

$$\hat{\kappa}_\pm = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(\hat{\kappa}_x \mp i\hat{\kappa}_y)e^{\pm i\theta}\,, \qquad \text{and} \qquad \hat{\kappa}_\parallel = \hat{\kappa}_z\,. \tag{26.200}$$

To separate the amplitudes of A_{ij} from their θ-dependence, we write

$$A_{\parallel\parallel} = a_0\,, \qquad A_{\parallel\pm} = a_{\pm1}e^{\pm i\theta}\,, \qquad A_{\pm\pm} = a_{\pm2}e^{\pm 2i\theta}\,, \tag{26.201}$$

and due to the trace condition we have $A_{+-} = A_{-+} = -\frac{1}{2}a_0$.

The Wave Equation

As shown in Section 26.2.11, in regions where n is constant, the field equations (26.168) and (26.169) imply the wave equation

$$n^2\ddot{Z}^i - (\Delta Z)^i + R^i{}_j Z^j + jn\epsilon^{ijk}\nabla_j(\dot{\mathrm{g}}_{kl}Z^l) = 0\,, \tag{26.202}$$

where Δ is the *perturbed* spatial vector Laplacian (i.e. associated to the perturbed spatial metric g) and $R^i{}_j$ is the spatial Ricci tensor. As the exterior derivative is independent of the connection (provided it is torsion-free), it suffices to use the unperturbed Levi-Civita connection here: $\nabla \equiv \nabla^{(0)}$.

Let us now expand the electromagnetic field $Z = Z^{(0)} + \varepsilon Z^{(1)}$ as well as the Laplacian $\Delta = \Delta^{(0)} + \varepsilon\Delta^{(1)}$. Since $Z^{(0)}$ satisfies the unperturbed equation $n^2\ddot{Z}^{(0)} - \Delta^{(0)}Z^{(0)} = 0$, only terms of order ε remain, so we obtain at first order

$$\Box Z^{(1)i} - (\Delta^{(1)}Z^{(0)})^i + R^{(1)i}{}_j Z^{(0)j} + jn\epsilon^{ijk}\nabla_j(\dot{\mathrm{g}}^{(1)}_{kl}Z^{(0)l}) = 0\,, \tag{26.203}$$

where we have set

$$\Box Z^i := n^2 \ddot{Z}^i - (\Delta^{(0)} Z)^i \,. \tag{26.204}$$

The derivatives of the unperturbed field are of order ω, which is much larger than the terms arising from derivatives of the metric or the spatial Ricci tensor, so we neglect the last two terms in (26.203), which are suppressed by $\Omega = \omega_g/\omega$ or more. At this level of accuracy, we also have

$$\Delta^{(1)} Z^{(0)i} \approx \mathrm{g}^{(1)jk} \nabla_j \nabla_k Z^{(0)i} = -\cos(\kappa.x) A^{jk} \nabla_j \nabla_k Z^{(0)i} \,. \tag{26.205}$$

With these approximations, we arrive at the wave equation

$$\Box Z^{(1)i} + \cos(\kappa.x) A^{jk} \nabla_j \nabla_k Z^{(0)i} = 0 \,. \tag{26.206}$$

We shall use one further natural approximation:

$$\cos(\kappa.x) = \cos(\omega_g(t - \hat{\kappa}_z z - r(\hat{\kappa}_x \cos\theta + \hat{\kappa}_y \sin\theta))) \approx \cos(\omega_g(t - \hat{\kappa}_\parallel z)) \,, \tag{26.207}$$

which is admissible since the diameter of the waveguide is negligible compared to the GW wavelength ($\rho\omega_g \ll 1$). As an illustration: for typical optical fibres, ρ measures a couple of micrometers and GW wavelengths detected by LIGO measure hundreds of kilometres: $\rho\omega_g \sim 10^{-10}$, so the error terms here will be much larger than those arising from quadratic terms in the GW amplitude $\varepsilon \sim 10^{-21}$. At this level of accuracy, we may thus replace $\kappa.x$ by $\kappa.x_\parallel := \omega_g(t - \hat{\kappa}_\parallel z)$ to obtain

$$\Box Z^{(1)i} + \cos(\kappa.x_\parallel) A^{jk} \nabla_j \nabla_k Z^{(0)i} = 0 \,. \tag{26.208}$$

Using the fact that the connection one-form satisfies $\omega^\parallel{}_{ij} = 0$, the second covariant derivative in this equation evaluates to

$$\nabla_j \nabla_k Z^\parallel = \mathfrak{e}_j(\mathfrak{e}_k(Z^\parallel)) - \omega^l{}_{kj} \mathfrak{e}_l(Z^\parallel) \,. \tag{26.209}$$

Note that the unperturbed field $Z^{(0)}$ depends on the angle θ only as $e^{im\theta}$. Since A has components which vary with θ as $e^{\pm i\theta}$ and $e^{\pm 2i\theta}$, the first order correction will have sidebands with m shifted by one and two in either direction. Moreover, we find it convenient to separate terms which oscillate like the metric perturbation (i.e. trigonometric functions of $\kappa.x_\parallel$) into terms with complex exponentials and thus decompose the perturbation of the electromagnetic field (and other quantities if needed) as

$$Z^{(1)a} = \sum_{k=-2}^{2} \sum_{l=\pm 1} \mathcal{Z}^a{}_{kl}(r) e^{i(\omega t - \beta z + (m+k)\theta + l\,\kappa.x_\parallel)} \,. \tag{26.210}$$

Thus, in $\mathcal{Z}^a{}_{kl}$ the first index refers to the vector component (typically taken with respect to the complex frame $\mathfrak{e}_\parallel, \mathfrak{e}_\pm$), the first lower index determines the angular mode number, and the second lower index determines the sign in the complex exponential $\exp(\pm i\kappa.x_\parallel)$.

For the wave equation, we discuss the central mode ($k = 0$) and the sidebands ($k \neq 0$) separately.

Central Mode

For the central mode ($k = 0$), the only contributions come from $A^{\parallel\parallel\parallel}$ and $A^{+-} = A^{-+}$, so we have

$$(A^{jk} \nabla_j \nabla_k Z^{(0)\parallel})_0 = A^{\parallel\parallel\parallel} \partial_z \partial_z Z^{(0)\parallel} + A^{+-}[\mathfrak{e}_+\mathfrak{e}_- + \mathfrak{e}_-\mathfrak{e}_+ + \tfrac{1}{\sqrt{2}r}(\mathfrak{e}_+ + \mathfrak{e}_-)] Z^{(0)\parallel} \,, \tag{26.211}$$

where the subscript indicates $k = 0$. Now, $\mathfrak{e}_\pm$ acts on $Z^{(0)\|}$ as $\frac{1}{\sqrt{2}}c_m^\pm$, as defined in (26.180), so

$$[\mathfrak{e}_+\mathfrak{e}_- + \mathfrak{e}_-\mathfrak{e}_+ + \tfrac{1}{\sqrt{2}r}(\mathfrak{e}_+ + \mathfrak{e}_-)]Z^{(0)\|} = (\partial_r^2 + r^{-1}\partial_r - m^2 r^{-2})Z^{(0)\|}\,. \tag{26.212}$$

Using the unperturbed radial equation (26.183) as well as the trace condition (26.198), we thus obtain

$$(A^{jk}\nabla_j\nabla_k Z^{(0)\|})_0 = \tfrac{1}{2}a_0(\zeta/\rho^2 - 2\beta^2)Z^{(0)\|}\,. \tag{26.213}$$

Sidebands

For the sidebands with m shifted by ± 1, the only relevant terms are those involving $A^{\mp\|} = A_{\pm\|} = a_{\pm 1}e^{\pm i\theta}$, so we find

$$(A^{jk}\nabla_j\nabla_k Z^{(0)\|})_{\pm 1} = -\sqrt{2}i\beta a_{\pm 1}c_m^\pm Z^{(0)\|}\,, \tag{26.214}$$

and for the sidebands with m shifted by ± 2, the relevant terms come from $A^{\mp\mp} = A_{\pm\pm} = a_{\pm 2}e^{\pm 2i\theta}$, so

$$(A^{jk}\nabla_j\nabla_k Z^{(0)\|})_{\pm 2} = \tfrac{1}{2}a_{\pm 2}(c_m^\pm c_m^\pm - \tfrac{1}{r}c_m^\pm)Z^{(0)\|} = \tfrac{1}{2}a_{\pm 2}c_{m\pm 1}^\pm c_m^\pm Z^{(0)\|}\,. \tag{26.215}$$

The Radial Equations

Using separation of variables, the wave equations just derived are reduced to radial equations. We give explicit solutions Bessel equations arising this way.

Central Mode

Using the decomposition (26.210), the inhomogeneous wave equation (26.208) yields

$$\mathrm{B}_0^\pm \mathcal{Z}^\|_{0\pm} = \tfrac{1}{4}a_0(\zeta/\rho^2 - 2\beta^2)f_0(\alpha, r)\,, \tag{26.216}$$

where

$$\mathrm{B}_0^\pm = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\zeta_\pm}{\rho^2} - \frac{m^2}{r^2}\,, \tag{26.217}$$

$$\zeta_\pm = \rho^2(n^2\omega_\pm^2 - \beta_\pm^2)\,, \tag{26.218}$$

$$\omega_\pm = \omega \pm \omega_g\,, \tag{26.219}$$

$$\beta_\pm = \beta \pm \hat{\kappa}_\| \omega_g\,. \tag{26.220}$$

The homogeneous solutions to this equation which are regular at the origin and vanish at infinity are evidently

$$f_0^\pm(\sigma, r) = \begin{cases} \sigma_1 J_m(U_\pm r/\rho)\,, & r < \rho\,, \\ \sigma_2 K_m(W_\pm r/\rho)\,, & r > \rho\,, \end{cases} \tag{26.221}$$

where σ_1, σ_2 are constants (continuity conditions relating them are discussed in a later section), and where $U_\pm, W_\pm$ are defined in analogy to U, W in (26.182):

$$U_\pm = \sqrt{\rho^2(n_1^2\omega_\pm^2 - \beta_\pm^2)}\,, \qquad \text{and} \qquad W_\pm = \sqrt{\rho^2(\beta_\pm^2 - n_2^2\omega_\pm^2)}\,. \tag{26.222}$$

To find particular solutions, we consider the more general problem

$$\rho^2 \mathrm{B}_\nu^\pm p_\nu^\pm = \begin{cases} \alpha_1 J_{m+\nu}(Ur/\rho)\,, & r < \rho\,, \\ \alpha_2 K_{m+\nu}(Wr/\rho)\,, & r > \rho\,, \end{cases} \tag{26.223}$$

where α_1, α_2 are arbitrary constants and $\mathrm{B}_\nu^\pm$ is a Bessel operator of arbitrary order ν:

$$\mathrm{B}_\nu^\pm = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\zeta_\pm}{\rho^2} - \frac{(m+\nu)^2}{r^2}\,. \tag{26.224}$$

Particular solutions to this equation are given by

$$p_\nu^\pm(\alpha, r) = \begin{cases} \alpha_1[Y_{m+\nu}(U_\pm r/\rho)\Gamma_{m+\nu}^\pm(r/\rho) + J_{m+\nu}(U_\pm r/\rho)\tilde\Gamma_{m+\nu}^\pm(r/\rho)]\,, & r<\rho\,, \\ \alpha_2[I_{m+\nu}(W_\pm r/\rho)\Delta_{m+\nu}^\pm(r/\rho) + K_{m+\nu}(W_\pm r/\rho)\tilde\Delta_{m+\nu}^\pm(r/\rho)]\,, & r>\rho\,, \end{cases} \tag{26.225}$$

where

$$\Gamma_\nu^\pm(z) = \frac{\pi}{2}\int_0^z J_\nu(U_\pm z')J_\nu(Uz')z'\,\mathrm{d}z'\,, \tag{26.226}$$

$$\tilde\Gamma_\nu^\pm(z) = \frac{\pi}{2}\int_z^1 Y_\nu(U_\pm z')J_\nu(Uz')z'\,\mathrm{d}z'\,, \tag{26.227}$$

$$\Delta_\nu^\pm(z) = -\int_z^\infty K_\nu(W_\pm z')K_\nu(Wz')z'\,\mathrm{d}z'\,, \tag{26.228}$$

$$\tilde\Delta_\nu^\pm(z) = -\int_1^z I_\nu(W_\pm z')K_\nu(Wz')z'\,\mathrm{d}z'\,. \tag{26.229}$$

Equation (26.223) is readily verified using the Wrońskians

$$\begin{vmatrix} J_m(r) & J_m'(r) \\ Y_m(r) & Y_m'(r) \end{vmatrix} = \frac{2}{\pi}\frac{1}{r}\,, \qquad \text{and} \qquad \begin{vmatrix} K_m(r) & K_m'(r) \\ I_m(r) & I_m'(r) \end{vmatrix} = \frac{1}{r}\,, \tag{26.230}$$

cf. e.g. Ref. [1, eqns. 9.1.15 on p. 360 and 9.6.15 on p. 375]. The integral ranges were chosen as follows. The function $\Gamma_\nu^\pm$ multiplies Y_ν which diverges at the origin, so we chose the region of integration such that $\Gamma_\nu^\pm$ vanishes there. The region of integration for $\Delta_\nu^\pm$ was chosen for a similar reason, as I_ν diverges at large distances. Finally, the ranges for $\tilde\Gamma_\nu^\pm$ and $\tilde\Delta_\nu^\pm$ were chosen such that these functions vanish at the core-cladding interface $r=\rho$, where certain components of the electromagnetic field are required to be continuous.

Using the function p_0, one obtain the general solution to (26.216) which is regular at the origin and vanishes at infinity:

$$\mathcal{Z}^\parallel{}_{0\pm} = a_0[\tfrac{1}{4}(\zeta - 2\rho^2\beta)p_0^\pm(\alpha) + f_0^\pm(\sigma_{0,\pm})]\,, \tag{26.231}$$

where a_0 was factored out for convenience.

Sidebands

Using the decomposition (26.210) for the sidebands also, the inhomogeneous wave equation (26.208) reduces to

$$\mathrm{B}_{\pm1}^+\mathcal{Z}^\parallel{}_{\pm1+} = \mathrm{B}_{\pm1}^-\mathcal{Z}^\parallel{}_{\pm1-} = \tfrac{i}{\sqrt{2}}a_{\pm1}\beta\rho^{-1}f_{\pm1}(\alpha)\,, \tag{26.232}$$

$$\mathrm{B}_{\pm2}^+\mathcal{Z}^\parallel{}_{\pm2+} = \mathrm{B}_{\pm2}^-\mathcal{Z}^\parallel{}_{\pm2-} = \tfrac{1}{4}a_{\pm2}\rho^{-2}f_{\pm2}(\alpha)\,, \tag{26.233}$$

where $\mathrm{B}_\nu^\pm$ is as in (26.224). Proceeding in the same way as for the central mode, one obtains

$$\mathcal{Z}^\parallel{}_{\pm1+} = a_{\pm1}\left(\tfrac{i}{\sqrt{2}}\rho\beta\, p_{\pm1}^+(\mp U\alpha_1, -W\alpha_2, r) + f_{\pm1}^+(\sigma_{\pm1,+}, r)\right)\,, \tag{26.234}$$

$$\mathcal{Z}^\parallel{}_{\pm1-} = a_{\pm1}\left(\tfrac{i}{\sqrt{2}}\rho\beta\, p_{\pm1}^-(\mp U\alpha_1, -W\alpha_2, r) + f_{\pm1}^-(\sigma_{\pm1,-}, r)\right)\,, \tag{26.235}$$

$$\mathcal{Z}^\parallel{}_{\pm2+} = a_{\pm2}\left(\tfrac{1}{4}p_{\pm2}^+(U^2\alpha_1, W^2\alpha_2, r) + f_{\pm2}^+(\sigma_{\pm2,+}, r)\right)\,, \tag{26.236}$$

$$\mathcal{Z}^\parallel{}_{\pm2-} = a_{\pm2}\left(\tfrac{1}{4}p_{\pm2}^-(U^2\alpha_1, W^2\alpha_2, r) + f_{\pm2}^-(\sigma_{\pm2,-}, r)\right)\,, \tag{26.237}$$

where the various σ's are parameters to be determined from continuity conditions, and the functions $f_k^\pm$ are derived from $f_0^\pm$, defined in (26.221), by successive application of the ladder operators $c_m^\pm$ defined in (26.180):

$$f_{\pm 1}^+ = \rho c_m^\pm f_0^+ \,, \qquad f_{\pm 2}^+ = \rho^2 c_{m\pm 1}^\pm c_m^\pm f_0^+ \,, \tag{26.238}$$

$$f_{\pm 1}^- = \rho c_m^\pm f_0^- \,, \qquad f_{\pm 2}^- = \rho^2 c_{m\pm 1}^\pm c_m^\pm f_0^- \,. \tag{26.239}$$

Having found the longitudinal components of the electromagnetic field, one can now compute the remaining (transverse) components.

The Transverse Components

To obtain the transverse components of Z, consider the $\pm$ components of (26.168). Expanding $\mathrm{g} = \mathrm{g}^{(0)} + \varepsilon \mathrm{g}^{(1)}$, $Z = Z^{(0)} + \varepsilon Z^{(1)}$, and using the unperturbed equation, one obtains at first order

$$n\partial_0 Z^{(1)i} + j\epsilon^{ijk}\nabla_j(\mathrm{g}^{(0)}_{kl} Z^{(1)l}) + j\epsilon^{ijk}\nabla_j(\mathrm{g}^{(1)}_{kl} Z^{(0)l}) = 0 \,. \tag{26.240}$$

In the last term, we may neglect derivatives of the metric perturbation (of order ω_g) compared to derivatives of the unperturbed electromagnetic field (of order ω) to arrive at

$$(n\partial_0 \pm ij\partial_z) Z^{(1)\pm} = \pm ij[\mathfrak{e}_\mp(Z^{(1)\parallel}) + \chi^\pm \cos(\kappa . x_\parallel)] \,, \tag{26.241}$$

where we have used (26.176) and have set

$$\chi^\pm = A_{\parallel l}\nabla_\mp Z^{(0)l} + i\beta A_{\mp l} Z^{(0)l} \,. \tag{26.242}$$

Using the notation of (26.210), a direct calculation shows that

$$\chi^+_{-2} = i\beta a_{-2} Z^{(0)-} \,, \qquad \chi^-_{+2} = i\beta a_{+2} Z^{(0)+} \,, \tag{26.243}$$

$$\chi^+_{-1} = \tfrac{i}{2} a_{-1}(3\beta - ijn\omega) Z^{(0)\parallel} \,, \qquad \chi^-_{+1} = \tfrac{i}{2} a_{+1}(3\beta + ijn\omega) Z^{(0)\parallel} \,, \tag{26.244}$$

$$\chi^+{}_0 = -ia_0(\tfrac{3}{2}\beta - ijn\omega) Z^{(0)+} \,, \qquad \chi^-{}_0 = -ia_0(\tfrac{3}{2}\beta + ijn\omega) Z^{(0)-} \,, \tag{26.245}$$

$$\chi^+_{+1} = \tfrac{1}{\sqrt{2}} a_{+1} c^+_{m+1} Z^{(0)+} \,, \qquad \chi^-_{-1} = \tfrac{1}{\sqrt{2}} a_{-1} c^-_{m-1} Z^{(0)-} \,, \tag{26.246}$$

$$\chi^+_{+2} = 0 \,, \qquad \chi^-_{-2} = 0 \,. \tag{26.247}$$

To arrive at the stated formula for $\chi_0^\pm$, we have used $\mathfrak{e}_\mp(Z^{(0)\parallel}) = -i(\beta \mp ijn\omega) Z^{(0)\pm}$ which follows from (26.178), and the trace condition (26.198). For χ^+_{-1} and χ^-_{+1} we have used

$$\rho^2 c^-_{m+1} c^+_m f_0 = \rho^2 c^+_{m-1} c^-_m f_0 = -\zeta f_0 \,, \tag{26.248}$$

which can be shown either using the recursion relations (26.184) or by noting that $c^-_{m+1} c^+_m = c^+_{m-1} c^-_m = \mathrm{B}_0 - \zeta/\rho^2$ and using the Bessel equation $\mathrm{B}_0 f_0 = 0$. These formulae have the general structure that the radial dependence of χ^a_b is proportional to $a_b f_{a+b}$.

Using the notation (26.210), as well as the abbreviations $\omega_\pm$ and $\beta_\pm$ as defined in (26.219) and (26.220), equation (26.241) reduces to

$$i(n\omega_+ \mp ij\beta_+)\mathcal{Z}^\pm{}_{k+} = \pm ij[\tfrac{1}{\sqrt{2}} c^\pm_{m+k} \mathcal{Z}^\parallel{}_{k+} + \tfrac{1}{2}\chi^\pm_k] \,, \tag{26.249}$$

$$i(n\omega_- \mp ij\beta_-)\mathcal{Z}^\pm{}_{k-} = \pm ij[\tfrac{1}{\sqrt{2}} c^\pm_{m+k} \mathcal{Z}^\parallel{}_{k-} + \tfrac{1}{2}\chi^\pm_k] \,. \tag{26.250}$$

Multiplying the first equation by $n\omega_+ \pm ij\beta_+$ and the second one by $n\omega_- \pm ij\beta_-$, and using the definition of $\zeta_\pm$ given in (26.218), one obtains

$$i\zeta_+ \mathcal{Z}^\pm{}_{k+} = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\rho^2[\beta_+ \pm ijn\omega_+](c^\pm_{m+k} \mathcal{Z}^\parallel{}_{k+} + \tfrac{1}{\sqrt{2}}\chi^\pm_k) \,, \tag{26.251}$$

$$i\zeta_- \mathcal{Z}^\pm{}_{k-} = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\rho^2[\beta_- \pm ijn\omega_-](c^\pm_{m+k} \mathcal{Z}^\parallel{}_{k-} + \tfrac{1}{\sqrt{2}}\chi^\pm_k) \,, \tag{26.252}$$

which is structurally similar to the unperturbed equation (26.178).

Now that the field equations are solved in the core and cladding separately, we consider how these solutions match at the core-cladding interface of the waveguide.

Continuity Conditions

From (26.162), one finds that the field components $D^r, E_\theta, E_z, B^r, H_\theta, H_z$ must be continuous at the core-cladding interface $r = \rho$. As is well-known, these six continuity conditions are linearly dependent, and it suffices to impose continuity of the four components

$$D^r = \Re Z^r\,, \qquad B^r = n^{-1}\Im Z^r\,, \qquad H_\parallel = n^{-1}\mathrm{g}_{\parallel i}\Im Z^i\,, \qquad E_\parallel = n^{-2}\mathrm{g}_{\parallel i}\Re Z^i\,, \tag{26.253}$$

where $\Re$ and $\Im$ refer to the j-real and j-imaginary parts, respectively. To assess the jumps of the fields, we introduce the notation

$$[\![f]\!] := \lim_{r\nearrow\rho} f(r) - \lim_{r\searrow\rho} f(r)\,, \tag{26.254}$$

and write symbolically

$$[\![Z]\!] = \left([\![D^r]\!] \quad [\![E_\parallel]\!] \quad [\![B^r]\!] \quad [\![H_\parallel]\!]\right)^{\mathsf{T}}\,, \tag{26.255}$$

which conflates the jumps of all relevant fields in one *column* vector.

Since the jumps arising in (26.253) are determined by the jumps of the two components

$$Z^r = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(Z^+ + Z^-)\,, \tag{26.256}$$

$$\mathrm{g}_{\parallel i}Z^i = Z^{(0)\parallel} + \varepsilon Z^{(1)\parallel} + \varepsilon A_{\parallel i}Z^{(0)i}\cos(\kappa.x_\parallel)\,, \tag{26.257}$$

for the perturbed problem it suffices to consider the jumps of

$$\mathcal{Z}^r{}_{kl} = \tfrac{1}{\sqrt{2}}(\mathcal{Z}^+{}_{kl} + \mathcal{Z}^-{}_{kl})\,, \tag{26.258}$$

$$\mathcal{Z}^\parallel_{kl} = \mathcal{Z}^\parallel{}_{kl} + \tfrac{1}{2}\chi^\parallel_k\,, \tag{26.259}$$

where the $\mathcal{Z}^a{}_{kl}$ are the components from the decomposition (26.210), and where

$$\chi^\parallel{}_0 = a_0 Z^{(0)\parallel}\,, \qquad \chi^\parallel_{\pm1} = a_{\pm1}Z^{(0)\pm}\,, \qquad \chi^\parallel_{\pm2} = 0\,. \tag{26.260}$$

Similar to the decomposition (26.210), we write

$$[\![Z]\!] \equiv \left([\![Z]\!]^{(0)} + \varepsilon\sum_{k=-2}^{+2}\sum_{l=\pm}[\![Z]\!]^{(1)}_{kl}\,e^{i(k\theta+l\kappa.x_\parallel)}\right)e^{i(\omega t-\beta z+m\theta)} = 0\,, \tag{26.261}$$

where the first term does not contain any ε corrections because all components of $Z^{(1)}$ oscillate with $\exp(\pm i\kappa.x_\parallel)$.

The four j-real components of $[\![Z]\!]^{(1)}_{kl}$ are parametrised by α (coming from the particular solutions) and σ_{kl} (homogeneous solutions), each having four j-real parameters. Hence, one can write

$$[\![Z]\!]^{(1)}_{kl} = a_k(M_{kl}\,\boldsymbol{\alpha} + \Sigma_{kl}\,\boldsymbol{\sigma}_{kl}) \qquad \text{(no summation implied)}\,, \tag{26.262}$$

where $\boldsymbol{\alpha}$ and $\boldsymbol{\sigma}_{kl}$ are j-real vectors:

$$\boldsymbol{\alpha} = (\Re\alpha_1, \Re\alpha_2, \Im\alpha_1, \Im\alpha_2)^{\mathsf{T}}\,, \qquad \boldsymbol{\sigma}_{kl} \text{ similar}, \tag{26.263}$$

and M_{kl} and Σ_{kl} are j-real 4×4 matrices. Note that the jumps are *not* simply linear in the complex coefficients α, σ_{kl} since (26.253) discriminates between the real and complex parts.

In Section 26.2.12, it is shown that because the electric and magnetic fields are derived from a single complex field, these matrices are fully determined by their first two rows, which motivates the following abbreviating notation:

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \end{vmatrix} := \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ -c/n_1 & -d/n_2 & a/n_1 & b/n_2 \\ -g\,n_1 & -h\,n_2 & e\,n_1 & f\,n_2 \end{pmatrix}\,. \tag{26.264}$$

As many matrices considered here have similar structures, we define the following abbreviation

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \beta & \omega & U & W \end{bmatrix}_\nu := \begin{vmatrix} -ia_1\rho\beta J'_\nu(U) & -ia_2\rho\beta K'_\nu(W) & a_3 n_1 \nu\rho\omega J_\nu(U) & a_4 n_2 \nu\rho\omega K_\nu(W) \\ \frac{1}{n_1^2} J_\nu(U) & -\frac{1}{n_2^2} K_\nu(W) & 0 & 0 \end{vmatrix}, \tag{26.265}$$

where the parameters $a_1, \dots, a_4$ and β, ω determine the numerical coefficients in the first row of the matrix, and the last two parameters U, W determine the arguments of the Bessel functions, whose order is given by the integer ν which is given as a general subscript.

Within this class of matrices, we identify the following families, which are useful for the problem considered here:

$$\Pi_k = \begin{bmatrix} 1/U & 1/W & 1/U^2 & 1/W^2 \\ \beta & \omega & U & W \end{bmatrix}_{m+k}, \tag{26.266}$$

$$\Sigma_k^\pm = \begin{bmatrix} 1/U_\pm & 1/W_\pm & 1/U_\pm^2 & 1/W_\pm^2 \\ \beta_\pm & \omega_\pm & U_\pm & W_\pm \end{bmatrix}_{m+k}, \tag{26.267}$$

where $\beta_\pm, \omega_\pm$ are defined in (26.219) and (26.220), and $U_\pm, W_\pm$ are defined in (26.222). The Π family is used to describe the central mode and to formulate the dispersion relation, and the Σ matrices arise when considering the jumps of the homogeneous solutions to the radial equations.

Similar to the family (26.265), we define

$$\begin{Bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ \beta & \omega & U & W \end{Bmatrix}_\nu := \begin{vmatrix} -ia_1\rho\beta Y'_\nu(U) & -ia_2\rho\beta I'_\nu(W) & a_3 n_1 \nu\rho\omega Y_\nu(U) & a_4 n_2 \nu\rho\omega I_\nu(W) \\ \frac{1}{n_1^2} Y_\nu(U) & -\frac{1}{n_2^2} I_\nu(W) & 0 & 0 \end{vmatrix}, \tag{26.268}$$

where the Bessel functions J_ν and K_ν are replaced by Y_ν and I_ν. Using this notation, let

$$\mathrm{P}_k^\pm = \begin{Bmatrix} U/U_\pm^2 & W/W_\pm^2 & 1/U_\pm^2 & 1/W_\pm^2 \\ \beta_\pm & \omega_\pm & U & W \end{Bmatrix}_{m+k} \Lambda_{m+k}^\pm, \tag{26.269}$$

where

$$\Lambda_\nu^\pm = \mathrm{diag}\left(\Gamma_\nu^\pm(1), \Delta_\nu^\pm(1), \Gamma_\nu^\pm(1), \Delta_\nu^\pm(1)\right). \tag{26.270}$$

This is used to describe the jumps of the particular solutions $p_\nu^\pm$ defined in (26.225). The functions $\Gamma_\nu^\pm, \Delta_\nu^\pm$ appearing here are defined in (26.226) and (26.228), while the functions $\tilde\Gamma_\nu^\pm, \tilde\Delta_\nu^\pm$ defined in (26.227) and (26.229) do not contribute, since they vanish at the core-cladding interface $r = \rho$.

Having prepared the notation, we now analyse (26.261). By linear independence of the exponential functions, all terms $[\![Z]\!]^{(0)}$ and $[\![Z]\!]_{kl}^{(1)}$ must vanish separately.

Dispersion Relation

Because all corrections coming from the gravitational wave oscillate as $\exp(\pm i\kappa.x_\parallel)$, the first term in (26.261) is the same as for the unperturbed problem. As shown explicitly in Section 26.2.12, the continuity condition for this part is given by

$$\Pi_0 \boldsymbol{\alpha} = 0, \tag{26.271}$$

where Π_0 is given by (26.266). To obtain a non-trivial solution, the coefficient matrix must be singular:

$$\det \Pi_0 = 0\,, \tag{26.272}$$

which is equivalent to

$$\left(\mathscr{J}_m + \mathscr{K}_m\right)\left(n_1^2\mathscr{J}_m + n_2^2\mathscr{K}_m\right) = (m\beta/\omega)^2\left(U^{-2} + W^{-2}\right)^2\,, \tag{26.273}$$

where we have used the abbreviations

$$\mathscr{J}_m = \frac{J_m'(U)}{U J_m(U)}\,, \qquad\qquad \mathscr{K}_m = \frac{K_m'(W)}{W K_m(W)}\,, \tag{26.274}$$

cf. e.g. Ref. [17, Eq. 3.27 on p. 124] and Ref. [18, Eq. 16.166 on p. 511] (where ϵ_2/ϵ_2 should read ϵ_1/ϵ_2). Because β and ω enter this equation through U and W as arguments of Bessel functions, this is a transcendental equation which must be solved numerically. More precisely, by solving $\det\Pi_0 = 0$ for a prescribed vacuum wavelength $\lambda = 2\pi/\omega$ and given waveguide parameters (i.e. core radius ρ and refractive indices n_1, n_2), one can determine the effective refractive index $\bar{n} := \beta/\omega$ as a function of λ: $\bar{n} = \bar{n}(\lambda)$, which constitutes the waveguide dispersion relation. Subsequently, the coefficients $\boldsymbol{\alpha}$ can be determined from (26.271) up to an overall factor which describes the amplitude of the electromagnetic wave.

In general, there are multiple solutions to this equation for given waveguide parameters and given values of m and ω. Here, we focus on *single-mode* fibres (i.e. fibres with sufficiently thin cores, operated at suitable frequencies) where there is only one single solution for $m = +1$ and there are no solutions for higher values of m.

Central Mode

For the central mode ($k = 0$), the continuity condition can be written as

$$\Sigma_0^{\pm}\boldsymbol{\sigma}_{0,\pm} + \mathrm{P}_0^{\pm}\Xi\boldsymbol{\alpha} + \tfrac{1}{2}\Psi_0\boldsymbol{\alpha} = 0\,. \tag{26.275}$$

The first term describes the jumps arising from the homogeneous solution in (26.231). In the second term, which comes from the particular solution, the matrix Ξ describes the discontinuity of the factor $\frac{1}{4}(\zeta - 2\rho^2\beta^2)$ in (26.231):

$$\Xi = -\tfrac{1}{4}\mathrm{diag}(2\rho^2\beta^2 - U^2, 2\rho^2\beta^2 + W^2, 2\rho^2\beta^2 - U^2, 2\rho^2\beta^2 + W^2)\,. \tag{26.276}$$

Finally, the last term contains all contributions from the χ-terms in (26.251), (26.252) and (26.259):

$$\Psi_0 = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2}U_3^2/U^3 & \frac{1}{2}W_3^2/W^3 & U_2^2/U^4 & W_2^2/W^4 \\ \beta & \omega & U & W \end{Bmatrix}_m\,, \tag{26.277}$$

where

$$U_2^2 = +\rho^2(n_1^2\omega^2 - 2\beta^2)\,, \qquad U_3^2 = +\rho^2(n_1^2\omega^2 - 3\beta^2)\,, \tag{26.278}$$

$$W_2^2 = -\rho^2(n_2^2\omega^2 - 2\beta^2)\,, \qquad W_3^2 = -\rho^2(n_2^2\omega^2 - 3\beta^2)\,. \tag{26.279}$$

At the considered level of accuracy, we may neglect terms of order Ω in $\mathrm{P}_0^{\pm}$. This matrix contains the functions $\Gamma_\nu^{\pm}$ and $\Delta_\nu^{\pm}$ (via the matrix $\Lambda_\pm$). In (26.226) and (26.228) we may thus replace $U_\pm$ and $W_\pm$ by U and W which yields the integrals

$$\Gamma_\nu(z) = \frac{\pi}{2}\int_0^z J_\nu(Uz')^2 z'\,\mathrm{d}z'\,, \tag{26.280}$$

$$\Delta_\nu(z) = -\int_z^\infty K_\nu(Wz')^2 z'\,\mathrm{d}z'\,, \tag{26.281}$$

which also arise in similar calculations describing rotating waveguides. They evaluate to

$$\Gamma_\nu(z) = \frac{\pi}{2}\frac{z^2}{2}\left(J_\nu(Uz)^2 - J_{\nu-1}(Uz)J_{\nu+1}(Uz)\right)\,, \tag{26.282}$$

$$\Delta_\nu(z) = \frac{z^2}{2}\left(K_\nu(Wz)^2 - K_{\nu-1}(Wz)K_{\nu+1}(Wz)\right)\,. \tag{26.283}$$

Expanding $\Sigma_{0,\pm} = \Pi_0 \pm \Omega\Sigma^{(1)} + O(\Omega^2)$, we obtain the inverse

$$(\Sigma_0^\pm)^{-1} = \pm\Omega^{-1}\Sigma' + O(\Omega^0)\,, \tag{26.284}$$

where

$$\Sigma' = \frac{1}{\mathrm{tr}(\Sigma^{(1)}\mathrm{adj}\Pi_0)}\mathrm{adj}\Pi_0\,. \tag{26.285}$$

Here, $\mathrm{adj}\Pi_0$ denotes the adjugate of Π_0, which is the transpose of the cofactor matrix. This leads to

$$\boldsymbol{\sigma}_{0,\pm} = \mp\Omega^{-1}\Sigma'(\mathrm{P}_0\Xi + \tfrac{1}{2}\Psi)\boldsymbol{\alpha} + O(\Omega)\,. \tag{26.286}$$

Let us analyse this result in a bit more detail. First, Σ' can be re-expressed in a more transparent way by considering the denominator $\mathrm{tr}(\Sigma^{(1)}\mathrm{adj}\Pi_0) = \partial_{\omega_g}\det\Sigma_0^+$. Since Σ_0^+ is obtained from Π_0 by the substitution $\omega \to \omega + \omega_g$ and $\beta \to \beta + \hat{\kappa}_\parallel\omega_g$, one has

$$\mathrm{tr}(\Sigma^{(1)}\mathrm{adj}\Pi_0) = \partial_\omega\det\Pi_0 + \hat{\kappa}_\parallel\partial_\beta\det\Pi_0\,. \tag{26.287}$$

The ratio of these partial derivatives has a physical interpretation: differentiating the defining equation for the dispersion relation $\det\Pi_0(\beta(\omega),\omega) = 0$ with respect to ω yields

$$\beta' \equiv \frac{\partial\beta}{\partial\omega} = -\frac{\partial_\omega\det\Pi_0}{\partial_\beta\det\Pi_0}\,, \tag{26.288}$$

so the ratio describes how the propagation constant β changes with varying frequency ω (i.e. the reciprocal group velocity). Equivalently, this can be expressed in terms of the effective refractive index $\bar{n} = \bar{n}(\omega)$ as

$$\beta' = \bar{n} + \omega\frac{\partial\bar{n}}{\partial\omega}\,. \tag{26.289}$$

Hence, one obtains the alternative formula

$$\Sigma' = -\frac{\partial_\beta\det\Pi_0}{\beta' - \hat{\kappa}_\parallel}\mathrm{adj}\Pi_0\,. \tag{26.290}$$

Next, using the definition of the adjugate and the fact that Π_0 is singular, we have $\Pi_0\Sigma' = 0$, so $\mathrm{im}\,\Sigma' \subset \ker\Pi_0$. But since the kernel of Π_0 is one-dimensional and spanned by $\boldsymbol{\alpha}$, it is seen that $\boldsymbol{\sigma}_{0,\pm}$ is again proportional to $\boldsymbol{\alpha}$. This leads to the general formula

$$\boldsymbol{\sigma}_{0,\pm} = \mp\frac{1}{4\Omega}\frac{c_1}{\beta' - \hat{\kappa}_\parallel}\boldsymbol{\alpha}\,, \tag{26.291}$$

where c_1 is a coefficient depending on the waveguide parameters, which we compute numerically. The overall factor $\mp 1/4$ was chosen in analogy to similar results in vacuum, where $c_1 = \beta' = 1$. This equation essentially determines the phase induced by the gravitational wave, as is shown in detail in Section 26.2.6. There, we also show that appropriate emission conditions ensure that no phase shift arises if the GW is collinear with the symmetry axis of the waveguide.

Sidebands

For the sidebands, we find the continuity conditions to be of the form

$$\Sigma^{\pm}_{+1} C_{+} \boldsymbol{\sigma}_{+1,\pm} - \tfrac{i}{\sqrt{2}} \mathrm{P}^{\pm}_{+1} C_{+1} \boldsymbol{\alpha} + \tfrac{1}{2} \Psi_{+1} \boldsymbol{\alpha} = 0 \,, \tag{26.292}$$

$$\Sigma^{\pm}_{-1} C_{-} \boldsymbol{\sigma}_{-1,\pm} - \tfrac{i}{\sqrt{2}} \mathrm{P}^{\pm}_{-1} C_{-1} \boldsymbol{\alpha} + \tfrac{1}{2} \Psi_{-1} \boldsymbol{\alpha} = 0 \,, \tag{26.293}$$

$$\Sigma^{\pm}_{+2} (C_{+})^2 \boldsymbol{\sigma}_{+2,\pm} + \tfrac{1}{4} \mathrm{P}^{\pm}_{+2} C_{+2} \boldsymbol{\alpha} + \tfrac{1}{2} \Psi_{+2} \boldsymbol{\alpha} = 0 \,, \tag{26.294}$$

$$\Sigma^{\pm}_{-2} (C_{-})^2 \boldsymbol{\sigma}_{-2,\pm} + \tfrac{1}{4} \mathrm{P}^{\pm}_{-2} C_{-2} \boldsymbol{\alpha} + \tfrac{1}{2} \Psi_{-2} \boldsymbol{\alpha} = 0 \,, \tag{26.295}$$

where the matrices C_k account for the coefficients $\mp U$ and $-W$ in (26.184)

$$C_{\pm 1} = \mathrm{diag}\,(\mp U, -W, \mp U, -W,) \,, \qquad C_{\pm 2} = \mathrm{diag}\left(U^2, W^2, U^2, W^2\right) \,, \tag{26.296}$$

and the Ψ-matrices are given by

$$\Psi_{\pm 1} = \tfrac{1}{\sqrt{2}} \left(2\rho\beta \, \Psi^{(a)}_{\pm 1} + \Psi^{(b)}_{\pm 1} \right) \,, \tag{26.297}$$

where

$$\Psi^{(a)}_{\pm 1} = \begin{vmatrix} \pm \frac{\rho\beta}{U^2} J'_{m\pm 1} & -\frac{\rho\beta}{W^2} K'_{m\pm 1} & \pm i n_1 \frac{m\pm 1}{U} \frac{\rho\omega}{U^2} J_{m\pm 1} & -i n_2 \frac{m\pm 1}{W} \frac{\rho\omega}{W^2} K_{m\pm 1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \,, \tag{26.298}$$

$$\Psi^{(b)}_{\pm 1} = \begin{vmatrix} -\frac{m\pm 1}{U} J_{m\pm 1} & \mp \frac{m\pm 1}{W} K_{m\pm 1} & 0 & 0 \\ \pm i \frac{\rho\beta}{n_1^2 U} J_{m\pm 1} & + i \frac{\rho\beta}{n_2^2 W} K_{m\pm 1} & + \frac{\rho\omega}{n_1 U} J_{m\pm 1} & \pm \frac{\rho\omega}{n_2 W} K_{m\pm 1} \end{vmatrix} \,, \tag{26.299}$$

and

$$\Psi_{\pm 2} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \mp i \frac{\rho\beta}{U} J_{m\pm 1} & -i \frac{\rho\beta}{W} K_{m\pm 1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \,. \tag{26.300}$$

Here, the arguments of the Bessel functions have been suppressed for brevity: $J_\nu = J_\nu(U)$ and $K_\nu = K_\nu(W)$.

Since we are concerned with single-mode fibres, barring one exception which is discussed below, all coefficient matrices $\Sigma^{\pm}_k$ with $k \neq 0$ are invertible. This is because for vanishing Ω they reduce to the non-singular matrices Π_k (with $k \neq 0$), and invertibility is maintained for sufficiently small Ω by continuity. Thus, as a first approximation one can replace $\Sigma^{\pm}_k$ by Π_k to obtain

$$\text{for } k = \pm 1 : \qquad \boldsymbol{\sigma}_{k,\pm} = -C_k^{-1} \Pi_k^{-1} \left(\tfrac{1}{2} \Psi_k - \frac{i}{\sqrt{2}} \rho\beta \mathrm{P}_k C_k \right) \boldsymbol{\alpha} + O(\Omega) \,, \tag{26.301}$$

$$\text{for } k = \pm 2 : \qquad \boldsymbol{\sigma}_{k,\pm} = -C_k^{-1} \Pi_k^{-1} \left(\tfrac{1}{2} \Psi_k + \tfrac{1}{4} \mathrm{P}_k C_k \right) \boldsymbol{\alpha} + O(\Omega) \,, \tag{26.302}$$

which shows explicitly that the sideband amplitudes are of order ε only, and thus much smaller than the corrections of the central mode of order $\varepsilon\omega/\omega_g$.

The exception to the above case is the following. Since

$$J_{-\nu}(z) = (-1)^\nu J_\nu(z) \,, \qquad K_{-\nu}(z) = +K_\nu(z) \,, \tag{26.303}$$

see e.g. Ref. [1, eqns. 9.1.5 on p. 358 and 9.6.6 on p. 375], the dispersion relation (26.273) is invariant under $m \to -m$, which implies that if $m + k = -m$, i.e. $k = -2m$, then Π_k is singular again. In our case, since k ranges from -2 to $+2$, this arises only if $m = \pm 1$, so this effect *does* occur in single-mode fibres. Here, we restrict the discussion to the case $m = +1$, as the alternative $m = -1$ is completely analogous. For this special case $m = +1$ and $k = -2$, the matrices $\Sigma^{\pm}_{-2}$ are close to being singular:

$$\Sigma^{\pm}_{-2} = \Pi_{-2} \pm \Omega \, \delta\Sigma_{-2} + O(\Omega^2) \,, \tag{26.304}$$

which has the inverse

$$(\Sigma^{\pm}_{-2})^{-1} = \pm\Omega^{-1}\Sigma'' + O(\Omega^0)\,, \tag{26.305}$$

where

$$\Sigma'' = \frac{1}{\mathrm{tr}[(\delta\Sigma_{-2})\mathrm{adj}(\Pi_{-2})]}\mathrm{adj}(\Pi_{-2})\,, \tag{26.306}$$

so that instead of (26.302) we obtain for $k=-2$

$$C_{-2}\boldsymbol{\sigma}_{-2,\pm} = \mp\Omega^{-1}\Sigma''\left(\tfrac{1}{2}\Psi_{-2} + \tfrac{1}{4}P_{-2}C_{-2}\right)\boldsymbol{\alpha} + O(\Omega^0)\,. \tag{26.307}$$

Similar to Π_0 whose kernel is spanned by $\boldsymbol{\alpha}$, the kernel of Π_{-2} is also one-dimensional and spanned by

$$\boldsymbol{\alpha}^* = (+\alpha_1, -\alpha_2, -\alpha_3, +\alpha_4)\,. \tag{26.308}$$

Since the range of Σ'' is the kernel of Π_{-2}, the two vectors $C_{-2}\boldsymbol{\sigma}_{-2,\pm}$ are proportional to $\boldsymbol{\alpha}^*$, and we find, similar to the central mode

$$C_{-2}\boldsymbol{\sigma}_{-2,\pm} = \pm a_{-2}\frac{\Delta^2}{2\Omega}\frac{c_2}{\beta' - \hat{\kappa}_{\|}}\boldsymbol{\alpha}^*\,, \tag{26.309}$$

where β' is the same constant as in the phase correction (26.291), and the coefficient c_2 is a new parameter, which we determine numerically. Here, the relative index difference Δ is defined as

$$\Delta = 1 - \frac{n_2}{n_1}\,, \tag{26.310}$$

and we have factored out $\Delta^2/2$ such that c_2 is typically of order unity (see the numerical examples below).

As shown explicitly in Section 26.2.7, this formula essentially describes the perturbation of the polarisation by the gravitational wave.

26.2.6 Perturbation of the Phase

In this section, we implement boundary conditions which model a setup where monochromatic laser light of definite polarisation is injected into the fibre. As we will see, contrary to the unperturbed case, this will require adding further terms to the field computed so far. This leads to an expression for the phase correction which vanishes at the point where the light enters the fibre and grows with increasing distance. A similar construction for the eikonal in a non-dispersive regime can be found in Ref. [34, Sect. 2].

Neglecting boundary effects from the ends of the waveguide, the light sent into the waveguide (or coming out of it) is simply obtained by restricting the field to a definite value of z, where we consider $z=0$ for simplicity. Also, we restrict the discussion to the "large corrections", i.e. to $k=0$ and $k=-2m$ where the perturbations were found to be of order $1/\Omega$. The remaining "small components" are expected to be experimentally irrelevant.

Recall that the coefficients of the central mode ($k=0$) were given by

$$\boldsymbol{\sigma}_{0,\pm} = \mp\frac{1}{4\Omega}\frac{c_1}{\beta' - \hat{\kappa}_{\|}}\boldsymbol{\alpha}\,. \tag{26.311}$$

Since this is proportional to the unperturbed coefficients $\boldsymbol{\alpha}$, we may write the central mode ($k=0$) of the *overall* field in the form

$$Z^{(0)a}{}_0 + \varepsilon Z^{(1)a}{}_0 = \mathfrak{Z}^a\tilde{\Phi}\,, \tag{26.312}$$

where

$$\mathfrak{Z}^{\parallel} = f_0(\alpha; r)\,, \tag{26.313}$$

$$i\zeta\mathfrak{Z}^{\pm} = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\rho(\beta \pm ijn\omega) f_{\pm}(\alpha; r)\,, \tag{26.314}$$

$$\tilde{\Phi} = e^{i\psi^{(0)}}\left[1 - \frac{\varepsilon}{4\Omega}\frac{a_0 c_1}{\beta' - \hat{\kappa}_{\parallel}}\left(e^{+i\kappa.x_{\parallel}} - e^{-i\kappa.x_{\parallel}}\right)\right]\,, \tag{26.315}$$

$$\psi^{(0)} = \omega t - \beta z + m\theta\,. \tag{26.316}$$

Evaluating the perturbation terms at $z = 0$, we find that this describes a situation where the incoming phase is modulated in a highly specific way by the gravitational wave. This is not the situation which we want to model so that correction terms are needed: instead of the phase modulation behaviour given by $\tilde{\Phi}$, we are concerned with the scenario where a polarised monochromatic plane wave (as emitted by a laser source) is injected into the fibre at $z = 0$. Hence, we require the injected field to have a definite phase of $\psi = \omega t + m\theta$ (and definite polarisation, see the next section) at $z = 0$.

Such boundary conditions can be implemented by adding appropriate solutions of the unperturbed equations of slightly shifted frequencies. Specifically, we add terms of the form

$$\mathfrak{z}^a_{\pm} = \mathfrak{Z}^a \exp(i(\omega_{\pm} t - (\beta \pm \omega_g \beta')z + m\theta))\,, \tag{26.317}$$

where the term $\beta' = \partial\beta/\partial\omega$ ensures that the unperturbed dispersion relation is satisfied. (The shift in the frequency also causes a slight perturbation in the amplitude, but this is of order Ω and thus negligible here.) The corrected overall field is thus

$$Z^a{}_0 = \mathfrak{Z}^a\tilde{\Phi} + \frac{\varepsilon}{4\Omega}\frac{a_0 c_1}{\beta' - \hat{\kappa}_{\parallel}}(\mathfrak{z}^a_+ - \mathfrak{z}^a_-) = \mathfrak{Z}^a\Phi\,, \tag{26.318}$$

where

$$\Phi = e^{i\psi^{(0)}}\left[1 - \frac{\varepsilon}{4\Omega}\frac{a_0 c_1}{\beta' - \hat{\kappa}_{\parallel}}\left(e^{+i\omega_g t}(e^{-i\omega_g \hat{\kappa}_{\parallel} z} - e^{-i\omega_g \beta' z}) - e^{-i\omega_g t}(e^{+i\omega_g \hat{\kappa}_{\parallel} z} - e^{+i\omega_g \beta' z})\right)\right]\,. \tag{26.319}$$

Assuming the fibre to be much shorter than the GW wavelength, i.e. $\omega_g z \ll 1$, one finally obtains

$$\Phi \approx e^{i\psi^{(0)}}\left[1 - \tfrac{i}{2}\varepsilon a_0 c_1 \cos(\omega_g t)\omega z\right] \approx e^{i\psi^{(0)}}\exp(-\tfrac{i}{2}\varepsilon a_0 c_1 \cos(\omega_g t)\omega z)\,, \tag{26.320}$$

which can be written as a perturbation of the phase:

$$\psi = \omega t - \beta z + m\theta - \tfrac{1}{2}\varepsilon a_0 c_1 \omega z \cos(\omega_g t)\,. \tag{26.321}$$

This shows that the phase perturbation grows linearly with the distance from the emission point and oscillates in time exactly as the gravitational wave does.

26.2.7 Perturbation of the Polarisation

Having identified the perturbation of the central mode $k = 0$ as a correction to the phase, we now show that the other "large term" with $m + k = -m$ corresponds to a perturbation of the polarisation.

To see this, we follow Ref. [17], where it is shown that modes with real field patterns, i.e. an angular dependence of the form $\cos\theta$ or $\sin\theta$, correspond to linear polarisation. To describe such fields, one must take linear combinations of the solutions with $m = +1$ and $m = -1$, and

we shall make the standard assumption of weak guidance $\Delta \equiv (n_1 - n_2)/n_1 \ll 1$. It should be noted that non-zero values of Δ cause the modes not to be *perfectly* linearly polarised, but these deviations are independent of t and z and can thus not be mistaken for gravitational wave signals.

Let us briefly review the construction in the unperturbed case. For brevity, we restrict the discussion to the field in the core, as the analysis of the cladding is completely analogous. Assuming weak guidance, the longitudinal field components are

$$\begin{aligned} &\text{for } m = +1: \qquad Z^{\parallel} = (1 - ij) J_{+1}(Ur/\rho) e^{i(\omega t - \beta z + \theta)} \,, \\ &\text{for } m = -1: \qquad Z^{\parallel} = (1 + ij) J_{-1}(Ur/\rho) e^{i(\omega t - \beta z - \theta)} \,, \end{aligned} \tag{26.322}$$

cf. Ref. [17, Section 3.2]. The overall normalisation is arbitrary and of no concern for the discussion here. At the level of the amplitude vector $\boldsymbol{\alpha}$, this means

$$\begin{aligned} &\text{for } m = +1: \qquad \alpha_1 + j\alpha_2 = 1 - ij \,, \\ &\text{for } m = -1: \qquad \alpha_1^* + j\alpha_2^* = 1 + ij \,. \end{aligned} \tag{26.323}$$

Plugging this into the expressions for the unperturbed field (26.178), setting $\beta = n\omega$ with $n \approx n_1$ and computing the Cartesian components via (26.191), one obtains the so-called HE-modes

$$\mathrm{HE}_{1,\pm 1}: \qquad \begin{pmatrix} Z^x & Z^y \end{pmatrix} = \mathscr{A}(r) \begin{pmatrix} \mp i - j & 1 \mp ij \end{pmatrix} \,, \tag{26.324}$$

where $\mathscr{A}(r) = \frac{n\rho\omega}{U} J_0(Ur/\rho)$. The second index distinguishes the cases $m = +1$ and $m = -1$. The so-called LP-modes are then given by the linear combinations

$$\begin{aligned} \mathrm{LP}_{0,1,x} &= \tfrac{i}{2}(\mathrm{HE}_{1,+1} - \mathrm{HE}_{1,-1}) \,, \\ \mathrm{LP}_{0,1,y} &= \tfrac{1}{2}(\mathrm{HE}_{1,+1} + \mathrm{HE}_{1,-1}) \,, \end{aligned} \tag{26.325}$$

whose x- and y-components are given by

$$\begin{aligned} &\mathrm{LP}_{0,1,x}: \qquad \begin{pmatrix} Z^x & Z^y \end{pmatrix} = \mathscr{A}(r) \begin{pmatrix} +1 & +j \end{pmatrix} \,, \\ &\mathrm{LP}_{0,1,y}: \qquad \begin{pmatrix} Z^x & Z^y \end{pmatrix} = \mathscr{A}(r) \begin{pmatrix} -j & +1 \end{pmatrix} \,. \end{aligned} \tag{26.326}$$

These modes are thus linearly polarised in the x- and y-directions, respectively.

This construction can be carried over directly to the perturbed problem. For this, we determine the coefficients of the "large sidebands" to be

$$\text{for } m = +1: \qquad C_{-2}\boldsymbol{\sigma}_{-2,\pm} = \pm a_{-2} \frac{\Delta^2}{2\Omega} \frac{c_2}{\beta' - \hat{\kappa}_{\parallel}} \boldsymbol{\alpha}^* \,, \tag{26.327}$$

$$\text{for } m = -1: \qquad C_{+2}\boldsymbol{\sigma}_{+2,\pm} = \pm a_{+2} \frac{\Delta^2}{2\Omega} \frac{c_2}{\beta' - \hat{\kappa}_{\parallel}} \boldsymbol{\alpha} \,. \tag{26.328}$$

As for the central mode, we impose boundary conditions such that these sidebands do not contribute at $z = 0$. We may thus repeat the argument from the previous section to find that these sidebands grow (for $\omega_g z \ll 1$) linearly with the distance z and oscillate in time as $\cos(\omega_g t)$, which is described by the function

$$\tilde{f}(t, z) := c_2 \Delta^2 \cos(\omega_g t)\, \omega z \,. \tag{26.329}$$

With this, one finds (up to the overall phase correction from before) that the perturbation of the longitudinal component of the field is obtained from the unperturbed expression by the substitution

$$(1 - ij) J_{+1} e^{+i\theta} \mapsto (1 - ij) J_{+1} e^{+i\theta} + i\varepsilon a_{-2} \tilde{f}(t, z)(1 + ij) J_{+1} e^{-i\theta} \,, \tag{26.330}$$

$$(1 + ij) J_{-1} e^{-i\theta} \mapsto (1 + ij) J_{-1} e^{+i\theta} + i\varepsilon a_{+2} \tilde{f}(t, z)(1 + ij) J_{-1} e^{+i\theta} \,, \tag{26.331}$$

where the arguments of the Bessel functions have been suppressed for brevity: they are $J_{\pm 1} = J_{\pm 1}(Ur/\rho)$. Using (26.196) and (26.197), the factor arising here evaluates to

$$ia_{\mp 2} = \tfrac{i}{2}(A_{xx} - A_{yy}) \mp A_{xy}\,. \tag{26.332}$$

Defining the abbreviations

$$\xi = \tfrac{1}{2}(A_{xx} - A_{yy})\tilde{f}(t,z)\,, \qquad\qquad \eta = A_{xy}\tilde{f}(t,z)\,, \tag{26.333}$$

and forming the same linear combinations as in the unperturbed case, we find the *perturbed* LP-modes

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathrm{LP}}_{0,1,x}: &\qquad \begin{pmatrix} Z^x & Z^y \end{pmatrix} = \mathscr{A}(r) \begin{pmatrix} +(1 - i\varepsilon\xi) + ij\varepsilon\eta & +j(1 - i\varepsilon\xi) - i\varepsilon\eta \end{pmatrix}, \\ \widetilde{\mathrm{LP}}_{0,1,y}: &\qquad \begin{pmatrix} Z^x & Z^y \end{pmatrix} = \mathscr{A}(r) \begin{pmatrix} -j(1 + i\varepsilon\xi) - i\varepsilon\eta & +(1 + i\varepsilon\xi) - ij\varepsilon\eta \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{26.334}$$

Comparing with the unperturbed LP-modes (26.326), we find that the effect of the gravitational wave is the following transformation of the polarisation directions:

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{e}_x \\ \mathfrak{e}_y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 - i\varepsilon\xi & -i\varepsilon\eta \\ -i\varepsilon\eta & 1 + i\varepsilon\xi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathfrak{e}_x \\ \mathfrak{e}_y \end{pmatrix}. \tag{26.335}$$

The modes of different polarisation $\mathfrak{e}_x$ and $\mathfrak{e}_y$ thus obtain slightly different phase shifts coming from $1 \mp i\varepsilon\xi \approx \exp(\mp i\varepsilon\xi)$, which arise whenever $A_{xx} \neq A_{yy}$. This can be interpreted as weak birefringence.

In contrast, the η-terms, which correspond to $A_{xy} = A_{yx}$, cannot be absorbed into the phase, as they describe weak deformations of linear polarisation into elliptic polarisation of alternating direction.

To obtain a definite interpretation in terms of polarisation states as measured by a *physical* polarisation filter or polarising beam splitter, one would have to model such devices in the perturbed metric. Accordingly, one might think that the above stated transformation could be absorbed in a redefinition of the polarisation directions. However, such redefinitions of the basis *cannot* alter the result significantly, as the perturbed basis is necessarily related to the unperturbed one by a *real* transformation, which cannot absorb the *complex* transformation coefficients found here. Hence, both the birefringence term ξ and the deformation term η are genuine physical effects and not merely coordinate artifacts.

For completeness, we also give the equivalent transformation in the complex basis $\mathfrak{f}_\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathfrak{e}_x \pm i\mathfrak{e}_y)$, which describes circular polarisation:

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{f}_+ \\ \mathfrak{f}_- \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -\varepsilon(i\xi - \eta) \\ -\varepsilon(i\xi + \eta) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathfrak{f}_+ \\ \mathfrak{f}_- \end{pmatrix}. \tag{26.336}$$

Also in this basis, the effect of the gravitational wave is to introduce a weak mixing of the two polarisation states which grows with the distance from $z = 0$ and oscillates in time.

26.2.8 Numerical Examples and Angular Dependence

Having found the first order effect of weak gravitational waves on the guided modes, let us give some numerical examples. Table 3 lists two sets of parameters for typical single-mode fibres (with $m = \pm 1$) operated at a vacuum wavelength of $\lambda = 1500\,\mathrm{nm}$. The first parameter set is the same as in Refs. [3] and [19], where the influence of Earth's gravitational field and its rotation on waveguides was analysed. Both fibres have the same core radius and effective refractive index $\bar{n}$, but their constituents have different refractive indices n_1, n_2.

	Quantity	Fibre 1	Fibre 2
n_1	Core refractive index	1.4712	1.4715
n_2	Cladding refractive index	1.4659	1.4648
$\bar{n}$	Effective refractive index	1.4682	1.4682
ρ	Core radius	4.1 µm	4.1 µm
Δ	Relative Index Difference	0.36%	0.45%
NA	Numerical Aperture	0.125	0.140

Table 3: Parameters of typical single-mode fibres at a vacuum wavelength $\lambda = 1500\,\text{nm}$.

	Quantity	Fibre 1	Fibre 2
β'	Inverse Group Velocity	1.4716	1.4723
c_1	Phase Parameter	1.4665	1.4662
c_2	Polarisation Parameter	0.3482	0.3219

Table 4: Numerical results for the coefficients c_1, c_2 and β'.

Hence, their values for the relative index difference $\Delta = (n_1 - n_2)/n_1$ and the numerical aperture $\text{NA} = \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$ also differ.

We have implemented our calculations in *Wolfram Mathematica* and computed the quantities c_1, c_2 and β' which arise in (26.291) and (26.309). The results are given in Table 4. The inverse group velocity $\beta' = \partial\beta/\partial\omega$ is larger than the effective refractive index $\bar{n}$, which shows that the waveguide exhibits normal dispersion $\partial\bar{n}/\partial\omega > 0 \Leftrightarrow \partial\bar{n}/\partial\lambda < 0$.

The "phase parameter" c_1 determines the perturbation of the phase via (26.321). As can be seen from Table 3, this quantity is comparable to the effective refractive index $\bar{n}$ (or equally n_1 or n_2): the relative differences are 0.12% and 0.14%, respectively, which is even smaller than the relative index difference Δ. For most applications, the approximation $c_1 \approx \bar{n}$ will thus be sufficient.

The "polarisation parameter" c_2 determines the perturbation of the polarisation according to (26.335) and (26.336) via the function $\tilde{f}$ defined in (26.329). Here, we see the reason for factoring Δ^2 in (26.309) and (26.329): for the two considered fibres, the values of Δ^2 differ by a factor of approximately 1.6, but the values of c_2 are almost the same.

Together, the two parameters c_1, c_2 fully characterise the influence of the gravitational wave on the fibre modes derived here. To describe the angular dependence of these effects, we choose coordinates x, y, z where z is the distance along the symmetry axis of the waveguide and the wave-vector of the gravitational wave lies in the xz-plane. The unit vector $\hat{\kappa}_\parallel$ in $\kappa = \omega_g(\mathrm{d}t - \hat{\kappa}_i \mathrm{d}x^i)$ and the GW amplitude A_{ij} can then be parameterised by

$$(\hat{\kappa}_i) = (\sin\vartheta, 0, \cos\vartheta)\,, \tag{26.337}$$

$$(A_{ij}) = \begin{pmatrix} h_+ \cos^2\vartheta & h_\times \cos\vartheta & -h_+ \cos\vartheta \sin\vartheta \\ h_\times \cos\vartheta & -h_+ & -h_\times \sin\vartheta \\ -h_+ \cos\vartheta \sin\vartheta & -h_\times \sin\vartheta & h_+ \sin^2\vartheta \end{pmatrix}, \tag{26.338}$$

where h_+ and $h_\times$ are real constants describing the two possible polarisation states of the gravitational wave. Here, ϑ denotes the incidence angle of the gravitational wave, which is not to be confused with the angular coordinate of the cylindrical coordinate system (r, θ, z). The terms relevant for our purposes are

$$A_{zz} = h_+ \sin^2\vartheta\,, \qquad \tfrac{1}{2}(A_{xx} - A_{yy}) = h_+ \tfrac{1}{2}(1 + \cos^2\vartheta)\,, \qquad A_{xy} = h_\times \cos\vartheta\,, \tag{26.339}$$

as they determine the phase shift, the birefringence effect, and the deformation of the electromagnetic polarisation, respectively. Their angular dependence is depicted in Figure 26.3, where we plot only absolute values in order to obtain positive radii.

As expected, the phase shift vanishes whenever the gravitational wave propagates in the same or the opposite direction as the electromagnetic wave and is maximal when the two waves propagate in orthogonal directions. The polarisation-dependent effects are maximal in the collinear case and are minimal for orthogonal propagation. Note that the deformation of linear polarisation to elliptic polarisation vanishes for orthogonal propagation, but the birefringence effect persists in this case. Moreover, the phase and birefringence terms have a definite sign (for fixed values of h_+ and $h_\times$) but the polarisation term A_{xy} can have arbitrary sign. For example, if $h_\times$ is positive, then the "right lobe" in Figure 26.3 corresponds to positive A_{xy}, while the "left lobe" corresponds to negative values.

The order-of-magnitude of the overall effect caused by continuous GW's emitted by a rotating neutron star can be estimated by

$$\varepsilon \approx 10^{-24} \left(\frac{e}{10^{-6}}\right) \left(\frac{I}{10^{38}\,\mathrm{kg\,m^2}}\right) \left(\frac{f}{\mathrm{kHz}}\right)^2 \left(\frac{d}{\mathrm{kpc}}\right)^{-1} \tag{26.340}$$

where I is the moment of inertia about the rotation axis, e the eccentricity parameter, $f = \omega_g/2\pi$ the emitted frequency, and d is the distance to the source see Jaranowski1998, [Sect. 4.2] of Maggiore2007. (As no continuous GW's have been detected so far, no precise values for these quantities are known, but the normalisations indicate plausible values.) Using $c_1 \approx \bar{n} \approx 1$, the amplitude of the phase perturbation is found to be approximately

$$\delta\psi \approx 2 \times 10^{-6}\,\mu\mathrm{rad} \times \left(\frac{e}{10^{-6}}\right) \left(\frac{I}{10^{38}\,\mathrm{kg\,m^2}}\right) \left(\frac{f}{\mathrm{kHz}}\right)^2 \left(\frac{d}{\mathrm{kpc}}\right)^{-1} \left(\frac{\ell}{\mathrm{km}}\right) ,$$

where ℓ is the length of the optical fibre. Relative to this phase perturbation, the amplitude perturbation effects are suppressed by an additional factor of $\Delta^2 \approx (0.5\%)^2 = 2.5 \times 10^{-5}$, so that we expect only the phase perturbation to be of experimental relevance. We leave an experimental feasibility assessment for future work, but to the best of our knowledge, this is beyond experimental reach in the foreseeable future.

26.2.9 Comparison with Light Propagation in Vacuum

Finally, we comment on the relation to standard results for light propagation in vacuum. First, consider the phase (26.156) for $m = 0$. In vacuum, the dispersion relation reduces to $\beta = \omega$ and the phase parameter is $c_1 = 1$, so that the overall phase takes the form

$$\psi_{\mathrm{vac}} = k_\mu x^\mu - \tfrac{1}{2}\varepsilon A_{zz}\omega z \cos(\omega_g t) , \tag{26.341}$$

where $k = \omega(\mathrm{d}t - \mathrm{d}z)$. This is in agreement with the standard formula

$$\psi^{(1)} = \frac{k_\mu k_\nu}{2\omega^2} \int_{\omega z}^{0} h^{\mu\nu}(x^\rho + s k^\rho/\omega^2))\mathrm{d}s , \tag{26.342}$$

where $s \mapsto x^\rho + s k^\rho/\omega^2$ is the light ray emitted from the injection point ($z = 0$) at $s = -\omega z$ and reaching the observation point at $s = 0$, cf. Ref. [13, Eq. (3.28a)]. For the particular case considered here, this integral evaluates to

$$\psi^{(1)} = -\frac{\omega A_{zz}}{\omega_g(1 - \hat{\kappa}_z)} [\sin(\kappa.x) - \sin(\kappa.x - \omega_g z(1 - \hat{\kappa}_z))] , \tag{26.343}$$

and expanding to leading order in $\omega_g z \ll 1$ reproduces (26.341). (As already observed in Ref. [9, Sect. 5], the second term is absent in Ref. [12, Eq. (2.20)] because of different boundary conditions used. We note that without this term the result is ill-behaved in the limit $\hat{\kappa}_z \to 1$.)

Secondly, we note that $\Delta = (n_1 - n_2)/n_1$ in (26.157) vanishes in vacuum, so that no polarisation perturbations arise at the order considered. This is in agreement with the geometrical optics setting, where such effects arise only at next-to-leading order in ω_g/ω, which is negligible in the considered setup.

Thus, the formulae presented here indeed reproduce the standard results for vacuum in the limit $n_1 \to 1$ and $n_2 \to 1$.

26.2.10 Conclusion

We have solved perturbatively the Maxwell equations for a step-index waveguide in the presence of a weak gravitational wave (GW) of low frequency. The correction of the central mode was found to describe a perturbation of the phase as expressed by (26.321). The parameter c_1 arising here was found to be well approximated by the effective refractive index $\bar{n}$: the relative error is smaller than the relative index difference $\Delta = (n_1 - n_2)/n_1$.

Additionally, the "large sideband" (where the azimuthal mode index $m = \pm 1$ is flipped) was identified as a perturbation of the electromagnetic wave polarisation. This perturbation for linearly polarised fields is given explicitly in (26.335), and for circular polarisation in (26.336). Compared to the phase shift, this polarisation-dependent effect (describing birefringence and coupling of polarisation states) is suppressed by a factor of Δ^2. However, contrary to the phase shift, this effect is also present when the gravitational wave propagates along the symmetry axis of the waveguide, as it is sensitive to the components $\frac{1}{2}(A_{xx} - A_{yy})$ and A_{xy} of the gravitational wave amplitude. Similar results for birefringence induced by gravitational waves were obtained for plane waves in infinitely extended media [20, 21], and also in vacuum for *exact* plane gravitational wave backgrounds [22].

Further sidebands, where the azimuthal mode index is shifted by ± 1 or ± 2, were also computed (equations (26.301) and (26.302)) but found to be negligibly small compared to the two main effects just mentioned: they are suppressed by the frequency ratio $\Omega = \omega_g/\omega$.

Comparing with light propagation in vacuum, we find that the waveguide dispersion enters in intermediate steps of the calculation, e.g. in (26.291) (which is structurally similar to equation (2.20) in Ref. [12]) via the term $\beta' = \partial\beta/\partial\omega$. However, having implemented physically plausible boundary conditions modelling incoming radiation, we find that the dispersion term β' cancelled in the final results for the phase correction (26.321) and for the perturbation of the polarisation (26.335).

Considering the calculations presented here in the context of previous calculations which determined the influence of Earth's gravitational field and its rotation on fibre-modes, we conclude that the phase shifts in all three problems are well described using semi-heuristic arguments based on the eikonal equation in a "fictitious optical metric" where the discontinuous function n in (26.163) is replaced by the constant value of the effective refractive index $\bar{n}$ (computed from the unperturbed problem). In all cases, the difference between such geometrical-optics estimates and the result obtained by solving the true field equations was essentially determined by the relative index difference $\Delta \ll 1$. In contrast, the perturbation of the polarisation found here goes beyond such simplistic models, and thus required a thorough analysis of Maxwell's equations.

Apart from neglecting terms of order ω_g/ω (low-frequency regime) and $\rho\omega_g$ (which is consistent since $\rho\omega \sim 1$), we have neglected the elastic response of the fibre to the gravitational wave, which influences light propagation therein due to the induced displacement of the core-cladding interface (where continuity conditions had to be imposed) and due to stress-induced

changes of the optical properties of the materials. Effects of the second kind were previously studied for transparent solid bars (elasto-optical antennas), see e.g. Refs. [26, 27, 24, 25], but such calculations have not been carried over to optical fibres yet.

26.2.11 Derivation of the Wave Equation

Here, we derive the wave equation for the electromagnetic field in the GW metric considered above, neglecting terms of order ε^2. Throughout this section, we raise and lower indices with the *full* spatial metric g_{ij}. Equation (26.168) can then be written as

$$n\dot{Z}^i + j\epsilon^{ijk}\nabla_j Z_k = 0\,, \tag{26.344}$$

where ∇ denotes the spatial covariant derivative. Lowering the index, keeping in mind that the spatial metric is time dependent, one obtains the equivalent form

$$n\dot{Z}_i - n\dot{\mathrm{g}}_{ij}Z^k + j\epsilon_{ijk}\nabla^j Z^k = 0\,. \tag{26.345}$$

Applying $n\partial_0$ to the first equation and using this last equation, we find

$$n^2\ddot{Z}^i + j\epsilon^{ijk}\nabla_j(n\dot{\mathrm{g}}_{kl}Z^l - j\epsilon_{klm}\nabla^l Z^m) = 0\,. \tag{26.346}$$

Here, no time derivatives of the volume form occur as the trace of the metric perturbation is time-independent, and no derivatives of the Christoffel symbols occur as the exterior derivative is independent of the connection. Using $\nabla_j Z^j = 0$ and the Ricci identity, we have

$$\epsilon^{ijk}\epsilon_{klm}\nabla_j\nabla^l Z^m = \nabla_j\nabla^i Z^j - \nabla_j\nabla^j Z^i = R^i{}_j Z^j - \Delta Z^i\,, \tag{26.347}$$

where $R^i{}_j$ is the *spatial* Ricci tensor. Inserting this into the previous equation then yields

$$n^2\ddot{Z}^i - \Delta Z^i + R^i{}_j Z^j + j\epsilon^{ijk}\nabla_j(n\dot{\mathrm{g}}_{kl}Z^l) = 0\,. \tag{26.348}$$

26.2.12 Continuity Conditions

The jumps of the various field components are linear combinations of the various parameters α and σ. For example, if w denotes any field component

$$[\![w]\!] = a^1\alpha_1 + a^2\alpha_2 + s^1\sigma_1 + s^2\sigma_2\,, \tag{26.349}$$

with some coefficients a^1, a^2, s^1, s^2, for which we shall simply write

$$[\![w]\!] = (a^1, a^2)_\alpha + (s^1, s^2)_\sigma\,. \tag{26.350}$$

To analyse the jumps of the real fields E, D, B, H, we separate the j-real and j-imaginary parts. Accordingly, we write

$$(a + jb, c + jd)_\alpha = [a + jb, c + jd, -b + ja, -d + jc]_\alpha \tag{26.351}$$

to state explicitly which coefficients multiply the j-real parameters $\Re\alpha_1, \Re\alpha_2, \Im\alpha_1, \Im\alpha_2$. The real and imaginary parts are then given by

$$\Re(a + jb, c + jd)_\alpha = [a, c, -b, -d]_\alpha\,, \tag{26.352}$$
$$\Im(a + jb, c + jd)_\alpha = [b, d, a, c]_\alpha\,. \tag{26.353}$$

Collecting the above mentioned real parameters of α into one column vector

$$\alpha = \begin{pmatrix} \Re\alpha_1 & \Re\alpha_2 & \Im\alpha_1 & \Im\alpha_2 \end{pmatrix}^{\mathsf{T}} , \tag{26.354}$$

and similarly for σ, we may express the dependence of $[\![Z]\!]$, as defined in (26.255), in matrix form

$$[\![Z]\!] = M\boldsymbol{\alpha} + \Sigma\boldsymbol{\sigma} , \tag{26.355}$$

where M and Σ are j-real matrices of dimension 4×4. In the perturbed case, we may similarly collect the real parameters of the σ's into additional column vectors and add their contributions with additional matrices.

These "continuity matrices" fully describe the jumps of the fields at the core-cladding interface and are hence useful to implement continuity conditions. We discuss their general form and compute the matrix for the unperturbed problem explicitly.

General Structure of the Continuity Matrices

Since the electric and magnetic fields are derived from the single complex field Z defined in (26.167), the continuity matrices have only eight independent components. This can be seen from the equations (26.352) and (26.353): if w denotes any field component, then $[\![\Re w]\!]$ completely determines $[\![\Im w]\!]$. More precisely, if the jumps of the real fields $\Re Z^r$ and $\Re Z_\parallel$ are given

$$[\![\Re Z^r]\!] = [a, b, c, d]_\alpha , \qquad [\![\Re Z_\parallel]\!] = [e, f, g, h]_\alpha , \tag{26.356}$$

then the vector $[\![Z]\!]$, as defined in (26.255), is fully determined:

$$\begin{pmatrix} [\![D^r]\!] \\ [\![E_\parallel]\!] \\ [\![B^r]\!] \\ [\![H_\parallel]\!] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ e/n_1^2 & f/n_2^2 & g/n_1^2 & h/n_2^2 \\ -c/n_1 & -d/n_2 & a/n_1 & b/n_2 \\ -g/n_1 & -h/n_2 & e/n_1 & f/n_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Re\alpha_1 \\ \Re\alpha_2 \\ \Im\alpha_1 \\ \Im\alpha_2 \end{pmatrix} . \tag{26.357}$$

Thus, the first two rows (which describe $[\![D^r]\!] = \Re_j [\![Z^r]\!]$ and $[\![E_\parallel]\!] = \Im_j [\![n^{-2} Z_\parallel]\!]$) determine the entire matrix M in $[\![Z]\!] = M\boldsymbol{\alpha}$. The form given here is in agreement with the abbreviating notation (26.264) up to redefinition of the parameters.

Continuity Matrix of the Unperturbed Problem

As an example, we calculate the continuity matrix for the unperturbed problem explicitly. From (26.178) we have

$$i\zeta Z^{(0)r} = \rho^2 \beta \partial_r Z^{(0)\parallel} - ij\rho^2 \omega m n r^{-1} Z^{(0)\parallel} . \tag{26.358}$$

Using (26.177), the jumps of $Z^{(0)\parallel}$ and its radial derivative are readily found to be

$$[\![Z^{(0)\parallel}]\!] = (J_m(U), -K_m(W)) , \tag{26.359}$$

$$[\![\rho\partial_r Z^{(0)\parallel}]\!] = (UJ'_m(U), -WK'_m(W)) . \tag{26.360}$$

Here, we omit the subscript α, as the parameters σ do not enter the unperturbed problem. From this, we find

$$[\![i\zeta Z^{(0)r}]\!] = \rho\beta(UJ'_m(U), -WK'_m(W)) - ij\rho\omega m(n_1 J_m(U), -n_2 K_m(W)) . \tag{26.361}$$

Since ζ equals $+U^2$ in the core and $-W^2$ in the cladding, we deduce

$$[\![Z^{(0)r}]\!] = -i\rho\beta\left(\frac{1}{U}J'_m(U), \frac{1}{W}K'_m(W)\right) - j\rho\omega m\left(\frac{n_1}{U^2}J_m(U), \frac{n_2}{W^2}K_m(W)\right), \tag{26.362}$$

and taking the j-real part using (26.352), we obtain

$$[\![D^{(0)r}]\!] = \left[-i\frac{\rho\beta}{U}J'_m(U), -i\frac{\rho\beta}{W}K'_m(W), mn_1\frac{\rho\omega}{U^2}J_m(U), mn_2\frac{\rho\omega}{W^2}K_m(W)\right]. \tag{26.363}$$

The jump of $E_\parallel = n^{-2}\Re Z^\parallel$ is obtained directly from (26.359):

$$\left[\!\left[E^{(0)}{}_\parallel\right]\!\right] = [n_1^{-2}J_m(U), n_2^{-2}K_m(W), 0, 0]. \tag{26.364}$$

The last two equations determine the unperturbed discontinuity matrix and the result is in agreement with Π_0 given by equation (26.266).

26.3 Hypothetical, Philosophical Theories, Ideas

26.3.1 Can energy be Freely Transmitted Using Works of Nikola Tesla?

(?????)

26.3.2 Can energy be Freely Transmitted Somehow?

(?????)

26.3.3 Has Electromagnetic Field the Earth Something To Do With Life?

(????? some people believe so)

26.3.4 Human Electromagnetic Fields

(????? what is known about it? maybe I'll create later a bigger section for it)

27 Generalizations and other theories of electrodynamics

(тут может быть очень много теории)

27.1 Some Generalizations of Electrodynamics

(более подробно в записи про теоретическую физику, тут лишь некоторые для полноты обсужу)

27.2 Electrodynamics in the Presence of Gravity (?)

(нужно будет - доделаю.)

27.2.1 Electrodynamics in the Presence of Gravitational Waves 1 (!?!??)

(ниже описан подход, который также верный, однако как решать такое уравнение - я не знаю. По сути я просто использовал выше подход, с которым можно сдвигаться, а как этот сдвинуть - хотел бы услышать ответ!)

(мб даже большим разделом сделаю, посмотрим, пока вроде одного такого должно хватить.)

По The Electromagnetic Field in Gravitational Wave Interferometers by Thomas B. Mieling, Piotr T. Chrusciel, and Stefan Palenta

Justification of Eikonal Expansions (?)

As shown in detail below, both the scalar field equation and the wave equations implied by Maxwell's equations are of the general form

$$\left(\delta_I^J \gamma^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu + \epsilon\omega_g a_I^{J\mu}\partial_\mu + \epsilon\omega_g^2 b_I^J\right)\phi_J = 0,$$

for some field ϕ with an index J. Here the a_I^{JJ} 's and the $b_I{}^J$'s are linear combinations of $\sin(u)$ and $\cos(u)$, where u is the phase of the gravitational wave

$$u = \kappa_\mu x^\mu + \chi,$$

and γ is the optical metric (see (5.8) below)

$$\gamma^{\mu\nu} = \gamma^{(0)\mu\nu} - \epsilon A^{\mu\nu}\cos(u) + O\left(\epsilon^2\right).$$

Writing the field ϕ as a perturbation of a plane wave

$$\phi_I = \varphi^{(0)}{}_I e^{ik_\mu x^\mu} + \epsilon\phi^{(1)}{}_I + O\left(\epsilon^2\right),$$

where the $\varphi^{(0)}{}_I$'s are constants and $\phi^{(1)}{}_I$ does not depend upon ϵ, one obtains, within our model for light emission from a surface Σ (described in detail below), a boundary value problem of the form

$$\begin{aligned}\Box^{(0)}\phi_I^{(1)} &= \omega^2 f_{1I}(\Omega, u)e^{ik_\mu{}^I x^\mu},\\ \phi^{(1)}{}_I\big|_\Sigma &= f_{2I}(\Omega, u)e^{-i\omega t},\\ m\left(\phi_I^{(1)}\right)\Big|_\Sigma &= in\omega f_{3I}(\Omega, u)e^{-i\omega t},\end{aligned}$$

where $f_{i,J}$'s are linear combinations of $\sin(u)$ and $\cos(u)$, with coefficients which are analytic in $\Omega = \omega_g/\omega$, and m is the unperturbed unit normal to Σ. In particular the coefficients f_{1I} in (4.5) take the form

$$f_{1I} = -n^2 A(m, m)\varphi^{(0)}{}_I\cos(u) + O(\Omega).$$

By explicit calculations we show that if the f_{iJ} 's satisfy a certain emission condition (which we verify for our model), then the solutions are of the form

$$\phi^{(1)}{}_I = \left[i\varphi^{(0)}{}_I\psi^{(1)} + \varphi^{(1)}{}_I\left(\Omega, u, \omega_g m\cdot x\right)\right]e^{ik_\mu x^\mu}.$$

Here, the real-valued function $\psi^{(1)}$ is of order $1/\Omega$ and satisfies

$$2\gamma^{(0)\mu\nu}k_\mu\partial_\nu\psi^{(1)} - A^{\mu\nu}k_\mu k_\nu\cos(u) = 0,$$

and the $\varphi^{(1)}$'s are analytic functions of Ω, which are of order unity. Consequently, the overall field can be written as

$$\begin{aligned}\phi_I &= \left[{\varphi^{(0)}}_I + i\epsilon{\varphi^{(0)}}_I\psi^{(1)} + \epsilon{\varphi^{(1)}}_I\right] e^{ik_{\mu^x}} + O\left(\epsilon^2\right) \\ &= \left[{\varphi^{(0)}}_I + \epsilon{\varphi^{(1)}}_I\right]\left[1 + i\epsilon\psi^{(1)}\right] e^{ik_\mu x^\mu} + O\left(\epsilon^2\right) \\ &= \left[{\varphi^{(0)}}_I + \epsilon{\varphi^{(1)}}_I\right] e^{i\left(k_\mu x^\mu + \epsilon\psi^{(1)}\right)} + O\left(\epsilon^2\right) = \varphi_I e^{i\psi} + O\left(\epsilon^2\right),\end{aligned}$$

where the function ψ is

$$\psi := k_\mu x^\mu + \epsilon\psi^{(1)}.$$

Due to (4.10), ψ satisfies the eikonal equation to first order in ϵ:

$$\gamma^{\mu\nu}\left(\partial_\mu\psi\right)\left(\partial_\nu\psi\right) = O\left(\epsilon^2\right).$$

Moreover, the amplitude $\varphi_I = {\varphi^{(0)}}_I + \epsilon{\varphi^{(1)}}_I$ is analytic in the frequency ratio Ω and thus analytic in the inverse frequency $1/\omega$. This justifies the use of eikonal expansions, at least at first order in ϵ.

Our formulae show that the phase perturbation $\psi^{(1)}$ is independent of f_2, f_3, and also of the terms not written explicitly in (4.8). Instead, the details of the boundary conditions and the lower order terms in the wave equation only affect the amplitude perturbation ${\varphi^{(1)}}_I$. In this sense, the phase does not depend on the precise details of the boundary data. In particular as $\psi^{(1)}$ is of order $1/\Omega$, it constitutes the dominant contribution to $\phi^{(1)}$. This shows that previous analyses using geometric optics correctly determine the leading-order formula for $\phi^{(1)}$ in an expansion in both parameters ϵ and Ω.

The Setup

We consider a linearised gravitational wave of amplitude ϵ in transverse-traceless gauge. Thus, neglecting non-linearities, the metric can be written as

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \epsilon h_{\mu\nu},$$

where ϵ is a small constant and $h_{\mu\nu}$ is spatial, transverse, traceless, and satisfies the Minkowskian wave equation:

$$h_{\mu 0} = 0, \quad \eta^{\mu\nu}\partial_\mu h_{\nu\rho} = 0, \quad \eta^{\mu\nu}h_{\mu\nu} = 0, \quad \eta^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu h_{\rho\sigma} = 0$$

Here ϵ should be small enough so that the existence arguments above apply. A sharp estimate for this number is beyond the existing mathematical techniques, but we expect that values typical for current GW detectors are compatible with our analysis.

As explained in Section 2, we are concerned with solutions of the scalar wave equation and of the Maxwell equations which are convergent power series in ϵ. Since only the first-order term is of experimental relevance, it suffices to solve a linear equation for the first coefficient in this expansion. By linearity, it suffices to consider the case where $h_{\mu\nu}$ has a single frequency ω_g and propagates in a fixed direction. We are then led to consider a metric tensor

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \epsilon A_{\mu\nu}\cos(\kappa\cdot x + \chi) + O\left(\epsilon^2\right),$$

where χ is a constant phase offset, κ is the GW wave-covector

$$\kappa = \omega_g\left(\hat{\kappa}_i\,\mathrm{d}x^i - \mathrm{d}t\right),$$

$\hat{\kappa}_i$ being a constant unit vector in the background geometry, and where for any covector k we write

$$k.x \equiv k_\mu x^\mu,$$

so that $\kappa \cdot x = \omega_g \left(\hat{\kappa}_i x^i - t\right)$. The signature used here is

$$(\eta_{\mu\nu}) = \mathrm{diag}(-1, +1, +1, +1).$$

The gauge conditions now imply

$$A_{\mu 0} = 0, \quad \delta^{ij} A_{ij} = 0, \quad A_{\mu\nu}\kappa^\nu = 0,$$

i.e. A is purely spatial, traceless, and orthogonal to the GW wave-vector κ (whose index is raised with the Minkowski metric).

We consider a region filled by an isotropic linear dielectric of constant refractive index n. The dielectric is at rest in the coordinate system above, so that its four-velocity is $u = \partial/\partial x^0$. This is a very crude approximation which ignores the elastic properties of the dielectric medium; we plan to return to this in future work. The associated optical metric is given by

$$\gamma^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} + \left(1 - n^2\right) u^\mu u^\nu.$$

Here, the inverse metric is given by

$$g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - \epsilon A^{\mu\nu} \cos(\kappa \cdot x + \chi) + O\left(\epsilon^2\right),$$

where $A^{\mu\nu} \equiv \eta^{\mu\rho}\eta^{\nu\sigma}A_{\rho\sigma}$ numerically coincides with $A_{\mu\nu}$ (in the used coordinate system). Hence, the optical metric at first order in ϵ is

$$\gamma^{(0)\mu\nu} = \mathrm{diag}\left(-n^2, 1, 1, 1\right), \quad \gamma^{(1)\mu\nu} = -h^{\mu\nu}.$$

6

Intro to Scalar Waves

Before considering Maxwell's equations and wave solutions thereof in Section 7, we first study a simplified model based on the scalar wave equation. It is folklore knowledge, and confirmed by our analysis (cf. Sections 7.3 and 7.4 below), that this suffices to determine the phase shift in interferometric experiments.

Since Maxwell's equations imply a wave equation for each component of the electromagnetic field, we consider a scalar field ϕ satisfying the scalar wave equation

$$\Box_\gamma \phi \equiv \gamma^{\mu\nu}\partial_\mu\partial_\nu\phi = 0,$$

where $\Box_\gamma$ is the wave operator associated to the optical metric (5.8). The first equality here holds because we are working with harmonic coordinates. 6.1

Emission From a Laser

To model the emission of light by a laser, we impose the boundary conditions

$$\phi|_\Sigma = e^{-i\omega t}, \quad \nu(\phi)|_\Sigma = in\omega e^{-i\omega t},$$

where Σ is the timelike hypersurface from which the wave is emitted, ν denotes its unit normal, and $\nu(\phi) = \nu^\mu\partial_\mu\phi$ is the usual notation for the action of a vector field on a function.

One motivation for these boundary conditions comes from geometric optics with which we want to compare. There, one writes the field as $\mathscr{A}e^{i\psi}$, where the gradient of the eikonal ψ is required to be null. Seeking solutions which resemble plane waves in flat space as

closely as possible, we assume the field to take the same value on the emission surface as one would have for a plane wave in Minkowski space. In the language of geometric optics, this corresponds to a constant amplitude $\mathscr{A}$ equal to 1 on Σ, and the eikonal ψ equal to $-\omega t$ there. Having prescribed $\psi|_\Sigma = -\omega t$, it follows that $\mathrm{d}\psi = -\omega \mathrm{d}t + \alpha\nu$, where ν is the geometric normal to Σ (normalized with respect to the full metric g). The null condition then entails $\alpha^2 = n^2\omega^2$, and the sign of α determines the direction into which light is emitted. Choosing a positive sign of α (emitting along ν), and neglecting the derivative of $\mathscr{A}$ in the normal direction, [1] yields the boundary values in (6.1.1).

More significantly, as follows from our analysis below, these boundary values can also be motivated from Maxwell's equations. There, we prescribe the values of the fields on Σ, and Maxwell's equations then, in turn, determine the normal derivatives. It turns out that the boundary conditions arising there differ from those here only by polarisation corrections, so that the toy model discussed here is sufficient to determine the phase. Summarizing: the first condition encodes that every point of the emission surface Σ emits light of the same proper frequency ω (t measures proper time of clocks at rest), with the same phase, and the second equation means that the emission is normal to Σ. While there are certainly more accurate models for the light emission of lasers (e.g. using Gaussian waves), we only consider this simple case. For the emission surface, we take the coordinate-plane

$$\Sigma = \left\{ m_i x^i = 0 \right\},$$

for some (constant) coefficients m_i, normalized to $m.m = 1.$, Here and in the following, for two spatial vectors v, w, we denote by $v.\ w$ their Euclidean scalar product

$$v \cdot w \equiv \delta^{ij} v_i w_j$$

This does not apply to κ_μ and x^μ, which are not spatial vectors: instead, $\kappa \cdot x$ denotes the contraction $\kappa_\mu x^\mu$. Choosing the orientation of ν to be the same as the one for the conormal

$$m := m_i \ \mathrm{d}x^i,$$

one has

$$\nu_i = m_i \left(1 + \frac{1}{2} \epsilon A(m,m) \cos(\kappa \cdot x + \chi) \right),$$

where we have used the notation

$$A(m,m) = A^{ij} m_i m_j.$$

The associated normal vector field $\nu^\alpha = g^{\alpha\beta}\nu_\beta$ is thus

$$\nu^i = \delta^{ij} m_j \left(1 + \frac{1}{2} \epsilon A(m,m) \cos(\kappa \cdot x + \chi) \right) - \epsilon A^{ij} m_j \cos(\kappa \cdot x + \chi).$$

Analogously to the discussion of Maxwell fields in Section 2, our boundary conditions (6.1.1) fit well into both the Cauchy-Kovalevskaya theorem, which provides a solution in our setting, and the Holmgren uniqueness theorem, which asserts that solutions of such boundary value problems are unique within the class of smooth solutions. In any case this provides a toy model for the problem at hand, and we provide the unique solution below up to, experimentally irrelevant, error terms $O(\epsilon^2)$.

For the perturbative setting, consider first $\epsilon = 0$ (unperturbed problem) where the solution is evidently given by

$$\phi^{(0)} = e^{ik \cdot x},$$

where

$$k_\mu = \omega(-1, nm).$$

In the perturbed case, we thus write

$$\phi = \phi^{(0)} + \epsilon\phi^{(1)} + O\left(\epsilon^2\right).$$

Inserting this into the scalar wave equation (6.1) and the boundary conditions (6.1.1) leads, at first order in ϵ, to the boundary value problem

$$\begin{aligned}
\Box_{\gamma^{(0)}}\phi^{(1)} &= -n^2\omega^2 A(m,m)\cos(\kappa\cdot x+\chi)e^{ik\cdot x},\\
\phi^{(1)}\big|_\Sigma &= 0\\
m\left(\phi^{(1)}\right)\big|_\Sigma &= \frac{i}{2}n\omega A(m,m)\cos(\kappa\cdot x+\chi)e^{-i\omega t}.
\end{aligned}$$

Of course, the right-hand sides are also evaluated at Σ whenever the left-hand sides are. 6.1.1 General Expression for Emitted Waves Since we will later consider light emission modelled by Maxwell fields, we will now solve a slightly more general problem (suppressing the superscript "(1)" momentarily):

$$\begin{aligned}
\Box_{\gamma(0)}\phi &= -\omega^2 f_1 e^{ik\cdot x}\\
\phi|_\Sigma &= f_2 e^{-i\omega t}\\
m(\phi)|_\Sigma &= in\omega f_3 e^{-i\omega t}
\end{aligned}$$

where f_1 is a trigonometric function (by which we mean a linear combination of sin and cos) of $\kappa.x+\chi$, and f_2, f_3 are linear combinations of such functions of $\kappa.\ x|_\Sigma+\chi, \chi-\omega_g t$, and possibly involve additive constants. This form covers all the boundary values problems, arising in the description of light emission, considered in this work.

We find it useful to expand the trigonometric functions in terms of complex exponentials as follows:

$$\begin{aligned}
f_1 &= \alpha^+ e^{+i(\kappa\cdot x+\chi)} + \alpha^- e^{-i(\kappa\cdot x+\chi)},\\
f_2 &= \beta_1^+ e^{+i(\kappa\cdot x+\chi)} + \beta_1^- e^{-i(\kappa\cdot x+\chi)} + \gamma_1^+ e^{+i(\chi-\omega_g t)} + \gamma_1^- e^{-i(\chi-\omega_g t)} + 2\delta_1,\\
f_3 &= \beta_2^+ e^{+i(\kappa\cdot x+\chi)} + \beta_2^- e^{-i(\kappa\cdot x+\chi)} + \gamma_2^+ e^{+i(\chi-\omega_g t)} + \gamma_2^- e^{-i(\chi-\omega_g t)} + 2\delta_2,
\end{aligned}$$

with the right-hand sides of (6.1.16) and (6.1.17) implicitly restricted to Σ. The factor 2 in front of δ_1 and δ_2 is introduced for notational simplicity in the calculations which follow. The solution to this problem can then be written as

$$\phi = \phi^+ + \phi^-,$$

where $\phi^+ \equiv \phi^+\left(\alpha^+, \beta_1^+, \beta_2^+, \gamma_1^+, \gamma_2^+\right)$is the solution to the problem

$$\Box_{\gamma^{(0)}}\phi^+ - -\alpha^+\omega^2 e^{i(k+\kappa)\cdot x+i\chi}$$

$$\begin{aligned}
\phi^+\big|_\Sigma &= \left(\beta_1^+ e^{i(\kappa\cdot x+\chi)} + \gamma_1^+ e^{i(\chi-\omega_g t)} + \delta_1\right)e^{-i\omega t}\\
m\left(\phi^+\right)\big|_\Sigma &= in\omega\left(\beta_2 e^{i(\kappa\cdot x+\chi)} + \gamma_2^+ e^{i(\chi-\omega_g t)} + \delta_2\right)e^{-i\omega t}
\end{aligned}$$

which we will construct shortly, and $\phi^-$is obtained from $\phi^+$by replacing the various coefficients $\alpha^+, \beta_1^+, \ldots$ by the corresponding quantities $\alpha^-, \beta_1^-, \ldots$, and reversing the sign of both ω_g and χ.

In fact, it is not neoessary to write down the phase offset χ explicitly. Indeed, given a solution for $\chi = 0$, the general case is obtained by the substitution

$$\left(\alpha^\pm, \beta_{1,2}^\pm, \gamma_{1,2}^\pm\right) \to e^{\pm i\chi}\left(\alpha^\pm, \beta_{1,2}^\pm, \gamma_{1,2}^\pm\right)$$

while keeping $\delta_{1,2}$ unchanged. Hence, we consider the boundary value problem

$$\begin{aligned}\Box_{\gamma(0)}\phi &= -\omega^2\alpha e^{i(k+\kappa)\cdot x},\\ \phi|_\Sigma &= \left(\beta_1 e^{i\kappa\cdot x} + \gamma 1 e^{-i\omega_g t} + \delta_1\right) e^{-i\omega t},\\ m(\phi)|_\Sigma &= in\omega\left(\beta_2 e^{i\kappa\cdot x} + \gamma_2 e^{-i\omega_g t} + \delta_2\right) e^{-i\omega t},\end{aligned}$$

for generic parameters $\alpha, \beta_{1,2}, \gamma_{1,2}, \delta_{1,2}$. The wave-vectors occurring here are

$$k_\mu = \omega(-1, nm), \quad \kappa_\mu = \omega_g(-1, \hat{\kappa}).$$

We constrict explicitly a solution $\phi = \phi\left(\alpha^+, \beta^+, \gamma^+, \delta\right)$, which is the unique solution by Holmgren's theorem.

Construction of the Solution A particular solution to the inhomogeneous wave equation (6.1.23) is

$$\phi_{\text{part.}} = -\frac{\bar{\alpha}}{\Omega\sigma} e^{i(k+\kappa)\cdot x},$$

where

$$\sigma = -\frac{\gamma^{(0)\mu\nu}(k+\kappa)_\mu(k+\kappa)_\nu}{\omega\omega_g} = 2n(n - m.\hat{\kappa}) + \Omega\left(n^2 - 1\right),$$

provided that Ω and σ do not vanish. We will assume this in all calculations that follow, and consider the low frequency limit $\Omega \to 0$ and the "collinear vacuum limit" (where $n = 1$ and $m.\hat{\kappa} \to 1$ so that $\sigma \to 0$) at the end of our calculations.

To satisfy the boundary conditions, we add plane waves which restrict to the desired behaviour on Σ. The functions $\exp\left(i(k + \kappa - \omega(m).x\right)$ and $\exp\left(i(k - \omega\xi m) \cdot x - i\omega_g t\right)$ satisfy the homogeneous wave equation for the following values of ζ and ξ:

$$\begin{aligned}\zeta_{1,2} &= n + \Omega m.\hat{\kappa} \mp \sqrt{(n + \Omega m.\hat{\kappa})^2 + \Omega\sigma},\\ \xi_{1,2} &= n \mp n(1 + \Omega)\end{aligned}$$

where the first (second) subscript index refers to the upper (lower) sign. Defining also the reflected wave vector

$$k_\mu = \omega(-1, -nm),$$

we make the ansatz

$$\phi = \phi_S + \phi_R$$

with

$$\begin{aligned}\phi_S &= -\frac{\alpha}{\Omega\sigma} e^{i(k+\kappa)\cdot x}\left(1 - e^{-i\omega\zeta_1 m\cdot x}\right)\\ \phi_R &= \left(\lambda_1 e^{-i\omega\zeta_1 m\cdot x} + \lambda_2 e^{-i\omega\zeta_2 m\cdot x}\right) e^{i(k+\kappa)\cdot x}\\ &\quad + \left(\mu_1 e^{-i\omega\xi_1 m\cdot x} + \mu_2 e^{-i\omega\xi_2 m\cdot x}\right) e^{i(k\cdot x - \omega_g t)} + \nu_1 e^{ik\cdot x} + \nu_2 e^{i\bar{k}\cdot x}.\end{aligned}$$

Here we have split the function ϕ into a "seemingly singular part" ϕ_S which is undefined for $\Omega\sigma = 0$, and a remainder ϕ_R. As we will see, both ϕ_S ad ϕ_R have well-behaved low-frequency and collinear vacuum limits. This ansatz satisfies the boundary conditions (6.1.24) and (6.1.25) if

$$\begin{aligned}&\lambda_1 + \lambda_2 = \beta_1, \quad \zeta_1\lambda_1 + \zeta_2\lambda_2 = \beta_1(n + \Omega m.\hat{\kappa}) - n\beta_2 - \frac{\alpha\zeta_1}{\Omega\sigma},\\ &\mu_1 + \mu_2 = \gamma_1, \quad \xi_1\mu_1 + \xi_2\mu_2 = n\left(\gamma_1 - \gamma_2\right),\\ &\nu_1 + \nu_2 = \delta_1, \qquad \nu_1 - \nu_2 = \delta_2,\end{aligned}$$

with the solution

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left(\beta_1 \pm \frac{n\beta_2 + \frac{\alpha\zeta_1}{\Omega\sigma}}{\sqrt{(n+\Omega m.\hat{\kappa})^2 + \Omega\sigma}}\right),$$
$$\mu_{1,2} = \frac{1}{2}\left(\gamma_1 \pm \frac{\gamma_2}{1+\Omega}\right),$$
$$\nu_{1,2} = \frac{1}{2}\left(\delta_1 \pm \delta_2\right).$$

Recall that for computational reasons Ω is allowed to be negative, but since we are interested in the low-frequency regime $|\Omega| < 1$, the case $1 + \Omega = 0$ is irrelevant for our purposes and, in fact, we will assume $1 + \Omega > 0$.

Emission Condition Note that ζ_1 and ξ_2 are of order Ω. The plane waves multiplied by λ_1, μ_1 and ν_1 thus have wave vectors which are close to the unperturbed wave vector k. In contrast, since ζ_2 and ξ_2 have an expansion of the form $2n + O(\Omega)$, the plane waves multiplied by λ_2, μ_2 and ν_2 correspond to "counter-propagating waves" whose wave vectors are close to the reflected wave vector $\tilde{k} = k - 2n\omega m$.

The condition for absence of such counter-propagating components is $\lambda_2 = \mu_2 = \nu_2 = 0$, which translates to the following conditions on the boundary data:

$$\beta_1\sqrt{(n+\Omega m.\hat{\kappa})^2 + \Omega\sigma} - n\beta_2 - \frac{\alpha\zeta_1}{\Omega\sigma} = 0, \quad (1+\Omega)\gamma_1 - \gamma_2 = 0, \quad \delta_1 - \delta_2 = 0$$

These conditions cotuld have been imposed from the beginning, but the analysis without assuming (6.1.41) makes it clear that only a limited subclass of solutions are of the eikonal form. If these conditions are met, the solution simplifies to

$$\phi/e^{ik\cdot x} = -\frac{\alpha}{\Omega\sigma}\left(e^{i\kappa\cdot x} - e^{i(\kappa\cdot x - \omega\zeta_1 m\cdot x)}\right) + \beta_1 e^{i(\kappa\cdot x - \omega\zeta_1 m\cdot x)} + \gamma_1 e^{-i(\omega_g t + \omega\zeta_1 m\cdot x)} + \delta_1.$$

the collinear vacuum limit where $n = 1$ and $m.\hat{\kappa} \to 1$, so that $\sigma \to 0$ according to (6.1.28), and (ii) the low frequency limit $\Omega \to 0$. Both singularities turn out to be removable.

Collinear Vacuum Limit Consider first the collinear vacuum limit of (6.1.42), where $n = 1$ and $m.\hat{\kappa} \to 1$. The last two terms in (6.1.42) remain unchanged in this limit, and the second to last term tends to $\beta_1 e^{i(\kappa.x)}$ since $\zeta_1 \to 0$ in this limit. Finally, for the remaining term, one has

$$\lim_{m.\kappa} \frac{1}{\Omega\sigma}\left(e^{-i\omega\zeta_1 m\cdot x} - 1\right) = \frac{i\omega m\cdot x}{2(1+\Omega)},$$

so all terms in (6.1.42) have a finite collinear vacuum limit. This shows that the singularity at $m.\hat{k} = 1$ and $n = 1$ is removable. Low-Frequency Limit Next, consider the limit $\Omega \to 0$ of (6.1.42). There, one has

$$\lim_{\Omega\to 0} \frac{1}{\Omega\sigma}\left(e^{-i\omega\zeta_1 m\cdot x} - 1\right) = \frac{i\omega m\cdot x}{2n}.$$

Hence, the limit $\Omega \to 0$ is also well-behaved and the singularity at $\Omega = 0$ is removable. Eikonal Expansion Using the explicit result (6.1.42), one can now prove the claims made in Section 4. The formula just obtained is already reminiscent of (4.9), but the exact details require further analysis.

Since σ is analytic near $\Omega = 0$ with the expansion $\sigma = 2n(n - m.\hat{\kappa}) + O(\Omega)$, one has $\frac{1}{\Omega\sigma} = \frac{1}{2n\Omega(n-m\cdot\hat{\kappa})} + f(\Omega)$ here and in what follows $f(\Omega)$ denotes a generic function which may change from line to line and which is analytic in Ω in a neighbourhood of zero. Similarly, ζ_1 is analytic in Ω in a neighbourhood of zero and has the expansion $\zeta_1 = \Omega(m.\hat{\kappa} - n) + O\left(\Omega^2\right)$. Consequently, $\kappa\cdot x - \omega\zeta_1 m\cdot x = \kappa_0\cdot x + f(\Omega)\omega_g m\cdot x$, where

$$\kappa_0\cdot x := \kappa.x + (n - m.\hat{\kappa})\omega_g m.x.$$

It then follows that

$$-\frac{\alpha}{\Omega\sigma}\left(e^{i\kappa\cdot x}-e^{i(\kappa\cdot x-\omega\zeta_1 m\cdot x)}\right)=-\frac{\alpha}{2n\Omega}\frac{e^{i\kappa.x}-e^{i\kappa_0\cdot x}}{n-m\cdot\hat{\kappa}}+f\left(\Omega,\kappa\cdot x,\omega_g m\cdot x\right).$$

Similarly, the remaining terms in (6.1.42) are of the form $f\left(\Omega,\kappa.x,\omega_g t,\omega_g m.x\right)$: the β_1-term is of the form just considered, and the γ_1-term can be written as $\gamma_1 e^{\hat{I}_g(t-nm.x)}$. Putting all this together, one arrives at the result

$$\phi/e^{ik\cdot x}=-\frac{\alpha}{2n\Omega}\frac{e^{i\kappa.x}-e^{i\kappa_0\cdot x}}{n-m\cdot\hat{\kappa}}e^{i\kappa\cdot x}+f\left(\Omega,\kappa\cdot x,\omega_g t,\omega_g m\cdot x\right).$$

We are primarily concerned with perturbations of plane waves solutions, with the plane wave taking the form $\phi^{(0)}=\varphi^{(0)}e^{ik.x}$ for some constant $\varphi^{(0)}$. For $\varphi^{(0)}\neq 0$ it suffices to consider the case $\varphi^{(0)}=1$ by linearity. In this case, the structure of the wave equation (4.1) implies that $\alpha=\frac{1}{2}n^2A(m,m)+O(\Omega)$ so that the overall correction is found to be

$$\phi^{(1)}=i\psi^{(1)}+f\left(\Omega,\kappa\cdot x,\omega_g t,\omega_g m\cdot x\right),$$

where

$$\psi^{(1)}=-\frac{1}{2}nA(m,m)\frac{\sin(\kappa\cdot x+\chi)-\sin\left(\kappa_0\cdot x+\chi\right)}{\Omega(n-m\cdot\hat{\kappa})}.$$

By a direct calculation one readily verifies that this function satisfies

$$\gamma^{(0)\mu\nu}k_\mu\partial_\nu\psi^{(1)}=\frac{1}{2}n^2\omega^2h(m,m),$$

which is the perturbed eikonal equation (4.10). Alternatively, if the unperturbed field has $\varphi^{(0)}=0$ (this occurs, for example, for polarized EM plane waves, where two components of each of the unperturbed electric and magnetic fields are zero), α is of order Ω and one obtains instead a formula of the kind $\phi^{(1)}=f\left(\Omega,\kappa\cdot x,\omega_g t,\omega_g m.x\right)$ without a leading $1/\Omega$ term. All in all, this proves the claims made in Section 4. Next-To-Leading Order Expansion For later applications, we give an approximate form of (6.1.42) which takes into account both the perturbation of the phase, and also the first correction of the amplitude. Since phase perturbations arise at order Ω^{-1} and the first amplitude corrections arise at order Ω^0, the desired approximation is obtained by neglecting terms of order Ω and higher. At this level of accuracy, the emission conditions (6.1.41) simplify to yield

$$\frac{\alpha}{2n^2}+\beta_1-\beta_2=O(\Omega),\quad \gamma_1-\gamma_2=O(\Omega),\quad \delta_1-\delta_2=O(\Omega).$$

If these conditions are satisfied, the field perturbation is given by (6.1.42), in which case one may approximate the phases as

$$\begin{aligned}\kappa\cdot x-\omega\zeta_1 m\cdot x&=\kappa_0\cdot x-\frac{1-(m\cdot\hat{\kappa})^2}{2n}\Omega\omega_g m\cdot x+O\left(\Omega^2\omega_g m\cdot x\right),\\ -\omega_g t-\omega\xi_1 m\cdot x&=\Omega k\cdot x\end{aligned}$$

where $\kappa_0 x$ is defined in (6.1.46). Expanding the exponentials in this way and using

$$\frac{1}{\Omega\sigma}=\frac{1}{2\Omega n(n-m\cdot\hat{\kappa})}-\frac{n^2-1}{4n^2(n-m\cdot\hat{\kappa})^2}+O(\Omega),$$

one arrives at

$$\begin{aligned}\phi^{\pm}/e^{ik.x} = &\mp \alpha^{\pm}\frac{e^{\pm i\kappa.x}-e^{\pm i\kappa_0\cdot x}}{2\Omega n(n-m\cdot\hat{\kappa})}+\alpha^{\pm}\left(n^2-1\right)\frac{e^{\pm i\kappa.x}-e^{\pm ik_0\cdot x}}{4n^2(n-m\cdot\hat{\kappa})^2}\\ &+\left(\beta_1^{\pm}\mp i\alpha^{\pm}\frac{1-(m\cdot\hat{\kappa})^2}{4n^2(n-m\cdot\hat{\kappa})}\omega_g m\cdot x\right)e^{\pm i\kappa_0 x}\\ &+\gamma_1^{\pm}e^{\pm i\omega_g(nm\cdot x-t)}+\delta_1+O\left(\Omega\omega_g m\cdot x\right)+O(\Omega)\end{aligned}$$

where the first error term grows with the distance $m.x$, but the second is uniform in the distance. 6.1.2 Emitted Scalar Wave Let us now specialize the general solution just constructed to the concrete problem (6.1.11). Then the coefficients in (6.1.15)-(6.1.17) read

$$\alpha^{\pm}=\frac{1}{2}n^2A(m,m),\quad \beta_1^{\pm}=0,\quad \beta_2^{\pm}=\frac{1}{4}A(m,m),$$

and the other parameters $\gamma_{1,2}^{\pm},\delta_{1,2}$ vanish. These parameters do satisfy the conditions (6.1.52), so that one may use (6.1.56) to obtain

$$\begin{aligned}\phi^{\pm}=-\frac{1}{2}A(m,m)e^{ik\cdot x}[&\pm\frac{n}{2\Omega}\frac{e^{\pm i\kappa\cdot x}-e^{\pm i\kappa_0\cdot x}}{n-m\cdot\hat{\kappa}}-\left(n^2-1\right)\frac{e^{\pm i\kappa\cdot x}-e^{\pm i\kappa_0\cdot x}}{4(n-m\cdot\hat{\kappa})^2}\\ &\pm i\frac{1-(m\cdot\hat{\kappa})^2}{4(n-m\cdot\hat{\kappa})}\omega_g m\cdot x e^{\pm i\kappa_0 x}\Big]+O\left(\Omega\omega_g m\cdot x\right)+O(\Omega),\end{aligned}$$

Computing $\phi^{(1)}=\phi^{+}+\phi^{-}$and restoring the gravitational wave phase shift χ, the first order perturbation is found to be

$$\begin{aligned}\phi^{(1)}=-\frac{1}{2}A(m,m)e^{ik\cdot x}[&\frac{in}{\Omega}\frac{\sin(\kappa.x+\chi)-\sin\left(\kappa_0\cdot x+\chi\right)}{n-m.\hat{\kappa}}\\ &-\left(n^2-1\right)\frac{\cos(\kappa\cdot x+\chi)-\cos\left(\kappa_0\cdot x+\chi\right)}{2(n-m\cdot\hat{\kappa})^2}\\ &-\frac{1-(m\cdot\hat{\kappa})^2}{2(n-m.\hat{\kappa})}\omega_g m\cdot x\sin\left(\kappa_0\cdot x+\chi\right)\Big]+O\left(\Omega\omega_g m.x\right)+O(\Omega)\end{aligned}$$

Since derivatives of the first term in brackets are of order ω, while those of the remaining terms are of order ω_g, we interpret the purely imaginary first term as a phase correction (recall that in geometric optics, the eikonal is assumed to be rapidly varying, while the amplitude is slowly varying), and write the resulting overall field as

$$\phi=\mathscr{A}e^{i\psi}+O\left(\epsilon^2\right)+O(\epsilon\Omega)+O\left(\epsilon\Omega\omega_g m.x\right),$$

where

$$\begin{aligned}\mathscr{A}&=1+\frac{1}{4}\epsilon A(m,m)\Big[\frac{1-(m.\hat{\kappa})^2}{n-m\cdot\hat{\kappa}}\sin\left(\kappa_0\cdot x+\chi\right)\omega_g m\cdot x\\ &+\left(n^2-1\right)\frac{\cos(\kappa\cdot x+\chi)-\cos\left(\kappa_0\cdot x+\chi\right)}{(n-m.\hat{\kappa})^2}\Big]\\ \psi&=k\cdot x-\frac{1}{2}\epsilon nA(m,m)\frac{\sin(\kappa\cdot x+\chi)-\sin(\kappa 0\cdot x+\chi)}{\Omega(n-m.\hat{\kappa})}\end{aligned}$$

6.2 Reflection At a Mirror We model the mirror by a timelike hypersurface Σ^y with the following reflection properties. An impinging wave ϕ gives rise to a reflected wave ϕ such that (a) the overall field $\phi+\phi$ vanishes on Σ', and (b) the normal derivative of ϕ is the same as that of ϕ. This is made precise by the equations

$$(\dot{\phi}+\phi)\Big|_{\Sigma'}=0,\quad \nu(\dot{\phi}-\phi)\Big|_{\Sigma'}=0.$$

To illustrate this in flat space-time, consider a plane wave $\phi = \exp(ik.x)$ with $k_\mu = (-\omega, k_1, k_2, k_3)$ impinging on a mirror Σ', which is described by $x = 0$. Choosing the normal ν to be $\partial/\partial x^1$ one has $\nu(\phi)|_{\Sigma'} = ik_1\phi|_\Sigma$. The reflected wave $\phi = -\exp(i\check{k}.x)$ with $\check{k}_\mu = (-\omega, -k_1, k_2, k_3)$ then restricts to $-\phi$ on Σ' and its normal derivative is

$$\nu(\breve{\phi})\Big|_{\Sigma'} = i\tilde{k_1}\dot{\phi}\Big|_\Sigma = -\,ik_1\dot{\phi}\Big|_\Sigma = ik_1\phi|_{\Sigma y} = \nu(\phi)|_\Sigma$$

Since generic waves can be decomposed into plane waves and this argument applies to every Fourier component individually, these conditions are not restricted to plane waves. In the case of normal incidence in flat spacetime we have $k_\mu = (-\omega, n\omega, 0, 0)$ and $\overleftarrow{k}_\mu = (-\omega, -n\omega, 0, 0)$. However, we shall work in coordinates which are not necessarily adapted to the reflection surface, with both Σ and Σ' given by $m.x = \text{const}$.

Here it should be kept in mind that different components of the electromagnetic field behave differently at mirrors. We will use the current model for scalar waves to get a first insight, before considering the full problem using Maxwell's equations below. As a simple model for the mirror, we consider the hypersurface

$$\Sigma' = \left\{m_i x^i = \ell\right\}$$

where the coefficients m_i are the same as for the emission surface Σ. The emission and reflection surfaces are thus parallel as coordinate-planes and separated by a coordinate distance ℓ. 6.2.1 General Expression for Reflected Waves Before computing the reflected field from the incident field (6.1.60), we consider a more general problem (much like Section 6.1.1) and specialize to the concrete problem later. This will be particularly useful for the discussion of Maxwell fields in Section 7.5.

Proceeding as in (6.1.18) and following, we thus consider the boundary value problem

$$\begin{aligned}
&\Box_{\gamma(0)}\phi = -\omega^2 e^{i(\hat{k}+\kappa)\cdot x + in\omega\ell},\\
&\widehat{\phi}\Big|_{\Sigma'} = \left(\beta_1 e^{ik\cdot x} + z_1 e^{-i\omega_g t} + \delta_1\right) e^{-i\omega t},\\
&m(\dot{\phi})\Big|_{\Sigma'} = -in\omega\left(\bar{\beta}_2 e^{i\kappa.x} + z_2 e^{-i\omega\omega_g t} + \delta_2\right) e^{-i\omega t},
\end{aligned}$$

where the relevant wave vectors are

$$k_\mu = \omega(-1, nm), \quad k_\mu = \omega(-1, -nm), \quad \kappa_\mu = \omega_g(-1, \hat{\kappa}).$$

Here the phase of the source term in the right-hand side was chosen for convenience $\left(\bar{k}.x + n\omega\ell\right.$ restricts to $-\omega t$ on $\left.\Sigma^r\right)$. This is no restriction, as additional phase shifts can always be absorbed in the coefficients $\not{\alpha}, \beta_{1,2}$ etc.

As in the previous discussion, we work with a vanishing gravitational phase offset χ The general case of non-zero χ is obtained by a substitution similar to (6.1.22).

The analysis proceeds in almost the same way as in Section 6.1.1. In fact, the only modification is the sign change of m and the addition of phases of the form $e^{in\omega\ell}$. In a way similar to (6.1.32), we write

$$\dot{\phi} = \hat{\phi}_S + \hat{\phi}_R,$$

where

$$\begin{aligned}
\dot{\phi}_S &= -\frac{\dot{\alpha}}{\Omega\dot{\alpha}} e^{i(\dot{k}+\kappa)\cdot x + in\omega\ell}\left(1 - e^{+i\omega\bar{\zeta}_1(m\cdot x-\ell)}\right),\\
\dot{\phi}_R &= \left(\bar{\lambda}_1 e^{i\omega\bar{\zeta}_1(m\cdot x-\ell)} + \bar{\lambda}_2 e^{i\omega\bar{\zeta}_2(m\cdot x-\ell)}\right) e^{i(\tilde{k}+\kappa)\cdot x + in\omega\ell}\\
&+ \left(\breve{\mu}_1 e^{i\omega\cdot\bar{\xi}_1(m\cdot x-\ell)} + \breve{\mu}_2 e^{i\omega\xi_2(m\cdot x-\ell)}\right) e^{i\left(\bar{k}\cdot x - \omega_g t + n\omega\ell\right)}\\
&+ \breve{\nu}_1 e^{i(\tilde{k}-x+n\omega l)} + \breve{\nu}_2 e^{i(k-x-n\omega l)}.
\end{aligned}$$

Here the coefficients $\check{\sigma}, \zeta_{1,2}$ and $\xi_{1,2}$ are

$$\begin{aligned}\check{\sigma} &= 2n(n + m.\hat{\kappa}) + \Omega\left(n^2 - 1\right),\\ \check{\zeta}_{1,2} &= n - \Omega m.\hat{\kappa} \mp \sqrt{(n - \Omega m.\hat{\kappa})^2 + \Omega\partial},\\ \xi_{1,2} &= n \mp n(1 + \Omega),\end{aligned}$$

which differ from the previously defined quantities $\sigma, \zeta_{1,2}$ and $\xi_{1,2}$ merely by change of sign of m (in particular, $\xi_{1,2} = \xi_{1,2}$). To implement the boundary conditions, we now impose

$$\begin{aligned}&\tilde{\mu}_1 + \tilde{\mu}_2 = \breve{\gamma}_1, \quad \dot{\xi}_1\breve{\mu}_1 + \check{\xi}_2\breve{\mu}_2 = n\left(\breve{\gamma}_1 - z_2\right),\\ &\breve{\nu}_1 + \breve{\nu}_2 = \check{\delta}_1, \quad \breve{\nu}_2 - \breve{\nu}_2 = \check{\delta}_2,\end{aligned}$$

with the solution

$$\begin{aligned}\tilde{\lambda}_{1,2} &= \frac{1}{2}\left(\tilde{\beta}_1 \pm \frac{n\tilde{\beta}_2 + \frac{\bar{\alpha}\tilde{\zeta}_1}{\Omega\sigma}}{\sqrt{(n - \Omega m.\hat{\kappa})^2 + \Omega\bar{\sigma}}}\right),\\ \breve{\mu}_{1,2} &= \frac{1}{2}\left(z_1 \pm \frac{\tilde{\gamma}_2}{1 + \Omega}\right),\\ \tilde{\nu}_{1,2} &= \frac{1}{2}\left(\tilde{\delta}_1 \pm \tilde{\delta}_2\right),\end{aligned}$$

Reflection Condition As for the emitted wave, we are primarily interested in the case where no counter-propagating terms arise, which means $\check{\lambda}_2 = \breve{\mu}_2 = \breve{\nu}_2 = 0$, or equivalently If these conditions are met, the field simplifies to

$$\begin{aligned}\dot{\phi}/e^{i(k\cdot x + n\omega\ell)} = &-\frac{\bar{\alpha}}{\Omega\dot{\sigma}}\left(e^{i\kappa\cdot x} - e^{i\kappa\cdot x + i\omega\zeta_1(m\cdot x - \ell)}\right)\\ &+ \check{\beta}_1 e^{i\left(\kappa\cdot x + \omega\bar{\zeta}_1(m\cdot x - \ell)\right)} + \check{\zeta}_1 e^{-i\omega_g(t + n(m\cdot x - \ell))} + \check{\delta}_1\end{aligned}$$

Next-To-Leading Order Expansion Expanding (6.2.20) in powers of Ω, and considering that the boundary values for the reflected wave may contain $1/\Omega$ terms, the condition for the absence of counter-propagating terms at first order in Ω is found to be

$$\frac{\dot{\alpha}}{2n^2} + \bar{\beta}_1 - \bar{\beta}_2(1 - \Omega) = O(\Omega), \quad \gamma_1 - \gamma_2(1 - \Omega) = O(\Omega), \quad \tilde{\delta}_1 - \tilde{\delta}_2 = O(\Omega).$$

Expanding then the first coefficient in (6.2.21) as

$$\frac{1}{\Omega\partial} = \frac{1}{2\Omega n(n + m.\hat{\kappa})} - \frac{n^2 - 1}{4n^2(n + m.\hat{\kappa})^2} + O(\Omega)$$

cf. (6.1.55), and expanding the phase as

$$\kappa\cdot x + \check{\zeta}_1(m\cdot x - \ell) = \kappa_1\cdot x - \frac{1 - (m.\hat{\kappa})^2}{2n}\Omega\omega_g(\ell - m.x) + O\left(\Omega^2\omega_g(\ell - m.x)\right), \quad (6.2.24)$$

where

$$\kappa_1\cdot x = \kappa\cdot x + (n + m.\hat{\kappa})\omega_g(\ell - m\cdot x),$$

cf. (6.1.53), one arrives at

$$\begin{aligned}\dot{\phi}^{\pm}/e^{i(\bar{k}\cdot x + n\omega\ell)} = &\mp\alpha^{\pm}\frac{e^{\pm i\kappa.x} - e^{\pm i\kappa 1}x}{2\Omega n(n + m.\hat{\kappa})} + \alpha^{\pm}\left(n^2 - 1\right)\frac{e^{\pm i\kappa.x} - e^{\pm i\kappa_1\cdot x}}{4n^2(n + m.\hat{\kappa})^2} + \bar{\beta}_1^{\pm}e^{\pm i\kappa_1\cdot x}\\ &\mp i\frac{1 - (m.\hat{\kappa})^2}{2n}\left[\frac{\bar{\alpha}^{\pm}}{2n(n + m\cdot\hat{\kappa})} \pm \Omega\beta_1^{\pm}\right]\omega_g(\ell - m\cdot x)e^{\pm i\kappa_1\cdot x}\\ &+z_1^{\pm}e^{\mp i\omega_g(t + n(m\cdot x}\ell)\big)\big) + \delta_1^{\pm} + O\left(\Omega\omega_g(\ell - m\cdot x)\right) + O(\Omega).\end{aligned}$$

As in (6.1.56), the first error term grows with the distance from Σ', while the second one is uniform in the distance. 6.2.2 Reflected Scalar Wave In the unperturbed problem $\epsilon = 0$, the reflected wave is given by

$$\phi^{(0)} = -e^{i\tilde{i}\cdot x + 2in\omega\ell},$$

where

$$\tilde{k}_\mu = \omega(-1, -nm).$$

In the perturbed case, we thus write

$$\bar{\phi} = \phi^{(0)} + \epsilon\phi^{(1)} + O\left(\epsilon^2\right).$$

From the perturbed wave equation (6.1) one then finds that $\tilde{\phi}^{(1)}$ satisfies the inhomogeneous wave equation cf. (6.1.11). According to (6.2.1), the boundary conditions for $\phi^{(1)}$ are

$$\phi^{(1)}\big|_{\Sigma'} = -\left.\phi^{(1)}\right|_{\Sigma'}, \quad m\left(\partial^{(1)}\right)\big|_{\Sigma'} = m\left(\phi^{(1)}\right)\big|_{\Sigma} + \nu^{(1)}\left(\phi^{(0)} - \phi^{(0)}\right)\big|_{\Sigma}$$

Using the explicit formula (6.1.7), one finds that the terms arising from the perturbation of the normal ν cancel, so that it suffices to implement the conditions

$$\dot{\phi}^{(1)}\Big|_{\Sigma'} = -\left.\phi^{(1)}\right|_{\Sigma'}, \quad m\left(\dot{\phi}^{(1)}\right)\Big|_{\Sigma'} = m\left(\phi^{(1)}\right)\big|_{\Sigma'}$$

Using the previously derived expression (6.1.59) for the emitted wave and setting

$$\omega = (n - m.\hat{\kappa})\omega_g\ell$$

such that $\kappa_0 \cdot x = \kappa.x + \varpi$ on Σ', one finds the coefficients $\bar{\alpha}^{\pm}$and $\beta^{\pm}_{1,2}$in (6.2.4) – (6.2.6) to be

$$\bar{\alpha}^{\pm} = -\frac{1}{2}n^2 A(m,m)e^{in\omega\ell\pm i\chi},$$

$$\begin{aligned}
\bar{\beta}^{\pm}_1 &= \frac{1}{4}A(m,m)e^{in\omega\ell\pm i\chi}[\pm\frac{n}{\Omega}\frac{1-e^{\pm i\omega}}{n-m\cdot\hat{\kappa}} - \left(n^2-1\right)\frac{1-e^{\pm i\omega}}{2(n-m\cdot\hat{\kappa})^2} \\
&\pm i\omega_g\ell\frac{1-(m\cdot\hat{\kappa})^2}{2(n-m\cdot\hat{\kappa})}e^{\pm i\omega}\Big] + O(\Omega) + O\left(\Omega\omega_g\ell\right) \\
\xi^{\pm}_2 &= \beta^{\pm}_1(1 \pm \Omega m\cdot\hat{\kappa}/n) - \frac{1}{4}A(m,m)e^{in\omega\ell\pm i\chi\pm i\varpi} + O(\Omega) + O\left(\Omega\omega_g\ell\right)
\end{aligned}$$

and the coefficients $\gamma^{\pm}_{1,2}, \delta_{1,2}$ vanish. These parameters satisfy (6.2.22), so that no counterpropagating terms arise (at the considered level of accuracy) and hence (6.2.26) applies. This yields the following result for the reflected wave:

$$\begin{aligned}
\phi^{\pm} = \frac{1}{4}A(m,m)\phi^{(0)}e^{\pm i\chi}\Bigg[&\mp\frac{n}{\Omega}\left(\frac{e^{\pm i\kappa.x} - e^{\pm i\kappa_1\cdot x}}{n+m\cdot\hat{\kappa}} + \frac{e^{\pm i\kappa_1\cdot x} - e^{\pm i\kappa_1\cdot x\pm i\omega}}{n-m\cdot\hat{\kappa}}\right) \\
&\pm\frac{i}{2}\frac{1-(m\cdot\hat{\kappa})^2}{n^2-(m\cdot\hat{\kappa})^2}\left(2m\cdot\hat{\kappa}\omega_g(\ell - m\cdot x)e^{\pm i\kappa_1\cdot x} - (n+m\cdot\hat{\kappa})\omega_g(2\ell - m\cdot x)e^{\pm i(\kappa_1\cdot x+\infty)}\right) \\
&+\frac{1}{2}\left(n^2-1\right)\left(\frac{e^{\pm i\kappa\cdot x} - e^{\pm i\kappa_1\cdot x}}{(n+m\cdot\hat{\kappa})^2} + \frac{e^{\pm i\kappa_1\cdot x} - e^{\pm i(\kappa_1\cdot x+\infty)}}{(n-m\cdot\hat{\kappa})^2}\right)\Bigg]
\end{aligned}$$

Computing the overall field as $\dot{\phi} = \breve{\phi}^{(0)} + \varepsilon\left(\bar{\phi}^{+} + \bar{\phi}^{-}\right)$, we find

$$\dot{\phi} = -\Omega e^{i\bar{\psi}} + O\left(\epsilon^2\right) + O(\epsilon\Omega) + O\left(\epsilon\Omega\omega_g\ell\right),$$

where

$$= 1 - \frac{1}{4}\epsilon A(m,m)\left[\frac{1-)m\cdot\hat{\kappa})^2}{n^2-)m.\hat{\kappa})^2}\left(2m\cdot\hat{\kappa}\omega_g(\ell - m\cdot x)\sin(\kappa 1\cdot x+\chi)\right.\right.$$
$$-(n+m\cdot\hat{\kappa})\omega_g(2\ell - m\cdot x)\sin\left(\kappa_1\cdot x+\chi+\varpi\right))$$
$$-\left(n^2-1\right)\left(\frac{\cos(\kappa\cdot x+\chi)-\cos(\kappa 1\cdot x+\chi)}{(n+m.\hat{\kappa})^2}\right.$$
$$\left.\left.+\frac{\cos\left(\kappa_1\cdot x+\chi\right)-\cos\left(\kappa_1\cdot x+\chi+\varpi\right)}{(n-m\cdot\hat{\kappa})^2}\right)\right]$$
$$\dot{\psi} = \tilde{k}\cdot x + 2n\omega\ell - \frac{1}{2}\epsilon nA(m,m)\left(\frac{\sin(\kappa\cdot x+\chi)-\sin\left(\kappa_1\cdot x+\chi\right)}{\Omega(n+m\cdot\hat{\kappa})}\right.$$
$$\left.+\frac{\sin\left(\kappa_1\cdot x+\chi\right)-\sin\left(\kappa_1\cdot x+\chi+\varpi\right)}{\Omega(n-m.\hat{\kappa})}\right)$$

To express the returning field in a concise notation and to compare with the final results of Ref. [21] (see Section 8), we define, for any wave-vector $\bar{k}$

$$H\left(\tilde{k},u_2,u_1\right) = \frac{\tilde{k}_\mu\bar{k}_\nu}{2\gamma^{(0)}(k,\kappa)}\int_{u_1}^{u_2} h^{\mu\nu}(u)\mathrm{d}u,$$

so that for the considered metric perturbation $h^{\mu\nu}(u) = A^{\mu\nu}\cos(u)$ one has

$$H\left(k,u_2,u_1\right) = -\frac{1}{2}nA(m,m)\frac{\sin u_2-\sin u_1}{\Omega(n-m.\hat{\kappa})}.$$

The analogous expression with k replaced by k is obtained by reversing the sign of m. With this notation, the eikonal perturbation can be written concisely as

$$\psi^{(1)} = H\left(k,\kappa\cdot x+\chi,\kappa_1\cdot x+\chi\right) + H\left(k,\kappa_1\cdot x+\chi,\kappa_1\cdot x+\chi+\varpi\right)$$

Similarly, we set

$$\dot{H}\left(\bar{k},u_2,u_1\right) = \frac{\tilde{k}_\mu\tilde{k}_\nu}{2\gamma^{(0)}(\tilde{k},\kappa)}\left[h^{\mu\nu}\left(u_2\right)-h^{\mu\nu}\left(u_1\right)\right],$$

so that the amplitude perturbation can be written as

$$\mathscr{A}^{(1)} = -\frac{1}{4}A(m,m)\left[\frac{1-)m.\hat{\kappa})^2}{n^2-)m.\hat{\kappa})^2}\left(2m\cdot\hat{\kappa}\omega_g(\ell-m\cdot x)\sin\left(\kappa_1\cdot x+\chi\right)\right.\right.$$
$$\left.-(n+m.\hat{\kappa})\omega_g(2\ell-m.x)\sin(\kappa 1.x+\chi+\varpi))\right]$$
$$+\frac{1}{2}\left(n^2-1\right)\omega_g^2\left(\frac{\dot{H}\left(\hbar,\kappa\cdot x+\chi,\kappa_1\cdot x+\chi\right)}{\gamma^{(0)}(\kappa,k)}+\frac{\dot{H}\left(k,\kappa_1\cdot x+\chi,\kappa_1\cdot x+\chi+\varpi\right)}{\gamma^{(0)}(\kappa,k)}\right).$$

7

Maxwell's Equations

Consider the source-free Maxwell equations in the form

$$\mathrm{d}F = 0, \quad \mathrm{div}\,\bar{F} = 0$$

where the field strength F (a two-form) comprises the electric and magnetic fields E and B, and the excitation tensor $\bar{F}$ (a bivector) comprises the fields D, H; see (7.5) below. Here " d " denotes the exterior derivative and "div" denotes the divergence with respect to the spacetime metric g. In this work, we consider linear isotropic dielectrics only, for which the relationship between F and $\bar{F}$ takes the form

$$\mu^{F^\alpha}\bar{\beta}^\beta = \gamma^{\alpha\rho}\gamma^{\beta\sigma}F_{\rho\sigma}$$

where μ is the permeability, and γ is the optical metric as defined in (5.8), cf. Ref. [22]. We apply the $3+1$ decomposition given in Ref. [23], where we use the expansion

$$\begin{array}{ll} g_{00} = -1 + O\left(\epsilon^2\right), & g_{0i} = g_{i0} = 0 + O\left(\epsilon^2\right) \\ g_{ij} = g_{ij} = \delta_{ij} + \epsilon h_{ij} + O\left(\epsilon^2\right), & h_{ij} = A_{ij}\cos(\kappa\cdot x + \chi) \end{array}$$

where g denotes the spatial metric, i.e. the Riemannian metric induced by g on slices of constant $t \equiv x^0$. For a linearised gravitational field in TT-gauge the error terms above are zero, but our calculations allow for the above. Since we expand both the metric tensor and the electromagnetic field to first order in ϵ, all subsequent equations are understood to be correct up to $O\left(\epsilon^2\right)$, where the error term is not always written explicitly. Since $g_{00} = -1 + O\left(\epsilon^2\right)$ and $\det g = 1 + O\left(\epsilon^2\right)$, the definitions in Ref. [23] reduce to

$$D^i = \bar{F}^{0i}, \quad E_i = F_{i0}, \quad B^i = \frac{1}{2}\varepsilon^{ijk}F_{jk}, \quad H_i = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk}\bar{F}^{jk},$$

where $\varepsilon_{ijk} = \varepsilon^{ijk}$ is the three-dimensional Levi-Civita symbol. Maxwell's equations then take the form

$$\begin{array}{ll} \partial_0 B^i + \varepsilon^{ijk}\partial_j E_k = 0, & \partial_i B^i = 0 \\ \partial_0 D^i - \varepsilon^{ijk}\partial_j H_k = 0, & \partial_i D^i = 0 \end{array}$$

These look exactly as in Minkowski spacetime, but the dependence upon the gravitational field enters through the constitutive equation (7.2). Indeed, using (7.2) as well as equation (5.8) for the optical metric γ, one finds

$$D^i = \varepsilon \mathrm{g}^{ij}E_j, \quad B^i = \mu \mathrm{g}^{ij}H_j,$$

where g^{ij} is the contravariant spatial metric (i.e. g^{ij} is the matrix inverse to g_{ij}), ε the permittivity of the medium and μ its permeability.

In order to exploit the electric-magnetic symmetry in the absence of external charges and currents, it is useful to define the complex vector field

$$Z^i = \mu D^i + jnB^i,$$

where $n = \sqrt{\varepsilon^1}$ and j is a second imaginary unit, independent of i (in particular commuting with it), while we reserve the usage of i for the usual complex description of waves. The field equations then reduce to

$$n\partial_0 Z^i + j\varepsilon^{ijk}\partial_j\left(\mathrm{g}_{kl}Z^l\right) = 0, \quad \partial_i Z^i = 0,$$

provided that both ε and μ are constant. As shown in Appendix A, these equations imply the following wave equation:

$$n^2\ddot{Z}^i - \Delta\left(Z^i\right) + 2\epsilon R^{(1)i}{}_j Z^j - 2\epsilon\delta^{jk}\Gamma^{(1)i}{}_{jl}\partial_k Z^l + j\epsilon\varepsilon^{ijk}\left[n\dot{\Gamma}^{(1)}{}_{kjl}Z^l + n\dot{h}_{kl}\partial_j Z^l\right] = 0, \quad (7.11)$$

where $\Delta(\cdot)$ is the scalar Laplacian defined with respect to the perturbed spatial metric $\mathrm{g}_{ij}, \Gamma^{(1)i}{}_{jl}$ are the spatial Christoffel symbols, and $R^{(1)}{}_{ij}$ is the spatial Ricci tensor, both truncated to first order in ϵ. Explicitly, one has

$$R^{(1)}_{ij} = \frac{1}{2}\omega_g^2 h_{ij},$$

and

$$\Gamma^{(1)}{}_{ijk} = -\omega_g \gamma_{ijk} \sin(\kappa \cdot x + \chi),$$

where

$$\gamma_{ijk} = \frac{1}{2}\left(\hat{\kappa}_j A_{ki} + \hat{\kappa}_k A_{ji} - \hat{\kappa}_i A_{jk}\right).$$

In the following Section 7.1, we review the description of plane EM waves in the absence of GWs using the complex notation presented here. Boundary data describing the emission of plane EM waves in the presence of GWs are constructed in Section 7.2, from which the perturbed emitted field is computed in Section 7.3. The boundary data for reflection at perfect mirrors are then considered in Section 7.4, and the reflected EM wave is computed in Section 7.5. 7.1

The Unperturbed Field

In the unperturbed case (flat space), monochromatic plane waves can be written as

$$Z^{(0)t} = \zeta^l e^{ikx},$$

where the wave vector is

$$k_\mu = \omega(-1, nm),$$

for some unit vector m, and ζ^i is a constant i-real but j-complex vector (assuming linear polarisation). Maxwell's equations further imply

$$\zeta^i - j\varepsilon^{ijk} m_j \zeta_k = 0,$$

cf. (7.10). Contracting with the j-complex conjugate ζ_i^*, ζ_i and m_i, one obtains

$$\zeta_i \zeta^i = 0, \quad m_i \zeta^i = 0, \quad j\varepsilon^{ijk} \zeta_i^* m_j \zeta_k \geq 0,$$

which, together, are equivalent to (7.1.3). Decomposing the complex field Z into the j-real fields D and B according to (7.9), (7.1.4) one finds that (E, B, m) forms a right-handed orthogonal system and

$$E_i D^i = B_i H^i.$$

We choose to normalise ζ according to

$$\zeta_i^* \zeta^i = 1.$$

This leaves a j-phase degree of freedom, which corresponds to the freedom of choosing the polarisation of the electromagnetic field. Note that (7.1.3) is invariant under

$$m \to -m, \quad \zeta \to \zeta^*,$$

so that counter-propagating waves (as arising from normal reflection at a mirror) are given by $\zeta^{sl} e^{i\breve{k}.x}$, where the reflected wave vector is $\breve{k}_\mu = \omega(-1, -nm)$. In the perturbed case, we find it useful to decompose the field as

$$Z^i = a\zeta^i + b\zeta^{*i} + cm^i,$$

where, in general, all three functions a, b, c are non-zero. For later reference, we note the useful identities

$$j\varepsilon^{ijk} m_j \zeta_k = +\zeta^i, \quad j\varepsilon^{ijk} m_j \zeta_k^* = -\zeta^{*i}, \quad j\varepsilon^{ijk} \zeta_j \zeta_k^* = +m^i,$$

where the first equation is due to (7.1.3), the second equation is obtained from the first by complex conjugation, and the third one is obtained by expanding the left-hand side in the basis (m, ζ, ζ^*) and determining the coefficients from suitable contractions. Moreover, we have

$$\zeta^{*i}\zeta^j + \zeta^i\zeta^{*j} = \delta^{ij} - m^i m^j,$$

and since the metric perturbation h is traceless, one finds

$$h\left(\zeta^*, \zeta\right) + \frac{1}{2}h(m, m) = 0.$$

7.2 Boundary Values In this section, we construct boundary data for Maxwell's equations on the emission surface $\Sigma = \{m.x = 0\}$, which model the radiation sent out by a laser.

To describe the emission of plane waves with a given frequency ω, we require the field on Σ to be of the form

$$Z^k = \hat{Z}^k e^{-i\omega t},$$

where Z^k is i-real and normalized according to

$$\mathrm{g}\left(\hat{Z}^*, \hat{Z}\right) = 1 \quad \text{at the spatial origin .}$$

where $\hat{Z}^*$ denotes the j-complex conjugate of $\hat{Z}$; as we will see below, the normalisation $g\left(\hat{Z}^*, \hat{Z}\right) - 1$ cannot be imposed everywhere on ν. Moreover, we demand

$$\hat{Z}^i\nu_i = 0, \qquad g_{ij}\hat{Z}^i\hat{Z}^j = 0, \quad j\varepsilon^{ijk}\hat{Z}^*_i\nu_j\hat{Z}_k > 0,$$

i.e. the fields (ν, D, B) form a right-handed orthogonal basis (D and B are thus tangent to Σ) and satisfy $E_iD^i = B_iH^i$ on Σ. As in the unperturbed case, (7.2.3) is equivalent to

$$\hat{Z}^{\mathrm{i}} - j\varepsilon^{ijk}\nu_j\ \mathrm{g}_{kl}\vec{Z}^l = 0.$$

A four-dimensional-covariant formulation of this equation is given in Appendix B. Using the expansion (7.1.8), the requirement that Z be tangent to the emission surface is seen to be equivalent to $c = 0$ on Σ, so it remains to prescribe the functions a and b there.

The Unperturbed Case Before considering the general case, let us briefly return to the unperturbed problem where the spatial metric reduces to the flat Euclidean metric. and the surface conormal is given by $\nu_i = m_i$.

Decomposing the electromagnetic field as in (7.1.8) and projecting the field equations (7.10) with $\epsilon = 0$ onto the basis ζ, ζ^*, m, one obtains Maxwell's equations in the form

$$\begin{aligned}
\zeta(a) + \zeta^*(b) + m(c) &= 0\\
n\partial_0 a + m(a) - \zeta^*(c) &= 0\\
n\partial_0 b - m(b) + \zeta(c) &= 0\\
n\partial_0 c - \zeta(a) + \zeta^*(b) &= 0
\end{aligned}$$

The last equation here does not contain any m-derivatives and is thus a "constraint equation" for boundary data prescribed on Σ, while the remaining equations determine the normal derivatives of a, b and c, once their values on Σ are specified.

In flat space, (7.2.4) is equivalent to $b = c = 0$ on Σ, so that the "constraint equation" (7.2.8) on Σ reduces to $\zeta(a) = 0$. Choosing adapted coordinates $\bar{x}, \bar{y}$ on Σ such that $\sqrt{2}\zeta = \partial_{\bar{x}} + j\partial_{\bar{y}}$ (which is always possible by choosing $\partial_{\bar{x}}, \partial_{\bar{y}}$ and m to be a right-handed orthonormal basis), this reduces to the Cauchy-Riemann equation

$$\frac{\partial a}{\partial \bar{x}} + j\frac{\partial a}{\partial \bar{y}} = 0.$$

Requiring a to be bounded, one finds that it must be spatially constant (by Liouville's theorem) and thus a function of time t alone. Hence, one also has $\zeta^*(a) = 0$, so that (7.2.5) yields $m(c) = 0$.

Thus, assuming (7.2.4) in flat space and requiring the field on Σ to be bounded, one obtains the following boundary values on the emission surface Σ

$$n\partial\rfloor a + m(a) = 0, \quad b = m(b) = 0, \quad c = m(c) = 0,$$

where a is an arbitrary function of time t alone. In particular to describe the emission of monochromatic plane waves of frequency ω, we shall take $a = e^{-i\omega t}$, which entails $m(a) = -in\omega a$

Note that since all field components satisfy the wave equation, b and c vanish identically everywhere and a is the only remaining degree of freedom. The Perturbed Case Let us now consider the perturbed case, where we still consider the fields on Σ only. Since b and c vanish identically in the unperturbed case, we write

$$Z = a\zeta + \epsilon\left(b^{(1)}\zeta^* + c^{(1)}m\right) \equiv a^{(0)}\zeta + \epsilon\left(a^{(1)}\zeta + b^{(1)}\zeta^* + c^{(1)}m\right).$$

Inserting this into the field equations (7.10), one obtains Maxwell's equations at first order in ϵ in the form

$$\begin{aligned}
\zeta\left(a^{(1)}\right) + \zeta^*\left(b^{(1)}\right) + m\left(c^{(1)}\right) &= 0,\\
n\partial_0 a + \nu(a) - \epsilon\zeta^*\left(c^{(1)}\right) + \epsilon a^{(0)} j\varepsilon^{ijk}\zeta_i^*\left(\partial_j h_{kl}\right)\zeta^l &= 0,\\
n\partial_0 b^{(1)} - m\left(b^{(1)}\right) + \zeta\left(c^{(1)}\right) + j\varepsilon^{ijk}\zeta_i\partial_j\left(a^{(0)}h_{kl}\right)\zeta^l &= 0,\\
n\partial_0 c^{(1)} - \zeta\left(a^{(1)}\right) + \zeta^*\left(b^{(1)}\right) + j\varepsilon^{ijk}m_i\partial_j\left(a^{(0)}h_{kl}\right)\zeta^l &= 0.
\end{aligned}$$

Equation (7.2.12) is obtained by inserting (7.2.11) into the second part of (7.10), and the equations (7.2.14) and (7.2.15) are obtained by contracting the first part of (7.10) with either ζ_i or m_i. To arrive at (7.2.13), one can contract the first equation in (7.10) with ζ_i^* to obtain

$$n\partial_0 a + \mathrm{g}^{ij}\theta_i\partial_j a - \epsilon\zeta^*\left(c^{(1)}\right) + \epsilon a^{(0)} j\varepsilon^{ijk}\zeta_{\mathrm{i}}^*\left(\partial_j h_{kl}\right)\zeta^l = 0,$$

where θ is defined as

$$\theta_i = -j\ \mathrm{g}_{ij}e^{jkl}\zeta_k^*\ \mathrm{g}_{lm}\zeta^m.$$

Expanding θ in powers of ϵ, one has $\theta_i = m_i + \epsilon\theta^{(1)} + O\left(\epsilon^2\right)$, by virtue of (7.1.9). Using the contractions

$$\theta_i^{(1)}\zeta^i = 0, \quad \theta_i^{(1)}\zeta^{*i} = h\left(m, \zeta^*\right), \quad \theta_i^{(1)}m^i = h(m, m) + h\left(\zeta^*, \zeta\right),$$

as well as (7.1.11), one finds

$$\theta_i = \nu_i + \epsilon\zeta_i h\left(m, \zeta^*\right) + O\left(\epsilon^2\right).$$

Here ν is the unit conormal to Σ as defined in (6.1.5). Inserting this into (7.2.16) and using $\zeta\left(a^{(0)}\right) = 0$ then leads to (7.2.13), as claimed.

As in the unperturbed case, (7.2.15) is a constraint equation for boundary data on Σ, while the remaining equations determine the normal derivatives of $a^{(1)}, b^{(1)}$ and $e^{(1)}$, once their values on Σ are specified.

Let us now implement the assumptions (7.2.1), (7.2.2) and (7.2.4), together with $\hat{Z} = \zeta + O(\epsilon)$. The general solution for $\hat{Z}$ satisfying these conditions is

$$\hat{Z}^i = \zeta^i(1 + j\epsilon\bar{a}) - \frac{1}{2}\epsilon\left[\delta^{ij} - m^i m^j\right]h_{jk}\zeta^k,$$

where $\bar{a}$ is an arbitrary function. In components, this is the same as

$$a = \left[1 + \epsilon j\bar{a} - \frac{1}{2}\epsilon h\left(\zeta^*, \zeta\right)\right] e^{-i\omega t}, \quad b^{(1)} = -\frac{1}{2}h(\zeta,\zeta)e^{-i\omega t}, \quad e^{(1)} = 0.$$

Inserting this into (7.2.15), the constraint equation reduces to

$$\zeta\left(a^{(1)}\right) + a^{(0)}\Gamma^{(1)}{}_{ijk}\zeta^{*i}\zeta^j\zeta^k = 0,$$

which is equivalent to

$$j\zeta(\bar{a}) + \frac{1}{2}\zeta\left(h\left(\zeta^*,\zeta\right)\right) - \frac{1}{2}\zeta^*(h(\zeta,\zeta)) = 0.$$

To understand the implications of this equation, suppose we have two solutions $\bar{a}_1$ and $\bar{a}_2$. Then their difference satisfies the Cauchy-Riemann equation (7.2.9), so that if both functions are bounded, their difference is spatially constant. Hence, the bounded solutions to (7.2.23) are parameterised by an arbitrary complex function of time alone.

A simple choice would be to prescribe $\bar{a}\left(t, x^i = 0\right) = 0$. However, to allow for alternative models of laser emission, which might differ in their prescriptions for the time evolution of the emitted polarisation (e.g. one could demand the polarisation vector to be parallel transported in time in the sense of the perturbed metric), we allow $\vec{a}$ to satisfy

$$\bar{a}|_{x^i=0} \equiv \alpha(t) := \alpha_0 + \alpha_c\cos\left(-\omega_g t + \chi\right) + \alpha_s\sin\left(-\omega_g t + \chi\right),$$

where α_0, α_c and α_s (as well as χ) are j-real constants. This means that the emitted polarization vector at the coordinate origin is normalized (corresponding to an energy density at the coordinate origin which remains constant in time), but we allow for perturbations of the plane of polarization which oscillate with the same frequency as the metric perturbation.

As will be shown below, the parameters α_0, α_c and α_s have no impact on the signal detected in the interferometer considered and can thus be set to zero for this concrete application. However, as they describe the perturbation of the emitted polarisation, they would be observable in potential experiments sensitive to light polarisation. We note also that the precise form of $\alpha(t)$ in (7.2.24) fits into our calculations without further due, while more general functions would require further analysis. Defining

$$\zeta = \frac{1}{2\hat{\kappa}\cdot\zeta}\left[(\hat{\kappa}\cdot\zeta)A\left(\zeta^*,\zeta\right) - \left(\hat{\kappa}\cdot\zeta^*\right)A(\zeta,\zeta)\right]$$

the unique solution to the constraint equation (7.2.23) which remains bounded on Σ is found to be

$$\bar{a} = j\zeta\left[\cos(\kappa\cdot x) - \cos\left(-\omega_g t + \chi\right)\right] + \alpha_0 + \alpha_c\cos\left(-\omega_g t + \chi\right) + \alpha_s\sin\left(-\omega_g t + \chi\right).$$

The first term here has a non-zero j-imaginary part and thus describes ϵ-oscillations in the emitted amplitude. Such a behaviour is unavoidable, as it is a consequence of the constraint equation (7.2.23).

Having prescribed the field on Σ, the normal derivatives of $a, b^{(1)}$ and $c^{(1)}$ can now be obtained from the remaining Maxwell equations

$$\begin{aligned} n\partial_0 a + \mathrm{g}^{ij}\nu_i\partial_j a + \epsilon a^{(0)} j\varepsilon^{ijk}\zeta_i^*\left(\partial_j h_{kl}\right)\zeta^l &= 0 \\ n\partial_0 b^{(1)} - m\left(b^{(1)}\right) + j\varepsilon^{ijk}\zeta_i\partial_j\left(a^{(0)}h_{kl}\right)\zeta^l &= 0 \\ \zeta\left(a^{(1)}\right) + \zeta^*\left(b^{(1)}\right) + m\left(c^{(1)}\right) &= 0 \end{aligned}$$

Similarly to the scalar wave case, from now on we assume $\omega_g \& \omega$. From (7.2.27) it follows that the normal derivative of a is

$$\nu(a)/\omega = \mathrm{in}\, a + O(\Omega),$$

since $n\partial_0 a = -in\omega a\left(1+\epsilon O\left(\omega_g/\omega\right)\right)$ by virtue of (7.2.21). Using the explicit form of $b^{(1)}$ in (7.2.21), we have

$$\frac{1}{\omega}n\partial_0\partial^{(1)} = -inb^{(1)} + O\left(\omega_g/\omega\right)$$

since h varies with frequency ω_g only. Furthermore, since $a^{(0)}$ is constant on Σ but varies rapidly in the direction of m (again by a factor ω/ω_g faster than the metric h), we have

$$\begin{aligned}\frac{1}{\omega}j\varepsilon^{ijk}\zeta_i\partial_j\left(a^{(0)}h_{kl}\right)\zeta^l &= jm\left(a^{(0)}/\omega\right)\varepsilon^{ijk}\zeta_i m_j h_{kl}\zeta^l + O\left(\omega_g/\omega\right)\\ &= -m\left(a^{(0)}/\omega\right)h(\zeta,\zeta) + O\left(\omega_g/\omega\right)\\ &= -ina^{(0)}h(\zeta,\zeta) + O\left(\omega_g/\omega\right)\\ &= 2inb^{(1)} + O\left(\omega_g/\omega\right),\end{aligned}$$

where we have used (7.1.9), $m\left(a^{(0)}\right) = in\omega a^{(0)}$, and again the explicit form of $b^{(1)}$ given in (7.2.21) to arrive at the last line. Plugging all this into (7.2.28), one obtains

$$m\left(b^{(1)}\right)/\omega = inb^{(1)} + O(\Omega).$$

Finally, a direct calculation shows that

$$\zeta^*\left(b^{(1)}\right) = -a^{(0)}\Gamma^{(1)}_{ijk}\zeta^i\zeta^j\zeta^{*k},$$

so that equation (7.2.29) leads to

$$m(c) = a^{(0)}\left(\Gamma^{(1)}_{ijk}\zeta^{*i}\zeta^j\zeta^k + \Gamma^{(1)}_{ijk}\zeta^i\zeta^j\zeta^{*k}\right).$$

Inserting (7.1.10) as well as the explicit expression for the spatial Christoffel symbols (7.13), this yields

$$m(c) = \frac{1}{2}\omega_g a^{(0)}(\hat{\kappa}.\zeta)A(m,m)\sin(\kappa.x+\chi).$$

To summarize, we have obtained the following boundary data for Maxwell equations on the emission surface $\Sigma = \{m.x = 0\}$.

$$\begin{aligned}a &= e^{-i\omega t}\left[1+\epsilon j\bar{a} - \frac{1}{2}\epsilon h\left(\zeta^*,\zeta\right)\right],\\ b^{(1)} &= -\frac{1}{2}e^{-i\omega t}h(\zeta,\zeta),\\ c^{(1)} &= 0,\\ \nu(a) &= in\omega a + O\left(\omega_g\right),\\ \nu^{(0)}\left(b^{(1)}\right) &= in\omega b^{(1)} + O\left(\omega_g\right),\\ \nu^{(0)}\left(c^{(1)}\right) &= \frac{1}{2}\omega_g a^{(0)}(\hat{\kappa}\cdot\zeta)A(m,m)\sin(\kappa\cdot x+\chi).\end{aligned}$$

7.3 The Emitted Wave The wave equation for the perturbation of the emitted field is now obtained by inserting the unperturbed expression

$$Z^{(0)i} = \zeta^i e^{ik.x}$$

with $k_\mu = \omega(-1, nm)$, into the general wave equation (7.11). This leads to

$$\begin{aligned}\Delta\left(Z^i\right) - n^2\ddot{Z}^i = &-i\epsilon n\omega\left[2\Gamma^{(1)i}{}_{jk}m^j\zeta^k - nj\varepsilon^{ijk}m_j\dot{h}_{kl}\zeta^l\right]e^{ik\cdot x}\\ &+\epsilon\left[2R^{(1)i}{}_j\zeta^j + nj\varepsilon^{ijk}\dot{\Gamma}^{(1)}_{kjl}\zeta^l\right]e^{ik.x}\end{aligned}$$

where Δ is the scalar Laplacian defined with respect to the perturbed spatial metric $\delta_{ij}+\epsilon h_{ij}$. Projecting this equation onto the basis ζ, ζ^*, m, one finds the wave equations for the components a, b, c to be

$$\begin{aligned}
\Box_{\gamma^{(0)}a^{(1)}=} &- n^2\omega^2 A(m,m)\cos(\kappa\cdot x+\chi)e^{ik\cdot x} \\
&+ in\omega_g\omega\left[2\gamma_{ijk}\zeta^{*i}m^j\zeta^k + nA\left(\zeta^*,\zeta\right)\right]\sin(\kappa\cdot x+\chi)e^{ik\cdot x} \\
&+ \omega_g^2\left[A\left(\zeta^*,\zeta\right) + nj\varepsilon^{ijk}\zeta_i^*\gamma_{kjl}\zeta^l\right]\cos(\kappa\cdot x+\chi)e^{ik\cdot x} \\
\Box_{\gamma^{(0)}}b^{(1)} =& in\omega_g\omega\left[2\gamma_{ijk}\zeta^i m^j\zeta^k - nA(\zeta,\zeta)\right]\sin(\kappa\cdot x+\chi)e^{ik\cdot x} \\
&+ \omega_g^2\left[A(\zeta,\zeta) + nj\varepsilon^{ijk}\zeta_i\gamma_{kjl}\zeta^l\right]\cos(\kappa\cdot x+\chi)e^{ik\cdot x} \\
\Box_{\gamma^{(0)}}c^{(1)} =& 2in\omega_g\omega\gamma_{ijk}m^i m^j\zeta^k\sin(\kappa\cdot x+\chi)e^{ik\cdot x} \\
&+ \omega_g^2\left[A(m,\zeta) + nj\varepsilon^{ijk}m_i\gamma_{kjl}\zeta^l\right]\cos(\kappa\cdot x+\chi)e^{ik\cdot x}
\end{aligned}$$

The leading order term in (7.3.3) is the same as for the scalar wave equation (6.1.11), so that the sub-leading terms can be interpreted as polarisation terms.

Having determined the wave equations and the boundary values for the functions a, b and c, the emitted electromagnetic wave can now be obtained using the formulae derived in Section 6.1.1.

The a component For the a component, the value of $\alpha^{\pm}$can be read from (7.3.3), $\beta_1^{\pm}$ is determined by (7.2.37), and $\beta_2^{\pm}$is obtained from (7.2.40). These parameters $\alpha^{\pm}, \beta_1^{\pm}$and $\beta_2^{\pm}$are almost identical to those of the emitted scalar wave, as given in (6.1.57), so that we merely state the correction terms to be added to the values given there. We denote them by $\delta\alpha, \delta\beta$ etc. Finally, due to (7.2.24), the coefficients $\gamma_{1,2}$ and δ are no longer zero in general:

$$\begin{aligned}
\delta\alpha^{\pm} &= \mp n\Omega\left(\gamma_{ijk}\zeta^{\star i}m^j\zeta^k + \frac{1}{2}nA\left(\zeta^*,\zeta\right)\right) + O\left(\Omega^2\right) \\
\delta\beta_{1,2}^{\pm} &= -\frac{1}{4}A\left(\zeta^*,\zeta\right) - \frac{1}{2}\varsigma + O(\Omega) \\
\gamma_{1,2}^{\pm} &= \frac{1}{2}\varsigma + j\frac{1}{2}\left[\alpha_c \mp i\alpha_s\right] + O(\Omega) \\
\delta_{1,2} &= \frac{1}{2}j\alpha_0 + O(\Omega)
\end{aligned}$$

The b component For the b component, the parameters $\alpha^{\pm}$are determined by (7.3.4), where we obtain at leading order, using the explicit form of the Christoffel symbols (7.14),

$$2\gamma_{ijk}\zeta^i m^j\zeta^k - nA(\zeta,\zeta) = (m.\hat{\kappa}-n)A(\zeta,\zeta),$$

Next, the parameters $\beta_1^{\pm}$can be read from (7.2.37), and the values of $\beta_2^{\pm}$are determined by (7.2.40). The non-vanishing components are then

$$\begin{aligned}
\alpha^{\pm} &= \pm\frac{1}{2}n\Omega(n-m.\hat{\kappa})A(\zeta,\zeta) + O\left(\Omega^2\right) \\
\beta_{1,2}^{\pm} &= -\frac{1}{4}A(\zeta,\zeta) + O(\Omega)
\end{aligned}$$

The c component For the remaining c component, the value of $\alpha^{\pm}$are determined from (7.3.5). Using again the explicit form of the Christoffel symbols, one obtains

$$2\gamma_{ijk}m^i m^j\zeta^k = (\hat{\kappa}\cdot\zeta)A(m,m)$$

which determines $\alpha^{\pm}$to leading order in Ω:

$$\alpha^{\pm} = \mp\frac{1}{2}n\Omega(\kappa.\zeta)A(m,m) + O\left(\Omega^2\right),$$

while all other parameters vanish to the considered order, as follows from (7.2.39) and (7.2.42).

Result All the above parameter sets satisfy the emission condition (6.1.52), so that the fields are given by the general formula (6.1.56). This yields the following result for the emitted field:

$$\begin{aligned}
a^{(1)} =& \phi^{(1)} + \left(\gamma_{ijk}\zeta^{*i}m^j\zeta^k + \frac{1}{2}nA\left(\zeta^*,\zeta\right)\right)\frac{\cos(u)-\cos\left(u_0\right)}{n-m\cdot\hat{\kappa}}e^{ik.x} \\
&- \frac{1}{2}A\left(\zeta^*,\zeta\right)\cos\left(u_0\right)e^{ik.x} + j\alpha_0 e^{ik.x} \\
&- \zeta\left[\cos\left(u_0\right) - \cos\left(\omega_g(nm\cdot x - t) + \chi\right)\right]e^{ik.x} \\
&+ j\left[\alpha_c\cos\left(\omega_g(nm\cdot x - t) + \chi\right) + \alpha_s\sin\left(\omega_g(nm\cdot x - t) + \chi\right)\right]e^{ik.x} \\
&+ O(\Omega) + O\left(\Omega\omega_g m\cdot x\right), \\
b^{(1)} =& -\frac{1}{2}h(\zeta,\zeta)e^{ik.x} + O(\Omega) + O\left(\Omega\omega_g m\cdot x\right), \\
e^{(1)} =& \frac{1}{2}A(m,m)(\hat{\kappa}\cdot\zeta)\frac{\cos(u)-\cos\left(u_0\right)}{n-m\cdot\hat{k}}e^{ik.x} + O(\Omega) + O\left(\Omega\omega_g m\cdot x\right),
\end{aligned}$$

where $\phi^{(1)}$ is the perturbation of the emitted scalar field given in (6.1.59), and where we have used the abbreviations

$$u = \kappa\cdot x + \chi, \quad u_0 = \kappa_0 x + \chi.$$

Note that (7.3.16) entails that

$$g(Z,Z) = O(\epsilon\Omega) + O\left(\epsilon\Omega\omega_g m\cdot x\right),$$

so all scalar invariants of the electromagnetic field vanish to the considered accuracy, cf. (B.16). 7.4 Reflection at a Mirror Having found the electromagnetic wave emitted from a laser, we now consider its reflection off a perfectly reflecting mirror.

Recall that the jumps (denoted by $\Delta D, \Delta B$ etc.) of the fields at an interface with unit normal ν satisfy

$$\nu\cdot\Delta D = \mathrm{s}, \quad \nu\cdot\Delta B = 0, \quad \nu\times\Delta E = 0, \quad \nu\times\Delta H = \mathrm{j},$$

where s is the surface charge density and j is the surface current density. Since all fields vanish inside (or behind) the mirror, the overall field at the reflecting side of the mirror (being a sum of the incident and the reflected fields) satisfies

$$\nu\cdot D = \mathfrak{s}, \quad \nu\cdot B = 0, \quad \nu\times E = 0, \quad \nu\times H = \mathfrak{j}.$$

Let Z denote the incident Maxwell field, with Z^* its j-complex conjugate, and let $\check{Z}$ be the reflected field. Using our notation, the standard conditions for reflection on a perfect mirror can be written as

$$\nu\cdot\left(\check{Z} - Z^*\right) = 0, \qquad \nu\times\left(\check{Z} + Z^*\right) = 0.$$

Indeed, the imaginary part of the first equation is equivalent to $\nu\cdot B = 0$, and the real part of the latter is equivalent to $\nu\times E = 0$. The remaining parts (i.e. the real part of the first and the imaginary part of the second equation) say that the surface charges and currents have equal contributions from the incident and the reflected waves, cf. equations (56) and (58) in Ref. [24]. This can be understood as follows. The reflected wave is caused by the movement of charge carriers which respond to the impinging wave as to cancel the field inside the conductor. But the true sources must be computed from the total field (the incident and the reflected wave) and a linear response of the mirror demands that the contributions of both parts are proportional to each other. Equality then follows from the condition that the amplitudes of the incident and reflected waves coincide.

Equivalently, the equation can be interpreted to say that the normal part of the electric field and the tangential parts of the magnetic field are unchanged by the reflection process, while the tangential part of the electric field and the normal part of the magnetic field change sign.

A covariant formulation of (7.4.3) is given in Appendix E. There, it is also shown that this condition is consistent in the sense that if the incident field Z satisfies the constraint equation arising from Maxwell's equations, then so does the reflected field Z. The unique solution to (7.4.3) is given by

$$Z = -Z^* + 2\ \mathrm{g}\left(v, Z^*\right) v$$

i.e. $\check{Z}$ is obtained by reflecting Z along the normal ν, taking the j-complex conjugate and reversing the sign of the field. In other words, equation (7.4.3) is equivalent to (7.4.4). Inserting the incident field of the form

$$Z = a\zeta + \epsilon\left(b^{(1)}\zeta^* + c^{(1)}m\right)$$

a direct calculation shows that the reflected field is given by

$$\dot{Z} = -a^*\zeta^* - \epsilon\left(b^{(1)*}\zeta - c^{(1)*}m\right).$$

Writing (everywhere) the field as

$$\dot{Z} = \bar{b}\zeta^* + \epsilon\left(\breve{a}^{(1)}\zeta + \breve{c}^{(1)}m\right) \equiv \left(\breve{b}^{(0)} + \epsilon\breve{b}^{(1)}\right)\zeta^* + \epsilon\left(\breve{a}^{(1)}\zeta + c^{(1)}m\right)$$

the components of the reflected field on the mirror surface are seen to be

$$\breve{a}^{(1)} = -b^{(1)*}, \quad \breve{b} = -a^*, \quad c^{(1)} = c^{(1)*}$$

Note that by virtue of equation (7.3.16), we have

$$\breve{\boldsymbol{a}}^{(1)} = -\frac{1}{2}\breve{b}^{(0)}h\left(\zeta^*, \zeta^*\right).$$

Having found the values of the functions $\breve{a}, \bar{b}$ and $\vec{c}$ on the mirror surface Σ', we must compute their normal derivatives from Maxwell's equations. One of the conditions stems from the divergence equation

$$\nabla_i \ddot{Z}^i = 0$$

and the other ones are obtained from the evolution equation

$$n\partial_0 \check{Z}^i + j\varepsilon^{ijk}\ \mathrm{g}_{kl}\partial_j \check{Z}^l + j\varepsilon^{ijk}\left(\partial_j\ \mathrm{g}_{kl}\right)\check{Z}^l = 0.$$

We obtain, using the vector θ defined in (7.2.17):

$$\begin{aligned}
n\partial_0\bar{b} - g^{ij}\theta_i^*\partial_j\breve{b} + \epsilon\zeta\left(\tilde{c}^{(1)}\right) + j\epsilon\breve{b}^{(0)}\varepsilon^{ijk}\zeta_i\left(\partial_j h_{kl}\right)\zeta^{+l} &= 0,\\
n\partial_0\breve{a}^{(1)} + m\left(\breve{a}^{(1)}\right) - \zeta^*\left(\tilde{c}^{(1)}\right) + j\varepsilon^{ijk}\zeta_i^*\partial_j\left(\breve{b}^{(0)}h_{kl}\right)\zeta^{*l} &= 0,\\
n\partial\partial_0\tilde{c}^{(1)} - \zeta\left(\tilde{a}^{(1)}\right) + \zeta^*\left(\breve{b}^{(1)}\right) + j\varepsilon^{ijk}m_i\partial_j\left(\breve{b}^{(0)}h_{kl}\right)\zeta^{*l} &= 0,\\
\zeta\left(\breve{a}^{(1)}\right) + \zeta^*\left(\breve{b}^{(1)}\right) + m\left(\tilde{c}^{(1)}\right) &= 0.
\end{aligned}$$

Here we have used the fact that $\breve{b}^{(0)}$ coincides with the unperturbed reflected scalar wave, defined in (6.2.27):

$$\breve{b}^{(0)} \equiv \breve{\phi}^{(0)} = -e^{i(\vec{k}\cdot x + 2n\omega\ell)},$$

and thus $\zeta^*\left(\tilde{b}^{(0)}\right)=0$. Equation (7.4.14), obtained by contracting the evolution equation with m_i, is the "constraint equation" which, as shown in Appendix E, is automatically satisfied. Using the explicit expression for θ from equation (7.2.19), we have

$$\theta^*=\nu+\epsilon h(m,\zeta)\zeta^*,$$

where the second term, proportional to ζ^*, gives no contribution in the expression $\mathrm{g}^{ij}\theta_i^*\partial_j\breve{b}$ because of $\zeta^*\left(\breve{b}^{(0)}\right)=0$, as just shown. The relevant equations to determine the normal derivatives of the fields are thus

$$\begin{aligned}
n\partial_0\breve{b}-\nu(\breve{b})+\epsilon\zeta\left(\left\langle^{(1)}\right)+\epsilon\breve{b}^{(0)}j\varepsilon^{ijk}\zeta_i\left(\partial_j h_{kl}\right)\zeta^{*l}=0,\\
n\partial_b\breve{a}^{(1)}+m\left(\breve{a}^{(1)}\right)-\zeta^*\left(\breve{c}^{(1)}\right)+j\varepsilon^{ijk}\zeta_i^*\partial_j\left(\breve{b}^{(0)}h_{kl}\right)\zeta^{*l}=0,\\
\zeta\left(\breve{a}^{(1)}\right)+\zeta^*\left(\breve{b}^{(1)}\right)+m\left(\breve{c}^{(1)}\right)=0.
\end{aligned}$$

From this, it follows that on the mirror surface Σ' it holds that

$$\begin{aligned}
\nu(\bar{b})&=n\partial_0\bar{b}+O(\Omega),\\
m\left(\tilde{a}^{(1)}\right)&=-in\omega\tilde{a}^{(1)}+O(\Omega),\\
m\left(\tilde{c}^{(1)}\right)&=-in\omega\tilde{c}^{(1)}+O(\Omega).
\end{aligned}$$

The first equation is immediate, since tangential derivatives of $\iota^{(1)}$ and all derivatives of the perturbed metric are of order ω_g, as can be seen from (7.4.8) and (7.3.17). For the second equation, we can again neglect the term $\zeta^*\left(\tau^{(1)}\right)$ but must analyse the last term, where the main contribution comes from the derivative of $\breve{b}^{(0)}$ in the direction of m:

$$\begin{aligned}
j\varepsilon^{ijk}\zeta_i^*\partial_j\left(\breve{b}^{(0)}h_{kl}\right)\zeta^{*l}/\omega&=j\varepsilon^{ijk}\zeta_i^*m_j h_{kl}\zeta^{*l}m\left(\breve{b}^{(0)}\right)/\omega+O(\Omega)\\
&=h\left(\zeta^*,\zeta^*\right)m\left(\breve{b}^{(0)}\right)/\omega+O(\Omega)\\
&=-inh(\zeta,\zeta)^*\tilde{b}^{(0)}+O(\Omega)\\
&=2in\breve{a}^{(1)}+O(\Omega),
\end{aligned}$$

where we have used (7.1.9), $m(\breve{b}(0))=-in\omega b$, which is the unperturbed form of (7.4.21), and (7.4.9). Finally, to arrive at the last equation, one can use (7.4.8) obtain

$$m\left(\varepsilon^{(1)}\right)=\zeta^*\left(a^{(1)*}\right)+\zeta\left(b^{(1)*}\right).$$

Using the fact that the incident field satisfies

$$\zeta\left(a^{(1)}\right)+\zeta^*\left(b^{(1)}\right)+m\left(c^{(1)}\right)=0,$$

as well as the explicit form of $c^{(1)}$ in (7.3.17), and also the reflection condition (7.4.8), one obtains

$$m\left(\varepsilon^{(1)}\right)/\omega=-m\left(c^{(1)}\right)^*/\omega=-inc^{(1)}+O(\Omega)=-in\tau^{(1)}+O(\Omega),$$

which establishes (7.4.23). 7.5 The Reflected Wave The unperturbed reflected wave is evidently given by

$$\breve{Z}^{(0)}=-\zeta^*e^{i\tilde{k}\cdot x+2in\omega\ell},$$

where $\breve{k}_\mu=\omega(-1,-nm)$. Plugging this into the general wave equation (7.11), we find

$$\begin{aligned}
\Delta\left(\breve{Z}^i\right)-n^2\partial_0^2\breve{Z}^i=&-i\epsilon n\omega\left[2\Gamma^{(1)i}{}_{jk}m^j\zeta^{*k}-nj\varepsilon^{ijk}m_j\dot{h}_{kl}\zeta^{ll}\right]e^{i\tilde{k}\cdot x+2n\omega t}\\
&-\epsilon\left[2R^{(1)i}{}_j\zeta^{*j}+nj\varepsilon^{ijk}\dot{\Gamma}_{kjl}\zeta^{*l}\right]e^{i\bar{k}\cdot x+2n\omega\ell}.
\end{aligned}$$

The wave equations for $\breve{a}, \breve{b}$ and $\breve{c}$ are now obtained by contracting with the basis vectors ζ^*, ζ and m, respectively.

$$\begin{aligned}
\Box_{\gamma^{(0)}}\breve{a}^{(1)} =& - in\omega_g\omega(n+m.\hat{\kappa})A\left(\zeta^*,\zeta^*\right)\sin(u)\breve{b}^{(0)} \\
&+ \omega_g^2\left[A\left(\zeta^*,\zeta^*\right) + nj\varepsilon^{ijk}\zeta_{\mathrm{i}}^*\gamma_{kjl}\zeta^{*l}\right]\cos(u)\zeta^{(0)} \\
\Box_{\gamma^{(0)}}\breve{b}^{(1)} =& - n^2\omega^2 A(m,m)\cos(u)b^{(0)} \\
&- in\omega_g\omega\left[2\gamma_{ijk}\zeta^i m^j\zeta^{*k} - nA\left(\zeta,\zeta^*\right)\right]\sin(u)b^{(0)} \\
&+ \omega_g^2\left[A\left(\zeta,\zeta^*\right) + nj\varepsilon^{ijk}\zeta_i\gamma_{kjl}\zeta^{*l}\right]\cos(u)\breve{b}^{(0)} \\
\Box_{\gamma^{(0)}}\breve{c}^{(1)} =& - in\omega_g\omega\left(\hat{\kappa}\cdot\zeta^*\right)A(m,m)\sin(u)\zeta^{(0)} \\
&+ \omega_g^2\left[A\left(m,\zeta^*\right) + nj\varepsilon^{ijk}m_i\gamma_{kjl}\zeta^{ll}\right]\cos(u)\breve{b}^{(0)}
\end{aligned}$$

The components $\breve{a}^{(1)}, \breve{b}^{(1)}$ and $\breve{c}^{(1)}$ can now be determined using the general formulae of Section 6.2.1. As done there, we momentarily suppress the GW phase offset χ for notational simplicity and reinstate it only in the final result of the computed field.

The $\breve{a}$ Component For the component $\breve{a}^{(1)}$, the value of $\bar{\alpha}^{\pm}$can be read from (7.5.3), and $\beta_1^{\pm}$is determined by $-\left(b^{(1)}\right)^*$ according to (7.4.8), which is given explicitly in (7.3.16). Similarly, $\beta_2^{\pm}$is determined from (7.4.22). The such obtained non-vanishing parameters are

$$\begin{aligned}
\breve{\alpha}^{\pm}/e^{in\omega\ell} &= \mp\frac{1}{2}n\Omega(n+m.\hat{\kappa})A\left(\zeta^*,\zeta^*\right) + O\left(\Omega^2\right), \\
\beta_{1,2}^{\pm}/e^{in\omega\ell} &= \frac{1}{4}A\left(\zeta^*,\zeta^*\right) + O(\Omega) + O\left(\Omega\omega_g\ell\right).
\end{aligned}$$

The b Component For the component $\breve{b}^{(1)}$, the parameter $\bar{\alpha}^{\pm}$is determined from (7.5.4), $\beta_1^{\pm}$is determined from $-\left(a^{(1)}\right)^*$ according to (7.4.8), which is given explicitly in (7.3.15), and $\beta_2^{\pm}$can be obtained from (7.4.21). These coefficients almost coincide with those for the reflected scalar wave given in (6.2.34)-(6.2.36). Here we merely state the deviations from the values given there:

$$\begin{aligned}
\delta\breve{\alpha}^{\pm}/e^{in\omega\ell} =& \mp n\Omega\left(\gamma_{ijk}\zeta^i m^j\zeta^{*k} - \frac{1}{2}nA\left(\zeta^*,\zeta\right)\right) + O\left(\Omega^2\right) \\
\delta\bar{\beta}_{1,2}^{\pm}/e^{in\omega\ell} =& -\frac{1}{2}\left(\gamma_{ijk}\zeta^i m^j\zeta^{*k} + \frac{1}{2}nA\left(\zeta^*,\zeta\right)\right)\frac{1-e^{\pm i\omega}}{n-m\cdot\kappa} \\
&+ \frac{1}{4}A\left(\zeta^*,\zeta\right)e^{\pm i\omega} + \frac{1}{2}\zeta^* e^{\pm i\omega} + O(\Omega) + O\left(\Omega\omega_g\ell\right) \\
\gamma_{1,2}^{\pm}/e^{in\omega l} =& -\frac{1}{2}\left[\varsigma^* - j\left(\alpha_c \mp i\alpha_s\right)\right]e^{\pm in\omega_g\ell} + O(\Omega) + O\left(\Omega\omega_g\ell\right) \\
\delta_{1,2}/e^{in\omega l} =& \frac{1}{2}j\alpha_0 + O(\Omega) + O\left(\Omega\omega_g\ell\right)
\end{aligned}$$

(7.5.5), $\beta_1^{\pm}$is determined from the incident field $e^{(1)}$ in accordance with (7.4.8), which is given explicitly in (7.3.17), and the parameter $\beta_2^{\pm}$is determined from (7.4.23). To the considered level of approximation, the non-vanishing parameters are thus found to be

$$\begin{aligned}
\bar{\alpha}^{\pm}/e^{in\omega\ell} &= \mp\frac{1}{2}n\Omega\left(\hat{\kappa}\cdot\zeta^*\right)A(m,m) + O\left(\Omega^2\right) \\
\beta_{1,2}^{\pm}/e^{in\omega\ell} &= \frac{1}{4}\left(\hat{\kappa}\cdot\zeta^*\right)A(m,m)\frac{1-e^{\pm i\omega}}{n-m\cdot\hat{\kappa}} + O(\Omega) + O\left(\Omega\omega_g\ell\right)
\end{aligned}$$

where w is defined in (6.2.33). Result One checks that the parameters just computed satisfy the conditions (6.2.22) (decorated with the $\pm$ superscripts), so that the components of the reflected

electromagnetic field are readily found using (6.2.26):

$$
\begin{aligned}
&\breve{a}^{(1)} = -\frac{1}{2}A\left(\zeta^*,\zeta^*\right)\cos(u)\tilde{b}^{(0)} + O(\Omega) + O\left(\Omega\omega_g\ell\right),\\
&\breve{b}^{(1)} = \dot{\phi}^{(1)} - \frac{1}{2}A\left(\zeta^*,\zeta\right)\cos\left(u_1+\varpi\right)\mathfrak{b}^{(0)}\\
&-\left(\gamma_{ijk}\zeta^i m^j\zeta^{*k} - \frac{1}{2}nA\left(\zeta^*,\zeta\right)\right)\frac{\cos(u)-\cos\left(u_1\right)}{n+m.\hat{\kappa}}b^{(0)}\\
&+\left(\gamma_{ijk}\zeta^i m^j\zeta^{*k} + \frac{1}{2}nA\left(\zeta^*,\zeta\right)\right)\frac{\cos\left(u_1\right)-\cos\left(u_1+\omega\right)}{n-m.\hat{\kappa}}\zeta^{(0)}\\
&-\varsigma^*\left[\cos\left(u_1+\omega\right)-\cos\left(-\omega_g t-\omega_g n(m.x-2\ell)+\chi\right)\right]\\
&-j\alpha_c\cos\left(-\omega_g t-\omega_g n(m\cdot x-2\ell)+\chi\right)\breve{b}(0)\\
&-j\alpha_s\sin\left(-\omega_g t-\omega_g n(m.x-2\ell)+\chi\right)b^{(0)} - j\alpha_0 b^{(0)} + O(\Omega) + O\left(\Omega\omega_g\ell\right),\\
&\tilde{c}^{(1)} = -\frac{1}{2}\left(\hat{\kappa}\cdot\zeta^*\right)A(m,m)\left[\frac{\cos(u)-\cos\left(u_1\right)}{n+m.\hat{\kappa}} + \frac{\cos\left(u_1\right)-\cos\left(u_1+\omega\right)}{n-m.\hat{\kappa}}\right]\tilde{b}^{(0)}\\
&+O(\Omega)+O\left(\Omega\omega_g\ell\right).
\end{aligned}
$$

Returning Field Finally, we evaluate the reflected field at the spatial coordinate origin $x^i = 0$, where the beam splitter is positioned. Let us use the notation

$$
\begin{aligned}
u^R &:= u_1\big|_\Sigma = u + (n + m\cdot\hat{\kappa})\omega_g\ell\\
u^E &:= (u_1+\varpi)\big|_\Sigma = u + 2n\omega_g\ell
\end{aligned}
$$

to denote the values of the GW phase at the (retarded) times of light reflection and emission, respectively. In order to make contact with the notation of [21], given a vector $\bar{k}$ we set

$$
\Gamma^i_j\left(\bar{k},u_2,u_1\right) = \frac{1}{\gamma^{(0)}(\bar{k},\kappa)}\int_{u_1}^{u_2}\Gamma^i_{jl}(u)\bar{k}^l\,\mathrm{d}u
$$

so that

$$
\begin{aligned}
\Gamma^i_j\left(k,u_2,u_1\right) &= -\gamma^i_{jk}m^k\frac{\cos\left(u_2\right)-\cos\left(u_1\right)}{n-m.\hat{\kappa}},\\
\Gamma^i_j\left(\hbar,u_2,u_1\right) &= +\gamma^i_{jk}m^k\frac{\cos\left(u_2\right)-\cos\left(u_1\right)}{n+m.\hat{\kappa}}.
\end{aligned}
$$

Using the function $\alpha(t)$ defined in (7.2.24), we have

$$
\begin{aligned}
&\bar{d}^{(1)}\big|_0 = -\frac{1}{2}h\left(\zeta^*,\zeta^*\right)\breve{b}^{(0)} + O(\Omega) + O\left(\Omega\omega_g\ell\right),\\
&\breve{b}^{(1)}\Big|_0 = \oint^{(1)} - \frac{1}{2}h\left(\zeta^*,\zeta\right)\Big|_{u=u}^{E}\breve{b}^{(0)} - j\alpha(t-2n\ell)b^{(0)}\\
&-\zeta_i\Gamma^i_j\left(\breve{k},u,u^R\right)\zeta^{*j}\breve{b}^{(0)} - \zeta_i\Gamma^i_j\left(k,u^R,u^E\right)\zeta^{*j}\breve{b}^{(0)}\\
&+\frac{1}{4}n^2\omega_g\omega\left(\frac{h(m,m)}{\gamma^{(0)}(\hbar,\kappa)}\Big|_{u^R}^{u} + \frac{h(m,m)}{\gamma^{(0)}(k,\kappa)}\Big|_{u^E}^{u^R}\right)\breve{b}^{(0)} + O(\Omega) + O\left(\Omega\omega_g\ell\right),
\end{aligned}
$$

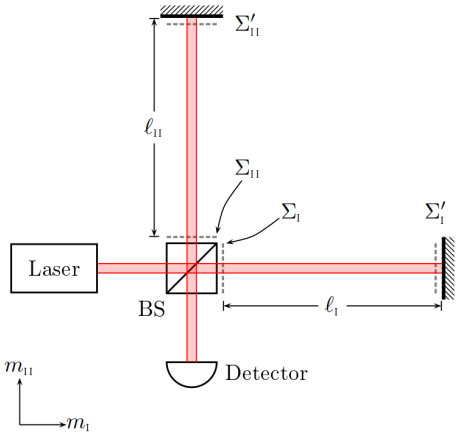
$$
c^{(1)}\big|_0 = \tfrac{1}{2}n\omega_g\omega\left(\hat{\kappa}\cdot\zeta^*\right)\left(\tfrac{h(m,m)}{\gamma^{(0)}(\tilde{k},\kappa)}\Big|_{u^R}^{u} + \tfrac{h(m,m)}{\gamma^{(0)}(k,\kappa)}\Big|_{u^E}^{u^R}\right)\zeta^{(0)} + O(\Omega) + O\left(\Omega\omega_g\ell\right).
$$

27.2.2 Electrodynamics in the Presence of Gravitational Waves 2 (?)

8

Michelson Interferometers

We are now in a position to describe the gravitational wave response of a Michelson interferometer, as sketched in Figure 1. Figure 1: Schematic drawing of a Michelson interferometer.



We use the approach of Ref. [21] to describe such interferometers. In Minkowski spacetime, i.e. the unperturbed geometry, let m_{I} and m_{n} denote the unit vectors pointing along the two interferometer arms (away from the beam splitter), defining the two emission surfaces $\Sigma_1 = \{m_1 \cdot x = 0\}$ and $\Sigma_{11} = \{m_{\mathrm{n}} \cdot x = 0\}$. The laser emits coherent light with wave vector $k = \omega\,(m_1 - \mathrm{d}t)$ and polarisation ζ. Part of the ray passes through the beam splitter unchanged except for a reduction in amplitude, and thus defines boundary data on Σ_1, corresponding to normal emission with frequency ω and polarisation ζ. Similarly, the deflected part of the beam gives rise to boundary data on Σ_{II}, corresponding again to normal emission with frequency ω, but with the polarisation vector $\eta = R^{(0)}_{\mathrm{BS}}\zeta$ where $R^{(0)}_{\mathrm{BS}}$ is the orthogonal matrix interchanging m_1 and m_{II} while leaving their orthogonal complements unchanged (see below for details). There is also a phase shift at the beam splitter, which depends upon the details of the apparatus [25, Section 2.4]. Since overall phases are irrelevant for our analysis, it suffices to include the relative phase shift of π in the Michelson interferometer, which we incorporate in the output field below; see (8.3). This description of the beam splitter can be carried over to the perturbed geometry with minimal modifications. To this end, we prescribe boundary data for Maxwell's equations on the same surfaces Σ_1 and Σ_{n} (whose unit normal one-forms ν_1 and ν_{n} are proportional to m_1 and m_{II}, respectively) as in the Minkowski case. We assume again normal emission from both surfaces Σ_1 and Σ_{II}, and the polarisation on Σ_1 is assumed to be of the form given in (7.2.20) (as dictated by the assumption of normal emission of plane waves), with the polarisation on Σ_{II} (sent into the second arm) related to the one on Σ_1 by the orthogonal map R_{BS} which now interchanges ν_1 and ν_{II} while leaving their orthogonal complement untouched.

A simple renaming of the relevant data in the solutions derived above provides then the new solutions, as needed to determine the resulting field at the interferometer output. As such, there are various readout schemes used in gravitational wave detection. For simplicity, we focus here on the DC readout scheme currently used in the LIGO and Virgo detectors. In this scheme, the arm lengths are chosen to be unequal ($\Delta\ell = \ell_1 - \ell_{11} \neq 0$) such that even in the absence of a gravitational wave there is a constant output signal registered by the photodiode, and the gravitational wave then causes a small fluctuation of this signal, which we determine below.

To describe the output of the interferometer, we collect the results obtained so far to describe the field returning to the beam splitter as a function of the emitted field. We then use our model of the beam splitter to describe how the output of the laser is transferred into the two interferometer arms, and to describe how the returning rays are transferred to the detector. 8.1

The Returning Field

For ease of further reference, we summarise our calculations so far. We have solved Maxwell's equations in the GW metric

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \epsilon h_{\mu\nu} \equiv \eta_{\mu\nu} + \epsilon A_{\mu\nu} \cos(u),$$

where

$$u = \kappa \cdot x + \chi \equiv \omega_g(-t + \hat{\kappa} \cdot x) + \chi,$$

with the electromagnetic field prescribed on the emission surface

$$\Sigma = \{m \cdot x = 0\},$$

to be emitted normally and to have unit norm at the coordinate origin, so that

$$Z_{\text{in}}\,|_{\Sigma} = e^{-i\omega t}\left[\zeta\left(1 + \epsilon j\tilde{a} - \frac{1}{2}\epsilon h\left(\zeta^*, \zeta\right)\right) - \frac{1}{2}\epsilon\zeta^* h(\zeta, \zeta)\right],$$

where ζ is the unperturbed polarisation vector, free to choose subject to the conditions (7.1.4), the asterisk indicates j-complex conjugation, and $\tilde{a}$ is the function

$$\tilde{a} = \alpha(t) + j\varsigma\left[\cos(\kappa \cdot x) - \cos\left(-\omega_g t + \chi\right)\right],$$

where α and ς are defined in (7.2.24) and (7.2.25), respectively. To write the returning field in a concise notation, we use the definitions of $H, \breve{H}$ and $\Gamma^{ii}_{\ j}$ from (6.2.41), (6.2.44), and (7.5.19), as well as

$$k_\mu = \omega\left(-1, +nm_i\right), \quad \breve{k}_\mu = \omega\left(-1, -nm_i\right),$$

together with the unperturbed optical metric

$$\gamma^{(0)\mu\nu} = \text{diag}\left(-n^2, 1, 1, 1\right),$$

and set

$$\begin{aligned} u^E &= u + 2n\omega_g\ell, \\ u^R &= u + (n + m.\hat{\kappa})\omega_g\ell, \\ \Delta h &= \left.\frac{h(m,m)}{\gamma^{(0)}(\kappa, \breve{k})}\right|_{u^R}^{u} + \left.\frac{h(m,m)}{\gamma^{(0)}(\kappa, k)}\right|_{u^E}^{u^R}. \end{aligned}$$

Then, the returning field at the coordinate origin, given by (7.5.22)-(7.5.24) and (6.2.43) as

well as (6.2.45), can be written as

$$
\begin{aligned}
&Z_{\text{out}} = -\mathscr{A}\hat{Z}e^{i\psi},\\
&\text{with}\\
&\psi = -\omega t + 2n\omega\ell + \epsilon H\left(\check{k}, u, u^R\right) + \epsilon H\left(k, u^R, u^E\right),\\
&\mathscr{A} = 1 - \frac{1}{2}\epsilon\omega_g\ell A(m,m)\frac{1-(m.\hat{\kappa})^2}{n^2-(m.\hat{\kappa})^2}\left[(m.\hat{\kappa})\sin\left(u^R\right) - (n+m.\hat{\kappa})\sin\left(u^E\right)\right]\\
&+\frac{1}{2}\epsilon\left(n^2-1\right)\omega_g^2\left[\frac{\dot{H}\left(\check{k}, u, u^R\right)}{\gamma^{(0)}(\kappa,\check{k})} + \frac{\overset{H}{H}\left(k, u^R, u^E\right)}{\gamma^{(0)}(\kappa,k)}\right],\\
&\hat{Z} = \zeta^*\left[1 - \epsilon j\alpha(t-2n\ell) - \frac{1}{2}\epsilon h\left(\zeta^*,\zeta\right)\Big|_{u^E}\right.\\
&\left.-\epsilon\zeta_i\left[\Gamma^i{}_j\left(\check{k}, u, u^R\right) + \Gamma^i_{jj}\left(k, u^R, u^E\right)\right]\zeta^{*j} + \frac{1}{4}\epsilon n^2\omega_g\omega\Delta h\right]\\
&-\frac{1}{2}\epsilon\zeta h\left(\zeta^*,\zeta^*\right) + \frac{1}{2}\epsilon mn\omega_g\omega\left(\zeta^*.\hat{\kappa}\right)\Delta h.
\end{aligned}
$$

Since the returning field at the origin only involves the function $\tilde{a}$ evaluated again at the spatial coordinate origin (but at a retarded time) the ς terms in (8.1.5), which were necessary to satisfy the constraint equations, are irrelevant for the interferometer output. This expression serves as the basis for the description of interferometers, as it describes how light emitted from a surface Σ returns after being reflected at a perfect mirror placed a distance ℓ away.

8.2 Non-Polarising Beam Splitters To relate the light polarisation vectors sent into the two interferometer arms (which are both derived from the incoming laser beam) and to compute the output laser field from the returning light rays, one must model the polarisation transfer at the beam splitter. Following the model put forward in [21], we assume the polarisation of the field emitted by the laser to have the form

$$
\hat{Z}_{\text{in}}\Big|_{x^i=0} = \sqrt{2}\zeta\left(1 + \epsilon j\alpha - \frac{1}{2}\epsilon h\left(\zeta^*,\zeta\right)\right) - \frac{1}{2}\epsilon h(\zeta,\zeta)\zeta^*,
$$

as already considered in the previous calculation (up to the scaling factor $\sqrt{2}$ which is conventional). Assuming a 50:50 beam splitter, the amplitudes of the two rays transferred to the two arms are reduced by a factor $1/\sqrt{2}$. Concerning the polarisation vectors, we assume that the part of the ray which passes straight through the beam splitter maintains its polarisation, while the polarisation sent into the orthogonal arm is given by applying the transformation

$$
\hat{Z} \mapsto -R_{\text{BS}}\hat{Z}^*,
$$

analogously to eq. (7.4.4), where R_{BS} is the orthogonal matrix which interchanges the unit conormals $\nu_{\text{r}} \propto m_{\text{r}}$ and $\nu_{\text{n}} \propto m_{\text{n}}$ (see Figure 1)

$$
R_{\text{Bs}^i{}_j} = \delta^i_j - \left[1 - g\left(\nu_1,\nu_{\text{n}}\right)\right]^{-1} g^{ik}\left(\nu_{\text{nl}} - \nu_1\right)_k\left(\nu_{\text{n}} - \nu_1\right)_j.
$$

As shown in Appendix F, see (F.24), the action of this operator on the polarisation vector (7.2.20) yields

$$
\begin{aligned}
&R_{\text{BS}}\left[\zeta\left(1 + \epsilon j\alpha - \frac{1}{2}\epsilon h\left(\zeta^*,\zeta\right)\right) - \frac{1}{2}\epsilon\zeta^* h(\zeta,\zeta)\right]\\
&\quad = \eta\left(1 + \epsilon j(\alpha + \breve{a}) - \frac{1}{2}h\left(\eta^*,\eta^*\right)\right) - \frac{1}{2}\epsilon\eta^* h(\eta,\eta),
\end{aligned}
$$

where η is the unperturbed polarisation vector of the second arm:

$$\eta = \zeta - (m_{\rm n} - m_{\rm r})\,(m_{\rm n} \cdot \zeta)\,,$$

and $\breve{a}$ is the j-imaginary part of the function $h\,(\zeta^*, \zeta - \eta)$:

$$\breve{a} = \Im_j\left[h\,(\zeta^*, \zeta - \eta)\right].$$

For the returning rays, the behaviour of the fields is similar. The ray which first passed through the beam splitter without deflection is now deflected towards the detector and thus undergoes the transformation (8.2.2) with its amplitude reduced by $1/\sqrt{2}$. The other beam, which was deflected before completing its round trip, now maintains its polarisation vector when being transferred towards the detector. Similarly to the first ray, its amplitude is reduced by $1/\sqrt{2}$, but additionally there is the standard phase shift of π.

For a more detailed description of the beam splitter transformations, see [21, Sect. 6]. 8.3

Output Field

We are now in the position to compute the output field reaching the detector, which is a sum of the fields from the two interferometer arms.

Ray I Consider the ray which is deflected only after its round-trip in one of the interferometer arms. According to our model of the beam splitter, the corresponding field emanating from Γ_1 is thans (sep (8.1.4) – (8.1.5))

$$Z_{1\text{ in}}\,|_{x^i=0} = +e^{-i\omega t}\left[\zeta\left(1 + \epsilon\alpha - \frac{1}{2}\epsilon h\,(\zeta^*, \zeta)\right) - \frac{1}{2}\epsilon\zeta^* h(\zeta, \zeta)\right].$$

The returning field is given by (8.1.11)-(8.1.14). To evaluate this at the coordinate origin, we set

$$u_1^E = u + 2n\omega_g\ell_1, \qquad u_1^R = u + (n + \hat{\kappa}\cdot m_1)\,\omega_g\ell_1.$$

Recall that at the coordinate origin we have $u|_{x^i=0} = -\omega_g t + \chi$. Applying the beam splitter transformation (8.2.2), reducing the amplitude by $1/\sqrt{2}$, and taking the i-real part, one obtains the contribution of this ray to the field at the detector output

$$Z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathscr{Z}_1\hat{Z}_1\cos(\psi_1)$$

where

$$\begin{aligned}
\psi_1 &= -\omega t + 2n\omega\ell_1 + \epsilon H\left(\check{k}_1, u, u_1^R\right) + \epsilon H\left(k_1, u_1^R, u_1^E\right),\\
\mathscr{A}_1 &= 1 - \frac{1}{2}\epsilon\omega_g\ell_1 A\,(m_1, m_1)\,\frac{1 - (m_1.\hat{\kappa})^2}{n^2 - (m_1.\hat{\kappa})^2}\left[(m_1\cdot\hat{\kappa})\sin\left(u_1^R\right) - (n + m_1.\hat{\kappa})\sin\left(u_1^E\right)\right]\\
&+ \frac{1}{2}\epsilon\left(n^2 - 1\right)\omega_g^2\left[\frac{H\left(k_{\rm I}, u, u_1^R\right)}{\gamma^{(0)}\,(\kappa, k_{\rm I})} + \frac{H\left(k_1, u_1^R, u_1^E\right)}{\gamma^{(0)}\,(\kappa, k_1)}\right],\\
\hat{Z}_{\rm I} &= \eta\left[1 + \epsilon j\,(\alpha\,(t - 2n\ell_1) + \breve{a}(t)) - \frac{1}{2}\epsilon h\,(\eta^*, \eta) + \frac{1}{2}\epsilon h\,(\zeta^*, \zeta)\Big|_{u_1^E}^{u}\right.\\
&\left.-\epsilon\zeta_i^*\left[\Gamma_j^i\left(\check{k}_1, u, u_1^R\right) + \Gamma_j^i\left(k_1, u_1^R, u_1^E\right)\right]\zeta^j + \frac{1}{4}\epsilon n^2\omega_g\omega\Delta h_{\rm I}\right]\\
&- \frac{1}{2}\epsilon\eta^* h(\eta, \eta) + \frac{1}{2}\epsilon m_{\rm II} n\omega_g\omega(\hat{\kappa}\cdot\zeta)\Delta h_{\rm I},
\end{aligned}$$

and

$$\Delta h_1 := \left.\frac{h\left(m_1,m_1\right)}{\gamma^{(0)}\left(\kappa,k_1\right)}\right|_{u_1^R}^{u} + \left.\frac{h\left(m_1,m_1\right)}{\gamma^{(0)}\left(\kappa,k_{\rm I}\right)}\right|_{u_1^E}^{u_1^R}.$$

Ray II The other ray is deflected at the beam splitter before the round-trip. The corresponding field emanating from Σ_n is

$$Z_{1I\text{ in}}\,|_{x^i=0} = -e^{-i\omega t}\left[\eta^*\left(1-\epsilon j(\alpha+\breve{a})-\frac{1}{2}\epsilon h\left(\eta^*,\eta\right)\right)-\frac{1}{2}\epsilon\eta h\left(\eta^*,\eta^*\right)\right],$$

and the returning field is directly obtained from (8.1.11)-(8.1.14) via the substitutions

$$\zeta\to\eta^*,\quad \zeta^*\to\eta,\quad \alpha\to-(\alpha+\breve{a})\quad m\to m_{11}\quad k\to k_{\rm II}$$

together with a change of the overall sign. This ray passes through the beam splitter with its amplitude reduced by $1/\sqrt{2}$ and the phase shifted by π, but without modification of the polarisation vector. Finally, taking the i-real part to obtain the physical field, the contribution to the output field from this ray is

$$Z_{11} = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathscr{A}_{11}\hat{Z}_{11}\cos\left(\psi_{11}\right)$$

where

$$\begin{aligned}
&\psi_{\rm II} = -\omega t + 2n\omega\ell_{\rm II} + \pi + \epsilon H\left(\breve{k}_{\rm II},u,u_{\rm II}^R\right) + \epsilon H\left(k_{\rm II},u_{\rm II}^R,u_{\rm II}^E\right),\\
&\mathscr{L}_{\rm II} = 1-\frac{1}{2}\epsilon\omega_g\ell_{\rm II}A\left(m_{\rm II},m_{\rm II}\right)\frac{1-\left(m_{\rm II}\cdot\hat{\kappa}\right)^2}{n^2-\left(m_{\rm II}\cdot\hat{\kappa}\right)^2}\left[\left(m_{\rm II}\hat{\kappa}\right)\sin\left(u_{\rm II}^R\right)-\left(n+m_{\rm II}\cdot\hat{\kappa}\right)\sin\left(u_{\rm II}^E\right)\right]\\
&+\frac{1}{2}\epsilon\left(n^2-1\right)\omega_g^2\left[\frac{H\left(\breve{k}_{\rm nI},u,u_{11}^R\right)}{\gamma^{(0)}\left(\kappa,\breve{k}_{\rm II}\right)}+\frac{H\left(k_{\rm II},u_{\rm n}^R,u_{\rm ni}^E\right)}{\gamma^{(0)}\left(\kappa,k_{\rm II}\right)}\right],\\
&\hat{Z}_{11} = \eta\left[1+\epsilon j\left(\alpha\left(t-2n\ell_{11}\right)+\breve{a}\left(t-2n\ell_{11}\right)\right)-\frac{1}{2}\epsilon h\left(\eta^*,\eta\right)\right.\\
&\left.-\epsilon\eta_i^*\left[\Gamma_j^i\left(\breve{k}_{\rm II},u,u_{\rm II}^R\right)+\Gamma_j^i\left(k_{\rm I},u_{\rm II}^R,u_{\rm II}^E\right)\right]\eta^j+\frac{1}{4}\epsilon n^2\omega_g\omega\Delta h_{\rm I}\right]\\
&-\frac{1}{2}\epsilon\eta^*h(\eta,\eta)+\frac{1}{2}\epsilon m_{\rm II}n\omega_g\omega(\hat{\kappa}.\eta)\Delta h_{\rm II},
\end{aligned}$$

with

$$\Delta h_{1\rm I} := \left.\frac{h\left(m_{\rm II},m_{\rm II}\right)}{\gamma^{(0)}\left(\kappa,\breve{k}_{\rm II}\right)}\right|_{u_{\rm II}^R}^{u} + \left.\frac{h\left(m_{\rm II},m_{\rm II}\right)}{\gamma^{(0)}\left(\kappa,k_{\rm II}\right)}\right|_{u_{\rm I}^E}^{u_{\rm H}^R},$$

and

$$u_{11}^E = u+2n\omega_g\ell_{\rm II},\qquad u_{\rm II}^R = u+\left(n+\hat{\kappa}\cdot m_{\rm II}\right)\omega_g\ell_{\rm II}$$

8.4 Output Power Adding the results of the two previous sections, the physical field at the output of the interferometer is found to be

$$Z_{\rm out} = Z_{\rm I}+Z_{\rm II} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}}\mathscr{A}_1\hat{Z}_{\rm I}\cos\left(\psi_1\right)+\frac{1}{\sqrt{2}}\mathscr{A}_{\rm I}\hat{Z}_{\rm II}\cos\left(\psi_{\rm II}\right)$$

whose energy density is proportional to the norm

$$T_{00}\propto g\left(Z_1^*+Z_{11}^*,Z_1+Z_{11}\right)$$

compare Appendix D. The exact proportionality factor is irrelevant for our purposes, as we are concerned only with the ratio of the output power relative to the input power. Following the standard time-averaging procedure, which we denote by $\langle\cdot\rangle$, we find the observable output power, normalised to the input power, to be

$$P = \langle g\left(Z^*_{\rm out}\,, Z_{\rm out}\,\right)\rangle \,/\, \langle g\left(Z^*_{\rm in}\,, Z_{\rm in}\,\right)\rangle$$

As we have normalised the input field (8.2.1) to $\langle g\left(Z^*_{\rm in}\,, Z_{\rm in}\,\right)\rangle = 1$, we get

$$\begin{aligned} P &= \langle g\left(Z_1^* + Z_{11}^*, Z_1 + Z_{11}\right)\rangle \\ &= \frac{1}{4}\mathscr{A}_1^2 g\left(\hat{Z}_1^*, \hat{Z}_1\right) + \frac{1}{4}\mathscr{A}_{\rm H}^2 g\left(\hat{Z}_{\rm H}^*, \hat{Z}_{\rm II}\right) + \frac{1}{4}\mathscr{A}_1\mathscr{A}_{\rm H}\left[g\left(\hat{Z}_1^*, \hat{Z}_{\rm H}\right) + g\left(\hat{Z}_1, \hat{Z}_{\rm II}^*\right)\right]\cos\left(\psi_1 - \psi_{\rm n}\right). \end{aligned}$$

This is directly measured in the commonly used DC readout scheme of gravitational wave detectors. In the unperturbed case, the normalised output power takes the simple form

$$P^{(0)} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2n\omega\Delta\ell) = \sin^2(n\omega\Delta\ell),$$

which vanishes for $\Delta\ell \equiv \ell_1 - \ell_{\rm II} = 0$. In the perturbed case, a direct calculation based on eqs. (8.3.6) and (8.3.13) shows that

$$\begin{aligned} g\left(\hat{Z}_1^*, \hat{Z}_{\rm I}\right) &= 1 + \epsilon n^2\omega_g\omega\Delta h_{\rm I}, \\ g\left(\hat{Z}_{\rm II}^*, \hat{Z}_{\rm II}\right) &= 1 + \epsilon n^2\omega_g\omega\Delta h_{\rm II}, \\ 2\Re_j g\left(\hat{Z}_1^*, \hat{Z}_{\rm II}\right) &= 2 + \epsilon n^2\omega_g\omega\left[\Delta h_{\rm I} + \Delta h_{\rm II}\right]. \end{aligned}$$

Using the explicit form of the phase and amplitude perturbations given by eqs. (8.3.4), (8.3.5), (8.3.11) and (8.3.12), one finds that the perturbed output power can be written in the form

$$P = P^{(0)} + \epsilon\delta_\psi P + \epsilon\delta_{\Delta\prime} P + \epsilon\delta_n P + \epsilon\delta_K P + O\left(\epsilon^2\right),$$

where

$$\begin{aligned} \delta_\psi P &= \frac{1}{2}\sin(2n\omega\Delta\ell) \\ &\times \left(H\left(\check{k}_1, u, u_1^R\right) + H\left(k_1, u_1^R, u_1^E\right) - H\left(\check{k}_{\rm II}, u, u_{\rm II}^R\right) - H\left(k_{\rm I}, u_{\rm II}^R, u_{\rm II}^E\right)\right), \\ \delta_A P &= -\frac{1}{2}\sin^2(n\omega\Delta\ell) \\ &\times \left(\omega_g\ell_1 A\left(m_{\rm I}, m_{\rm I}\right)\frac{1-\left(m_1\cdot\hat{\kappa}\right)^2}{n^2-\left(m_{\rm l}\cdot\hat{\kappa}\right)^2}\left[\left(m_1\cdot\hat{\kappa}\right)\sin\left(u_{\rm I}^R\right) - \left(n + m_{\rm I}\cdot\hat{\kappa}\right)\sin\left(u_1^E\right)\right]\right. \\ &\left. + \omega_g\ell_{\rm n} A\left(m_{\rm II}, m_{\rm II}\right)\frac{1-\left(m_{\rm II}\cdot\hat{\kappa}\right)^2}{n^2-\left(m_{\rm II}\cdot\hat{\kappa}\right)^2}\left[\left(m_{\rm II}\cdot\hat{\kappa}\right)\sin\left(u_{\rm II}^R\right) - \left(n + m_{\rm I}\cdot\hat{\kappa}\right)\sin\left(u_{\rm II}^E\right)\right]\right), \\ \delta_n P &= \frac{1}{2}\left(n^2-1\right)\omega_g^2\sin^2(n\omega\Delta\ell) \\ &\times \left(\frac{\dot{H}\left(\check{k}_1, u, u_1^R\right)}{\gamma^{(0)}\left(\kappa, \check{k}_{\rm r}\right)} + \frac{\dot{H}\left(k_1, u_1^R, u_1^E\right)}{\gamma^{(0)}\left(\kappa, k_{\rm l}\right)} + \frac{\dot{H}\left(\breve{k}_{\rm II}, u, u_{\rm II}^R\right)}{\gamma^{(0)}\left(\kappa, \check{k}_{\rm II}\right)} + \frac{\dot{H}\left(k_{\rm II}, u_{\rm II}^R, u_{11}^E\right)}{\gamma^{(0)}\left(\kappa, k_{\rm II}\right)}\right), \\ \delta_K P &= \frac{1}{2}n^2\omega_g\omega\sin^2(n\omega\Delta\ell) \\ &\times \left(\frac{h\left(m_1, m_{\rm I}\right)}{\gamma^{(0)}\left(\kappa, \check{k}_{\rm I}\right)}\bigg|_{u_1^R}^{u} + \frac{h\left(m_{\rm I}, m_{\rm l}\right)}{\gamma^{(0)}\left(\kappa, k_{\rm r}\right)}\bigg|_{u_1^E}^{u_1^R} + \frac{h\left(m_{\rm II}, m_{\rm II}\right)}{\gamma^{(0)}\left(\kappa, \breve{k}_{\rm II}\right)}\bigg|_{u_{\rm il}^R}^{u} + \frac{h\left(m_{\rm II}, m_{\rm II}\right)}{\gamma^{(0)}\left(\kappa, k_{\rm II}\right)}\bigg|_{u_{\rm il}^E}^{u_{11}^R}\right). \end{aligned}$$

This confirms the results of [21] and generalises them beyond the vacuum case $n = 1$: the terms $\delta_\psi P, \delta_{s/} P$ and $\delta_K P$ are trivial modifications of the corresponding expressions for vacuum, while the term $\delta_n P$ has no counterpart in the vacuum case.

Notably, both in vacuum and in dielectrics, the perturbation of the polarisation vectors produce no (linear) perturbation of the output intensity. This is because ϵ-perturbations of these vectors produce only ϵ^2 terms in their inner products with the unperturbed vectors. As in [21], $\delta_\psi P$ can be attributed to the GW perturbation of the optical phase, and $\delta_K P$ corresponds to a perturbation of the EM frequency, which rescales the unperturbed signal (as can be seen from the $\sin^2(\omega\Delta\ell)$ term). While in vacuum the perturbation of the amplitude produces only one correction similar to $\delta_\alpha P$, in the case of $n \neq 1$ there is a further term $\delta_n P$ arising from the difference in propagation speeds of the electromagnetic and gravitational waves. 8.5

Low Frequency Limit

For current interferometers, the arm lengths are short compared to the gravitational wavelength, so that it suffices to expand to leading order in $\omega_g \ell_1$ and $\omega_g \ell_{11}$. Moreover, the difference in the arm lengths is typically very small: $\Delta\ell/\ell \ll 1$. Neglecting relative errors of this size, we replace ℓ_1 and ℓ_{11} by ℓ everywhere except in the multiplicative factors $\sin^2(n\omega\Delta\ell)$ and $\sin(n\omega\Delta\ell)$. Using these approximations, we obtain

$$
\begin{aligned}
\delta_\psi P &\approx \frac{1}{2} n\omega\ell \sin(2n\omega\Delta\ell) \left[h\left(m_\text{l}, m_1\right) - h\left(m_\text{I}, m_\text{II}\right)\right], \\
\delta_\Delta P &\approx -\frac{1}{2} n\omega_g\ell \sin^2(n\omega\Delta\ell) \left[h'\left(m_\text{I}, m_\text{I}\right) \frac{1-\left(\hat{\kappa}\cdot m_\text{I}\right)^2}{n^2-\left(\hat{\kappa}\cdot m_\text{l}\right)^2} + h'\left(m_\text{II}, m_\text{II}\right) \frac{1-\left(\hat{\kappa}\cdot m_\text{II}\right)^2}{n^2-\left(\hat{\kappa}\cdot m_\text{II}\right)^2}\right], \\
\delta_n P &\approx -\frac{1}{2} n\omega_g\ell \left(n^2-1\right) \sin^2(n\omega\Delta\ell) \left[\frac{h'\left(m_\text{I}, m_1\right)}{n^2-\left(\hat{\kappa}\cdot m_\text{I}\right)^2} + \frac{h'\left(m_\text{II}, m_\text{II}\right)}{n^2-\left(\hat{\kappa}\cdot m_\text{II}\right)^2}\right], \\
\delta_K P &\approx n\omega_g\ell \sin^2(n\omega\Delta\ell) \left[h'\left(m_\text{I}, m_\text{I}\right) + h'\left(m_\text{II}, m_\text{II}\right)\right],
\end{aligned}
$$

where

$$h'(m,m) = \partial_u h(m,m) = -A(m,m)\sin(u).$$

In the low frequency limit, the perturbations "beyond the eikonal", $\delta_{\mathscr{M}} P, \delta_n P$ and $\delta_K P$, have a similar form and can thus be summarised as

$$
\begin{aligned}
\delta_{b\psi} P &:= \delta_{\Delta\Omega} P + \delta_n P + \delta_K P \\
&\approx \frac{1}{2} n\omega_g\ell \sin^2(\omega\Delta\ell) \left[h'\left(m_\text{I}, m_1\right) + h'\left(m_\text{II}, m_\text{II}\right)\right],
\end{aligned}
$$

Factoring out trigonometric functions depending on the GW phase and the interferometer arm lengths, and splitting the GW polarisation into the two polarisation states as $A = \alpha_+ A_+ + \alpha_\times A_\times$, where $\alpha_+$and $\alpha_\times$denote the amplitudes of the respective polarisation modes, see [21], the detector response in the low frequency limit takes the form

$$
\begin{aligned}
\delta_\psi P &= n\omega\ell \cos(u) \sin(2n\omega\Delta\ell) \left(\alpha_+ F_+ + \alpha_\times F_\times\right), \\
\delta_{b\psi} P &= n\omega_g\ell \sin(u) \sin(n\omega\Delta\ell)^2 \left(\alpha_+ f_+ + \alpha_\times f_\times\right),
\end{aligned}
$$

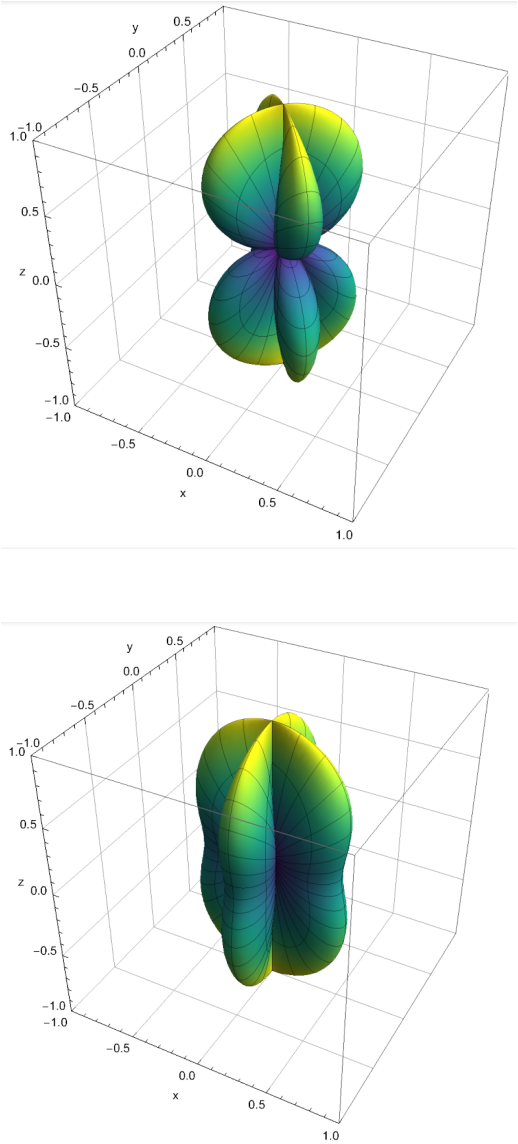
with the detector response pattern functions

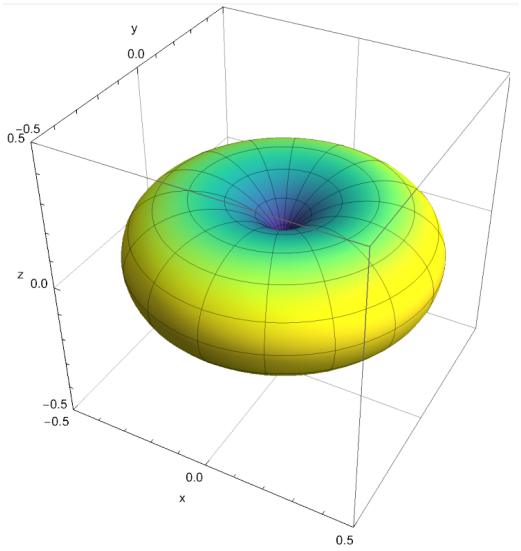
$$
\begin{aligned}
F_\lambda &= +\frac{1}{2}\left[A_\lambda\left(m_1, m_\text{r}\right) - A_\lambda\left(m_\text{1I}, m_{11}\right)\right], \\
f_\lambda &= -\frac{1}{2}\left[A_\lambda\left(m_1, m_1\right) + A_\lambda\left(m_\text{1l}, m_\text{II}\right)\right],
\end{aligned}
$$

where λ takes the values $+$ and $\times$. Parametrising the GW propagation direction and polarisation using Euler angles Φ, Θ, Ψ as in [21] with the polarisation angle Ψ set to zero as usual, we find

$$F_+ = \tfrac{1}{2}\,(1+\cos^2\Theta)\cos 2\Phi, \quad F_\times = -\cos\Theta \sin 2\Phi,$$
$$f_+ = \tfrac{1}{2}\sin^2\Theta\cos 2\Phi, \qquad\qquad f_\times = 0,$$

as in [21] (which was concerned with vacuum only). The function $f_\times$vanishes identically, and the remaining functions $F_+, F_\times$and $f_+$are plotted (in absolute values) in Figure 2.





(a) Pattern function F_+ (b) Pattern function $F_\times$ (c) Pattern function f_+ Figure 2: Detector response pattern functions for vacuum ($n = 1$). The left two panels (a) and (b) show the normalised eikonal response, while the rightmost panel (c) shows the corrections beyond the eikonal.

In the low-frequency limit, the presence of a dielectric thus results merely in a rescaling of the detector response by the refractive index n, as can be seen from (8.5.7). 8.6

Comparison with Fibre Optics

Finally, we compare our results (applying to plane waves in infinitely extended dielectrics) with those of [20] for guided waves in step-index optical fibres. As the final expressions given there are restricted to one-way propagation of light in the low frequency limit, we consider the same setting here. For one-way light propagation, the phase perturbation in the current setup reads

$$\delta\psi = -\frac{1}{2} nA(m,m) \frac{\sin(u) - \sin\left(u + (n - m.\hat{\kappa})\omega_g m \cdot x\right)}{\Omega(n - m.\hat{\kappa})}$$

where $\Omega = \omega_g/\omega$ and $u = \omega_g\left(\hat{\kappa}_i x^i - t\right) + \chi$, cf. (6.1.60). Evaluating this at a distance ℓ from the point of emission, at $x^i = \ell m^i$, the low-frequency limit $\omega_g \ell \ll 1$ yields

$$\delta\psi = \frac{1}{2} nA(m,m) \cos\left(-\omega_g t + \chi\right) \omega\ell + O\left(\omega_g \ell\right),$$

which is to be compared with the phase perturbation in optical fibres [20, Eq. (6.11)]

$$\delta\psi_{\text{fibre}} = \frac{1}{2} c_1 A(m,m) \cos\left(-\omega_g t + \chi\right) + O\left(\omega_g \ell\right)$$

(with the phase offset χ added as needed), where we have adapted the overall sign of the phase for consistency with the sign convention used here. The multiplicative coefficient c_1 in (8.6.3) had to be determined numerically as a function of the core and cladding refractive indices n_1, n_2, and also of the core radius ρ, but was generally found to be close to the effective refractive index $c_1 \approx \bar{n} \approx n_1$[20, Sect. 8]. Hence, we find good agreement of the phase perturbations acquired by plane waves in infinitely extended dielectrics and Bessel modes of azimuthal mode index $m = 1$ in step-index optical fibres.

Concerning perturbations of the amplitude and polarisation, we note that such effects arise in the current setup only at next-to-leading order in the ratio ω_g/ω, which was neglected in [20]. Nonetheless, perturbations of this kind were obtained for optical fibres [20, Sect. 7], but they

were found to be suppressed relatively to the phase perturbation by a factor $(1 - n_2/n_1)^2$ which vanishes in the case considered here. So although the results for the amplitude and polarisation perturbations are not directly comparable, they agree

По статье Мейлинга (????)

(забыл, какая статья на самом деле.)

Запишем волновое уравнение для гравитационной волны в случае, где нет чего угодно, что могло бы создать шумы или усложнить задачу. Пишем его как:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g})F^{\mu\nu} = \mu_0 j^\nu,$$

Подставим $F^{\mu\nu}$ по определению, получим:

$$\nabla_\mu \nabla^\mu A^\nu - g^{\lambda\nu} R_{\varepsilon\lambda} A^\varepsilon - \nabla^\nu \left(\nabla_\mu A^\mu\right) = \mu_0 j^\nu$$

где $R_{\varepsilon\lambda}$ это тензор Риччи. Используя выражение обобщенного оператора Лапласа $\nabla_\mu \nabla^\mu \psi = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu\left(\sqrt{-g} g^{\mu\lambda}\partial_\lambda \psi\right)$, и применяя калибровку Лоренца ($\nabla_\mu A^\mu = 0$) приходим к уравнению

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu + \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu\left(\sqrt{-g} g^{\mu\lambda}\right)\partial_\lambda A^\nu - g^{\lambda\nu} R_{\varepsilon\lambda} A^\varepsilon = 0$$

Для гравитационной волны $g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}$, где $|h_{\alpha\beta}| \ll 1$, и

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 + h_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$$

где мы имеем возмущение только вдоль оси z, то есть

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dz^2 - \left[1 - f_+(z - ct)\right] dx^2 - \left[1 + f_+(z - ct)\right] dy^2 + 2 f_\times (z - ct) dx dy.$$

Получаем уравнение

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi + \frac{f_\times\left(\partial_t f_\times\right) + f_+\left(\partial_t f_+\right)}{f_\times^2 + f_+^2 - 1}\partial_t \phi - \frac{f_\times\left(\partial_z f_\times\right) + f_+\left(\partial_z f_+\right)}{f_\times^2 + f_+^2 - 1}\partial_z \phi = 0$$

и уравнение

$$\partial_\mu \partial^\mu A^k + \frac{f_\times\left(\partial_t f_\times\right) + f_+\left(\partial_t f_+\right)}{f_\times^2 + f_+^2 - 1}\partial_t A^k - \frac{f_\times\left(\partial_z f_\times\right) + f_+\left(\partial_z f_+\right)}{f_\times^2 + f_+^2 - 1}\partial_z A^k = 0$$

Если подставить

$$f_+(z,t) = a\cos(kz - wt)$$
$$f_\times(z,t) = b\cos(kz - wt + \alpha),$$

то получим для скалярного потенциала уравнение

$$\partial_{tt}^2 \phi - \partial_{zz}^2 \phi - \frac{wa^2 \sin(wt - kz)\cos(wt - kz)}{a^2\cos^2(wt - kz) - 1}\partial_t \phi - \frac{ka^2 \sin(wt - kz)\cos(wt - kz)}{a^2\cos^2(wt - kz) - 1}\partial_z \phi = 0,$$

(?????????????)

27.2.3 Electrodynamic equations for waveguides in a gravitational wave

(просто как подготовка к этому, всякие подробности в другую часть потом перенесу. пока тут больше нужного написано.)

The Wave Equation for the Electromagnetic Field для гравитационных волн (?)

(тут важная подготовка для этого!)

Starting from the field equations (7.10) in the form

$$n\partial_0 Z^i + j\varepsilon^{ijk}\nabla_j Z_k = 0, \quad \nabla_i Z^i = 0$$

we now derive a wave equation for the electromagnetic field Z^i. Throughout this section indices are raised and lowered with the perturbed spatial metric g_{ij} by default. To derive an equation of second order, we apply $n\partial_0$ to the first equation, use $\partial_0\nabla_j Z_k = \partial_j\partial_0 Z_k - \partial_0\Gamma^l_{jk}Z_l$, and thus obtain

$$n^2\ddot{Z}^i + j\varepsilon^{ijk}\nabla_j\left(n\partial_0 Z_k\right) = 0,$$

since the connection is torsion-free. Here and elsewhere, an overset dot indicates differentiation with respect to the time coordinate $t \equiv x^0$. Next, lowering the index of the first-order evolution equation, one obtains

$$n\dot{Z}_k = -j\varepsilon_k^{lm}\nabla_l Z_m + n\dot{g}_{kl}Z^l,$$

so that the second-order equation can be written as

$$n^2\ddot{Z}^i + \left(\mathrm{g}^{il}\ \mathrm{g}^{jm} - \mathrm{g}^{im}\ \mathrm{g}^{jl}\right)\nabla_j\nabla_l Z_m + j\varepsilon^{ijk}\nabla_j\left(n\dot{\mathrm{g}}_{kl}Z^l\right) = 0.$$

Using $\nabla_j Z^j = 0$, the second term can be simplified to yield

$$\left(\mathrm{g}^{il}\ \mathrm{g}^{jm} - \mathrm{g}^{im}\ \mathrm{g}^{jl}\right)\nabla_j\nabla_l Z_m = \mathrm{g}^{il}\nabla_j\nabla_l Z^j - \mathrm{g}^{il}\nabla_l\nabla_j Z^j - \Delta Z^i = -\Delta Z^i + R^i_j Z^j, \quad \text{(A.5)}$$

where $\Delta = g^{ij}\nabla_i\nabla_j$ is the spatial Laplacian operator (here acting on a vector field) and R^i_j is the spatial Ricci tensor. This leads to the equation

$$n^2\ddot{Z}^i - \Delta Z^i + R^i_j Z^j + j\varepsilon^{ijk}\nabla_j\left(n\dot{\mathrm{g}}_{kl}Z^l\right) = 0.$$

Using $\varepsilon^{ijk}\nabla_j\alpha_k = \varepsilon^{ijk}\partial_j\alpha_k$ and $\partial_i\ \mathrm{g}_{jk} = \Gamma_{jki} + \Gamma_{kij}$, as well as the symmetry of the Christoffel symbols, one finally obtains

$$n^2\ddot{Z}^i - \Delta Z^i + R^i_j Z^j + j\varepsilon^{ijk}\left[n\dot{\Gamma}_{kjl}Z^l + n\dot{\mathrm{g}}_{kl}\partial_j Z^l\right] = 0.$$

A direct calculation shows that the components of the Laplacian acting on the vector field Z are related to the Laplacian acting on the component functions Z^i by

$$(\Delta Z)^i = \Delta\left(Z^i\right) + \epsilon\delta^{jk}\partial_j\Gamma^{(1)i}_{kl}Z^l + 2\epsilon\delta^{jk}\Gamma^{(1)i}_{jl}\partial_k Z^l - \epsilon\delta^{jk}\Gamma^{(1)l}{}_{jk}\partial_l Z^i + O\left(\epsilon^2\right). \quad \text{(A.8)}$$

For the particular spatial metric (7.4), the Christoffel symbols take the form

$$\Gamma^{(1)}_{ijk} = -\frac{1}{2}\epsilon\left[\kappa_j A_{ki} + \kappa_k A_{ij} - \kappa_i A_{jk}\right]\sin(\kappa\cdot x + \chi)$$

so that the last term in (A.8) is seen to vanish. Consequently, one has

$$\delta^{jk}\partial_j\Gamma^{(1)}_{ikl} = -\frac{1}{2}\omega_g^2 g^{(1)}_{il} = -R^{(1)}_{il}$$

where R_{ij} is the spatial Ricci tensor with components

$$R^{(1)}{}_{ij} = \frac{1}{2}\omega_g^2\ \mathrm{g}^{(1)}_{ij}$$

Combining these intermediate results, the wave equation takes the form

$$n^2\ddot{Z}^i - \Delta\left(Z^i\right) + 2\epsilon R^{(1)i}{}_j Z^j - 2\epsilon\delta^{jk}\Gamma^{(1)i}{}_{jl}\partial_k Z^l + j\epsilon\varepsilon^{ijk}\left[n\dot{\Gamma}^{(1)}{}_{kjl}Z^l + n\dot{g}^{(1)}{}_{kl}\partial_j Z^l\right] = 0. \quad \text{(A.12)}$$

In all terms involving derivatives of the metric (i.e. its time derivative, Christoffel symbols or the Ricci tensor), we may use the unperturbed expression for the electromagnetic field. B

Covariant Formulation of the Emission Condition

Here, we discuss a covariant formulation of the emission condition (7.2.4), which states that

$$Z^i - j\varepsilon^{ijk}\nu_j Z_k = 0,$$

where ν is the conormal of the emission surface Σ. Using a timelike, future-pointing unit normal field u, every two-form F admits the covariant representation

$$F_{\mu\nu} = u_\mu E_\nu - u_\nu E_\mu + \epsilon_{\mu\nu\rho}B^\rho,$$

with a vector B and a covector E satisfying $E_\mu u^\mu = 0 = B^\mu u_\mu$. Therein, the "spatial epsilon tensor" $\epsilon_{\mu\nu\rho}$ is obtained from the epsilon tensor (with $\epsilon_{0123} = \sqrt{-\det g_{\mu\nu}}$) via the contraction $\epsilon_{\mu\nu\rho} := u^\sigma \epsilon_{\sigma\mu\nu\rho}$. The projections $E_i := P_i^\mu E_\mu$ and $B^i := P_\mu^i B^\mu$ with $P_\nu^\mu := \delta_\nu^\mu + u^\mu u_\nu$ yield the 3-vectors that reproduce the representation (7.5) of the field strength tensor in coordinates with $u_\mu = \left(-1/\sqrt{-g^{00}}, 0, 0, 0\right)$. Analogously, the displacement tensor may be written as

$$\bar{F}^{\mu\nu} = u^\mu D^\nu - u^\nu D^\mu + \epsilon^{\mu\nu\rho}H_\rho.$$

For the dual field strength tensor $*F^{\mu\nu} := \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}F_{\alpha\beta}$ one obtains

$$*F^{\mu\nu} = -u^\mu B^\nu + u^\nu B^\mu + \epsilon^{\mu\nu\rho}E_\rho.$$

Assuming now a linear isotropic dielectric with $D^\mu = \varepsilon g^{\mu\nu}E_\nu, B^\mu = \mu g^{\mu\nu}H_\nu$ and $n := \sqrt{\varepsilon\mu}$, we consider the j-complex combination

$$\mathcal{F}^{\mu\nu} := \mu\bar{F}^{\mu\nu} - jn * F^{\mu\nu} = u^\mu Z^\nu - u^\nu Z^\mu - \frac{j}{n}e^{\mu\nu\rho}Z_\rho,$$

where

$$Z^\mu := \mu D^\mu + jnB^\mu, \qquad Z_\mu := g_{\mu\nu}Z^\nu = n^2 E_\nu + j\mu n H_\nu$$

Note that the electromagnetic field in a general medium can be expressed similarly using two independent complex vectors, cf. [27].

(!!!! это очень важное место!!!!)

In accordance with geometric optics, cf. e.g. [21], we consider light of frequency ω (as measured by observers with 4 -velocity u) emitted orthogonally to the surface Σ, with normal ν, which we assume orthogonal to u. The corresponding wave vector then reads

$$k_\mu = \omega\left(u_\mu + n\nu_\mu\right).$$

In such a setting one imposes on Σ the conditions

$$\bar{F}^{\mu\nu}k_\nu = 0, \quad *F^{\mu\nu}k_\nu = 0.$$

In our complex notation, this can be summarized as

$$\mathcal{F}^{\mu\nu}k_\nu = 0,$$

which can be rewritten as

$$Z^\mu + nu^\mu Z^\nu \nu_\nu - j\epsilon^{\mu\nu\rho}\nu_\nu Z_\rho = 0.$$

Contracting this equation with u_μ yields $\nu_\mu Z^\mu = 0$, so that (B.10) simplifies to

$$Z^\mu - j\epsilon^{\mu\nu\rho}\nu_\nu Z_\rho = 0,$$

as used in the main body of the paper. To calculate the invariants of the electromagnetic field we recall the definition of the dual of the excitation tensor $\bar{F}^{\alpha\beta}$:

$$*\bar{F}_{\mu\nu} := \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\bar{F}^{\alpha\beta} = -u_\mu H_\nu + u_\nu H_\mu + \epsilon_{\mu\nu\rho}D^\rho.$$

To relate $*\bar{F}_{\mu\nu}$ to $*F^{\rho\sigma}$, let $\gamma_{\mu\nu}$ denote the inverse to the contravariant optical metric $\gamma^{\mu\nu}$, which evaluates to

$$\gamma_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \left(1 - n^{-2}\right) u_\mu u_\nu.$$

One then finds

$$\mu * \bar{F}_{\mu\nu} = \frac{\det\left(\gamma^{\alpha\beta}\right)}{\det\left(g^{\alpha\beta}\right)}\gamma_{\mu\rho}\gamma_{\nu\sigma} * F^{\rho\sigma} = n^2\gamma_{\mu\rho}\gamma_{\nu\sigma} * F^{\rho\sigma}.$$

In the last identity we used the fact that $\det\left(\gamma^{\alpha\beta}\right)/\det\left(g^{\alpha\beta}\right)$ is a scalar, so that it may be computed in the local inertial system of the medium, where $g^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta}$ and $\gamma^{\alpha\beta} = \mathrm{diag}\,(-n^2, 1, 1, 1)$. Using (7.2), contraction of $\mathcal{F}^{\rho\sigma}$ with the optical metric then yields

$$\overline{\mathcal{F}}_{\mu\nu} := \gamma_{\mu\rho}\gamma_{\nu\sigma}\mathcal{F}^{\rho\sigma} - F_{\mu\nu} - \frac{j}{n}\mu * \bar{F}_{\mu\nu} - n^{-2}\left(u_\mu Z_\nu - u_\nu Z_\mu - jn\epsilon_{\mu\nu\rho}Z^\rho\right).$$

Thus setting both invariants $F_{\mu\nu}\bar{F}^{\mu\nu}$ and $F_{\mu\nu} * F^{\mu\nu}$ of the electromagnetic field to zero is seen to be equivalent to the complex equation

$$\mathcal{F}^{\mu\nu}\overline{\mathcal{F}}_{\mu\nu} \equiv 2\mu F_{\mu\nu}\bar{F}^{\mu\nu} - 2jnF_{\mu\nu} * F^{\mu\nu} \equiv -\frac{4}{n^2}Z^\nu Z_\nu = 0,$$

which is already implied by (B.11).

C

The Boundary-Constraint Equation

Maxwell's equations written in terms of the tensor field (B.5) read

$$\nabla_\mu\mathcal{F}^{\mu\nu} = \mathbf{0},$$

or equivalently

$$\partial_\mu\left(\sqrt{-\det g}\mathcal{F}^\mu\right) = 0.$$

Let us choose a coordinate system so that a non-characteristic hypersurface Σ is given by the equation $\{x^0 = 0\}$; we emphasise that we do not assume that x^0 is a time coordinate, only that $g^{00}|_\Sigma$ has no zeros. The field

$$\mathcal{C} := \partial_i\left(\sqrt{-\det g}\mathcal{F}^{i0}\right) \equiv \partial_\mu\left(\sqrt{-\det g}\mathcal{F}^{\mu 0}\right),$$

which involves only derivatives tangential to Σ, has to vanish for solutions of (C.1). Hence, the equation $\mathcal{C} = 0$ has the character of a constraint equation when propagating fields away from Σ.

The complementing part of the constraint equation $\mathcal{C} = 0$ in (C.1) are the propagation equations

$$\partial_0\left(\sqrt{-\det g}\mathcal{F}^{0j}\right) = -\partial_i\left(\sqrt{-\det g}\mathcal{F}^{ij}\right).$$

Here, propagation does not mean propagation in time, but propagation away from Σ. Every solution of these propagation equations satisfies

$$\partial_0\mathcal{C} = \partial_0\partial_j\left(\sqrt{-\det g}\mathcal{F}^{j0}\right) = \partial_j\partial_0\left(\sqrt{-\det g}\mathcal{F}^{j0}\right) = \partial_j\partial_i\left(\sqrt{-\det g}\mathcal{F}^{ij}\right) = 0, \qquad \text{(C.5)}$$

where we have used the antisymmetry of $\mathcal{F}^{\mu\nu}$. We conclude that if $\mathcal{C}$ vanishes on Σ and if (C.4) holds, then $\mathcal{C}$ vanishes on the domain of definition of the coordinates above. D

The Energy-Momentum Tensor

The field equations can be derived from a variational principle based on the Lagrangian density

$$\mathfrak{L} = -\frac{1}{4}\sqrt{-g}\bar{F}^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta},$$

where F is regarded as the curvature form of an abelian gauge potential $F = \mathrm{d}A$. The overall scaling depends on the choice of units, which is irrelevant here as we assume no external charges or currents. An energy tensor $T_{\mu\nu}$ is obtained using the standard formula [28, Eq. (E.1.26)]

$$\delta\mathfrak{L} = -\frac{1}{2\pi}\sqrt{-g}T_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu},$$

where the 4-velocity u is varied according to $\delta u^\mu = -\frac{1}{2}u^\mu u_\alpha u_\beta \delta g^{\alpha\beta}$ in order to preserve the normalisation $g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = -1$. Using $\gamma_{\mu\nu}$ as defined in (B.13), this can be written as

$$4\pi T_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\alpha}\bar{F}^{\alpha\beta}F_{\nu\beta} - \frac{1}{4}\bar{F}^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}g_{\mu\nu} + \left(n^2-1\right)\gamma_{\rho\alpha}\bar{F}^{\alpha\beta}F_{\sigma\beta}u^\rho u^\sigma u_\mu u_\nu,$$

cf. [29]. Using the decomposition of F and $\bar{F}$ from (B.2) and (B.3), and letting $g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + u_\mu u_\nu$ be the "spatial metric" (which can be used to raise and lower indices of spatial vectors), this can be written as

$$4\pi T_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(E.D + B.H)\left(u_\mu u_\nu + g_{\mu\nu}\right) + 2u_{(\mu}\epsilon_{\nu)}{}^{\rho\sigma}E_\rho H_\sigma - D_\mu E_\nu - B_\mu H_\nu.$$

This tensor is evidently symmetric and trace-free with respect to the spacetime metric. In terms of the complex field Z it may be expressed as

$$8\pi\mu n^2 T_{\mu\nu} = Z^*_\rho Z^\rho\left(u_\mu u_\nu + g_{\mu\nu}\right) + 2jn^{-1}u_{(\mu}\epsilon_{\nu)}{}^{\rho\sigma}Z_\rho Z^*_\sigma - Z_\mu Z^*_{\nu\nu}Z^*_\mu Z_\nu$$

so that the energy density is seen to be given by

$$T_{00} = \frac{1}{8\pi}(E.D + B.H) = \frac{1}{8\pi\mu n^2}Z^*.Z.$$

E Compatibility of Reflection with Constraints Consider the reflection conditions

$$\nu \cdot \left(\dot{Z} - Z^*\right) = 0, \quad \nu \times \left(\ddot{Z} + Z^*\right) = 0,$$

where Z is the incident field, Z is the reflected field, and ν is the normal to the reflecting surface. This can be covariantly rewritten using the complex tensor $\mathcal{F}$ defined in (B.5):

$$\left(\mathcal{F} - \mathcal{F}^*\right)^{\alpha\beta}\nu_\beta = 0.$$

Let us verify that this prescription is consistent in the following sense: if the incident field Z satisfies the constraint equation which arises from Maxwell's equations, then so does the reflected field Z. Recall that the constraint equation is obtained from the time-evolution equation by contraction with the conormal ν_i. Note that since ν_i is proportional to m_i, we may use the latter instead, which has the advantage that all its derivatives vanish. By assumption, the incident field Z satisfies the (conjugate) constraint equation

$$n\partial_0\left(m_i Z^{*i}\right) - j\varepsilon^{ijk}\partial_j\left(m_i Z^*_k\right) = 0.$$

Using $m_i Z^{*i} = m_i Z^i$ and $\varepsilon^{ijk}m_i Z^*_k = -\varepsilon^{ijk}m_i Z_k$, we obtain

$$n\partial_0\left(m_i\bar{Z}^i\right) + j\varepsilon^{ijk}\partial_j\left(m_i\bar{Z}_k\right) = 0.$$

so the reflected field indeed satisfies the constraint equation. The remaining projections of Maxwell's equations then determine the normal derivatives of the various components of Z, thereby encoding the law of reflection.

In fact, we can formulate a covariant argument which shows that the requirement that partial derivatives of m vanish is inessential. Since ν is hypersurface-orthogonal, it can be locally written as $v = g\,\mathrm{d}f$, where f and g are smooth functions. By linearity, we may equally formulate the reflection condition with the exact form df instead of ν:

$$\mathcal{F}^{\alpha}\alpha\beta f_{;\beta} - \mathcal{F}^{+\alpha\beta} f_{;\beta} = 0.$$

Taking the divergence, we obtain

$$\mathcal{F}^{\alpha\beta}_{;\alpha\beta} f_{;\beta} - \mathcal{F}^{*\alpha\beta}{}_{;\alpha} f_{;\beta} + \left(\mathcal{F}^{\alpha\beta} - \mathcal{F}^{*\alpha\beta}\right) f_{;\beta\alpha} = 0.$$

Since the connection used is torsion-free, $f_{;\beta\alpha}$ is symmetric, so the last term vanishes due to the anti-symmetry of the field tensors. Thus, j satisfies the constraint equation ${}_{\mathcal{F}}{}^{\alpha\beta}{}_{\beta\alpha}\nu_{\beta}$ if and only if the incident field F does. Note that the presence of sources on the mirror surface has no influence on this argument since the current four-vector is tangent to the mirror surface and thus annihilated by the normal one-form ν.

Polarization Reflection at a Beam Splitter

We do not attempt to model the precise details of beam splitters in curved spacetime, and use a simplified model which relates the electromagnetic fields at the various surfaces of the beam splitter, pointing towards the laser, detector, and along the two interferometer arms, see Figure 1.

Denote by Σ_1 and Σ_{11} the surfaces facing the mirrors, as in Figure 1. We describe these surfaces by $\Sigma_1 = \{m_1 \cdot x = 0\}$ and $\Sigma_{11} = \{m_{11} \cdot x = 0\}$, where

$$m_1 \cdot m_{\mathrm{U}} \equiv \delta^{ij} m_{1i} m_{\mathrm{nj}} = 0,$$

so that the unperturbed normals are orthogonal in the backgrotud metric. The normals in the perturbed metric are then

$$\nu_{1i} = m_{1i}\left(1 + \frac{1}{2}\epsilon h\left(m_1, m_1\right)\right), \quad \nu_1^i = m_1^i\left(1 + \frac{1}{2}\epsilon h\left(m_1, m_1\right)\right) - \epsilon h^{ij} m_{1j}, \qquad \text{(F.2)}$$

$$\nu_{\mathrm{ni}} = m_{\mathrm{ni}}\left(1 + \frac{1}{2}\epsilon h\left(m_{\mathrm{nI}}, m_{\mathrm{HI}}\right)\right), \quad \nu_{\mathrm{II}}^i = m_{\mathrm{II}}^i\left(1 + \frac{1}{2}\epsilon h\left(m_{\mathrm{n}}, m_{\mathrm{nI}}\right)\right) - \epsilon h^{ij} m_{\mathrm{nj}j}, \qquad \text{(F.3)}$$

where indices of m_1 and m_{11} are raised with the background metric δ_{ij}. The corresponding reflection operator which interchanges ν_1 and ν_{II} while leaving their orthogonal complement unaltered is

$$R_j^i = \delta_j^i - \left[1 - g\left(\nu_{\mathrm{n}}, \nu_1\right)\right]^{-1}\left(\nu_{\mathrm{n}} - \nu_1\right)^i \left(\nu_{\mathrm{n}} - \nu_1\right)_j.$$

By virtue of (F.1), one has $g\left(\nu_{\mathrm{II}}, \nu_1\right) = -\epsilon h\left(m_{\mathrm{II}}, m_1\right) + O\left(\epsilon^2\right)$, and thus

$$R_j^i = \delta_j^i - \left[1 - \epsilon h\left(m_{\mathrm{II}}, m_1\right)\right]\left(\nu_{\mathrm{n}} - \nu_1\right)^i \left(\nu_{11} - \nu_1\right)_j + O\left(\epsilon^2\right).$$

We wish to compute $R^i{}_j Z^j$, where

$$\hat{Z}^i = a\zeta^i - \frac{1}{2}\epsilon h(\zeta, \zeta)\zeta^{+i},$$

with

$$a = 1 + \epsilon j\alpha - \frac{1}{2}\epsilon h\left(\zeta^*, \zeta\right)$$

Defining the unperturbed reflected polarization

$$\eta_i = R^{(0)}{}_i{}^j \zeta_j = \zeta_i - \left(m_{\mathrm{I}} - m_1\right)_i \left(m_{11} \cdot \zeta\right),$$

one can expand $R^i_j \hat{Z}^j$ in the basis η, η^*, m_{11}. Since $\hat{Z}$ is orthogonal to m_1, the reflected vector is orthogonal to m_{II}, so that one can write

$$R^i_j Z^j = b\eta^i + \epsilon C \eta^{*i}$$

for some constants b, c to be determined. Since $\hat{Z}$ satisfies $g(\hat{Z}, \hat{Z}) = 0$, the reflected vector also has zero norm. As $b = 1 + O(\epsilon)$ the factor c is determined by

$$h(\eta, \eta) + 2c = 0$$

so that it remains to determine b. For this, one may use the expansion (F.9) to find

$$b = \eta^*_i R^i_j \hat{Z}^j = \zeta^*_i R^i_j \hat{Z}^j - \left(m_{\mathrm{II}} \cdot \zeta^*\right)\left(m_{\mathrm{II}} - m_1\right)_i R^i_j \hat{Z}^j$$

where we consider the second term first. There, one has $m_{ni} R^i_j \hat{Z}^j \propto \nu_{ni} R^i_j \hat{Z}^j = \nu_{1i} \hat{Z}^i = 0$. For the other term, $m_{1i} R^i_j Z^j$, one may use the explicit form of ν_1, ν_{11} and z to obtain $b = \zeta^*_i R^i_j \hat{Z}^j + a\left(m_{\mathrm{I}} \cdot \zeta^*\right)\left(m_{\mathrm{I}} \cdot \zeta\right)\left[1 + \frac{1}{2}\epsilon h\left(m_{\mathrm{n}}, m_{\mathrm{I}}\right) - \frac{1}{2}\epsilon h\left(m_1, m_1\right)\right] - \frac{1}{2}\epsilon h(\zeta, \zeta)\left(m_{\mathrm{II}} \cdot \zeta^*\right)^2 \cdot (\mathrm{F} \cdot 12)$ Contracting (7.1.10) with $m_{\mathrm{ai}} m_{1\mathrm{n}j}$ yields $\left(m_{\mathrm{a}} \zeta^*\right)\left(m_{\mathrm{II}} - \zeta\right) = \frac{1}{2}$, and using $a = 1 + O(\epsilon)$, this simplifies to

$$b = \zeta^*_i R^i_j \hat{Z}^j + \frac{1}{2}a + \frac{1}{4}\epsilon h\left(m_{\mathrm{I}}, m_{\mathrm{I}}\right) - \frac{1}{4}\epsilon h\left(m_1, m_1\right) - \frac{1}{2}\epsilon h(\zeta, \zeta)\left(m_{\mathrm{I}} \cdot \zeta^*\right)^2$$

Consider, now, the first term. Using the explicit expression for the reflection operator, as well as the intermediate results

$$\begin{aligned}
&\zeta^*_i \hat{Z}^i = a, \\
&\zeta^*_i \left(\nu_{\mathrm{nI}} - \nu_1\right)^i = \left[1 + \frac{1}{2}\epsilon h\left(m_{\mathrm{I}}, m_{\mathrm{n}}\right)\right]\left(m_{\mathrm{II}} \cdot \zeta^*\right) - \epsilon h\left(\zeta^*, m_{\mathrm{II}} - m_1\right), \\
&\left(\nu_{\mathrm{n}} - \nu_1\right)_i \hat{Z}^{\mathrm{i}} = \left[1 + \frac{1}{2}\epsilon h\left(m_{11}, m_{\mathrm{M}}\right)\right]\left[a\left(m_{\mathrm{n}} \cdot \zeta\right) - \frac{1}{2}\epsilon h(\zeta, \zeta)\left(m_{\mathrm{I}} \cdot \zeta^*\right)\right],
\end{aligned}$$

and using again $\left(m_{11} \cdot \zeta^*\right)\left(m_{11} \cdot \zeta\right) = \frac{1}{2}$ as well as $a = 1 + O(\epsilon)$, one finds

$$\zeta^*_i R^i_j \hat{Z}^j = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\epsilon h\left(m_1, m_1\right) - \frac{1}{2}\epsilon h\left(m_{\mathrm{n}}, m_{\mathrm{I}}\right) + \epsilon h\left(\zeta^*, m_1 - m_1\right)\left(m_1 \cdot \zeta\right) + \frac{1}{2}\epsilon h(\zeta, \zeta)\left(m_{\mathrm{I}} \cdot \zeta^*\right)^2.$$

Plugging this into (F.13) then yields

$$b = a + \epsilon h\left(\zeta^*, m_{\mathrm{I}} - m_1\right)\left(m_{\mathrm{I}} \cdot \zeta\right) - \frac{1}{4}\epsilon h\left(m_{\mathrm{M}} - m_{\mathrm{I}}, m_{\mathrm{I}} - m_1\right),$$

and inserting the explicit form of a from (F.7), one arrives at

$$b = 1 + \epsilon j\alpha - \frac{1}{2}\epsilon h\left(\zeta^*, \zeta\right) + \epsilon h\left(\zeta^*, m_{\mathrm{M}} - m_{\mathrm{I}}\right)\left(m_{\mathrm{n}} - \zeta\right) - \frac{1}{4}\epsilon h\left(m_{\mathrm{M}} - m_{\mathrm{I}}, m_{\mathrm{I}} - m_1\right).$$

Decomposing b analogously as a was decomposed in (F.7) in the form

$$\begin{aligned} b =& 1 + \epsilon j\beta - \frac{1}{2}\epsilon h\left(\eta^*, \eta\right) \\ =& 1 + \epsilon j\beta - \frac{1}{2}\epsilon h\left(\zeta^*, \zeta\right) + \frac{1}{2}\epsilon h\left(\zeta^*, m_{\mathrm{I}} - m_1\right)\left(m_{\mathrm{I}} \cdot \zeta\right) \\ & + \frac{1}{2}\epsilon h\left(\zeta, m_{\mathrm{n}} - m_1\right)\left(m_{\mathrm{n}} \cdot \zeta^*\right) - \frac{1}{4}\epsilon h\left(m_{\mathrm{I}} - m_1, m_{\mathrm{I}} - m_{\mathrm{I}}\right), \end{aligned}$$

one arrives at

$$j\beta = j\alpha + \frac{1}{2}h\left(\zeta^*, m_{\mathrm{II}} - m_1\right)\left(m_{\mathrm{U}} \cdot \zeta\right) - \frac{1}{2}h\left(\zeta, m_{\mathrm{II}} - m_{\mathrm{I}}\right)\left(m_{\mathrm{II}} \cdot \zeta^*\right)$$

or equivalently

$$\beta = \alpha + \Im_j\left[h\left(\zeta^*, m_{11} - m_1\right)\left(m_{11} \cdot \zeta\right)\right]$$

where $\Im_j$ denotes the j-imaginary part. Summarizing, given a polarization vector of the form

$$\hat{Z}^i = \zeta^{-i}\left[1 + j\epsilon\alpha - \frac{1}{2}\epsilon h\left(\zeta^*, \zeta\right)\right] - \frac{1}{2}\epsilon\zeta^{-i}h(\zeta, \zeta) + O\left(\epsilon^2\right)$$

the vector obtained by applying the reflection operator (F.4) is

$$R^i_j\hat{Z}^j = \eta^i\left(1 + j\epsilon\alpha + j\epsilon\mathcal{S}_j\left[h\left(\zeta^*, m_{11} - m_1\right)\left(m_{11} \cdot \zeta\right)\right] - \frac{1}{2}\epsilon h\left(\eta^*, \eta\right)\right) - \frac{1}{2}\epsilon\eta^{*i}h(\eta, \eta) + O\left(\epsilon^2\right),$$

where η is the unperturbed reflected vector, as defined in (F.8).

Part XI
Other Topics

28 Fare, Specific Phenomena

28.1 VI Basics of Superconductivity

(see my special note about them!)

28.1.1 §53. The magnetic properties of superconductors

At temperatures close to absolute zero many metals enter a peculiar state whose most striking property, discovered by Kamerlingh Onnes in 1911, is what is called superconductivity, i.e. the complete absence of electric resistance to a steady current. Superconductivity first occurs at a definite temperature for each metal, called the superconductivity transition point, which is a second-order phase transition point.

From the standpoint of phenomenological theory, however, the change in the magnetic, not the electrical, properties is more fundamental as regards the transition to the superconducting state; as we shall see, the change in its electric properties is an inevitable consequence of its magnetic properties.

The magnetic properties of a superconducting metal can be described as follows. The magnetic field does not penetrate into the superconductor; since the mean magnetic field in the medium is, by definition, the magnetic induction $\mathbf{B}$, we can say that throughout a superconductor

$$\mathbf{B} = 0 \tag{53.1}$$

(W. Meissner and R. Ochsenfeld, 1933). This property holds whatever the conditions under which the transition to the superconducting state occurs. For example, if the metal is cooled in a magnetic field, then at the transition point the lines of magnetic force cease to enter the body.

However, it should be mentioned that the equation $\mathbf{B} = 0$ is not valid in a thin surface layer. The magnetic field penetrates into a superconductor to a depth large compared with the interatomic distances and usually of the order of 10^{-5} cm, but depending on the metal concerned and on the temperature. For the same reason, the equation $\mathbf{B} = 0$ does not hold at all in thin films of metal or small particles whose thickness or dimension is of the order of the penetration depth.

In what follows, we shall consider only thick superconductors, and neglect the penetration of the magnetic field into a thin surface layer. †

As we know, the normal component of the induction must be continuous at any boundary between two media; this condition follows from the equation div $\mathbf{B} = 0$, which is

[4]† We shall not give here the theory of phenomena related to the depth of penetration of the magnetic field into the superconductor (the Londons' theory and the Ginzburg-Landau theory). Although these are macroscopic theories. the quantities which appear in them have a clear significance only in relation to the microscopic theory. These theories are dealt with in SP2.

It must also be emphasized that the present chapter is concerned with "type I" superconductors, which include the metallic elements and stoichiometric compounds. In a "type II" superconductor (including the superconducting alloys) the Meissner effect is fully seen only in fairly weak fields. A sufficiently strong field penetrates into a type II superconductor without completely destroying its superconducting properties (see SP2, Chapter 5).

universally valid. Since $\mathbf{B} = 0$ in a superconductor, the normal component of the external field must be zero on the surface, i.e. the field outside a superconductor must be everywhere tangential to its surface, the lines of magnetic force having the surface as their envelope.
Using this result, we can easily find the forces acting on a superconductor in a magnetic field. As in §5 for an ordinary conductor in an electric field, we calculate the force per unit surface area as $\sigma_{ik}n_k$, where $\sigma_{ik} = \left(H_iH_k - \frac{1}{2}H^2\delta_{ik}\right)/4\pi$ is the Maxwell stress tensor for a magnetic field in a vacuum. Since in the present case $\mathbf{n} \cdot \mathbf{H}_e = 0$, where $\mathbf{H}_e$ is the field just outside the body, we find

$$\mathbf{F}_s = -H_e^2\mathbf{n}/8\pi, \tag{53.2}$$

i.e the surface is subject to a compression, of magnitude equal to the field energy density.
According to equation (29.4)

$$\operatorname{curl}\mathbf{B} = 4\pi\overline{\rho\mathbf{v}}/c, \tag{53.3}$$

and from the equation $\mathbf{B} = 0$ it follows that the mean current density is also zero everywhere inside the superconductor. That is, no macroscopic volume currents can flow in a superconductor. It should be emphasized that in a superconductor the conduction current cannot meaningfully be isolated from $\overline{\rho\mathbf{v}}$ as it can in an ordinary conductor. For the same reason the magnetization $\mathbf{M}$, and therefore $\mathbf{H}$, have no physical significance here.
Thus any electric current which flows in a superconductor must be a surface current. The surface current density $\mathbf{g}$ is given, according to (29.16), by the discontinuity in the tangential component of the induction at the boundary of the body. Since $\mathbf{B} = 0$ inside the superconductor. and $\mathbf{B} = \mathbf{H}$ outside it, we have

$$\mathbf{g} = c\mathbf{n} \times \mathbf{H}_e/4\pi \tag{53.4}$$

The presence of surface currents is not peculiar to superconductors. Similar currents can occur in any magnetized body, and their density is $\mathbf{g} = c\boldsymbol{n} \times (\mathbf{H_e} - \mathbf{B})/4\pi$. Since the tangential component of $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu$ is continuous on the surface of a normal (not superconducting) body, we have $\mathbf{n} \times \mathbf{H}_e = \mathbf{n} \times \mathbf{B}/\mu$, and so the expression for $\mathbf{g}$ can be written

$$\mathbf{g} = \mathbf{n} \times \mathbf{B}\frac{c}{4\pi}\frac{1-\mu}{\mu}. \tag{53.5}$$

A fundamental difference between superconductors and other bodies. however. appears when we consider the total current through a cross-section of the body. In a nonsuperconductor the surface currents always balance, and the total current is zero. This is seen from the condition (53.5) which relates the current density g to the magnetic induction inside the body, and so to the current $\mathbf{g}$ at every point on the surface. In superconductors, however, the condition (53.5) has no meaning. For the transition from the ordinary state (with magnetic permeability μ) to the superconducting state corresponds formally to the limit $B \to 0$ and $\mu \to 0$ simultaneously. The right-hand side of (53.5) then becomes indeterminate, and there is no condition which restricts the possible values of the current.
Thus we have the result that the currents flowing on the surface of a superconductor may amount to a non-zero total current. Of course. this can occur only in a multiply-connected b ody (a ring. for example), or in a simply-connected superconductor forming part of a closed circuit which includes also a source of the electromotive force needed to maintain the currents in the parts of the circuit which are not superconducting.

It is very important to note that a steady flow of current on a superconductor is possible even if no electric field is present. This means that no dissipation of energy occurs, whose replacement would involve work being done by an external field. This property of a superconductor may

also be described by saying that it has no electric resistance, a result which is thus a necessary consequence of its magnetic properties.

28.1.2 §54. The superconductivity current

Let us consider in more detail some properties of superconductors which depend on their shape.

If a superconductor is a simply-connected body, then no steady distribution of surface currents on it can exist in the absence of an external magnetic field. This can be seen as follows. The surface currents would produce in the surrounding space a static magnetic field vanishing at infinity. Like any static magnetic field in a vacuum, this field would have a potential ϕ, and by the boundary conditions on the superconductor the normal derivative $\partial\phi/\partial n$ would vanish at the surface. We know from potential theory, however, that if $\partial\phi/\partial n = 0$ on the surface of a simply-connected body and at infinity, then ϕ is a constant in all space outside the body. Thus a magnetic field of this kind cannot exist, and therefore neither can the assumed surface currents.

An external magnetic field, on the other hand, causes currents to flow on the surface of a simply-connected superconductor, and these currents can be observed through the appearance of a magnetic moment of the whole body. This "magnetization" is easily calculated for an ellipsoidal superconductor. †

Let $\mathfrak{S}$ be the external field, parallel to one of the principal axes of the ellipsoid. The relation $(1-n)\mathbf{H} + n\mathbf{B} = \mathfrak{S}$ holds for the magnetic field $\mathbf{H}$ inside a non-superconducting ellipsoid, n being the demagnetizing factor for the axis in question (see (29.14)). In a superconductor there is no physical "field" $\mathbf{H}$, as we have already shown, and so the magnetization $\mathbf{M} = (\mathbf{B}-\mathbf{H})/4\pi$ also lacks its usual significance. Nevertheless, it is here convenient to introduce $\mathbf{H}$ and $\mathbf{M}$ as formal auxiliary quantities in the calculation of the total magnetic moment $\mathscr{M} = \mathbf{M}V$ (V' being the volume of the ellipsoid), which retains its usual physical meaning. Putting $\mathbf{B} = 0$ in the superconducting ellipsoid, we find

$$\mathbf{H} = \mathfrak{S}/(1-n), \tag{54.1}$$

and

$$\mathscr{M} = -V\mathbf{H}/4\pi = -V\mathfrak{g}/4\pi(1-n). \tag{54.2}$$

In particular, for a long cylinder in a longitudinal field $n = 0$, so that $\mathbf{H} = \mathfrak{S}$ and $\mathscr{A} = -V\mathfrak{S}/4\pi$.‡ These values of $\mathscr{M}$ are the same as would be found if the body had a diamagnetic volume susceptibility of $-1/4\pi$.

The magnetic field $\mathbf{H}_e$ just outside the ellipsoid is everywhere tangential to it, and so its magnitude can be determined at once from the condition that the tangential component of $\mathbf{H}$ be continuous. Within the ellipsoid $\mathbf{H} = \mathfrak{g}/(1-n)$; taking the tangential component, we have

$$(1-n)H_e = 5\sin\theta, \tag{54.3}$$

where θ is the angle between the direction of the external field $\mathfrak{J}$ and the normal to the surface at the point considered. The greatest value of H_e occurs on the equator of the ellipsoid, and is $\mathfrak{S}/(1-n)$.

[4]† In the present section we always assume that the magnetic field does not exceed the value at which superconductivity ceases (see §55)

‡ These relations for a cylinder follow immediately from the continuity condition on $\mathbf{H}$, and are therefore valid for a cylinder of any cross-section, circular or otherwise.

It may be pointed out once more that there is no fundamental difference between the currents which cause the "magnetization" of a superconductor and those which produce the total current in it: their physical nature is the same. This important fact makes possible, in particular, an immediate determination of the gyromagnetic coefficients for any superconductor. The momentum density of the electrons which form the "magnetizing" currents differs from the current density only by a factor $m/e, e$ and m being the charge and mass of the electron. From the definition of the gyromagnetic coefficients (see (36.3)) it follows at once that for a superconductor $g_{ik} = \delta_{ik}$.

Let us now consider multiply-connected superconductors. Their properties are very different from those of simply-connected ones, mainly because it is no longer true that a steady distribution of surface currents is impossible in the absence of an external magnetic field. Moreover, the surface currents need not balance out, and may result in a steady total superconductivity current on the body, even if no external e.m.f. is applied.

Let us consider a doubly-connected body (i.e. a ring), with no external magnetic field. We shall show that the state of such a body is entirely determined if the total current J on it is given. The problem of determining the field of the ring can again be solved as a problem of potential theory, but the potential ϕ is now a many-valued function, which changes by $4\pi J/c$ when we go round any closed path interlinked with the ring (cf. §30). In order to state the problem in mathematically precise terms, we must draw some open surface which spans the ring. Then the problem is to solve Laplace's equation with the boundary conditions $\partial\phi/\partial n = 0$ on the surface of the ring, $\phi = 0$ at infinity, and $\phi_2 - \phi_1 = 4\pi J/c$ on the chosen surface, where ϕ_1 and ϕ_2 are the values of the potential on the two sides of that surface. Such a problem is known from potential theory to have a unique solution, which does not depend on the form of the chosen surface. From the field near the surface of the ring, we can in turn uniquely determine the surface current distribution.

The self-inductance of a superconducting ring is entirely determinate together with the current distribution. Here there is a marked difference from ordinary conductors, where the current distribution, and therefore the precise value of the self-inductance, depend on the manner of excitation of the current (§34). †

In §33 we introduced the concept of the magnetic flux Φ through a linear conductor circuit, and showed that $\Phi = LJ/c$, where L is the self-inductance of the conducting circuit. For a superconducting ring, the magnetic flux is meaningful for any thickness, not necessarily small, of the ring. For, since the magnetic field is tangential, the magnetic flux through any part of the surface of the ring is zero; the magnetic flux through every surface

spanning the ring is therefore the same. Moreover, the formula

$$\Phi = LJ/c \tag{544}$$

remains valid, the self-inductance L being again defined in terms of the total energy of the magnetic field of the current. The total energy of the magnetic field of the superconductor is given by the integral $\int (H^2/8\pi)\,\mathrm{d}V$, taken over all space outside the body. Again spanning the ring by a surface C, we can use the field potential and write

$$\begin{aligned}\int H^2\ \mathrm{d}V/8\pi &= -\int \mathbf{H}\cdot\operatorname{grad}\phi \mathrm{d}V/8\pi \\ &= \int \phi \operatorname{div}\mathrm{H}\ \mathrm{d}V/8\pi - \oint H_n\phi\ \mathrm{d}f/8\pi\end{aligned}$$

[4]† The self-inductance of a superconducting ring with radius b, made of wire whose cross-section is a circle with small radius a, is the same as the external part of the inductance of a non-superconducting ring, namely $L = 4\pi b[\log(8b/a) - 2]$; see §34, Problem 2. The exact solution of the problem of a current in a superconducting circular ring was first given by V. A. Fok, Physikalische Zeitschrift der Sowjetunion 1, 215, 1932.

The first term is zero, because $\operatorname{div}\mathbf{H} = 0$. The surface integral is taken over an infinitely remote surface, the surface of the ring, and the two sides of the surface C. The first two of these give zero, so that

$$\int H^2 \,\mathrm{d}V/8\pi = \oint_C H_n\,(\phi_2 - \phi_1)\,\mathrm{d}f/8\pi$$
$$= (J/2c)\oint_c H_n\,\mathrm{d}f = J\Phi/2c$$

where Φ is the magnetic flux through the surface C. Comparing this with the definition of the self-inductance, we have $J\Phi/2c = LJ^2/2c^2$, which gives (54.4).

If the ring is in an external magnetic field, the total magnetic flux Φ is composed of the flux LJ/c and the flux Φ_e of the external field. A very important property of a superconducting ring is that, even if the external field and the current vary, the magnetic flux through the ring remains constant:

$$LJ/c + \Phi_e = \Phi_0, \text{ a constant} \tag{54.5}$$

This follows immediately from the integral form of Maxwell's equation in the space outside the body:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\oint_c \mathbf{H}\cdot\,\mathrm{d}\mathbf{f} = -\oint \mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{1}$$

If the integration on the left-hand side is taken over a surface C which spans the ring, the contour of integration on the right-hand side is a line on the surface of the ring. On the surface of a superconductor, the tangential component of $\mathbf{E}$ is zero (since $\mathbf{E} = 0$ inside [a] superconductor and $\mathbf{E}_t$ is continuous on the surface). Hence the right-hand side is zero, and therefore $\mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}t = 0$.

The relation (54.5) gives the variation of the current in the ring when the external field changes. For example, if the ring is made superconducting in an external field with flux Φ_0. which is then removed, a steady current $J = c\Phi_o/L$ flows in the ring.

The constancy of the magnetic flux through a superconducting ring holds not only when the external field changes but also when the shape of the ring or its position in space is altered. † An intuitive statement of this result is that the lines of force can never intersect the surface of the superconductor, and so cannot escape from the aperture of the ring.

The above results can be immediately generalized to the case of multiply-connected superconducting bodies, including sets of rings. The state of an n-ply connected system in the absence of an external field is completely determined by the $n-1$ total currents J_a. The relation (54.5) becomes the system of equations

$$\sum_b L_{ab}J_b + \Phi_a^{(e)} = \Phi_{a0}. \tag{54.6}$$

These equations hold, not only for any external field, but also for any change in shape or relative position.

PROBLEM

Determine the magnetic moment of a superconducting disc in an external magnetic field perpendicular to its plane. ‡

Solution. The problem of a superconductor in a static magnetic field is identical with the electrostatic problem of a dielectric with permittivity $\varepsilon = 0$. Regarding the disc as the limit of a spheroid as $c \to 0$ (cf. §4, Problem 4), and using (8.10), we find with appropriate change of notation (the field $\mathfrak{y}$ being along the z-axis) $\boldsymbol{\mu} = -2a^3\mathfrak{g}/3\pi$.

28.1.3 §55. The critical field

A cylindrical superconductor in a longitudinal magnetic field has an additional magnetic energy $-\frac{1}{2}\mathfrak{S}\cdot\mathscr{M} = \mathfrak{H}^2V/8\pi$. For a non-superconducting cylinder, on the other hand, the total energy would be almost unchanged when the external field was applied (we shall neglect the slight diamagnetism or paramagnetism of a non-superconducting metal, i.e. take $\mu = 1$). Thus it is clear that, in sufficiently strong magnetic fields, the superconducting state must be thermodynamically less favourable than the normal state, and so the superconductivity must be destroyed.

The value of the longitudinal magnetic field at which the superconductivity of a cylindrical body is destroyed depends on the metal concerned and on the temperature (and pressure). This value is called the critical field $H_{\rm cr}$, and is one of the most important characteristics of a superconductor.§

When the critical field is reached, the superconductivity is destroyed throughout the cylinder, because of the uniformity of the field over the surface. In bodies of other shapes, however, the destruction of superconductivity is a more complex process, in which the volume occupied by matter in the normal state gradually extends as $\mathfrak{J}$ increases over some range (§56).

Thus, at any temperature below the transition point, the metal can exist in either the superconducting or the normal state, denoted by the suffixes s and n respectively. We denote by $\mathscr{F}_{s0}(V,T)$ and $\mathscr{F}_n(V,T)$ the total free energies of the superconducting and normal body in the absence of an external magnetic field; these quantities depend on the substance concerned and on the volume, but not on the shape, of the body. The free energy in the normal state does not change when the external field is applied, and so we omit the suffix 0 in $\mathscr{F}_{n0}$.† In the superconducting state, however, the magnetic field considerably affects the free energy.

For a superconducting cylinder, with given V and T, the free energy in a longitudinal external field $\mathfrak{S}$ is

$$\mathscr{F}_{\rm s} = \mathscr{F}_{\rm s0}(V,T) + \mathfrak{W}^2V/8\pi \tag{55.1}$$

From this we can derive all the other thermodynamic quantities. Differentiating (55.1) with respect to the volume, we find the pressure on the body:

$$P = P_0(V,T) - \mathfrak{Y}^2/8\pi \tag{55.2}$$

where $P_0(V,T)$ is the pressure (for given V and T) in the absence of the field. The equation (55.2) gives the relation between P, V and T, i.e. it is the equation of state for a superconducting cylinder in an external magnetic field. We see that the volume $V(P,T)$ in the presence of the magnetic field is the same as the volume with no magnetic field but a pressure $P+\mathfrak{S}^2/8\pi$. This result accords, of course, with formula (53.2) for the force on the surface of a superconductor in a magnetic field.

The thermodynamic potential ‡ of the superconducting cylinder is $_s = \mathscr{F}_s + PV = \mathscr{F}_{so}(V,T) + P_0V$, the volume V being expressed in terms of P and T by (55.2). Hence we can write

[4]† This statement follows at once from the relation between the induced e.m.f. and the change in the magnetic flux through the circuit when it is moved ($63).

‡ We consider this problem principally with a view to using the result elsewhere (see §95, Problem 2). For a superconducting disc the magnetic fields must in reality be very weak, since its superconductivity is very easily destroyed (see §55).

§ There is a sharp transition between the superconducting and normal states only in type I superconductors (see the footnote to §53), which are the only ones considered here. In type II superconductors, the destruction of superconductivity and the penetration of the magnetic field occur gradually over a fairly wide range of fields, so that there is no critical field in the sense here defined.

$$\mathscr{S}_s(P,T) = \mathscr{S}_{s0}\left(P + \frac{\mathfrak{H}^2}{8\pi}, T\right) \tag{55.3}$$

where $\}_{s0}(P,T)$ is the thermodynamic potential in the absence of the field. Differentiating this equation with respect to T and to P, we obtain analogous relations for the entropy and the volume:

$$\mathscr{S}_{\mathrm{s}}(P,T) = \mathscr{S}_{\mathrm{s0}}\left(P + \frac{\mathfrak{W}^2}{8\pi}, T\right) \tag{((55.41}$$

$$V_{\mathrm{s}}(P,T) = V_{\mathrm{s0}}\left(P + \frac{\mathfrak{Y}^2}{8\pi}, T\right) \tag{55.5}$$

We can now write down the condition which determines the critical field. The transition of the cylinder from the superconducting to the normal state occurs when g_n becomes less than $\mathscr{P}_s$ (for given P and T). At the transition point we have $_s = _n$, i.e.

$$_{\mathrm{s0}}\left(P + \frac{H_{\mathrm{cr}}^2}{8\pi}, T\right) = _n(P,T) \tag{((55.61}$$

This is an exact thermodynamic relation.§ The change in the thermodynamic potential in the magnetic field is usually a small correction to $\}_{s0}(P,T)$. We can then expand the lefthand side of equation (55.6) in series, taking the first two terms:

$$\wp_{\mathrm{s0}}(P,T) + \frac{H_{\mathrm{cr}}^2}{8\pi} V_{\mathrm{s0}}(P,T) = \wp_n(P,T). \tag{55.7}$$

where $V_{s0}(P,T) = \partial g_{s0}(P,T)/\partial P$ is the volume of the superconducting cylinder in the absence of the field. Thus, in this approximation, we can say that the thermodynamic potential per unit volume is greater by $H_{\mathrm{cr}}{}^2/8\pi$ in the normal state than its value in the superconducting state.

We denote by $T_{\mathrm{cr}} = T_{\mathrm{cr}}(P)$ the transition temperature in the absence of the magnetic field. The transition concerned is a second-order phase transition. Hence, in particular, $H_{\mathrm{cr}}(T)$ must tend continuously to zero at $T = T_{\mathrm{cr}}$. We know from the general theory of second-order phase transitions † that the change in the thermodynamic potential near the transition point is proportional to the square of $T - T_{\mathrm{cr}}$. We can therefore deduce from (55.7) that the critical field in this temperature range varies as the temperature difference $T - T_{\mathrm{cr}}$:

$$H_{\mathrm{cr}} = \text{constant} \times (T_{\mathrm{cr}} - T)\,. \tag{55.8}$$

Differentiating both sides of equation (55.6) with respect to temperature (for given pressure), remembering that H_{cr} is a function of T, and using (55.4), (55.5), we have

$$\mathscr{S}_n - \mathscr{I}_s = -V_s \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{H_{\mathrm{cr}}^2}{8\pi}\right) \tag{55.9}$$

where all the quantities $\mathscr{S}_n, \mathscr{S}_s, V_s$ are for the point of transition between the two states of the body (i.e. for $H = H_{\mathrm{cr}}$). Multiplying by T, we obtain the heat of the transition:

[4]† By definition, the "total" quantities $\mathscr{F}$ and $g\circ$ do not include the energy of the magnetic field that would exist in the absence of the body.

‡ Here defined as in §12.

§ We give here calculations more accurate than is usually necessary, so as to exhibit more clearly the interrelation between the various thermodynamic quantities.

$$Q = T(\mathscr{S}_n - \mathscr{S}_s) = -\frac{V_s H_{\rm cr} T}{4\pi}\left(\frac{\partial H_{\rm cr}}{\partial T}\right)_P \tag{55.10}$$

(W. H. Keesom, 1924). When the transition occurs at $T = T_{\rm cr}$ (i.e. in the absence of the magnetic field), the quantity Q vanishes with $H_{\rm cr}$, in accordance with the fact that we have a second-order phase transition. A transition at $T < T_{\rm cr}$ (in a magnetic field) involves absorption or evolution of heat, i.e. it is a first-order phase transition. In practice, $H_{\rm cr}$ increases monotonically with decreasing temperature throughout the range from $T_{\rm cr}$ to lero. Hence the derivative $\partial H_{\rm cr}/\partial T$ is always negative, and we see from (55.10) that $Q > 0$, le. heat is absorbed in the (isothermal) transition from the superconducting to the normal sate.

As $T \to 0$, the entropy of the whole body must vanish, by Nernst's theorem. Hence it follows from (55.9) that $\partial H_{\rm cr}/\partial T = 0$ for $T = 0$. i.e. the curve of $H_{\rm cr}(T)$ intersects the $\rm H_{cr}$-axis at right angles.

We may differentiate the difference $\mathscr{S}_n - \mathscr{S}_s$(55.9) again with respect to temperature, and again use equations (55.4), (55.5). Since also $(\partial S/\partial P)_T = -(\partial V/\partial T)_P$, the result is

$$\frac{\partial \mathscr{S}_n}{\partial T} - \frac{\partial \mathscr{S}_s}{\partial T} = -V_s \frac{\partial^2}{\partial T^2}\left(\frac{{H_{\rm cr}}^2}{8\pi}\right) - 2\frac{\partial V_{\rm s}}{\partial T}\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{{H_{\rm cr}}^2}{8\pi}\right) - \frac{\partial V_s}{\partial P}\left[\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{{H_{\rm cr}}^2}{8\pi}\right)\right]^2. \tag{55.11}$$

Multiplying both sides of this equation by T, we obtain the difference of the specific heats (at constant pressure) of the two phases. The terms involving the thermal-expansion coefficient and the compressibility are usually very small in comparison with the remaining terms; neglecting them, we have

$$\mathscr{C}_s - \mathscr{C}_n = \frac{V_s' T}{4\pi} H_{\rm cr}\frac{\partial^2 H_{\rm cr}}{\partial T^2} + \frac{V_s T}{4\pi}\left(\frac{\partial H_{\rm cr}}{\partial T}\right)^2 \tag{55.12}$$

This formula could also be obtained by direct differentiation of the approximate relation (55.7). In this approximation the difference between V_s and V_{s0}, and between $\mathscr{C}_s$ and $\mathscr{C}_{s0}$. may be neglected.

For $T = T_{\rm cr}$, the first term in (55.12) is zero, and we obtain the following formula, which relates the change in specific heat in the second-order phase transition (in the absence of an external magnetic field) to the temperature dependence of $H_{\rm cr}$:

$$\mathscr{C}_s - \mathscr{C}_n = \frac{V_s T_{\rm cr}}{4\pi}\left(\frac{\partial H_{\rm cr}}{\partial T}\right)^2 \tag{55.13}$$

(A. J. Rutgers, 1933). Hence we see that in this case $\mathscr{C}_s > \mathscr{C}_n$. As the temperature falls, i.e. when the superconductivity is destroyed by the magnetic field, the difference $\mathscr{C}_s - \mathscr{C}_n$ changes sign. because the difference $\mathscr{S}_n - \mathscr{S}_s$ is zero for $T = 0$ and for $T = T_{\rm cr}$, and must have a maximum in between.

We can similarly discuss effects related to the change in volume in the transition. To do so, we differentiate equation (55.6) with respect to pressure (for given temperature), H_c. being a function of P. This gives

$$V_n = V_s \frac{\partial}{\partial P}\left(P + \frac{H_{\rm cr}^2}{8\pi}\right)$$

or

[4†] For the superconductivity transition, the Landau theory may be regarded as valid with no practical [3] strictions, up to the transition point itself; see $SP2, 845$.

$$V_n - V_s = \frac{V_s H_{\rm cr}}{4\pi}\frac{\partial H_{\rm cr}}{\partial P} \tag{55.14}$$

which determines the change in volume at the transition point. † For $T = T_{\rm cr}$ this difference is zero, like the entropy difference. The transition at temperatures $T < T_{\rm cr}$, however, is accompanied by a change in volume, which may be of either sign, depending on the sign of the derivative $(\partial H_{\rm cr}/\partial P)_T$. For $T = T_{\rm cr}$ there is no change in volume, but the compressibility is discontinuous; the discontinuity is easily found by differentiating equation (55.14). It may be noted that, if we substitute in (55.14)

$$\left(\frac{\partial H_{\rm cr}}{\partial P}\right)_T = -\left(\frac{\partial H_{\rm cr}}{\partial T}\right)_P \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_{H_{\rm cr}}$$

(obtained by differentiating the equation $H_{\rm cr}(P,T) = \text{constant}$), we obtain the Clapeyron-Clausius equation

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_{H_{\rm cr}} = \frac{Q}{T\,(V_n - V_s)} \tag{\prime}$$

where the derivative $(\partial P/\partial T)_{\rm H_{cr}}$ defines the change in pressure needed to keep the applied external field critical when the temperature changes.

The physical significance of the critical field $H_{\rm cr}$ is much wider than would appear from ts definition in terms of the behaviour of a superconducting cylinder. The equation $H = H_{\rm cr}$ is a condition of equilibrium which must be fulfilled at every point of a surface separating normal and superconducting phases in the same body. This is evident from the following simple arguments. If a cylinder is in a longitudinal magnetic field $H_{\rm cr}$, then both the boundary conditions on the magnetic field and the conditions of thermodynamic stability are satisfied for all states in which an interior cylindrical part is in the superconducting state and the rest of the body is in the normal state, and the field at the boundary between these parts is $H_{\rm cr}$. Thus the surface of separation, on which $H = H_{\rm cr}$, is in neutral equilibrium with respect to its location. This is a characteristic property of phase equilibrium.

In a variable magnetic field, the boundary between the superconducting and normal phases changes its position. The kinetics of this process is very complex, and its discussion requires a simultaneous solution of the equations of electrodynamics and of thermal conduction, taking into account the heat evolved in the phase transition. We shall not pause to carry out this investigation, † but merely give the boundary condition which must be satisfied at the moving boundary between the normal and superconducting phases.

To derive this condition we take a coordinate system K' moving with the velocity v of the boundary between the phases. By the formulae for transformation of fields, the electric field $\mathbf{E}'$ in the system K' is related to the fields $\mathbf{E}$ and $\mathbf{B}$ in a fixed system K by $\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \boldsymbol{v} \times \mathbf{B}/c$; see (63.1). Since the boundary is at rest in the system K', the usual condition of continuity of the tangential component of $\mathbf{E}'$ holds, i.e. $\mathbf{n} \times \mathbf{E}' = \mathbf{n} \times \mathbf{E} - v\mathbf{B}/c$ must be continuous, where $\mathbf{n}$ is a unit vector normal to the surface, in the direction of the velocity $\mathbf{v}$. In the superconducting phase $\mathbf{E} = \mathbf{B} = 0$, and in the normal phase $B = H_{\rm cr}$ at the boundary. We therefore find that a tangential electric field appears on the moving boundary, its direction being perpendicular to that of the magnetic field and its magnitude being

$$E = vH_{\rm cr}/c \tag{55.16}$$

[4]† This difference must of course be distinguished from the change in volume (magnetostriction) of $t^{\rm th}$ superconductor when the field changes from zero to $H_{\rm cr}$. This can be found from (55.5): $V_s(P,T) - V_{s0}\left(P.^{\uparrow} \cong \left({H_{\rm cr}}^2/8\pi\right)(\partial V_s/\partial P)_r\right.$.

28.1.4 56. The intermediate state

If a superconducting body of any shape is in an external magnetic field $\mathfrak{J}$ which is gradually increased, a stage is finally reached where the field at some point on the surface of the body becomes equal to the critical field H_{cr}, but $\mathfrak{W}$ itself is still less than H_{cr}. For Example, on the surface of an ellipsoid placed in a field $\mathfrak{W}$ parallel to one of its axes, the greatest value of the field occurs on the equator (see (54.3)), and is equal to H_{cr} when $\oint_3 = H_{\text{cr}}(1-n)$.
When $\mathfrak{y}$ increases further, the body cannot remain entirely in the superconducting state.
Hor can it pass entirely into the normal state, because then the field would become $\mathfrak{S}$ - verywhere. Hence the superconductivity must be lost only in part.
At first sight one might imagine that this process occurs as follows. As $\mathfrak{S}$ increases, the

superconductivity is lost in a gradually increasing part of the body, while a gradually decreasing part remains superconducting, and the whole body becomes normal when $\mathfrak{S} = H_{\text{cr}}$. It is a easy to see, however, that such states of the body are thermodynamically unstable. On the surface separating the superconducting and normal phases the magnetic field is, as we know, tangential to the surface, and its magnitude is H_{cr}. That is, the lines of force are on the surface. If the boundary is convex to the normal phase, the equipotential surfaces of the field, being at right angles to the lines of force, will diverge into the normal region, as shown by dashed lines in Fig. 33a. The field decreases, however, in the direction in which the equipotential surfaces diverge, so that we should have $H < H_{\text{cr}}$ in the shaded region, contrary to the supposition that this region is in the normal state. If, on the other hand, the boundary of the superconducting phase is concave, then the lines of force on that boundary must have a bend on the free surface of the superconducting region, to which the field is tangential (at the point O, in Fig. 33b). At a bend in a line of force, however, the field becomes infinite. which again contradicts the boundary conditions at the surface of the superconductor.

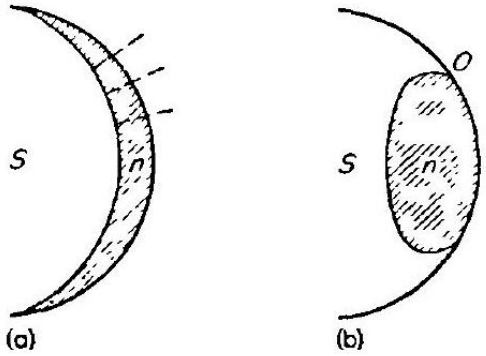


Fig. 33

The above arguments represent essentially another form of the situation which leads to the domain structure of ferroelectrics and ferromagnets. Here also the conditions of thermodynamic stability have the result that. if the magnetic field reaches the value H_{cr} at even one point on the surface, the body is divided into numerous parallel alternating thin layers of normal and superconducting matter (L. D. Landau, 1937). This state of the superconductor is called the intermediate state. As $\mathfrak{S}$ increases, the total volume of the [1] normal layers increases, and when $\mathfrak{y} = H_{\text{cr}}$ the body becomes entirely normal.

In general, a body of arbitrary shape need not be entirely in the intermediate state. There may also be regions in the purely superconducting and purely normal states; these must be

[4]† See I. M Lifshitz, Zhurnal ksperimental'no i teoretichesko fiziki 20,834, 1950; Doklady Akademii Nauk
[1] $S_{SR}90, 363, 1953$.

separated by the region which is in the intermediate state. A simpler case is the ellipsoin already considered. In a field parallel to the axis the intermediate state occurs in the range

$$H_{\rm cr}(1-n) < \mathfrak{M} < H_{\rm cr}, \tag{156.}$$

and the whole volume of the ellipsoid is in this state. For a sphere (for example), $n = \frac{1}{3}$. and the intermediate state exists in the range $\frac{2}{3}H_{\rm cr} < \mathfrak{S} < H_{\rm cr}$. For a cylinder in a transvers field, $n = \frac{1}{2}$, and the corresponding range is $\frac{1}{2}H_{\rm cr} < \mathfrak{S} < H_{\rm cr}$. For a cylinder 1^8 longitudinal field, $n = 0$; there is no intermediate state, and the superconductivity is total [13] destroyed at $\mathfrak{S} = \boldsymbol{H_{\rm cr}}$. Finally, for a flat plate in a transverse field $n = 1$, and it is in the intermediate state for any field $\mathfrak{S} < H_{\rm cr}$.

The intermediate state can also be described in an averaged manner if the thickness of the regions under consideration is large compared with the layer thickness (R. E. Peierls, and F. London, 1936). In this description it is assumed that there is inside the body a magnetic induction $\overline{\mathbf{B}}$ which varies from zero in the purely superconducting state to $H_{\rm cr}$ in the purely normal state. If we ascribe a non-zero induction to the matter in the intermediate state, we must also ascribe to it a definite magnetic "field" $\mathbf{H}$. To determine the relation between these quantities, we must consider the true structure of the intermediate state.

The magnetic field in a normal layer at its boundary with a superconducting layer is $H_{\rm cr}$, and by virtue of the assumed smallness of the layer thickness we can suppose that the field has this value everywhere in the normal layers. In the superconducting layers $\mathbf{B} = 0$. Hence, averaging the magnetic field over a volume large compared with the layer thickness, we find that the mean induction $\bar{B} = x_n H_{\rm cr}$, where x_n is the fraction of the volume that is in the normal state. Next, we determine the thermodynamic potential per unit volume of the body, taking as zero the value for the purely superconducting state. In the absence of a magnetic field, unit volume of the normal phase has an excess thermodynamic potential $H_{\rm cr}^2/8\pi$.† When a magnetic field is present, a further $H_{\rm cr}^2/8\pi$ is added as magnetic energy, giving altogether ${H_{\rm cr}}^2/4\pi$. The mean thermodynamic potential per unit volume in the intermediate state is therefore

$$\Phi = x_n H_{\rm cr}^2/4\pi = H_{\rm cr}\bar{B}/4\pi \tag{56.2}$$

The relation between $\overline{\mathbf{B}}$ and $\overline{\mathbf{H}}$ is obtained from the general thermodynamic relation $\mathbf{H} = 4\pi\partial\Phi/\partial\mathbf{B}$. In the present case we find that $\overline{\mathbf{H}}$ is parallel to $\overline{\mathbf{B}}$ and its magnitude is

$$\bar{H} = H_{\rm cr}, \tag{56.3}$$

i.e. it is independent of the induction.

If the relation between $\bar{B}$ and $\bar{H}$ is shown graphically (Fig. 34), then the segment OA of the axis of abscissae corresponds to the superconducting state, and the line $BC(\bar{B} = \bar{H})$ to the normal state. The vertical line $AB\left(\bar{H} = H_{\rm cr}\right)$ corresponds to the intermediate state.

Let $\mathbf{n}$ be a unit vector in the direction of the lines of force of the averaged magnetic field. Putting $\overline{\mathbf{H}} = H_{\rm cr}\mathbf{n}$ and substituting in the equation curl $\overline{\mathbf{H}} = 0$ (which holds in the absence of a volume current), we find that $\operatorname{curl}\mathbf{n} = 0$. Since $\mathbf{n}^2 = 1$, we have

$$\operatorname{grad}\mathbf{n}^2 = 2(\mathbf{n}\cdot\operatorname{grad})\mathbf{n} + 2\mathbf{n}\times\operatorname{curl}\mathbf{n} = 0,$$

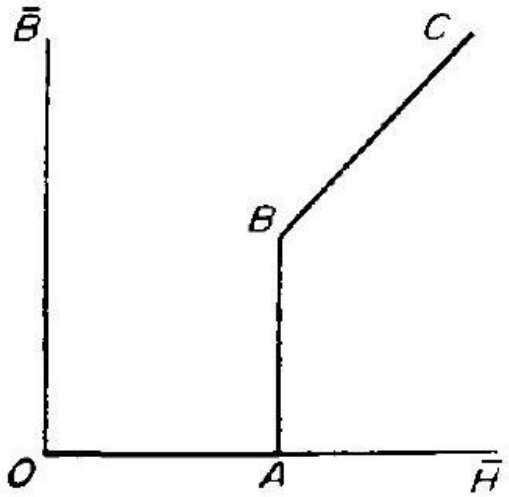


Fig. 34

and therefore $(\mathbf{n} \cdot \mathbf{grad})\mathbf{n} = 0$. This means that the direction of the vector $\mathbf{n}$ is constant. Thus the lines of force of the mean field are straight lines.

Let us apply these results to an ellipsoid in the intermediate state. For a uniform field inside the ellipsoid, the relation $(1-n)\bar{H} + n\bar{B} = \mathfrak{j}$ holds, whatever the relation between B and $\mathbf{H}$. Putting $\bar{H} = H_{\rm cr}$, we have

$$\bar{B} = \frac{\mathfrak{W}}{n} - \frac{1-n}{n} H_{\rm cr}. \tag{56.4}$$

Thus the mean induction in the ellipsoid varies linearly with the external field, from zero when $\mathfrak{S} = (1-n)H_{\rm cr}$ to $H_{\rm cr}$ when $\mathfrak{S} = H_{\rm cr}$.

We may also write down an expression for the total thermodynamic potential $\overline{\mathscr{S}p}$ of an ellipsoid in the intermediate state. To do so, we start from the general formula

$$\tilde{\boldsymbol{g}} = \int \left[\Phi - \frac{\mathbf{H} \cdot \mathbf{B}}{8\pi} - \frac{(\mathbf{B} - \mathbf{H}) \cdot \mathfrak{Y}}{8\pi} \right] \mathrm{d}V'$$

(cf. (32.7)), which is also valid whatever the relation between $\mathbf{B}$ and $\mathbf{H}$. Substituting Φ, H and B from (56.2)-(56.4), we obtain

$$\hat{\mathscr{S}}_t = \frac{V}{8\pi} \left[H_{\rm cr}^2 - \frac{1}{n} \left(H_{\rm cr} - \mathfrak{H} \right)^2 \right], \tag{56.5}$$

↓ being the volume of the ellipsoid; $\tilde{\mathscr{S}}_t$ is taken to be zero in the purely superconducting state of the ellipsoid, in the absence of a magnetic field. For a superconducting ellipsoid in an external field $\mathfrak{S}$ we have

$$\hat{\mathscr{S}}_s = -\frac{1}{2} \mathscr{M} \cdot \mathfrak{H} = V' \mathfrak{Y}^2 / 8\pi (1-n), \tag{56.6}$$

in accordance with (32.6) and (54.2). For $\mathfrak{S} = H_{\rm cr}(1-n)$, the thermodynamic potential and its first derivative with respect to the temperature are continuous; in this sense, the transition from the superconducting to the intermediate state is analogous to a secondorder phase transition. †

[4]† Here we neglect all magnetostriction effects. Instead of the change in the thermodynamic potential we could therefore speak of the (equal) change in the free energy.

It should be emphasized that the averaged description of the intermediate state given here is in reality not very accurate, because of the comparatively large thickness of the layers. For the same reason, this description fails to reproduce certain phenomena related to the properties of the layer structure. These include the fact that the transition from the superconducting to the intermediate state actually occurs only when $\mathfrak{S}$ slightly exceeds $(1-n)H_{\rm cr}$. The reason for this "delay" is as follows. The passage into the intermediate state occurs when that state becomes thermodynamically stable, i.e. when $\tilde{\mathscr{S}}_t = \hat{\mathscr{S}}_s$. The layet structure, however, has not only the "volume" energy (56.5) allotted to it in the averaged description but also additional energy resulting from the existence of the boundarie [5] between the layers and their change in shape near the surface of the body. This results in some displacement of the transition point towards stronger fields.

As mentioned in the footnote to §53, this chapter deals with type I superconducto [5] Nevertheless, a minor comment may be made here concerning the thermodynamics of the

"magnetization curve" for a cylindrical type II superconductor. Such bodies are characterized by a gradual penetration of the magnetic field into them. For example, with a long cylindrical superconductor in a longitudinal magnetic field $\mathfrak{H}$, the penetration begins when the field reaches some value $H_{\rm cr,1}(T)$, and the superconductor changes continuously into the normal state only at a field $H_{\rm cr,2} > H_{\rm cr,1}$ ·†
We start from the relation $\partial\tilde{\rho}/\partial H = -\mathscr{M}$; cf. (32.4). Integrating both sides over H from 0 to $H_{\rm cr,2}$, we find

$$-\int_0^{H_{\rm ct,2}} \mathscr{M}\ \mathrm{d}\mathfrak{S} = \mathscr{S}_n - \mathscr{S}_{\rm s0},$$

where $\boldsymbol{y}_{so}$ relates to the superconductor in the absence of the field, and $\boldsymbol{g}_n$ is independent of the external field (so that the tilde can be omitted from both). In the field range $0 \leqslant H \leqslant H_{\rm cr\ ,1}$, the field does not penetrate into the cylinder, whose magnetic moment is therefore $\mathscr{M} = -V\mathfrak{S}/4\pi$. Separating this part of the integral gives

$$\int_{H_{\rm cr,1}}^{H_{\rm cr,2}} \mathscr{M}\ \mathrm{d}\mathfrak{S} = -\left({}_n - {}_{s0}\right) + \frac{V{H_{\rm cr,1}}^2}{8\pi}.$$

If $H_{\rm cr}$ is defined as before, but purely formally, for a type II superconductor: ‡

$${}_n - {}_{s0} = VH_{\rm cr}^2/8\pi,$$

the relation obtained may be written in the final form

$$\int_{H_{\rm cr,1}}^{H_{\rm cr,2}} \mathscr{M}\ \mathrm{d}\mathfrak{Y} = -\frac{V}{8\pi}\left({H_{\rm cr}}^2 - {H_{\rm cr.1}}^2\right). \tag{56.7}$$

PROBLEM

Determine the heat capacity of an ellipsoid in the intermediate state.
Solution. The entropy, and thence the heat capacity, are found by differentiating the thermodynamic potential (56.5) with respect to temperature. Neglecting the terms containing the thermal-expansion coefficient, we obtain

$$\mathscr{C}_t - \mathscr{C}_s = \frac{VT}{4\pi n}\left[(1-n)\left(H_{\rm cr}'^2 + H_{\rm cr}H_{\rm cr}''\right) - \mathfrak{S}H_{\rm cr}''\right],$$

[4]† It is therefore not surprising that $\mathscr{L}_{\mathfrak{t}}(\mathfrak{S}) < \mathscr{L}_{\mathfrak{s}}(\mathfrak{S})$ on both sides of the point $\mathfrak{S} = H_{\rm cr}(1-n)$. In a second order phase transition, neither phase exists beyond the transition point, and hence it is meaningless to compari the thermodynamic potentials of the two phases.

the prime denoting differentiation with respect to T : $\mathscr{C}_s$ is the heat capacity of the body in the superconducting state, whose slight dependence on $\mathfrak{S}$ we here neglect. Hence it follows that, as $\mathfrak{S}$ varies (at constant temperature), the heat capacity changes discontinuously at the point $\mathfrak{S} = (1-n)H_{\rm cr}$ from $\mathscr{C}_{\rm s}$ to

$$\mathscr{C}_s + \frac{VT(1-n)}{4\pi n} H'^2_{\rm cr'},$$

and thereafter varies linearly with $\mathfrak{S}$, reaching the value

$$\mathscr{C}_s - \frac{VT}{4\pi}\left(H'^2_{\rm cr} + H_{\rm cr}H''_{\rm cr}\right) + \frac{VT}{4\pi n}H'^2_{\rm cr} = \mathscr{C}_n + \frac{VT}{4\pi n}H'^2_{\rm cr}$$

or $\mathfrak{H} = H_{\rm cr}$, whence it falls discontinuously to $\mathscr{C}_n$.

† See $SP2, \$847, 48$. The state of the superconductor in the field range between $H_{\rm cr,1}$ and $H_{\rm cr.2}$ is called the mixed state. It must be emphasized that this is not the same as the intermediate state of a type I superconductor. In the mixed state, the magnetic field penetrates into the sample in the form of what are called vortex filaments. ‡ The value of $\boldsymbol{H}_{\rm cr}$ lies between those of $\boldsymbol{H}_{\rm cr,1}$ and $\boldsymbol{H}_{\rm cr,2}$. It has, however, no distinctive property in a type II "perconductor.

28.1.5 §57. Structure of the intermediate state

The shape and size of the normal and superconducting layers in the intermediate state are governed by the conditions of thermodynamic equilibrium for the body as a whole, in the same manner as was the shape of the domains in a ferromagnet (§44). As there, the resulting thickness of the layers is determined by two oppositely acting factors. The surface tension at the normal and superconducting phase boundaries tends to reduce the number of layers, i.e. to increase their thickness. The energy of emergence of the layers at the free surface of the body has the opposite tendency. The layer thickness increases with the size of the body, and consequently (for the same reasons as in the case of ferromagnetic domains) the layers must ultimately undergo branching near the surface. †

The problem of determining the shape and size of unbranched layers in the intermediate state in a flat plate can be solved exactly. We shall do this on the assumption that the external field $\mathfrak{S}$ is perpendicular to the plate (L. D. Landau, 1937).

The layers are parallel to the field, except near the surface of the plate. The lines of magnetic force (shown dashed in Fig. 35, p. 196) pass only through the normal layers, and the boundaries of the superconducting layers are also lines of force, since $B_n = 0$ there. Since also $H = H_{\rm cr}$ on the boundary between the normal and superconducting phases, the conditions at the boundaries of a superconducting layer are

$$\left.\begin{array}{lll} \text{on } BC & H_x & = 0, \\ \text{on } BA \text{ and } CD & H_x^2 + H_y^2 & = H_{\rm cr}^2, \end{array}\right\} \tag{57.1}$$

the coordinate axes being taken as shown in Fig. 35. Far from the plate, the field $\mathbf{H}$ must be the same as the external field $\mathfrak{S}$, i.e.

$$\text{for } x \to -\infty \quad H_x = \mathfrak{H}, \quad H_y = 0. \tag{57.2}$$

We use the scalar and vector potentials: $H_x = -\partial\phi/\partial x = \partial A/\partial y, H_y = -\partial\phi/\partial y = -\partial A/\partial x$, and the complex potential $w = \phi - iA$ (cf. §3).

On a line of force A = constant. We put $A = 0$ on the line of force which reaches O and then branches into OCD and OBA, forming the boundary of one superconducting layer. The difference between the values of A at the boundaries of two successive superconducting layers is equal to the magnetic flux across the segment $a = a_s + a_n$, namely $\mathfrak{S}a$. Hence the value of

A at the boundary of any superconducting layer is an integral multiple of $\mathfrak{S}a$. Using also the "complex field" $\eta = H_x - iH_y = -\mathrm{d}w/\mathrm{d}z, z = x + iy$, we can write the conditions (57.1) as

$$\left.\begin{array}{ll} \text{on } BC & \text{re } \eta = 0, \\ \text{on } BA \text{ and } CD & |\eta| = H_{\mathrm{cr}}. \end{array}\right\} \tag{57.3}$$

We introduce a new variable

$$\zeta = \exp(-2\pi w/\mathfrak{y}a) - 1 \tag{57.4}$$

and regard η as a function of ζ.ζ is real on all boundary lines of force and on their continuations beyond the plate: $\zeta = \exp(-2\pi\phi/\mathfrak{g}a) - 1$.

Since ϕ is determined apart from a constant, its value at any one point can be chosen arbitrarly. Let $\phi = 0$ at O. Then $\zeta = 0$ there also. On the limiting line of force considered, far from the plate, $\zeta = -1$ (since for $x \to -\propto$ we have $\phi \to -\mathfrak{y}x \to +\infty$). The value of ζ at B or C, where the line of force enters the plate, is ζ_0, say. On CD and BA, ζ varies from $\zeta_{010} \propto$ Then the conditions (57.1) and (57.3) can be written

$$\left.\begin{array}{lll} \text{for } \zeta = -1 & & \eta = \mathfrak{H}, \\ & \text{for } 0 < \zeta < \zeta_0 & \text{re}\,\eta = 0, \\ \text{for } \zeta_0 < \zeta & & |\eta| = H_{\mathrm{cr}}. \end{array}\right\} \tag{57.6}$$

The function $\eta(\zeta)$ must, furthermore, be everywhere finite.
The conditions (57.6).are satisfied by the function

$$\eta = H_{\mathrm{cr}}\left[\sqrt{\left(1 - \frac{\zeta_0}{\zeta}\right)} - \sqrt{\left(-\frac{\zeta_0}{\zeta}\right)}\right]. \tag{57.7}$$

For real negative ζ the two roots are real, and are taken with the signs shown. For $0 < \zeta < \zeta_0$ both are imaginary, and we take

$$\eta = \mp iH_{\mathrm{cr}}\left[\sqrt{\frac{\zeta_0}{\zeta}} - \sqrt{\left(\frac{\zeta_0}{\zeta} - 1\right)}\right]$$

with the minus and plus signs on OC and OB respectively. For $\zeta > \zeta_0$

$$\eta = H_{\mathrm{cr}}\left[\sqrt{\left(1 - \frac{\zeta_0}{\zeta}\right)} \mp i\sqrt{\frac{\zeta_0}{\zeta}}\right],$$

with the minus and plus signs on CD and BA respectively. The value of ζ_0 is found from the condition (57.5), and is

$$\zeta_0 = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{h} - h\right)^2, \tag{57.8}$$

where $h = \mathfrak{H}/H_{\mathrm{cr}}$.
The shape of the layer, i.e. the equation of the limiting line of force, is obtained by Integrating the relation $\mathrm{d}z = -\mathrm{d}w/\eta$ over real ζ :

$$z = -\int \frac{\mathrm{d}w}{\eta} = \frac{ah}{2\pi}\int \frac{\mathrm{d}\zeta}{\eta(\zeta + 1)}.$$

Substituting $\eta(\zeta)$, taking real and imaginary parts, and choosing appropriately the constants of integration, we obtain the following parametric equations of the line CD :

$$x = \frac{ah}{2\pi}\int_{\zeta_0}^{\zeta}\sqrt{\left(1-\frac{\zeta_0}{\zeta}\right)}\frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta+1}$$
$$= \frac{ah}{\pi}\left[\cosh^{-1}\sqrt{\frac{\zeta}{\zeta_0}} - \sqrt{(\zeta_0+1)}\cosh^{-1}\sqrt{\frac{\zeta\,(\zeta_0+1)}{\zeta_0(\zeta+1)}}\right] \tag{57.9}$$
$$y = Y - \frac{ah}{2\pi}\int_{\zeta}^{\infty}\sqrt{\frac{\zeta_0}{\zeta}\frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta+1}} = Y - \frac{ah}{\pi}\sqrt{\zeta_0}\left(\frac{1}{2}\pi - \tan^{-1}\sqrt{\zeta}\right)$$

Where $Y = \frac{1}{2}a_s$ is the value of y for $x \to \infty$; see Fig. 35.

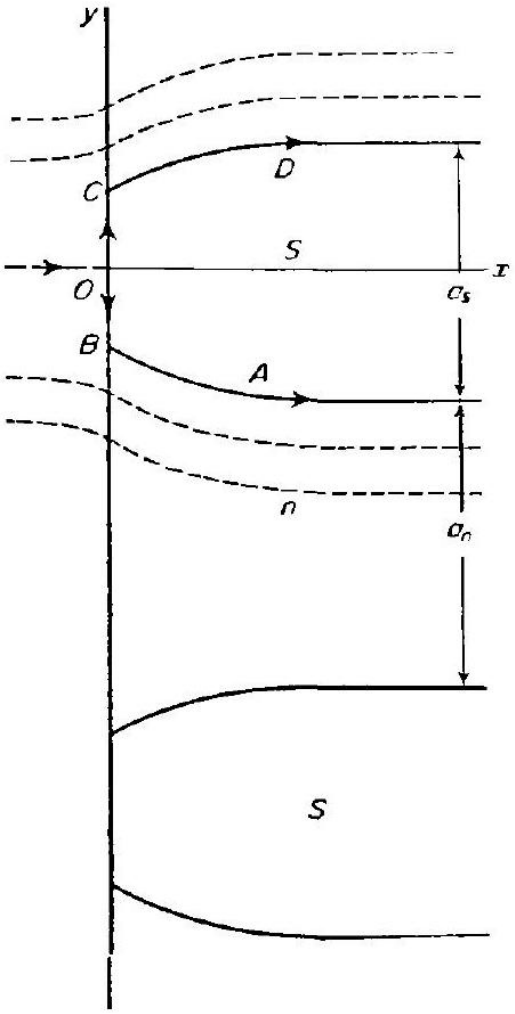


Fig. 35

The period a of the layer structure is related to the thicknesses a_s and a_n of the superconducting and normal layers by $a = a_s + a_n, a\mathfrak{S} = a_n H_{\mathrm{cr}}$. The latter equation follows from the continuity of the magnetic flux, which passes entirely through normal layers. Hence $a_s = a(1-h), a_n = ah$.

The period a is determined by the condition that the total thermodynamic potential of the plate be a minimum. The existence of surface tension at the boundaries between the normal and superconducting phases gives a term

$$\rho_1 = 2lH_{\mathrm{cr}}^2\Delta/8\pi a \tag{57.10}$$

in the thermodynamic potential per unit area of the surface of the plate. Here l is the thickness of the plate, and the surface-tension coefficient is written as $H_{\rm cr}{}^2\Delta/8\pi$, where Δ has the dimensions of length. In calculating this part of the energy we can, of course, neglect the curvature of the layers near the surface of the plate.

The energy of emergence of the layers at the surface of the plate can be written as the sum of two parts. First, the increase in the volume of the normal layers as compared with the volume they would occupy if they were everywhere plane-parallel gives an additional energy

$$_2 = \frac{4}{a}\int_0^\infty (Y-y)\mathrm{d}x\frac{H_{\rm cr}^2}{8\pi} \tag{57.11}$$

where the factor 4 takes into account the presence of four angles (such as B and C in Fig. 35) on the two sides of each of the $1/a$ superconducting layers.
Second, the emergence of the layers at the surface of the plate changes the energy of the s) stem in the external field, i.e. the energy $-\frac{1}{2}\mathscr{M}\cdot\mathfrak{S}$. The magnetic moment of the plate is due to currents on the surfaces of the superconducting layers. When the tangential component of the induction changes discontinuously from H to zero, the surface current density is $g=\pm cH/4\pi$. Hence the magnetic moment per unit length in the z-direction and per boundary surface of the superconducting layer is

$$-\int_{OCD}\frac{H}{4\pi}y\ \mathrm{d}s, \qquad \mathrm{d}s=\sqrt{\left(\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2\right)}.$$

If the layer did not emerge at the surface, there would be no segment OC, and on CD we should have $y=\mathrm{Y}$. Hence the excess magnetic moment for each of the four angles is

$$-\int_{OCD}\frac{H}{4\pi}y\ \mathrm{d}s+\int_0^\infty\frac{H_{\rm cr}}{4\pi}Y\ \mathrm{d}x.$$

Accordingly, the excess energy is

$$\begin{aligned}\mathscr{P}_3 &= -\frac{1}{2}\mathfrak{S}\cdot\frac{4}{a}\left[\int_0^\infty\frac{H_{\rm cr}}{4\pi}\mathrm{Y}\mathrm{d}x-\int_{OCD}\frac{H}{4\pi}y\mathrm{ds}\right]\\ &= \frac{\mathfrak{S}}{2\pi a}\left[H_{\rm cr}\int_{CD}(-\mathrm{Y}\mathrm{d}x+y\mathrm{ds})+\int_{OC}H_y\ \mathrm{d}y\right].\end{aligned} \tag{57.12}$$

The coordinates x and y, expressed in terms of ζ, are proportional to a. Hence all the integrals in $_1+_2$ are proportional to a^2, and this part of the thermodynamic potential is therefore proportional to a. The sum $g_1+g_2+g_3$ is therefore of the form

$$\rho\rho=\frac{H_{\rm cr}^2}{4\pi}\left[\frac{l\Delta}{a}+af(h)\right]. \tag{57.13}$$

The condition that this be a minimum gives

$$a=\sqrt{[l\Delta/f(h)]}. \tag{57.14}$$

The integrals in (57.11) and (57.12) can be calculated †, and the result obtained for $f(h)$ is

$$\begin{aligned}f(h)=&\frac{1}{4\pi}\left\{(1+h)^4\log(1+h)+(1-h)^4\log(1-h)\right.\\ &\left.-\left(1+h^2\right)^2\log\left(1+h^2\right)-4h^2\log 8h\right\}.\end{aligned} \tag{57.15}$$

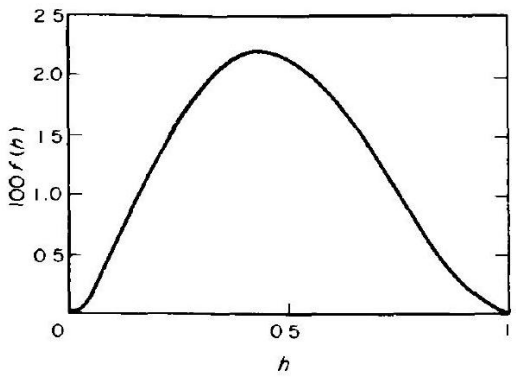


Fig. 36

The limiting forms of this are

$$\left.\begin{aligned} f(h) &= \tfrac{h^2}{\pi}\log\tfrac{0.56}{h^2} \text{ for } h \ll 1; \\ f(h) &= \tfrac{\log 2}{\pi}(1-h)^2 \text{ for } 1-h < 1. \end{aligned}\right\} \tag{57.16}$$

Figure 36 shows a graph of $f(h)$.
It should be noted that, in normal layers near the surface of the plate, the magnetic field may be considerably less than H_{cr}, i.e. there is a situation corresponding to that shown in Fig. 33a. † In this case the unfavourable thermodynamic state is made possible by the surface-tension energy, which prevents further reduction in the layer thickness.

As already mentioned, as the plate thickness increases, branching of the layers must occur. This in turn affects the dependence of the period a of the structure on l; in the limit of multiple branching, $a \propto l^{2/3}$. Numerical calculations show, however, that branching should begin only at a comparatively late stage ‡.

28.2 VII Quasi-Static Electromagnetic Field by Landau

28.2.1 §58. Equations of the quasi-static field

Sofar we have discussed only static electric and magnetic fields, and have used Maxwell's equation

$$\operatorname{curl}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{58.1}$$

only as a step in deriving the expression for the energy of a magnetic field (§31).
The nature of the variable electromagnetic fields in matter depends greatly on the kind of matter concerned and on the order of magnitude of the frequency of the field. In the present section we shall consider the phenomena which occur in extended conductors placed in a variable external magnetic field. We shall assume that the rate of change of the field is not too large, and therefore satisfies various conditions which will be derived below. Electromagnetic fields and currents which satisfy these conditions are said to be quasistatic.

We shall first of all suppose that the wavelength $\lambda \sim c/\omega$ which corresponds (in the vacuum or dielectric surrounding the conductor) to the field frequency ω is large compared with the

[4]† See A. Fortini and E. Paumier, Physical Review B 5, 1850, 1972.
[4]† For instance, when $h = \frac{1}{2}$ the field on the surface in the centre of the normal layer is only 0.73 Hcr , and as $h \to 0$ it tends to 0.65H_{cr}.
‡ The calculation for a model with multiply branched layers is given by L. D. Landau, Journal of Physics 7,99. 1943 (Collected Papers, Pergamon Press, Oxford, 1965, p. 365).

dimension l of the body: $\omega \ll c/l$. Then the magnetic field distribution outside the conductor at any instant can be described by the equations of a static field:

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad \operatorname{curl} \mathbf{H} = 0, \tag{58.2}$$

all effects due to the finite velocity of propagation of electromagnetic disturbances being neglected. Of course, this neglect is permissible only at distances from the body which are small compared with λ; these are the only distances which need be considered in determining the field inside the body.

The complete system of field equations inside the conductor consists of (58.1) together with

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \tag{58.3}$$

$$\operatorname{curl} \mathbf{H} = 4\pi\mathbf{j}/c, \quad \mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}; \tag{58.4}$$

in an electrically anisotropic (non-cubic) crystal, we must write $j_i = \sigma_{ik}E_k$. The second of these equations has been derived, strictly speaking, only for steady currents and static magnetic fields. It is therefore necessary to specify conditions under which this equation can reliably be used for variable fields. In equation (58.4) the current has been written in terms of the electric field in accordance with the relation $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$ with constant σ, which holds for a steady state. This relation remains valid if the period of the field is large compared with the characteristic times of microscopic conduction. That is, the field frequency must be small compared with the reciprocal mean free time of the electrons in
the conductor. For typical metals at room temperature, the limiting frequencies given by this condition lie in the infra-red region of the spectrum. †

There is another condition which restricts the applicability of the equations in this case. Equation (58.4) assumes that the relation between the current and the field is a local one, i.e. that the current density at a point in the conductor depends on the field at that point only. This in turn presupposes that the electron mean free path is small compared with the distances over which the field changes appreciably. We shall return to this condition in §59.

In equations (58.1) and (58.4), $\mathbf{E}$ is the induced electric field resulting from the variation of the magnetic field. When $\mathbf{H}$ is known, the field $\mathbf{E}$ can be immediately determined by equation (58.4). The equation for $\mathbf{H}$ is obtained by eliminating $\mathbf{E}$ from (58.1) and (58.4):

$$\frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\operatorname{curl}\frac{\operatorname{curl}\mathbf{H}}{\sigma}. \tag{58.5}$$

In a homogeneous medium with constant conductivity σ and constant magnetic permeability μ, the factor $1/\sigma$ can be taken in front of the curl operator, and by (58.3) we have $\operatorname{div}\mathbf{B} = \mu \operatorname{div}\mathbf{H} = 0$. Hence curl curl $\mathbf{H} = -\triangle\mathbf{H}$, and we obtain the equation

$$\triangle\mathbf{H} = \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \tag{58.6}$$

With the equation $\operatorname{div}\mathbf{H} = 0$ this suffices to determine the magnetic field. It may be noted that equation (58.6) is a heat-conduction equation, the thermometric conductivity χ being represented by $c^2/4\pi\mu\sigma$.

The boundary conditions on the magnetic field at the surface of a conductor are evident from the form of the equations, and are as before

$$B_{n1} = B_{n2}, \quad \mathbf{H}_{t1} = \mathbf{H}_{t2}. \tag{58.7}$$

The expression on the right-hand side of equation (58.4), being bounded, does not affect the second of (58.7). For $\mu = 1$ we can put simply ‡

$$\mathbf{H}_1 = \mathbf{H}_2. \tag{58.8}$$

From (58.4) we have $\operatorname{div}\mathbf{j} = 0$; the boundary condition on this equation is that $j_n = 0$ at the surface of the conductor. In an electrically isotropic conductor, it follows (since $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$) that $E_n^{(i)} = 0$ at the boundary, the index (i) denoting the field inside the conductor: in the general case of an anisotropic conductor, the normal component of the field in the conductor at its surface is in general not zero.

The boundary condition (58.8) is insufficient for a complete formulation of the problem if the conductor is composite and its parts have different conductivities. At the interfaces

between the parts we must use both the continuity of $\mathbf{H}$ and that of $\mathbf{E}_t$; the latter implies the condition

$$(\operatorname{curl}\mathbf{H})_{t1}/\sigma_1 = (\operatorname{curl}\mathbf{H})_{t2}/\sigma_2 \tag{58.9}$$

on the magnetic field.

Suppose that a conductor is placed in an external magnetic field which is suddenly removed. The field in and around the conductor does not vanish immediately; the manner of its decay with time is given by equation (58.6). To solve a problem of this kind, we use the following procedure, a general technique in mathematical physics. We seek solutions of equation (58.6) which have the form $\mathbf{H} = \mathbf{H}_m(x,y,z)e^{-\gamma_m t}$, where γ_m is a constant. The equation for the function $\mathbf{H}_m(x,y,z)$ is then

$$\left(c^2/4\pi\sigma\right)\triangle\mathbf{H}_m = -\gamma_m\mathbf{H}_m \tag{58.10}$$

For a conductor of given shape, this equation has non-zero solutions (satisfying the necessary boundary conditions) only for certain γ_m, the eigenvalues of (58.10), all of which are real and positive. † The corresponding functions $\mathbf{H}_m(x,y,z)$ form a complete set of orthogonal vector functions. Let the field distribution at the initial instant be $\mathbf{H}_0(x,y,z)$. On expanding this in terms of the functions $\mathbf{H}_m$:

$$\mathbf{H}_0(x,y,z) = \sum_m c_m\mathbf{H}_m(x,y,z)$$

we obtain the solution of the problem:

$$\mathbf{H}(x,y,z,t) = \sum_m c_m e^{-\gamma_m t}\mathbf{H}_m(x,y,z) \tag{58.11}$$

gives the manner of decay of the field with time.

The rate of decay is determined principally by the term in the sum for which γ_m is least; let this be γ_1. The decay time of the field may be defined as $\tau = 1/\gamma_1$. The order of magnitude of τ is

[4]† For poor conductors (e.g. semiconductors), equation (58.4) is valid only if a further condition, which may be more stringent, is satisfied. For such bodies it may be possible to define both a conductivity and a permittivity. Then a term $-(\varepsilon/c)\partial\mathbf{E}/\partial t$ is added to the right-hand side of (58.4), and the condition for this term to be small in comparison with $4\pi\sigma\mathbf{E}/c$ is $\sigma/\omega \geqslant \varepsilon$. In good conductors (e.g. metals), on the other hand, $\sigma/\omega \gg 1$ throughout the frequency range in which the conductivity can be regarded as constant (see also the second footnote to 859).

‡ For ordinary diamagnetic and paramagnetic bodies, μ is very nearly 1 , and the inclusion of μ in the following formulae would be a pointless refinement. Values of μ differing considerably from 1 occur in ferromagnetic metals, whose magnetic properties (in sufficiently weak fields) can be described in terms of a large constant permeability. For quite moderate frequencies, however, such substances exhibit a dispersion of μ (i.e. [a] dependence of μ on the frequency ω), together with a decrease of μ almost to 1 . We shall therefore put $\mu = 1$ in the present chapter.

evident from equation (58.10). Since $\triangle \mathbf{H} \sim \mathbf{H}/l^2$, where l is the dimension of the conductor, we have

$$\tau \sim 4\pi\sigma l^2/c^2 \tag{58.12}$$

28.2.2 §59. Depth of penetration of a magnetic field into a conductor

Let us consider a conductor in an external magnetic field which varies with frequency ω. The magnetic field penetrates into the conductor and induces in it a variable electric field, Which in turn causes currents to appear; these are called eddy currents. ‡ A general idea of

† This is easily seen as follows. So as to avoid having to take account of the boundary conditions at the surface of the body, we start from equation (58.5) and suppose σ to vanish continuously outside the body. Multiplying $b_{0\,\mathrm{th}}$ sides of the equation

$$-4\pi\gamma_m \mathrm{H}_m/c^2 = -\operatorname{curl}\left[(1/\sigma)\operatorname{curl}\mathrm{H}_m\right]$$

by $\mathbf{H}_m{}^*$ and integrating over all space, we have

$$\frac{4\pi}{c^2}\gamma_m \int |\mathbf{H}_m|^2 \ \mathrm{d}V = \int \mathbf{H}_m * \cdot \operatorname{curl} \frac{\operatorname{curl} \mathbf{H}_m}{\sigma} \ \mathrm{d}V = \int \frac{1}{\sigma} |\operatorname{curl} \mathbf{H}_m|^2 \ \mathrm{d}V$$

Whence it is evident that the γ_m are real and positive.

‡ In Russian "Foucault currents".

the way in which the field penetrates into the conductor can be obtained from the analogy already mentioned between equation (58.6) and the equation of thermal conduction. It is known from the theory of thermal conduction that a quantity which satisfies such an equation is propagated through a distance $\sim \sqrt{(\chi t)}$ in time t. We can therefore immediately conclude that the magnetic field penetrates into the conductor to a distance δ, given in order of magnitude by $\delta \sim \sqrt{(c^2/\sigma\omega)}$. The same is true, of course, of the induced electric field and currents.

In a variable field with frequency ω, all quantities depend on the time through a factor $e^{-i\omega t}$. Equation (58.6) then becomes

$$\triangle \mathbf{H} = -4\pi i\sigma\omega \mathbf{H}/c^2 \tag{59.1}$$

Let us consider two limiting cases. If the penetration depth δ is large compared with the dimension of the body (low frequencies), we can put the right-hand side of (59.1) equal to zero as a first approximation. Then the magnetic field distribution at any instant will be the same as it would be in a steady state with the same external field far from the body. Let this solution be $\mathbf{H}_{st}$; it is independent of the frequency (or rather involves the frequency only in the time factor $e^{-i\omega t}$). The induced electric field appears only in the next approximation, being absent in the steady state. This corresponds to the fact that curl $\mathbf{H}_{\mathrm{st}} = 0$, and so the value of $\mathbf{E}$ obtained from (58.4) is zero. To calculate $\mathbf{E}$, therefore, we must use equation (58.1), according to which

$$\operatorname{curl} \mathbf{E} = i\omega \mathbf{H}_{\mathrm{st}}/c. \tag{59.2}$$

This equation, together with div $\mathbf{E} = 0$ (which follows from (58.4) when σ is constant in the body), entirely determines the electric field distribution. It is seen to be proportional to the frequency ω.

The opposite limiting case is that where $\delta \ll l$ (high frequencies). The condition for the field equations to be local (§58) requires that δ should still be large compared with the mean free path of the conduction electrons. †

When $\delta \ll l$ the magnetic field penetrates only into a thin surface layer of the conductor. In calculating the field outside the conductor we can neglect the thickness of this layer, i.e. assume that the magnetic field does not penetrate into the conduct or at all. In this sense a conductor in a high-frequency magnetic field behaves like a superconductor in a constant field, and the field outside it must be calculated by solving the corresponding steady-state problem for a superconductor of the same shape.

The true field distribution in the surface layer of the conductor can be investigated in a general manner by regarding small regions of the surface as plane. It is necessary to solve equation (59.1) for a conducting medium bounded by a plane surface, outside which the field has a given value $\mathbf{H}_0 e^{-i\omega t}$, say. This vector is obtained as shown above, by solving the problem for a semi-infinite medium, and is parallel to the surface of the conductor. The boundary condition (58.8) shows that the magnetic field in the conductor is also $\mathbf{H_0} e^{-i\omega t}$ al the surface.

We take the surface of the conductor as the xy-plane, the conducting medium being in $z > 0$. Since the conditions of the problem are independent of x and y, the required field H depends only on the z coordinate (and on the time). We therefore have $\operatorname{div} \mathbf{H} = \partial H_z/\partial^2$ "

$= 0$, and since $H_z = 0$ at the boundary it must be zero everywhere. By (59.1), the equation for $\mathbf{H}$ is $\partial^2\mathbf{H}/\partial z^2 + k^2\mathbf{H} = 0$, where $k = \sqrt{}(4\pi i\sigma\omega/c^2) = (1+i)\sqrt{}(2\pi\sigma\omega)/c$. The solution of this equation which vanishes far from the surface ($z \to \infty$) is proportional to e^{ikz}. Using the boundary condition at $z = 0$, we obtain

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 e^{-z/\delta} e^{iz/\delta} e^{-i\omega t} \tag{59.3}$$

where the penetration depth δ is

$$\delta = c/\sqrt{}(2\pi\sigma\omega) \text{ and } k = (1+i)/\delta. \tag{59.4}$$

The electric field is now determined by means of equation (58.4). If $\mathbf{n}$ is a unit vector in the z-direction, we have

$$\mathbf{E} = \sqrt{}(\omega/8\pi\sigma)(1-i)\mathbf{H} \times \mathbf{n}. \tag{59.5}$$

Thus $E \sim H\delta/\lambda$.

If the field $\mathbf{H}_0 e^{-i\omega t}$ is linearly polarized, then $\mathbf{H}_0$ can be made real by a suitable choice of the origin of time. We then take the direction of $\mathbf{H}_0$ as the y-axis. Taking the real part in (59.4) and (59.5), we have

$$\left.\begin{aligned} H = H_y &= H_0 e^{-z/\delta} \cos\left(\tfrac{z}{\delta} - \omega t\right) \\ E = E_x &= H_0 \sqrt{}(\omega/4\pi\sigma) e^{-z/\delta} \cos\left(\tfrac{z}{\delta} - \omega t - \tfrac{1}{4}\pi\right) \end{aligned}\right\} \tag{59.6}$$

The eddy current density $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$ has the same distribution as $\mathbf{E}$.

The relation (59.5) is valid in the present case for the field throughout the half-space z$>$ 0 . In more general cases, a relation

$$\mathbf{E}_t = \zeta \mathbf{H}_t \times \mathbf{n} \tag{59.7}$$

is in general valid only at the surface of the conductor for the field components tangential to the surface; since these components are continuous, (59.7) applies to the field on either side of the surface. The coefficient ζ is called the surface impedance of the conductor; we shall return in §87 to more general aspects of this concept. † In the present case.

[4]† This condition is, in fact, the first to be violated in metals as the frequency increases. The condition $\omega \ll 1/$. where τ is the mean free time, may, however, be the more stringent for semiconductors of low conductivity.

$$\zeta = \sqrt{(\omega/8\pi\sigma)}(1-i). \tag{59.8}$$

The presence of eddy currents implies a dissipation of the field energy, which appears as [J] oule heat. The time average energy Q dissipated in the conductor per unit time is $Q = \int \bar{\mathbf{j}}\cdot\overline{\mathbf{E}}\mathrm{d}V = \int \sigma\overline{\mathbf{E}^2}\ \mathrm{d}V$. It can also be calculated as the mean field energy entering the ionductor per unit time:

$$Q = \oint \overline{\mathbf{S}}\cdot\mathrm{d}\mathbf{f} = (c/4\pi)\oint \overline{\mathbf{E}\times\mathbf{H}}\cdot\mathrm{d}\mathbf{f}, \tag{59.9}$$

[†] In electrically anisotropic media, the surface impedance is a two-dimensional tensor:

$$E_{t\alpha} = \zeta_{\alpha\beta}\left(H_t\times n\right)_\beta, \tag{597a}$$

there α and β are tensor suffixes in the plane perpendicular to $\mathbf{n}$. This tensor may be affected by the heat fluxes hat result from the thermoelectric effect (see Problem 4).
the integral being taken over the surface of the conductor. †
We have already seen that, in the limiting case $\delta \gg l$, the amplitude of the magnetic field inside the conductor is independent of the frequency, while that of the electric field is proportional to ω. The energy dissipation Q at low frequencies is therefore proportional to ω^2. When $\delta \ll l$, on the other hand, the magnetic and electric fields on the surface of the conductor are given by formulae (59.3) and (59.5) with $z = 0$. The Poynting vector is normal to the surface, and its mean value is $\bar{S} = (c/16\pi)\sqrt{(\omega/2\pi\sigma)}\,|\mathrm{H}_0|^2$, the variation of $\mathbf{H}_0$ over the surface being given by the solution of the problem of the field outside a superconductor of the same shape (cf. above). The energy dissipation is

$$Q = \frac{c}{16\pi}\sqrt{\left(\frac{\omega}{2\pi\sigma}\right)}\oint |\mathbf{H}_0|^2\ \mathrm{d}f \tag{59.10}$$

Thus at high frequencies it is proportional to $\sqrt{\omega}$.
The energy dissipation can also be expressed in terms of the total magnetic moment $\mathscr{M}$ acquired by the conductor in the magnetic field. In a periodic field, the magnetic moment is likewise a periodic function of time, with the same frequency. According to formula (32.4), the rate of variation of the free energy is given by $-\mathscr{M}\cdot\mathrm{d}\mathfrak{g}/\mathrm{d}t$, where $\mathfrak{J}$ is a uniform external field in which the conductor is placed. This expression does not immediately give the required energy dissipation, because the energy of the body changes not only on account of dissipation but also by the periodic movement of energy between the body and the surrounding field. If we average over time, however, the latter contribution vanishes, and the mean dissipation of energy per unit time is

$$Q = -\overline{\mathscr{M}\cdot\mathrm{d}\mathfrak{S}/\mathrm{d}t} \tag{59.11}$$

If $\mathscr{M}$ and $\mathfrak{H}$ are written in complex form, then $\mathrm{d}\mathfrak{S}/\mathrm{d}t = -i\omega\mathfrak{S}$, and Q can be calculated as

$$Q = -\frac{1}{2}\,\mathrm{re}\left(i\omega\cdot\mathscr{M}\cdot\mathfrak{S}^*\right) = \frac{1}{2}\omega\,\mathrm{im}\left(\cdot\mathscr{M}\cdot\mathfrak{S}^*\right). \tag{59.12}$$

The components of the magnetic moment $\mathscr{M}$ are linear functions of the external field:

$$\mathscr{M}_i = V\alpha_{ik}\mathfrak{S}_k, \tag{59.13}$$

where the dimensionless coefficients $\alpha_{ik}(\omega)$ depend on the shape of the body and on its orientation in the external field, but not on its volume I'. In this formula we assume that . $\mathscr{I}$ and $\mathfrak{S}$ are written in complex form, so that the α_{ik} are also in general complex. The tensor $V\alpha_{ik}$ may be called the magnetic polarizability tensor for the body as a whole. This tensor is a

generalized susceptibility, and has the properties common to all such quantities. In particular, it is symmetrical (see SP 1, §125):

$$\alpha_{ik} = \alpha_{ki}. \tag{59.14}$$

We can therefore write

$$\mathscr{A} \cdot \mathfrak{S}^* = V\alpha_{ik}\mathfrak{S}_i{}^*\mathfrak{Y}_k = \frac{1}{2}V\alpha_{ik}\left(\mathfrak{S}_i{}^*\mathfrak{Y}_k + \mathfrak{S}_i\mathfrak{W}_k{}^*\right)$$
$$= \mathrm{l}\,\alpha_{ik}\,\mathrm{re}\left(\mathfrak{S}_i\mathfrak{S}_k{}^*\right)$$

If we also write the complex quantities α_{ik} as $\alpha_{ik}{}' + i\alpha_{ik}{}''$, the energy dissipation (59.12) becomes

$$Q = \frac{1}{2}V\omega\alpha_{ik}{}''\,\mathrm{re}\left(\mathfrak{S}_i\mathfrak{S}_k{}^*\right). \tag{59.15}$$

Thus the energy dissipation is determined by the imaginary part of the magnetic polarizability. We have already seen that Q is proportional to ω^2 for low frequencies, and to $\sqrt{\omega}$ for high frequencies. We can therefore conclude that the quantities α_{ik} " in these two limiting cases are proportional to ω and to $1/\sqrt{\omega}$ respectively. Since they decrease both as $\omega \to 0$ and $\omega \to \infty$, they must have a maximum in between.

The magnetic moment of a conductor in a variable magnetic field is due mainly to the conduction currents set up in the body; it is not zero even if $\mu = 1$, when the moment in a static field vanishes. The latter can be obtained from $\mathscr{M}(\omega)$ by taking the limit as $\omega \to 0$. Hence it follows that the real part $\alpha_{ik}{}'$ of the polarizability tends to a constant limit as $\omega \to 0$ (the limit being zero for $\mu = 1$), corresponding to magnetization in a static field. In the limit $\omega \to \infty$, when the magnetic field does not penetrate into the body, $\alpha_{ik}{}'$ tends to a different constant limit, corresponding to the static magnetization of a superconductor of the same shape.

PROBLEMS

Problem 1. Determine the magnetic polarizability of an isotropic conducting sphere with radius a in a uniform periodic external field.

Solution. The field $\mathbf{H}^{(i)}$ inside the sphere satisfies the equations $\angle\mathbf{H}^{(i)} + k^2\mathbf{H}^{(i)} = 0$, $\operatorname{div}\mathbf{H}^{(i)} = 0$, where $k = (1+i)/\delta$. We write this field in the form $\mathbf{H}^{(i)} = \mathbf{curlA}$. where $\mathbf{A}$ satisfies the equation $\triangle\mathbf{A} + k^2\mathbf{A} = 0$; since $\mathbf{H}$ is an axial vector, $\mathbf{A}$ is a polar vector. By symmetry, the only constant vector on which the required solution can depend is the external field $\mathfrak{S}$. We denote by f the spherically symmetrical solution, finite for $r = 0$, of the scalar equation $\triangle f + k^2 f = 0$, namely $f = (1/r)\sin kr$. Then the polar vector A, which satisfies the vector equation $\triangle A + k^2\mathbf{A} = 0$ and depends linearly on the constant axial vector $\mathfrak{S}$, can be written as $\mathbf{A} = \beta\ \mathrm{curl}\ (f\mathfrak{g})$, where β is a constant. Thus we have

$$\mathbf{H}^{(i)} = \beta\ \mathrm{curl}\ \mathrm{curl}\ (f\mathfrak{S})$$
$$= \beta\left(\frac{f'}{r} + k^2 f\right)\mathfrak{S} - \beta\left(\frac{3f'}{r} + k^2 f\right)(\mathbf{n}\cdot\mathfrak{g})\mathbf{n},$$

[4]† If any two quantities $a(t)$ and $b(t)$ are written in complex form (proportional to $e^{-i\omega t}$), the real parts must of course be taken before calculating their product. If, however, we are interested only in the time average value of the product, it may be calculated as $\frac{1}{2}\mathrm{re}ab^*$. The terms containing $e^{\pm 2i\omega t}$ give zero on averaging, and so $\frac{1}{4}(a+a^*)(b+b^*) = \frac{1}{4}(ab^* + a^*b)$. In particular, $\overline{\mathbf{S}}$ can be calculated as the real part of the "complex Poynting vector":

$$\overline{\mathbf{S}} = \mathrm{re}\left[\frac{c}{4\pi}\cdot\frac{1}{2}\mathbf{E}\times\mathbf{H}^*\right]. \tag{59.9a}$$

where $\mathbf{n}$ is a unit vector in the direction of $\mathbf{r}$; the second derivative f'' has been eliminated by means of the equation $\Delta f + k^2 f = 0$.
The field $\mathbf{H}^{(e)}$ outside the sphere satisfies the equations curl $\mathbf{H}^{(e)} = 0$, div $\mathbf{H}^{(e)} = 0$. We put $\mathbf{H}^{(e)} = -\operatorname{grad}\phi + \mathfrak{g}$; ϕ satisfies the equation $\Delta\phi = 0$ and vanishes at infinity. Since ϕ depends linearly on the constant vector $\mathfrak{y}$, we have $\phi = -V\alpha\mathfrak{S}\cdot\operatorname{grad}(1/r)$, where $V = 4\pi a^3/3$. Thus

$$\begin{aligned}\mathbf{H}^{(e)} &= V\alpha\operatorname{grad}[(\mathfrak{S}\cdot\operatorname{grad})(1/r)] + \mathfrak{g}\\ &= \frac{V\alpha}{r^3}[3(\mathbf{u}\cdot\mathfrak{g})\mathbf{u} - \mathfrak{g}] + \mathfrak{g}.\end{aligned}$$

It is evident that $V\alpha\mathfrak{S}$ is the magnetic moment of the sphere, so that $V\alpha$ is its magnetic polarizability (by symmetry, the tensor α_{ik} reduces to a scalar $\alpha\delta_{ik}$).

On the surface of the sphere ($r = a$), all the components of $\mathbf{H}$ must be continuous. Equating separately the components parallel and perpendicular to $\mathbf{n}$, we obtain two equations to determine α and β. The polarizability per unit volume is found to be

$$\begin{aligned}\alpha = \alpha' + i\alpha'' &= -\frac{3}{8\pi}\left[1 - \frac{3}{a^2k^2} + \frac{3}{ak}\cot ak\right],\\ \alpha' &= -\frac{3}{8\pi}\left[1 - \frac{3}{2}\frac{\delta\sinh(2a/\delta) - \sin(2a/\delta)}{\cosh(2a/\delta) - \cos(2a/\delta)}\right],\\ \alpha'' &= -\frac{9\delta^2}{16\pi a^2}\left[1 - \frac{a}{\delta}\frac{\sinh(2a/\delta) + \sin(2a/\delta)}{\cosh(2a/\delta) - \cos(2a/\delta)}\right].\end{aligned}$$

In the limit of low frequencies ($\delta \gg a$),

$$\begin{aligned}\alpha' &= -\frac{1}{105\pi}\left(\frac{a}{\delta}\right)^4 = -\frac{4\pi}{105}\frac{a^4\sigma^2\omega^2}{c^4}\\ \alpha'' &= \frac{1}{20\pi}\left(\frac{a}{\delta}\right)^2 = \frac{a^2\sigma\omega}{10c^2}\end{aligned}$$

For high frequencies ($\delta \ll a$),

$$\begin{aligned}\alpha' &= -\frac{3}{8\pi}\left[1 - \frac{3\delta}{2a}\right] = -\frac{3}{8\pi}\left[1 - \frac{3c}{2a\sqrt{(2\pi\sigma\omega)}}\right]\\ \alpha'' &= \frac{9}{16\pi}\frac{\delta}{a} = \frac{9c}{16\pi a\sqrt{(2\pi\sigma\omega)}}\end{aligned}$$

The limiting value $V\alpha' = -\frac{1}{2}a^3$ corresponds to the magnetic moment of a superconducting sphere; the corresponding value of α'' could be found from formula (59.10), using the expression (54.3) for the field at the surface of a superconducting sphere.

The external field is assumed to be written in the complex form $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_0 e^{-i\omega t}$ with an arbitrary constanl complex vector $\mathfrak{S}_0$. The analysis therefore includes both the "linearly polarized" variable field whose direction is constant, and the elliptically or circularly polarized fields which rotate in some plane.

Problem 2. The same as Problem 1, but for a conducting cylinder (with radius a) in a uniform periodic mangnetic field perpendicular to its axis.

Solution. This problem is the "two-dimensional analogue" of Problem 1. In what follows all vector operations are two-dimensional operations in a plane perpendicular to the axis of the cylinder, and $\mathbf{r}$ is the position vector in that plane. The field inside the cylinder is of the form

$$\begin{aligned}\mathbf{H}^{(i)} &= \beta\ \text{curl curl}\ (f\mathfrak{S})\\ &= \beta\left(\frac{f'}{r} + k^2 f\right)\mathfrak{S} - \beta\left(\frac{2f'}{r} + k^2 f\right)(\mathbf{n}\cdot\mathfrak{g})\mathbf{n},\end{aligned}$$

where $f = J_0(kr)$ is the symmetrical solution of the two-dimensional equation $\Delta f + k^2 f = 0$ which is finite for $r = 0$. The field outside the cylinder is

$$\begin{aligned}\mathbf{H}^{(e)} &= -2V\alpha \operatorname{grad}[(\mathfrak{S}\cdot\operatorname{grad})\log r] + \mathfrak{S} \\ &= \frac{2V\alpha}{r^2}[2(\mathbf{n}\cdot\mathfrak{S})\mathbf{n} - \mathfrak{S}] + \mathfrak{S}\end{aligned}$$

where $V = \pi a^2$. The magnetic moment per unit length of the cylinder is $V\alpha\mathfrak{S}$ (see §3, Problem 2). From the condition $\mathbf{H}^{(i)} = \mathbf{H}^{(e)}$ for $r = a$, as in Problem 1, we obtain

$$\alpha = -\frac{1}{2\pi}\left[1 - \frac{2}{ka}\frac{J_1(ka)}{J_0(ka)}\right],$$

using the relation $J_0'(kr) = -kJ_1(kr)$.
For $\delta \gg a$, expanding the Bessel functions in powers of ka, we have

$$\begin{aligned}\alpha' &= -\frac{1}{24\pi}\left(\frac{a}{\delta}\right)^4 = -\frac{\pi a^4\sigma^2\omega^2}{6c^4}, \\ \alpha'' &= \frac{1}{8\pi}\left(\frac{a}{\delta}\right)^2 = \frac{a^2\sigma\omega}{4c^2}.\end{aligned}$$

For $\delta \ll a$, we use the asymptotic expressions for the Bessel functions, obtaining

$$\begin{aligned}\alpha' &= -\frac{1}{2\pi}\left(1 - \frac{\delta}{a}\right) = -\frac{1}{2\pi}\left(1 - \frac{c}{a\sqrt{(2\pi\sigma\omega)}}\right) \\ \alpha'' &= \frac{1}{2\pi}\frac{\delta}{a} = \frac{c}{2\pi a\sqrt{(2\pi\sigma\omega)}}\end{aligned}$$

problem 3. The same as Problem 2, but for a magnetic field parallel to the axis of the cylinder.
solution. The magnetic field is everywhere parallel to the axis of the cylinder. Outside the cylinder win ave $\mathbf{H}^{(e)} = \mathfrak{D}$, and inside it $\mathbf{H}^{(i)} = f, \mathfrak{D}$, where f is the symmetrical solution of the two-dimensional equation $\int + k^2 f = 0$ which is 1 for $r = a$ and finite for $r = 0$.$\mathrm{H}^{(i)} = \mathfrak{S}J_0(kr)/J_0(ka)$. The eddy currents in the cylinder are azimuthal (i.e. the only non-zero component is j_ϕ), and are given in terms of the field $H_z = H$ by $4\pi j/c = -\partial H/\partial r$. The magnetic moment generated per unit length of the cylinder by the conduction currents is $\mathscr{M} = \pi a^2\alpha\mathfrak{S} = (1/2c)\int jr \, \mathrm{d}V = -\frac{1}{4}\int(\partial H/\partial r)r^2 \, \mathrm{d}r$; it is parallel to the axis. Evaluating the integral, we have

$$\alpha = -\frac{1}{4\pi}\left[1 - \frac{2}{ka}\frac{J_1(ka)}{J_0(ka)}\right].$$

Thus the longitudinal polarizability of the cylinder is half the transverse polarizability derived in Problem 2.
Problem 4. Determine the least decay coefficient for the magnetic field in a conducting sphere.
SOLUTION. The solutions of equations (58.10) for a sphere include functions with various symmetries. The most symmetrical solution is that which is defined by an arbitrary constant scalar. This solution is inapplicable, however, for the following reason: it would be spherically symmetrical ($H = H_r(r)$) and would have to be $H =$ constant $/r$ in order to satisfy the equation div $\mathbf{H} = (1/r)\partial(rH)/\partial r = 0$, which is valid both outside and inside the sphere; but this function is not finite at the centre of the sphere.
The least value of γ corresponds to one of the solutions defined by an arbitrary constant vector. The form of these solutions is evidently the same as has been found in Problem 1, the only difference being that the constant term in the field $\mathbf{H}^{(e)}$ must be omitted so as to have $\mathbf{H} = 0$

at infinity. The quantity k is now real $\left(=\sqrt{(4\pi\sigma\gamma/c^2)}\right)$. and the vector $\mathbf{H}$ is an arbitrary constant vector. From the boundary condition $\mathbf{H}^{(i)} = \mathbf{H}^{(e)}$ at $r = a$ we obtain two equations, and on eliminating α and β we find $\sin ka = 0$. The smallest non-zero root of this equation is $ka = \pi$, and so the smallest value of γ is $\gamma_1 = \pi c^2/4\sigma a^2$.

Problem 5. The plane surface of a uniaxial metal crystal is cut so that the normal is at an angle θ to the principal axis of symmetry of the crystal. Determine the surface impedance, taking account of the thermoelectric effect (M. I. Kaganov and V. M. Tsukernik, 1958).

SOLUTION. We take the crystal surface as the xy-plane, and the z-axis along the inward normal to the surface; let the principal axis of symmetry of the crystal be in the xz-plane at an angle θ to the z-axis. Let the magnetic field at the surface be in the y-direction: $H_y = H_0 e^{-i\omega t}$. Then it is in this direction everywhere within the metal also. Since all quantities depend only on z (and on the time as $e^{-i\omega t}$), we find that Maxwell's equations (58.1), (58.4) become

$$-H_y' = 4\pi j_x/c, \quad j_y = j_z = 0, \quad E_x' = i\omega H_y/c \tag{1}$$

and $E_y' = 0$. whence $E_y = 0$; the prime denotes differentiation with respect to z. To take account of the thermcelectric effect, we must include also the equation of thermal conduction, $C\partial T/\partial t + \operatorname{div}\mathbf{q} = \mathbf{0}$, or

$$-i\omega C\tau + q_z' = 0 \tag{2}$$

Where τ is a variable increment of the mean temperature: $T = \bar{T} + \tau, C$ the specific heat of the metal per unit Polume, and q the heat flux density; j and q are related to the field $\mathbf{E}$ and the temperature gradient by (26.12). The tensors $\rho_{ik} = \sigma^{-1}{}_{ik}$ and κ_{ik} are symmetrical. We shall suppose the symmetry of the crystal to be such that α_{ik} symmetrical also. With the above choice of the x, y and z axes, we have

$$\begin{aligned}
&\rho_{xx} = \rho_{11}\sin^2\theta + \rho_\perp\cos^2\theta, \rho_{yy} = \rho_\perp \\
&\rho_{zz} = \rho_{11}\cos^2\theta + \rho_\perp\sin^2\theta, \rho_{xy} = \rho_{yz} = 0, \\
&\rho_{xz} = (\rho_{11} - \rho_\perp)\sin\theta\cos\theta,
\end{aligned}$$

ere ρ_{I} and $\rho_\perp$ are the principal values of the tensor ρ_{ik} along the crystal axis and in the plane perpendicular to it; illar expressions are valid for κ_{ik} and x_{ik}. Then, from (26.12),

$$E_x = \rho_{xx}J_x + \alpha_{xz}\tau', q_z = T\alpha_{zx}j_x - \kappa_{zz}\tau' \tag{3}$$

$$E_z = \rho_{zx}j_x + \alpha_{zz}\tau' \tag{4}$$

[k]l_{mination} of H_y from equations (1)-(3) gives

$$\begin{aligned}
E_x'' + k^2(E_x + E_T) = 0 \\
(1+a)E_T'' + k^2[(b-a)E_T - aE_x] = 0
\end{aligned}$$

[b]$E_I = -\alpha_{xz}\tau'$ and the parameters

$$k^2 = 4\pi i\omega/c^2\rho_{xx}, a = T\alpha_{xz}^2/\rho_{xx}\kappa_{zz}, b = c^2C\rho_{xx}/4\pi\kappa_{zz}.$$

The solution of these two equations for the half-space $z > 0$ occupied by the metal is

$$\begin{aligned}
E_x = Ae^{ik_1 z} + Be^{ik_2 z} \\
E_T = -\left(1 - k_1^2/k^2\right)Ae^{ik_1 z} - \left(1 - k_2^2/k^2\right)Be^{ik_2 z}
\end{aligned}$$

where

$$k_{1.2} = k\left[\frac{1+b\pm\sqrt{\{(1-b)^2-4ab\}}}{2(1+a)}\right]^{\frac{1}{2}}$$

the imaginary parts of k_1 and k_2 must be positive.
The relation between the coefficients A and B is found from the boundary conditions for the temperature; formula (4) gives the field E_z in the metal; the normal component of $\mathbf{E}$ is not required to be continuous at the surface of the conductor. According to the definition (59.7a), the surface impedance is

$$\begin{aligned}\zeta_{xx} &= [E_x/H_y]_{z=0}\\ &= \frac{\omega}{c}\frac{A+B}{k_1A+k_2B}\\ \zeta_{yx} &= 0\end{aligned}$$

The final expressions are as follows for the impedance when $a \ll 1$ (as is in fact true for ordinary metals) in two cases. With an isothermal boundary ($\tau = 0$),

$$\zeta_{xx}{}^{(is)} = \zeta_0\left[1 + a/2(1+\sqrt{b})^2\right];$$

with an adiabatic boundary ($q_z = 0$),

$$\zeta_{xx}{}^{(ad)} = \zeta_0\left[1 + a(1+2\sqrt{b})/2(1+\sqrt{b})^2\right]$$

where $\zeta_0 = (\omega\rho_{yy}/8\pi)^{\frac{1}{2}}(1-i)$ is the impedance when the thermoelectric effect is neglected. The parameter a, and therefore the correction to the impedance, are zero when $\theta = \frac{1}{2}\pi$ or $\theta = 0$, i.e. when the principal axis is either in the plane of the surface or perpendicular to it.

If the field $\mathbf{H}$ is in the x-direction, then $E_x = 0, j_x = j_y = 0$, and there is no temperature gradient, so that $\zeta_{yy} = \zeta_0$.

28.2.3 §60. The skin effect

Let us consider the distribution of current density over the cross-section of a conductor in which a non-zero and variable total current is flowing. From the results of §59 we should expect that, as the frequency increases, the current will tend to be concentrated near the surface of the conductor. This phenomenon is called the skin effect. †

The exact solution of the problem of the skin effect depends, in general, not only on the shape of the conductor but also on the manner of excitation of the current in it. i.e the nature of the variable external magnetic field which induces the current. An important particular case, however, is that where the current flows in a wire of thickness small compared with its length; here the current distribution is independent of the manner of excitation.

In calculating the current distribution over the cross-section of a thin wire, the latter may be regarded as straight. The electric field is parallel to the axis of the wire, and the magnetic field vector $\mathbf{H}$ is in a plane perpendicular to the axis.

Let us consider a wire of circular cross-section. This is a particularly simple case, because the form of the field outside the wire is immediately obvious. By symmetry, $\mathbf{E}$ = constant over the surface of the wire (though the value of the constant varies with time). With this

boundary condition, the only solution of the equations $\operatorname{div}\mathbf{E} = 0, \operatorname{curl}\mathbf{E} = 0$ outside the wire is $\mathbf{E}$ = constant. Similarly, the magnetic field outside the wire must be the same as it

[4]† The term skin effect is used, more generally, in all cases where a variable electromagnetic field (and therefore the currents due to it) penetrates only to a relatively small depth in a conductor.

would be outside a wire carrying a constant current equal to the instantaneous value of the variable current.

Inside the wire. the electric field satisfies the equation $\triangle\mathbf{E} = (4\pi\sigma/c^2)\,\partial\mathbf{E}/\partial t$, which is the same as equation (58.6) for $\mathbf{H}$; it is obtained by eliminating $\mathbf{H}$ from (58.1) and (58.4), just as (58.6) was obtained by eliminating $\mathbf{E}$. In cylindrical polar coordinates, with the z-axis along the axis of the wire, the only non-zero component of $\mathbf{E}$ is E_z, which depends only on r. For a periodic field with frequency ω we have

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial E}{\partial r}\right) + k^2 E = 0, \quad k = \frac{\sqrt{(2i)}}{\delta} = \frac{1+i}{\delta} \tag{60.1}$$

where δ is the penetration depth (59.4). The solution of this equation which remains finite at $r = 0$ is

$$E = E_z = \text{ constant } \times J_0(kr)e^{-i\omega t}, \tag{60.2}$$

where J_0 is the Bessel function. The current density $j = \sigma E$ is similarly distributed.
The magnetic field $H_\phi = H$ is found from the electric field by equation (58.1):

$$i\omega H_\phi/c = (\operatorname{curl}\mathbf{E})_\phi = -\partial E_z/\partial r \tag{60.3}$$

Since $J_0'(u) = -J_1(u)$, we obtain

$$H = H_\phi = -\text{ constant } \times i\sqrt{(4\pi\sigma i/\omega)}J_1(kr)e^{-i\omega t} \tag{60.4}$$

the constant being the same as in (60.2); it is easily determined from the condition that $H = 2I/ca$ on the surface of the wire, a being the radius of the wire and l the total current in it.

In the limiting case of low frequencies ($a/\delta \ll 1$) we can take just the first few terms of the expansions of the Bessel functions at every point in the cross-section:

$$\left.\begin{aligned} E_z &= \text{ constant } \times \left[1 - \tfrac{1}{2}i(r/\delta)^2 - \tfrac{1}{16}(r/\delta)^4\right] e^{-i\omega t}, \\ H_\phi &= \text{ constant } \times \tfrac{2\pi\sigma}{c} r\left[1 - \tfrac{1}{4}i(r/\delta)^2 - \tfrac{1}{48}(r/\delta)^4\right] e^{-i\omega t}. \end{aligned}\right\} \tag{60.5}$$

The amplitude of E, and therefore that of the current density, increase as $1 + (r/2\delta)^4$ with increasing distance r from the axis.
In the opposite limiting case of high frequencies ($a/\delta \gg 1$) we can use the asymptotic formula

$$J_0[u\sqrt{(2i)}] \sim u^{-\frac{1}{2}}e^{(1-i)u}, \tag{60.6}$$

Which is valid for large values of the argument of the Bessel function, over most of the ^{cr}oss-section. Retaining only the rapidly varying exponential factor, we have

$$\left.\begin{aligned} E_z &= \text{ constant } \times e^{-(a-r)/\delta}e^{i(a-r)/\delta}e^{-i\omega t} \\ H_\phi &= \text{ constant } \times (1+i)\sqrt{\tfrac{2\pi\sigma}{\omega} - e^{-(a-r)/\delta}e^{i(a-r)/\delta}e^{-i\omega t}} \end{aligned}\right\} \tag{60.7}$$

These formulae are, of course, the same as (59.3) (59.5), which are valid near the surface of $^{\text{d}}$ conductor of any shape when the skin effect is strong.

In the general case of a wire whose cross-section is not circular, the exact calculation of the skin effect is considerably more involved, since the fields inside and outside the wire must be determined simultaneously. Only in the limiting case of strong skin effect is the problem again simplified, because the field outside the wire may then be determined as the static field outside a superconductor of the same shape.

28.2.4 §61. The complex resistance

If the frequency of the variable current is low, the instantaneous current $J(t)$ in a linear circuit is determined by the instantaneous e.m.f. $\mathscr{E}$:

$$\mathscr{E}(t) = RJ(t) \tag{61.1}$$

where R is the resistance of the wire to a constant current,
There is no reason, however, to expect a direct relation between the values of $\mathscr{E}$ and J at the same instant for all frequencies. We can say only that the value of $J(t)$ must be a linear function of the values of $\mathscr{E}(t)$ at all previous instants. This relation may be symbolically written as $J = \hat{Z}^{-1}\mathscr{E}$ or, conversely.

$$\mathscr{E} = \hat{Z}J \tag{61.2}$$

where $\hat{Z}$ is some linear operator. † If the functions $\mathscr{E}(t)$ and $J(t)$ are expanded as Fourier integrals, then for each monochromatic component (depending on time through a factor $e^{-i\omega t}$), the effect of the linear operator $\hat{Z}$ is simply multiplication by a quantity Z which depends on the frequency:

$$\mathscr{E} = Z(\omega)J \tag{61.3}$$

The function $Z(\omega)$ is in general complex. It is called the complex resistance or impedance of the conductor.

It is evident from a comparison of (61.3) and (61.1) that the ordinary resistance R is the zero-order term in an expansion of the function $Z(\omega)$ in powers of ω. To find the next term, we must take account both of R and of the self-inductance L of the conductor ‡

Let us consider a linear circuit containing a variable e.m.f. $\mathscr{E}(t)$. By the definition of $\mathscr{E}$, the work done per unit time by the electric field on the charges moving in the wire is $\mathscr{E}J$. This work goes partly into Joule heat and partly to change the energy of the magnetic field of the current. By the definition of R and L, the Joule heat evolved in the wire per unit time is RJ^2, and the magnetic energy of the current is $LJ^2/2c^2$. The law of conservation of energy therefore gives the equation

$$\mathscr{E}\mathscr{J} = RJ^2 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{LJ^2}{2c^2} = RJ^2 + \frac{1}{c^2}LJ\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}t},$$

or

$$\mathscr{E} = RJ + \frac{1}{c^2}L\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}t}. \tag{61.4}$$

In order to use the quadratic expressions $\mathscr{E}J$ and J^2 we must write $\mathscr{E}$ and J as real functions. Having derived the linear equation (61.4), however, we can take complex monochromatic forms: $\mathscr{E} = \mathscr{E}_0 e^{-i\omega t}$, $J = J_0 e^{-i\omega t}$. Then equation (61.4) gives the algebraic relation

$$\mathscr{E} = ZJ, \quad Z = R - \frac{i}{c^2}\omega L \tag{61.5}$$

Taking the real part in $J = \mathscr{E}/Z$, we have

$$J(t) = \frac{\mathscr{E}_0}{\sqrt{(R^2 + \omega^2 L^2/c^4)}}\cos(\omega t - \phi), \quad \tan\phi = \omega L/c^2 R, \tag{61.6}$$

[4]† We shall not pause here to discuss the general properties of this operator, since they are entirely analogous 10 those of the operator $\hat{\varepsilon}$, which will be examined in detail in §§77 and 82 .
‡ Here, and in what follows, R and L denote the values for a steady current.

which determines the amplitude of the current and the phase difference between the urrent and the e.m.f.

The real part of the expression (61.5) is the resistance R, which determines the energy dissipation in the circuit. It is easy to see that, whatever the function $Z(\omega)$, a similar relation holds between re Z and the energy dissipation for a given current. On averaging with respect to time the power $\mathscr{E}J$ required to maintain the periodic current in the circuit, we obtain the part of this power which continually makes good the dissipative losses. The energy dissipation in the circuit per unit time is therefore $Q = \frac{1}{2}\mathrm{re}\,(\mathscr{E}J^*)$, where $\mathscr{E}$ and J are expressed in complex form; see the last footnote to §59. Substituting $\mathscr{E} = ZJ$ and denoting the real and imaginary parts of Z by Z' and Z'' respectively: †

$$Z = Z' + iZ'', \tag{61.7}$$

we obtain $Q = \frac{1}{2}Z'|J|^2$ or, in terms of the real function $J(t)$,

$$Q = Z'(\omega)\overline{J^2}, \tag{61.8}$$

which gives the required relation.

It may be noted that, since Q is necessarily positive, Z' is also positive:

$$Z' > 0. \tag{61.9}$$

We may calculate $Z(\omega)$ for a wire of circular cross-section for any frequency which atisfies the quasi-steady condition, i.e without neglecting the skin effect. To do so, we Eain use the law of conservation of energy, but in a different form. We divide the power $\mathscr{E}J$ where $\mathscr{E}$ and J are real) into two parts, one being the change in the magnetic field energy utside the wire, and the other the total energy consumed inside the wire (both in changing le field and in evolution of heat). The second part can be calculated as the total energy flux leting the conductor through its surface per unit time. Thus we have

$$\mathscr{E}J = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{L_e J^2}{2c^2}\right) + \frac{cEH}{4\pi}\cdot 2\pi al = \frac{L_e}{c^2}J\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{2}cEHal,$$

here L_e is the external part of the self-inductance of the wire, E and H the electric and agnetic fields at its surface, a its radius, and l its length. The field H is related to the current $'$ by $H = 2J/ca$. Hence, dividing the above equation by J, we have

$$\mathscr{E} = \frac{1}{c^2}L_e\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}t} + El.$$

This is a linear equation, and hence we can use complex quantities. Then

$$\mathscr{E} = ZJ = -\frac{i\omega L_e}{c^2}J + El$$

whence

$$Z = -\frac{i\omega}{c^2}L_e + \frac{El}{J} = -\frac{i\omega}{c^2}L_e + \frac{2El}{caH} \tag{61.10}$$

For general frequencies, E and H are given by (60.2) and (60.4), and we have

$$Z = -\frac{i\omega}{c^2}L_e + \frac{1}{2}Rka\frac{J_0(ka)}{J_1(ka)} \tag{61.11}$$

[4†] Sometimes called the resistance and reactance (in Russian: active and reactive resistances).

where $R = l/\pi a^2\sigma$. When the skin effect is weak, we use the expansions (60.5); taking terms as far as $(a/\delta)^4$ and separating the real part, we find

$$Z' = R\left[1 + \frac{1}{48}\left(\frac{a}{\delta}\right)^4\right] = R\left[1 + \frac{1}{12}\left(\frac{\pi\sigma\omega a^2}{c^2}\right)^2\right]. \tag{61.1la}$$

In the opposite case of a strong skin effect we use the expressions (60.7), obtaining

$$Z' = \mathrm{Ra}\,/2\delta = (l/ca)\sqrt{(\omega/2\pi\sigma)}$$
$$Z'' = -\frac{\omega}{c^2}\left[L_e + \frac{2\delta}{a}L_i\right] = -\frac{\omega}{c^2}\left[L_e + \frac{lc}{a\sqrt{(2\pi\sigma\omega)}}\right]. \tag{61.12}$$

It is seen from (61.11a) that we can put $Z' = R$ if $(\pi\sigma\omega a^2/c^2)^2 \ll 12$. We also have $Z'' \mid Z' = \omega L/c^2R = (\pi\sigma\omega a^2/c^2)\,/2\log(l/a)$, where L is given by (34.1). Comparing this with the inequality just given, we see that the range of frequencies in which the expression (61.5) can be used to take the self-inductance into account depends on the ratio l/a and is fairly narrow.

In practice, however, the most important case is that in which the self-inductance of the circuit is due mainly to coils in it. whose self-inductance is large compared with that of an uncoiled wire (see §34). In such circuits formula (61,5) (i.e. equation (61,4) with constant R and L) can be used over a fairly wide range of frequencies.

Let us consider a circuit in a variable external magnetic field $\mathbf{H}_e$, which may be generated in any manner. We denote by $\mathbf{E}_e$ the electric field which would be induced by the variable field $\mathbf{H}_e$ in the absence of conductors. Both $\mathbf{H}_e$ and $\mathbf{E}_e$ vary only very slightly over the thickness of a thin wire (unlike the field of the currents in the wire). We can therefore! discuss the circulation of $\mathbf{E}_e$ round the current circuit without specifying the exact position of the contour of integration in the wire. This circulation is just the e.m.f. $\mathscr{E}$ induced in the circuit by the variable external magnetic field. By the integral form of Maxwell's equation we have

$$\mathscr{E} = \oint \mathbf{E}_e \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int \mathbf{H}_e \cdot \mathrm{d}\mathbf{f} = -\frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}\Phi_e}{\mathrm{d}t}, \tag{27}$$

where Φ_e is the flux of the external field through the circuit. Substituting this expression ft equation (61.4), we obtain

$$RJ + \frac{1}{c^2}L\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}\Phi_e}{\mathrm{d}t}.$$

Taking the self-inductance term to the right-hand side, we have

$$RJ = -\frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}\Phi_e}{\mathrm{d}t} - \frac{L}{c^2}\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}, \tag{61.14}$$

where $\Phi = \Phi_e + LJ/c$ is the total magnetic flux from the external magnetic field and the field of the current. In this form the equation gives Ohm's law for the whole circuit, i.e. the equality of RJ to the total e.m.f. in the circuit.

The formulation of equation (61.14) as expressing Ohm's law makes possible a generalization of it to the case where the shape of the circuit also varies with time. The selfinductance L is then a function of time, and (61.14) becomes

$$RJ = -\frac{1}{c^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(LJ) - \frac{1}{c}\frac{\mathrm{d}\Phi_e}{\mathrm{d}t} \tag{61.15}$$

Inderiving this from the law of conservation of energy we should have to take into account also the work done in deforming the conductor.

If there are several circuits in proximity, carrying currents J_a, then for each of them Φ_e in equation (61.14) is the sum of the magnetic fluxes due to all the other circuits (and to the external field, if any). The magnetic flux through the a th circuit due to the current J_b is $L_{ab}J_b/c$, where L_{ab} is the mutual inductance of the two circuits. We therefore have the following set of equations for the variable currents in the circuits:

$$R_a J_a + \frac{1}{c^2}\sum_b L_{ab}\frac{\mathrm{d}J_b}{\mathrm{d}t} = \mathscr{E}_a \tag{61.16}$$

The sum over b includes the self-inductance term ($b = a$), and $\mathscr{E}_a$ is the e.m.f. produced in the a th circuit by sources external to the system of currents considered.

For monochromatic periodic currents, the system of differential equations (61.16) becomes a set of algebraic equations:

$$\sum_b Z_{ab}J_b = \mathscr{E}_a \tag{61.17}$$

where the quantities

$$Z_{ab} = \delta_{ab}R_a - \frac{i\omega}{c^2}L_{ab} \tag{61.18}$$

form the impedance matrix. Like (61.5), the expressions (61.18) represent the first terms in an expansion of the functions $Z_{ab}(\omega)$ in powers of the frequency.

It should be noted that, in this approximation, the circuits have no mutual effect on the real parts of their impedances. Such an effect arises because the magnetic field of the variable current in one conductor generates eddy currents, and therefore an additional dissipation of energy, in another conductor. For linear conductors this effect is negligible, but it may become important if extended conductors are located near them.

Finally, let us consider how the equations of variable currents in linear circuits obtained in this section are related to the general equations of a variable magnetic field in arbitrary conductors. We shall take the simple example of the current set up in a circuit when a constant e.m.f. $\mathscr{E}_0$ is removed at time $t = 0$. From equation (61.4) we have †

$$\left.\begin{aligned} J &= \mathscr{E}_0/R \text{ for } t < 0 \\ J &= (\mathscr{E}_0/R)\, e^{-c^2Rt/L} \text{ for } t > 0 \end{aligned}\right\} \tag{61.19}$$

We see that, after the removal of the e.m.f., the current decays exponentially with time, the decrement being

$$\gamma = c^2R/L \tag{61.20}$$

If the problem is exactly formulated, this γ is the smallest of the γ_m obtained by solving the exact equation (58.10) for the conductor in question. Among the γ_m for a linear conductor there is one, the smallest, which is less than the others by a factor of the order of $\log(l/a)$. and this is (61.20).

28.2.5 §62. Capacitance in a quasi-steady current circuit

A variable current, unlike a steady one, can flow in an open circuit as well as in a closed one. Let us consider a linear circuit whose ends are connected to the plates of a capacitor, which are at a small distance apart. When a variable current flows in the circuit, the capacitor plates will be periodically charged and discharged, thereby acting as sources and sinks of current in the open circuit.

Since the distance between the capacitor plates is small, the magnetic energy of the current can again be taken as $LJ^2/2c^2$, where L is the self-inductance of the closed circuit which would be obtained by joining the capacitor plates by a short piece of wire. ‡ The only change in equation (61.4) is then to add to the voltage drop RJ across the resistance the potential difference e/C between the capacitor plates, where C is the capacitance and $\pm e(t)$ the charges on the plates. We obtain

$$\mathscr{E} = RJ + \frac{1}{c^2}L\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}t} + \frac{e}{C}$$

The current J is equal to the rate of decrease and increase of the charges on the two plates: $J = \mathrm{d}e/\mathrm{d}t$. Expressing J in terms of e, we have

$$\frac{1}{c^2}L\frac{\mathrm{d}^2e}{\mathrm{d}t^2} + R\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} + \frac{e}{C} = \mathscr{E} \tag{62.1}$$

This is the required equation for a variable current in a circuit with a capacitance.
If $\mathscr{E}$ is a periodic function of time having frequency ω, then equation (62.1) reduces to an algebraic relation between $\mathscr{E}$ and the charge e, or between $\mathscr{E}$ and the current $J = -i\omega e$. We have, in fact, $JZ = \mathscr{E}$, where the impedance Z is defined by

$$Z = R - i\left(\frac{\omega L}{c^2} - \frac{1}{\omega C}\right) \tag{62.2}$$

Taking real parts in the relation $J = \mathscr{E}/Z$, we obtain

$$\left.\begin{aligned} J(t) &= \frac{\mathscr{E}_0\cos(\omega t-\phi)}{\sqrt{\left[R^2+\left(\frac{\omega L}{c^2}-\frac{1}{\omega C}\right)^2\right]}} \\ \tan\phi &= \left(\frac{\omega L}{c^2}-\frac{1}{\omega C}\right)\frac{1}{R} \end{aligned}\right\} \tag{62.3}$$

which give the current in a circuit to which an external e.m.f. $\mathscr{E} = \mathscr{E}_0\cos\omega t$ is applied.
If $\mathscr{E} = 0$, the current in the circuit consists of free electric oscillations. The (complex) frequency of these oscillations is given by $Z = 0$, whence

$$\omega = -i\frac{Rc^2}{2L} \pm \sqrt{\left[\frac{c^2}{LC} - \left(\frac{Rc^2}{2L}\right)^2\right]}. \tag{62.4}$$

We may have either periodic oscillations damped with decrement $Rc^2/2L$ or an aperiodically damped discharge, depending on the sign of the radicand. In the limit as $R \to 0$ we have undamped oscillations whose frequency is given by Thomson's formula:

$$\omega = c/\sqrt{(LC)} \tag{62.5}$$

(W. Thomson, 1853).

Equation (62.1) can be immediately generalized to a system of several inductively coupled circuits containing capacitors. The current J_a in the a th circuit is related to the charges $\pm e_a$ on the corresponding capacitor by $J_a = \mathrm{d}e_a/\mathrm{d}t$, and equation (62.1) is replaced by the set of equations

$$\sum_b \frac{1}{c^2}L_{ab}\frac{\mathrm{d}^2e_b}{\mathrm{d}t^2} + R_a\frac{\mathrm{d}e_a}{\mathrm{d}t} + \frac{e_a}{C_a} = \mathscr{E}_a \tag{62.6}$$

[4]† Strictly speaking, these formulae are invalid for very small t, when the high-frequency terms in the Fourtef expansions of the functions are important and so equation (61.4) cannot be used. During this short interval of time, however, the current J cannot change significantly, and so formula (61.19) gives the current at subsequent times with sufficient accuracy.
‡ in the present section we neglect the skin effect.

For periodic (monochromatic) currents, these give the algebraic equations

$$\sum_b Z_{ab} J_b = \mathscr{E}_a \tag{62.7}$$

the matrix elements Z_{ab} being given by the formulae

$$Z_{ab} = \delta_{ab}\left(R_a + \frac{i}{\omega C_a}\right) - \frac{i\omega}{c^2} L_{ab}. \tag{62.8}$$

The eigenfrequencies of the current system are given by the condition of compatibility of equations (62.7) when $\mathscr{E}_a = 0$, i.e. by the condition

$$\det |Z_{ab}| = 0. \tag{62.9}$$

If the resistances R are not zero, all the "frequencies" have a non-zero imaginary part, and the electric oscillations are therefore damped.
It should be noticed that equations (62.6) are formally identical with the mechanical equations of motion of a system with several degrees of freedom which executes small damped oscillations. The generalized coordinates are represented by the charges e_a, and
the generalized velocities by the currents $J_a = \mathrm{d}e_a/\mathrm{d}t$. The Lagrangian of the system is

$$\mathscr{L} = \sum_{a,b} \frac{1}{2c^2} L_{ab} \dot{e}_a \dot{e}_b - \sum_a \frac{e_a^2}{2C_a} + \sum_a e_a \mathscr{E}_a \tag{62.10}$$

The kinetic and potential energies of the mechanical system are represented by the magnetic and electric energies of the current system, and the quantities $\mathscr{E}_a$ correspond to the externally applied forces which cause the forced oscillations of the system. The quantities R_a appear in the dissipative function

$$\mathscr{R} = \sum_a \frac{1}{2} R_a \dot{e}_a^2 \tag{62.11}$$

Equations (62.6) are the analogues of Lagrange's equations

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{e}_a} - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial e_a} = -\frac{\partial \mathscr{R}}{\partial \dot{e}_a} \tag{62.12}$$

PROBLEMS

Problem 1. Determine the eigenfrequencies of electric oscillations in two inductively coupled circuits containing self-inductances L_1 and L_2 and capacitances C_1 and C_2, neglecting the resistances R_1 and R_2.

Solution. The required frequencies are determined from the condition

$$\det |Z_{ab}| = Z_{11} Z_{22} - Z_{12}^2 = 0$$

where

$$Z_{11} = -i\left(\frac{\omega}{c^2} L_1 - \frac{1}{\omega C_1}\right), \quad Z_{22} = -i\left(\frac{\omega}{c^2} L_2 - \frac{1}{\omega C_2}\right), \quad Z_{12} = -\frac{i\omega}{c^2} L_{12}$$

Calculation gives

$$\omega_{1,2}^2 = c^2 \frac{L_1 C_1 + L_2 C_2 \mp \sqrt{\left[(L_1 C_1 - L_2 C_2)^2 + 4 C_1 C_2 L_{12}^2\right]}}{2 C_1 C_2 \left(L_1 L_2 - L_{12}^2\right)}$$

Both frequencies are purely real, owing to the fact that R_1 and R_2 have been neglected. As $L_{12} \to 0, \omega_1$ and ω_2 tend to $c/\sqrt{(L_1C_1)}$ and $c/\sqrt{(L_2C_2)}$. These are the frequencies for the two circuits separately.

Problem 2. The same as Problem 1. but for a circuit consisting of a resistance R, a capacitance C and an inductance L connected in parallel.

SOLUTION. The impedances of the three branches are $Z_1 = R, Z_2 = i/\omega C \cdot Z_3 = -i\omega L/c^2$, and the currents in them are such that $J_1 + J_2 + J_3 = 0, Z_1J_1 = Z_2J_2 = Z_3J_3$. Hence we have $1/Z_1 + 1/Z_2 + 1/Z_3 = 0$, whence

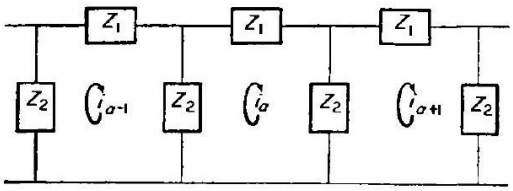
$$\omega = -\frac{\mathrm{i}}{2RC} \pm \sqrt{\left[\frac{c^2}{LC} - \frac{1}{4R^2C^2}\right]}.$$

Problem 3. Discuss the propagation of electric oscillations in a circuit consisting of an infinite succession of identical meshes containing impedances

$$Z_1 = -i\left(\frac{\omega}{c^2}L_1 - \frac{1}{\omega C_1}\right), \quad Z_2 = -i\left(\frac{\omega}{c^2}L_2 - \frac{1}{\omega C_2}\right)$$

as shown in Fig. 37. Find the range of frequencies which can be propagated in the circuit without damping. †

† The condition for the quasi-steady theory to be applicable to such a periodic circuit is that the dimension of one mesh should be small compared with the "wavelength" c/ω.



F1G. 37

SOLUTION. The current in mesh α is denoted by i_α, as shown in Fig. 37. Kirchhoff's second law gives for this mesh $Z_1i_\alpha + Z_2\,(2i_\alpha - i_{\alpha-1} - i_{\alpha+1}) = 0$. This is a linear difference equation in the integral variable α, with constant coefficients. We seek the solution in the form $i_\alpha =$ constant $\times q^\alpha$, obtaining for the parameter q the equation

$$q^2 - \left(2 + \frac{Z_1}{Z_2}\right)q + 1 = 0. \tag{1}$$

Let $-4 \leqslant Z_1/Z_2 \leqslant 0$, corresponding to values of ω^2 lying between c^2/L_1C_1 and $c^2\,(4/C_2 + 1/C_1)\,/\,(4L_2 + L_1)$. Then equation (1) has two complex conjugate roots with moduh $|q| = 1$. This means that the current does not decrease from one mesh to the next, i.e. the electric oscillations are propagated in the circuit without damping. Putting $q = e^{ikl}$, where l is the length of one mesh and k is the "wave number" of the oscillations propagated in the circuit, we can calculate the velocity of propagation u from the general result $u = \mathrm{d}\omega/\mathrm{d}k$.

If, however, ω is outside the range mentioned, equation (1) has two real roots q_1 and q_2, say: since $q_1q_2 = 1$, one root (q_1, say) is less than 1 in absolute magnitude, while q_2 is greater. It is easy to see that the propagation of undamped oscillations in the circuit is then impossible. To elucidate the reason for this, let us consider a circuit of large but finite length. An initial oscillatory impulse is given to one end of the circuit. the other end being closed in some manner. This closure corresponds mathematically to a certain boundary condition, by means of which we can determine the ratio of the coefficients c_1 and c_2 in the general solution

$i_\alpha = c_1 {q_1}^{-(A-\alpha)} + c_2 {q_2}^{-(A-\alpha)}$, where A is the "coordinate" of the end of the circuit. This ratio is of the order of unity. As $A - x$ increases, the second term in the solution rapidly becomes very small compared with the first term, because $|q_2| > 1$. Thus the solution is $i_a = c_1 {q_1}^{-(A-\alpha)}$ everywhere except for a small part near the end of the circuit, and $|i_\alpha|$ decreases towards the end of the circuit.
It should be emphasized that this damping does not involve dissipative absorption, because there is no resistance in the circuit; it can be imagined as being the result of reflection of the oscillatory impulse from each successive mesh of the circuit.

28.2.6 §63. Motion of a conductor in a magnetic field

Hitherto we have tacitly assumed that a conductor in an electromagnetic field is at rest in the frame of reference K in which $\mathbf{E}, \mathbf{H}$, etc. are defined. In particular, the relation $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$ between the current and the field is generally valid only for conductors at rest.
To determine the corresponding relation in a moving conductor, we change from the frame K to another frame K' in which the conductor, or some part of it, is at rest at the instant considered. In this frame we have $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}'$, where $\mathbf{E}'$ is the electric field in K'. The Well-known formula for the transformation of fields † gives $\mathbf{E}'$ in terms of the field in K :

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}/c. \tag{63.1}$$

Where $\mathbf{v}$ is the velocity of K' relative to K, i.e. in this case the velocity of the conductor, which we of course suppose small compared with the velocity of light. Thus we find

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}/c). \tag{63.2}$$

This gives the relation between the current and the field in moving conductors. The

following remark should be made concerning its derivation. In going from one frame of reference to the other we have transformed the field but left the current $\mathbf{j}$ unaltered. The correct transformation of the current density gives only terms of a higher order of smallness if $v \ll c$. In formula (63.2) the second term, which appears as a result of the field transformation, is in general not small compared with the first term, despite the factor v/c, For example, if the electric field is due to electromagnetic induction from a variable magnetic field. its order of magnitude contains a factor $1/c$ as compared with the magnetic field.

The energy dissipation in a conductor when a given current flows in it cannot, of course, depend on the motion of the conductor. The rate of evolution of Joule heat per unit volume in a moving conductor is therefore given in terms of the current density by the same expression j^2/σ as for a conductor at rest. The expression $\mathbf{j}\cdot\mathbf{E}$, however, is replaced by $\dagger j^2/\sigma = j\cdot(\mathbf{E}+\mathrm{v}\times\mathbf{B}/c)$.

Thus, in a moving conductor, the sum $\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}/c$ acts as an "effective" electric field producing the conduction current. Hence the e.m.f. acting in a closed linear circuit C is given by the integral

$$\mathscr{E} = \oint_c (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}/c) \cdot \mathrm{d}\mathbf{l} \tag{63.3}$$

This expression can be transformed as follows. According to Maxwell's equation, curl $\mathbf{E} = -(1/c)\partial\mathbf{B}/\partial t$, and so

$$\oint_c \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{1} = \int_S \operatorname{curl} \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{f} = -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\int_S \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{f}$$

[4] † See Fields, §24. The microscopic values of the electric and magnetic fields are replaced by their averaged vlues $\overline{\mathbf{e}} = \mathbf{E}, \overline{\mathbf{h}} = \mathbf{B}$.

or, denoting by Φ the magnetic flux through the surface S. which spans the circuit C,

$$\oint_c \mathbf{E} \cdot \ \mathrm{d}\mathbf{1} = -\frac{1}{c}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)_{\mathbf{v}=0}.$$

The time derivative with the suffix $v = 0$ denotes the rate of change of the magnetic flux due to the time variation of the magnetic field, the position of the contour C remaining unchanged.

In the second term in (63.3), we put $\mathbf{v} = \mathrm{d}\mathbf{u}/\mathrm{d}t$, where $\mathrm{d}\mathbf{u}$ is an infinitesimal displacement of the circuit element $\mathrm{d}l$. Then

$$\oint_c \mathbf{v} \times \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{1} = \oint_c \mathrm{d}\mathbf{u} \times \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{1}/\mathrm{d}t = -\oint \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{f}/\mathrm{d}t,$$

where $\mathrm{d}\mathbf{f} = \mathrm{d}\mathbf{u} \times \mathrm{d}\mathbf{1}$ is an element of area on the "side" surface between two infinitely close positions C and C' of the current circuit, which it occupies at times t and $t + \mathrm{d}t$ (Fig. 38). Since the total magnetic flux through any closed surface is zero, the flux through the side

$$\delta t \int \mathbf{j} \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{B} \mathrm{d}V/c = -\int \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{j} \times \mathbf{B} \mathrm{d}V/c$$

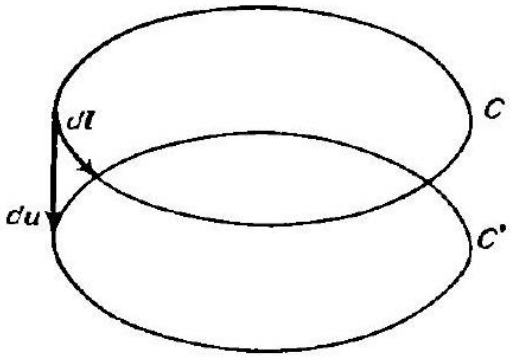


Fig. 38

surface must evidently equal the difference of the fluxes through surfaces spanning C and C^c. Thus

$$\oint_c \mathbf{v} \times \mathbf{B} \cdot \mathrm{d}\mathbf{1} = -(\partial \Phi/\partial t)_{\mathbf{B}=\text{ constant}},$$

where the time derivative denotes the rate of change of the magnetic flux due to the motion of the conductor in a constant field.

Adding the two terms, we have finally

$$\mathscr{E} = -(1/c)\mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}t, \tag{63.4}$$

where the time derivative now denotes the total rate of change of the magnetic flux through the moving circuit. Thus the expression (63.4), which is Faraday's law, is valid whatever the reason for the change in the magnetic flux, whether variation of the field itself (already discussed in §61, formula (61.13)) or motion of the conductor.

In a static magnetic field, the change in the flux may be due entirely to the motion of the circuit. If the circuit moves in such a way that every point of it moves along a line of force, then the

[4]† It is seen from this formula that the additional heat evolved in time δt in a conductor moving in a magnetic field is

flux through the circuit does not vary. This is an obvious result of the fact that the magnetic flux through any closed surface is zero, and the flux through the side surface described by the moving circuit is in this case identically zero (since $B_n = 0$ on this surface). Thus we can say that, to induce an e.m.f., the conductor must certainly move so as to cross lines of magnetic force.

The electromagnetic field in a moving conductor is given by the equations

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{curl}\mathbf{E} &= -(1/c)\partial\mathbf{B}/\partial t, \\ \operatorname{curl}\mathbf{H} = 4\pi\mathbf{j}/c &= (4\pi\sigma/c)(\mathbf{E} + \mathbf{v}\times\mathbf{B}/c), \\ \operatorname{div}\mathbf{B} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{63.5}$$

Expressing $\mathbf{E}$ in terms of $\mathbf{H}$ by means of the second equation and substituting in the first, We obtain

$$\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} - \operatorname{curl}(\mathbf{v}\times\mathbf{B}) = -\frac{c^2}{4\pi}\operatorname{curl}\left(\frac{\operatorname{curl}\mathbf{H}}{\sigma}\right). \tag{63.6}$$

In a homogeneous conductor with constant conductivity σ and constant magnetic Dermeability μ, we have

$$\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t} - \operatorname{curl}(\mathbf{v}\times\mathbf{H}) = \frac{c^2}{4\pi\sigma\mu}\Delta\mathbf{H}, \quad \operatorname{div}\mathbf{H} = 0. \tag{63.7}$$

These equations generalize those obtained in §58.

It should be pointed out, however, that, if there is only one conductor moving as a whole (without change of shape) in an external magnetic field, then the solution of the problem is considerably simplified if we use a system of coordinates fixed in the conductor. In this system the conductor is at rest, and the external field varies with time in a given manner, $_{S_0}$ that we return to the eddy-current problems discussed in §59. This possibility does not depend on Galileo's (or on Einstein's) relativity principle, since the new system of coordinates is in general not inertial. The equivalence of the problems results from the above-mentioned fact that the electromagnetic induction is independent of the cause of the change in the magnetic flux. This equivalence can also be demonstrated mathematically. T_0 do so, we expand the expression curl $(v\times B)$, using the facts that $\operatorname{div} B = 0$ and (for motion of the body as a whole) $\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$ (i.e. the body is incompressible). Then the left-hand side of equation (63.6) becomes

$$\partial B/\partial t + (v\cdot\operatorname{grad})B - (B\cdot\operatorname{grad})v. \tag{63.8}$$

This sum is just the time derivative of $\mathbf{B}$ with respect to axes fixed in a rotating body. For the sum of the first two terms is the "substantial" time derivative (derivative following the motion) $\mathrm{d}\mathbf{B}/\mathrm{d}t$, which gives the rate of change of $\mathbf{B}$ at a point moving with velocity $\mathbf{v}$. The third term takes into account the change in the direction of $\mathbf{B}$ relative to the body; it is zero for pure translation ($\mathbf{v}$ = constant) and equals $-\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{B}$ for rotation ($\mathbf{v} = \boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{r}$, where $\boldsymbol{\Omega}$ is the angular velocity).

To conclude this section, let us consider the phenomenon of unipolar induction, which occurs when a magnetized conductor rotates. If a stationary wire is connected to the rotating magnet by means of two sliding contacts A and B (Fig. 39) then a current flows in the wire. It is not difficult to calculate the e.m.f. which produces the current; the simplest procedure is to use a system of coordinates rotating with the magnet. If Ω is the angular velocity of rotation of the magnet, then in the new system the wire rotates with angular velocity $-\Omega$, while the magnet is at rest. Thus we have a conductor moving in a given static magnetic field $\mathbf{B}$ due to a fixed magnet. We neglect the distortion of the field by the wire itself. According to formula (63.3), the e.m.f. between the ends of the wire is

$$\mathscr{E} = \frac{1}{c}\int_{ACB} \mathrm{v}\times\mathbf{B}\cdot\mathrm{d}\mathbf{l} = \frac{1}{c}\int_{ACB} \mathbf{B}\times(\mathbf{r}\times\mathbf{\Omega})\cdot\mathrm{d}\mathbf{l} \tag{63.9}$$

taken along the wire. This is the required solution.

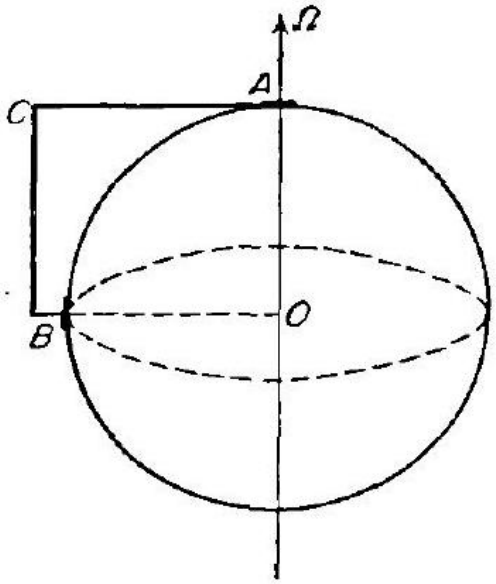


Fig. 39

PROBLEMS

PROBLEM 1. Determine the magnetic moment of a conducting sphere (with $\mu = 1$) rotating uniformly in a unform static magnetic field, and the torque on the sphere.

Solution. Let the external field have components $\mathfrak{S}_x, 0, \mathfrak{W}_z$ in a fixed system of coordinates with the z-axis in the direction of the angular velocity vector Ω. In a coordinate system ξ, η, z which rotates with the ,phere. the field components are $\mathfrak{W}_\xi = \mathfrak{S}_x\cos\Omega t, \mathfrak{S}_\eta = -\mathfrak{S}_x\sin\Omega t, \mathfrak{S}_z$, or, in complex form, $\mathfrak{S}_\xi = \mathfrak{S}_x e^{-i\Omega t}$, $\mathfrak{h}_\mathrm{f} = -i\mathfrak{h}_\mathrm{x}e^{-i\Omega t}, \mathfrak{S}_\mathrm{z}$.
Thus variable fields with frequency Ω act along the ξ and η axes, and the magnetic moment which they induce is

$$\mathscr{M}_\xi = V\,\mathrm{re}\,(\alpha\mathfrak{W}_\xi) = V\mathfrak{S}_x\,(\alpha'\cos\Omega t + \alpha''\sin\Omega t)\,,$$
$$\mathscr{M}_\eta = V\,\mathrm{re}\,(\alpha\mathfrak{S}_\eta) = V\mathfrak{S}_x\,(-\alpha'\sin\Omega t + \alpha''\cos\Omega t)\,,$$

where $V\alpha$ is the complex magnetic polarizability of the sphere, which has been determined in §59, Problem 1. Along the z-axis, on the other hand, the magnetic field is constant, and therefore causes no magnetic moment if $\mu = 1$). The components of the magnetic moment in the fixed system of coordinates are $\mathscr{M}_x = V\alpha'\mathfrak{S}_x$, $H_y = V\alpha''\mathfrak{S}_x, \mathscr{M}_z = 0$. Thus in this problem α' and α'' give the components of the magnetic moment of the sphere respectively parallel and perpendicular to the plane of the vectors $\mathbf{\Omega}$ and $\mathbf{5}$.
The torque on the sphere is $\mathbf{K} = \mathscr{M}\times\mathfrak{5}$. Its components relative to the fixed axes are

$$K_x = V\alpha''\mathfrak{S}_x\mathfrak{S}_z, \quad K_y = -V\alpha'\mathfrak{S}_x\mathfrak{S}_z, \quad K_z = -V\alpha''\mathfrak{S}_x^2$$

Theabove reduction of the problem of a sphere rotating in a field to that of a sphere at rest in a variable field is perfectly natural, in view of the comment at the end of the solution in §59, Problem 1. An interesting feature of the analogy is that, as the frequency ω of the variable magnetic field increases, the field is squeezed out of the sphere: in the limit $\omega\to\infty$,

all the lines of force pass round the sphere, not through it. In a similar way, a magnetic field perpendicular to the axis of rotation is squeezed out of a rapidly rotating sphere.

Problem 2. Determine the e.m.f. due to unipolar induction between the pole and the equator (Fig. 39) of a uniformly magnetized sphere rotating uniformly about the direction of magnetization.

Solution. When the sphere rotates about its direction of magnetization, it generates a static field, and since no currents flow within the sphere, we find from (63.6) that curl $(v \times B) = 0$. Hence the integral of $v \times B$ along the closed contour $OACBO$ (Fig. 39) is zero, and so the integration along ACB in formula (63.9) may be replaced by one along the path AOB, which lies inside the sphere. The integral along the segment AO of the axis of rotation is zero, since Ω and r are parallel; the integral along the radius OB gives, since B and Ω are parallel within the sphere,

$$\mathscr{E} = \frac{1}{c}\int_0^a B_0 \Omega r dr = B_0 \Omega a^2/2c$$

Where a is the radius of the sphere and B_0 the magnetic induction in it. In a uniformly magnetized sphere (in the absence of an external field) the induction is related to the magnetization by $B_0 + 2H = 0$ (cf. (8.1)) and $B_0 - H = 4\pi M$. whence $B_0 = 8\pi M/3$. In terms of the total magnetic moment $\mathscr{M}$ of the sphere we have finally $\delta = \Omega\mu/ca$.

Problem 3. Determine the total charge which flows along a closed linear circuit when the magnetic flux "rough the circuit changes for any reason from one constant value (Φ_1) to another (Φ_2).

Solution. The required total charge is the integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} J \, \mathrm{d}t$$

lere $J(t)$ is the induction current in the circuit. Mathematically, this integral is the Fourier component of the nction $J(t)$ that has the frequency $\omega = 0$. It is therefore related to the corresponding component of the e.m.f. by

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathscr{E} \mathrm{d}t = Z(0) \int_{-\infty}^{\infty} J \, \mathrm{d}t$$

see (61.3). Putting $Z(0) = R$, where R is the resistance of the circuit to a steady current and $\mathscr{E} = -(1/c)\mathrm{d}\Phi/d_d$ we have

$$\int_{-\infty}^{\infty} J \, \mathrm{d}t = \frac{1}{cR}(\Phi_1 - \Phi_2)$$

28.2.7 §64. Excitation of currents by acceleration

In discussing the motion of a conductor in §63 we have neglected possible effects of the acceleration, if any. The accelerated motion of a metal, however, is equivalent to the action of additional inertia forces on the conduction electrons. If $\dot{\mathbf{v}}$ is the acceleration of the conductor and m the mass of the electron, then the force on an electron is $-m\dot{\mathbf{v}}$. It affects the electron in the same way as an electric field $m\dot{\mathbf{v}}/e$, where $-e$ is the charge on the electron. Thus the effective electric field on the conduction electrons in an accelerated metal is

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + m\dot{\mathbf{v}}/e \tag{64.1}$$

The current density is accordingly

$$\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}' = \sigma(\mathbf{E} + m\dot{\mathbf{v}}/e) \tag{64.2}$$

Expressing $\mathbf{E}$ in terms of $\mathbf{E}'$ from (64.1), we substitute in the equation

$$\operatorname{curl}\mathbf{E} = -(1/c)\partial\mathbf{H}/\partial t$$

(as usual, we put $\mu = 1$). Then

$$\operatorname{curl}\mathbf{E}' = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t} + \frac{m}{e}\operatorname{curl}\dot{\mathbf{v}} \tag{64.3}$$

We write $\mathbf{v}$ as a sum $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{r}$, where $\mathbf{u}$ is the translational velocity and $\boldsymbol{\Omega}$ the angular velocity of rotation of the body. Differentiating with respect to time, we find the acceleration to be $\dot{\mathbf{v}} = \dot{\mathbf{u}} + \boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{v} + \dot{\boldsymbol{\Omega}}\times\mathbf{r} = \dot{\mathbf{u}} + \boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{u} + \boldsymbol{\Omega}\times(\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{r}) + \boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{r}$. The first two terms are independent of $\mathbf{r}$, and therefore give zero on differentiation with respect to the coordinates. The third term can be written as $\boldsymbol{\Omega}\times(\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{r}) = -\frac{1}{2}\operatorname{grad}(\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{r})^2$, and its curl is therefore zero. Finally, curl $(\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{r}) = 2\boldsymbol{\Omega}$. Thus, substituting for $\dot{\mathbf{v}}$ in equation (64.3), we have curl $\mathbf{E}' = -(1/c)\partial\mathbf{H}/\partial t + 2m\boldsymbol{\Omega}/e$ or

$$\operatorname{curl}\mathbf{E}' = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{H}'}{\partial t}, \tag{64.4}$$

where

$$\mathbf{H}' = \mathbf{H} - 2mc\boldsymbol{\Omega}/e \tag{64.5}$$

Since Ω is independent of the coordinates, the equation curl $\mathbf{H} = 4\pi\mathbf{j}/c$ is still valid if H is replaced by $\mathbf{H}'$:

$$\operatorname{curl}\mathbf{H}' = 4\pi\sigma\mathbf{E}'/c$$

Eliminating $\mathbf{E}'$ from equations (64.4) and (64.6), we obtain for $\mathbf{H}'$ the equation

$$\triangle\mathbf{H}' = \left(4\pi\sigma/c^2\right)\partial\mathbf{H}'/\partial t$$

which is the same as the equation for $\mathbf{H}$ in a conductor at rest.

Outside the body, the field satisfies the equation $\triangle\mathbf{H} = 0$ (the wavelength being supposed large compared with the dimension of the body), and $\mathbf{H}'$ satisfies the same equation.

Finally, on the surface of the conductor $\mathbf{H}'$, like $\mathbf{H}$, is continuous. The only difference is in the condition at infinity, where $\mathbf{H}$ tends to zero but $\mathbf{H}'$ tends to the limit $-2mc\boldsymbol{\Omega}/e$.
Thus the problem of determining the variable magnetic field $\mathbf{H}$ near a non-uniformly rotating body is equivalent to that of determining the field $\mathbf{H}'$ near a body at rest in a unform external magnetic field

$$\mathfrak{S} = -2mc\Omega/e. \tag{64.8}$$

The required field $\mathbf{H}^{(e)}$ outside the conductor is obtained by subtracting $\mathfrak{S}$ from the solution $\mathbf{H}'$ of this latter problem.
The magnetic field thus produced, like any variable field, induces electric currents in the conductor itself. In a simply-connected body, these currents appear in the form of a magnetic moment. In a non-uniformly rotating ring, the effect appears as an e.m.f.-the Stewart-Tolman effect.
Misunderstanding may arise from the appearance of the angular velocity $\boldsymbol{\Omega}$ itself, and not its time derivative, in formula (64.8). We may therefore emphasize that the above discussion, and therefore the significance here attached to the quantity (64.8), pertain only to non-uniform

rotation. When $\boldsymbol{\Omega}$ is constant, equation (64.7) with the appropriate boundary condition at infinity is identically satisfied by $\mathbf{H}' = \mathfrak{S}$, and the definition (64.5) then gives $\mathbf{H} = 0$. The magnetic field which arises from the gyromagnetic effect (§36) in uniform rotation is a small quantity which is here neglected.

The derivation has also ignored the deformation of the body which results from nonuniform rotation. It can be seen that including this deformation would not affect the result if the characteristic time of variation of the angular velocity is (as we assume) much longer than the relaxation time of the conduction electrons in the deformation: the electric current in the conductor is due to the gradient of $\phi + \zeta_0/e$, where ϕ is the field potential and ζ_0 the chemical potential of the conduction electrons (see §26). A non-uniform deformation produces a gradient of ζ_0, but this is compensated by the electric field which results from the thermodynamic equilibrium condition $e\phi + \zeta_0 = \text{constant}$.

PROBLEMS

P ROBLEM 1. Determine the magnetic moment of a non-uniformly rotating sphere with radius a. The rate of rotation is assumed so small that the penetration depth $\delta \gg a$.

Solution. The magnetic moment of the sphere in the field $\mathfrak{S}(t)$(64.8) is $\mathscr{M} = V\hat{\alpha}\mathfrak{S}$, where $\hat{\alpha}$ is an operator

whose action on the Fourier components of the function $\mathfrak{S}(t)$ is given by the formulae of §59, Problem 1. For the

components with frequencies ω such that $\delta \gg a$ we have $\mathcal{M} = V\alpha(\omega)\mathfrak{S} \cong -4\pi m a^5 \sigma i\omega\Omega/15ce$. This formula,

when written $\mathscr{M} = (4\pi m a^5\sigma/15ce)\,\mathrm{d}\Omega/\mathrm{d}t$, does not contain ω explicitly, and is therefore valid also for the

functions $\mathscr{M}(t)$ and $\Omega(t)$ themselves, as well as their individual Fourier components (on the assumption that the

F ourier expansion contains chiefly terms whose frequencies satisfy the above condition).

Problem 2. Determine the total charge which flows along a thin circular ring when it ceases a uniform

"tation about an axis perpendicular to its plane.

Solution. In the formula obtained in §63, Problem 3, Φ must be taken as the flux of the field 5 (64.8). The

total charge transferred when the angular velocity changes from Ω to zero is

$$\int_{-\infty}^{\infty} J\,\mathrm{d}t = \frac{2mc}{eRc}\Omega\pi b^2 = \frac{m\sigma V}{2\pi e}\Omega$$

where b is the radius of the ring and V its volume.

Problem 3. Determine the current in a superconducting circular ring which ceases to rotate uniformly.

Solution. From the condition that the total magnetic flux through the ring be constant (see (54.5)), we have

$$J = \frac{2mc^2}{eL}\Omega\pi b^2 = \frac{mc^2 b\Omega}{2e[\log(8b/a) - 2]}$$

See the third footnote to §54 concerning the value of L.

28.3 VIII Magnetohydrodynamics by Landau

28.3.1 Overview of Applications of Magnetohydrodynamics

(?????? top 1 question about this field)

28.3.2 §65. The equations of motion for a fluid in a magnetic field

If a conducting fluid moves in a magnetic field, electric fields are induced in it and electric currents flow. The magnetic field exerts forces on these currents which may considerably modify the flow. Conversely, the currents themselves modify the magnetic field. Thus we have a complex interaction between the magnetic and the fluid-dynamic phenomena, and the flow must be examined by combining the field equations with those of fluid dynamics.
The applications of magnetohydrodynamics cover a very wide range of physical objects, from liquid metals to cosmic plasmas. We shall not discuss here the specific conditions that exist in various particular objects, but simply mention that for magnetohydrodynamics to be strictly applicable it is of course necessary that the characteristic distances and time intervals for the motion in question should be much greater than the mean free path and mean free time of the current-carriers (electrons or ions). In some cases, however, equations that are formally identical with those of magnetohydrodynamics in an ideal fluid may describe also the motion of a medium with a long mean free path. Such a situation occurs, for example, in a non-equilibrium plasma in which the electron temperature considerably exceeds the ion temperature (cf. PK, §38).
The magnetic permeability of the media considered in metnetohydrodynamics differs only slightly from unity, and the difference is unimportant as regards the phenomena under discussion. We shall therefore take $\mu = 1$ throughout the present chapter. †

Let us first set up the equations of magnetohydrodynamics for conditions such that all dissipative processes may be neglected, i.e. for an ideal fluid. This means that no account is taken of viscosity and thermal conduction, or of the finite electrical conductivity σ of the medium, which is regarded as being indefinitely great.

Putting $\sigma \to \infty$ in equations (63.7), we write

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \tag{65.1}$$

$$\partial \mathbf{H}/\partial t = \operatorname{curl}(\mathbf{v} \times \mathbf{H}). \tag{65.2}$$

The equations of fluid dynamics are the equation of continuity

$$\partial \rho/\partial t + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0, \tag{65.3}$$

where ρ is the fluid density, and the Navier-Stokes (Euler) equation

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \operatorname{grad})\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} P + \frac{\mathbf{f}}{\rho}.$$

where $\mathbf{f}$ is the volume density of the external (in this case, electromagnetic) forces. By formula (35.4) we have $\mathbf{f} = \mathbf{j} \times \mathbf{H}/c = (\operatorname{curl} \mathbf{H}) \times \mathbf{H}/4\pi$. Thus the equation of motion of the fluid is

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \operatorname{grad})\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} P - \frac{1}{4\pi\rho} \mathbf{H} \times \operatorname{curl} \mathbf{H}. \tag{65.4}$$

[4] † In the literature on magnetohydrodynamics, the magnetic field under these conditions is often denoted by $\mathbf{B}$ to emphasize that it is the averaged microscopic field, $h = B$. We shall here use the notation H, however, for the sake of uniformity with the other chapters, in which non-magnetic media are discussed.

To these equations we must add the equation of state

$$P = P(\rho, T) \tag{65.5}$$

which relates the pressure, density and temperature of the fluid, and the equation of conservation of entropy, which expresses the fact that the motion is adiabatic in the absence of dissipation:

$$\mathrm{d}s/\mathrm{d}t \equiv \partial s/\partial t + \mathrm{v} \cdot \operatorname{grad} s = 0 \tag{65.6}$$

where s is the entropy per unit mass of the fluid and $\mathrm{d}/\mathrm{d}t \equiv \partial/\partial t + \mathrm{v} \cdot \operatorname{grad}$ denotes the "substantial" derivative giving the rate of change of a quantity at a point moving with the fluid particle. Equations (65.1)-(65.6) form a complete system of equations of magnetohydrodynamics for an ideal fluid.

The Navier-Stokes equation can be written (using the equation of continuity) in a form expressing the law of conservation of momentum:

$$\partial \left(\rho v_i\right)/\partial t = -\partial \Pi_{ik}/\partial x_k \tag{65.7}$$

where Π_{ik} is the momentum flux density tensor (see $FM, 7$). In the absence of external forces, $\Pi_{ik} = \rho v_i v_k + P\delta_{ik}$. Transforming the last term in (65.4) by means of $\mathbf{H}\times$ curl $\mathbf{H} = \frac{1}{2}\operatorname{grad}\mathbf{H}^2 - (\mathbf{H}\cdot\operatorname{grad})\mathbf{H}$, and $\operatorname{div}\mathbf{H} \equiv \partial H_k/\partial x_k = 0$, we have in magnetohydrodynamics

$$\Pi_{ik} = \rho v_i v_k + P\delta_{ik} - \left(H_i H_k - \frac{1}{2}H^2\delta_{ik}\right)/4\pi \tag{65.8}$$

The added term is the Maxwell stress tensor, as it should be.
The equation of conservation of energy in ordinary fluid dynamics is

$$\partial\left(\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho\varepsilon\right)/\partial t = -\operatorname{div}\mathbf{q},$$

where

$$\mathbf{q} = \rho\mathbf{v}\left(\frac{1}{2}v^2 + w\right);$$

ε and $w = \varepsilon + P/\rho$ are respectively the internal energy and heat function per unit mass of fluid; this necessarily follows from the equation of motion (see $FM, 86$). When a magnetic field is present in the conducting medium, the energy density includes also the magnetic energy $H^2/8\pi$, and the energy flux density includes also the Poynting vector $\mathbf{S} = c\mathbf{E}\times\mathbf{H}/4\pi$. Expressing $\mathbf{E}$ in the latter in terms of $\mathbf{H}$ by

$$\mathbf{E} = -\mathbf{v}\times\mathbf{H}/c \tag{65.9}$$

which follows from (63.2) when $\sigma \to \infty$ and $\mathbf{j}$ is finite †, we find that the equation of conservation of energy in magnetohydrodynamics is

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho\varepsilon + \frac{H^2}{8\pi}\right) = -\operatorname{div}\mathbf{q} \tag{65.10}$$

where the energy flux density is

[4]† This expression corresponds to a zero field $\mathbf{E}'$(63.1) in a frame of reference moving with the fluid volume element concerned: in a perfectly conducting medium, the electric field is completely screened.

$$\mathbf{q} = \rho\mathbf{v}\left(\frac{1}{2}v^2 + w\right) + \mathbf{H} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{H})/4\pi. \tag{65.11}$$

It is not difficult to verify this by direct calculation
The above equations of magnetohydrodynamics are based on neglecting the displacement current in Maxwell's equations. We thus assume that

$$(1/c)|\partial\mathbf{E}/\partial t| <\leqslant| \text{ curl } \mathbf{H} | . \tag{65.12}$$

Expressing $\mathbf{E}$ in terms of $\mathbf{H}$ by (65.9) then gives

$$vl/c^2\tau \ll 1, \tag{65.13}$$

where l and τ are length and time parameters characteristic of the motion concerned. From (65.2), $l/\tau \sim v$, and we then find from (65.13) the condition $v \ll c$: the motion must be nonrelativistic (as we have assumed from the start). Equation (65.4) gives $\rho v/\tau \sim H^2/l$; in combination with (65.13), this yields a condition on the magnetic field:

$$H^2 \ll \rho c^2. \tag{65.14}$$

It should be noted that the left-hand side of (65.10) does not include the electrical energy $E^2/8\pi$, and that of (65.7) does not include the electromagnetic field momentum $\mathbf{S}/c^2$. This is a necessary consequence of neglecting the displacement current. The smallness of the electrical energy in comparison with the magnetic energy corresponds to the inequality $E \sim vH/c \ll H$, and that of $S/c^2 \sim EH/c \sim vH^2/c^2$ in comparison with ρv corresponds to the inequality (65.14).

Let us return to the equation (65.2), which has an important physical interpretation (H. Alfvn, 1942). We expand the right-hand side, using the fact that div $\mathbf{H} = 0$:

$$\partial\mathbf{H}/\partial t = (\mathbf{H} \cdot \mathbf{grad})\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{grad})\mathbf{H} - \mathbf{H}\,\mathrm{div}\, v.$$

Substituting from the equation of continuity (65.3)

$$\mathrm{div}\, v = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial t} - \frac{\mathbf{v} \cdot \mathrm{grad}\,\rho}{\rho},$$

We obtain after a simple rearrangement of terms

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \mathrm{grad}\right)\frac{\mathbf{H}}{\rho} \equiv \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathbf{H}}{\rho} = \left(\frac{\mathbf{H}}{\rho} \cdot \mathrm{grad}\right)\mathbf{v}. \tag{65.15}$$

Let us now consider some "fluid line", i.e. a line which moves with the fluid particles composing it. Let $\delta 1$ be an element of length of this line; we shall determine how $\delta 1$ varies with time. If $\mathbf{v}$ is the fluid velocity at one end of the element $\boldsymbol{\delta 1}$, then the fluid velocity at the other end is $\mathbf{v} + (\delta\mathbf{1}\cdot \mathrm{grad})\ \mathbf{v}$. During a time interval $\mathrm{d}t$, the length of $\delta\mathbf{1}$ therefore changes by $\mathrm{d}t(\delta\mathbf{1} \cdot \mathrm{grad})\mathrm{v}$, i.e. $\mathrm{d}(\delta\mathbf{1})/\mathrm{d}t = (\delta\mathbf{1} \cdot \mathrm{grad})\mathrm{v}$. We see that the rates of change of the vectors $\delta\mathbf{1}$ and $\mathbf{H}/\rho$ are given by identical formulae. Hence it follows that, if these vectors are initially in the same direction, they will remain parallel, and their lengths will remain in the ${}^{s_a}{}_{\mathrm{me}}$ ratio. In other words, if two infinitely close fluid particles are on the same line of force ${}^{\mathrm{at}}$ any time, then they will always be on the same line of force, and the value of H/ρ will be Proportional to the distance between the particles.

Passing now from particles at an infinitesimal distance apart to those at any distance ${}^{\mathrm{a}}$ part, we conclude that every line of force moves with the fluid particles which lie on it. We can picture this by saying that (in the limit $\sigma \to \infty$) the lines of magnetic force are "frozen"

in the fluid and move with it. The quantity H/ρ varies at every point proportionally to the extension of the corresponding "fluid line". If the fluid may be supposed incompressible $\rho =$ constant, and the field H varies as the extension of the lines of force.

These results can be viewed in another way: as any closed fluid contour moves about in the course of time, it cuts no line of force. This means (cf. §63) that the flux of the magnetic field through any surface spanning the fluid contour does not vary with time.

28.3.3 §66. Dissipative processes in magnetohydrodynamics

In ordinary fluid dynamics the dissipative processes are governed by three quantities, namely two coefficients of viscosity and the thermal conductivity. In magnetohydrody. namics the number is considerably greater, both because new electrical quantities occur, and because there is at each point a distinctive direction, that of **H**, which makes the fluid no longer isotropic. We shall, however, take only the simple case where all the kinetic coefficients may be regarded as constant throughout the medium, and in particular as being independent of the magnitude and direction of the magnetic field. There is then only one quantity, the electrical conductivity σ, to be added to the usual viscosity coefficients η and ζ and the thermal conductivity κ.†

The assumption that the kinetic coefficients are independent of the magnetic field implies that certain conditions are satisfied which considerably restrict the range of validity of the equations in comparison with that of the equations of magnetohydrodynamics for an ideal fluid. The mean free path of the current-carriers must be much less than the radius of curvature of their orbits in the magnetic field; that is, the collision frequency must be large compared with the Larmor frequency of the carriers. This condition is not satisfied in a highly rarefied medium or in a strong magnetic field. ‡

When viscosity and electrical conduction are taken into account, equation (65.2) is replaced by the complete equation (63.7):

$$\partial \mathbf{H}/\partial t = \operatorname{curl}(\mathbf{v} \times \mathbf{H}) + \left(c^2/4\pi\sigma\right) \wedge \mathbf{H}, \tag{66.1}$$

and equation (65.4) by the (complete) Navier-Stokes equation

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \operatorname{grad})v = -\frac{1}{\rho}\operatorname{grad} P + \frac{\eta}{\rho}\triangle v + \frac{1}{\rho}\left(\zeta + \frac{1}{3}\eta\right)\operatorname{grad} divv - \frac{1}{4\pi\rho}\mathbf{H} \times \operatorname{curl}\mathbf{H}. \tag{66.2}$$

Equation (66.1) does not involve the viscosity, and so the "freezing" of the lines of force as $\sigma \to \infty$ continues to occur even in a viscous perfectly conducting fluid.

The adiabatic equation (65.6) is replaced by the equation of heat transfer. In ordinar) fluid dynamics the latter is

$$\rho T\left(\frac{\partial s}{\partial t} + v \cdot \operatorname{grad} s\right) = \sigma'_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \operatorname{div}(\kappa \operatorname{grad} T) :$$

see FM, §49. The left-hand side of the equation is the quantity of heat generated per unit time and volume in a moving fluid particle. The right-hand side is the energy dissipated per unit time and volume. The first term is due to viscosity; σ'_{ik} is the viscous stress tensor:

$$\sigma'_{ik} = \eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ik}\operatorname{div}\mathbf{v}\right) + \zeta\delta_{ik}\operatorname{div}\mathbf{v}$$

[4]† The relation between the current and the electric field in a thermodynamically non-uniform medium isotropic at every point involves also the thermoelectric coefficient α (§26). However, if this coefficient is constant. it does not appear in the equations of motion.

‡ The problem of the equations of magnetohydrodynamics in a plasma where these conditions are not satisfied is dealt with elsewhere; see PK, §§58, 59.

The second term gives the dissipation due to thermal conduction. In a conducting fluid, a term giving the Joule heat must be added. The rate of evolution of this heat per unit volume is $\mathbf{j}^2/\sigma = (c^2/16\pi^2\sigma)\,(\text{ curl }\mathbf{H})^2$. The equation of heat transfer in magnetohydrodynamics is therefore

$$\rho T\left(\frac{\partial s}{\partial t} + v\cdot\operatorname{grad} s\right) = \sigma'_{ik}\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \kappa\triangle T + \frac{c^2}{16\pi^2\sigma}(\operatorname{curl}\mathbf{H})^2. \tag{66.3}$$

The momentum flux density tensor contains in addition the viscous stress tensor:

$$\Pi_{ik} = \rho v_i v_k + P\delta_{ik} - \sigma'_{ik} - \left(H_iH_k - \frac{1}{2}H^2\delta_{ik}\right)/4\pi \tag{66.4}$$

The heat flux density is now

$$\mathbf{q} = \rho\mathbf{v}\left(\frac{1}{2}v^2 + w\right) - (\mathbf{v}\sigma') - \kappa\operatorname{grad} T + \frac{1}{4\pi}\mathbf{H}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{H}) - \frac{c^2}{16\pi^2\sigma}\mathbf{H}\times\operatorname{curl}\mathbf{H}, \tag{66.5}$$

where $v\sigma'$ is a vector whose components are $\sigma'_{ik}v_k$. This includes extra terms due to viscosity, thermal conduction and electrical conduction, the last of which is obtained by substituting in the Poynting vector the field $\mathbf{E}$ from (63.2):

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \mathbf{j}/\sigma - \mathbf{v}\times\mathbf{H}/c\\ &= (c/4\pi\sigma)\text{ curl }\mathbf{H} - \mathbf{v}\times\mathbf{H}/c.\end{aligned} \tag{66.6}$$

The equations are somewhat simplified if the moving fluid can be supposed incompressible. The equation of continuity then reduces to $\operatorname{div} v = 0$, and in equation (66.2) the penultimate term is zero. We shall write out here the appropriate system of equations (in equations (66.1) and (66.2) it is convenient to transform the terms curl(vxH) and H× curl H by means of the appropriate formulae of vector analysis):

$$\operatorname{div}\mathbf{H} = 0, \quad \operatorname{div}\mathbf{v} = 0, \tag{66.7}$$

$$\partial\mathbf{H}/\partial t + (\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad})\mathbf{H} = (\mathbf{H}\cdot\mathbf{grad})\mathbf{v} + \left(c^2/4\pi\sigma\right)\triangle\mathbf{H}, \tag{66.8}$$

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad})\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\mathbf{grad}\left(P + \frac{H^2}{8\pi}\right) + \frac{1}{4\pi\rho}(\mathbf{H}\cdot\mathbf{grad})\mathbf{H} + v\triangle\mathbf{v}, \tag{66.9}$$

Where $v = \eta/\rho$ is the kinematic viscosity. Equation (66.3) is not needed in solving the problem of incompressible flow unless we are interested in the temperature distribution.
In ordinary fluid dynamics, the Reynolds number describes the role of viscosity terms in the equations of motion, in relation to the convection terms: $\mathrm{R} = ul/\nu$, where l and $u \sim l/\tau$ are the characteristic parameters of length and velocity for a particular motion of the fluid. In magnetohydrodynamics, we can supplement this by the magnetic Reynolds number

$$\mathrm{R}_m = ul/v_m, \quad v_m = c^2/4\pi\sigma \tag{66.10}$$

Which describes the role of the conduction term in equation (66.1). This term is analogous to the term $v\triangle\mathbf{v}$ in the Navier-Stokes equation, and v_m acts as a "diffusion coefficient" of the magnetic field. When $\mathrm{R}_m \gg 1$, this term may prove to be negligible. However, there is n_0 general answer to the question of when in fact dissipative processes in the fluid may be neglected, since the relevant conditions depend greatly on the nature of the motion and are, for instance, completely different for steady and non-steady flows.

In the opposite limiting case of a poorly conducting fluid, $\mathbf{R}_m \ll 1$, the equations of magnetohydrodynamics can be considerably simplified (S. I. Braginskii, 1959). The reason is that in this case the magnetic field is only slightly perturbed by the motion of the fluid. If the unperturbed field $\mathfrak{S}$ is independent of time (as we shall assume), the change $\mathbf{H}'$ in this field in the moving fluid may be estimated by comparing the two terms on the right of (66.1): $\operatorname{curl}(v \times \mathfrak{g}) \sim v_m \triangle \mathbf{H}'$, whence $H' \sim \mathbf{R}_m \mathfrak{H}$, and when $\mathbf{R}_m \ll 1$ we in fact have $H' \ll \mathfrak{H}$. Neglecting this change, we can suppose that the magnetic field $\mathbf{H}$ is the same as the field $\mathfrak{S}$ that would result from the external sources in vacuum. Since $\mathfrak{S}$ is constant, $\operatorname{curl} \mathfrak{e} = -(1/c)\partial \boldsymbol{H}/\partial t = 0$, i.e. the electric field has a potential: $\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\phi$. An equation for the potential ϕ can be derived from $\operatorname{div}\mathbf{j} = 0$, which is satisfied identically when the displacement current is neglected (i.e. because of the relation $\operatorname{curl}\mathbf{H} = 4\pi\mathbf{j}/c$). Substituting the current density $\mathbf{j} = \sigma(-\operatorname{grad}\phi + \mathrm{v} \times \mathfrak{I}/c)$ and noting that $\operatorname{curl}\mathfrak{I} = 0$ for the unperturbed field, we find (if σ = constant)

$$\triangle\phi = \mathfrak{S} \cdot \operatorname{curl} \mathrm{v}/c \tag{66.11}$$

The second equation is the Navier-Stokes equation

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \operatorname{grad}) v = -\frac{1}{\rho}\operatorname{grad} P + v\triangle v + f \tag{66.12}$$

(for an incompressible fluid), in which the volume density of external forces is

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= \mathbf{j} \times \mathfrak{g}/c \\ &= (\sigma/c)[\mathfrak{S} \times \operatorname{grad}\phi + \mathfrak{S} \times (\mathfrak{g} \times \mathbf{v})/c] \end{aligned} \tag{66.13}$$

Equations (66.11)-(66.13) are the appropriate ones for this case.

28.3.4 §67. Magnetohydrodynamic flow between parallel planes

An instructive example of the magnetohydrodynamic flow of a viscous conducting fluid occurs in steady flow in the space between two parallel solid planes when a uniform magnetic field $\mathfrak{S}$ is applied perpendicular to the planes (J. Hartmann, 1937). This is the simplest analogue of Poiseuille flow in ordinary fluid dynamics.

It is natural to assume that the velocity of the fluid is everywhere in the same direction (which we take as the x-direction), and depends only on the coordinate z (whose direction is perpendicular to the planes). The same is true of the longitudinal field H_x which results from the movement of the fluid. The pressure P, however, depends on x also, because there must be a pressure gradient in the direction of the motion in order to maintain a stead) flow. The equation $\operatorname{div} v = 0$ is satisfied identically, and from $\operatorname{div}\mathbf{H} = 0$ it follows that H_z = constant $= \mathfrak{S}$. The z-component of (66.9) shows that $P + {H_x}^2/8\pi$ is a function of x only. Since H_x is independent of x. the pressure gradient $\mathrm{d}P/\mathrm{d}x$ might be a function of x alone, but actually (because of the uniformity in the x-direction) it is a constant $-\Delta P/l$ (where ΔP is the pressure drop over a distance l).

The x-components of (66.8) and (66.9) give

$$\mathfrak{H}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z} + \frac{c^2}{4\pi\sigma}\frac{\mathrm{d}^2 H_x}{\mathrm{d}z^2} = 0 \tag{67.1}$$

$$\eta\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}z^2} + \frac{\mathfrak{S}}{4\pi}\frac{\mathrm{d}H_x}{\mathrm{d}z} = \text{ constant } \equiv -\Delta P/l \tag{67.2}$$

The boundary conditions on the solid surfaces are that the velocity of the viscous fluid be zero and that the tangential component of the magnetic field be continuous:

$$v = 0, \quad H_x = 0 \quad \text{for } z = \pm a,$$

where $2a$ is the distance between the solid planes and $z = 0$ lies half-way between them. The solution of (67.1) and (67.2) which satisfies these conditions is

$$\left.\begin{aligned} v &= v_0 \tfrac{\cosh(a/\delta)-\cosh(z/\delta)}{\cosh(a/\delta)-1}, \quad \delta = \tfrac{c}{\mathfrak{H}}\sqrt{\tfrac{\eta}{\sigma}} \\ H_x &= -v_0 \tfrac{4\pi}{c}\sqrt{(\sigma\eta)}\tfrac{(z/a)\sinh(a/\delta)-\sinh(z/\delta)}{\cosh(a/\delta)-1} \end{aligned}\right\} \tag{67.3}$$

The constant v_0 is the velocity of the fluid in the medial plane $z = 0$. Its relation to the pressure gradient may be found by substituting (67.3) in (67.2). The velocity averaged over the cross-section is

$$\bar{v} = \frac{1}{2a}\int_{-a}^{a} v \, \mathrm{d}z = \frac{\Delta P}{l}\frac{a\delta}{\eta}\left(\coth\frac{a}{\delta} - \frac{\delta}{a}\right) \tag{67.4}$$

The effect of the magnetic field on the flow, in comparison with that of the viscosity, is described by the quantity

$$\mathrm{G} = a/\delta = (a\mathfrak{S}/c)\sqrt{(\sigma/\eta)}, \tag{67.5}$$

called the Hartmann number. When $\mathrm{G} \ll 1$ we have

$$v = v_0\left(1 - z^2/a^2\right), \quad \bar{v} = (\Delta P/l)a^2/3\eta, \tag{67.6}$$

that is, ordinary Poiseuille flow. When $G \gg 1$,

$$v = v_0\left[1 - \exp\left(-\frac{a-|z|}{\delta}\right)\right], \bar{v} = \frac{\Delta P}{l}\frac{ac}{\mathfrak{S}\sqrt{(\sigma\eta)}}. \tag{67.7}$$

When the magnetic field increases, the velocity profile is flattened over the greater part of the cross-section, and the mean velocity is reduced (for a given pressure gradient); the decrease in the velocity occurs mainly in layers of thickness $\sim \delta$ near the planes.

The motion of the fluid gives rise to an electric field in the y-direction. Since the Motion is steady, curl $\mathbf{E} = 0$, and hence E_y = constant. The current density in the fluid is $_{j_y} = \sigma\left(E_y - \mathfrak{v}\mathfrak{G}/c\right)$. The total current through a cross-section of the fluid is zero: since also $j_y = (c/4\pi)(\text{ curl } \mathbf{H})_y$, we have

$$\begin{aligned} \int_{-a}^{a} j_y \, \mathrm{d}z &= \frac{c}{4\pi}\int_{-a}^{a}\frac{\partial H_x}{\partial z}\,\mathrm{d}z \\ &= \frac{c}{4\pi}\left[H_x(a) - H_x(-a)\right] = 0. \end{aligned}$$

Hence

$$\int_{-a}^{a} j_y \, \mathrm{d}z = 2a\sigma E_y - \frac{\sigma}{c}\mathfrak{H}\int_{-a}^{a} v \, \mathrm{d}z = 0$$

and so

$$E_y = \bar{v}\mathfrak{H}/c. \tag{67.8}$$

28.3.5 §68. Equilibrium configurations

The equilibrium of a perfectly conducting fluid (referred to here for clarity as a plasma) at rest in a constant magnetic field is described by the equations

$$\operatorname{grad} P = \mathbf{j} \times \mathbf{H}/c \tag{68.1}$$

$$\mathbf{j} = c \operatorname{curl} \mathbf{H}/4\pi \tag{68.2}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0 \tag{68.3}$$

The first of these is equation (65.4) with $\mathbf{v} = 0$ and written in terms of the electric current density, which is related to the magnetic field by Maxwell's equation (68.2). In the present section, we shall consider some general properties of equilibrium configurations derivable from these equations, but without entering into the complex and manifold problems of the stability of such configurations. †

Scalar multiplication of (68.1) by $\mathbf{H}$ and by $\mathbf{j}$ gives

$$(\mathbf{H} \cdot \mathbf{grad})P = 0, \quad (\mathbf{j} \cdot \mathbf{grad})P = 0; \tag{68.4}$$

that is, the pressure gradient is zero along the lines of magnetic force and along the current lines. Thus both sets of lines lie on surfaces

$$P(x, y, z) = \text{constant}, \tag{68.5}$$

called magnetic surfaces. In principle, every magnetic surface could be the boundary of an equilibrium configuration ‡

The equilibrium equations (68.1), (68.2) can also be put in the form

$$\partial \Pi_{ik}/\partial x_k = 0, \Pi_{ik} = P\delta_{ik} - \left(H_i H_k - \frac{1}{2} H^2 \delta_{ik} \right) /4\pi \tag{68.6}$$

if we start from the equation of motion in the momentum conservation form (65.7), (65.8). We multiply this equation by x_k, and integrate over some volume bounded by a closed surface. Integration by parts gives †, since $\partial x_k/\partial x_i = \delta_{ik}$,

$$\int \Pi_{ii} \, \mathrm{d}V = \oint \Pi_{ik} x_k \, \mathrm{d}f_i. \tag{68.7}$$

on substitution of Π_{ik} from (68.6), this equation becomes

$$\oint \left(3P + H^2/8\pi\right) \mathrm{d}V = \oint \left\{ \left(P + H^2/8\pi\right) \mathbf{r} - (\mathbf{H} \cdot \mathbf{r})\mathbf{H}/4\pi \right\} \cdot \mathrm{df} \tag{68.8}$$

(S. Chandrasekhar and E. Fermi. 1953).

Let the plasma occupy some finite volume outside which $P = 0$, and let there be no fixed field sources (rigid current-carrying conductors) outside it. Then the field far from the plasma decreases as $1/r^3$, and, if the integration is taken over all space, the surface integral is zero. The integral of the positive quantity $3P + H^2/8\pi$ cannot, however, be zero. It is therefore not possible for an equilibrium configuration bounded in space to exist without being maintained by a magnetic field from external sources; when such sources are present, the right-hand side of (68.8) becomes an integral over their surfaces, and the condition can in principle be satisfied

[4] † The main results on this subject (within the scope of magnetohydrodynamics) are given by B. B. Kadomtsev. Reviews of Plasma Physics 2, 153, 1966.

‡ The pressure P is determined by equations (68.1) and (68.2) only to within an arbitrary additive constant Hence any of the magnetic surfaces can be $P = 0$.

(V. D. Shafranov, 1957).
Let us consider the simplest unbounded configuration, a cylindrical plasma pinch of unlimited length and uniform along its length. In cylindrical polar coordinates r, ϕ, z, with the z-axis along the pinch, all quantities depend on the radial coordinate r only. The radial component H_r must be zero, since otherwise it would become infinite as $r \to 0$, in accordance with the equations

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(rH_r) = 0, \quad H_r = \text{ constant } /r.$$

The same is true of j_r because of the equation $\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$ which necessarily follows from (68.2).

The components of equation (68.2) give

$$j_\phi = -\frac{c}{4\pi}\frac{\mathrm{d}H_z}{\mathrm{d}r}, \quad j_z = \frac{c}{4\pi r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(rH_\phi)$$

From the second of these,

$$H_\phi = 2J(r)/cr, \quad J(r) = \int_0^r j_z \cdot 2\pi r \, \mathrm{d}r \tag{68.9}$$

Then equation (68.1) becomes

$$-\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}r} = \frac{1}{2\pi c^2 r^2}\frac{\mathrm{d}J^2(r)}{\mathrm{d}r} + \frac{1}{8\pi}\frac{\mathrm{d}{H_z}^2}{\mathrm{d}r}. \tag{68.10}$$

Two particular cases can occur here which are significantly different. In one, the z pinch, $H_z = 0$ and $j_\phi = 0$. Multiplying (68.10) by r^2 and integrating with respect to r from zero to the pinch radius a, with the boundary condition $P(a) = 0$, we find as the equilibrium condition

$$\int_0^a P(r) \cdot 2\pi r \, \mathrm{d}r = J^2(a)/2c^2 \tag{68.11}$$

where $J(a)$ is the total current through the pinch (W. Bennett, 1934). The equilibrium configuration is here contained by the field of the longitudinal current.

In the other case, the theta pinch †, $H_\phi = 0$ and $j_z = 0$. In this case, we have from (68.10)

$$P + H_z^2/8\pi = \mathfrak{Y}^2/8\pi, \tag{2}$$

where $\mathfrak{S}$ is the longitudinal magnetic field outside the pinch. Here the plasma is contained by the external longitudinal field.

In an arbitrary space-bounded axially symmetric configuration, the radial components H_r and j_r may be non-zero (a toroidal configuration). Moreover, all quantities may then depend on z as well as on r.

Equations (68.1)-(68.3), written in components, are

$$j_\phi H_z - j_z H_\phi = c\partial P/\partial r, \quad j_r H_\phi - j_\phi H_r = c\partial P/\partial z, \quad j_z H_r = j_r H_z \tag{68.13}$$

$$j_r = -\frac{c}{4\pi}\frac{\partial H_\phi}{\partial z}, \quad j_z = \frac{c}{4\pi r}\frac{\partial}{\partial r}(rH_\phi), \quad j_\phi = \frac{c}{4\pi}\left(\frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r}\right) \tag{68.14}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rH_r) + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0 \tag{68.15}$$

[4†] This derivation is similar to the familiar derivation of the virial theorem (Fields, §34).

A consequence of these equations, which is already evident from the vector form (68.1), is that if the current density distribution is azimuthal ($j_r = j_z = 0, j_\phi \neq 0$) the magnetic field is meridional ($H_\phi = 0$). If the magnetic field is azimuthal, a stronger conclusion is possible: not only is the current density meridional, but the whole equilibrium configuration must be a z pinch ($j_r = 0, H_\phi$ and j_z independent of z), as is easily seen by eliminating P from the first two equations (68.13) and then using the other equations.

Equations (68.13)-(68.15) can be reduced to a single equation in the following way (V. D. Shafranov, 1957; H. Grad, 1958). We define the quantities

$$\psi(r,z) = \int_0^r H_z \cdot 2\pi r \, \mathrm{d}r, \quad J(r,z) = \int_0^r j_z \cdot 2\pi r \, \mathrm{d}r \tag{68.16}$$

the magnetic flux and total current through a circle of radius r perpendicular to the z-axis. From these definitions and the equations $\operatorname{div}\mathbf{H} = 0, \operatorname{div}\mathbf{j} = 0$, we find the meridional components of the field and the current density:

$$\left.\begin{array}{rl} H_r &= -\frac{1}{2\pi r}\frac{\partial\psi}{\partial z}, H_z = \frac{1}{2\pi r}\frac{\partial\psi}{\partial r} \\ j_r &= -\frac{1}{2\pi r}\frac{\partial J}{\partial z}, \quad j_z = \frac{1}{2\pi r}\frac{\partial J}{\partial r} \end{array}\right\} \tag{68.17}$$

These expressions show that the gradients of ψ and J are orthogonal to the line of magnetic force and the current line respectively. In view of the discussion of the surfaces (68.5) at the beginning of this section, we can conclude that ψ and J are constant on the magnetic surfaces, and therefore any two of $\psi.J$ and P can be expressed as functions of the third
† The name comes from the angle in cylindrical polar coordinates. which is often denoted by θ.
jone. In particular,

$$P = P(\psi), J = J(\psi) \tag{68.18}$$

The azimuthal components of the field and the current are expressed in terms of ψ and J by means of equations (68.14):

$$H_\phi = \frac{2J}{cr}, \quad j_\phi = -\frac{c}{8\pi^2 r}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right) \tag{68.19}$$

Finally, substituting these results in the first equation (68.13), we find

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = -16\pi^3 r^2 \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\psi} - \frac{8\pi^2}{c^2}\frac{\mathrm{d}J^2}{\mathrm{d}\psi}. \tag{68.20}$$

On specifying any particular functions $P(\psi)$ and $J(\psi)$ and solving this equation, we obtain some equilibrium configuration that is in principle possible; the field and current distributions in this configuration are given by (68.17) and (68.19), and the magnetic surfaces are $\psi(r,z) =$ constant.
As an illustration, the expression

$$\psi/\psi_0 = \frac{1}{2}\left(bR^2 + r^2\right)z^2 + \frac{1}{8}(a-1)\left(r^2 - R^2\right)^2 \tag{68.21}$$

is the solution of (68.20) with $\mathrm{d}P/\mathrm{d}\psi =$ constant and $\mathrm{d}J^2/\mathrm{d}\psi =$ constant; ψ_0, a, b and R are constants. with

$$16\pi^3 \, \mathrm{d}P/\mathrm{d}\psi = -a\psi_0, \quad \left(8\pi^2/c^2\right)\mathrm{d}J^2/\mathrm{d}\psi = -bR^2\psi_0.$$

This solution describes a toroidal configuration consisting of nested toroidal magnetic surfaces $\psi =$ constant, any of which may be taken as the plasma boundary $P = 0$. The innermost

surface degenerates to a curve, the circle $r = R, z = 0$, called the magnetic axis. Near the magnetic axis,

$$\psi/\psi_0 \cong \frac{1}{2}R^2(b+1)z^2 + \frac{1}{2}R^2(a-1)(r-R)^2$$

Thus, if $b+1 > 0$ and $a > 1$, the cross-sections of the magnetic surfaces near the axis are ellipses. With increasing distance from the axis, ψ increases and the pressure falls. Outside the surface $P = 0$ (the plasma boundary), the magnetic field needed to maintain equilibrium is given by equation (68.20) with zero on the right-hand side and the boundary conditions that ψ and its normal derivative be continuous.

28.3.6 69. Hydromagnetic waves

Let us consider the propagation of small disturbances in a homogeneous conducting medium in a uniform constant magnetic field $\mathbf{H}_0$. We shall assume that the fluid is ideal, i.e. neglect all dissipation processes in it. †

We start from the equations of magnetohydrodynamics, (65.1)-(65.4). The adiabaticity equation (65.6) signifies only that, if the unperturbed medium is homogeneous, s constant in the perturbed medium also, i.e the flow is isentropic.
We write

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{h}, \quad \rho = \rho_0 + \rho', \quad \boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}_0 + \boldsymbol{P}'$$

where the suffix 0 denotes the constant equilibrium value, and $\mathbf{h}, \rho'$ and P' are the small variations in the wave. The velocity v, which is zero in equilibrium, is a small quantity of the same order. Since the flow is isentropic, the changes in pressure and density are related by $P' = u_0^2\rho'$, where $u_0^2 = (\partial P/\partial\rho)_s$ is the square of the ordinary velocity of sound in the medium concerned. Neglecting terms of higher order than the first in equations (65.1)-(65.4), we obtain the linear equations

$$\left.\begin{array}{c} \mathrm{divh} = 0, \quad \partial\ \mathrm{h}/\partial t = \mathrm{curl}(\mathrm{v}\times\mathrm{h}), \\ \partial\rho'/\partial t + \rho\,\mathrm{div}\,\mathrm{v} = 0, \\ \partial\mathrm{v}/\partial t = -(u_0^2/\rho)\,\mathrm{grad}\,\rho' - (\mathbf{H}\times\mathrm{curlh})/4\pi\rho. \end{array}\right\} \tag{69.1}$$

Here and in what follows we omit, for brevity, the suffix zero to the equilibrium values.
We shall seek solutions of these equations as plane waves proportional to $\exp[i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)]$. The system of equations (69.1) then gives the algebraic equations

$$\left.\begin{array}{c} -\omega\mathbf{h} = \mathbf{k}\times(\mathbf{v}\times\mathbf{H}), \quad \omega\rho' = \rho\mathbf{k}\cdot\mathbf{v} \\ -\omega\mathbf{v} + (u_0{}^2/\rho)\,\rho'\mathbf{k} = -\mathbf{H}\times(\mathbf{k}\times\mathbf{h})/4\pi\rho \end{array}\right\} \tag{69.2}$$

the equation $\mathbf{k}\cdot\mathbf{h} = 0$, which follows from $\mathrm{div}\,\mathbf{h} = 0$, is automatically satisfied and need not be considered separately.

The first of these equations shows that the vector h is perpendicular to the wave vector k. which we shall take to be along the x-axis, with the plane of $\mathbf{k}$ and $\mathbf{H}$ as the xy-plane. We also introduce the phase velocity of the wave, $u = \omega/k$. Eliminating ρ' from the third equation by means of the second equation, and rewriting the result in components, we have

$$\left.\begin{array}{c} uh_z = -v_zH_x, \quad uv_z = -H_xh_z/4\pi\rho \\ uh_y = v_xH_y - v_yH_x, \quad uv_y = -H_xh_y/4\pi\rho \\ v_x\left(u - \frac{u_0^2}{u}\right) = H_yh_y/4\pi\rho \end{array}\right\} \tag{69.4}$$

[4]† The condition for this approximation to be valid is that the wave damping coefficient (calculated in the ^{P} toblem at the end of this section) should be small.

We have here separated the equations into two groups, the first involving only h_z and v_z and the second only h_y, v_x and v_y. It therefore follows that perturbations of the two groups of variables are propagated independently. The density, and therefore the pressure, are propagated with the perturbations h_y, v_x and v_y, being related to v_x by

$$\rho' = \rho v_x/u \tag{69.5}$$

The compatibility condition for the two equations (69.3) is

$$u = u_A \equiv |H_x| \,/\sqrt{}(4\pi\rho); \tag{169.6}$$

we shall assume that $H_x > 0$, and omit the modulus sign. In these waves the component th. of the magnetic field which is perpendicular to the directions of propagation and of the constant field $\mathbf{H}$ oscillates, and with it the velocity v_z, which is related to h_z by

$$v_z = -h_z/\sqrt{}(4\pi\rho) \tag{((69.17)}$$

The relation between ω and $\mathbf{k}$ (the dispersion relation, as it is called) given by (69.6) involves the direction of the wave vector:

$$\omega = \mathbf{H}\cdot\mathbf{k}/\sqrt{}(4\pi\rho)$$

the physical velocity of propagation of the waves is called the group velocity and is given by no derivative $\partial\omega/\partial\mathbf{k}$. In the present case we have

$$\partial\omega/\partial\mathbf{k} = \mathbf{H}/\sqrt{}(4\pi\rho). \tag{69.9}$$

hich does not involve the direction of $\mathbf{k}$. The direction of propagation of the wave, in the anse of the direction of its group velocity, is the direction of $\mathbf{H}$. These are called Alfiven es (H. Alfvn, 1942), and (69.6) is the Alfvn velocity.

Let us now consider waves described by the equations (69.4), called magnetosonic waves. Equating to zero the determinant of these equations, we find an equation quadratic in u^2, "hose roots are

$$u_{f,s}^2 = \frac{1}{2}\left\{\frac{H^2}{4\pi\rho} + u_0^2 \pm \left[\left(\frac{H^2}{4\pi\rho} + u_0^2\right)^2 - \frac{H_x^2}{\pi\rho}u_0^2\right]^{1/2}\right\}. \tag{69.10}$$

We thus obtain two further types of wave. The waves corresponding to the plus and minus signs in (69.10) are called respectively fast and slow magnetosonic waves.

In the limiting case where $H^2 \ll 4\pi\rho{u_0}^2$ we have $u_f \cong u_0$, and it follows from equations (69.4) that $v_y \ll v_x$. In other words, in the limit the fast magnetosonic waves become ordinary sound waves propagated with velocity u_0. The weak transverse field in the wave is telated to v_x by $h_y \cong v_x H_y/u_0$. In the same limiting case, the velocity of the slow magnetosonic wave becomes the Alfvn velocity u_A, with $v_x \cong 0, v_y \cong -h_y/\sqrt{}(4\pi\rho)$, as in a wave of the first type, but with a different polarization: the vectors v and h are in a plane through $\mathbf{k}$ and $\mathbf{H}$, not perpendicular to it.

In an incompressible fluid (corresponding formally to the limit $u_0 \to \infty$) only one type of uave remains, namely Alfvn waves with two independent directions of polarization. The dispersion relation for these waves is given by (69.8); the vectors v and h are perpendicular to the wave vector and are related by

$$v = -h/\sqrt{}(4\pi\rho) \tag{69.11}$$

There is a simple interpretation of the fact that, in a longitudinal magnetic field, transverse displacements of the fluid are propagated in the form of waves. Because the lines of force are "frozen in", the transverse displacement of the particles results in a curvature of these lines, and therefore in their stretching and, at some points, in their compression. The urces in a magnetic field (expressed by the Maxwell stress tensor) are such as would occur fiel lines of magnetic force tended to contract and at the same time to repel one another. † Hence a curvature of the lines results in quasi-elastic forces which tend to straighten them, uding to further oscillations. Let us now return to formulae (69.4) and (69.10), and consider the opposite limiting case, there $H^2 \gg 4\pi\rho {u_0}^2$. We then have, in the first approximation. $u_f = H/\sqrt{(4\pi\rho)}$. Since this pression is independent of $\mathbf{k}$, the group velocity is of magnitude u_f and its direction is at of $\mathbf{k}$. In this wave the vector $\mathbf{v}$ is perpendicular to $\mathbf{H}$ (Fig. 40.p. 238), and its magnitude given in terms of $h = |h_y|$ by $v = h/\sqrt{(4\pi\rho)}$. For u_s we have in this limiting case $u_0 H_x/H$. The group velocity is $\partial\omega/\partial\mathbf{k} = u_0\mathbf{H}/H$. The vector $\mathbf{v}$ in this case is antirallel to H , and its magnitude is given by $v = hH^2/4\pi\rho u_0 H_y$.
When the relation between H^2 and $\rho {u_0}^2$ is arbitrary, both u_f and u_s depend on the

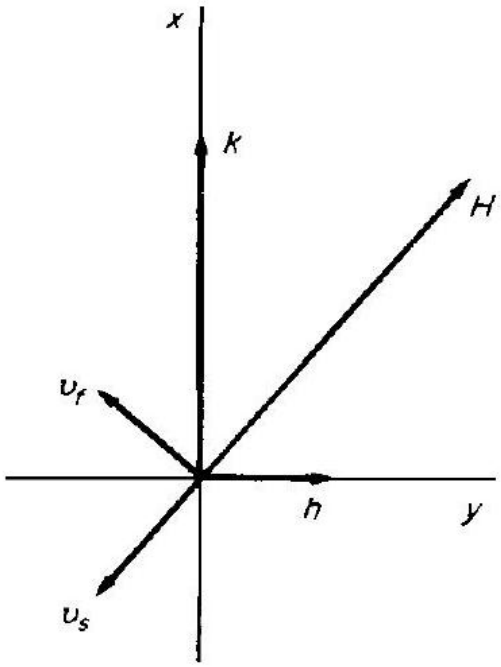


Fig. 40

direction of the wave vector. When the angle between $\mathbf{k}$ and $\mathbf{H}$ increases, u_f increases monotonically and u_s decreases monotonically. It is easy to see that the inequalities

$$u_s \leqslant u_A \leqslant u_f, \quad u_f \geqslant u_0, \quad u_s \leqslant u_0 \tag{69.12}$$

always hold. If $\mathbf{k}$ is parallel to $\mathbf{H}, u_f$ and u_s are respectively equal to the greater and the smaller of u_0 and $u_A = H/\sqrt{(4\pi\rho)}$. If $\mathbf{k}$ is perpendicular to $\mathbf{H}$, then

$$u_f = \sqrt{\left(u_0^2 + \frac{H^2}{4\pi\rho}\right)} \tag{69.13}$$

[45] For, let a line of force be along the z-axis. Then the longitudinal stress Π_{zz} (65.8) contains a negative term
$H^2/8\pi$, and the transverse stresses Π_{xx} and Π_{yy} contain a positive term $H^{\frac{3}{2}}/8\pi$.

while u_A and u_s are zero, i.e. only the fast magnetosonic waves exist.
Lastly, let usconsider two exact solutions of the equations of magnetohydrodynamics in the form of a plane wave with any amplitude (not necessarily small).

One of these is a plane Alfven wave in an incompressible fluid, propagated with velocity u_A; that is, involving x and t only in the combination $x - u_A t$. To show this, we go back to the exact equations (65.1)-(65.4). The equation of continuity (65.3) in an incompressible fluid becomes $\operatorname{div} v = 0$, whence $v_x =$ constant: without loss of generality, we can put $v_x = 0$, by an appropriate choice of the frame of reference. The equation $\operatorname{div} \mathbf{H} = 0$ gives $H_x =$ constant. Denoting the transverse components of $\mathbf{H}$ by $\mathbf{h}$, we find from (65.2) and (65.4)

$$\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} = H_x \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x}, \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \frac{H_x}{\sqrt{(4\pi\rho)}} \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial x},$$

i.e the exact equations necessarily become linear equations describing a plane wave with the phase velocity (69.6) and $\mathbf{v}$ and $\mathbf{h}$ related by (69.11). The wave profile, i.e. the function $\mathrm{h}\,(x - u_A t)$, is arbitrary. The x-component of (65.4) gives

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{4\pi\rho}\mathbf{h} \cdot \frac{\partial h}{\partial x} = 0,$$

whence

$$P + h^2/8\pi = \text{ constant }, \tag{69.14}$$

which determines the variation of the pressure in the wave.

The other case is a simple wave propagated at right angles to the magnetic field 15. A. Kaplan and K. P. Stanyukovich, 1954). Let the field be in the y-direction, and the uave be again propagated in the x-direction. Then $H_x = 0, H_y = H$, and the equation div H = 0 is satisfied identically. Equations (65.2) (65.4) give

$$\partial H/\partial t + \partial\,(v_x H)\,/\partial x = 0 \tag{69.15}$$

$$\partial \rho/\partial t + \partial\,(v_x \rho)\,/\partial x = 0 \tag{69.16}$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{1}{8\pi\rho}\frac{\partial H^2}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x} \tag{69.17}$$

From the first two of these equations it is easily seen that the ratio $H/\rho = b$ satisfies the equation $\partial b/\partial t + v_x \partial b/\partial x = 0$ or $\mathrm{d}b/\mathrm{d}t = 0$, where the total derivative signifies the rate of change in a given fluid particle as it moves about. Hence, if the fluid is homogeneous at some initial instant, so that b is constant, then at all subsequent instants we have $b =$ constant. Substituting $H = \rho b$ into the third equation, we obtain

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}\left(P + \frac{b^2}{8\pi}\rho^2\right) \tag{69.18}$$

Thus the magnetic field has been eliminated from the equations, and the problem reduces to the solution of equations (69.16) and (69.18). These equations differ from those for onedimensional motion in ordinary fluid dynamics only by a change in the equation of state of the gas: the true pressure $P = P(\rho)$ (for given entropy s) must be replaced by $P*(\rho) = P(\rho) + b^2\rho^2/8\pi$. This fact enables us to apply the results of ordinary fluid dynamics to this case of magnetohydrodynamic flow. In particular, the formulae giving the exact solution for one-dimensional travelling waves (Riemann's solution; simple waves, see FM, §94) can be applied, the role of velocity of sound being played by

$$u^* = \sqrt{\left(\frac{\partial P^*}{\partial \rho}\right)_s} = \sqrt{\left(u_0^2 + \frac{b^2}{4\pi}\rho\right)}$$
$$= \sqrt{\left(u_0^2 + \frac{H^2}{4\pi\rho}\right)}$$

in accordance with formula (69.13).

PROBLEM

Determine the absorption coefficient (assumed small) for an Alfven wave in an incompressible fluid.

Solution. The absorption coefficient for a wave is defined as $\gamma = \bar{Q}/2\bar{q}$, where $\bar{Q}$ is the (time) average energy [1] sipated per unit time and volume, and $\bar{q}$ is the mean energy flux density in the wave The amplitude of the wave [3] ecreases as e^{-7x} during its propagation. Q is given by the right-hand side of equation (66.3); in an incompressible [5] uid we have for a wave propagated in the x-direction (so that $v_x = 0$)

$$Q = \eta(\partial \mathbf{v}/\partial x)^2 + \left(c^2/16\pi^2\sigma\right)(\partial h/\partial x)^2$$

In the energy flux density (66.5), we can omit the small dissipative terms, leaving $q_x = -H_x h \cdot v/4\pi$. Using
imulae (69.6) and (69.11), we have the result

$$\gamma = \frac{\omega^2}{2u_A^3}\left(\frac{\eta}{p} + \frac{c^2}{4\pi\sigma}\right).$$

28.3.7 §70. Conditions at discontinuities

The equations of motion for an ideal magnetohydrodynamic medium admit discontinuous flows as in ordinary fluid dynamics. To elucidate the conditions which must be satisfied on a surface of discontinuity, let us consider an element of the surface and use a system of coordinates in which it is at rest. †

First of all, the mass flux must be continuous at a surface of discontinuity: the mass of gas entering from one side must be equal to the mass leaving on the other side. Thus $\rho_1 v_{1n} = \rho_2 v_{2n}$, where the suffixes 1 and 2 refer to the two sides of the discontinuity, and the suffix n denotes the component of a vector normal to the surface. In what follows we shall denote the difference between the values of any quantity on the two sides of the surface of discontinuity by enclosing it in square brackets. Thus $[\rho v_n] = 0$.

Next, the energy flux must be continuous. Using the expression (65.11) and omitting the dissipative terms, we obtain

$$[q_n] = \left[\rho v_n\left(\frac{1}{2}v^2 + w\right) + v_n H^2/4\pi - H_n \mathbf{v}\cdot\mathbf{H}/4\pi\right] = 0$$

The momentum flux must also be continuous. This condition means that $[\Pi_{ik} n_k] = 0$, where Π_{ik} is the momentum flux density tensor, and $\mathbf{n}$ is a unit vector normal to the surface. Using (65.8), we therefore have

$$\left[P + \rho v_n^2 + \left(\mathbf{H}_t^2 - H_n^2\right)/8\pi\right] = 0$$
$$\left[\rho v_n \mathbf{v}_t - H_n \mathbf{H}_t/4\pi\right] = 0$$

where the suffix t denotes the component tangential to the surface.

Finally, the normal component of the magnetic field and the tangential component of the electric

field must be continuous. If the conductivity of the medium is infinite, the induced electric field is given by $\mathbf{E} = -\mathbf{v} \times \mathbf{H}/\boldsymbol{c}$, and the condition $[\mathbf{E}_t] = 0$ leads to $[H_n \mathbf{v}_t - \mathbf{H}_t v_n] = 0$.

In what follows it is more convenient to use the specific volume of the gas ($V = 1/\rho$) in place of its density. The mass flux density through the discontinuity is denoted by

$$j = \rho v_n = v_n/V \tag{70.1}$$

Since j and H_n are continuous, we can write the remaining boundary conditions in the following form:

$$j\left[w + \frac{1}{2}j^2V^2 + \frac{1}{2}\mathbf{v}_t^2 + V\mathbf{H}_t^2/4\pi\right] = H_n\left[\mathbf{H}_t \cdot \mathbf{v}_t\right]/4\pi, \tag{70.2}$$

$$[P] + j^2[V] + \left[\mathbf{H}_t^2\right]/8\pi = 0, \tag{70.3}$$

$$j\left[\mathbf{v}_t\right] = H_n\left[\mathbf{H}_t\right]/4\pi, \tag{70.4}$$

$$H_n\left[\mathbf{v}_t\right] = j\left[V\mathbf{H}_t\right]. \tag{70.5}$$

This is the fundamental system of equations of discontinuities in magnet ohydrodynamics.

28.3.8 §71. Tangential and rotational discontinuities

In ordinary fluid dynamics, discontinuities of two different kinds are possible: shock waves and tangential discontinuities. Mathematically, the two types occur because some

It the boundary conditions can be written as the vanishing of a product of two factors, and the two different solutions are obtained by equating the factors to zero in turn. This feature is not present in the equations (70.2)-(70.5) of magnetohydrodynamics, and it might therefore be supposed that only one type of discontinuity occurs. In reality, however, it is found that essentially different types of discontinuity again occur (F . de Hoffmann and E . Teller, 1950).

Let us consider, first of all, discontinuities for which $j = 0$. This means that $v_{1n} = v_{2n} = 0$, i.e. the fluid moves parallel to the surface of discontinuity. If $H_n \neq 0$, we see from equations (70.2)-(70.5) that the velocity, pressure and magnetic field must be continuous. The density (and therefore the entropy, temperature, etc.) may have any discontinuity. Such a surface may be called a contact discontinuity, and is simply the boundary between two media at rest which have different densities and temperatures.

If both j and H_n are zero, then three of the four equations (70.2)-(70.5) are satisfied identically, and therefore this is clearly a special case. We thus find a type of discontinuity which may be called a tangential discontinuity. as in ordinary fluid dynamics. At such a discontinuity the velocity and the magnetic field are tangential and can have any discontinuity in both magnitude and direction:

$$j = 0, \quad H_n = 0. \quad [\mathbf{v}_t] \neq 0, \quad [\mathbf{H}_t] \neq 0. \tag{71.1}$$

The density discontinuity also can take any value, but the pressure discontinuity is related to that of $\mathbf{H}_t$ by equation (70.3):

$$[V] \neq 0. \quad \left[P + \frac{\mathbf{H}_t^2}{8\pi}\right] = 0. \tag{71.2}$$

The discontinuities of the other thermodynamic quantities (entropy, temperature, etc.) are related to those of V and P by the equation of state.

[4]† This condition fixes only the velocity of the coordinate system in the direction normal to the surface. Any constant vector may be added to its tangential velocity.

Another type of discontinuity is one in which the gas density is continuous. Since the flux $j = v_n, V$ is continuous. the normal velocity component is therefore continuous also:

$$j \neq 0, \quad [V] = 0, \quad [v_n] = 0. \tag{71.3}$$

On the right-hand side of equation (70.5) we can take V outside the brackets and divide this equation by equation (70.4), obtaining

$$j = H_n/\sqrt{(4\pi V)} \tag{71.4}$$

and

$$[\mathbf{v}_t] = \sqrt{(V/4\pi)}\,[\mathbf{H}_t] \tag{71.5}$$

In equation (70.2) we put $w = \varepsilon + PI'$; since V' is continuous, this equation can be rewritten as

$$j[\varepsilon] + jV\left[\boldsymbol{P} + \frac{\mathbf{H}_t^2}{8\pi}\right] + \frac{1}{2}j\left[\left(\mathbf{v}_t - \sqrt{\frac{V}{4\pi}}\mathbf{H}_t\right)^2\right] = 0$$

H_n being replaced in accordance with (71.4). The second term is zero by (70.3) and the third $^{\text{term}}$ is zero by (71.5), so that we find $[\varepsilon] = 0$, i.e. the internal energy also is continuous. $^{\text{E}}_{\text{very}}$ other thermodynamic quantity is determined if ε and V are given. Hence all the other thermodynamic quantities, including the pressure, are continuous. It then follows from $^{170.3}$) that ${\mathbf{H}_t}^2$ is continuous, i.e.

$$[P] = 0, \quad [H_t] = 0. \tag{71.6}$$

The fact that H_t and H_n are both continuous means that the magnitude of $\mathbf{H}$ itself and its angle to the surface are likewise continuous.

Formulae (71.3)-(71.6) give all the properties of the discontinuities under consideration. The thermodynamic quantities are continuous, but the magnetic field is turned through an angle about the normal, its magnitude remaining unchanged. The vector $\mathbf{H}_t$, and therefore (by (71.5)) the tangential velocity component, are discontinuous, but the normal velocity component $v_n = jV$ is continuous, and its value is

$$v_n = H_n\sqrt{(V/4\pi)} = H_n/\sqrt{(4\pi\rho)} \tag{71.7}$$

These are called rotational or Alfvn discontinuities.

It is useful to note that, by a suitable choice of the coordinate system, we can always ensure that the gas velocity is parallel to the field on each side of a rotational discontinuity. To achieve this, we use a coordinate system moving with velocity $\mathbf{v_{1t}} - \mathbf{H_{1t}}\sqrt{(V/4\pi)} = \mathbf{v}_{2t} - \mathbf{H}_{2t}\sqrt{(V/4\pi)}$. (Compare the footnote to §70.) In the new system the ratio of each component of $\mathbf{v}$ to the corresponding component of $\mathbf{H}$ on either side of the discontinuity is $\sqrt{(V/4\pi)}$, i.e.

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{H}_1\sqrt{(V/4\pi)}, \quad \mathbf{v}_2 = \mathbf{H}_2\sqrt{(V/4\pi)}. \tag{71.8}$$

Thus in this system of coordinates the velocity is rotated with the magnetic field, its magnitude and angle to the normal remaining unchanged.

The velocity v_n is also minus the velocity of propagation of the discontinuity relative to the fluid. This is equal to the phase velocity u_A of the Alfven wave. The occurrence of this equality for all rotational discontinuities is to some extent accidental, but when the discontinuities of the various quantities are small the equality must hold. For such a discontinuity is a weak

perturbation, in which the velocity $\mathbf{v}$ and the magnetic field $\mathbf{H}$ receive small increments perpendicular to the plane through $\mathbf{H}$ and the normal $\mathbf{n}$. This perturbation is of the type whose phase velocity is u_A. The physical velocity of propagation of the front of a small perturbation is the normal component of the group velocity. i.e. its component in the direction of the wave vector $\mathbf{k}$. Since the relation between ω and $\mathbf{k}$ is linear, we have $\mathbf{k}\cdot\partial\omega/\partial\mathbf{k}=\omega$, and so this component is the same as the phase velocity $\omega/k=u_A$.

Although tangential and rotational discontinuities form two different types, there are also discontinuities having the properties of both. These discontinuities are such that $\mathbf{v}$ and $\mathbf{H}$ are tangential in direction and continuous in magnitude.

In ordinary fluid dynamics, tangential discontinuities are always unstable with respect to infinitesimal perturbations, and so are rapidly broadened into turbulent regions. A magnetic field, however, has a stabilizing effect on the motion of a conducting fluid, and in this case tangential discontinuities may be stable. This result is a natural consequence of the fact that a perturbation involving fluid displacements transverse to the field leads to a stretching of the lines of magnetic force "frozen" in it, and therefore to the appearance of forces which tend to restore the unperturbed flow. Let us ascertain the stability conditions for a tangential discontinuity in an incompressible fluid (S. I. Syrovatskii, 1953). We write $\mathbf{v}=\mathbf{v}_{1,2}+\mathbf{v}', \boldsymbol{P}=P_{1,2}+P', \mathbf{H}=\mathbf{H}_{1,2}+\mathbf{H}'$, where $\mathbf{v}_{1,2}, P_{1,2}$ and $\mathbf{H}_{1,2}$ are the unperturbed values constant on either side of the discontinuity; $\mathbf{v}', \boldsymbol{P}'$ and $\mathbf{H}'$ are the small perturbations. Substituting in equations (66.7)-(66.9), we have for an ideal fluid

$$\operatorname{div}\mathbf{u}'=0, \quad \operatorname{div}\mathbf{v}'=0, \tag{71.9}$$

$$\partial\mathbf{u}'/\partial t=(\mathbf{u}\cdot\mathbf{grad})\mathbf{v}'-(\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad})\mathbf{u}', \tag{71.10}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathbf{v}'}{\partial t}+(\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad})\mathbf{v}' &= -\frac{1}{\rho}\operatorname{grad}P'-\mathbf{u}\times\ \operatorname{curl}\mathbf{u}'\\ &= -\frac{1}{\rho}\operatorname{grad}(P'+\rho\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}')+(\mathbf{u}\cdot\mathbf{grad})\mathbf{u}'\end{aligned} \tag{71.11}$$

For brevity, we omit here and henceforward the suffixes 1,2 , and write $\mathbf{u}\equiv\mathbf{H}/\sqrt{(4\pi\rho)}$. Taking the divergence of (71.11) and using (71.9), we find

$$\triangle(P'+\rho\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}')=0. \tag{71.12}$$

Let the plane of the discontinuity be $x=0$; the vectors $\mathbf{v}$ and $\mathbf{u}$ are parallel to it. In each of the half-spaces $x>0$ and $x<0$, we seek all quantities $\mathbf{v}', \mathbf{u}', \rho$ in a form proportional to $\exp\{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)+\kappa x\}$, where $\mathbf{k}$ is a two-dimensional vector in the yz-plane. From equation (71.12), we find that $k^2=\kappa^2$, so that we must take $\kappa=k$ for $x<0$ and $\kappa=-k$ for $x>0$. Next, we eliminate v_x' from the x-components of (71.10) and (71.11), obtaining

$$P'+\rho\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}'=-u_x'\frac{i\rho}{\kappa\mathbf{k}\cdot\mathbf{u}}\left\{(\omega-\mathbf{k}\cdot\mathbf{v})^2-(\mathbf{k}\cdot\mathbf{u})^2\right\}. \tag{71.13}$$

The case where the expression in the braces is zero is of no interest, since ω is then real, whereas instability can arise only from complex values of ω.

Let $\zeta(x,y,z)$ be the displacement, along the x-axis, of the discontinuity surface, as a result of the perturbation. On the displaced surface the conditions (71.1) and (71.2) must be satisfied:

$$\begin{aligned}\left[P+P'+\rho(\mathbf{u}+\mathbf{u}')^2\right]\cong[P'+\rho\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}']=0,\\ u_{1n}+u_{1n}'\cong u_{1x}'-(\mathbf{u}_1\cdot\mathbf{grad})\zeta=0,\\ u_{2n}+u_{2n}'\cong u_{2x}'-(\mathbf{u}_2\cdot\mathbf{grad})\zeta=0;\end{aligned}$$

the condition that there be no flux of the fluid through the discontinuity surface is automatically satisfied. Putting $\zeta =$ constant $\times e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}$ and eliminating ζ, u_{1x} and u_{2x} from these three equations, we get an equation determining the possible values of ω :

$$(\omega - \mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_1)^2 + (\omega - \mathbf{k}\cdot\mathbf{v}_2)^2 = (\mathbf{k}\cdot\mathbf{u}_1)^2 + (\mathbf{k}\cdot\mathbf{u}_2)^2 .$$

This quadratic equation has no complex root if
or

$$2(\mathbf{k}\cdot\mathbf{u}_1)^2 + 2(\mathbf{k}\cdot\mathbf{u}_2)^2 - (\mathbf{k}\cdot\mathbf{v})^2 > 0$$

$$(2u_{1i}u_{1k} + 2u_{2i}u_{2k} - v_i v_k)\, k_i k_k > 0,$$

Where $\mathbf{v} = \mathbf{v_2} - \mathbf{v_1}$ is the discontinuity of the velocity.
This quadratic form is positive-definite if the trace and determinant of the rank-two
^{3nsor} in the brackets are both positive. Hence we have the required stability conditions: †

$$\left.\begin{array}{c} H_1^2 + H_2^2 > 2\pi\rho v^2 \\ (\mathbf{H}_1\times\mathbf{H}_2)^2 \geqslant 2\pi\rho\left\{(\mathbf{H}_1\times\mathbf{v})^2 + (\mathbf{H}_2\times\mathbf{v})^2\right\} \end{array}\right\} \tag{71.14}$$

In reality, however, the existence of a small but finite viscosity and electrical resistance in the fluid means that such tangential discontinuities cannot exist indefinitely, even if the conditions (71.14) are fulfilled. Although no turbulence occurs, the sharp discontinuity is replaced by a gradually widening transitional region, in which the velocity and the magnetic field change smoothly from one value to another. This is easily seen from the equations of motion (66.8) and (66.9) if the dissipative terms are retained. We take the x-axis in the direction of the normal to the discontinuity. Assuming all quantities to depend only on x (and possibly on the time), we can write the transverse components of these equations as

$$\left.\begin{array}{c} \partial\mathbf{H}_t/\partial t = (c^2/4\pi\sigma)\,\partial^2\mathbf{H}_t/\partial x^2 \\ \partial\mathbf{v}_t/\partial t = v\partial^2\mathbf{v}_t/\partial x^2 \end{array}\right\} \tag{71.15}$$

the fluid being supposed incompressible. If we assume steady flow, the left-hand sides of equations (71.15) are zero, and the only solution which remains finite as $x \to \pm\infty$ is $\mathbf{H_t} =$ constant, $\mathbf{v_t} =$ constant, which contradicts the assumption that these quantities undergo a change at the discontinuity. Thus a tangential discontinuity cannot have a constant width such as is found for (e.g.) a weak shock wave. Equations (71.15) have the form of heat-conduction equations. As we know from the theory of thermal conduction, a discontinuity in a quantity satisfying such an equation is gradually smoothed out into a transitional region, whose width increases as the square root of the time. Since the coefficients in the two equations (71.15) are different, the widths δ_v and δ_H of the transitional regions for the velocity and the magnetic field are also different:

$$\delta_v \sim \surd(vt), \quad \delta_H = \surd\left(c^2 t/\sigma\right) \tag{71.16}$$

Rotational discontinuities in an incompressible fluid are stable with respect to infinitesimal perturbations, whatever the strength of the magnetic field (S. I. Syrovatsk, 1953). Like tangential discontinuities, however, they cannot have constant widths, but are gradually smoothed out by the viscosity and electrical resistance of the fluid (see Problem).

[4†] If the incompressible fluids on either side of the discontinuity have different densities, then p in these qualities is replaced by $2\rho_1\rho_2/(\rho_1+\rho_2)$.

PROBLEM

Find the manner of widening of a rotational discontinuity with time.

Solution. Assuming all quantities to depend only on the coordinate x (and on the time), we find from the equations $\operatorname{div}\mathbf{v}=0$ and $\operatorname{div}\mathbf{H}=0$ that $v_x=$ constant and $H_x=$ constant. Let the coordinate system be such that the values of $\mathbf{v}$ and $\mathbf{H}$ on each side of the discontinuity (outside the transitional layer) are related by (71.8). Then $v_x=u_x$, where u has the same meaning as in (71.9)-(71.11). For the transverse components u_t and v_t we have from equations (66.8) and (66.9)

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{u}_t}{\partial t}+u_x\frac{\partial \mathbf{u}_t}{\partial x}&=u_x\frac{\partial \mathbf{v}_t}{\partial x}+\frac{c^2}{4\pi\sigma}\frac{\partial^2\mathbf{u}_t}{\partial x^2}\\ \frac{\partial \mathbf{v}_t}{\partial t}+u_x\frac{\partial \mathbf{v}_t}{\partial x}&=u_x\frac{\partial \mathbf{u}_t}{\partial x}+v\frac{\partial^2\mathbf{v}_t}{\partial x^2}\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

Since the difference $\mathbf{v_t}-\mathbf{u_1}$, tends to zero for $x\to\pm\infty$, because of the relations (71.8), this difference must be small in the transitional layer in comparison with the sum v_t+u_t. Adding the equations (1), we can therefore neglect a term in v_t-u_t, obtaining

$$\frac{\partial}{\partial t}(v_t+u_t)=\frac{1}{2}\left(\frac{c^2}{4\pi\sigma}+v\right)\frac{\partial^2}{\partial x^2}(v_t+u_t)$$

From this we see that the width of the discontinuity varies in a manner given by

$$\delta\sim\sqrt{\left\{\left(\frac{c^2}{4\pi\sigma}+v\right)t\right\}}$$

28.3.9 72. Shock waves

Let us now consider the type of discontinuity in which

$$j\neq 0,\quad [V]\neq 0.\tag{72.1}$$

Such discontinuities are called shock waves, as in ordinary fluid dynamics. They are characterized by a discontinuity of density and by the fact that the gas moves through them ($\mathfrak{v}_{n1}$ and v_{n2} being non-zero). The normal component of the magnetic field may or may not be zero. On comparing equations (70.4) and (70.5) we see that, when $H_n\neq 0$, the vectors $\mathrm{H}_{t2}-\mathrm{H}_{t1}$ and $V_2\mathrm{H}_{t2}-V_1\mathrm{H}_{t1}$ are parallel to the same vector $\mathrm{v}_{t2}-\mathrm{v}_{t1}$, and therefore to each other. Hence it follows that $\mathbf{H}_{t1}$ and $\mathbf{H}_{t2}$ are collinear, i.e. the vectors $\mathbf{H}_1,\mathbf{H}_2$ and the normal to the surface are coplanar, unlike what happens (in general) in tangential and Alfvn discontinuities, in which the $\mathbf{H}_1\mathbf{n}$ and $\mathbf{H}_2\mathbf{n}$ planes in general do not coincide. This result holds also when $H_n=0$; in this case, which we shall discuss later, it follows from (70.5) that $V_1\mathbf{H}_{t1}=V_2\mathbf{H}_{t2}$.

The velocity discontinuity $\mathbf{v}_{t1}-\mathbf{v}_{t2}$ lies in the same plane as $\mathbf{H}_1$ and $\mathbf{H}_2$. We can, without loss of generality, assume that the vectors $\mathbf{v}_1$ and $\mathbf{v}_2$ themselves lie in this plane, so that the motion in the shock wave is two-dimensional. Furthermore, it is easy to see that, if $H_n\neq 0$, asuitable transformation of the coordinates will always ensure that the vectors $\mathbf{v}$ and $\mathbf{H}$ are collinear on each side of the discontinuity. To achieve this, we use a coordinate system which moves with velocity $\mathbf{v}_t-(v_n/H_n)\,\mathbf{H}_t=\mathbf{v}_t-(jV/H_n)\,\mathbf{H}_t$ (the value of this expression is the same on each side of the discontinuity, by (70.5)). In the following formulae, however, the choice of this particular coordinate system is not implied.

Let us derive the relation for shock waves in magnetohydrodynamics which corresponds to the shock adiabatic (Hugoniot adiabatic) in ordinary fluid dynamics. Eliminating $[\mathbf{v}_t]$ from (70.4) and (70.5) we have

$$j^2\,[V H_t]=H_n^2\,[H_t]\,/4\pi;\tag{72.2}$$

here we have replaced $\mathbf{H}_t$ by H_t, since $\mathbf{H}_{t1}$ and $\mathbf{H}_{t2}$ are collinear. † In order to eliminate $[\mathbf{v}_t]$ ' 0 m equation (70.2). we rewrite that equation as

$$[w]+\frac{1}{2}j^2\left[V^2\right]+\frac{1}{2}\left[\left(\mathbf{v}_t-\frac{H_n}{4\pi j}\mathbf{H}_t\right)^2\right]+\left[V'H_t^2\right]/4\pi-H_n^2\left[H_t^2\right]/32\pi^2j^2=0.$$

he third term is zero by equation (70.4) and so v_t does not appear. In the last term we [3] stitute j^2 from (72.2) and in the second term from (70.3), i.e.

$$j^2=\left\{P_2-P_1+\left(H_{t2}^2-H_{t1}^2\right)/8\pi\right\}/\left(V_1-V_2\right). \tag{72.3}$$

A simple calculation then gives

$$\varepsilon_2-\varepsilon_1+\frac{1}{2}\left(P_2+P_1\right)\left(V_2-V_1\right)+\left(V_2-V_1\right)\left(H_{t2}-H_{t1}\right)^2/16\pi=0. \tag{72.4}$$

This is the equation of the shock adiabatic in magnetohydrodynamics. It differs from the ordinary equation by the presence of the third term.

We may also write out again equation (70.4), which gives the discontinuity of $\mathbf{v}_t$ in terms of that of $\mathbf{H}_t$:

$$\mathbf{v}_{t2}-\mathbf{v}_{t1}=H_n\left(\mathbf{H}_{t2}-\mathbf{H}_{t1}\right)/4\pi j. \tag{72.5}$$

Equations (72.2)-(72.5) form a complete system of equations of shock waves. We shall conventionally assign the suffix 1 to the medium towards which the wave is propagated; thus the gas passes from side 1 in front of the shock wave to side 2 behind it. As already mentioned, the coordinates used are such that a particular surface element of the discontinuity is at rest and the gas passes through it.

In ordinary fluid dynamics, Zempln's theorem ($FM, 884$) states that the pressure and density increase in the shock wave:

$$P_2>P_1,\quad \rho_2>\rho_1; \tag{72.6}$$

the shock wave is therefore a compression wave. Here it is assumed that

$$\left(\partial^2V/\partial P^2\right)_s>0 \tag{72.7}$$

although this is not a thermodynamic inequality, it is satisfied in almost all cases. Zempln's theorem follows from the law of increase of entropy.

It is easy to see that Zempln's theorem remains valid in magnetohydrodynamics for weak shock waves, provided that the condition (72.7) is satisfied. In a weak shock wave, the discontinuities of all quantities are small. Expanding equation (72.4) in powers of the pressure and entropy discontinuities, we have

$$T\left(s_2-s_1\right)=\frac{1}{2}\left(\hat{C}^2V/\partial P^2\right)_s\left(P_2-P_1\right)^3-\frac{1}{16\pi}\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_s\left(P_2-P_1\right)\left(H_{t2}-H_{t1}\right)^2 \tag{72.8}$$

the first term is that found in ordinary fluid dynamics (see $FM, 883$). Since - $\left(\partial V/\partial P\right)_s>0$ according to one of the thermodynamic inequalities, the condition $s_2-s_1>0$ with (72.8) gives $P_2>P_1$, and accordingly $V_2<V_1$.

[4†] The vectors $\mathbf{H}_{t1}$ and $\mathbf{H}_{t2}$ here might, however, be either in the same or in opposite directions; in this sense, H_{t1}

[d] H_{12} might have either the same or different signs. It will not appear till later (\$73) that for other reasons they

[11] t in fact have the same sign.

If, in addition to the inequality (72.7), the thermal expansion coefficient is positive, $(\partial V/\partial T)_P > 0$, Zempln's theorem in magnetohydrodynamics can be proved as in ordinary fluid dynamics, without assuming that the discontinuities of all quantities are small (R.V. Polovin and G.Ya. Lyubarskii, 1958; S. V. Iordanski, 1958).

Let P_1, V_1 be the specified initial state of the gas, and ${s_2}^{(0)}$ the entropy in the final state for a given value of V_2 in the absence of a magnetic field. The entropy in the final state of the gas in the presence of a magnetic field with the same values of P_1, V_1 and V_2 is denoted by ${s_2}^{(H)}$. In ordinary fluid dynamics, $V_2 > V_1$ implies that ${s_2}^{(0)} < s_1$, so that a rarefaction wave is impossible. We shall show that (under the conditions stated above) ${s_2}^{(H)} < {s_2}^{(0)}$, so that certainly ${s_2}^{(H)} < s_1$; this proves that rarefaction waves are impossible in magnetohydrodynamics also.

Differentiating equation (72.4) with respect to P_2 for a constant V_2, and using $(\partial\varepsilon/\partial P). = T(\partial s/\partial P)_V$, we find

$$T_2\left(\partial s_2^{(H)}/\partial P_2\right)_{V_2} + \frac{1}{2}(V_2 - V_1) + (\partial Q/\partial P_2)_{V_2} = 0 \tag{72.9}$$

here

$$Q = (V_2 - V_1)(H_{t2} - H_{t1})^2/16\pi$$

Because of the thermodynamic relations

$$\left(\frac{\partial P}{\partial\, \mathrm{s}}\right)_V = \frac{T}{c_v}\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V, \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V = -\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P$$

the first term in (72.9) has the same sign as $(\partial V/\partial T)_P$, and is therefore, by hypothesis, positive. Hence, if $V_2 > V_1$, then $(\partial Q/\partial P_2)_{V_2} < 0$. The presence of a magnetic field increases Q ($Q = 0$ without a field, $Q > 0$ with one), and so decreases P_2 for a given l_2. Since, by hypothesis, $(\partial s/\partial P)_r > 0$, it follows in turn that ${s_2}^{(H)} < {s_2}^{(0)}$. This completes the proof.
Lastly, let us consider the case mentioned at the beginning of this section, when the magnetic field on each side of the discontinuity surface is in the tangential plane, $H_n = 0$ (a perpendicular shock wave). From (72.5) we then have $\mathbf{v}_{t2} = \mathbf{v}_{t1}$, i.e. the tangential velocity component is continuous. By a suitable choice of coordinates, therefore, we can always ensure that $\mathbf{v}_t = 0$ on either side of the discontinuity, i.e. the gas moves perpendicularly to the discontinuity, and we shall henceforth assume this. From equation (72.2) we have $V_2H_2 = V_1H_1$. This relation shows that equations (72.3) and (72.4) can be written

$$j^2 = (P_2^* - P_1^*)/(V_1 - V_2), \quad \varepsilon_2^* - \varepsilon_1^* + \frac{1}{2}(P_2^* + P_1^*)(V_2 - V_1) = 0,$$

which differ from the ordinary equations for shock waves in the absence of a magnetic feld only by a change in the equation of state: the true equation of state $P = P(V, s)$ must be replaced by $P^* = P^*(V, s)$, where $P^* = P + b^2/8\pi V^2$, and b denotes the constant product HV. Accordingly ε^* must be defined so as to satisfy the thermodynamic relation $\{\hat{c}\varepsilon^*/\hat{c}V)_s = -P^*$, whence $\varepsilon^* = \varepsilon + b^2/8\pi V'$.

28.3.10 73. Evolutionary shock waves

For an actual hydrodynamic discontinuity to exist, it must be stable with regard to disintegration into two or more others. This condition can also be formulated as stating that any infinitesimal perturbation of the initial state must lead only to infinitesimal changes in the discontinuity. A discontinuity that meets this requirement is said to be "olutionary. It must be emphasized that the property in question is not the opposite of In tability in the ordinary

sense. The latter signifies that an initial small perturbation will adually increase, which leads ultimately to the breakdown of the flow concerned; but the "Iturbation remains small over a sufficiently short time ($t \leqslant 1/\gamma$) even when there is an Ponential increase as $e^{\gamma t}$ with $\gamma > 0$. In a non-evolutionary discontinuity, the perturbion becomes large immediately, although when t is small it occupies only a small region in -ce. The situation is illustrated by Fig. 41 (p. 248), which shows the splitting of a sontinuity of the density $\rho(x)$ into two; the perturbation $\delta\rho$ is not small, although when t small, and the two discontinuities have not moved apart appreciably, it occupies only a nall range δx.

The condition for an evolutionary discontinuity can be derived by counting the number independent parameters which define an arbitrary initial ($t = 0$) small perturbation of $^-$discontinuity, and the number of equations (linearized boundary conditions at the ^{3} ontinuity) which these parameters must satisfy. The discontinuity is evolutionary if the

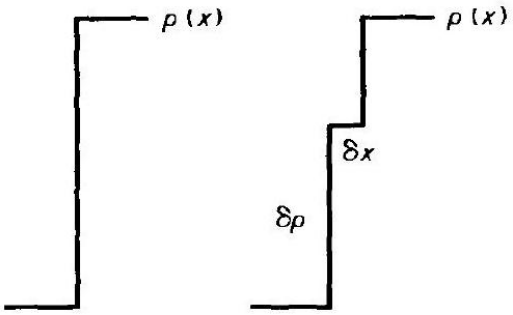


Fig. 41

two numbers are the same. The boundary conditions then uniquely determine the subsequent development of the perturbation, which remains small for small $t > 0$.† If the number of equations is greater or less than the number of unknown parameters, the problem of a small perturbation of the discontinuity has either no solution or an infinity of solutions. Either case may occur, and such a situation indicates that the discontinuity is not evolutionary, the initial assumption that the perturbation is small for small t being incorrect.

In ordinary fluid dynamics, the requirement that a shock wave be evolutionary does not impose any further restriction in comparison with the condition of increasing entropy: shock waves allowed by Zempln's theorem are necessarily evolutionary (see $FM, 884$). In magnetohydrodynamics, this is not the case, and the requirement that a shock wave be evolutionary imposes significant new limitations on the way in which quantities vary in the shock wave (A. I. Akhiezer, G. Ya. Lyubarski and R. V. Polovin, 1958).

In order to ascertain the actual condition for shock waves to be evolutionary in magnetohydrodynamics, let us first count the number of equations to be satisfied by any small perturbation at the discontinuity surface.

The shock wave will be regarded as lying in the yz-plane. The positive x-direction is taken to be that of the flow across the discontinuity surface. The unperturbed fields H_1, H_2 and velocities v_1, v_2 on either side of the discontinuity are assumed to be in the xy-plane.

On each side of the discontinuity surface, seven quantities undergo perturbation: three fluid velocity components v_x, v_y, v_z; two magnetic field components H_y, H_z; the density $\rho = 1/V$, and the entropy s. The perturbations of the other thermodynamic quantities (P and w) are determined by those of ρ and s. The equation $\operatorname{div} \mathbf{H} = \partial H_x/\partial x = 0$ shows that the longitudinal field component H_x is constant along the x-axis and does not undergo any perturbation. In addition, the speed of propagation of the shock wave itself is perturbed, i.e. it acquires a small velocity δU relative to the chosen system of coordinates (in which the unperturbed discontinuity is at rest). This velocity, however, can be expressed immediately in terms of the perturbations

of ρ and v_x, by means of the condition for the mass flux density j to be continuous across the discontinuity: the gas velocity relative to the discontinuity is $v_{x0} + \delta v_x - \delta U$, where v_{x0} is the unperturbed velocity and δv_x its perturbation; writing also $\rho = \rho_0 + \delta\rho$, linearizing the boundary condition $[j] = 0$, and

then omitting the suffix zero to the unperturbed quantities, we find

$$[\delta_j] = [\rho\delta v_x] + [v_x\delta\rho] - \delta U[\rho] = 0,$$

which determines δU.

Linearization of the boundary conditions of continuity of the momentum flux component Π_{zx} and the electric field component E_y (i.e the z-components of equations 70.4) and (70.5)) gives the two equations

$$[\rho v_x\delta v_z - H_x\delta H_z/4\pi] = 0, \quad [H_x\delta v_z - v_x\delta H_z] = 0$$

the unperturbed values are $v_z = 0, H_z = 0$). These equations involve the perturbations of only two quantities, namely

$$\delta v_z, \delta H_z. \tag{73.1}$$

The boundary conditions of continuity of the energy flux q_x, the momentum flux components Π_{xx} and Π_{yx}, and the electric field component E_z (i.e. equations (70.2) and (70.3) and the y-components of (70.4) and (70.5)) give four linear equations involving the perturbations

$$\delta v_x, \delta v_y, \delta H_y, \delta\rho, \delta s, \tag{73.2}$$

which will not be written out here.

Let us now count the number of parameters which define the perturbation of the shock wave. Perturbations varying with time as $e^{-i\omega t}$ are propagated in both directions from the discontinuity as hydromagnetic waves of three kinds (Alfvn, and fast and slow magnetosonic) and as an entropy wave; the latter is a small perturbation of the entropy transported by the adiabatic gas flow and moving with the gas. All these must of course be outgoing waves propagated to the left or right of the discontinuity. In each wave, the changes in all quantities are related in a specific way, as shown in §69, and therefore each wave is determined by just one parameter, the amplitude of some single quantity.

Magnetosonic and entropy waves transport the perturbations (73.2); Alfvn waves, the perturbations (73.1). Since the equations separate for these two groups of perturbations, the condition for an evolutionary discontinuity has to be satisfied for each separately (S. I. Syrovatskii, 1958), and this makes the restrictions even stronger.

Let us first consider the conditions as regards Alfvn perturbations. This requires that the number of outgoing waves be equal to two, the number of equations. The Alfven wave phase velocities relative to the discontinuity surface can have the values $v_{x1} \pm u_{A1}$, $l_{x_2} \pm u_{A2}$, where u_A is the phase velocity (69.6) of the wave relative to the gas. Because of the direction chosen for the x-axis, $v_{x1}, v_{x2} > 0$. In region 1 , in front of the discontinuity, the Wave is outgoing if its phase velocity (relative to the discontinuity) is negative; in region 2 , behind the discontinuity, a positive phase velocity is needed. The wave with velocity " $x+u_{A1}$ never satisfies this condition, and is always ingoing; that with velocity $u_1 - u_{A1}$ is outgoing if $v_{x1} < u_{A1}$. Similarly, the wave with velocity $v_{x2} + u_{A2}$ is always utgoing; that with $v_{x2} - u_{A2}$ is outgoing if $v_{x2} > u_{A2}$. There are therefore two ranges in which the condition for an evolutionary discontinuity is satisfied for Alfven waves:

[4]† Here the wave may be either unstable (if the eigenfrequencies of the equations include some which are complex with a positive imaginary part) or stable (if not).

$$(1) \quad v_{x1} > u_{A1}, \quad v_{x2} > u_{A2},$$
$$(2) \quad v_{x1} < u_{A1}, \quad v_{x2} < u_{A2}.$$

These are shown by the vertical lines in Fig. 42 (p. 250), which is drawn for the case in which

$$u_s < u_A < u_f \tag{73.3}$$

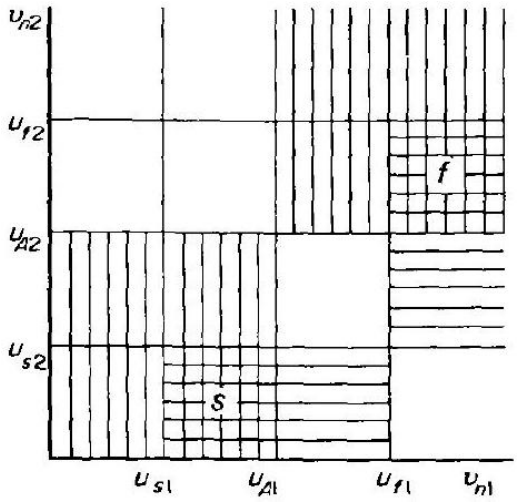


Fig. 42

The condition as regards magnetosonic and entropy perturbations requires that there be four outgoing waves. There is always an outgoing entropy wave moving with the gas, but only from side 2 . The number of outgoing magnetosonic waves must therefore be three. Arguments similar to those given above for Alfvn waves indicate two ranges in which the condition for an evolutionary discontinuity is satisfied for this group of perturbations; they are shown by the horizontal lines in Fig. 42.†

The intersection of the vertically and horizontally lined areas defines two regions where the discontinuity is evolutionary with regard to all perturbations: those of (1) fast shock waves, with

$$v_{n1} > u_{f1}, \quad u_{f2} > v_{n2} > u_{A2}, \tag{73.4}$$

and (2) slow shock waves, with

$$u_{A1} > v_{n1} > u_{s1}, \quad u_{s2} > v_{n2}; \tag{73.5}$$

here the normal component of the gas velocity is again denoted by v_n instead of v_x. In the limit of a low-intensity wave (discontinuities of all quantities weak), the fast and slow shock waves are propagated with the respective velocities $u_{f2} \cong u_{f1}$ and $u_{s2} \cong u_{s1}$.

Let us apply these conditions to find how the magnetic field varies in a shock wave We start from equation (72.2):

$$H_n^2 \left[\mathbf{H}_t\right] / 4\pi j^2 = \left[\mathbf{H}_t / \rho\right] = \left[v_n \mathbf{H}_t\right] / j$$

or

$$\left(\frac{H_n^2}{4\pi j} - v_{n1}\right)\mathbf{H}_{t1} = \left(\frac{H_n^2}{4\pi j} - v_{n2}\right)\mathbf{H}_{t2}. \qquad ((73.t)$$

Since ${H_n}^2/4\pi\rho = {u_A}^2$, this can also be written as

$$\frac{u_{A1}^2 - v_{n1}^2}{v_{n1}}\mathbf{H}_{t1} = \frac{u_{A2}^2 - v_{n2}^2}{v_{n2}}\mathbf{H}_{t2}. \qquad (73.)$$

From the inequalities (73.4) and (73.5), with (73.7), we see that the tangential fields on the two sides of the shock wave are not only collinear but parallel.
In slow shock waves we have, on both sides of the discontinuity,

$$v_n < H_n^2/4\pi j = v_A^2/v_n.$$

Noting also that by the continuity of the mass flux $\rho_1 v_{n1} = \rho_2 v_{n2}$, we deduce from $\rho_1 < \rho_2$ that

$$v_{n1} > v_{n2}, \qquad (73.8)$$

and hence, from (73.6), $H_{t2} < H_{t1}$: in a slow shock wave, the tangential magnetic field becomes weaker. In a fast wave, however, $v_n > {H_n}^2/4\pi j$, and from (73.6) it follows that $H_{t2} > H_{t1}$, the tangential magnetic field thus becoming stronger.
A particular case of shock waves is that where the magnetic field is parallel to the normal on both sides of the discontinuity surface. As mentioned at the beginning of §72, we can always choose the coordinates so as to make **v** and **H** parallel on both sides. In the case considered, we then have $\mathbf{H}_{t1} = \mathbf{H}_{t2} = 0, \mathbf{v}_{t1} = \mathbf{v}_{t2} = 0$ (a parallel shock wave). For such a shock wave, the boundary conditions do not involve the magnetic field, i.e. they are the same as in ordinary fluid dynamics. The presence of the magnetic field has the result, however, that over a certain range of shock parameter values the conditions for an evolutionary discontinuity are no longer satisfied, and such shock waves become impossible (see Problem 1).
All the perpendicular shock waves described at the end of §72 are evolutionary fast compression shock waves. They are seen to be fast from the fact that when $H_n = 0$ we have $u_A = u_s = 0$.
Having discussed the various types of discontinuity in magnetohydrodynamics, let us now consider the possible existence of forms transitional between these types, i.e. discontinuities having the properties of two types at the same time. Such possibilities are severely limited by conditions which result from the requirement of the evolutionary property.
An Alfvn discontinuity, first of all, cannot pass continuously into a shock wave, since for the latter the magnetic fields on either side are coplanar with the normal to the discontinuity surface. Such a shock wave can coincide with an Alfvn discontinuity only if the vector **H** turns through 180° in it. But the tangential field component would then change sign, whereas in an evolutionary shock wave it does not change sign.
A continuous transition between fast and slow shock waves would be possible only with $\mathrm{H}_{11} = \mathbf{H}_{12} = 0$, since in a fast shock the field $\mathbf{H}_t$ (if not zero) is strengthened, but in a slow one it is weakened. In other words, a continuous transition would be possible only between fast and slow parallel shocks. But the ranges where these are evolutionary meet only at $u_{11} = u_{01}$, when the slow shock disappears (see Problem 1). Thus there cannot be a [c] ontinuous transition between fast and slow shocks.
A fast shock cannot pass continuously into a tangential discontinuity, because of the [11] equalities (73.4).

[4]† The ranges where the condition is not satisfied include cases where the number of parameters is either grel$^{2\mathrm{el}^d}$ or less than the number of equations, for each of the two groups of perturbations.

There can therefore be continuous transitions only between a tangential discontinuity ind either a contact discontinuity, an Alfvn discontinuity, or a slow shock wave.

PROBLEMS

Problem 1. Find the range of values of v_1 in which a parallel shock wave is no longer evolutionary in a 'bernodynamically) ideal monatomic gas with ratio of specific heats $c_p/c_v = 5/3$.

Solution. For such a gas, the heat function $w = 5P/2\rho$, and the boundary conditions (70.1)-(70.3) become

$$\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2, \quad P_1 + \rho_1 v_1^2 = P_2 + \rho_2 v_2^2, \quad v_1^2 + 5P_1/\rho_1 = v_2^2 + 5P_2/\rho_2.$$

Hence $v_2 = ({v_1}^2 + 3{u_{01}}^2)\, 4v_1$, where $u_0 = \sqrt{}(5P/3\rho)$ is the ordinary velocity of sound, and

$$\begin{aligned} u_{A2} &= \sqrt{}(\rho_1/\rho_2)\, u_{A1} = \sqrt{}\left(v_1^2 + 3u_{01}^2\right) u_{A1}/2v_1, \\ u_{02} &= \sqrt{}\left\{\left(5v_1^2 - u_{01}^2\right)\left(v_1^2 + 3u_{01}^2\right)\right\}/4v_1 \\ u_{f1} &= \max\left(u_{01}, u_{A1}\right), \quad u_{s1} = \min\left(u_{01}, u_{A1}\right) \\ u_{f2} &= \max\left(u_{02}, u_{A2}\right). \quad u_{s2} = \min\left(u_{02}, u_{A2}\right). \end{aligned}$$

When $u_{A1} < u_{01}$, the shock wave is fast and always evolutionary. Figure 43 shows the approximate form of the functions $v_2(v_1)$ (thick curve) and $u_{A2}(v_1), u_{f2}(v_1) = u_{02}(v_1)$ in this case; the slanting dot-and-da sh line bisects the right angle.

Figure 44 shows a corresponding diagram for the case $u_{A1} > u_{01}$. The thin curves are again the functions $u_{A2}(v_1)$ and $u_{02}(v_1)$; the various parts of these curves are marked to show whether u_{f2} or u_{s2} coincides with them The thick continuous curve is the function $v_2(v_1)$ for the evolutionary ranges; the left-hand and right-hand parts correspond to slow and fast shock waves respectively. The thick dashed curve is the non-evolutionary range $u_{AI} < v_1 < \sqrt{}(4{u_{A1}}^2 - 3{u_{01}}^2)$, ending on the right at the point $v_2 = u_{A2}$.†

Problem 2. In front of a shock wave the tangential magnetic field $\mathbf{H}_{t1} = 0$, and behind it $\mathbf{H}_{t2} \neq 0$; this is called a switch-on shock. Find the range of values of v_{n1} which such a shock wave can have, in a gas with the same thermodynamic properties as in Problem 1.

Solution. It follows from (72.2) that when $\mathbf{H_{11}} = \mathbf{0}$ the speed of the shock wave relative to the gas behind in is $v_{n2} = H_{nt}\sqrt{}(4\pi\rho_2) = u_{A2}$, and relative to the gas in front $v_{n1} = \rho_2 v_{n2}/\rho_1 = u_{A1}\sqrt{}(\rho_2/\rho_1) > u_{A1}$. This is a fast shock; v_{n1} and v_{n2} are related by $v_{n1}v_{n2} = {u_{A1}}^2$‡

For a switch-on shock in a gas with the specified thermodynamic properties, the boundary conditions give

$$H_{t2}^2/8\pi = \left(\rho_1/3u_{A1}^2\right)\left(v_{n1}^2 - u_{A1}^2\right)\left(4u_{A1}^2 - 3u_{01}^2 - v_{n1}^2\right).$$

Since the right-hand side must be positive and $v_{n1} > u_{A1}$, we see that the possible values of v_{n1} in a switch-on shock lie in the range

$$u_{A1} \leqslant v_{n1} \leqslant \sqrt{}\left(4u_{A1}^2 - 3u_{01}^2\right)$$

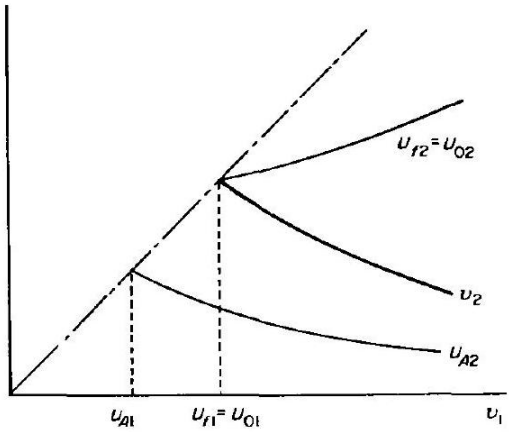


Fig. 43

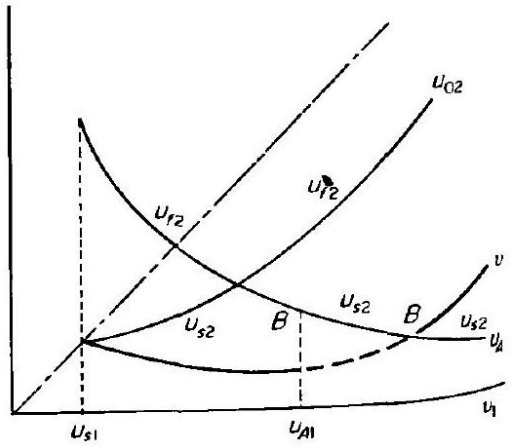


Fig. 44

These inequalities show that switch-on shocks can occur only if $u_{A1} > u_{01}$. In Fig. 44 they correspond to the ment BB of the thin continuous curve.

28.3.11 74. The turbulent dynamo

Turbulent motion of a conducting fluid has the remarkable property that it may lead to spontaneous magnetic fields which are quite strong. This is called the turbulent dynamo effect. There are always small perturbations in a conducting fluid, resulting from causes extraneous to the fluid motion itself (for example, the magnetomechanical effect in rotating parts of a fluid, or even thermal fluctuations), and accompanied by very weak electric and magnetic fields. The question is whether these perturbations are, on the average, amplified or damped by the turbulent motion in the course of time.

[4]† See Problem 2 as regards the segment BB.

‡ A switch-off shock is one in which $H_{i1} \neq 0$ and $H_{i2} = 0$. This is a slow shock, with $v_{n1} = u_{A1}, {}^{v_n} = \sqrt{(\rho_1/\rho_2)}\, u_{A2} < u_{A2}, v_{n1}v_{n2} = {u_{A2}}^2$.

There may be doubt as to whether the switch-on and switch-off shocks are evolutionary; for example, in [2] switch-off shock $v_{n1} > u_{A1}$, and it might seem that only one Alfvn perturbation wave can leave it, travellink backwards with $v_{n2} + u_{A2} = 2u_{A2}$. It must not be forgotten, however, that when a perturbation is imposed the tangential magnetic field becomes non-zero.

The manner of variation with time of magnetic field perturbations, once they have arisen. is determined by various physical agencies. The magnetic field tends to increase, by the purely hydromagnetic effect of the stretching of the lines of force. We have shown in §65 that, when a fluid with sufficiently high conductivity is in motion, the lines of magnetic force move as fluid lines "frozen" in, and the magnetic field varies proportionally to the stretching at each point on each line of force. In turbulent motion any two neighbouring particles move apart, on the average, in the course of time. As a result, the lines of force are stretched and the magnetic field is strengthened.

The dissipation of magnetic energy, which is converted into the Joule heat of the induced currents, tends to diminish the field. Since the energy dissipation is proportional to $(\operatorname{curl}\mathbf{H})^2$, i.e. is quadratic in the spatial derivatives of the field, it is clear that the dissipation will be small in flow where the spatial scale of variation of the field is sufficiently great. This does not mean that the field will be strengthened over such distances. The reason is that the lines of force are not only stretched but also "tangled", which reduces the spatial scale. A situation may therefore occur where the strengthening of a field with a given scale is replaced merely by an energy flux from large-scale turbulent eddies to smaller-scale ones, when the scale becomes sufficiently small, the energy is dissipated.

Such a situation would occur in "two-dimensional" turbulence, where the fluid velocity v is always parallel to a fixed xy-plane (Ya. B. Zel'dovich, 1956). It must be stressed that the resulting field $\mathbf{H}$ is not assumed to be two-dimensional. The proof is as follows.

Let us first consider the time variation of the field component H_z perpendicular to the flow. With the equations $\operatorname{div}\mathbf{H} = 0$ and $\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$ (the fluid being assumed incompressible in the present section), the z-component of equation (66.1) is

$$\partial H_z/\partial t = -(\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad})H_z + v_m\triangle H_z, \tag{74.1}$$

which involves only H_z. The first term describes just the transport of a given value of H_z with the fluid particle to which it belongs. The second term describes the "diffusional" upualization of H_z values at various points in the fluid. It is evident that neither can cause H_z to increase. If the initial perturbation H_z occupies a finite region of space. it will [3] appear in the course of time because of the "diffusion".

To prove that the field components H_x and H_y decay, we can put $H_z = 0$, since what we ve to exclude is the possibility that these components remain when H_z has decayed. † We all do this under the further restriction that all quantities ($\mathbf{v}$ and $\mathbf{H}$) are independent of

† The argumenis which follow do not exclude an increase of the field in the initial stage of the process.

the coordinate z.† Then the vector curl $\mathbf{H}$ is in the z-direction, and the same is true of $\mathbf{v}\times\mathbf{H}$, so that the electric field $\mathbf{E}$ is likewise in the z-direction; see (66.6). In such a case the electromagnetic field can be described by means of a vector potential A which is in the z-direction and independent of the coordinate z : $H_x = \partial A_z/\partial y, H_y = -\partial A_z/\partial x$, $E_z = -(1/c)\partial A_z/\partial t, \operatorname{div}\mathbf{A} = \partial A_z/\partial z = 0$. Substituting these expressions in (66.6), we find after a simple rearrangement the equation for A_z :

$$\partial A_z/\partial t = -(\mathbf{v}\cdot\mathbf{grad})A_z + v_m\triangle A_z, \tag{74.2}$$

which agrees exactly in form with (74.1). Hence it again follows that in the course of time the perturbations A_z decay, and therefore so do H_x and H_y.

The turbulent dynamo is thus an essentially three-dimensional effect. As an illustration, the following is an example of a flow which amplifies the field without altering its spatial scale (S. I. Vanshten and Ya. B. Zel'dovich, 1972). Let us consider a set of closed lines of magnetic force frozen inside a torus of fluid (Fig. 45a). Let the flow stretch the torus by a lengthwise factor

of two. say (Fig. 45b); the cross-sectional area decreases by the same factor, and the magnetic field increases. Next, suppose that the torus is twisted by the flow (Fig. 45c), and that the loops are then superimposed (Fig. 45d). This gives a configuration of about the same size as the original one, but with twice the field in the torus. Repetitions of this cycle give an unlimited exponential increase of the field. Such a flow is evidently fundamentally three-dimensional.

This illustration is, of course, not a proof that the turbulent dynamo actually exists; there are also flows which reduce the scale of the field. To settle this point, we need to make a direct investigation of the stability of turbulent motion of a conducting fluid with respect to small initial perturbations of the magnetic field. This approach has made it seem very likely that, when the magnetic Reynolds number is sufficiently large, a magnetic field is in fact generated. These fairly complicated analyses will not be given here; we shall discuss only the general form of the turbulence established by the process, on the assumption that the turbulent dynamo exists.

Turbulent flow may be regarded as an assembly of turbulent eddies of various sizes, from the basic "external" scale l to the smallest "internal" scale λ_0. The former is the same as the characteristic dimensions of the region in which the turbulent flow takes place; the latter gives the order of magnitude of the distances over which energy dissipation becomes important (see $FM, 8831, 32$). By "steady turbulence" we mean that the mean characteristics (averaged over times that are of the order of the periods of the corresponding fluctuations but of course are short compared with the total observation

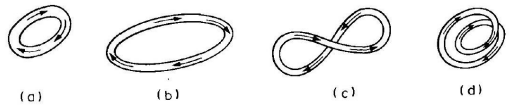


Fig. 45

time) are constant. The suffix λ will denote mean values for eddies with scale λ; for example, v_λ and H_λ are the mean variations of the velocity and the field over distances $\sim \lambda$.

The statement that a turbulent dynamo exists means that on the basic scale l there are magnetic fields whose energy density ${H_l}^2/8\pi$ is comparable with the kinetic energy density $\frac{1}{2}\rho v_1^2$ of the fluid. That is, the Alfvn velocity in the field H_1,

$$u_A \sim H_l/\sqrt{(4\pi\rho)}, \tag{74.3}$$

is comparable with the basic scale of the fluid velocity $v_l \equiv u$ (the change in the mean velocity over distances $\sim l$). For scales $\lambda \ll l$, the fields $H_\lambda \ll H_l$ · †

We must immediately emphasize the chief difference between magnetic and ordinary turbulence. In the latter, motion on the basic scale does not significantly affect the properties of the small-scale eddies, but simply transports them convectively. In the magnetic case, however, the basic-scale field H_l affects the motion on all smaller scales.

Since for scales $\lambda \leqslant l$ the field H_l may be regarded as locally uniform, and $H_\lambda \ll H_l$, the small-scale flow in this case is just an assembly of small-amplitude hydromagnetic waves with wave numbers $k \sim 1/\lambda$ and velocities $\sim u_A$. According to (69.11), in these waves the kinetic energy of the fluid is the same as the magnetic energy. That is, in the small-scale eddies there is almost exact equipartition between the magnetic and kinetic energies:

[4]† This assumption is made here only for purposes of simplification and is not fundamental The same resull can be reached without this restriction by somewhat more complex arguments.
‡ See S. I. Vanshten, Zhurnal ksperimental'no i teoretichesko fiziki 79, 2175, 1980; 83, 161, 1982 (Soitil Physics JETP 52, 1099, 1981; 56, 86, 1983).

$$\rho v_\lambda^2 \sim H_\lambda^2/4\pi. \tag{74.4}$$

This relation, as an order-of-magnitude one, can be extended to the basic scale. for which it gives $u \sim u_A$, in agreement with the assumption made.

Let us consider the range of scales λ

$$l \gg \lambda \gg \lambda_0. \tag{74.5}$$

It must be remembered that the viscous and Joule dissipations will in general become important for different values of λ. and in this sense magnetic turbulence may have two internal scales, λ_0 in (74.5) being taken as the larger of the two, so that in the inertial range (74.5) there is no dissipation.

As in ordinary turbulence theory, we introduce the mean amount of energy ε dissipated per unit time and unit mass of fluid. This energy is derived from the large-scale flow, whence it is gradually transferred to smaller and smaller scales until it is dissipated in eddies of size $\lambda \lesssim \lambda_0$. It is evident that in the inertial range, where there is no dissipation, ε is also the constant (independent of λ) flux of energy towards smaller scales. In ordinary nonmagnetic turbulence it was possible to assert that the local properties (i.e. over distances $\lambda \ll l$) of the turbulence must be determined only by ρ, ε and of course the distances λ themselves, but not by the scales l and u of the sizes and velocities as a whole; this was sufficient to give the dependence of v_λ on λ from dimensional arguments. In magnetic turbulence, the local properties may depend also on the field H_l (or. equivalently, on the velocity u_A). Dimensional arguments then do not suffice to determine v_λ, and it is necessary to bring in the actual mechanism by which the energy flux is established.

This mechanism is the mutual interaction of small-amplitude hydromagnetic waves which is described by non-linear terms in the equations of motion. The energy flux $\varepsilon \mathrm{m}_{U_{St}}$ therefore be expanded in powers of the small amplitudes v_λ, and this expansion must begin with terms above the second order (the quadratic terms would correspond to ordinary dissipation, which is absent here). The third-order terms would depend on the random phases of the interacting waves, and would vanish on averaging over these phases. Hence $_\varepsilon \propto {v_\lambda}^4$. The proportionality factor can be found from dimensional arguments (the dimensions of ε are $\mathrm{erg/g \cdot s} = \mathrm{cm^2/s^3}$):

$$\varepsilon \sim v_\lambda^4/u_A\lambda \tag{74.6}$$

or

$$v_\lambda \sim (u_A\varepsilon\lambda)^{1/4} \tag{74.7}$$

(R. H. Kraichnan, 1965). This replaces Kolmogorov and Obukhov's law $v_\lambda \simeq (\varepsilon\lambda)^{1/3}$ in ordinary turbulence. Extrapolation of (74.6) to the basic scale gives for ε the estimate $\varepsilon \sim u^4/u_A l \sim u^3/l$, as in non-magnetic fluid dynamics.

The internal scale of turbulence λ_0 can be estimated by regarding the small eddies as hydromagnetic waves against the background of the large-scale field H_l. The viscosity and conductivity of the medium cause absorption of these waves; the corresponding absorption coefficient γ has been found in §69, Problem. The dissipation becomes important when the absorption length $1/\gamma$ is comparable with the wavelength, i.e. with the scale λ. Since the

[4]† Here we are considering the generation of a turbulent magnetic field whose spatial variation has characteristic dimensions $\leq l$. The generation of a "large-scale" field with dimensions $\gg l$ is found to be possible only if the averaged properties of the turbulent flow are not invariant under spatial inversion, a case not discussed here. The theory is given in the books by S. I. Vanshten, Ya. B. Zel'dovich and A. A. Ruzmakin, Turbulentnoe dinamo v astrofizike (The Turbulent Dynamo in Astrophysics), Nauka, Moscow, 1980; H. K. Moffatt, Magnetic Field Generation in Electrically Conducting Fluids, Cambridge University Press, Cambridge, 1978.

hydromagnetic waves are propagated with velocity u_A (independent of their wavelength), the frequency $\omega \sim u_A/\lambda$. The absorption coefficient can be estimated as $\gamma \sim (v + v_m)/\lambda^2 u_A$. From the condition that $\gamma \sim 1/\lambda$ when $\lambda \sim \lambda_o$, we find the internal scale

$$\lambda_0 \sim (v + v_m)/u_A \sim (v + v_m)/u. \tag{74.8}$$

If $v \gg v_m$, then $\lambda_0 \sim v/u \sim l/R$, where $R \sim ul/v$ is the Reynolds number for the basic motion. Similarly, if $v_m \gg v_0$, then $\lambda_0 \sim l/R_m$.

There is one further interesting property of the turbulent flow of a highly conducting medium: the magnetic field is displaced from the turbulent region. Let us consider a finite region occupied by the turbulence, with a magnetic field outside it. The lines of force of this field, on entering the turbulent region, become tangled, since they are "frozen"; the magnetic field becomes random in direction. This means that the time-average field H becomes almost zero, and the higher the conductivity, the more nearly exact is the vanishing of the field; finite conductivity gives rise to a "slippage" of the lines of force. so that the field does not become completely random. In other words, when a fairly weak magnetic field is applied to a fluid in turbulent motion (within a limited region), the fluid behaves diamagnetically with a small permeability $\mu \ll 1$ which decreases with increasing magnetic Reynolds number R_m.

If the magnetic field is sufficiently strong, however, it is unable to penetrate into the fluid. This does not mean that a strong field will suppress turbulence completely. Twodimensional turbulence, with the fluid velocity everywhere parallel to the xy-plane and independent of the coordinate z, can occur in any uniform external magnetic field (in the z-direction), no matter how strong. For, in this case, $\mathrm{curl}(\mathbf{v}\times\mathbf{H}) = (\mathbf{H}\cdot\mathbf{grad})\mathbf{v} = 0$, and [it] follows from (65.2) that the flow does not perturb the external field, which remain uniform. No currents arise, therefore, and the Lorentz force is zero. We may say that the two-dimensional flow "does not see" a uniform field. In a strong external field, the turbulence degenerates into just this two-dimensional form.

28.4 Waveguides

(see Jackson, if needed or many other professional books. It is a topic for a special thousands of pages)

28.5 Plasma Physics

(see note on kinetics also about it. I'll write here it later, it is a big topic, not exactly in scope of electrodynamics)

28.5.1 Gas Discharge

обзор

Плазма наиболее отражает законы электродинамики, поскольку главные свойства вещества в состоянии плазмы задаются именно электродинамикой.

При этом, в отличие, скажем, от ионных кристаллов или электролитов, прочие законы физики оказываются в какой-то мере подчиненными, вторичными, и многие совершенно принципиальные задачи физики плазмы могут рассматриваться в рамках одной только электродинамики.

связь физики плазмы с физикой газового разряда

Мы начнем, однако, не с физики плазмы как таковой, но с процесса протекания тока в газе — газового разряда.

Физику газового разряда нередко смешивают с физикой плазмы.

Как мы увидим далее, это не вполне корректно, но четкой границы между ними и в самом деле нет.

Можно сказать, что в типичных условиях газовый разряд выделен исключительной неравновесностью: объект существует лишь при определенных условиях протекания через среду электрического тока (а иногда как необходимое условие добавляется внешний источник ионизирующего излучения).

Все его свойства и закономерности чрезвычайно чувствительны к режиму, заданному извне.

мотивация изучать газовый разряд

Газовый разряд — главный метод получения плазмы в лаборатории и наиболее доступный объект плазменной природы (не считая Солнца и звезд).

Из чего бы газ ни состоял, в состоянии, близком к равновесному, он всегда — плохой проводник.

Причина вполне очевидна: в газе молекулы почти никак друг с другом не связаны, каждая из них совершает броуновское движение, и нет сколько-нибудь эффективных механизмов переноса заряда.

качественное объяснение возникновения газового разряда

При прохождении мощных импульсов тока через тонкие проводники, когда вследствие мощного выделения энергии вещество проводника последовательно проходит все состояния от твердого до плазменного, паро-газовой фазе сопутствует так называемая «пауза проводимости».

Однако в любом газе, даже если представить его абсолютно изолированным от внешней среды, всегда есть хотя бы очень малая доля молекул, настолько энергичных, что при межмолекулярных столкновениях происходит отрыв электронов от нейтральных атомов и образование электрон-ионных пар.

Таким образом в газе появляются возможные носители тока.

Реальное же их число всегда значительно выше того, которое формально следует из термодинамического равновесия, поскольку во Вселенной существует определенный фон космического излучения.

(?? серьезно?)

Оно и поддерживает в любом газе некоторую стационарную степень ионизации, а значит, и проводимости.

В гл. 3 мы моделировали механизм сопротивления, связав его с эффективной частотой столкновений электрона

$$\lambda = \frac{ne^2}{m\nu_{\text{эф}}}$$

Если для большинства проводников эта формула - всего лишь наглядная модель микроскопической природы закона Ома, то для слабоионизованного газа она работает как очень хорошее приближение к реальности.

Не следует, однако, думать, что это выражение есть уже ответ на все вопросы.

Физическая задача часто в том и состоит, чтобы правильно определить величину $\nu_{\text{эф}}$, включая зависимость от полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$, так как закон Ома в газах чаще всего оказывается нелинейным.

Кроме электронов, ток могут переносить и ионы.

Обычно этот канал менее эффективен, но в некоторых газах, например $\mathbf{O}_2$, электроны эффективно адсорбируются нейтральными атомами, и тогда ток переносится двумя сортами ионов.

подвижность - коэффициент связи скорости и поля

В случае носителей нескольких сортов скорость каждого из них (индекс α) связывается с электрическим полем коэффициентом, который принято называть подвижностью и обозначать через μ_α:

$$\mathbf{v}_\alpha = \mu_\alpha \mathbf{E}; \quad \mu_\alpha = \frac{Z_\alpha e}{m_\alpha \nu_\alpha};$$

где $Z_e = -1$, $Z_\alpha e$ - заряд соответствующего иона; электроны для общности тоже включены в их число.

Соотношение (12.1) позволяет обобщить формулу (3.11):

$$\lambda = \sum_\alpha \frac{(Ze)_\alpha^2 n_\alpha}{m_\alpha \nu_\alpha}$$

границы применимости закона Ома

Опыт показывает, однако, что простой закон Ома, хотя бы и нелинейный, описывает протекание тока в газе лишь при достаточно малых полях.

ВАХ газового разряда

Пример вольт-амперной характеристики газового разряда представлен на рис. 12.1. (????)

Для наших рассуждений ее удобнее рассматривать в локальной форме $j(E)$.

Участок OA соответствует пределу слабого поля и описывается формулой (12.2).

Далее в некотором интервале значений поля (участок AB) плотность тока - почти константа, затем при некотором критическом значении поля $E_{\text{кр}}$ происходит пробой, и ток многократно возрастает, чему отвечает участок кривой BC.

Разряд B области OAB называется несамостоятельным, а при $E > E_{\text{кр}}$ - самостоятельным.

Происхождение такой терминологии будет ясно из дальнейшего.

теория Таудсена - объяснение ВАХ газового разряда

Теория, описывающая столь нетривиальное поведение тока в зависимости от поля была впервые построена английским физиком Дж. Таунсендом ($1868 - 1957$).

Мы воспроизведем ее основные положения и результаты.

Главная причина неадекватности закона Ома в том, что не только усредненная величина $\nu_{\text{эф}}$, но и рождение носителей тока существенно для физики разряда.

Рассмотрим для простоты чисто электронную динамику.

Внешние источники (космические лучи) рождают в единицу времени определенное число электронов.

Можно было бы ожидать, что когда плотность тока достигнет такой величины, то именно столько их и будет приходить на анод; рост тока, соответствующий (12.2), прекратится, и мы как раз выйдем на участок AB вольт-амперной характеристики.

Но такое представление оказывается слишком примитивным, тем более, оно не может объяснить эффект пробоя.

На самом деле уже в области AB в игру вступает новое явление - образование электронной лавины.

Будем считать, что газ заполняет некоторый диод (на рис. 12.2 он показан плоско-параллельным, K - катод, A - анод).

Будучи ускорены в электрическом поле E, электроны при соударениях с нейтральными атомами и молекулами производят вторичную ионизацию.

Главный источник первичных электронов

в такой системе — катод, так как внешнее излучение эффективнее взаимодействует с конденсированным веществом, нежели с разреженным газовым наполнением.

Но электроны, выбитые из анода, тут же втягиваются обратно электрическим полем, тогда как с катода они стартуют в направлении анода.

Пусть в единицу времени на катоде рождается число электронов, равное N_0. Ради упрощения вычислений мы в дальнейшем пренебрегаем рождением электронов в газовом объеме.

Число вторичных электрон-ионных пар на длине пробега, а значит и на единицу длины, примерно одинаково и может характеризоваться некоторым параметром β, поскольку длина пробега от нулевой скорости примерно одинакова в любой области, и практически всю энергию, полученную при ускорении в электрическом поле, электрон каждый раз отдает на вторичную ионизацию,

$$\beta \equiv \frac{dN_{\mp}}{dx}$$

где ось Ox направлена от катода к аноду (рис. 12.2), координата катода $x = 0$, анода $-x = d$.

Уравнение, описывающее изменение числа электронов с координатой x, следует из условия

$$dN = N\beta dx$$

Решение его, как хорошо известно, - экспонента:

$$N \propto \exp(\beta x); \Longrightarrow N(d) = N(0)\exp(\beta d)$$

Этот процесс экспоненциального накопления электронов в катод-анодном промежутке схематически показан на рис. 12.2.

Для определенности мы «привязали» вторичные электроны к самому концу свободного пробега.

Напомним еще раз, что число электронов у нас нормировано на единицу времени.

число вторичных электрон-ионных пар

Чтобы получить число вторичных электрон-ионных пар, нужно вычесть из (12.3) число электронов, порождаемое в единицу времени внешним источником::

$$N_{\mp} = N(0)[\exp(\beta d) - 1]$$

В установившемся режиме разряда именно таким будет число ионов, приходящих в единицу времени на катод.

Они не слишком эффективны в процессе объемной ионизации - из-за их малых скоростей, однако из массивного катода они могут выбивать вторичные электроны - для этого энергии у них достаточно.

Пусть каждый из них выбивает в среднем γ вторичных электронов.

(Заметим, что коэффициенты β и γ могут быть как больше, так и меньше единицы.) Тогда число электронов, выбитых ионами из катода в единицу времени, равно

$$\gamma N(0)[\exp(\beta d) - 1]$$

а полное их число, образованное ионами и внешним источником в единицу времени

$$N(0) = N_0 + \gamma N(0)[\exp(\beta d) - 1]$$

Отсюда и следует окончательно:

$$N(0) = \frac{N_0}{1 - \gamma[\exp(\beta d) - 1]}; \quad N(d) = \frac{N_0 \exp(\beta d)}{1 - \gamma[\exp(\beta d) - 1]}$$

Если знаменатели в формулах (12.4) положительны, мы имеем дело с несамостоятельным разрядом, поскольку $I \propto N_0$, но если мы достигаем критического условия

$$\gamma[\exp(\beta d) - 1] = 1$$

то величина N_0 уже несущественна, поскольку полный ток в (12.4) формально обращается в бесконечность.

Это и есть пробой, иными словами - переход в режим самостоятельного разряда.

Почему это происходит при росте напряженности поля (рис. 12.1)?

Экспериментально установлено, что «коэффициент размножения» β
(на рис. 12.2 он равен трем)
есть некоторая монотонная функция отношения поля к давлению газа:

$$\beta = F(E/\mathscr{P})$$

Таким образом, по мере роста поля или снижения давления мы и попадаем в режим самостоятельного разряда:

$$\gamma \left[\exp\left(\beta \left(E_{\mathbf{Kp}}\right) d\right) - 1\right] = 1$$

В отличие от несамостоятельного, самостоятельный разряд уже не нуждается во внешнем ионизаторе; последний, однако, играет важную роль в процессе зажигания.

Как следствие, для вольт-амперных характеристик самостоятельных разрядов характерен гистерезис: напряжение гашения всегда ниже напряжения зажигания.

возможные последующие динамики

Теория Таунсенда дает правильное представление о несамостоятельном разряде (его часто и называют таунсендовским) и о переходе в режим самостоятельного разряда, но последующая динамика разряда уже никак не будет универсальной.

Прежде всего, в различных режимах (которые зачастую зависят не только от величины поля, но и от «сценария» зажигания разряда) весьма различными оказываются режимы поддержания самостоятельного разряда.

В тлеющем разряде, хорошо нам известном по газоразрядным трубкам, картина явления в наибольшей степени близка той, которую мы только что рассмотрели.

Главную роль в поддержании разряда играют ударная ионизация в объеме газа и вторичная эмиссия на катоде; последняя обусловлена не только ионной бомбардировкой, но и фотоионизацией за счет электро- магнитного излучения самого разряда.

Пожалуй, главным отличием от таунсендовского режима оказывается очень серьезная зависимость от пространственных координат всех характеристик разряда: поля, потенциала, концентрации частиц, всех основных процессов — да и чисто визуальная.

огни святого Эльма

Коронный разряд («огни святого Эльма») образуется обычно на остриях и тонких проволочках.

Его отличает еще большая пространственная неоднородность, так что лишь в некоторой области пространства вблизи острия идет самостоятельный разряд, а в остальном пространстве пробоя газа не происходит, и ток через газ просто «навязан» областью пробоя.

Для искрового разряда (в частности, и молнии) характерны очень сильные поля и короткие характерные времена.

Разряд происходит по треку предварительно образовавшегося канала, т. н. стримера.

За его образование отвечают множественные электронные лавины, развитие которых происходит не совсем так, как в тлеющем разряде.

Начало лавине дает акт фотоионизации фотоном, испущенным какой-то предыдущей лавиной. Поскольку фотоны, в отличие от электронов, распространяются со скоростью света, развитие стримера идет намного быстрее, чем единичной электронной лавины. Для дугового разряда характерны, напротив, большие то- ки и сравнительно небольшие значения падения напряжения. Электроны, поддерживающие ток, поставляются термоэлектрон- ной эмиссией с катода (возможна, впрочем, и «холодная» дуга). Здесь важную роль играет материал электродов, испаряющийся и ионизующийся в процессе разряда. Существует немало и других режимов.

общее свойство всех разрядов

В процессе газового разряда вещество превращается в плазму — агрегатное состояние, более горячее.

Для перехода в состояние плазмы по обычному каналу фазовых переходов необходимо нагреть вещество до температуры 5 000–10 000 K, что как раз соответствует характерной температуре поверхности Солнца и звезд.

Газовый разряд, ввиду исключительной его неравновесности, позволяет осуществить этот переход более дешевой ценой при гораздо более умеренных температурах и поддерживать вещество в этом состоянии также относительно простым и доступным способом.

28.6 Semiconductors

(I'll write first about it in a special notes, then in the note on cond matter, and only then here. It is not really electrodynamics, more condensed matter topic)

28.7 Some Materials with Special Electromagnetic Properties

(I'll first write them in a special note, then I'll write them here. It is very not clear which materials are useful and which are worth nothing)

(see maybe note on cond matter about them)

29 Phenomena in Nature and Everyday Life

29.1 Well-Known Phenomena

29.1.1 Lightning

(I'll try to describe them one day, not an easy task)



29.1.2 Gigantic Jet

(I'll try to describe it one day, not an easy task)



29.1.3 Earth's Electromagnetic Field

(I'll discuss main its features here)

29.1.4 Field from Wi-Fi and Mobile Devices

(I'll discuss how big and harmful are they???)

29.2 Not So Well-Known Phenomena

29.2.1 Drift in the Earth's radiation belts

(там задача про магнитные ловушки есть, опишу её тут. пока не до этого.)

29.3 Electrodynamics in Outer Space

(there is even a book about particles in cosmos by Batygin, so there are a lot of things known about it)

29.4 Hypothetical Phenomena

29.4.1 Ball lightning (??)

(когда-то что-то напишу про это, пока не актуально.)

Суть (?)

Теория (?)

Другое (?)

Part XII
Appendix

A Preface and Introduction to Electrodynamics

Приведем соображения о подходе к электродинамике.

A.1 Other Motivation

Обсудим, что нас мотивирует изучать классическую электродинамику.

A.1.1 General Motivation for Electrodynamics

Порой непонятно, зачем это делать, так что соберем теорию эту.

Можно глубоко понимать природу электричества (??)

(только дойти до этого сложно)

В электродинамике много интересных простых задач, чтобы отвлечься от сложного теорфиза

Модно просто так сидеть, наслаждаться простыми интересными задачами, решать их, зная лишь пару формул. Конечно, это можно сказать и про многие другие разделы физики, но тем не менее, по электродинамике есть особо интересные задачи.

(напишу там точнее это потом, когда нарешаю их)

Зная электродинамику, можно ставить в тупик матфизников, которые изучают теорию поля

Потому что им общефизная электродинамика чаще всего совсем плохо зашла, так что многие вопросы и утверждения из неё для них будут совершенно неусвоены. Так что зная электродинамику, не будешь теряться на фоне их умничения, что достаточно полезно.

A.1.2 Amazing Facts

(тут пока не могу ответить)

A.1.3 Overview of Applications of Different Topics

Мотивация к электростатике

Обсудим, зачем изучать электростатику хз.

Классические типичные модели

В базу физика-теоретика обязательно входят знания свойств типичных моделей электростатики. Именно это те четкие понимания природы, которыми владеет физик.

Результаты электростатики можно использовать для описания дальнейших моделей

Например, для задач движения частиц в электростатическом поле. Вроде, только это.

(?) Небольшой простой раздел

Так что очень легко его пройти и стать способным решать некоторый небольшой типичный набор задач.

Мотивация изучать магнитостатику

мотивация изучать токи

тип там интересно все это.

Мотивация к теории излучения

Мотивация к теории рассеяния

Хорошая тренировка знаний классической электродинамики

Можно очень хорошо оттренировать всю электродинамику на этих разделах. Пока что это главная мотивация, поэтому иногда и открываю эти разделы.

мотивация ЭСС

Все электрические приборы используют результаты ЭСС в некоторой форме

такая себе мотивация, но тоже есть такое.

ЭСС - неплохая тренировка по физике

тоже есть такое, но это не главное.

мотивация изучать электростатику

что начнем уметь по итогу?

обзор электростатики

что тут вообще есть?

A.2 Thinking of a Professional in Electrodynamics

Осудим, какое мышление сопутствует пониманию классической электродинамики.

A.2.1 How Much Does One Really Need to Know Theoretical Electrodynamics?

It is an important question, because there are people who say "we don't care about any field theory, we just use numerical simulations of well-known Maxwell's equations" and they have a lot of money, they do some research.

(??? I'll think later about it, maybe yes, this is a good approach, not to care about theory at all)

A.2.2 How Find Out What Is Shit and Only Looks Like Electrodynamics?

(I'll write, how. It is not obvious)

Practice: Finding out shitty research in electrodynamics

Works by Christophe Caloz and his colleagues

(I'll spend 1/2 of the page to tell the story of people who don't understand physics at all and just taking grants for imitating research. They do ut to 100% bullshit)

A.2.3 Methods of Studying Classical Electrodynamics

О пользе подхода дифференциальных форм

а вот хз, вроде полезен, но так и не уверен, насколько он нужен.

Необходимые темы для изучения электродинамики

(да вроде не особо что-то и нужно знать)

О необходимость основ математического анализа

интеграл, векторный анализ, это всё нужно.

Дополнительные темы для изучения электродинамики

О важности дифференциальной геометрии для электродинамики

(скорее всего нужна, но это точно не теорминский уровень, так что забью.)

О важности термодинамики для электродинамики

тоже часто нужна, особенно у Ландау

A.2.4 The Most Applied Topics of Electrodynamics (??)

обсудим, какие темы на самом деле самые важные тут.
(пока не знаю, стану умным - напишу)

A.2.5 Ways to Guess the Main Ideas of Electrodynamics

(буду становиться мастером - пропишу)

Как догадаться про уравнения Максвелла? (???)

(пока не знаю.)

A.2.6 Misconceptions in Electrodynamics

Интересно также собрать разные утверждения, которые неверные, в правильности которых некоторые уверены.

о течении энергии из конденсатора

так и не понял, то ли по воздуху течет она, то ли как?

A.3 Acknowledgements

Currently, no one except me has worked on the sections of this note (with the exception of sections taken from books).

A.4 Literature

Обсудим книги и статьи, которые помогают понять электродинамику.

A.4.1 Main Literature

Минимальная

[1] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред

Многое очень будет взято, если не всё.

[2] Nicola A. Spaldin Magnetic Materials: Fundamentals and Applications

Книга с простыми и обзорными темами, но и ее усваивать может уйти пара недель работы. Есть, о чем подумать, также в ней есть немного задач и в конце решений. В ней имеются опечатки.

[3] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля

Большинство глав по ней создавались. По сути она взята в основу структуры.

Тонг классическая электродинамика

курс его есть, думаю, спокойно возьму быстро очень. хорошая идея - начать с него.

Задачники по электродинамике

С.М.Козел, В.Г.Лейман, Г.Р.Локиин, В.А.Овчинкин, Э.В.Прут СБОРНИК ЗАДАЧ ПО ОБЩЕМУ КУРСУ ФИЗИКИ Часть 2. Электричество и магнетизм. Оптика

Основной задачник, только его скорее всего ближайшие полгода буду открывать.

Корявов В. П. Методы решения задач в курсе общей физики. Оптика.

Очень полезная книга для сборника задач Овчинкина.

Батыгин Топтыгин

Крутые задачи, часто можно их прорешивать.

[4] Жукарев Матвеев Петерсои Задачи повышенной сложности в курсе общей физики

Шикарные задачи, обязательно прорешаю, только кайф их решать.

Белоусов сборник задач

Пока их решаю в теории поля, потом добавлю и в эту запись.

О.Ф. Кабардин В.А. Орлов Международные физические олимпиады школьников

Крутые задачи, все уже выгрузил, постепенно многое и прорешаю, потому что очень хорошая тренировка по базовым темам.

Чудновский А. В., Григорьев Ю. М., Муравьёв В. М., Потапов В. Ф. Теоретические задачи по физике Международная олимпиада «Туймаада» 1994-2012

Очень крутые задачи, очень интересные, тоже разберу их постепено, уже выгружено.

[5] В.С. Булыгин, М.Г. Кремлев, Э.В. Прут Избранные задачи студенческих олимпиад МФТИ по курсу общей физики Доступ через lib.mipt, дальше по http://books.mipt.ru/book/301280

Крутой сборник задач, тоже прорешаю потом его, очень интересные и простые задачи, шикарное проведение времени на них.

Основная профессиональная

[6] Джексон классическая электродинамика

Полезная, на которую много ссылок есть и все её знают. Слишком большая книга, чтобы с неё начинать.

Основная обучающая

[7] Кингсеп А. С. и др. Курс общей физики. Т. 1. Механика, электричество и магнетизм, колебания и волны, волновая оптика

Много простых основ взято, полезная книга, чтобы понять поверхность предмета. Не самая главая книга.

A.4.2 Extra Literature

Дополнительная обучающая

[8] Кириченко Н. А. Электричество и магнетизм

чисто на добивку, просто сверюсь, всё ли самое нужное взято потом.

Вергелес С. Н. методичка по ЭСС

мб крутая, посмотрю потом.

Киселев Семинары по теории поля

крутые задачи, потом добавлю их. там именно по электродинамике, это далеко не теория поля, пару дней можно перерешивать их, очень интересные они. потом добавлю в структуру многое.

https://www.youtube.com/@malkonsengineering/videos

Полезный канал про электронику, красивые анимации, неочевидные вопросы.

Статьи про разные редкие явления и задачи электродинамики

Thomas B. Mieling, Piotr T. Chruściel, and Stefan Palenta The Electromagnetic Field in Gravitational Wave Interferometers

Вроде хорошая статья про мастерские методы работы с гравитационными волнами. Впишу основы из нее, разберу.

[9] Thomas B Mieling The response of optical fibres to gravitational waves

Интересная статья, которая позволит глубже взгляднуть на уравнения Максвелла и гравитационные волны. Очень хочу освоить эти методы, как сделаю основы и будет время - посмотрю, это очень круто дополнит мое понимание основ электродинамики.

[10] Thomas B Mieling The response of laser interferometric gravitational wave detectors beyond the eikonal equation

Тоже интересная статья, которая позволит глубже взгляднуть на уравнения Максвелла и гравитационные волны. Очень хочу освоить эти методы, как сделаю основы и будет время - посмотрю, это очень круто дополнит мое понимание основ электродинамики.

Более глубокая теоретическая

И. Е. Тамм Основы теории электричества
Смотрел, крутая книга, мб когда-нибудь ей дополню свою теорию, но пока нет таких планов.

Статьи о разных электромагнитных явлениях и материалах

Stephen S. Sasaki et. al. "Tuning Exchange Coupling in a New Family of Nanocrystal-Based Granular Multiferroics Using an Applied Electric Field"
Оказывается, можно особые электромагнитные материалы создать с особыми свойствами из наночастиц. Нужно будет - почитаю еще, пока не хочу быть на прикладном уровне, теория еще не доучена. Возможно, действительно крутой способ создавать материалы.

Популярная литература

пока не актуально

Книги, имевшие ценность в прошлом

Обсудим книги, теория которых сильно изменилась с развитием науки.
(мб когда-то дойду до них)
Хейвисайд писал что-то
Эйнштейн писал что-то

A.5 Critical Review of Classical Electrodynamics

(в отличие от 1й части тут общие связывающие соображения, общие указания. в 1й же - да, суть и обзор, но там без какого-то обсуждения, без лишних связок. без второстепенных общих рассуждений. тут же они и будут.)

A.5.1 What is Electrodynamics as a Science?

Об общефизическом подходе

В мире полно всяких общефизников, которые любят обобщать опытные факты и не любят читать уже созданные теории, так что следует отдельно понимать их мышление, во многом для того, чтобы не делать так, как делают они.
(или все-таки они норм? подумаю про это)

Аналогии все-таки позволяют шире мыслить, но понимать важно их место

а место им второстепенное.
Тем не менее, польза в них есть.
поэтому я и занимаюсь общефизом, иначе это была бы трата времени

Об экспериментальном выводе уравнений Максвелла

что ж, актуальный вопрос, некоторые на самом деле считают, что это норм.
что ж, когда не будет лень, пропишу про это пару строк.

A.5.2 Overview of Theoretical Approaches

(??? a guide how not to get lost in theory)

A.5.3 Обзор дальнейших развитий электродинамики

A.5.4 Connection of Electrodynamics to Other Subjects

связь с классической теорией поля

хорошая проработка

связь с КЭД

связь с оптикой

многие главы от сюда используются в оптике, так что проработаю.

A.6 Description of the Note

описание глав и разделов

описание записи в целом

первая часть

вторая часть

приложения

какие вообще приложения я разбирал?

Обозначения и константы

A.7 Puzzles for Different Occasions

Тут укажу самые интересные или особенные задачи по электродинамике.

A.7.1 Puzzles About Ideological Models in Electricity and Magnetism

Сила между заряженного диэлектрического шара и металлического незаряженного

Определить, как будет меняться с расстоянием сила взаимодействия между двумя шариками, один из которых заряжен и состоит из диэлектрика, а другой металлический и не заряжен. Расстояние между шариками велико по сравнению с их размерами.

(О-3.41. хорошая задача, пока не знаю, но точно она идейно многое показывает.)

A.7.2 Puzzles about Ideological Issues of the Theory of Electricity

имеет ли электрическое поле массу?

вот в общефизе одна из строчек сказала, что да.
нужно его переучить!

типа $E = mc^2$, так можно сделать?
пока не до этого вопроса.

Допустим есть магнитное поле, в котором частица совершает движение. Получается, совершается работа без затрат энергии? (??????)

Ответ в том, что частица, создающая магнитное поле, почувствует отдачу от поля движущейся частицы, так что энергия будет уходить на удержание этой частицы.
(??????????а теперь докажем это формулами и я хз, как это сделать.)

Допустим имеется две среды с разными показателями проницаемости, если в одну поместить заряд, в какую сторону на него будет действовать сила?

Там через диполи всё хорошо понять, хорошая задачка.

A.7.3 Puzzles about Physical Phenomena

Обсудим загадки об объяснении различных явлений.

Шаровая молния

может она ил не может быть, хз

огни святого Эльма

A.7.4 Puzzles for Demotivation (??)

(вот и соберу, есть тоже много таких задач, после которых хочется просто закрыть предмет и все.)

A.7.5 Can Some Phenomena Occur or Not?

во многом задротские вопросы

может ли бумага наэлектризоваться?

вот чел может затирать, что там она наэлектризовалась?
а как проверить?
занудство, но тем не менее
(мб на занудные головоломки отдельную статью сделаю)

A.7.6 Purely Theoretical Puzzles (???)

(I'll collect them later, there are a lot of them)

Почему в одном уравнении максвеллла на ротор стоит (-), а в другом (+)

потому что такое пространство Минковского, см вывод из дифф форм.

A.8 History of Electrodynamics in a Nutshell

(пока как-то не актуально)

Обсудим какова история развития классической электродинамики и приведем основные выводы.

(о важности этой части потом во введении пропишу)

(пока просто набор глав, потом структура)

A.8.1 Creation of Maxwell's Equations

Для полноты картины посмотрим на то, как создавались уравнения Максвелла.

A.8.2 Ether

на самом деле тема супер скучная и не актуальная, мб вообще удалю её. а мб оставлю, чтобы было полная картина происходящего.

вкратце про идею эфира

подробно посмотреть это нужно, потому что часто очень к этому и возвращается дело.

О применениях понимания развития теории эфира

(укажу нормально, зачем знать это)

B Mathematics for Electrodynamics

(буду набивать руку - допишу то, что нужно тут.)

приведем подробно математику, которая нужна для занятий электричеством.

B.1 Coordinates and Objects

(сперва в теории поля прописываю нормально, потом уже сюда добавлю)

B.1.1 Curvilinear Coordinates by Landau

We give below, for reference, certain formulae relating to vector operations in curvilinear coordinates, both general and particular.

In an arbitrary system of orthogonal curvilinear coordinates u_1, u_2, u_3, the squared element of length is $\mathrm{d}l^2 = h_1^2\,\mathrm{d}u_1^2 + h_2^2\,\mathrm{d}u_2^2 + h_3^2\,\mathrm{d}u_3^2$, where the h_i are functions of the coordinates. The element of volume is

$$\mathrm{d}V = h_1 h_2 h_3\,\mathrm{d}u_1\,\mathrm{d}u_2\,\mathrm{d}u_3.$$

The various vector operations can be expressed in terms of the functions h_i as follows. For vector operations on a scalar:

$$(\operatorname{grad} f)_i = \frac{1}{h_i}\frac{\partial f}{\partial u_i}$$

$$\triangle f = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\sum \frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{h_2 h_3}{h_1}\frac{\partial f}{\partial u_1}\right)$$

where the summation is over cyclic interchanges of the suffixes $1, 2, 3$. For vector operations on a vector:

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \sum \frac{\partial}{\partial u_1} (h_2 h_3 A_1),$$
$$(\operatorname{curl} \mathbf{A})_1 = \frac{1}{h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_2} (h_3 A_3) - \frac{\partial}{\partial u_3} (h_2 A_2) \right].$$

The remaining components of curl A are obtained by cyclic interchanges of the suffixes.
Cylindrical coordinates r, ϕ, z.
Element of length: $\mathrm{d}l^2 = \mathrm{d}r^2 + r^2\, \mathrm{d}\phi^2 + \mathrm{d}z^2$;

$$h_r = 1, \quad h_\phi = r, \quad h_z = 1$$

Vector operations:

$$\triangle f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2},$$
$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z},$$
$$(\operatorname{curl} \mathbf{A})_r = \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z},$$
$$(\operatorname{curl} \mathbf{A})_\phi = \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}$$
$$(\operatorname{curl} \mathbf{A})_z = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \phi}$$
$$(\triangle \mathbf{A})_r = \triangle A_r - \frac{A_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$$
$$(\triangle \mathbf{A})_\phi = \triangle A_\phi - \frac{A_\phi}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial A_r}{\partial \phi}$$
$$(\triangle \mathbf{A})_z = \triangle A_z$$

In the expressions for the components of $\triangle \mathbf{A}$, $\triangle A_i$ signifies the result of the operator acting on A_i regarded as a scalar.

Spherical coordinates r, θ, ϕ.
Element of length: $\mathrm{d}l^2 = \mathrm{d}r^2 + r^2\, \mathrm{d}\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\, \mathrm{d}\phi^2$;

$$h_r = 1, \quad h_\theta = r, \quad h_\phi = r \sin\theta$$

Vector operations:

$$\begin{aligned}
\triangle f &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2},\\
\operatorname{div}\mathbf{A} &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2A_r\right)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(A_\theta\sin\theta\right)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi}\\
(\operatorname{curl}\mathbf{A})_r &= \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(A_\phi\sin\theta\right)-\frac{\partial A_\theta}{\partial\phi}\right],\\
(\operatorname{curl}\mathbf{A})_\theta &= \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\phi}-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rA_\phi\right),\\
(\operatorname{curl}\mathbf{A})_\phi &= \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(rA_\theta\right)-\frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right],\\
(\triangle\mathbf{A})_r &= \triangle A_r-\frac{2}{r^2}\left[A_r+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(A_\theta\sin\theta\right)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi}\right]\\
(\triangle\mathbf{A})_\theta &= \triangle A_\theta+\frac{2}{r^2}\left[\frac{\partial A_r}{\partial\theta}-\frac{A_\theta}{2\sin^2\theta}-\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi}\right]\\
(\triangle\mathbf{A})_\phi &= \triangle A_\phi+\frac{2}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial A_r}{\partial\phi}+\cot\theta\frac{\partial A_\theta}{\partial\phi}-\frac{A_\phi}{2\sin\theta}\right]
\end{aligned}$$

Основные тождества векторного анализа

Пока просто соберем полезные формулы.

Appendix A: Formulas from Vector Calculus Among useful differential relations are

$$\begin{gathered}
\nabla\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{B})=\mathbf{B}\cdot(\nabla\times\mathbf{A})-\mathbf{A}\cdot(\nabla\times\mathbf{B})\\
\nabla\cdot(f\mathbf{A})=(\nabla f)\cdot\mathbf{A}+f(\nabla\cdot\mathbf{A})\\
\nabla\times(f\mathbf{A})=(\nabla f)\times\mathbf{A}+f(\nabla\times\mathbf{A})\\
\mathbf{A}\cdot(\nabla\times(f\nabla\times\mathbf{B}))-\mathbf{B}\cdot(\nabla\times(f\nabla\times\mathbf{A}))\\
=\nabla\cdot(f(\mathbf{B}\times(\nabla\times\mathbf{A})-\mathbf{A}\times(\nabla\times\mathbf{B})))\\
\mathbf{A}(\nabla\cdot\mathbf{B})-\mathbf{B}(\nabla\cdot\mathbf{A})+\mathbf{A}\times(\nabla\times\mathbf{B})-\mathbf{B}\times(\nabla\times\mathbf{A})\\
-\nabla\times(\mathbf{A}\times\mathbf{B})=\sum_{\alpha=1}^{3}A_\alpha^2\nabla\left(\frac{B_\alpha}{A_\alpha}\right)=-\sum_{\alpha=1}^{3}B_\alpha^2\nabla\left(\frac{A_\alpha}{B_\alpha}\right)
\end{gathered}$$

(See also [1], [79] and [90].) Here, $\operatorname{div}\mathbf{A}=\nabla\cdot\mathbf{A}$ and $\operatorname{curl}\mathbf{A}=\nabla\times\mathbf{A}$.

Appendix B: Dual Tensor Identities

In this article, $e^{\mu\nu\sigma\tau}=-e_{\mu\nu\sigma\tau}$ and $e_{0123}=+1$ is the Levi-Civita four-symbol [27] with familiar contractions:

$$\begin{aligned}
e^{\mu\nu\sigma\tau}e_{\mu\kappa\lambda\rho} &= -\begin{vmatrix}\delta^\nu_\kappa & \delta^\nu_\lambda & \delta^\nu_\rho\\ \delta^\sigma_\kappa & \delta^\sigma_\lambda & \delta^\sigma_\rho\\ \delta^\tau_\kappa & \delta^\tau_\lambda & \delta^\tau_\rho\end{vmatrix},\\
e^{\mu\nu\sigma\tau}e_{\mu\nu\lambda\rho} &= -2\begin{vmatrix}\delta^\sigma_\lambda & \delta^\sigma_\rho\\ \delta^\tau_\lambda & \delta^\tau_\rho\end{vmatrix}=-2\left(\delta^\sigma_\lambda\delta^\tau_\rho-\delta^\sigma_\rho\delta^\tau_\lambda\right),\\
e^{\mu\nu\sigma\tau}e_{\mu\nu\sigma\rho} &= -6\delta^\tau_\rho,\quad e^{\mu\nu\sigma\tau}e_{\mu\nu\sigma\rho}=-24.
\end{aligned}$$

Dual second rank four-tensor identities are given by [27]:

$$e^{\mu\nu\sigma\tau}A_{\sigma\tau}=2B^{\mu\nu},\quad e_{\mu\nu\sigma\tau}B^{\sigma\tau}=A_{\nu\mu}-A_{\mu\nu}.$$

In particular,

$$Q^{\mu v} = R^{\mu v} + iS^{\mu v} = R^{\mu v} - \frac{i}{2} e^{\mu v \sigma \tau} F_{\sigma \tau},$$
$$P_{\mu v} = F_{\mu v} + iG_{\mu v} = F_{\mu v} - \frac{i}{2} e_{\mu v \sigma \tau} R^{\sigma \tau}$$
$$e_{\mu v \sigma \tau} Q^{\sigma \tau} = 2iP_{\mu v}, \quad 2iQ^{\mu v} = e^{\mu v \sigma \tau} P_{\sigma \tau}.$$
$$2R^{\mu v} = e^{\mu v \sigma \tau} G_{\sigma \tau}, \quad -2S^{\mu v} = e^{\mu v \sigma \tau} F_{\sigma \tau}.$$
$$2G_{\mu v} = -e_{\mu v \sigma \tau} R^{\sigma \tau}, \quad 2F_{\mu v} = e_{\mu v \sigma \tau} S^{\sigma \tau}.$$
$$P_{\mu v} Q^{\mu v} = 2F_{\mu v} R^{\mu v} - \frac{i}{2} \left(e^{\mu v \sigma \tau} F_{\mu v} F_{\sigma \tau} + e_{\mu v \sigma \tau} R^{\mu v} R^{\sigma \tau} \right).$$

By direct calculation,

$$F_{\mu v} R^{\mu v} = 2(\mathbf{H} \cdot \mathbf{B} - \mathbf{E} \cdot \mathbf{D}),$$
$$e^{\mu v \sigma \tau} F_{\mu v} F_{\sigma \tau} = 8\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}, \quad e_{\mu v \sigma \tau} R^{\mu v} R^{\sigma \tau} = 8\mathbf{H} \cdot \mathbf{D}.$$

As a result,

$$\frac{1}{4} P_{\mu v} Q^{\mu v} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} - \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} - i(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{D}).$$

An important decomposition,

$$\begin{aligned} P^*_{\mu \lambda} Q^{\lambda v} + P_{\mu \lambda} Q^* v &= 2 \left(F_{\mu \lambda} R^{\lambda v} + G_{\mu \lambda} S^{\lambda v} \right) \\ &= 4F_{\mu \lambda} R^{\lambda v} + \delta^v_\mu F_{\sigma \tau} R^{\sigma \tau} \\ &= 4F_{\mu \lambda} R^{\lambda v} - 2\delta^v_\mu (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} - \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}), \end{aligned}$$

is complemented by an identity,

$$\begin{aligned} P_{\mu \lambda} Q^{\lambda v} + P^*_{\mu \lambda} Q^{\lambda v} &= \frac{1}{4} \left(P_{\sigma \tau} Q^{\tau \sigma} + P^*_{\sigma \tau} Q^* \right) \delta^v_\mu \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} - \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) \delta^v_\mu. \end{aligned}$$

In matrix form,

$$PQ = (F + iG)(R + iS) = (FR - GS) + i(FS + GR),$$
$$P^*Q = (F - iG)(R + iS) = (FR + GS) + i(FS - GR).$$

Here,

$$FS = \frac{1}{4} \operatorname{Tr}(FS) I = (\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}) I,$$
$$GR = \frac{1}{4} \operatorname{Tr}(GR) I = (\mathbf{H} \cdot \mathbf{D}) I.$$
$$FR - GS = \frac{1}{2} \operatorname{Tr}(FR) I = (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} - \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) I,$$
$$\begin{aligned} FR + GS &= 2FR - \frac{1}{2} \operatorname{Tr}(FR) I \\ &= 2FR - (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} - \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) I. \end{aligned}$$

$$\operatorname{Tr}(FR + GS) = 0,$$

where $I = \operatorname{diag}(1, 1, 1, 1)$ is the identity matrix. Also,

$$PQ = QP = (\mathbf{F} \cdot \mathbf{G}) I,$$
$$\det P = \det Q = -(\mathbf{F} \cdot \mathbf{G})^2$$

and

$$\begin{aligned}\mathbf{F}\cdot\mathbf{G} &= (\mathbf{E}+i\mathbf{H})\cdot(\mathbf{D}+i\mathbf{B})\\ &= (\mathbf{E}\cdot\mathbf{D}-\mathbf{H}\cdot\mathbf{B})+i(\mathbf{E}\cdot\mathbf{B}+\mathbf{H}\cdot\mathbf{D}).\end{aligned}$$

Other useful dual four-tensor identities are given by [27]:

$$e^{\mu\upsilon\sigma\tau}A_{\upsilon\sigma\tau}=6B^{\mu},\quad A_{\mu\upsilon\lambda}=e_{\mu\upsilon\lambda\sigma}B^{\sigma}.$$

In particular,

$$6i\frac{\partial Q^{\mu\upsilon}}{\partial x^{\upsilon}}=e^{\mu\upsilon\lambda\sigma}\left(\frac{\partial P_{\lambda\sigma}}{\partial x^{\upsilon}}+\frac{\partial P_{\upsilon\lambda}}{\partial x^{\sigma}}+\frac{\partial P_{\sigma\upsilon}}{\partial x^{\lambda}}\right)$$

and

$$\frac{\partial P_{\mu\upsilon}}{\partial x^{\lambda}}+\frac{\partial P_{\upsilon\lambda}}{\partial x^{\mu}}+\frac{\partial P_{\lambda\mu}}{\partial x^{\upsilon}}=ie_{\mu\upsilon\lambda\sigma}\frac{\partial Q^{\sigma\tau}}{\partial x^{\tau}}$$

(see also [47]). Appendix C: Proof of Identities In view of (6.3), or (B.7), and (B.28), we can write

$$\left(\frac{\partial P_{\mu\upsilon}}{\partial x^{\lambda}}+\frac{\partial P_{\upsilon\lambda}}{\partial x^{\mu}}+\frac{\partial P_{\lambda\mu}}{\partial x^{\upsilon}}=ie_{\mu\upsilon\lambda\sigma}\frac{\partial Q^{\sigma\tau}}{\partial x^{\tau}}\right)Q^{*},$$

or

$$\begin{aligned}&2Q^{*}\frac{\partial P_{\mu\upsilon}}{\partial x^{\lambda}}+Q^{\lambda\upsilon}\frac{\partial P_{\upsilon\lambda}}{\partial x^{\mu}}\\ &=i\left(e_{\mu\upsilon\lambda\sigma}Q^{*}\right)\frac{\partial Q^{\sigma\tau}}{\partial x^{\tau}}=-2P^{*}_{\mu\sigma}\frac{\partial Q^{\sigma\tau}}{\partial x^{\tau}}\end{aligned}$$

by (B.7). Therefore,

$$P^{*}_{\mu\lambda}\frac{\partial Q^{\lambda\upsilon}}{\partial x^{\upsilon}}-\frac{\partial P_{\mu\lambda}}{\partial x^{\upsilon}}Q^{*}=-\frac{1}{2}Q^{\circ\sigma}\frac{\partial P_{\tau\sigma}}{\partial x^{\mu}}.$$

In addition, with the help of (B.7) one gets

$$\begin{aligned}&2i\left(P^{*}_{\sigma\tau}\frac{\partial Q^{\tau\sigma}}{\partial x^{\mu}}\right)=P^{*}_{\sigma\tau}e^{\tau\sigma\lambda\upsilon}\frac{\partial P_{\lambda\upsilon}}{\partial x^{\mu}}\\ &=e^{\sigma\tau\upsilon\lambda}P^{*}_{\sigma\tau}\frac{\partial P_{\lambda\upsilon}}{\partial x^{\mu}}=-2i\left(Q^{\sigma\tau}\frac{\partial P_{\tau\sigma}}{\partial x^{\mu}}\right)\end{aligned}$$

which completes the proof.

дивергенция векторного произведения

однажды использовалось, что

$$\operatorname{div}[\mathbf{EH}]=\operatorname{div}[\check{\mathbf{E}}\mathbf{H}]+\operatorname{div}[\mathbf{E}\check{\mathbf{H}}]=(\mathbf{H},\operatorname{rot}\mathbf{E})-(\mathbf{E},\operatorname{rot}\mathbf{H})$$

пару слов про это скажу.

B.1.2 Solid Angle

выпишу эти методы из соответствующего раздела в математике

C Background for Electrodynamics

C.1 Mathematical Introduction to Electrodynamics

Пример 1.11. Доказать, что ковариантные производные вектора $A_{\nu;\alpha}$ и $A^{\nu}_{;\alpha}$ преобразуются как ковариантный и смешанный тензоры II ранга соответственно.

Решение. Пользуясь определением ковариантной производной (1.104) и правилом преобразования (1.116), находим последовательно

$$\begin{aligned} A'_{\mu;\alpha} &= \frac{\partial A'_\mu}{\partial q'^\alpha} - \Gamma'^{\nu}_{\mu\alpha} A'_\nu = \\ &= \frac{\partial}{\partial q^\lambda}\left(\frac{\partial q^\sigma}{\partial q'^\mu} A_\sigma\right)\frac{\partial q^\lambda}{\partial q'^\alpha} - \left(\frac{\partial q'^\nu}{\partial q^\beta}\frac{\partial q^\lambda}{\partial q'^\alpha}\frac{\partial q^\sigma}{\partial q'^\mu}\Gamma^\beta_{\lambda\sigma} + \frac{\partial q'^\nu}{\partial q^\beta}\frac{\partial^2 q^\beta}{\partial q'^\alpha \partial q'^\mu}\right)\frac{\partial q^\kappa}{\partial q'^\nu} A_\kappa = \\ &= \frac{\partial q^\sigma}{\partial q'^\mu}\frac{\partial q^\lambda}{\partial q'^\alpha}\left(\frac{\partial A_\sigma}{\partial q^\lambda} - \Gamma^\beta_{\lambda\sigma} A_\beta\right) = \frac{\partial q^\sigma}{\partial q'^\mu}\frac{\partial q^\lambda}{\partial q'^\alpha} A_{\sigma;\lambda}. \end{aligned} \tag{1.118}$$

Мы доказали, что рассматриваемая величина преобразуется как ковариантный тензор II ранга. При рассмотрении второго тензора необходимо использовать равенство

$$\frac{\partial q'^\nu}{\partial q^\beta}\frac{\partial^2 q^\beta}{\partial q'^\alpha \partial q'^\mu} = \frac{\partial q^\beta}{\partial q'^\alpha}\frac{\partial q^\lambda}{\partial q'^\mu}\frac{\partial^2 q'^\nu}{\partial q^\beta \partial q^\lambda} \tag{1.119}$$

Оно получается путем дифференцирования по координате равенства типа (1.43).

Задачи 1.79. Показать, что производная по координате от скаляра (градиент) $\partial S/\partial q^\mu = S;\mu$ является ковариантным вектором.

1.80. Показать, что ковариантный ротор совпадает с обычным ротором:

$$A_{\mu;\nu} - A_{\nu;\mu} = \frac{\partial A_\mu}{\partial q^\nu} - \frac{\partial A_\nu}{\partial q^\mu}$$

1.81*. Показать, что ковариантную дивергенцию от контравариантного вектора (скаляр) можно записать в виде

$$A^\mu_{i\mu} = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial q^\mu}\left(\sqrt{g} A^\mu\right) \tag{1.120}$$

1.82. Записать в криволинейных координатах оператор Лапласа, действующий на скалярную функцию.

1.83. Для произвольного тензора II ранга записать ковариантную дивергенцию $T^{\mu\nu}{}_{;\mu}$.

1.84. Сделать то же самое для антисимметричного тензора $A^{\mu\nu} = -A^{\nu\mu}$.

1.85. Для ковариантных компоненг антисимметричного тензора $A_{\mu\nu} = -A_{\nu\mu}$ доказать соотношение

$$A_{\mu\nu;\lambda} + A_{\lambda\mu;\nu} + A_{\nu\lambda;\mu} = \frac{\partial A_{\mu\nu}}{\partial q^\lambda} + \frac{\partial A_{\lambda\mu}}{\partial q^\nu} + \frac{\partial A_{\nu\lambda}}{\partial q^\mu}$$

1.86. Вычислить ковариантные производные от метрического тензора $g_{\mu\nu;\lambda}$ и $g^{\nu\mu};\lambda$.

1.87. Доказать тождество $\partial g_{\mu\nu}/\partial q^\lambda = \Gamma_{\mu,\nu\lambda} + \Gamma_{\nu,\mu\lambda}$.

Ортогональные криволинейные координаты, для которых $g_{\mu\nu} = 0$ при $\mu \neq \nu$ (см. задачу 1.46), используются на практике наиболее часто. При этом вводят обозначения $g_{\mu\nu} = h^2_\mu(q)\delta_{\mu\nu}$ (суммировать по μ не нужно). Элемент длины запишется в виде

$$dl^2 = g_{\mu\nu} dq^\mu dq^\nu = h_1^2\left(dq^1\right)^2 + h_2^2\left(dq^2\right)^2 + h_3^2\left(dq^3\right)^2 \tag{1.121}$$

где величины h_μ (коэффициенты Ламэ) согласно (1.46) имеют следующий вид: □

$$h_\mu = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q^\mu}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q^\mu}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q^\mu}\right)^2} \tag{1.122}$$

Поскольку $\sqrt{g} = h_1 h_2 h_3$, инвариантный элемент объема (1.54) принимает вид

$$dV = h_1 h_2 h_3 dq^1 dq^2 dq^3 \tag{1.123}$$

Характерная особенность ортогонального базиса состоит в том, что векторы исходного и взаимного базисов имеют одинаковые направления, но различаются величиной и физической размерностью (поскольку координаты x^α и q^β могут иметь разную размерность). Вследствие этого и размерность разных компонент одного и того же вектора, разложенного по векторам этих базисов, может быть различной, что весьма неудобно при решении физических задач. Поэтому полезно ввести ортогональный базис единичных ортов $e_{\alpha *}, e_{\alpha *} \cdot e_{\beta *} = \delta_{\alpha\beta}$ (мы их будем обозначать нижними индексами и звездочкой), через которые ковариантный и контравариантный базисы выразятся согласно (1.50) следующим образом:

$$e_\beta = h_\beta e_{\beta *}, \quad e^\beta = \frac{1}{h_\beta} e_{\beta *} \tag{1.124}$$

Разложение произвольного вектора $\boldsymbol{A}$ по ортам $\boldsymbol{e}_{\beta *}$ приобретает вид

$$\boldsymbol{A} = A_{1*} e_{1*} + A_{2*} e_{2*} + A_{3*} e_{3*} \tag{1.125}$$

где «физические» компоненты вектора $A_{\mu *}$ теперь имеют одинаковую размерность, совпадающую с размерностью рассматриваемой векторной величины $\boldsymbol{A}$, и связаны с ее ко- и контравариантными компонентами соотношениями

$$A_{\beta *} = \frac{A_\mu}{h_\mu} = A^\mu h_\mu \tag{1.126}$$

Ввиду удобства использования базиса $\boldsymbol{e}_{\beta *}$ мы далее всюду в этой книге за исключением главы 7 будем пользоваться этим базисом, опуская звездочку.

С помощью соотношений (1.120)-(1.126), а также (1.25) записываем основные дифференциальные операции в ортогональных криволинейных координатах:

$$\operatorname{grad} S = \frac{1}{h_1}\frac{\partial S}{\partial q^1} e_1 + \frac{1}{h_2}\frac{\partial S}{\partial q^2} e_2 + \frac{1}{h_3}\frac{\partial S}{\partial q^3} e_3 \tag{1.127}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q^1}(h_2 h_3 A_1) + \frac{\partial}{\partial q^2}(h_1 h_3 A_2) + \frac{\partial}{\partial q^3}(h_1 h_2 A_3)\right]; \tag{1.128}$$

$$\Delta S = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q^1}\left(\frac{h_2 h_3}{h_1}\frac{\partial S}{\partial q^1}\right) + \frac{\partial}{\partial q^2}\left(\frac{h_1 h_3}{h_2}\frac{\partial S}{\partial q^2}\right) + \frac{\partial}{\partial q^3}\left(\frac{h_1 h_2}{h_3}\frac{\partial S}{\partial q^3}\right)\right] \tag{1.129}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \boldsymbol{A} = {} & \frac{1}{h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q^2}(h_3 A_3) - \frac{\partial}{\partial q^3}(h_2 A_2)\right] e_1 + \\ & + \frac{1}{h_1 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial q^3}(h_1 A_1) - \frac{\partial}{\partial q^1}(h_3 A_3)\right] e_2 + \\ & + \frac{1}{h_1 h_2}\left[\frac{\partial}{\partial q^1}(h_2 A_2) - \frac{\partial}{\partial q^2}(h_1 A_1)\right] e_3\end{aligned} \tag{1.130}$$

Задачи

1.88. Из общих выражений (1.27)-(1.30) получить приведенные ниже основные дифференциальные операции в цилиндрической системе координат (r, α, z), в которой $x = r\cos\alpha, y = r\sin\alpha, z = z$.

$$\operatorname{grad} S = \frac{\partial S}{\partial r}\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial S}{\partial \alpha}\boldsymbol{e}_\alpha + \frac{\partial S}{\partial z}\boldsymbol{e}_z \tag{1.131}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \tag{1.132}$$

$$\Delta S = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial S}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial z^2} \tag{1.133}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \boldsymbol{A} = &\left[\frac{1}{r}\frac{\partial A_z}{\partial \alpha} - \frac{\partial A_\alpha}{\partial z}\right]\boldsymbol{e}_r + \left[\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right]\boldsymbol{e}_\alpha + \\ &+ \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_\alpha) - \frac{\partial A_r}{\partial \alpha}\right]\boldsymbol{e}_z\end{aligned} \tag{1.134}$$

1.89. Сделать то же самое для сферической системы координат (r, ϑ, α), в которой $x = r\sin\vartheta\cos\alpha, y = r\sin\vartheta\sin\alpha, z = r\cos\vartheta$.

$$\operatorname{grad} S = \frac{\partial S}{\partial r}\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial S}{\partial \vartheta}\boldsymbol{e}_\vartheta + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial S}{\partial \alpha}\boldsymbol{e}_\alpha \tag{1.135}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 A_r\right) + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial \vartheta}(A_\vartheta \sin\vartheta) + \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial A_\alpha}{\partial \alpha} \tag{1.136}$$

$$\Delta S = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial S}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial S}{\partial \vartheta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha^2} \tag{1.137}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \boldsymbol{A} = &\frac{1}{r\sin\vartheta}\left[\frac{\partial}{\partial \vartheta}(A_\alpha \sin\vartheta) - \frac{\partial A_\vartheta}{\partial \alpha}\right] e_r + \\ &+ \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial A_r}{\partial \alpha} - \frac{\partial}{\partial r}(rA_\alpha)\right] e_\vartheta + \\ &+ \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(rA_\vartheta) - \frac{\partial A_r}{\partial \vartheta}\right] e_\alpha\end{aligned} \tag{1.138}$$

1.90*. Воспользовавшись тождеством (1.83), записать проекции вектора $\Delta\boldsymbol{A}$ на оси цилиндрической системы координат.

1.91*. Сделать то же самое для сферической системы координат.

1.92. Найти общий вид решения уравнения Лапласа для скалярной функции, зависящей только: а) от r; б) от α; в) от z (цилиндрические координаты).

1.93. Найти общий вид решения уравнения Лапласа для скалярной функции, зависящей только: а) от r; б) от ϑ; в) от α (сферические координаты).

ЗАМЕчаниЕ. В задачах 1.94-1.98 разобраны примеры криволинейных ортогональных систем координат, более сложных, чем цилиндрические и сферические. Более полные сведения по этому вопросу содержатся в руководствах [Арфкен (1970)], [Стрэттон (1948)].

1.94*. Уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (a > b > c)$$

изображает эллипсоид с полуосями a, b, c. Уравнения

$$\frac{x^2}{a^2+\xi}+\frac{y^2}{b^2+\xi}+\frac{z^2}{c^2+\xi}=1, \quad \xi \geqslant -c^2,$$
$$\frac{x^2}{a^2+\eta}+\frac{y^2}{b^2+\eta}+\frac{z^2}{c^2+\eta}=1, \quad -c^2 \geqslant \eta \geqslant -b^2$$
$$\frac{x^2}{a^2+\zeta}+\frac{y^2}{b^2+\zeta}+\frac{z^2}{c^2+\zeta}=1, \quad -b^2 \geqslant \zeta \geqslant -a^2$$

изображают соответственно эллипсоид, однополостной и двухполостной гиперболоиды, софокусные с первым эллипсоидом. Через каждую точку пространства проходит по одной поверхности, характеризуемой значениями ξ, η, ζ. Числа ξ, η, ζ называются эллипсоидальными координатами точки x, y, z. Найти формулы преобразования от эллипсоидальных к декартовым координатам. Убедиться в ортогональности эллипсоидальной системы координат. Найти коэффициента Ламэ и оператор Лапласа в эллипсоидальных координатах.

1.95*. При $a = b > c$ эллипсоидальная система координат (см. предыдущую задачу) вырождается в так называемую сплюснутую сфероидальную систему координат. Координата ζ при этом переходит в постоянную,
равную $-a^2$, и должна быть заменена другой координатой. В качестве последней выбирают азимутальный угол α в плоскости xy. Координаты ξ, η определяются из уравнений
$\frac{r^2}{a^2+\xi}+\frac{z^2}{c^2+\xi}=1, \quad \xi \geqslant -c^2,$
$\frac{r^2}{a^2+\eta}+\frac{z^2}{c^2+\eta}=1, \quad -c^2 \geqslant \eta \geqslant -a^2,$

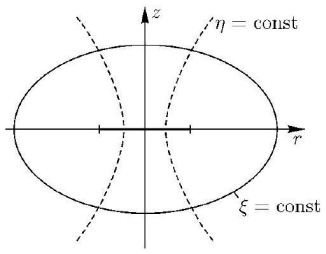


Рис. 1.6

где $r^2 = x^2 + y^2$.
Поверхности $\xi = \text{const}$ представляют собой сплюснутые эллипсоиды вращения вокруг оси Oz, поверхности $\eta = \text{const}$ - софокусные с ними однополостные гиперболоиды вращения (рис. 1.6).

Найти выражения r, z в сплюснутых сфероидальных координатах, коэффициенты Ламэ и оператор Лапласа в этих координатах.

1.96*. Вытянутая сфероидальная система координат получается из эллипсоидальной (задача 1.94) при $a > b = c$. Координата η при этом вырождается в постоянную и должна быть заменена азимутальным углом α, отсчитываемым в плоскости yz от оси Oy. Координаты ξ, ζ определяются из уравнений

$$\frac{x^2}{a^2+\xi}+\frac{r^2}{b^2+\xi}=1, \quad \xi \geqslant -b^2$$
$$\frac{x^2}{a^2+\zeta}+\frac{r^2}{b^2+\zeta}=1, \quad -b^2 \geqslant \zeta \geqslant -a^2$$

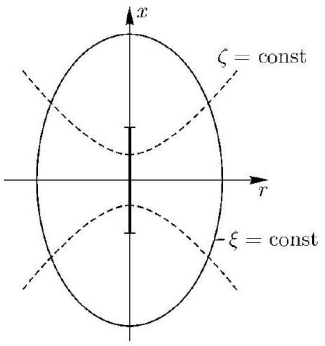


Рис. 1.7

где $r^2 = y^2 + z^2$.

Поверхности постоянных ξ и η представляют собой вытянутые эллипсоиды и двухполостные гиперболоиды вращения (рис. 1.7). Выразить величины x, r через ξ, ζ; найти коэффициенты Ламэ и оператор Лапласа в переменных ξ, ζ, α.

1.97*. Бисферические координаты ξ, η, α связаны с декартовыми координатами соотношениями

$$x = \frac{a \sin\eta \cos\alpha}{\operatorname{ch}\xi - \cos\eta}, \quad y = \frac{a \sin\eta \sin\alpha}{\operatorname{ch}\xi - \cos\eta}, \quad z = \frac{a \operatorname{sh}\xi}{\operatorname{ch}\xi - \cos\eta}$$

где a - постоянный параметр, $-\infty < \xi < \infty, 0 < \eta < \pi, 0 < \alpha < 2\pi$.

Показать, что координатные поверхности $\xi = \text{const}$ представляют собой сферы

$$x^2 + y^2 + (z - a\coth\xi)^2 = \left(\frac{a}{\operatorname{sh}\xi}\right)^2$$

поверхности $\eta = \text{const}$ - веретенообразные поверхности вращения вокруг оси Oz, уравнение которых

$$\left(\sqrt{x^2 + y^2} - a\cot\eta\right)^2 + z^2 = \left(\frac{a}{\sin\eta}\right)^2$$

поверхности $\alpha = \text{const}$ - полуплоскости, расходящиеся от оси Oz (рис. 1.8).

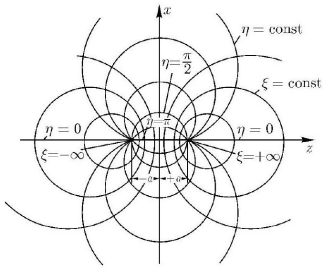


Рис. 1.8

Убедиться в том, что эти координатные поверхности ортогональны между собой. Найти коэффициенты Ламэ и оператор Лапласа.

1.98*. Тороидальные координаты ρ, ξ, α образуют ортогональную систему и связаны с декартовыми координатами соотношениями

$$x = \frac{a \operatorname{sh}\rho \cos\alpha}{\operatorname{ch}\rho - \cos\xi}, \quad y = \frac{a \operatorname{sh}\rho \sin\alpha}{\operatorname{ch}\rho - \cos\xi}, \quad z = \frac{a \sin\xi}{\operatorname{ch}\rho - \cos\xi}$$

где a - постоянный параметр, $-\infty < \rho < \infty, -\pi < \xi < \pi, 0 < \alpha < \pi$.

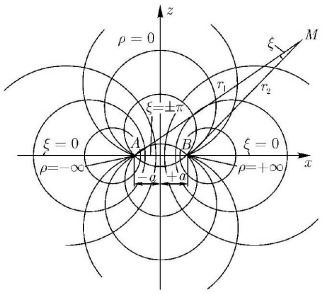


Рис. 1.9

Показать, что $\rho = \ln(r_1/r_2)$ (см. рис. 1.9, на котором изображены плоскости $\alpha = \text{const}$, $\alpha+\pi = \text{const}$), а величина ξ представляет собой угол между r_1 и r_2 ($\xi > 0$ при $z > 0$ и $\xi < 0$ при $z < 0$). Какой вид имеют координатные поверхности ρ и ξ? Найти коэффициенты Ламэ.

Рекомендуемая литература: [Борисенко и Тарапов (1966)], [Ли (1965)], [Арфкен (1970)], [Морс и Фешбах (1958)], [Курбатова и Филиппов (1998)], [Мэтьюз и Уокер (1972)], [Рашевский (1953)], [Вейнберг (1977)], [Стрэттон (1948)].

C.1.1 1.3. Special Functions of Mathematical Physics

Цилиндрические функции используются при решении многих конкретных задач. Наиболее употребительная из них - функция Бесселя -
может быть получена путем разложения специально выбранной экспоненты (производящей функции) в степенной ряд по u:

$$\exp\left\{\frac{x}{2}\left(u-\frac{1}{u}\right)\right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)u^n \tag{1.139}$$

Коэффициенты этого разложения называются функциями Бесселя I рода порядка n. Представление функции Бесселя в виде степенного ряда можно получить из степенных рядов для экспонент:

$$\exp\left(\frac{xu}{2}\right)\exp\left(-\frac{x}{2u}\right) = \sum_{r=0}^{\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^r\frac{u^r}{r!}\sum_{s=0}^{\infty}(-1)^s\left(\frac{x}{2}\right)^s\frac{u^{-s}}{s!} \tag{1.140}$$

Напомним, что эти разложения справедливы при любых, в том числе комплексных, значениях x и u ввиду неограниченности радиуса сходимости ряда для экспоненты. Перейдя к суммированию по $n = r - s(-\infty < n < \infty)$, получим из (1.140)

$$\exp\left\{\frac{x}{2}\left(u-\frac{1}{u}\right)\right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s}{s!(n+s)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2s}u^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(x)u^n \tag{1.141}$$

откуда следует

$$J_n(x) = \sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s}{s!(n+s)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2s} \tag{1.142}$$

Это представление для $J_n(x)$ целесообразно использовать при $n \geqslant 0$. При $n < 0$ вместо (1.142) можно записать

$$J_n(x) = \sum_{s=|n|}^{\infty}\frac{(-1)^s}{s!(n+s)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2s} = \sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^{s+|n|}}{s!(|n|+s)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{|n|+2s} \tag{1.143}$$

поскольку при $s+n<0,(s+n)\,!\to\infty$. В итоге получаем простую зависимость между функциями Бесселя целого положительного и отрицательного порядков:

$$J_{-n}(x)=(-1)^n J_n(x) \tag{1.144}$$

Пример 1.12. Получить рекуррентные соотношения между функциями Бесселя разных порядков путем дифференирования равенства (1.139) по и и по х и сравнения правой и левой частей равенства.

Решение. Дифференцируя (1.139) по u, имеем

$$\frac{x}{2}\left(1+\frac{1}{u^2}\right)\exp\left[\frac{x}{2}\left(u-\frac{1}{u}\right)\right]= \\ =\frac{x}{2}\left(1+\frac{1}{u^2}\right)\times\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(x)u^n=\sum_{n=-\infty}^{\infty}nJ_n(x)u^{n-1}$$

Приравнивая коэффициенты при u^{n-1} в правой и левой частях последнего равенства, находим

$$J_{n-1}(x)+J_{n+1}(x)=\frac{2n}{x}J_n(x) \tag{1.145}$$

Дифференцируя (1.139) по x, получим аналогичным образом

$$J_{n-1}(x)-J_{n+1}(x)=2J_n'(x) \tag{1.146}$$

Эти рекуррентные соотношения можно переписать в других формах:

$$J_{n\pm1}=\frac{n}{x}J_n(x)\mp J_n'(x);\quad J_{n\mp1}=\pm x^{\mp n}\frac{d}{dx}\left[x^{\pm n}J_n(x)\right] \tag{1.147}$$

В частности,

$$J_1(x)=-J_0(x) \tag{1.148}$$

Пример 1.13. Получить представления функиии Бесселя в виде интегралов от экспоненциальных и тригонометрических фуикиий. Для этого использовать подстановку $u=\exp(i\varphi)$ в разложении (1.139).

Решение. Указанная подстановка приводит к разложению

$$\exp(ix\sin\varphi)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(x)\exp(in\varphi) \tag{1.149}$$

Воспользуемся периодичностью функций $\sin\varphi$ и $\exp(\mathrm{in}\,\varphi)$, а также легко проверяемым равенством

$$\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi}\exp(i(n-m)\varphi)d\varphi=2\pi\delta_{mn}$$

где m - целое число, α - любое действительное число. Умножив обе части (1.149) на $\exp(-im\varphi)$ и проинтегрировав по φ, получим интегральное представление для функции Бесселя:

$$J_m(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\alpha}^{\alpha+2\pi} \exp(ix\sin\varphi - im\varphi)d\varphi = \tag{1.150}$$
$$= \frac{(-i)^m}{2\pi} \int\limits_{\alpha}^{\alpha+2\pi} \exp(ix\cos\varphi - im\varphi)d\varphi$$

Пример 1.14. Предположим, что некоторые функиии $Z_\nu(x)$, отличные вообще говоря от функиий Бесселя (1.142), удовлетворяют рекуррентным соотношениям (1.145)-(1.148) при произвольном колплексном значении $n = \nu$. Вывести дифферениальное уравнение II порядка, решением которого является $Z_\nu(x)$.

Решение. Продифференцируем второе равенство (1.147) по x и добавим к нему слагаемое, равное нулю (заменив $n \to \nu, J_n \to Z_\nu$):

$$Z'_{\nu-1} = \left[x^{-\nu}\left(x^\nu Z_\nu\right)'\right]' + \frac{1}{x}\left(Z'_\nu + \frac{\nu}{x}Z_\nu - Z_{\nu-1}\right) =$$
$$= Z''_\nu + \frac{\nu+1}{x}Z'_\nu - \frac{1}{x}Z_{\nu-1}$$

Снова добавляем в правую часть слагаемое, равное нулю:

$$Z'_{\nu-1} = Z''_\nu + \frac{\nu+1}{x}Z'_\nu - \frac{1}{x}Z_{\nu-1} + \frac{\nu}{x}\left[Z_{\nu-1} - \frac{\nu}{x}Z_\nu - Z'_\nu\right] =$$
$$= Z''_\nu + \frac{1}{x}Z'_\nu - \frac{\nu^2}{x^2}Z_\nu + \frac{\nu-1}{x}Z_{\nu-1}$$

Наконец, из второго равенства (1.147) находим, делая замену $n+1 \to \nu$, $J_n \to Z_\nu$:

$$Z_\nu = \frac{\nu-1}{x}Z_{\nu-1} - Z'_{\nu-1}$$

Исключая $Z'_{\nu-1}$ из последних двух равенств, получаем уравнение Бесселя, которому удовлетворяет функция $Z_\nu(x)$:

$$Z''_\nu + \frac{1}{x}Z'_\nu + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)Z_\nu = 0 \tag{1.151}$$

Такое или сходное уравнение возникает во многих физических задачах. Мы ниже дадим краткую сводку основных сведений о решениях этого уравнения. Вывод соответствующих формул можно найти в специальных математических руководствах: [Виленкин (1965)], [Лебедев (1963)], [Никифоров и Уваров (1984)], [Мэтьюз и Уокер (1972)], [Арфкен (1970)], [Градштейн и Рыжик (1971)], [Абрамовиц и Стиган (1979)], [Ли (1965)].

Решение уравнения (1.151), которое при $\operatorname{Re}\nu \geqslant 0$ ограничено при $x \to 0$, называется функцией Бесселя I рода. Ее можно представить в виде степенного ряда, который является обобщением (1.142):

$$J_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!\Gamma(\nu+s+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2s} \tag{1.152}$$

Независимая переменная обозначена через z, поскольку ряд сходится при всех ν и во всей комплексной плоскости z с разрезом вдоль отрицательной части действительной оси.

Вторым линейно независимым решением при $\nu \neq n = 0, \pm 1 \ldots$ может служить $J_{-\nu}(x)$. При n целом между двумя указанными решениями существует линейная связь (1.144),

поэтому в качество второго решения выбирают функцию Бесселя II рода (она же функция Неймана и функция Вебера)

$$Y_\nu(z) = \frac{J_\nu(z)\cos\nu\pi - J_{-\nu}(z)}{\sin\nu\pi} \tag{1.153}$$

для которой существует конечный предел при $\nu \to n$.
В качестве двух линейно независимых решений можно выбрать также функции Бесселя III рода (их называют еще функциями Ханкеля)

$$H_\nu^{(1)}(z) = J_\nu(z) + iY_\nu(z), \quad H_\nu^{(2)}(z) = J_\nu(z) - iY_\nu(z) \tag{1.154}$$

Все перечисленные функции являются решениями уравнения Бесселя. Функции $Y_\nu, H_\nu^{(1,2)}$ имеют особенности при $z \to 0$. Все решения удовлетворяют рекуррентным соотношениям (1.145)-(1.147) (с заменой $n \to \nu,\ J_n \to Z_\nu$).

Асимптотические значения: при $z \to 0$

$$J_\nu(z) \approx \frac{z^\nu}{2^\nu\Gamma(\nu+1)}, \quad \nu \neq -1, -2\ldots \tag{1.155}$$

$$Y_0(z) \approx -iH_0^{(1)}(z) \approx iH_0^{(2)}(z) \approx \frac{2}{\pi}\ln z \tag{1.156}$$

$$Y_\nu(z) \approx -iH_\nu^{(1)}(z) \approx iH_\nu^{(2)}(z) \approx -\frac{\Gamma(\nu)}{\pi}\left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu}, \quad \mathrm{Re}\,\nu > 0 \tag{1.157}$$

при $|z| \to \infty$ и произвольных ν

$$J_\nu(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos\left(z - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \quad |\arg z| < \pi \tag{1.158}$$

$$Y_\nu(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin\left(z - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \quad |\arg z| < \pi \tag{1.159}$$

$$H_\nu^{(1)}(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\exp\left[i\left(z - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right], \quad -\pi < \arg z < 2\pi \tag{1.160}$$

$$H_\nu^{(2)}(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\exp\left[-i\left(z - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right], \quad -2\pi < \arg z < \pi \tag{1.161}$$

Цилиндрические функции от чисто мнимого аргумента называются модифицированными функциями Бесселя (а вторая из них - также функцией Макдональда). Они определяются соотношениями

$$I_\nu(z) = e^{-i\pi\nu/2}J_\nu(iz) \tag{1.162}$$

$$K_\nu(z) = \frac{\pi}{2}e^{i\pi(\nu+1)/2}H_\nu^{(1)}(iz) \tag{1.163}$$

либо

$$I_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{s=0}^{\infty}\frac{(z/2)^{2s}}{s!\Gamma(\nu+s+1)}, \quad K_\nu(z) = \frac{\pi}{2}\frac{I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)}{\sin\nu\pi} \tag{1.164}$$

Эти функции принимают действительные значения при действительных ν и $z > 0$. Рекуррентные соотношения и формулы дифференцирования получаются из (1.145)-(1.147) и (1.162), (1.163). В частности,

$$I_0'(z) = I_1(z), \quad K_0'(z) = -K_1(z) \tag{1.165}$$

Модифицированные функции Бесселя удовлетворяют уравнению

$$W_\nu'' + \frac{1}{z}W_\nu' - \left(1 + \frac{\nu^2}{z^2}\right) W_\nu = 0 \tag{1.166}$$

Асимптотика: при $z \to 0$

$$I_\nu(z) \approx \frac{z^\nu}{2^\nu \Gamma(\nu+1)}, \quad \nu \neq -1, -2 \ldots \tag{1.167}$$

$$K_0(z) \approx -\ln z, \quad K_\nu(z) \approx \frac{1}{2}\Gamma(\nu)\left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu}, \quad \operatorname{Re}\nu > 0 \tag{1.168}$$

при $|z| \to \infty$

$$I_\nu(z) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi z}} e^z, \quad |\arg z| < \pi/2 \tag{1.169}$$

$$K_\nu(z) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z}, \quad |\arg z| < 3\pi/2 \tag{1.170}$$

Сферические функции Бесселя и Ханкеля нередко возникают при решении физических задач в сферических координатах. Они имеют полуцелый порядок и определяются равенствами

$$j_l(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{l+\frac{1}{2}}(x), \quad h_l^{(1,2)} = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} H_{l+\frac{1}{2}}^{(1,2)}(x) \tag{1.171}$$

При малых x

$$j_l(x) \approx \frac{x^l}{1 \cdot 3 \ldots (2l+1)}, \quad h_l^{(1,2)} \approx \mp \frac{x^{-l-1}}{1 \cdot 3 \ldots (2l-1)} \tag{1.172}$$

При больших x

$$j_l(x) \approx \frac{1}{x} \cos\left[x - \frac{(l+1)\pi}{2}\right] \tag{1.173}$$

$$h_l^{(1,2)}(x) \approx \frac{1}{x} \exp\left\{\pm i\left[x - \frac{(l+1)\pi}{2}\right]\right\}$$

Задачи

1.99. Вычислить неопределенные интегралы

$$\int x^\nu Z_{\nu-1}(x)dx, \quad \int x^{-\nu} Z_{\nu+1}(x)dx$$

1.100. Вычислить определенные интегралы

$$\int_0^\infty J_1(x)dx, \quad \int_0^\infty J_2(x)x^{-1}dx, \quad \int_0^\infty J_n(x)x^{-n}dx$$

1.101. Доказать равенство интегралов

$$\int_0^\infty J_n(x)dx = \int_0^\infty J_{n+2}(x)dx, \quad \text{где} \quad n = 0, 1, \ldots$$

1.102. Получить интегральное представление

$$J_0(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{\cos ux}{\sqrt{1-u^2}}du$$

УказАние. Сделать подстановку $u = \sin\varphi$.

1.103*. Вычислить интегралы

$$\int_0^{\pi/2} J_0(x\cos\varphi)\cos\varphi d\varphi = \frac{\sin x}{x}, \quad \int_0^{\pi/2} J_1(x\cos\varphi)d\varphi = \frac{1-\cos x}{x}$$

УказАние. Можно воспользоваться разложением в степенные ряды.

1.104. Вывести формулы

$$J_n(x) = (-1)^k x^n \left(\frac{d}{xdx}\right)^k \left(x^{k-n}J_{n-k}(x)\right) = (-1)^n x^n \left(\frac{d}{xdx}\right)^n J_0(x)$$

1.105. Вывести рекуррентные соотношения для модифицированных функций Бесселя

$$I_{\nu-1}(z) - I_{\nu+1}(z) = \frac{2\nu}{z}I_\nu(z) \tag{1.174}$$

$$I_{\nu-1}(z) + I_{\nu+1}(z) = 2I'_\nu(z)$$

$$K_{\nu-1}(z) - K_{\nu+1}(z) = -\frac{2\nu}{z}K_\nu(z) \tag{1.175}$$

$$K_{\nu-1}(z) + K_{\nu+1}(z) = -2K'_\nu(z)$$

1.106*. Показать, что

$$J_0\left(|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n\left(r_1\right) J_n\left(r_2\right)\exp(in\vartheta)$$

где ϑ - угол между векторами r_1 и $\boldsymbol{r}_2$.

1.107*. 1. Записать уравнение, которому удовлетворяет функция $u(x) = J_n(ax)$.

2. Вычислить интеграл ($b \neq a$):

$$\int_0^1 xJ_n(ax)J_n(bx)dx = \frac{aJ'_n(a)J_n(b) - bJ'_n(b)J_n(a)}{b^2 - a^2} \tag{1.176}$$

3. Пусть $a \neq b$ - корни уравнения $J_n(x) = 0$, т. е. $J_n(a) = J_n(b) = 0$. Показать, что

$$\int_0^1 xJ_n(ax)J_n(bx)dx = 0, \quad \int_0^1 xJ_n^2(ax)dx = \frac{1}{2}\left[J'_n(a)\right]^2 \tag{1.177}$$

ЗАмечаниЕ. Первое равенство (1.177) выражает свойство, которое называется ортогональностью функиий Бесселя с весом x.

1.108». Вывести «теоремы сложения» для бесселевых функций:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} J_{n-k}(x)J_k(y) = J_n(x+y), \quad n = 0, 1, 2\ldots \tag{1.178}$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k J_{n-k}(x)J_k(x) = 0, \quad n = 1, 2\ldots \tag{1.179}$$

$$J_0(x)J_0(y) + 2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k J_k(x)J_k(y) = J_0(x+y), \quad n = 1, 2\ldots \tag{1.180}$$

$$J_0^2(x) + 2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k J_k^2(x) = J_0(2x) \tag{1.181}$$

Сферические функции и полиномы Лежандра широко используются во многих разделах физики, особенно в электродинамике и квантовой механике. Производящей функцией для полиномов Лежандра $P_l(\cos\vartheta)$ служит обратное расстояние между двумя точками с радиусами-векторами a и $\boldsymbol{r}$, угол между которыми равен ϑ:

$$\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a}|} = \frac{1}{\sqrt{r^2+a^2-2ar\cos\vartheta}} = \frac{1}{r}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^l P_l(\cos\vartheta), \quad a/r < 1 \tag{1.182}$$

Обозначив $x = \cos\vartheta, u = a/r$ и использовав биномиальное разложение, которое для отрицательного показателя удобно записать в форме

$$(1-\alpha)^{-q} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(n+q)}{n!\Gamma(q)}\alpha^n, \quad |\alpha| < 1$$

а также биномиальное разложение для $\alpha^n = (2ux-u^2)^n$, получим двойную сумму:

$$\left(1-2ux+u^2\right)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{\Gamma(n+1/2)}{\Gamma(1/2)k!(n-k)!}(-1)^k(2x)^{n-k}u^{n+k}$$

Перейдем к суммированию по k и $n+k = l \geqslant 0$, что приведет к перестановке членов ряда. Такая перестановка в данном случае законна, так как бесконечный ряд сходятся абсолютно, что будет видно из дальнейшего. В итоге будем иметь

$$(1-2ux+u^2)^{-1/2} = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{l}\frac{\Gamma(l-k+1/2)}{\Gamma(1/2)k!(l-2k)!}(-1)^k(2x)^{l-2k}u^l = \\ = \sum_{l=0}^{\infty}P_l(x)u^l$$

где

$$P_l(x) = \sum_{k=0}^{l}\frac{\Gamma(l-k+1/2)}{\Gamma(1/2)k!(l-2k)!}(-1)^k(2x)^{l-2k} = \\ = \sum_{k=0}^{l}(-1)^k\frac{(2l-2k)!}{2^l k!(l-k)!(l-2k)!}x^{l-2k} \tag{1.183}$$

В двух последних равенствах сумма по k фактически ограничена значением целой части числа $l/2$, так как бесконечный факториал отрицательного целого числа в знаменателе устраняет все слагаемые с $l-2k<0$.

Пример 1.15. Найти значения полиномов $P_l(1), P_l(-1), P_l(0)$, придавая углу ϑ в (1.182) частньле значения и пользуясь биномиальньлм разложением.

Решение. Полагая $\cos\vartheta = 1$, находим из (1.182)

$$\frac{1}{1-u} = \sum_{l=0}^{\infty} u^l = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(1) u^l$$

и следовательно, $P_l(1) = 1$ при всех l, а $P_0 = 1$ при $0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi$. Аналогичным образом получаем

$$\begin{aligned} P_l(-1) &= (-1)^l \\ P_{2l}(0) &= (-1)^l \frac{(2l-1)!!}{2^l l!}, \quad l \geqslant 1 \\ P_{2l+1}(0) &= 0, \quad l \geqslant 0 \end{aligned} \tag{1.184}$$

Пример 1.16. Получить ограничения на величину полиномов Лежандра $|P_l(\cos\vartheta)| \leqslant 1$ путем анализа разложсения производящей функциии (1.182) в ряд по $\cos m\vartheta$.

Решение. Получаем последовательно из производящей функции

$$\begin{aligned} &\left(1 - 2u\cos\vartheta + u^2\right)^{-1/2} = \left(1 - ue^{i\vartheta}\right)^{-1/2} \left(1 - ue^{i\vartheta}\right)^{-1/2} = \\ &= \left\{1 + \frac{1}{2}ue^{i\vartheta} + \frac{3}{8}u^2 e^{2i\vartheta} + \ldots\right\} \times \left\{1 + \frac{1}{2}ue^{-i\vartheta} + \frac{3}{8}u^2 e^{-2i\vartheta} + \ldots\right\} = \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} P_l(\cos\vartheta) u^l \end{aligned}$$

где $P_l(\cos\vartheta) = \sum\limits_{k=0}^{l} a_k \cos k\vartheta$. Коэффициенты a_k подбираются из величин, стоящих в фигурных скобках, и важно, что все они неотрицательны: $a_k \geqslant 0$. В этом случае сумма $\sum a_k \cos k\vartheta$ максимальна при $\vartheta = 0$, что соответствует $P_l(1) = 1$. Следовательно, $|P_l(\cos\vartheta)| \leqslant 1$.

Произведенная оценка позволяет установить, что ряд (1.182) при $a/r < 1$ сходится абсолютно, т. е. сходится ряд $\sum\limits_{l=0}^{\infty} |P_l(\cos\vartheta)| \, (a/r)^l$. Это следует из установленного неравенства и того факта, что мажорирующий ряд $\sum\limits_{l=0}^{\infty} (a/r)^l$ заведомо сходится при $a/r < 1$ - он представляет собой сумму членов бесконечной убывающей геометрической прогрессии.

Из разложения (1.183) можно получить более компактное представление для полиномов Лежандра, выполнив последовательно следующие преобразования:

$$\begin{aligned} P_l(x) &= \sum_{k=0}^{l} (-1)^k \frac{(2l-2k)!}{2^l k!(l-k)!(l-2k)!} x^{l-2k} = \sum_{k=0}^{l} \frac{(-1)^k}{2^l k!(l-k)!} \left(\frac{d}{dx}\right)^l x^{2l-2k} = \\ &= \frac{1}{2^l l!} \left(\frac{d}{dx}\right)^l \sum_{k=0}^{l} \frac{(-1)^k l!}{k!(l-k)!} x^{2l-2k} = \frac{1}{2^l l!} \left(\frac{d}{dx}\right)^l \left(x^2 - 1\right)^l \end{aligned} \tag{1.185}$$

Последнее выражение для полиномов Лежандра называется формулой Родригеса.

Пример 1.17. С помощью формулы Родригеса вывести рекуррентные соотношения между полиномами Лежандра:

$$P_l'(x) = xP_{l-1}'(x) + lP_{l-1}(x) \tag{1.186}$$

$$\left(1-x^2\right)P_l''(x) = 2(l+1)P_{l+1}'(x) - 2(l+2)xP_l'(x) - \\ - (l+1)(l+2)P_l(x) \tag{1.187}$$

Пользуясь ужазанными соотношениями, получить дифференциальное уравнение II порядка, которому удовлетворяет $P_l(x)$.

Решение. Пользуемся формулой Лейбница для вычисления производной n-го порядка от произведения функций:

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} f^{(n-k)} g^{(k)}$$

Вычисляем

$$P_l'(x) = \frac{1}{2^l l!}\left(\frac{d}{dx}\right)^{l+1}\left(x^2-1\right)^l = \frac{2l}{2^l l!}\left(\frac{d}{dx}\right)^{l}\left[x\left(x^2-1\right)^{l-1}\right] = \\ = \frac{2l}{2^l l!}\left[x\left(\frac{d}{dx}\right)^{l}\left(x^2-1\right)^{l-1} + l\left(\frac{d}{dx}\right)^{l-1}\left(x^2-1\right)^{l-1}\right]$$

Из этого равенства и формулы Родригеса следует (1.186). Для получения (1.187) пользуемся аналогичным соотношением:

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^{l+2}\left(x^2-1\right)^{l+1} = \left(x^2-1\right)\left(\frac{d}{dx}\right)^{l+2}\left(x^2-1\right)^l + \\ + 2(l+2)x\left(\frac{d}{dx}\right)^{l+1}\left(x^2-1\right)^l + (l+1)(l+2)\left(\frac{d}{dx}\right)^{l}\left(x^2-1\right)^l$$

Из двух полученных рекуррентных соотношений очевидным образом получается дифференциальное уравнение Лежандра, которое имеет вид

$$\left(1-x^2\right)P_l''(x) - 2xP_l'(x) + l(l+1)P_l(x) = 0 \tag{1.188}$$

Второе линейно независимое решение уравнения Лежандра имеет особенности при $x = \pm 1$.

Пример 1.18. Присоединенные полиномы Лежандра определяются выражением

$$P_l^m(x) = (1-x^2)^{m/2}\left(\frac{d}{dx}\right)^m P_l(x) = \\ = \frac{(1-x^2)^{m/2}}{2^l l!}\left(\frac{d}{dx}\right)^{l+m}\left(x^2-1\right)^l, \quad -l \leqslant m \leqslant l \tag{1.189}$$

Получить дифферениильное уравнение, которому удовлетворяют присоединенные полиномы Лежсандра.

Решение. При $m > 0$ дифференцируем обе части уравнения Лежандра (1.188) m раз и получаем уравнение вида

$$\left(1-x^2\right)F'' - 2(m+1)xF' + (l-m)(l+m+1)F = 0$$

для функции

$$F(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^m P_l(x) = \left(1-x^2\right)^{-m/2} P_l^m(x)$$

Подставив в полученное уравнение производные

$$F'(x) = \left(1-x^2\right)^{-m/2}\left[\frac{dP_l^m}{dx} + \frac{mxP_l^m}{1-x^2}\right]$$
$$F''(x) = \left(1-x^2\right)^{-m/2}\left[\frac{d^2P_l^m}{dx^2} + \frac{2mx}{1-x^2}\frac{dP_l^m}{dx} + \frac{mP_l^m}{1-x^2} + \frac{m(m+2)x^2P_l^m}{\left(1-x^2\right)^2}\right]$$

находим искомое уравнение

$$\left(1-x^2\right)\frac{d^2P_l^m}{dx^2} - 2x\frac{dP_l^m}{dx} + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right]P_l^m = 0 \tag{1.190}$$

Поскольку уравнение нечувствительно к знаку m, то $P_l^{-m}(x)$ и $P_l^m(x)$ могут различаться только множителем, не зависящим от x (см. задачу 1.116).

Пример 1.19. Пользуясь уравнением (1.190), доказать ортогональность присоединенных полиномов Лежандра с одинаковыми значками m и разнымми l.

Решение. Записываем уравнение (1.190) в форме

$$\frac{d}{dx}\left(1-x^2\right)\frac{dP_l^m}{dx} + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right]P_l^m = 0$$

и второе такое же уравнение для $P_{l'}^m$. Далее умножаем первое уравнение на $P_{l'}^m$, второе на P_l^m, вычитаем почленно и интегрируем по x. Получаем

$$\left[l(l+1) - l'\left(l'+1\right)\right]\int_{-1}^{1} P_{l'}^m(x)P_l^m(x)dx = 0$$

откуда следует ортогональность

$$\int_{-1}^{1} P_{l'}^m(x)P_l^m(x)dx = 0, \quad l' \neq l \tag{1.191}$$

Пример 1.20. Сферическая функиия Лежсадра $Y_{lm}(\vartheta,\varphi)$ определяется следующим образом:

$$Y_{lm}(\vartheta,\varphi) = C_{lm}P_l^m(\vartheta)e^{im\varphi} \tag{1.192}$$

где $P_l^m(\vartheta)$ - присоединенный полином Лежандра, выраженный через тригонометрические функиии, C_{lm} - нормировочный множитель. Найти закон преобразования этой функиии при инверсии системы координат. Убедиться в том, что сферические функии Леэсандра ортогональны по обоим индексам при интегрировании по всему телесному углу, и записать в явном виде условие их нормировки на единицу.

Решение. При инверсии системы координат (см. раздел 1.1) полярные углы преобразуются по правилу $\vartheta \to \pi - \vartheta, \varphi \to \pi + \varphi, \cos\vartheta \to -\cos\vartheta$, $e^{im\varphi} \to (-1)^m e^{im\varphi}$. На основе определения $P_l^m(x)$ (1.189) и (1.191) находим

$$Y_{lm}(\vartheta,\varphi) \to Y_{lm}(\pi-\vartheta,\pi+\varphi) = (-1)^l Y_{lm}(\vartheta,\varphi) \tag{1.193}$$

Интегрированию по всему телесному углу соответствуют пределы изменения углов $0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi, 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. Интегрирование по φ обеспечивает ортогональность сферических функций по индексу m:

$$\int_0^{2\pi} e^{i(m-m')\varphi} d\varphi = 2\pi\delta_{mm'}$$

Ортогональность по индексу l обеспечивается присоединенными полиномами Лежандра (см. пример 1.19). Условие ортогональности и нормировки на единицу имеет вид

$$\int_0^{\pi} \sin\vartheta d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi Y^*_{l'm'}(\vartheta,\varphi) Y_{lm}(\vartheta,\varphi) = \delta_{ll'}\delta_{mm'} \tag{1.194}$$

Нормировочный множитель определяется из условия

$$2\pi \left|C_{lm}\right|^2 \int_{-1}^{1} \left[P_l^m(x)\right]^2 dx = 1$$

Вычисление последнего интеграла см. в задаче 1.118.
Приведем без вывода весьма полезное соотношение, называемое теоремой сложения сферических функций. Если θ - угол между двумя векторами (r,ϑ,φ) и (r',ϑ',φ), т. е.

$$\cos\theta = \cos\vartheta\cos\vartheta' + \sin\vartheta\sin\vartheta'\cos\left(\varphi-\varphi'\right)$$

То

$$P_l(\cos\theta) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^{l} Y_{lm}(\vartheta,\varphi) Y_{lm}\left(\vartheta',\varphi'\right) \tag{1.195}$$

Вывод этого разложения можно найти в [Арфкен (1970)] и более полное изложение в [Никифоров и Уваров (1984)]. Метод теории представлений групп подробно описан в [Виленкин (1965)], [Гельфанд и др. (1958)]. См. также [Абрамовиц и Стиган (1979)], [Градштейн и Рыжик (1971)], [Лебедев (1963)], [Колоколов и др. (2000)].

Задачи

1.109. Показать, что при $x = \cos\vartheta$ уравнение Лежандра принимает вид

$$\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{d}{d\vartheta}\sin\vartheta\frac{dP_l}{d\vartheta} + l(l+1)P_l = 0 \tag{1.196}$$

1.110. Получить рекуррентные соотношения

$$(2l+1)xP_l(x) = (l+1)P_{l+1}(x) + lP_{l-1}(x)$$
$$(2l+1)P_l(x) = P'_{l+1}(x) - P'_{l-1}(x)$$

где $l = 1,2,\ldots$ Для этого можно применить формулу Родригеса и прием, использованный в примере 1.12 при рассмотрении функций Бесселя.
1.111. С помощью рекуррентных соотношений найти пять первых полиномов Лежандра.
1.112*. С помощью формулы Родригеса доказать ортогональность полиномов Лежандра с разными l и вычислить нормировочный интеграл

$$\int_{-1}^{1} P_l(x)P_{l'}(x)dx = \frac{2}{2l+1}\delta_{l'} \tag{1.197}$$

УкАзАниЕ. Выразить нормировочный интеграл через бета-функцию Эйлера.

1.113. С помощью производящей функции для полиномов Лежандра получить разложение

$$\frac{1-u^2}{(1-2ux+u^2)^{3/2}} = \sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)P_l(x)u^l$$

1.114. Пользуясь результатами примера 1.17, получить второй полином Лежандра в форме $P_2 = \sum\limits_{k=0}^{2} a_k \cos k\vartheta$.

1.115. Записать уравнение (1.190) для присоединенных полиномов Лежандра в сферических координатах.

1.116*. Пользуясь формулой (1.189), показать, что

$$P_l^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(x) \tag{1.198}$$

Указание. Применить к произведению $(x-1)^l(x+1)^l$ формулу Лейбница (см. пример 1.17).

1.117. Записать в явном виде присоединенные полиномы Лежандра P_l^m для $l = 0, 1, 2, 3$.

1.118*. Вычислить нормировочный коэффициент C_{lm}, введенный в примере 1.20. Записать в явном виде сферическую функцию Лежандра.

1.119. Записать уравнение, которому удовлетворяет сферическая функция Лежандра $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$.

Дельта-функция Дирака. Определение и общие свойства. К понятию дельта-функции мы приходим, например, при попытке описать плотность заряда $\rho(\boldsymbol{r})$ точечной частицы. Пусть частица находится в начале координат и имеет заряд e. Тогда, очевидно, функция $\rho(\boldsymbol{r})$ должна обладать следующими свойствами:

$$\rho(\boldsymbol{r}) = 0 \quad \text{при} \quad r \neq 0 \tag{1.199}$$

Но при $r \to 0$ плотность $\rho(r)$ должна возрастать столь быстро, чтобы

$$\int\limits_{\Delta V} \rho(r)dV = e \tag{1.200}$$

т. е. чтобы интеграл, взятый по любому объему ΔV, включающему точку, где находится частица, имел конечное значение, равное заряду e.

Записав $\rho(\boldsymbol{r}) = e\delta(\boldsymbol{r})$, мы получим из (1.199)-(1.200) условия, определяющие трехмерную дельта-функцию:

$$\delta(\boldsymbol{r}) = 0, \quad r \neq 0; \quad \delta(\boldsymbol{r}) \to \infty, \quad r \to 0 \tag{1.201}$$

$$\int\limits_{\Delta V} \delta(\boldsymbol{r})dV = 1 \tag{1.202}$$

Аналогичными соотношениями определяется одномерная дельта-функция:

$$\delta(x) = 0, \quad x \neq 0; \quad \delta(x) \to \infty, \quad x \to 0; \quad \int\limits_{\Delta} \delta(x)dx = 1 \tag{1.203}$$

где Δ - отрезок оси x, включающий точку $x = 0$.

Дельта-функция относится к классу сингулярных обобщенных функций. Она приобретает точный смысл под интегралом. Рассмотрим интеграл

от произведения дельта-функции на произвольную непрерывную и ограниченную функцию $f(x)$:

$$\int_{x_1}^{x_2} \delta(x) f(x) dx$$

где $x_1 < 0, x_2 > 0$. Поскольку $\delta(x) = 0$ при $x \neq 0$, то вклад в интеграл дает только малая окрестность ϵ точки $x = 0$, в которой $f(x)$ постоянна и равна $f(0)$:

$$\int_{x_1}^{x_2} \delta(x) f(x) dx = f(0) \tag{1.204}$$

Далее, путем замены переменной x на $x - a$ в аргументе дельта-функции, повторяя предыдущие рассуждения, находим:

$$\int_{x_1}^{x_2} \delta(x - a) f(x) dx = f(a) \tag{1.205}$$

если промежуток (x_1, x_2) включает точку $x = a$.
Равенства (1.203) и (1.204) показывают, что $\delta(x)$ - четная функция своего аргумента:

$$\delta(x) = \delta(-x) \tag{1.206}$$

С помощью последнего свойства, вводя переменную $|\alpha|x = y$, убеждаемся в справедливости соотношения

$$\int_{x_1}^{x_2} \delta(\alpha x) f(x) dx = \frac{1}{|\alpha|} f(0) \tag{1.207}$$

Наконец, рассмотрим интеграл

$$\int_{x_1}^{x_2} \delta(g(x)) f(x) dx$$

в котором в аргументе дельта-функции стоит некоторая гладкая функция $g(x)$. Вклад в интеграл дают только точки, в которых $g(x) = 0$, т. е.
действительные корни функции $g(x)$. Обозначив их через a_i, можем написать

$$\int_{x_1}^{x_2} \delta(g(x)) f(x) dx = \sum_i \int_{a_i - \epsilon}^{a_i + \epsilon} \delta(g(x)) f(x) dx$$

где ϵ - малое число. Если $f(x)$ - непрерывна, то на отрезке $[a_i - \epsilon, a_i + \epsilon]$ можно заменить $f(x)$ на $f(a_i)$, а $g(x)$ аппроксимировать первым членом разложения: $g(x) = g'(a_i)(x - a_i)$. В итоге, используя (1.207), получим

$$\int_{x_1}^{x_2} \delta(g(x)) f(x) dx = \sum_i \frac{1}{|g'(a_i)|} f(a_i) \tag{1.208}$$

Это свойство дельта-функции можно записать в виде символического равенства

$$\delta(g(x)) = \sum_i \frac{1}{|g'(a_i)|}\delta(x - a_i) \tag{1.209}$$

Если $g'(a_i) = 0$, т. е. a_i - кратный корень, то соотношения (1.208) и (1.209) теряют смысл. Точно так же не имеет смысла произведение $\delta(x)f(x)$, если функция $f(x)$ обладает особенностью при $x = 0$.

Можно определить также производную от дельта-функции. Точный ее смысл содержится в формуле

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\frac{\partial\delta(x-a)}{\partial x}dx = -\frac{\partial f(a)}{\partial a} \tag{1.210}$$

которая получается интегрированием по частям. Аналогично определяются производные высших порядков:

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)\delta^{(n)}(x-a)dx = (-1)^n f^{(n)}(a) \tag{1.211}$$

Функция $\delta(x)$ может рассматриваться как производная от ступенчатой функции Хевисайда $\Theta(x)$. Это следует из очевидного соотношения

$$\int_{x_1}^{x} \delta(x)dx = \Theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 1/2, & x = 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \tag{1.212}$$

где нижний предел интегрирования x_1 - любое отрицательное число. Дифференцируя это равенство по x, получаем

$$\Theta'(x) = \delta(x) \tag{1.213}$$

В равенстве (1.212) при совпадении предела интегрирования с точкой, в которой аргумент дельта-функции обращается в нуль, мы взяли половину значения гладкой функции $f(x) = 1$, т. е.

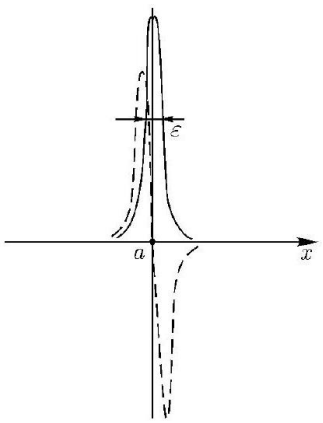


Рис. 1.10 воспользовались правилом интегрирования

$$\int_{x_1}^{a} f(x)\delta(x-a)dx = \frac{1}{2}f(a)$$

Это правило находится в согласии со свойством (1.206) - четностью дельта-функции.

Трехмерную дельта-функцию можно рассматривать как произведение трех одномерных дельта-функций:

$$\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a}) = \delta(x-a_x)\,\delta(y-a_y)\,\delta(z-a_z) \tag{1.214}$$

Поэтому все рассмотренные выше свойства одномерных дельта-функций легко обобщаются на трехмерный случай.

Некоторые представления дельта-функции. Наглядное представление о дельта-функции и ее производных можно получить, рассматривая график некоторой непрерывной функции $\delta_\epsilon(x-a)$, такой, что $\int\limits_\Delta \delta_\epsilon(x-a)dx = 1$.

Параметр ϵ характеризует ширину интервала, в котором рассматриваемая функция отлична от нуля (рис. 1.10).

Дельта-функция и ее производные определяются как пределы

$$\delta(x-a) = \lim_{\epsilon\to 0}\delta_\epsilon(x-a),$$
$$\frac{\partial\delta(x-a)}{\partial x} = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{\partial\delta_\epsilon(x-a)}{\partial x}$$

и т. д. □

Свойства дельта-функции приобретают многие несингулярные функции, зависящие от параметра, при определенных предельных значениях этого параметра. Наиболее употребительны такие представления дельта-функции: □

$$\delta(x) = \frac{1}{\pi}\lim_{\epsilon\to 0}\frac{\epsilon}{\epsilon^2+x^2} = \frac{1}{2\pi i}\lim_{\epsilon\to 0}\left(\frac{1}{x-i\epsilon}-\frac{1}{x+i\epsilon}\right) \tag{1.215}$$

$$\delta(x) = \frac{1}{\pi}\lim_{K\to\infty}\frac{\sin Kx}{x}. \tag{1.216}$$

$$\delta(x) = \frac{1}{\pi}\lim_{K\to\infty}\frac{\sin^2 Kx}{Kx^2}. \tag{1.217}$$

$$\delta(x) = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\sqrt{\pi\epsilon}}e^{-x^2/\epsilon}. \tag{1.218}$$

Из (1.216) получаются следующие представления:

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\lim_{K\to\infty}\int\limits_{-K}^{K}e^{ikx}dk = \frac{1}{\pi}\lim_{K\to\infty}\int\limits_{0}^{K}\cos kx dk \tag{1.219}$$

Их можно рассматривать как разложение дельта-функции в интеграл Фурье [6]. Иногда формулы (1.219) записывают, опуская знак предельного перехода и интегрируя в бесконечных пределах.

Легко убедиться в том, что любое из представлений (1.215)-(1.219) согласуется со всеми свойствами (1.203)-(1.207), а также с определением (1.210) производной от дельта-функции. При вычислении интегралов с дельта-функциями с помощью представлений типа (1.215)-(1.219) нужно производить предельный переход после интегрирования. Например, при использовании (1.216) имеем

$$\int\limits_{-a}^{b}\delta(x)f(x)dx = \frac{1}{\pi}\lim_{K\to\infty}\int\limits_{-aK}^{bK}f\left(\frac{y}{K}\right)\frac{\sin y}{y}dy = f(0) \tag{1.220}$$

тогда как предел (1.216) сам по себе не существует.
Представление дельта-функции через контурные интегралы в комплексной плоскости. Воспользуемся формулой Коши:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{f(z)}{z-a}dz = f(a) \tag{1.221}$$

где $f(z)$ - функция, не имеющая особенностей внутри области, ограниченной замкнутым контуром C, и на самом контуре в плоскости комплексного переменного z, интегрирование по которому производится против часовой стрелки. Из сравнения (1.221) с (1.205) следует, что величину

$$\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{z-a}$$

можно рассматривать как представление $\delta(z-a)$, если условиться производить интегрирование по замкнутому контуру, окружающему точку $z=a$, такому, внутри которого и на самом контуре другие особенности подынтегрального выражения отсутствуют.

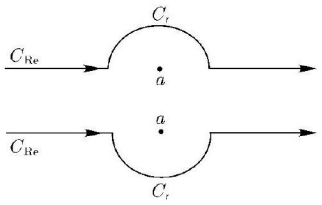


Рис. 1.11 В частности, контур C может представлять собой окружность малого радиуса.

В приложениях нередко возникает интеграл по действительной оси вида

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{f(x)}{x-a}dx$$

где $f(x)$ не имеет особенностей на отрезке $[x_1, x_2]$, а пределы x_1, x_2 могут быть бесконечными. Такой интеграл при a действительном не имеет определенного значения, так как подынтегральное выражение имеет полюс на контуре интегрирования. При вычислении интеграла необходима дополнительная информация, которая должна состоять в указании правила обхода особой точки. Правило обхода устанавливается обычно на основе физических аргументов:

$$\int\limits_{C_{\mathrm{Re}}+C_r} \frac{f(x)}{x-a}dx = \int\limits_{C_r} \frac{f(x)}{x-a}dx + \int\limits_{C_{\mathrm{Re}}} \frac{f(x)}{x-a}dx$$

Это означает, что стоящий в левой части приведенного выше соотношения интеграл, в котором интегрирование проводится по всему контуру, может быть представлен (см. рис. 1.11) в виде суммы двух интегралов. В первом из них интегрирование ведется либо по верхней, либо по нижней полуокружности малого радиуса C_r, во втором - по всему остальному, идущему вдоль действительной оси участку контура (эта часть контура обозначена символом C_{Re}).

[46] Об интегралах Фурье см. следующий раздел.

Интеграл по полуокружности радиуса $\epsilon \to 0$ дает половину вычета (со знаком минус для верхнего контура на рис. 1.11, поскольку обход полюса - по часовой стрелке):

$$\int\limits_{C_r} \frac{f(x)}{x-a}dx = -i\pi f(a)$$

интеграл по действительной оси с исключенной особой точкой вычисляется в смысле главного значения:

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{f(x)}{x-a}dx = \lim_{\epsilon\to 0}\left\{\int\limits_{x_1}^{a-\epsilon} \frac{f(x)}{x-a}dx + \int\limits_{a+\epsilon}^{x_2} \frac{f(x)}{x-a}dx\right\} \equiv \mathscr{P}\int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{f(x)}{x-a}dx$$

При обходе полюса по нижней полуокружности меняется знак полувычета. В итоге мы получаем следующие правила вычисления интеграла (формулы Сохоцкого):

$$\frac{1}{x-a} = \mp i\pi\delta(x-a) + \mathscr{P}\frac{1}{x-a} \tag{1.222}$$

Символ $\mathscr{P}$ обозначает главное значение (верхний знак - для верхнего контура, нижний - для нижнего на рис. 1.11).

Вместо деформации контура интегрирования можно сместить положение полюса на малое расстояние от действительной оси. Это достигается путем добавления к числу a малой мнимой части: $a \to a \mp i\epsilon, \epsilon \to 0$. При такой замене тождество (1.222) примет следующую форму:

$$\lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{x-a\pm i\epsilon} = \mp i\pi\delta(x-a) + \frac{\mathscr{P}}{x-a} \tag{1.223}$$

Оба тождества, (1.222) и (1.223), носят символический (операторный) характер и должны пониматься в том смысле, что интегрирование правой и левой частей с любой непрерывной функцией дает один и тот же результат.

Отделив в левой части равенства (1.223) действительную и мнимую части комплексного выражения, получим для $\delta(x-a)$ представление (1.215) (с заменой $x \to x-a$), а для главного значения

$$\frac{\mathscr{P}}{x-a} = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{x-a}{(x-a)^2+\epsilon^2} \tag{1.224}$$

Другое представление главного значения, аналогичное представлению (1.216) для дельта-функции, имеет вид

$$\frac{\mathscr{P}}{x-a} = \lim_{K\to\infty}\frac{1-\cos Kx}{x} \tag{1.224a}$$

Строгая математическая теория обобщенных функций содержится в [Владимиров (1976)], а прикладные аспекты описаны в [Зельдович и Мышкис (1972)]. См. также [Колоколов и др. (2000)].

Задачи

1.120. Вычислить интегралы

$$\int_{-2}^{3}\left(x^2-x-5\right)\delta(-3x)dx, \quad \int_{-10}^{-3}(x+3)\delta(x+5)dx$$

$$\int_{0}^{5}(x+5)\delta(x+5)dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty}\exp(\alpha x)\delta\left(x^2+x-2\right)dx, \quad \alpha = \text{ const.}$$

1.121. Упростить выражения $(x-a)\delta(x-a), f(x)\delta(x-a), \left(3x^3-7x\right)\delta\left(2x^2-6x-4\right)$.
1.122. Доказать, что представления (1.215), (1.217), (1.218) изображают дельта-функцию. Для этого вычислить интегралы вида $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)dx$ от непрерывной функции $f(x)$, подставляя вместо $\delta(x)$ правую часть соответствующего представления, и убедиться в том, что после перехода к пределу указанные интегралы дают $f(0)$.
1.123. Записать трехмерные дельта-функции $\delta(\boldsymbol{r}), \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a})$ в цилиндрических координатах, где $a = (a_\perp, \alpha_0, a_z)$ - постоянный вектор, заданный своими цилиндрическими координатами.
1.124. Сделать то же самое в сферических координатах, $\boldsymbol{a} = (a, \vartheta_0, \alpha_0)$.
1.125. Записать с помощью дельта-функции первую производную от разрывной функции

$$f(x) = \begin{cases} x^3, \text{ если } x < 1 \\ 2, \text{ если } x = 1 \\ x^2+2, \text{ если } x > 1 \end{cases}$$

1.126. Пусть функция $f(x)$ имеет разрывы первого рода (конечные скачки) в точках $a_i, i = 1, 2, \ldots n$. Записать ее первую производную через дельта-функцию.
1.127. Найти правило вычисления интеграла от произведения $f(x)x^n\delta^{(m)}(x)$, где $f(x)$ - функция, дифференцируемая (в классическом смысле) при $x = 0, \delta^{(m)}(x)$ – m-я производная от дельта-функции, n - целое положительное число.
1.128. Показать, что функция $G\left(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|\right) = 1/|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|$ удовлетворяет уравнению Пуассона с дельтаобразной правой частью:

$$\Delta G\left(|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|\right) = -4\pi\delta\left(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'\right) \tag{1.225}$$

Разложение по полным системам ортонормированных функций. Общее рассмотрение. Пусть имеется некоторая система линейно независимых функций, $\varphi(x, \lambda_n) \equiv \varphi_n(x)$, в общем случае комплекснозначных, которые определены на некотором интервале $[a, b]$ действительной переменной x и зависят от действительного параметра λ, принимающего дискретный ряд значений: $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ Такие системы функций часто возникают при решении обыкновенных дифференциальных уравнений или уравнений в частных производных с соответствующими граничными условиями, и число функций в них обычно бесконечно велико: $n = 0, 1, \ldots$ Пусть функции обладают следующими свойствами: а) они нормированы на единицу, т.е.

$$\int_a^b |\varphi_n(x)|^2 dx = 1 \tag{1.226}$$

б) они взаимно ортогональны, т. е.

$$\int \varphi_m^*(x)\varphi_n(x)dx = 0 \quad \text{при} \quad m \neq n \tag{1.227}$$

Здесь звездочкой сверху φ^* обозначена комплексно сопряженная величина. Такие системы функций называются ортонормированными, а равенства (1.226) и (1.227) можно записать единым образом с помощью символа Кронекера:

$$\int_a^b \varphi_m^*(x)\varphi_n(x)dx = \delta_{mn} \tag{1.228}$$

Рассмотрим теперь произвольную функцию $f(x)$ с интегрируемым квадратом, т.е. такую, для которой интеграл $\int_a^b |f(x)|^2 dx$ конечен. В случае конечного интервала $[a, b]$ этому условию будет удовлетворять любая кусочно-непрерывная функция, имеющая ограниченное число конечных скачков на этом интервале. Выясним возможность разложения такой функции в ряд по функциям $\varphi_n(x)$. Для этого сначала аппроксимируем рассматриваемую функцию линейной суперпозицией, включающей n базисных функций:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} c_n\varphi_k(x) + R_n(x) \tag{1.229}$$

где через $R_n(x)$ обозначен остаток ряда. Коэффициенты c_n суперпозиции выберем таким образом, чтобы погрешность аппроксимации была наименьшей. За меру погрешности примем величину

$$G_n = \int_a^b |R_n(x)|^2 \, dx = \int_a^b \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} c_n\varphi_k(x) \right|^2 dx \tag{1.230}$$

Раскрывая квадрат модуля и используя условие ортонормированности (1.228), будем иметь

$$G_n = \int_a^b |f(x)|^2 dx - \sum_{k=0}^{n} c_k \int_a^b f^*(x)\varphi_k(x)dx - \\ - \sum_{k=0}^{n} c_k^* \int_a^b f(x)\varphi_k^*(x)dx + \sum_{k=0}^{n} c_k^* c_k \tag{1.231}$$

Необходимое условие минимума величины G_n, рассматриваемой как функция коэффициентов c_k, дает

$$c_k = \int_a^b f(x)\varphi_k^*(x)dx \tag{1.232}$$

а погрешность разложения принимает вид

$$G_n = \int_a^b |f(x)|^2 dx - \sum_{k=0}^{n} |c_k|^2 \tag{1.233}$$

Поскольку $G_n \geqslant 0$ по определению, то при любом n имеет место неравенство:

$$\sum_{k=0}^{n} |c_k|^2 \leqslant \int_a^b |f(x)|^2 dx \tag{1.234}$$

Если для всякой функции с интегрируемым квадратом в пределе имеет место равенство

$$\lim_{n\to\infty} G_n = 0 \tag{1.235}$$

или, в другой форме,

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx = \sum_{k=o}^{\infty} |c_k|^2 \tag{1.236}$$

(равенство Парсеваля), то система функций $\varphi_n(x), n = 0, 1, \ldots$ называется полной или замкнутой. Эти термины означают, что других функций, которые были бы линейно независимы от $\varphi_n(x)$ и ортогональны к ним, кроме нулевой функции, не существует: любая функция рассматриваемого класса разлагается в ряд

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \varphi_k(x) \tag{1.237}$$

где коэффициенты разложения даются формулами (1.232). Отметим, что приведенные выше условия обеспечивают сходимость ряда (1.237) «в среднем», т. е. обращение в нуль интеграла (1.230). Это означает, что сходимость ряда к рассматриваемой функции $f(x)$ может нарушаться в отдельных точках, число которых конечно. Если система функций $\varphi_n(x)$ ортонормированная, но не полная, то вместо равенства Парсеваля (1.236) выполняется неравенство Бесселя:

$$\sum_{k=0}^{\infty} |c_k|^2 \leqslant \int_a^b |f(x)|^2 dx \tag{1.238}$$

Пример 1.21. Показать, что полная ортонормированная система функиий удовлетворяет соотношению

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k^* (x') \varphi_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k (x') \varphi_k^*(x) = \delta (x - x') \tag{1.239}$$

которое можно рассматривать как другую, отличную от (1.236), форму условия полнотья (замкнутости).

Решение. Подставив в (1.237) коэффициенты разложения (1.232) и поменяв порядок операций суммирования и интегрирования, будем иметь

$$f(x) = \int_a^b dx' f (x') \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k^* (x') \varphi_k(x) = \int_a^b K (x, x') f (x') dx' \tag{1.240}$$

где

$$K (x, x') = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k^* (x') \varphi_k(x) \tag{1.241}$$

Поскольку равенство (1.240) должно выполняться для любой функции $f(x)$ из широкого класса, то ядро $K (x, x')$ интегрального преобразования (1.240) должно

обладать свойством дельта-функции. В этом можно убедиться, вычислив коэффициенты разложения $\delta(x-x')$ по системе функций $\varphi_k(x)$ согласно (1.232) [7]:

$$c_n = \int \delta(x-x')\,\varphi_n^*(x)dx = \varphi_n^*(x')$$

Следовательно, равенство (1.239) имеет место и представляет собой разложение дельта-функции по функциям $\varphi_k(x)$.

В некоторых физических задачах, особенно в квантовой механике, в полную систему входит не только дискретный ряд функций $\varphi_n(x)$, но также функции $\varphi(x,\lambda)$, которые зависят от параметра λ, принимающего непрерывные значения из некоторого интервала, либо только функции с непрерывным параметром. В этих случаях в разложение произвольной функции будут входить и сумма, и интеграл по непрерывным значениям λ либо только интеграл, а условие замкнутости примет вид

$$\delta(x-x') = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k^*(x')\,\varphi_k(x) + \int \varphi^*(x',\lambda)\,\varphi(x,\lambda)d\lambda \tag{1.242}$$

Ряд Фурье. Доказательство полноты конкретных систем функций представляет собой нетривиальную математическую задачу, решение которой можно найти в специальных руководствах (см., например, [Ильин и Позняк (1973)], [Арфкен (1970)], [и (1965)]). К числу полных ортонормированных систем относится рассмотренная выше система сферических функций Лежандра $Y_{lm}(\vartheta,\varphi), l=0,1,\ldots, m=-l,-l+1,\ldots,l-1,l$.

По таким функциям можно разложить любую ограниченную функцию «на поверхности сферы», т. е. зависящую от углов ϑ,φ. В отсутствие зависимости от φ полную систему на сфере образуют полиномы Лежандра $P_l(\cos\vartheta)$.

Одной из наиболее употребительных ортонормированных на интервале $[-\pi,+\pi]$ и полных систем функций является тригонометрическая система

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{\cos n\tau}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\sin n\tau}{\sqrt{\pi}}, \quad n=1,2,\ldots \tag{1.243}$$

Ортонормированность этой системы функций нетрудно проверить непосредственно. Разложение некоторой функции в ряд по тригонометрическим функциям образует ее ряд Фурье. Впрочем, иногда рядом Фурье (в широком смысле) называют и общее разложение (1.237) по любой полной ортонормированной системе функций.

Поскольку тригонометрические функции (1.243) периодичны, то разлагаемая функция будет представлена рядом Фурье при всех τ лишь в том случае, если она периодична с тем же периодом 2π, т. е. $f(\tau)=f(\tau+2n\pi)$, $n=\pm1,\pm2,\ldots$, либо задана на конечном промежутке $b-a=2L>0$. В последнем случае в (1.243) нужно заменить переменную τ на $\pi x/L$ и сдвинуть начало отсчета координаты x на середину интервала $[a,b]$, т. е. ввести $x'=x-a-L, -L\leqslant x'\leqslant +L$. Рассматриваемая функция, если для нее построить ряд Фурье, будет продолжена в этом случае периодически на всю действительную ось Ox. Непериодическая функция, заданная на бесконечном интервале, правильно представляется рядом Фурье лишь на конечном отрезке $2L$. Для ее представления на всей оси Ox нужно использовать интеграл Фурье (см. ниже).

Если ряд Фурье представляет функцию, имеющую разрывы первого рода (конечные скачки), то в точке скачка $x=x_0$ он сходится к полусумме значений функции, взятых по обе стороны скачка:

[47] Здесь мы выходим за пределы класса обычных функций с интегрируемым квадратом и используем обобщенные функции.

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x_0) = \frac{1}{2}\left[f(x_0-0)+f(x_0+0)\right] \tag{1.244}$$

Пример 1.22. Записать разложение Фурье на интервале $[-L,+L]$, выбрав в качестве полной системы функций [8] экспоненты с мнимым показателем $\exp(in\pi x/L), n=0,\pm1,\ldots$

Решение. Убеждаемся в том, что рассматриваемые экспоненты взаимно ортогональны на интервале $[-L,+L]$:

$$\int_{-L}^{L} \exp\left\{\frac{i(m-n)\pi x}{L}\right\} dx = 2L\delta_{mn}$$

Записываем искомое разложение в виде

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \exp\left\{\frac{in\pi x}{L}\right\} \tag{1.245}$$

Для определения коэффициентов разложения F_n умножаем обе части (1.245) на $\exp(im\pi x/L)$ и интегрируем по рассматриваемому интервалу. В силу ортогональности экспонент после интегрирования в сумме по n останется только один член с $n=m$, что позволяет найти коэффициенты ряда Фурье:

$$F_m = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\exp\left\{\frac{im\pi x}{L}\right\} dx \tag{1.246}$$

Как следует из (1.246), если $f(x)$ - действительная функция, то коэффициенты Фурье (1.246), будучи в общем случае комплексными величинами, удовлетворяют условию $F_{-n}=F_n^*$. Это условие обеспечивает действительность суммы ряда (1.245).

Разложение Фурье очевидным образом обобщается на случай функций, зависящих от нескольких переменных.

Задачи

1.129. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию, заданную на интервале $[-\pi,+\pi]$ условиями $f(x)=x$ для $0\leqslant x\leqslant\pi, f(-x)=f(x)$.
1.130. Сделать то же самое для функции $f(x)=a$ при $0\leqslant x\leqslant\pi$, $f(-x)=-f(x)$.
1.131. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию, заданную на интервале $[-L,+L]$ условиями $f(x)=a$ при $0\leqslant x<L/2, f(x)=0$ при $L/2<x\leqslant L, f(-x)=f(x)$.

Интеграл Фурье. Рассмотрим систему функций, зависящих от действительного параметра λ, который принимает непрерывный ряд значений:

$$\varphi(x,\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{i\lambda x}, \quad -\infty<\lambda<\infty \tag{1.247}$$

Эти функции определены и ограничены при любых действительных значениях координаты x, т. е. на бесконечном интервале $-\infty<x<\infty$. Пользуясь представлением дельта-функции (1.219), вычисляем интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x,\lambda)\varphi^*(x',\lambda)\,d\lambda = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda e^{i\lambda(x-x')} = \delta(x-x')$$

[48] Полнота системы следует из того, что использовавшиеся ранее $\sin n\tau, \cos n\tau$ линейно выражаются через $\exp(\mathrm{in}\tau)$. Поэтому запись через экспоненты означает другую форму тригонометрического ряда.

Полученное соотношение совпадает с (1.242) (в отсутствие дискретных значений λ) и свидетельствует о полноте системы функций $\varphi(x,\lambda)$. Поэтому любую функцию из весьма широкого класса, определенную на всей действительной оси Ox, можно разложить по функциям $\varphi(x,\lambda)$:

$$f(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}F(\lambda)\varphi(x,\lambda)d\lambda=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}F(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda \tag{1.248}$$

Функция $F(\lambda)$ называется фурье-образом исходной функции $f(x)$ или ее амплитудой Фурье. Ее можно найти тем же способом, каким были найдены коэффициенты ряда Фурье в примере 1.22: умножаем обе части равенства (1.248) на $\varphi^*(x,\mu)$ и интегрируем по координате x. Имеем, меняя порядок интегрирования

$$\begin{aligned}\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x)\varphi^*(x,\mu)dx=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\lambda F(\lambda)\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{ix(\lambda-\mu)}dx=\\ =\int\limits_{-\infty}^{\infty}d\lambda F(\lambda)\delta(\lambda-\mu)=F(\mu)\end{aligned} \tag{1.249}$$

Это равенство и позволяет вычислить амплитуду Фурье заданной функции $f(x)$.

Прямое и обратное преобразования Фурье часто удобнее записывать в несимметричной форме:

$$f(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}F(\lambda)e^{i\lambda x}\frac{d\lambda}{2\pi},\quad F(\lambda)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\lambda x}dx \tag{1.250}$$

Действительность интеграла Фурье обеспечивается соотношением

$$F(-\lambda)=F^*(\lambda) \tag{1.251}$$

при действительных λ и $f(x)$.

Разложение в интеграл Фурье легко обобщается на случай нескольких измерений. Например, в трехмерном пространстве фурье-преобразование можно записать в виде

$$f(\boldsymbol{r})=\int F(\boldsymbol{\varkappa})e^{i\boldsymbol{\varkappa}\cdot\boldsymbol{r}}\frac{d^3\boldsymbol{\varkappa}}{(2\pi)^3},\quad F(\boldsymbol{\varkappa})=\int f(\boldsymbol{r})e^{-i\boldsymbol{\varkappa}\cdot\boldsymbol{r}}d^3\boldsymbol{r}. \tag{1.252}$$

В обоих интегралах интегрирование производится по всему пространству.

Пример 1.23. Получить разложение в интеграл Фурье для бесконечного интервала $-\infty<x<\infty$ путем предельного перехода $L\to\infty$ в формулах (1.245), (1.246).

Решение. При $L\to\infty$ соседние члены в сумме (1.245) почти одинаковы, поэтому суммирование можно заменить интегрированием по $dn=(L/\pi)d\lambda$ в пределах $-\infty,+\infty$. Обозначив $\lim_{L\to\infty}2LF_n$ через $F(\lambda)$, получим из (1.245), (1.246) соотношения (1.250).

Полезные сведения о разложениях по системам функций, рядах и интегралах Фурье, кроме уже упомянутых источников, содержатся в книгах [Ильин и Позняк (1973)], [Толстов (1951)], [Бейтмен и Эрдейи (1969, 1970)]

Задачи

1.132. Выразить фурье-образ производной $f'(x)$ через фурье-образ $F(\lambda)$ функции $f(x)$. Предполагается, что интеграл $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx$ сходится.

1.133. Сделать то же самое для функции $f(ax)\exp(ibx)$.

1.134. Вычислить фурье-образ функции $f(x) = (1+x^2)^{-1}$.

УказАниЕ. Рассматривая x как комплексную переменную, замкнуть контур интегрирования дугой бесконечного радиуса и применить теорему о вычетах.

1.135. Вычислить фурье-образ функции $\exp(-\alpha^2 x^2)$.

1.136. Вычислить трехмерный фурье-образ функции $f(r) = e^{-\alpha^2 r^2}$.

1.137*. Вычислить трехмерный фурье-образ функции $G(r) = r^{-1}$.

1.138*. Произвести разложение плоской волны $\exp(ikr\cos\theta)$ в ряд по полиномам Лежандра $P_l(\cos\vartheta)$. Вычислить коэффициенты разложения, воспользовавшись ортогональностью полиномов Лежандра.

1.139. Пусть направления векторов $\boldsymbol{\varkappa}$ и $\boldsymbol{r}$ задаются в сферической системе координат углами (θ,ϕ) и ϑ,φ соответственно. Разложить плоскую волну $\exp(i\boldsymbol{\varkappa}\cdot\boldsymbol{r})$ в ряд по сферическим функциям Лежандра.

УказАНиЕ. Воспользоваться теоремой сложения для сферических функций.

1.140*. Доказать тождество

$$\frac{1}{\sqrt{r_\perp^2+z^2}} = \int\limits_0^\infty e^{-k|z|}\cdot J_0(kr_\perp)\,dk$$

где $r_\perp$ и z - цилиндрические координаты.

C.1.2 1.4. Answers and Solutions

1.1. Из равенства (1.6), которое является следствием определения (1.3), вытекает $|\widehat{a}|^2 = 1$, т. е. $|\widehat{a}| = \pm 1$. При повороте на нулевой угол $\widehat{a} = \widehat{1}$ и $|\widehat{a}| = |\widehat{1}| = +1$; но поскольку элементы матрицы поворота являются непрерывными функциями трех параметров, задающих поворот (например, трех углов Эйлера, см. задачу 1.20), то и при повороте на произвольный угол $|\widehat{a}| = 1$. При отражении трех координатных осей матрица преобразования в $g_{\alpha\beta} = -\delta_{\alpha\beta}$ и $|\widehat{g}| = -1$. Повороту, сопровождаемому отражением осей, соответствует произведение матриц $\widehat{a}\widehat{g} = \widehat{g}\widehat{a}$, для которого $|\widehat{a}\widehat{g}| = |\widehat{a}||\widehat{g}| = -1$. Преобразования с $|\widehat{a}| = +1$ называются собственными, а с $|\widehat{a} = -1$ - несобственными.

1.3.

$$P'_{\alpha\beta\ldots\kappa} = |\widehat{a}|a_{\alpha\mu}a_{\beta\nu}\ldots a_{\kappa P_{\mu,\nu}}\ldots\sigma \tag{1.253}$$

Здесь $|\hat{a}|$ - определитель матрицы преобразования. При инверсии трех координатных осей матрица преобразования $a_{\alpha\mu} = -\delta_{\alpha\mu}$, поэтому $|\widehat{a}| = -1$ и $P'_{\alpha\beta\ldots\gamma} = (-1)^{\varepsilon+1}P_{\alpha\beta\ldots\gamma}\ldots$ в соответствии с определением псевдотензора s-го ранга. Формула же (1.5) правильно описывает преобразование истинного (полярного) тензора при поворотах и отражениях, но не описывает
отражения псевдотензора. Преобразование (1.253) при поворотах совпадает с (1.5), так как в этом случае $|\widehat{a}| = +1$.

Правило преобразования антисимметричного тензора III ранга $e_{\alpha\beta\gamma}$, описывающее поворота и отражения, также должно содержать определитель $|\widehat{a}|$. В отсутствие определителя компоненты тензора изменяли бы знак при отражениях.

1.4.

$$T_{\alpha\beta} = (1/2)\left(T_{\alpha\beta} + T_{\beta\alpha}\right) + (1/2)\left(T_{\alpha\beta} - T_{\beta\alpha}\right) \tag{1.254}$$

1.5.

$$T_{\alpha\beta} = T^h_{\alpha\beta} + T^{ah}_{\alpha\beta}, \quad \text{где} \quad T^h_{\alpha\beta} = (1/2)\left(T_{\alpha\beta} + T^*_{\alpha\beta}\right) \tag{1.255}$$
$$T^{ah}_{\alpha\beta} = (1/2)\left(T_{\alpha\beta} - T^*_{\alpha\beta}\right).$$

1.9. $T_{\alpha\beta}$ образуют истинный тензор II ранга.
1.10.

$$C_\alpha = (1/2)e_{\alpha\beta\gamma}A_{\beta\gamma} \tag{1.256}$$

т. е. $C_1 = A_{23} = -A_{32}, C_2 = A_{31} = -A_{13}, C_3 = A_{12} = -A_{21}$.
1.11. $\boldsymbol{A} \times B$ - псевдовектор или дуальный ему истинный антисимметричный тензор II ранга $A_\beta B_\gamma - A_\gamma B_\beta$; $[A \times B] \times C$ - полярный вектор, $[A \times B] \cdot C$ - псевдоскаляр.

1.13.

$$dS_\alpha = e_{\alpha\beta\gamma}dx_\beta dx'_\gamma = (1/2)e_{\alpha\beta\gamma}dS_{\beta\gamma} \tag{1.257}$$

где $dS_{\beta\gamma} = dx_\beta dx'_\gamma - dx_\gamma dx'_\beta$ - проекция площади параллелограмма на координатную плоскость $x_\beta x_\gamma$.

1.14.

$$dV = [d\boldsymbol{r} \times d\boldsymbol{r}']\, d\boldsymbol{r}'' = e_{\alpha\beta\gamma}dx_\alpha dx'_\beta dx''_\gamma \tag{1.258}$$

Элемент объема dV представляет собой псевдоскаляр. При $d\boldsymbol{r} = \boldsymbol{e}_1 dx_1$, $d\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{e}_2 dx_2, d\boldsymbol{r}'' = e_3 dx_3$ получаем обычное выражение для элемента объема в декартовых координатах $dV = dx_1 dx_2 dx_3 = dxdydz$.
1.16.

$$\cos\theta\cos\vartheta\cos\vartheta' + \sin\vartheta\sin\vartheta'\cos(\alpha - \alpha') \tag{1.259}$$

1.17.

$$(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B})_\circ = i\left(A_{-1}B_{+1} - A_{+1}B_{-1}\right)$$
$$(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B})_{\pm 1} = \pm\left(A_\circ B_{\pm 1} - A_{\pm 1}B_\circ\right)$$
$$\boldsymbol{AB} = \sum_{\mu=-1}^{+1}(-1)^\mu A_{-\mu}B_\mu$$
$$r_\mu = r(4\pi/3)^{1/2}(-1)^\mu Y_{1\mu}(\vartheta, \alpha)$$

1.18. При переходе от декартовых ортов к сферическим (рис. 1.12а) имеем $\boldsymbol{e}'_\alpha = a_{\alpha\beta}e_\beta$, где $e_\beta(\beta = 1, 2, 3)$ - декартовы орты, $e'_\alpha(\alpha = r, \vartheta, \alpha)$ - сферические орты,

$$\widehat{a} = \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\alpha & \sin\vartheta\sin\alpha & \cos\vartheta \\ \cos\vartheta\cos\alpha & \cos\vartheta\sin\alpha & -\sin\vartheta \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \end{pmatrix},$$

$$\widehat{a}^{-1} = \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\alpha & \cos\vartheta\cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\vartheta\sin\alpha & \cos\vartheta\sin\alpha & \cos\alpha \\ \cos\vartheta & -\sin\vartheta & 0 \end{pmatrix}.$$

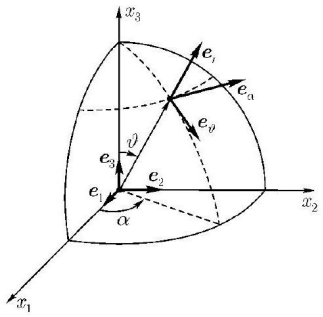


Рис. 1.12а

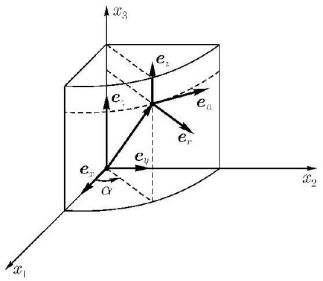


Рис. 1.12σ

При переходе от декартовых ортов к цилиндрическим ортам e_r, e_α, e_z имеем (рис. 1.12 б)

$$\widehat{a} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \widehat{a}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.19.

$$\widehat{g} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.260}$$

1.20. Перемножая матрицы типа (1.8), получим

$$\widehat{g}\,(\alpha_1\theta\alpha_2) = \widehat{g}\,(\alpha_2)\,\widehat{g}(\theta)\widehat{g}\,(\alpha_1) =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\alpha_1\cos\alpha_2 - \cos\theta\sin\alpha_1\sin\alpha_2 & \sin\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\theta\cos\alpha_1\sin\alpha_2 & \sin\theta\sin\alpha_2 \\ -\cos\alpha_1\sin\alpha_2 - \cos\theta\sin\alpha_1\cos\alpha_2 & -\sin\alpha_1\sin\alpha_2 + \cos\theta\cos\alpha_1\cos\alpha_2 & \sin\theta\cos\alpha_2 \\ \sin\theta\sin\alpha_1 & -\sin\theta\cos\alpha_1 & \sin\alpha_1\cos\alpha_1 \end{pmatrix} \tag{1.261}$$

1.21 .

$$\widehat{d}\,(\alpha\theta\alpha_2) = \begin{pmatrix} e^{i(\alpha_1+\alpha_2)}(1+\cos\theta)/2 & -ie^{i\alpha_2}\sin\theta/\sqrt{2} & -e^{i(\alpha_2-\alpha_1)}(1-\cos\theta)/2 \\ -ie^{i\alpha_1}\sin\theta/\sqrt{2} & \cos\theta & ie^{-i\alpha_1}\sin\theta/\sqrt{2} \\ -e^{i(\alpha_1-\alpha_2)}(1-\cos\theta)/2 & -ie^{-i\alpha_2}\sin\theta/\sqrt{2} & e^{-i(\alpha_1+\alpha_2)}(1+\cos\theta)/2 \end{pmatrix}.$$

1.22. Матрица поворота на нулевой угол равна единице (тождественное преобразование), а при повороте на малый угол $|\varepsilon_{\alpha\beta}| \ll 1$. Для доказательства антисимметрии $\widehat{\varepsilon}$ воспользуемся инвариантностью $r^2 = \delta_{\alpha\beta}x_\alpha x_\beta$ относительно вращении. Поскольку $x'_\alpha + \varepsilon_{\alpha\beta}x_\beta$, то с точностью до малых величин первого порядка имеем $r'^2 = r^2 + 2\varepsilon_{\alpha\beta}x_\alpha x_\beta$. Из инвариантности r^2 следует, что $\varepsilon_{\alpha\beta}x_\alpha x_\beta = 0$ при произвольных x_α, а это возможно только при $\varepsilon_{\alpha\beta} = -\varepsilon_{\beta\alpha}$.

Введем вектор $\delta\varphi$ с компонентами $\delta\varphi_\alpha = (1/2)e_{\boldsymbol{\alpha\beta\gamma}}\varepsilon_{\boldsymbol{\beta\gamma}}$. Тогда $\boldsymbol{r'} = r + \delta\varphi \times \boldsymbol{r}$, откуда видно, что $\delta\varphi$ представляет собой вектор малого угла поворота, направление которого указывает ось вращения, а величина - угол поворота.

1.23. Если повороты задаются малыми векторами $\delta\varphi_1$ и $\delta\varphi_2$, то после второго поворота

$$r'' = \boldsymbol{r'} + \delta\varphi_2 \times r' = r + (\delta\varphi_1 + \delta\varphi_2) \times \boldsymbol{r} + \delta\varphi_2 \times (\delta\varphi_1 \times \boldsymbol{r})$$

Вектор результирующего поворота $\delta\varphi = \delta\varphi_1 + \delta\varphi_2$ можно ввести только в пренебрежении последним членом II порядка.

Некоммутативность матриц поворота в общем случае можно увидеть из выражения (1.261): выполнение поворотов в последовательности $\alpha_2, \theta, \alpha_1$, обратной той, для которой записана матрица (1.261), соответствует замене $\alpha_1 \to \alpha_2$. При этом вид матрицы изменится, если $\theta \neq 0$. Случай $\theta = 0$ отвечает поворотам на углы α_1 и α_2 вокруг одной и той же оси Ox_3, и такие повороты коммутативны.

1.24. Произвольный действительный тензор II ранга можно записать в виде $T_{\alpha\beta} = S_{\alpha\beta} + A_{\alpha\beta}$, а произвольный эрмитов тензор - в виде $T_{\alpha\beta} = S_{\alpha\beta} + iA_{\alpha\beta}$, где $S_{\alpha\beta}$ и $A_{\alpha\beta}$ - симметричный и антисимметричный действительные тензоры. Антисимметричный тензор $A_{\alpha\beta}$ эквивалентен вектору (см. зад. 1.10), который нельзя обратить в нуль никаким поворотом. Поэтому диагонализуется только действительная симметричная часть произвольного тензора II ранга.

1.25 .

$$S_{\alpha\beta} = \lambda^{(1)}n_\alpha^{(1)}n_\beta^{(1)} + \lambda^{(2)}n_\alpha^{(2)}n_\beta^{(2)} + \lambda^{(3)}n_\alpha^{(3)}n_\beta^{(3)} \tag{1.262}$$

1.26. Раскрыв определитель (1.27) и учитывая, что главные значения тензора λ будут инвариантами только в случае, если таковыми являются коэффициенты алгебраического уравнения 3 -й степени, находим три инварианта:

$$I_1 = T_{11} + T_{22} + T_{33} = \lambda^{(1)} + \lambda^{(2)} + \lambda^{(3)} \tag{1.263}$$

$$I_2 = D_{11} + D_{22} + D_{33} = \lambda^{(1)}\lambda^{(2)} + \lambda^{(1)}\lambda^{(3)} + \lambda^{(2)}\lambda^{(3)} \tag{1.264}$$

$$I = D = \lambda^{(1)}\lambda^{(2)}\lambda^{(3)} \tag{1.265}$$

где $D = |\widehat{T}|$ - определитель тензора, а $D_{\alpha\beta}$ - алгебраические дополнения этого определителя. Выражения в правых частях равенств следуют из теоремы Виета о связи коэффициентов кубического уравнения с его корнями. Полученные результаты относятся к произвольному тензору II ранга.

1.27. Разложения определителя $D = |\widehat{T}|$ по элементам α-й строки или β-го столбца записываются соответственно в виде

$$T_{\alpha\beta}D_{\beta\gamma} = D\delta_{\alpha\beta}, \quad D_{\gamma\alpha}T_{\gamma\beta} = D\delta_{\alpha\beta}$$

где $D_{\gamma\alpha} = (-1)^{\alpha+\gamma}\Delta_{\gamma\alpha}$ - алгебраическое дополнение, $\Delta_{\gamma\alpha}$ - минор определителя D, т. е. определитель, получаюшийся вычеркиванием в последнем γ-й строки и β-го столбца. Согласно (1.265) определитель тензора D инвариант, а поскольку $\delta_{\alpha\beta}$ - тензор, то алгебраические дополнения $D_{\alpha\beta}$ также образуют тензор. Отношения

$$T^{-1}_{\alpha\beta} = D_{\alpha\beta}/D \tag{1.266}$$

образуют тензор, обратный T. Для существования обратного тензора необходимо и достаточно, чтобы $D = |T| \neq 0$.

1.29. а) $\boldsymbol{A}^2(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C}) + (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})$; $\quad[(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C}]\cdot[\boldsymbol{A}'\times\boldsymbol{B}')\times\boldsymbol{C}']$;

1.31.

$$\begin{aligned}&(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}')(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{B}')(\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{C}') + (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}')(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C}')(\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{A}') + \\ &+ (\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}')(\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{B}')(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}') - (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}')(\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{A}')(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{B}') - \\ &- (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}')(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}')(\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{C}') - (\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C}')(\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{B}')(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}')\end{aligned}$$

1.32. Проведем доказательства для вектора и тензора II ранга.

а) Так как компоненты вектора по условию должны быть одинаковы во всех системах отсчета, то при любом повороте $A'_i = A_i$, т. е. $A'_x = A_x$, $A'_y = A_y, A'_z = A_z$. Повернув систему координат вокруг оси oz на угол π, из формул преобразования компонент вектора при вращениях, получим $A'_x = -A_x, A'_y = -A_y, A'_z = A_z$. Эти равенства совместимы с предыдущими только в том случае, если $A_x = A_y = 0$. Произведя поворот вокруг оси oz на угол π, точно так же докажем, что $A_z = 0$, т. е. вектор $A = 0$.

б) Любой тензор II ранга можно представить в виде суммы симметричного и антисимметричного тензоров: $T_{ik} = S_{ik} + A_{ik}$. Антисимметричный тензор эквивалентен некоторому псевдовектору и, в силу доказанного выше свойства вектора, его компоненты не зависят от системы отсчета только тогда, когда они равны нулю. Поэтому рассмотрим симметричный тензор S_{ik}.

Выберем систему координат, в которой S_{ik} имеет диагональный вид $\lambda^{(i)}\delta_{ik}$. Если $\lambda^{(i)}$ не равны друг другу, то компоненты тензора будут зависеть от выбора осей, т. е. от того, какой цифрой (1,2 или 3) обозначена данная ось. Только при $\lambda^{(1)} = \lambda^{(2)} = \lambda^{(3)} = \lambda$ компоненты тензора не будут зависеть от выбора осей. При этом тензор будет иметь вид $\lambda\delta_{ik}$, что и требовалось доказать.

1.33. Искомые средние значения равны интегралам:

$$\bar{n}_\alpha = \frac{1}{4\pi}\int n_\alpha d\Omega, \quad \bar{n}_\alpha n_\beta = \frac{1}{4\pi}\int n_\alpha n_\beta d\Omega \ldots$$

Величины $\bar{n}_\alpha, \bar{n}_\alpha n_\beta$ и т. д. являются тензорами соответственно I, II и т. д. рангов. С другой стороны, из их определения следует, что эти величины должны быть инвариантны относительно поворотов. Поэтому они будут выражаться через такие тензоры, компоненты которых не зависят от системы отсчета. На основе предыдущей задачи получим:

$$\begin{aligned}&\bar{n}_\alpha = 0, \quad \bar{n}_\alpha n_\beta = (1/3)\delta_{\alpha\beta}, \quad \bar{n}_\alpha n_\beta n_\gamma = 0, \\ &\overline{n_\alpha n_\beta n_\gamma n_\mu} = (1/15)\left(\delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\mu} + \delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\mu} + \delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\gamma}\right).\end{aligned}$$

1.34. $a^2/3, \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}/3, \boldsymbol{a}/3, 2a^2/3, 2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}/3$.
$[(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})(c\cdot d) + (a\cdot c)(b\cdot d) + (a\cdot d)(b\cdot c)]/15$.

1.35. $n^2, n'^2, l^2, n\cdot n', (n\times n')\cdot l, (n\cdot l)^2, (n'\cdot l)^2, (n\cdot l)(n'\cdot l)$.

1.36. $n \cdot l, n' \cdot l, n_1 \cdot (n_2 \times n_3)$.
1.37.
а) $a_\alpha^\beta = e'_\alpha \cdot e^\beta$;
б) если $\boldsymbol{e}_\beta = (\widehat{a}^{-1})_\beta{}^\alpha \boldsymbol{e}'_\alpha$, то $(\widehat{a}^{-1})_\beta^\alpha = \boldsymbol{e}'^\alpha \cdot \boldsymbol{e}_\beta = a^\alpha{}_\beta \neq a_\alpha{}^\beta$; по определению обратной матрицы $a_\alpha{}^\beta a^\gamma{}_\beta = \delta_\alpha^\gamma, a_\beta{}^\alpha a^\beta{}_\gamma = \delta_\gamma^\alpha = \delta_\alpha^\gamma$;
в) $\boldsymbol{e}'^\alpha = a^\alpha{}_\beta e^\beta, e^\alpha = a_\beta{}^\alpha e'^\beta$
г) $A'_\beta = a_\beta{}^\alpha A_\alpha, A'^\beta = a^\beta{}_\alpha A^\alpha; A_\alpha = a^\beta{}_\alpha A'_\beta, A^\alpha = a_\beta{}^\alpha A'^\beta$;
д) $g'_{\alpha\beta} = a_\alpha{}^\gamma a_\beta{}^\epsilon g_{\gamma\epsilon}, g'^{\alpha\beta} = a^\alpha{}_\gamma a^\beta{}_\epsilon g^{\gamma\epsilon}, g_{\alpha\beta} = a^\gamma{}_\alpha a^\epsilon{}_\beta g'_{\gamma\epsilon}, g^{\alpha\beta} = a_\gamma{}^\alpha a_\epsilon{}^\beta g'^{\gamma\epsilon}$.

ЗАмЕчАниЕ. Формулы г) непосредственно обобщаются на случай преобразования ковариантных, контравариантных и смешанных компонент тензора любого ранга.
1.38. Компоненты векторов обоих базисов при отражении системы координат меняют знаки.

$$e'_\alpha = -e_\alpha, \quad e'^\alpha = -e^\alpha, \quad \alpha = 1, 2, 3$$

1.39.

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = g^{\alpha\beta} A_\alpha A_\beta = g_{\alpha\beta} A^\alpha A^\beta = A^\alpha B_\alpha = A_\alpha B^\alpha = \text{ inv} \tag{1.267}$$

$$dl^2 = dr \cdot dr = g^{\alpha\beta} dx_\alpha dx_\beta = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = dx^\alpha dx_\alpha = \text{ inv} \tag{1.268}$$

ЗамечаниЕ. Во всех случаях, когда ковариантные и контравариантные компоненты не совпадают, операция свертывания должна производиться как суммирование по одному верхнему и одному нижнему значку. Сумма любого тензора по двум верхним или двум нижним значкам не является тензором какого-либо ранга.
1.40 .

$$C_\alpha = \sqrt{g}\left(A^\beta B^\gamma - A^\gamma B^\beta\right), \quad C^\alpha = \frac{1}{\sqrt{g}}\left(A_\beta B_\gamma - A_\gamma B_\beta\right), \tag{1.269}$$

где $g = |\widehat{g}|$, числа α, β, γ образуют круговую перестановку $1, 2, 3$.
Приведенные формулы можно рассматривать как обобщение выражения (1.23а) на случай косоугольного базиса. Записав (1.269) в форме

$$C_\alpha E_{\alpha\beta\gamma} A^\beta B_\gamma, \quad C^\alpha = E^{\alpha\beta\gamma} A_\beta B_\gamma \tag{1.270}$$

находим представление для антисимметричного тензора III ранга в косоугольном базисе:

$$E_{\alpha\beta\gamma} = \sqrt{g} e_{\alpha\beta\gamma}, \quad E^{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{\sqrt{g}} e^{\alpha\beta\gamma} \tag{1.271}$$

где $e_{\alpha\beta\gamma}$ и $e^{\alpha\beta\gamma}$ относящиеся к ортогональному базису, одинаковы и определяются условиями (1.21). Нетрудно проверить, что $E^{\alpha\beta\gamma}$ получается из $E_{\alpha\beta\gamma}$ (и наоборот) по правилу подъема и опускания значков согласно (1.35).
1.41. $\cos\theta = \frac{A_\alpha B^\alpha}{\left(A_\beta A^\beta B_\gamma B^\gamma\right)^{1/2}}$.
1.42. $g_{\mu\nu} = \left(\boldsymbol{e}^\alpha_{(D)}\right)_\mu \left(\boldsymbol{e}^{(D)}_\alpha\right)_\nu, g^{\mu\nu} = \left(\boldsymbol{e}^\alpha_{(D)}\right)^\mu \left(\boldsymbol{e}^{(D)}_\alpha\right)^\nu, g^\mu_\nu = \left(\boldsymbol{e}^\alpha_{(D)}\right)^\mu \left(\boldsymbol{e}^{(D)}_\alpha\right)_\nu = \delta^\mu_\nu$
1.44. $\boldsymbol{A}^2 = g_{\alpha\beta} A^\alpha B^\beta = A^\alpha B_\alpha$; $\cos\theta = \frac{A_\alpha B^\beta}{(\boldsymbol{A}^2 \boldsymbol{B}^2)^{1/2}}$, в полной аналогии с результатом 1.41 для аффинной системы.
1.45. По общим правилам (1.271) имеем

$$E^{\mu\nu\lambda} = \frac{\partial q^\mu}{\partial x^\alpha}\frac{\partial q^\nu}{\partial x^\beta}\frac{\partial q^\lambda}{\partial x^\gamma}e^{\alpha\beta\gamma}$$

откуда следует антисимметрия $E^{\mu\nu\lambda}$ по любой паре значков. Это позволяет записать $E^{\alpha\beta\gamma} = Se^{\alpha\beta\gamma}$, где S - некоторый скаляр. Для его определения рассмотрим частный случай и получим

$$E^{123} = \frac{\partial q^1}{\partial x^\alpha}\frac{\partial q^2}{\partial x^\beta}\frac{\partial q^3}{\partial x^\gamma}e^{\alpha\beta\gamma} = \left|\frac{\partial q^\lambda}{\partial x^\alpha}\right| = J^{-1} = g^{-1/2}$$

где использованы (1.39) и (1.53). Таким образом, $S = g^{-1/2}$, и мы получили другим способом вторую формулу (1.271).

1.46. а) $dl_{(1)} = \sqrt{g_{11}}dq^1, dl_{(2)} = \sqrt{g_{22}}dq^2, dl_{(3)} = \sqrt{g_{33}}dq^3$;

б) такими тремя векторами является ковариантный базис (1.46);

в) с помощью результатов задачи (1.44) находим

$$\cos\vartheta_{12} = \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}}, \quad \cos\vartheta_{13} = \frac{g_{13}}{\sqrt{g_{11}g_{33}}}, \quad \cos\vartheta_{23} = \frac{g_{23}}{\sqrt{g_{22}g_{33}}}$$

г) для ортогональности системы криволинейных координат необходимо и достаточно выполнения равенств $g_{12} = g_{23} = g_{13} = 0$ в каждой точке пространства.

1.47. Для сферической системы

$$g_{rr} = 1, \quad g_{\vartheta\vartheta\vartheta} = r^2, \quad g_{\alpha\alpha} = r^2\sin^2\vartheta, \quad g_{r\vartheta} = g_{r\alpha} = g_{\vartheta\alpha} = 0;$$
$$g^{rr} = 1, \quad g^{\vartheta\vartheta} = r^{-2}, \quad g^{\alpha\alpha} = r^{-2}\sin^{-2}\vartheta, \quad g^{r\vartheta} = g^{r\alpha} = g^{\vartheta\alpha} = 0$$
$$e_r = e^r = e_{r*}, \quad e_\vartheta = r^2e^\vartheta = re_r, \quad e_\alpha = r^2\sin^2\vartheta e^\alpha = r\sin\vartheta\boldsymbol{e}_{\alpha**}.$$

Для цилиндрической системы

$$g_{rr} = g_{zz} = 1, \quad g_{\alpha\alpha} = r^2, \quad g_{r\alpha} = g_{rz} = g_{\alpha z} = 0$$
$$g^{rr} = g^{zz} = 1, \quad g^{\alpha\alpha} = r^{-2}, \quad g^{r\alpha} = g^{rz} = g^{\alpha z} = 0$$
$$e_r = e^r = e_{r*}, \quad e_\alpha = r^2e^\alpha = re_{\alpha*}, \quad e_z = e^z = e_{z*}$$

Здесь звездочкой обозначены единичные базисные орты, введенные в задаче 1.18. Ковариантные и контравариантные базисные векторы имеют неодинаковую размерность и неодинаковую длину, отличную вообще говоря от единичной.

1.50. $R = a^2/2 + ab - b^3/3$.

1.52. l, l.

1.54 .

$$\frac{dr}{A_r} = \frac{rd\alpha}{A_\alpha} = \frac{dz}{A_z}, \quad \frac{dr}{A_r} = \frac{rd\vartheta}{A_\vartheta} = \frac{r\sin\vartheta d\alpha}{A_\alpha}.$$

1.55. Поскольку градиент содержит первые производные по координатам, можно записать

$$\operatorname{grad}\frac{(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r})}{r^3} = \frac{\operatorname{grad}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r})}{r^3} + (\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r})\operatorname{grad}\frac{1}{r^3}$$

Используя результаты задач (1.52), (1.53), получим окончательно

$$\operatorname{grad}\frac{(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r})}{r^3} = -\frac{3(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}}{r^5} + \frac{\boldsymbol{p}}{r^3}$$

1.56. Направляем полярную ось вдоль вектора $\boldsymbol{p}$ и проецируем вектор $\boldsymbol{E}$ на орты сферических координат:

$$E_r = \frac{2p\cos\vartheta}{r^3}, \quad E_\vartheta = \frac{p\sin\vartheta}{r^3}, \quad E_\alpha = 0$$

Векторные линии в сферических координатах определяются из системы уравнений

$$\frac{dr}{E_r} = \frac{rd\vartheta}{E_\vartheta} = \frac{r\sin\vartheta d\alpha}{E_\alpha}$$

Обращение в нуль компонента E_α означает, что должен обратиться в нуль и дифференциал $d\alpha = 0$, т.е. $\alpha = \text{const}$ и, таким образом, все векторные линии лежат в плоскостях, проходящих через вектор p. Подставляя ненулевыс проскции $\boldsymbol{E}$ в оставшесся сдинствснное уравнснис и сокращая общис множители, получаем дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными: $dr/r = 2\cot\vartheta d\vartheta$. Почленное интегрирование правой и левой частей дает $\ln r - \ln r_0 = 2\ln\sin\vartheta$ или $r(\vartheta) = r_0\sin^2\vartheta$, где r_0 - постоянная интегрирования, имеющая смысл расстояния от векторной линии до начала координат в плоскости $\vartheta = \pi/2$.

1.57 .

$$\nabla_{\pm1} = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\pm i\alpha}\left(\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\vartheta}{r}\frac{\partial}{\partial\vartheta} \pm \frac{i}{r\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\alpha}\right)$$
$$\nabla_0 = \cos\vartheta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\vartheta}{r}\frac{\partial}{\partial\vartheta}$$

1.59. $3, 0, 0, 2\omega$.

1.60. $\boldsymbol{H} = \frac{3(\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}}{r^5} - \frac{\boldsymbol{m}}{r^3}$.

1.63. $\varphi'\boldsymbol{r}/r, 3\varphi + r\varphi', 0, \boldsymbol{l}\varphi + \boldsymbol{r}(\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{r})\varphi'/r$.

1.64. $\varphi(r) = \text{const}\ /r^3$.

1.65. $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}), \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}; \quad 4(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r}), \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r}; \quad 0, (2\varphi + r\varphi')\,\boldsymbol{a} - \boldsymbol{r}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})\varphi'/r; -2(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r}), 3(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{a})$.

1.66.

$$\boldsymbol{A} + (\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{A}')\,\frac{\boldsymbol{r}}{r}, \quad (\boldsymbol{A}'\cdot\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}')\,\frac{\boldsymbol{r}}{r}, \quad \frac{\varphi'}{r}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{A}) + \frac{\varphi}{r}\,(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{A}')$$
$$\frac{\varphi'}{r}(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{A}) + \frac{\varphi}{r}\,(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{A}'), \quad \frac{\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{r}}{r}\,(\varphi'\boldsymbol{A} + \varphi\boldsymbol{A}')$$

1.68.

$$\int\limits_V (\operatorname{grad}\varphi\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{A})dV = \oint\limits_S (\boldsymbol{A}\times\operatorname{grad}\varphi)\cdot d\boldsymbol{S} = \oint\limits_S \varphi\operatorname{rot}\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S}$$

1.69. aV, aV

1.70. Использовав метод скалярного умножения постоянного вектора на каждый из рассматриваемых интегралов, находим следующие соотношения: □

$$\oint\limits_S \boldsymbol{n}\varphi dS = \int\limits_V \operatorname{grad}\varphi dV \tag{1.272}$$

$$\oint\limits_S (\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{A})dS = \int\limits_V \operatorname{rot}\boldsymbol{A}dV + \int\limits_V \boldsymbol{A}(\nabla\cdot b)dV \tag{1.273}$$

$$\oint\limits_S (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{A}dS = \int\limits_V (\boldsymbol{b}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}dV \tag{1.274}$$

$$\oint\limits_S T_{\alpha\beta}\boldsymbol{n}_\beta dS = \int\limits_V \frac{\partial T_{\alpha\beta}}{\partial x_\beta}dV \tag{1.275}$$

Все эти соотношения можно рассматривать как обобщенную теорему Остроградского-Гаусса:

$$\oint_S \boldsymbol{n}(\ldots)dS = \int_V \nabla(\ldots)dV \tag{1.276}$$

где символом (...) обозначен тензор любого ранга.

1.76. $\int_S (\nabla u \times \nabla f) \cdot d\boldsymbol{S}$.

1.81. По общему правилу (1.105) ковариантная дивергенция выразится через

$$\Gamma^{\mu}_{\mu\alpha} = \frac{1}{2} g^{\mu\lambda}\left(\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial q^{\alpha}} + \frac{\partial g_{\alpha\lambda}}{\partial q^{\mu}} - \frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial q^{\lambda}}\right) = \frac{1}{2} g^{\mu\lambda}\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial q^{\alpha}}$$

т. е.

$$A^{\mu}_{;\mu} = \frac{\partial A^{\mu}}{\partial q^{\mu}} + \frac{1}{2} g^{\mu\lambda}\frac{\partial g_{\mu\lambda}}{\partial q^{\alpha}} A^{\alpha} \tag{1}$$

Рассмотрим теперь определитель $g = |g_{\mu\nu}|$. Его дифференциал равен сумме дифференциалов всех его элементов, умноженных на соответствующие алгебраические дополнения: $dg = D^{\mu\nu}dg_{\mu\nu}$, где $D^{\mu\nu} = (-1)^{\mu+\nu}\Delta^{\mu\nu}$, $\Delta^{\mu\nu}-$
минор. С другой стороны, алгебраические дополнения выражаются через компоненты обратного тензора, т. е. $g^{\mu\nu} : D^{\mu\nu} = gg^{\mu\nu}$ (см. задачу 1.27). В итоге имеем

$$dg = gg^{\mu\nu}dg_{\mu\nu}, \quad g^{\mu\nu}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial q^{\lambda}} = \frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial q^{\lambda}}$$

Подставив последнюю величину в (1), находим выражение, приведенное в условии задачи.

1.82.

$$\Delta S = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial q^{\mu}}\left(\sqrt{g}g^{\mu\nu}\frac{\partial S}{\partial q^{\nu}}\right) \tag{1.277}$$

1.83. $T^{\mu\nu}{}_{;\mu} = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial q^{\mu}}\left(\sqrt{g}T^{\mu\nu}\right) + \Gamma^{\nu}_{\mu\lambda}T^{\mu\lambda}$.

1.84. $A^{\mu\nu};\nu = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial q^{\nu}}\left(\sqrt{g}A^{\mu\nu}\right)$.

1.86. $g_{\mu\nu;\lambda} = g^{\mu\nu};\lambda = 0$.

1.90 .

$$\begin{aligned}
(\Delta\boldsymbol{A})_r &= \Delta A_r - \frac{A_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial A_{\alpha}}{\partial\alpha} \\
(\Delta\boldsymbol{A})_{\alpha} &= \Delta A_{\alpha} - \frac{A_{\alpha}}{r^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial A_r}{\partial\alpha} \\
(\Delta\boldsymbol{A})_z &= \Delta A_z
\end{aligned} \tag{1.278}$$

1.91.

$$\begin{aligned}
(\Delta\boldsymbol{A})_r &= \Delta A_r - \frac{2}{r^2}A_r - \frac{2}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(A_{\vartheta}\sin\vartheta\right) - \frac{2}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial A_{\alpha}}{\partial\alpha} \\
(\Delta\boldsymbol{A})_{\vartheta} &= \Delta A_{\vartheta} - \frac{A_{\vartheta}}{r^2\sin^2\vartheta} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial A_r}{\partial\vartheta} - \frac{2\cos\vartheta}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial A_{\alpha}}{\partial\alpha} \\
(\Delta\boldsymbol{A})_{\alpha} &= \Delta A_{\alpha} - \frac{A_{\alpha}}{r^2\sin^2\vartheta} + \frac{2}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial A_r}{\partial\alpha} + \frac{2\cos\vartheta}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial A_{\vartheta}}{\partial\alpha}
\end{aligned} \tag{1.279}$$

1.92. а) $A + B\ln r$; б) $A + B\alpha$; в) $A + Bz$.

1.93. а) $A + B/r$

б) $A + B\ln\operatorname{tg}(\vartheta/2)$

в) $A + B\alpha$.

1.94.

$$x = \pm\left[\frac{(\xi+a^2)(\eta+a^2)(\zeta+a^2)}{(b^2-a^2)(c^2-a^2)}\right]^{1/2},$$

$$y = \pm\left[\frac{(\xi+b^2)(\eta+b^2)(\zeta+b^2)}{(c^2-b^2)(a^2-b^2)}\right]^{1/2},$$

$$z = \pm\left[\frac{(\xi+c^2)(\eta+c^2)(\zeta+c^2)}{(a^2-c^2)(b^2-c^2)}\right]^{1/2}$$

$$h_1 = \frac{\sqrt{(\xi-\eta)(\xi-\zeta)}}{2R_\xi}, \quad h_2 = \frac{\sqrt{(\eta-\zeta)(\eta-\xi)}}{2R_\eta}, \quad h_3 = \frac{\sqrt{(\zeta-\xi)(\zeta-\eta)}}{2R_\zeta},$$

$$\Delta = \frac{4}{(\xi-\eta)(\xi-\zeta)(\eta-\zeta)} \times \left[(\eta-\zeta)R_\xi\frac{\partial}{\partial\xi}\left(R_\xi\frac{\partial}{\partial\xi}\right) + \right.$$
$$\left. +(\zeta-\xi)R_\eta\frac{\partial}{\partial\eta}\left(R_\eta\frac{\partial}{\partial\eta}\right) + (\xi-\eta)R_\zeta\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(R_\zeta\frac{\partial}{\partial\zeta}\right)\right]$$

где $R_u = \sqrt{(u+a^2)(u+b^2)(u+c^2)}$. Из формул для x, y, z видно, что каждой тройке значений ξ, η, ζ соответствуют восемь троек x, y, z. Убедиться в ортогональности эллипсоидальной системы координат можно, найдя градиенты $\nabla\xi, \nabla\eta, \nabla\zeta$ и составив скалярные произведения $\nabla\xi \cdot \nabla\eta$ и т. д., которые оказываются равными нулю. Градиенты можно найти непосредственно из уравнений, определяющих эллипсоидальные координаты (см. условие задачи), беря градиент от обеих частей каждого из этих уравнений.

1.95.

$$z = \pm\left[\frac{(\xi+c^2)(\eta+c^2)}{c^2-a^2}\right]^{1/2}, \quad r = \left[\frac{(\xi+a^2)(\eta+a^2)}{a^2-c^2}\right]^{1/2}$$
$$h_1 = \frac{\sqrt{\xi-\eta}}{2R_\xi}, \quad h_2 = \frac{\sqrt{\xi-\eta}}{2R_\eta}, \quad h_3 = r$$

где

$$R_\xi = \sqrt{(\xi+a^2)(\xi+c^2)}, \quad R_\eta = \sqrt{(\eta+a^2)(-\eta-c^2)}$$
$$\Delta = \frac{4}{\xi-\eta}\left[R_\xi\frac{\partial}{\partial\xi}\left(R_\xi\frac{\partial}{\partial\xi}\right) + R_\eta\frac{\partial}{\partial\eta}\left(R_\eta\frac{\partial}{\partial\eta}\right)\right] + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}$$

1.96.

$$x = \pm\left[\frac{(\xi+a^2)(\zeta+a^2)}{a^2-b^2}\right]^{1/2}, \quad r = \left[\frac{(\xi+b^2)(\zeta+b^2)}{b^2-a^2}\right]^{1/2}$$
$$h_1 = \frac{\sqrt{\xi-\zeta}}{2R_\xi}, \quad h_2 = r, \quad h_3 = \frac{\sqrt{\xi-\zeta}}{2R_\zeta}$$

где

$$R_\xi = \sqrt{(\xi + a^2)(\xi + b^2)}, \quad R_\zeta = \sqrt{(\zeta + a^2)(-\zeta - b^2)}$$
$$\Delta = \frac{4}{\xi - \zeta}\left[R_\xi \frac{\partial}{\partial \xi}\left(R_\xi \frac{\partial}{\partial \xi}\right) + R_\zeta \frac{\partial}{\partial \zeta}\left(R_\zeta \frac{\partial}{\partial \zeta}\right)\right] + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2}$$

1.97. $h_\xi = h_\eta = \frac{a}{\operatorname{ch}\xi - \cos\eta}, \quad h_\alpha = \frac{a \sin\eta}{\operatorname{ch}\xi - \cos\eta}$;

$$\Delta = \frac{(\operatorname{ch}\xi - \cos\eta)^3}{a^2} \times \left[\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{1}{\operatorname{ch}\xi - \cos\eta}\frac{\partial}{\partial \xi}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{\sin\eta}\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\sin\eta}{\operatorname{ch}\xi - \cos\eta}\frac{\partial}{\partial \eta}\right) + \frac{1}{\sin^2\eta(\operatorname{ch}\xi - \cos\eta)}\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2}\right]$$

1.98. Поверхности $\rho = \text{const}$ - тороиды:

$$\left(\sqrt{x^2 + y^2} - a\operatorname{coth}\rho\right)^2 + z^2 = \left(\frac{a}{\operatorname{sh}\rho}\right)^2$$

поверхности $\xi = \text{const}$ - сферические сегменты:

$$(z - \operatorname{arctg}\xi)^2 + x^2 + y^2 = \left(\frac{a}{\sin\xi}\right)^2$$
$$h_\rho = h_\xi = \frac{a}{\operatorname{ch}\rho - \cos\xi}, \quad h_\alpha = \frac{a \operatorname{sh}\rho}{\operatorname{ch}\rho - \cos\xi}$$

1.99. $x^\nu Z_\nu(x) + C, \quad -x^{-\nu} Z_\nu(x) + C.$

1.100. $1, 1/2, 1/(2^n n!)$

1.107. 1. $xu'' + u' + x(a^2 - n^2/x^2)u = 0.$

2. Интеграл вычисляется с помощью уравнений для функций $u(x)$ и $v(x) = J_n(bx)$.

3. Первое равенство (1.177) следует из (1.176) непосредственно, второе получается путем предельного перехода.

1.111. $P_1 = x, \quad P_2 = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \quad P_3 = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x),$

$$P_4 = \frac{1}{8}\left(35x^4 - 30x^2 + 3\right), \quad P_5 = \frac{1}{8}\left(63x^5 - 70x^3 + 15x\right)$$

1.112. Интеграл, который следует вычислить, содержит произведение производных $\int\limits_{-1}^{1}\left[(x^2-1)^l\right]^{(l)}\left[(x^2-1)^{l'}\right]^{(l')}dx$. Пусть для определенности $l' \leqslant l$. Интегрируя по частям l раз, находим $(-1)^l \int\limits_{-1}^{1}(x^2-1)^l\left[(x^2-1)^{l'}\right]^{(l+l')}dx$. Второй сомножитель под интегралом отличен от нуля только при $l' = l$. В этом случае, переходя к интегрированию по углу ϑ, получаем

$$\int\limits_{-1}^{1}\left(x^2-1\right)^l\left[\left(x^2-1\right)^l\right]^{(2l)}dx =$$
$$= (-1)^l(2l)!2\int\limits_0^{\pi/2}(\sin\vartheta)^{2l+1}d\vartheta = (-1)^l(2l)!B(l+1,1/2)$$

Последний интеграл здесь выражен через бета-функцию (см. определение в [Абрамовиц и Стиган (1979)]) формула 6.2.1:

$$B(z,w) \equiv \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)} = 2\int\limits_0^{\pi/2} (\sin\vartheta)^{2z-1}(\cos\vartheta)^{2w-1}d\vartheta$$

Аккуратно сокращая факториалы и гамма-функции, получаем результат, приведенный в условии задачи.

1.114. $P_2 = (1+3\cos 2\vartheta)/4$.

1.115. $\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{d}{d\vartheta}\sin\vartheta\frac{dP_l^m}{d\vartheta} + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{\sin^2\vartheta}\right]P_l^m = 0$.

1.116. Применив формулу Лейбница, находим

$$\left(1-x^2\right)^{m/2}\left[(x+1)^l(x-1)^l\right]^{(l+m)} =$$
$$=(-1)^{m/2}\sum_{k=0}^{l+m}\frac{(l+m)!l!l!}{k!(l+m-k)!(k-m)!(l-k)!}(x+1)^{k-m/2}(x-1)^{l-k+m/2}$$

и

$$\left(1-x^2\right)^{-m/2}\left[(x+1)^l(x-1)^l\right]^{(l-m)} =$$
$$= (-1)^{-m/2}\sum_{s=0}^{l-m}\frac{(l-m)!l!l!}{s!(l-m-s)!(s+m)!(l-s)!}(x+1)^{s+m/2}(x-1)^{l-s-m/2}$$

В обеих суммах пределы суммирования фактически определяются наличием факториалов отрицательных целых чисел в знаменателях. Во второй сумме выполняем замену индекса суммирования $s \to k-m$. В результате множители, зависящие от k, в обеих суммах становятся одинаковыми. Сравнивая их между собой, находим формулу, приведенную в условии задачи.

1.117.

$$P_l^0 = P_l$$
$$P_1^1 = -2P_1^{-1} = \left(1-x^2\right)^{1/2} = \sin\vartheta$$
$$P_2^1 = -6P_2^{-1} = 3x\left(1-x^2\right)^{1/2} = 3\cos\vartheta\sin\vartheta$$
$$P_2^2 = 24P_2^{-2} = 3\left(1-x^2\right) = 3\sin^2\vartheta$$
$$P_3^1 = -12P_3^{-1} = \frac{3}{2}\left(5x^2-1\right)\left(1-x^2\right)^{1/2} = \frac{3}{2}\left(5\cos^2\vartheta-1\right)\sin\vartheta$$
$$P_3^2 = 120P_3^{-2} = 15x\left(1-x^2\right) = 15\cos\vartheta\sin^2\vartheta$$
$$P_3^3 = -720P_3^{-3} = 15\left(1-x^2\right)^{3/2} = 15\sin^3\vartheta$$

Заметим, что присоединенные полиномы Лежандра в общем случае содержат радикалы $(1-x^2)^{1/2}$ и полиномами, строго говоря, не являются.

1.118. При вычислении нормировочного интеграла используем формулу (1.198) и метод решения задачи 1.112:

$$\int\limits_{-1}^{1}\left[P_l^m(x)\right]^2 dx = (-1)^m\frac{(l+m)!}{(l-m)!}\int\limits_{-1}^{1}P_l^m(x)P_l^{-m}(x)dx =$$
$$= \frac{(2l)!(l+m)!}{2^{2l}l!l!(l-m)!}B(l+1,1/2)$$

Выразив бета-функцию через гамма-функции и произведя сокращения дробей, найдем нормировочный множитель (с точностью до фазового множителя, по модулю равного единице, который остается произвольным). В итоге
получаем нормированную сферическую функцию Лежандра:
$Y_{lm}(\vartheta,\varphi)=\sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}\frac{\left(1-\cos^2\vartheta\right)^{m/2}}{2^l l!}\left(\frac{d}{d\cos\vartheta}\right)^{l+m}\left(\cos^2\vartheta-1\right)^l e^{im\varphi}$.

1.119. $\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\sin\vartheta\frac{\partial Y_{lm}}{\partial\vartheta}+\frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 Y_{lm}}{\partial\varphi^2}+l(l+1)Y_{lm}=0$.

1.120. $-5/3,-2,0,\exp(\alpha)+\exp(-2\alpha)$.

1.121. $0, f(a)\delta(x-a), 82\delta(x-4)+2\delta(x+1)$.

1.123. $\delta(\boldsymbol{r})=\frac{1}{2\pi r_\perp}\delta(r_\perp)\,\delta(z), \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a})=\frac{1}{a_\perp}\delta(r_\perp-a_\perp)\,\delta(\alpha-\alpha_0)\,\delta(z-a_z)$. Чтобы осуществить предельный переход $a\to 0$, нужно не только устремить к нулю величины $a_\perp, a_z$, но и усреднить правую часть по азимутальному углу α_0, так как нулевой вектор не имеет направления.

1.124. $\delta(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi r^2}\delta(r), \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{a})=\frac{1}{a^2}\delta(r-a)\delta(\cos\vartheta-\cos\vartheta_0)\,\delta(\alpha-\alpha_0)$.

1.125. $f'(x)=g(x)+2\delta(x-1)$, где $g(x)=\begin{cases}3x^2, & \text{если } x<1,\\ 2x, & \text{если } x>1.\end{cases}$.

1.126. $f'(x)=\frac{df}{dx}+\sum\limits_{k=1}^{n}\Delta f_k\delta(x-a_k)$, где $\Delta f_k=f(a_k+0)-f(a_k-0)$, df/dx - обычная («классическая») производная на участках плавного изменения функции.

1.127. $\frac{(-1)^m m!}{(n-m)!}f^{(m-n)}(0)$ при $m\geqslant n$, 0 при $m<n$.

1.128. При $r\neq r', G$ - ограниченная дифференцируемая функция, и уравнение удовлетворяется, так как $\Delta G=0$. При $\boldsymbol{r}\to\boldsymbol{r}'$ функция G имеет особенность. Чтобы выяснить характер особенности ΔG при $r\to r'$, проинтегрируем (1.225) по объему малого шара радиуса $R\to 0$ с центром в точке $r=r'$. Применяя теорему Остроградского-Гаусса, получим

$$\int\limits_V \Delta G dV=\int\limits_V \operatorname{div}\operatorname{grad}\left(\frac{1}{r}\right)dV=\oint\limits_S\left(\nabla\frac{1}{r}\right)\cdot d\boldsymbol{S}=-\int\frac{1}{R^2}R^2 d\Omega=-4\pi$$

Такое же значение дает интеграл по объему от правой части уравнения, которое, таким образом, удовлетворяется.

1.129. $f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2}$.

1.130. $f(x)=\frac{4a}{\pi}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}$.

1.131. $f(x)=\frac{a}{2}+\frac{2a}{\pi}\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\cos((2k+1)\pi x/L)}{2k+1}$.

Ряд Фурье четной на интервале $[-L,+L]$ функции, $f(-x)=f(x)$, содержит только косинусы. Нечетная функция, $f(-x)=-f(x)$, разлагается по синусам. Функция, не имеющая определенной четности, содержит в своем разложении Фурье и синусы, и косинусы.

1.132. $i\lambda F(\lambda)$.

1.133. $\frac{1}{a}F\left(\frac{\lambda-b}{a}\right)$.

1.134. $\pi\exp(-|\lambda|)$

1.135. $\frac{\sqrt{\pi}}{\alpha}\exp\left(-\frac{\lambda^2}{4\alpha^2}\right)$.

1.136. $\frac{\pi^{3/2}}{\alpha^3}\exp\left(-\frac{k^2}{4\alpha^2}\right)$, где $\varkappa$ - радиус-вектор трехмерного пространства переменных Фурье (см. (1.252)).

1.137. Для вычисления интеграла Фурье (1.252) используем сферические координаты и выберем ось Oz вдоль вектора $\varkappa$. Выполняя сначала интегрирование по углам, а затем по r, находим

$$F(k) = \lim_{R\to\infty} \frac{4\pi}{k^2}[1 - \cos(kR)]$$

Формально функция, стоящая в правой части, не имеет предела. Но легко понять, что предел косинуса можно считать эффективно равным нулю, так как при выполнении обратного преобразования Фурье член с бесконечно осциллирующим косинусом даст нулевой вклад. В итоге имеем $F(k) = 4\pi/k^2$.

1.138. Записываем разложение в форме

$$\exp(ikr\cos\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} u_l(kr)P_l(\cos\theta)$$

и, пользуясь ортогональностью полиномов Лежандра (см. задачу 1.112), находим интегральное представление для искомых функций u_l:

$$u_l(kr) = \frac{2l+1}{2}\int_{-1}^{1} e^{ikrx}P_l(x)dx$$

Использование формулы Родригеса и интегрирование l раз по частям дает

$$u_l(kr) = \frac{(2l+1)(-ikr)^l}{2^{l+1}l!}\int_{-1}^{1} e^{ikrx}\left(x^2-1\right)^l dx$$

Далее разлагаем экспоненту в степенной ряд и интегрируем этот абсолютно сходящийся ряд почленно. Остаются только слагаемые с четными степенями x:

$$u_l(kr) = \frac{(2l+1)(-ikr)^l}{2^l l!}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(ikr)^{2m}}{(2m)!}\int_{0}^{1} x^{2m}\left(x^2-1\right)^l dx$$

Наконец, переход к новой переменной интегрирования $t = x^2, dx = dt/2\sqrt{t}$ позволяет выразить интеграл в последнем равенстве через бета-функцию:

$$\int_0^1 t^{k-1/2}(1-t)^l dt = B(k+1/2, l+1) = \frac{\Gamma(k+1/2)\Gamma(l+1)}{\Gamma(l+k+3/2)}$$

В итоге, собирая все сомножители, получаем следующий ряд:

$$\begin{aligned} u_l(kr) &= \\ &= i^l(2l+1)\frac{(kr)^l}{1\cdot 3\ldots(2l+1)}\left\{1 - \frac{k^2r^2/2}{1!(2l+3)} + \frac{\left(k^2r^2/2\right)^2}{2!(2l+3)(2l+5)} - \ldots\right\} = \\ &= i^l(2l+1)j_l(kr) \end{aligned}$$

где $j_l(kr)$ - сферическая функция Бесселя (см. [Абрамовиц и Стиган (1979)], формула 10.1.2).

1.139. $\exp(i\boldsymbol{\varkappa}\cdot\boldsymbol{r}) = 4\pi\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} i^l j_l(kr)Y_{lm}^*(\theta\phi)Y_{lm}(\vartheta\varphi)$.

C.2 3 Special Theory of Relativity and Relativistic Kinematics

C.2.1 3.1. The Principle of Relativity and the Lorentz Transformation

Свойства пространства-времени и интервал. Специальная теория относительности (СТО) - это наука об основных, наиболее общих свойствах пространства, времени и движения. Эти свойства были установлены в процессе исследования механических и особенно электромагнитных явлений и сформулированы в начале 20 -го века в трудах А. Эйнштейна, Г. Лоренца, А. Пуанкаре, М. Планка, Г. Минковского и других выдающихся физиков и математиков. Основные постулаты и выводы СТО получили подтверждение при дальнейшем развитии экспериментальной и теоретической физики, а также современной техники (квантовой механики и квантовой теории поля, физики элементарных частиц, ускорительной техники, атомной энергетики и др.). В настоящее время они составляют фундамент современных физических представлений, на котором развиваются новейшие теории. Но сама СТО возникла не на пустом месте. Ее основой явились представления о свойствах пространства, времени и движения, выработанные классической механикой, но углубленные, критически проанализированные и в некоторых важных пунктах измененные и дополненные Эйнштейном в связи с новыми опытными данными, полученными при изучении электромагнитных явлений, особенно в движущихся средах. Перечислим основные свойства пространства и времени, известные из классической механики.

1. Существуют инерциальные системы отсчета (ИСО), относительно которых свободная частица («материальная точка» классической механики) движется равномерно и прямолинейно (покой - частный случай такого движения).

ЗАмечаниЕ. В дальнейшем будет считаться, что в каждой ИСО выбрана система трех прямоугольных декартовых координатных осей. Координаты произвольной точки x, y, z (их совокупность образует радиус-вектор $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$) могут быть измерены с помощью масштабной линейки и представляют собой расстояния от выбранной точки до координатных плоскостей по кратчайшим (перпендикулярным)
направлениям, т. е. геометрия трехмерного пространства евклидова. Кроме того, каждая ИСО снабжена часами для отсчета промежутков времени Δt. В качестве часов может использоваться любой периодический физический процесс.

2. В любой ИСО свободное от вещества и физических полей пространство однородно и изотропно, а время однородно.

ЗАМЕЧАНИЕ. Под однородностью пространства понимается равноправие всех его частей: любая механическая система, помещенная в произвольную область свободного пространства, будет вести себя точно так же, как и в любом другом месте. По протеканию механических явлений нельзя отличить одну область однородного пространства от другой. Изотропия пространства означает равноправие всех направлений в нем: свойства и поведение механических объектов не зависят от их ориентации в изотропном пространстве. Наконец, однородность времени означает, что все его моменты равноправны: движение любой механической системы будет происходить одинаково, независимо от того, в какой момент времени она была «запущена», т. е. когда были зафиксированы начальные условия движения. Разумеется, начальные условия при разных «запусках» должно быть одними и теми же.
3. Любое механическое явление при одинаковых начальных условиях протекает одинаковым образом во всех инерциальных системах отсчета (принци относительности

классической механики, или равноправие ИСО).

4. Взаимодействия между телами и сигналы, передающие информацию, могут распространяться с бесконечной скоростью.

ЗАМЕчаниЕ. Возможность бесконечных скоростей распространения взаимодействий содержится в концепции сил, зависящих от координат взаимодействующих тел: $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}_1(t) - \boldsymbol{r}_2(t))$. В уравнения движения классической механики входят радиусы-векторы тел $\boldsymbol{r}_1(t), \boldsymbol{r}_2(t)$ в один и тот же момент t. Изменение положения одного тела в тот же момент времени приводит к изменению силы, действующей на второе тело, независимо от расстояния между телами. Взаимодействие распространяется мгновенно.

5. Координаты и время в двух инерциальных системах отсчета, S и S', движущихся с относительной скоростью V вдоль оси Ox (рис. 3.1), связаны соотношениями

$$x' = x - Vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t \tag{3.1}$$

которые называются преобразованиями Галилея.

Обратим внимание на то, что время не преобразуется - во всех системах отсчета оно одинаково, имеет абсолютный характер. Это свойство времени в классической механике тесно связано с возможностью бесконечной скорости распространения сигналов и взаимодействий. Пусть в системе S имеется устройство, которое испускает изотропно во все стороны сигнал, распространяющийся с бесконечной скоростью. Соответствующие приборы, находящиеся в любых точках пространства и в любых (не обязательно

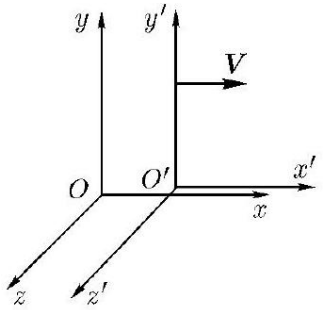


Рис. 3.1

инерциальных) системах отсчета, движущихся относительно S с конечными скоростями, зафиксируют этот сигнал в тот же момент, в который он был испущен. Тем самым такие сигналы могут служить «метками времени», с помощью которых во всех системах будет отсчитываться одно и то же, т.е. абсолютное, время $t' = t'' = \ldots = t$.

Аналогичным образом обстоит дело с определением одновременности: если два сигнала испущены одновременно в двух разных точках в системе S, то они будут одновременно зафиксированы соответствующим прибором в системе S'. События, одновременные в одной системе, одновременны и в любой другой системе. В классической физике одновременность абсолютна.

При произвольном направлении относительной скорости вместо (3.1) будем иметь $\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{V}t, t' = t$. Дифференцируя первое равенство по абсолютному времени, находим закон сложения скоростей классической механики:

$$v' = v - V \tag{3.2}$$

Скорости складываются по закону сложения векторов в трехмерном пространстве (правило параллелограмма) и ничем не ограничены по абсолютной величине.

Перейдем теперь к формулировке основных положений СТО и их сравнению с представлениями классической механики.

1. Постулат о существовании инерциальных систем и их определение сохраняют полную силу и в СТО.

2. Пределы применимости утверждения о свойствах симметрии пространства и времени (однородность и изотропия свободного пространства, однородность времени) расширяются и распространяются не только на механические, но на все физические явления. Это означает, например, что следствием однородности пространства будет одинаковое протекание любого физического явления (колебания маятника, излучение электромагнитных волн антенной, распад злементарных частиц и т.д.) в любом месте свободного пространства. Аналогичным образом обобщаются понятия изотропии пространства и однородности времени. Хотя физики занимаются только физическими явлениями, вряд ли кто-нибудь из них сомневается в том, что обсуждаемые понятия можно обобщить на любые, а не только физические, явления природы.

3. Принцип относительности классической механики обобщается на все без исключения физические явления и становится одним из самых общих законов природы. В этом обобщенном смысле его можно сформулировать следующим образом: любое явление природы протекает одинаково
во всех инерциальных системах отсчета, если начальное состояние системы одно и то же.

4. Взаимодействия между телами и сигналы, передающие информацию, не могут распространяться со сколь угодно большой скоростью. Существует максимальная (предельная) скорость распространения сигналов и взаимодействий, которая совпадает со скоростью света в вакууме

$$c = 299792458 \pm 1,2 \text{ m/c} \approx 3 \times 10^{10} \text{ cm/c} \tag{3.3}$$

Другая, эквивалентная формулировка этого положения: скорость света в вакууме одинакова по величине во всех инерциальных системах отсчета, она не зависит от движения источника или приемника света [1] (принип постоянства скорости света).

Совокупность положений (3) и (4) образует принцип относительности Эйнштейна, сформулированный им в основополагающей работе по СТО [Эйнштейн (1905)]. Нетрудно видеть, что эти положения не согласуются с законами классической механики. Согласно последним, скорости складываются по правилу параллелограмма. Если скорость света в системе S равна c, то в другой ИСО, S', движущейся относительно исходной со скоростью V, она станет равной $c' = c - V$. Скорость c' по модулю может быть как больше, так и меньше в зависимости от угла между c и $\boldsymbol{V}$, что и доказывает несовместимость принципа относительности Эйнштейна с классическими представлениями.

Каждое событие, рассматриваемое в некоторой ИСО, будем характеризовать его пространственными координатами x, y, z и моментом времени t, в который оно произошло. Совокупность четырех величин (ct, x, y, z) представляет собой координаты события в четырехмерном пространстве-времени Минковского [2]. Временная координата ct выбрана так, чтобы ее размерность совпадала с размерностью пространственных координат. Величина

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \tag{3.4}$$

называется квадратом интервала между двумя близкими событиями (или близкими точками в четырехмерном пространстве-времени). В другой ИСО интервал ds'^2

выразится аналогичным образом через дифференциалы штрихованных координат пространства-времени.

Пример 3.1. Пользуясь приведенными выше постулатами (1)-(4), доказать равенство

$$ds^2 = ds'^2 = \text{inv} \tag{3.5}$$

(инвариантность интервала) при переходе из одной ИСО S в другую систему S'.

Решение. При переходе из одной ИСО в другую дифференциалы четырехмерных координат должны быть связаны линейными соотношениями. Коэффициенты в формулах связи могут зависеть только от относительной скорости двух систем, но не от координат и времени - в противном случае свойство однородности пространства и времени будет нарушено. Пусть начала координат систем S и S' совпадали при $t = t' = 0$ и в этот момент в общем начале координат произошла изотропная вспышка света. Через время dt сферический фронт (изотропия трехмерного пространства!) будет описываться в системе S уравнением сферической поверхности

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = 0$$

а в системе S' - таким же уравнением в штрихованных координатах (равноправие систем!). Абсолютная величина скорости света в обеих системах одна и та же:

$$ds'^2 = c^2dt'^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2 = 0$$

Из двух последних равенств следует, что обращение в нуль ds^2 приводит к равенству $ds'^2 = 0$ и наоборот. Поскольку ds^2 и ds'^2 имеют одинаковый порядок малости, это возможно только при линейной связи между ними, $ds^2 = kds'^2$, что не противоречит, разумеется, линейной связи между дифференциалами четырехмерных координат двух систем. Поскольку обе величины являются скалярами в трехмерном пространстве (см. раздел 1.1), коэффициент k может зависеть только от квадрата трехмерного вектора V^2 - относительной скорости двух ИСО, но не от его направления. Из равноправия систем следует также $ds'^2 = kds^2$, или $ds^2 = k^2ds^2$, т. е. $k = \pm 1$. Но значение $k = -1$ не может обеспечить равноправия трех ИСО: при $ds^2 = -ds'^2$ и $ds'^2 = -ds''^2$ будем иметь $ds^2 = -ds'^2 = ds''^2$, что выделяет систему S'. Поэтому единственная возможность состоит в выборе $k = +1$, что приводит к инвариантности малого интервала при преобразовании его в любую инерциальню систему отсчета. Интегрирование позволяет распространить это свойство на конечные интервалы между произвольными событиями 1 и 2 : $s_{12} = s'_{12}$, т. е.

$$s_{12} = \left[c^2\left(t_1 - t_2\right)^2 - \left(x_1 - x_2\right)^2 - \left(y_1 - y_2\right)^2 - \left(z_1 - z_2\right)^2\right]^{1/2} = \text{ inv} \tag{3.6}$$

Пример 3.2. Проанализировать мысленный эксперимент с эйнитейновским «поездом»: пусть наблюдатель А находится посредине длинного «поезда», движущегося с релятивистской [3] скоростью, а наблюдатель B стоит на земле близ полотна железной дороги. Приборы, находяциеся в голове и в хвосте поезда на одинаковых расстояниях от A, испускают две короткие световые вспыики. Эти вспьиики достигают обоих наблюдателей одновременно - в тот момент, когда они поравняются друг с другом. Как ответят наблюдатели на вопрос о том, какал вспьика произошла раньше?

[41] Впервые постоянство скорости света было продемонстрировано в опыте Майкельсона Морли в 1887 г.

[2] Г. Минковский - немешкий физик и математик. Выдвинул идею об объединении трех пространственных измерений и времени в одно четырехмерное пространство-время. Один из основоположников специальной теории относительности.

Решение. Ответ наблюдателя A: сигналы были испущены из точек, удаленных от меня на равные расстояния, и пришли одновременно. Следовательно, они были испущены одновременно.

Ответ наблюдателя B: сигналы пришли ко мне одновременно, но в моменты испускания (предшествующие приходу) голова поезда была ко мне ближе, чем хвост. Следовательно, сигнал от хвоста прошел больший путь и был испущен раньше, чем сигнал от головы.

Преобразования Лорена. Последний пример показывает, что с учетом конечной скорости распространения сигналов, время и понятие одновременности теряют свой абсолютный характер: промежуток времени Δt между двумя событиями для наблюдателя на земле отличается от промежутка $\Delta t'$ между теми же событиями для наблюдателя в поезде. Время течет по разному в разных инерциальных системах отсчета, что не согласуется с преобразованиями Галилея (3.1). Их обобщение, учитывающее наличие предельной скорости c, было найдено [4] Г. Лоренцем в 1904 г.:

$$x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad y = y', \quad z = z', \quad t = \frac{t' + Vx'/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \tag{3.7}$$

Это преобразование (которое иногда называют английским словом буст) отвечает случаю, когда соответствующие оси координатных систем S и S' параллельны между собой, относительная скорость V направлена вдоль оси Ox (рис. 3.1) и начала координатных систем совпадают при $t = t' = 0$. Более общие преобразования такого типа будут даны в разделе 4.1.

В этой и последующих главах мы будем часто использовать обозначения

$$\beta = \frac{V}{c}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \tag{3.8}$$

Преобразования, обратные (3.7), получаются изменением знака относительной скорости и в обозначениях (3.8) имеют вид

$$x' = \gamma(x - \beta ct), \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \gamma(t - \beta x/c) \tag{3.9}$$

Преобразования Лоренца удовлетворяют принципу соответствия при $V \ll c, \gamma \approx 1$ они переходят в преобразования Галилея (3.1).

Пример 3.3. Пусть пространственно-временные координатнать x, ct системыл отсчета S откладываются на взаимно перпендикулярных декартовых осях. Построить на этом же чертеже координатные оси x', ct'. Указать положение осей x, ct, если на прямоугольных осях отложеHbl x', ct'.

Решение. Временной осью системы S' является прямая $x' = 0$. В системе осей ct, x согласно (3.9) эта прямая задается уравнением $ct = x/\beta$ и составляет угол $\alpha = \mathrm{arctg}(V/c)$ с осью t (рис. 3.2). Ось x' в S' задается уравнением $ct' = 0$, которое в S принимает вид $ct = \beta x$ и представляет собой прямую, составляющую тот же угол α с осью x. Новые координатные оси стали косоугольными! (аффинное преобразование, меняющее угол между осями - см. раздел 1.1). Если откладывать ct', x' на прямоугольных осях, то косоугольными станут оси ct, x, отклонившись на угол α в другие стороны (рис. 3.3).

[43] т. е. со скоростью, сравнимой по величине с предельной скоростью c.

[4] Вывод преобразований Лоренца см. в решении задачи 3.1 и в разделе 4.1.

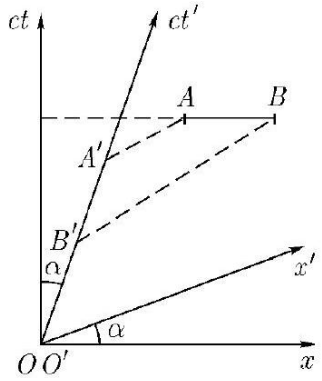


Рис. 3.2

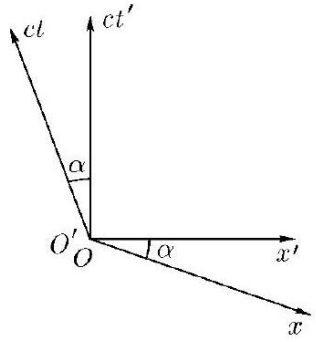


Рис. 3.3

С помощью рисунка (3.2) нетрудно проиллюстрировать и относительность одновременности. События A и B проецируются на временную ось ct в одну точку AB и, следовательно, они одновременны в системе S. Но их проекции на временную ось ct' системы S' различны, следовательно, в системе S' эти события неодновременны, причем событие B происходит
раньше. Однако, если мы попытаемся определить время между событиями $\Delta t' = A'B'/c$ из рисунка 3.2 с помощью обычных тригонометрических соотношений, мы потерпим неудачу и не получим правильного результата, который следует из преобразований Лоренца (3.9):

$$\Delta t' = \gamma\beta c^{-1}\left(x_B - x_A\right) \tag{3.10}$$

Для его получения нужно учесть не только поворот осей, но и изменение масштаба при переходе в другую систему.

Пример 3.4. Время, отсчитываемое по часам, неподвижным относительно некоторого объекта, называется собственным временем этого объекта. Связать мальий промежуток собственного времени $d\tau$ с координатным временем dt в системе, относительно которой объект движется. Показать, что собственное время является инвариантом преобразования Лорениа.

Решение. Пусть объект покоится в системе S'. В этой системе $dt' = d\tau$, $dx' = dy' = dz' = 0$. В системе S величины dx, dy, dz - расстояния, проходимые объектом за время dt. Из инвариантности интервала (3.5) находим

$$ds^2 = c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = c^2\left(1 - v^2/c^2\right)dt^2$$

откуда

$$d\tau = \frac{ds}{c} = \sqrt{1 - v^2/c^2}dt = \text{ inv} \tag{3.11}$$

Здесь через $v(t)$ обозначена скорость инерциальной системы, мгновенно сопутствующей рассматриваемому объекту и, следовательно, совпадающей со скоростью самого объекта. В таком виде формула для интервала собственного времени годится и для неравномерно движущихся объектов.

Пример 3.5. Твердый стержень имеет в своей собственной системе длину l_0. Какую длину стержня измерит наблюдатель, относительно которого стержень движется со скоростью v? Каков объем некоторого тела, измеренный наблюдателем, если в системе покоя этого тела объем имеет величину $\mathscr{V}_0$?

Решение. Длина зависит от взаимной ориентации стержня и вектора относительной скорости v. Если стержень и скорость ориентированы вдоль оси x, то в системе покоя стержня расстояние между его концами $x'_B - x'_A = l_0$. Наблюдатель в системе S для измерения длины стержня должен сделать зарубки на оси x против концов стержня одновременно по часам в своей системе отсчета: $x_B - x_A = l, t_B - t_A = 0$. С помощью преобразований Лоренца (3.9) получим лоренцевское сокращение движушегося масштаба:

$$l = l_0\sqrt{1 - v^2/c^2} \tag{3.12}$$

Если стержень ориентирован поперек скорости, то $l = l_0$, так как согласно (3.9) поперечные масштабы не изменяются. Объем $\mathscr{V}$ движущегося тела уменьшается только за счет сокращения продольного размера:

$$\mathscr{V} = \mathscr{V}_0\sqrt{1 - v^2/c^2} \tag{3.13}$$

Пример 3.6. Как преобразуется четырехмерный объем $\Delta\Omega = c\Delta t\mathscr{V}$ при переходе в другую инерциальную систему?

Решение. С помощью (3.13) и (3.11) находим

$$\Delta\Omega = c\Delta t\mathscr{V} = c\Delta\tau\mathscr{V}_0 = \text{inv} \tag{3.14}$$

Четырехмерный объем является инвариантом преобразования Лоренца.

Пример 3.7. Скорость частицы в системе S' имеет значение $\boldsymbol{v}' = d\boldsymbol{r}'/dt'$. Выразить ее скорость $\boldsymbol{v} = d\boldsymbol{r}/dt$ в системе S через $\boldsymbol{v}'$ и относительную скорость систем V. Может ли скорость v по абсолютной величине превысить скорость света c?

Решение. Записываем формулы (3.7) для дифференциалов,

$$dx = \frac{dx' + Vdt'}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = \frac{dt'\,(v'_x + V)}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad dy = dy', \quad dz = dz'$$
$$dt = \frac{dt' + Vdx'/c^2}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} = \frac{dt'\,(1 + v'_xV/c^2)}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}$$

и делим три первые равенства почленно на четвертое. Получаем правило сложения релятивистских скоростей:

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + Vv'_x/c^2}, \quad v_y = \frac{v'_y\sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + Vv'_x/c^2}, \quad v_z = \frac{v'_z\sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 + Vv'_x/c^2} \tag{3.15}$$

При $V \ll c, |v'_x| \ll c$ эти формулы переходят в нерелятивистский закон сложения скоростей (3.2)

$$v_x = v'_x + V, \quad v_y = v'_y, \quad v_z = v'_z$$

а при $v' \to c$ обеспечивают предельный характер скорости света. Записывая для последнего случая $v'_x = c\cos\vartheta, v'^2_y + v'^2_z = c^2\sin^2\vartheta$ и вычисляя из (3.15) v^2, находим $v^2 = c^2$,

т.е. добавление к скорости $\boldsymbol{v}'$ скорости относительного движения $\boldsymbol{V}$ по релятивистскому закону не изменяет абсолютной величины $v' = c$.

Псевдоевклидова геометрия. Познакомимся теперь более подробно с геометрией четырехмерного пространства-времени Минковского. Отдельные точки в четырехмерном пространстве-времени указывают пространственные координаты и время некоторого «события». Последовательностькинематических состояний любого тела (т. е. его координаты в разные моменты времени) изображается мировой линией.

Мировыми линиями (в отличие от траекторий классической механики) обладают не только движущиеся, но и покоящиеся в данной инерциальной системе тела. Так, мировой линией тела, покоящегося в (пространственной) точке x_0 оси x, будет прямая AB, параллельная оси ct и проходящая через x_0 (рис. 3.4); мировая линия тела, движущегося с постоянной скоростью $v = \text{const}$ (и проходящего через начало координат при $t = 0$) - прямая $CD(\text{tg}\,\alpha = v/c)$; мировая линия тела, движущегося с переменной скоростью $v(t)$ - кривая MN; мировая линия светового луча, испущенного в момент $t = 0$ из начала координат в направлении оси x - биссектриса координатного угла OF.

Мы уже нашли выражения (3.4), (3.6) для интервала - величины, выполняющей роль инвариантного расстояния между точками четырехмерного пространства. Из этих выражений следует, что геометрия про-

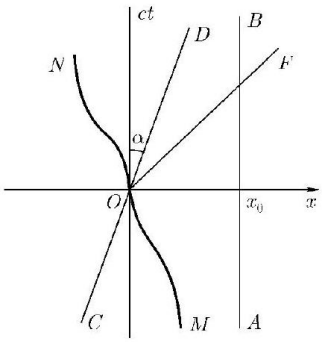


Рис. 3.4

странства Минковского неевклидова, в нем несправедлива, в частности, теорема Пифагора. Такая геометрия называется псевдоевклидовой. В отличие от геометрии Евклида трехмерного пространства обращение в нуль интервала, $s_{12} = 0$, не означает совпадения точек 1 и 2 . В зависимости от соотношения между $c^2\,(t_1 - t_2)^2$ и $(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2)^2$ интервалы могут быть действительными и мнимыми. Интервалы, для которых $s_{12}^2 > 0$, называются времениподобными, а те, для которых $s_{12}^2 < 0$ - пространственноподобными, причем эти свойства имеют место во всех ИСО в силу инвариантности интервала. Интервалы, равные нулю, называются нулевыми (светоподобными).

Характер интервала тесно связан с причинностью - он определяет возможность причинной связи событий, происходящих в пространственно-временных точках 1 и 2 . Если $s_{12}^2 > 0$, то событие 2 может быть причинно связано с событием 1 (и наоборот): из точки 1 можно послать сигнал

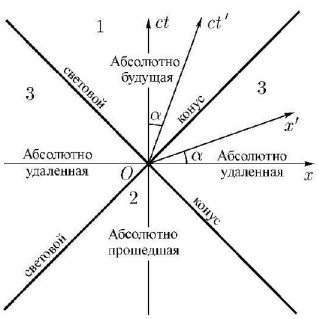


Рис. 3.5 со скоростью $v = r_{12}/(t_2 - t_1) < c$, который вызовет событие 2. Это возможно и в случае нулевого интервала, но только сигнал должен распространяться с предельной скоростью c. События, разделенные пространственноподобным интервалом, не могут быть причинно обусловлены, так как сигналы не могут распространяться со скоростью $v = r_{12}/(t_2 - t_1) > c$.

Пример 3.8. Пусть координаты x, ст отложены на прямоугольных декартовых осях в некоторой плоскости. Указать на этой плоскости области $1, 2, 3$, обладаюшие следуюшими свойствами.

Область 1 - абсолютно будущая; все событния, изображаемые точками этой области, в любой ИСО происходят после события, которому соответствует начало координат.

Область 2 - абсолютно прошедиая; события этой области в люой ИСО предшествуют событию начала координат.

Область 3 - абсолютно удаленная; существуют ИСО, в которых события этой области происходят ранъие, позже или одновременно с событием $(0, 0)$, но не существует таких ИСО, в которых события этой области и $(0, 0)$ происходили бы в одной точке трехмерного пространства (для областей 1 и 2 такой вариант возможен).

Решение. Искомые области изображены на рис. 3.5. Они разделяются биссектрисами координатных углов. В области $1t > 0$ и для всех возможных ИСО $t' > 0$, так как оси ct' этих систем могут быть ориентированы только между двумя линиями, которым соответствуют нулевые интервалы (т. е. между линиями пересечения плоскости со световым конусом). Проведя ось ct' через данную точку и начало координат, найдем по формуле $V = c\,\mathrm{tg}\,\alpha$ (см. пример 3.3) скорость ИСО, в которой два рассматриваемых события происходят в одной точке трехмерного пространства. Аналогичным свойством обладает область 2 . В области 3 приведенная выше формула определяет ИСО, в которой данное событие происходит одновременно с событием в начале координат.

В псевдоевклидовом пространстве следует вводить два сорта координат - контравариантные и ковариантные, и два типа тензорных значков, как уже делалось в разделе 1.1 при рассмотрении аффинных преобразований в трехмерном пространстве. Квадрат интервала (3.4) между близкими точками можно записать в тензорных обозначениях:

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k \tag{3.16}$$

где

$$dx^0 = cdt, \quad dx^1 = dx, \quad dx^2 = dy, \quad dx^3 = dz \tag{3.17}$$

дифференциалы контравариантных четырехмерных координат,

$$g_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{3.18}$$

- метрический тензор. Суммирование здесь и в дальнейшем нужно производить по четырем значениям $i, k = 0, 1, 2, 3$ совпадающих латинских индексов.

Контравариантный метрический тензор, как и в трехмерном пространстве (см. формулу 1.35 в), должен определяться из соотношений

$$g_{ik} g^{kl} = g_i^l = \delta_i^l \tag{3.19}$$

где δ_i^l - четырехмерный символ Кронекера. Легко видеть из (3.18), что контравариантные компоненты g^{ik} совпадают с соответствующими ковариантными, т. е. $g^{ik} = g_{ik}$.

Всякие четыре величины A^0, A^1, A^2, A^3, которые определены во всех ИСО и преобразуются при переходе из одной системы в другую как координаты и время, т. е. по правилу

$$A^0 = \gamma\left(A'^0 + \beta A'^1\right), \quad A^1 = \gamma\left(A'^1 + \beta A'^0\right), \quad A^2 = A'^2, \quad A^3 = A'^3 \tag{3.20}$$

образуют контравариантные компоненты четырехмерного вектора (4-вектора) $A^i, i = 0, 1, 2, 3$. Трехмерный вектор $\boldsymbol{A} = (A^1, A^2, A^3)$ называют пространственной, а величину A^0 - временной составляющими 4 -вектора A^i. Ковариантные составляющие этого вектора A_i определяются по правилу опускания индекса (1.35):

$$A_i = g_{ik}A^k = \left(A^0, -\boldsymbol{A}\right) \tag{3.21}$$

Скалярное произведение двух 4-векторов и квадрат 4-вектора представляют собой инварианты преобразований Лоренца. Они определяются как естественное обобщение формул (1.267):

$$A_iB^i = A^iB_i = g_{ik}A^iB^k = \text{ inv }, \quad A_iA^i = g_{ik}A^iA^k = \text{ inv} \tag{3.22}$$

Произвольный 4-вектор, как и интервал, может быть нулевым, или изотропным ($A_iA^i = 0$), времениподобным ($A_iA^i > 0$) и пространственноподобным ($A_iA^i < 0$). Примерами четырехмерных векторов, кроме 4 -радиус-вектора в пространстве Минковского, могут служить 4 -скорость u^i частицы и ее 4 -ускорение w^i:

$$u^i = \frac{dx^i}{d\tau} = \left(\frac{c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \frac{\boldsymbol{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right), \quad w^i = \frac{du^i}{d\tau} = \frac{d^2x^i}{d\tau^2} \tag{3.23}$$

где $\boldsymbol{v} = d\boldsymbol{r}/dt$ - трехмерная скорость частицы, $d\tau$ - дифференциал собственного времени. Очевидно, что u^i является 4 -вектором, так как $dx^i/d\tau$ представляет собой отношение 4-вектора dx^i к скаляру (инварианту) $d\tau$. По аналогичной причине w^i - также 4 -вектор.

Фаза плоской монохроматической волны, рассматривавшаяся в разделе 2.3, $\varphi = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} - \omega t$, представляет собой релятивистский инвариант (скаляр). Это следует из того, что изменение фазы $\Delta\varphi/2\pi$ определяет число нулевых значений поля между двумя пространственно-временными точками, которое не может зависеть от выбранной системы отсчета. Но поскольку $(ct, \boldsymbol{r})$ образуют четырехмерный радиус-вектор, то частота ω и волновой вектор k плоской волны также образуют волновой 4 -вектор

$$k^i = \left(\frac{\omega}{c}, \boldsymbol{k}\right), \quad k_i = \left(\frac{\omega}{c}, -\boldsymbol{k}\right) \tag{3.24}$$

а фазу можно записать как скалярное произведение двух 4-векторов:

$$\varphi = -k_ix^i \tag{3.25}$$

Задачи

3.1 *. Вывести преобразования Лоренца (3.7) на основе постулатов СТО (1)-(4) и доказанной выше (см. формулу (3.6)) инвариантности интервала.

3.2. Пусть система S' движется относительно системы S со скоростью V вдоль оси x. Часы, покоящиеся в S' в точке (x'_0, y'_0, z'_0), в момент t'_0

проходят мимо точки (x_0, y_0, z_0) в системе S, где находятся часы, показывающие в этот момент время t_0. Написать формулы преобразования Лоренца для этого случая.

3.3. Система S' движется относительно системы S со скоростью V. Доказать, что при сравнении хода часов в системах S и S' всегда будут отставать те часы в одной из этих систем отсчета, показания которых последовательно сравниваются с показаниями двух часов в другой системе отсчета. Выразить один промежуток времени через другой. (Показания движущихся часов сравниваются в момент, когда они проходят друг мимо друга.)

3.4. Длину стержня, движущегося вдоль своей оси в некоторой системе отсчета, можно находить таким образом: измерять промежуток времени, в течение которого стержень проходит мимо фиксированной точки этой системы, и умножать его на скорость стержня. Показать, что при таком методе измерения получается обычное лоренцево сокращение.

3.5. Система S' движется относительно системы S со скоростью V. В момент, когда начала координат совпадали, находившиеся там часы обеих систем показывали одно и то же время $t = t' = 0$. Какие координаты в каждой из этих систем в дальнейшем будет иметь мировая точка, обладающая тем свойством, что находящиеся в ней часы систем S и S' показывают одно и то же время $t = t'$? Определить закон движения этой точки.

3.6. Пусть для измерения времени используется периодический процесс отражения светового «зайчика» попеременно от двух зеркал, укрепленных на концах стержня длиной l. Один период - это время движения «зайчика» от одного зеркала до другого и обратно. Световые часы неподвижны в системе S' и ориентированы параллельно направлению движения. Пользуясь постулатом о постоянстве скорости света, показать, что интервал собственного времени $d\tau$ выражается через промежуток времени dt в системе S формулой (3.11).

3.7. Решить предыдущую задачу для случая, когда световые часы ориентированы перпендикулярно направлению относительной скорости.

3.8. «Поезд» $A'B'$, длина которого $l_0 = 8,64 \cdot 10^8$ км в системе, где он покоится, идет со скоростью $V = 240000$ км/сек мимо «платформы», имеющей такую же длину в своей системе покоя. В голове B' и хвосте A' «поезда» имеются одинаковые часы, синхронизированные между собой. Такие же часы установлены в начале A и в конце B «платформы». В тот момент, когда голова «поезда» поравнялась с началом «платформы», совпадающие часы показывали 12 час 00 мин. Ответить на следующие вопросы: а) можно ли утверждать, что в этот момент в какой-либо системе отсчета все часы также показывают 12 час 00 мин; б) сколько показывают каждые из
часов в момент, когда хвост «поезда» поравнялся с началом «платформы»; в) сколько показывают часы в момент, когда голова «поезда» поравнялась с концом «платформы»?

3.9. Какой промежуток времени Δt занял бы по земным часам полет ракеты до звездной системы Проксима-Центавра и обратно (расстояние до нее 4 световых года [5]), если бы он осуществлялся с постоянной скоростью $v = \sqrt{0,9999}c$? Из расчета какой длительности путешествия следовало бы запасаться продовольствием и снаряжением? Каков запас кинетической энергии в такой ракете, если ее масса 10 т?

3.10. Два маспттаба, каждый из которых имеет длину покоя l_0, равномерно движутся навстречу друг другу параллельно общей оси x. Наблюдатель, связанный с одним из них, заметил, что между совпадением левых и правых концов масштабов прошло время Δt. Какова относительная скорость v масштабов? В каком порядке совпадают их концы для наблюдателей, связанных с каждым из масштабов, а также для наблюдателя, относительно которого оба масштаба движутся с одинаковой скоростью в противоположные стороны?

3.11. Вывести формулы лоренцева преобразования от системы S' к системе S для

радиуса-вектора r и времени t, не предполагая, что скорость V системы S' относительно S параллельна оси x. Результат представить в векторной форме.

УКАзАНиЕ. Разложить $\boldsymbol{r}$ на продольную и поперечную относительно $\boldsymbol{V}$ компоненты и воспользоваться преобразованиями Лоренца (3.7).

3.12. Записать формулы преобразования Лоренца для произвольного 4-вектора $A_i = (A_0, \boldsymbol{A})$, не предполагая, что скорость $\boldsymbol{V}$ системы S' относительно S параллельна оси x.

3.13. Вывести формулы сложения скоростей для случая, когда скорость V системы S' относительно S имеет произвольное направление. Формулы представить в векторном виде.

3.14. Даны три системы отсчета: S, S', S''. S'' движется относительно S' со скоростью V, параллельно оси x', S' - относительно S со скоростью V, параллельной оси x. Соответствующие оси всех трех систем параллельны. Записать преобразования Лоренца от S'' к S и получить из них формулу сложения параллельных скоростей.

3.15. Доказать формулу

$$\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{\sqrt{1-v'^2/c^2}\cdot\sqrt{1-V^2/c^2}}{1+\boldsymbol{v}'\cdot\boldsymbol{V}/c^2}$$

где v и v' - скорости частицы в системах S и S', V - скорость S' относительно S.

3.16. Доказать соотношение

$$v = \frac{\sqrt{\boldsymbol{v}'+\boldsymbol{V})^2-(\boldsymbol{v}'\times\boldsymbol{V})^2/c^2}}{1+\boldsymbol{v}'\cdot\boldsymbol{V}/c^2}$$

где $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{v}'$ - скорости частицы в системах S и S', V - скорость S' относительно S.

3.17. Происходит три последовательных преобразования системы отсчета: 1) переход от системы S к системе S', двигающейся относительно S со скоростью V, параллельной оси x; 2) переход от системы S' к системе S'', двигающейся относительно S' со скоростью $\boldsymbol{v}$, параллельной оси y'; 3) переход от системы S'' к системе S''', двигающейся относительно S'' со скоростью, равной релятивистской сумме скоростей $(-v)$ и $(-V)$.[6] Доказать, что система S''', как и следует ожидать, неподвижна относительно S и $t''' = t$, однако S''' повернута относительно S на некоторый угол в плоскости xy (томасовская прецессия). Вычислить угол φ томасовской прецессии.

Указание. Воспользоваться формулами общего вида для преобразования Лоренца (см. задачу 3.11) и сложения скоростей (см. формулу (3.15)), записав эти формулы в проекциях на декартовы оси.

3.18. Два масштаба, каждый из которых имеет в своей системе покоя длину l_0, движутся навстречу друг другу с равными скоростями v относительно некоторой системы отсчета. Какова длина l каждого из масштабов, измеренная в системе отсчета, связанной с другим масштабом?

3.19. Два пучка электронов летят навстречу друг другу со скоростями $v = 0,9c$ относительно лабораторной системы координат. Какова относительная скорость V электронов: а) с точки зрения наблюдателя в лаборатории; б) с точки зрения наблюдателя, движущегося вместе с одним из пучков электронов?

3.20. Эффекты, возникающие при столкновении двух элементарных частиц, не зависят от равномерного движения этих частиц как целого; эти эффекты определяются лишь их относительной скоростью. Одну и ту же относительную скорость можно сообщить

[45] Световым годом называется расстояние, проходимое светом в вакууме за год

[46] Обратим внимание на то, что результирующая скорость зависит от того порядка, в котором производится сложение скоростей

сталкивающимся частицам двумя способами (предполагается для простоты, что частицы обладают одинаковой массой m): а) один ускоритель разгоняет частицы до энергии $\mathscr{E}$, затем быстрые частицы ударяются о неподвижную мишень из тех же частиц; б) два одинаковых ускорителя расположены так, чтобы создаваемые ими пучки частиц были направлены навстречу друг другу; каждый из ускорителей при этом должен разгонять частицы до энергии $\mathscr{E}_0 < \mathscr{E}$.

Сравнить между собой значения $\mathscr{E}$ и $\mathscr{E}_0$. Рассмотреть, в частности, ультрарелятивистский случай.

3.21. Найти формулы преобразования ускорения $\dot{v}$ для случая, когда система S' движется относительно системы S с произвольно направленной скоростью V. Представить эти формулы преобразования в векторном виде.

3.22. Выразить компоненты четырехмерного ускорения w_i через обычное ускорение $\dot{v}$ и скорость v частицы. Найти w_i^2. Пространственноподобно или времениподобно четырехмерное ускорение?

3.23. Выразить ускорение $\dot{v}$ частицы в мгновенно сопутствующей ей инерциальной системе через ее ускорение $\dot{v}$ в лабораторной системе. Рассмотреть случаи, когда скорость V частицы меняется только по величине или только по направлению.

3.24. Релятивистская частица совершает «равноускоренное» одномерное движение (ускорение $\dot{v} \equiv w$ постоянно в собственной системе отсчета). Найти зависимость скорости $v(t)$ и координаты $x(t)$ частицы от времени t в лабораторной системе отсчета, если начальная скорость v_0, а начальная координата x_0. Рассмотреть, в частности, нерелятивистский и ультрарелятивистский пределы.

УказАние. Использовать результат предыдущей задачи.

3.25. Ракета, рассматривавшаяся в задаче 3.9, разгоняется от состояния покоя до скорости $v = \sqrt{0,9999}$. Ускорение ракеты составляет $|\dot{\boldsymbol{v}}| = 20$ м/ сек ^{2} в системе, мгновенно сопутствующей ракете. Сколько времени продлится разгон ракеты по часам в неподвижной системе отсчета и по часам в ракете?

УКАЗАНИЕ. Влияние сил инерции на ход часов в ракете не учитывать [7].

3.26. Частица движется со скоростью $\boldsymbol{v}$ и ускорением $\dot{\boldsymbol{v}}$, так что за малый промежуток времени δt ее скорость в лабораторной системе S меняется на величину $\delta \boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{v}}\delta t$. Пусть S' - инерциальная система, мгновенно сопутствующая частице в момент t, а S'' - такая же система для момента времени $t + \delta t$. Пользуясь преобразованиями Лоренца, показать с точностью до членов, линейных по $\delta \boldsymbol{v}$, что координаты и время в этих системах связаны формулами:

$$

$$\boldsymbol{r}'' = \boldsymbol{r}' + \Delta\varphi \times \boldsymbol{r}' - t'\Delta\boldsymbol{v}, \quad t'' = t' - \frac{r' \cdot \Delta\boldsymbol{v}}{c^2} \tag{1}$$

$$

где

$$\Delta\boldsymbol{v} = \gamma\left[\delta\boldsymbol{v} + (\gamma - 1)\frac{\boldsymbol{v} \cdot \delta\boldsymbol{v}}{\boldsymbol{v}^2}\boldsymbol{v}\right], \quad \Delta\varphi = (\gamma - 1)\frac{\delta\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v}}{\boldsymbol{v}^2} \tag{2}$$

Какой геометрический смысл имеют преобразования (1)? Какой вид приобретают формулы (2) при $v \ll c$ в первом неисчезающем приближении?

Указание. Удобно рассмотреть цепочку преобразований $S'' \to S \to S'$ с помощь формул, приведенных в ответе к задаче 3.11.

[47] Это означает, что предлагается вычислить сумму собственных времен $d\tau = dt\sqrt{1 - v^2/c^2}$ в последовательности мгновенно сопутствуюших ракете инерциальных систем отсчета, выражаемую интегралом $\int d\tau$.

3.27. Частица имеет скорости $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{v}'$ в ИСО S и S' соответственно. Найти связь между углами ϑ и ϑ', которые эти скорости составляют с одинаково направленными осями x и x'. Относительная скорость систем V.
3.28. Относительно системы S движутся система S' со скоростью $\boldsymbol{V}$ и два тела со скоростями $\boldsymbol{v}_1$ и $\boldsymbol{v}_2$. Каков угол α между скоростями этих тел при наблюдении в системе S и в системе S'?

Указдние. Полезно использовать результаты задач 3.12 и 3.14 .
3.29. Что происходит с углом между скоростями двух тел, рассмотренных в предыдущей задаче, когда скорость системы S' относительно S стремится к c?
3.30. Пучок света распространяется в системе S' под углом ϑ' к оси x'. Какой угол ϑ с осью x он составляет в системе S?
3.31. В некоторый момент времени направление луча света от звезды составляет угол ϑ с орбитальной скоростью $\boldsymbol{v}$ Земли (в системе, связанной с Солнцем). Найти изменение направления от Земли на звезду за полгода (аберрация света), не делая приближений, связанных с малостью v/c.
3.32. Найти форму видимой кривой, описываемой звездой на небосводе вследствие годичной аберрации. Полярные координаты звезды в системе,
связанной с Солнцем, ϑ, α (полярная ось проведена перпендикулярно плоскости земной орбиты). Орбитальная скорость Земли $v \ll c$.
3.33. Пучок света в некоторой системе отсчета образует телесный угол $d\Omega$. Как изменится этот угол при переходе к другой инерциальной системе отсчета?
3.34. Некоторый источник испускает свет изотропно во все стороны в своей системе покоя, так что внутри телесного угла $d\Omega_0$ распространяется доля $dN = d\Omega_0/4\pi$ от полного излучения. Найти функцию распределения излучаемого света по углам $f(\vartheta) = dN/d\Omega$ в системе, относительно которой источник движется со скоростью v. Построить полярные диаграммы излучения для разных значений гамма-фактора $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$. Подробно исследовать ультрарелятивистский случай $\gamma \gg 1$. Какова характерная угловая ширина излучения движущегося источника в этом случае?
3.35*. Монохроматический источник генерирует в своей системе отсчета электромагнитную волну с частотой ω_0. Пользуясь законом преобразования (3.24) волнового 4-вектора, показать, что наблюдатель зарегистрирует частоту волны

$$\omega = \omega_0 \frac{\sqrt{1 - V^2/c^2}}{1 - (V/c)\cos\theta}$$

где V - относительная скорость источника и наблюдателя, θ - угол между направлением луча и относительной скоростью в системе наблюдателя (эффект Доплера). Выразить также волновой вектор k в системе наблюдателя через величины $\omega_0, \boldsymbol{k}_0$ в системе источника.
3.36. Найти частоту ω световой волны, наблюдаемую при поперечном эффекте Доплера (направление распространения света перпендикулярно направлению движения источника в системе, связанной с приемником света). Каково направление распространения рассматриваемой волны в системе, связанной с источником?
3.37. Длина волны света, излучаемого некоторым источником, в той системе, в которой источник покоится, равна λ_0. Какую длину волны λ зарегистрируют: а) наблюдатель, приближающийся со скоростью V к источнику, и б) наблюдатель, удаляющийся с такой же скоростью от источника?
3.38. Источник, испускающий свет частоты ω_0 изотропно во все стороны в своей системе отсчета, движется равномерно и прямолинейно относительно наблюдателя со скоростью V, проходя от него в момент наибольшего сближения на прицельном расстоянии d. Число фотонов, излучаемых в единицу времени в единицу телесного угла (интенсивность

потока фотонов), равно J_0 в системе покоя источника. Найти зависимость частоты ω и интенсивности J потока фотонов, регистрируемого наблюдателем, от угла между направлением луча и скорости V. При каких углах $\theta = \theta_0$ регистрируемые частота и интенсивность потока фотонов совпадут с ω_0 и J_0? Какова доля фотонов регистрируется наблюдателем в интервалах $0 \leqslant \theta \leqslant \theta_0$ и $\theta_0 \leqslant \theta \leqslant \pi$? Начертить графики зависимостей $\omega(0)$ и $J(0)$ для $V/c = 1/3$ и $V/c = 4/5$. Какой характер имеют эти зависимости при $V/c \to 1$?

3.39. Найти угловое распределение силы света I (световая энергия, излучаемая в единицу времени в единицу телесного угла), а также полный световой поток от источника света, рассмотренного в предыдущей задаче.

УказАниЕ. Каждый фотон обладает энергией $\hbar\omega$, где $\hbar$ - постоянная Планка.

3.40. Зеркало движется нормально к собственной плоскости со скоростью V. Найти закон отражения плоской монохроматической волны от такого зеркала (заменяющий закон равенства углов падения и отражения при $V = 0$), а также закон преобразования частоты при отражении. Рассмотреть, в частности, случай $V \to c$.

3.41. Решить предыдущую задачу для случая, когда зеркало перемещается поступательно вдоль собственной плоскости.

3.42. Непрозрачный куб с ребром l_0 в своей системе покоя движется относительно наблюдателя со скоростью V (рис. 3.6). Наблюдатель фотографирует его в момент, когда лучи света, испускаемые поверхностью куба, приходят в объектив фотоаппарата под прямым углом к направлению движения (в системе фотоаппарата). Куб виден под малым телесным углом, вследствие чего лучи, приходящие от разных точек куба, можно считать параллельными.

Какой вид будет иметь изображение на фотопластинке? Составить чертеж изображения, нанести на него те вершины и ребра куба, которые будут сфотографированы. Вычислить их относительные длины. Изображению какого неподвижного предмета эквивалентна полученная фотография? Какой вид приняло бы изображение движущегося куба, если бы были справедливы преобразования Галилея?

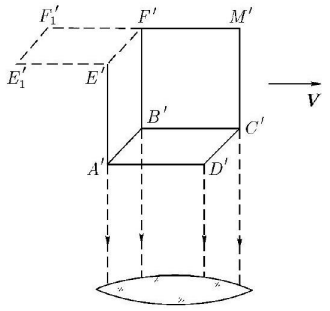


Рис. 3.6

3.43. Тонкий стержень $M'N'$ неподвижен в системе S', имеет в ней длину l_0 и ориентирован так, как показано на рис. 3.7. Система S' движется со скоростью $V \| Ox$ относительно фотопластинки AB, покоящейся в системе S. В момент прохождения стержня мимо фотопластинки происходит короткая световая вспышка, при которой лучи света падают нормально к плоскости xz фотопластинки.

а) Какова длина l изображения на фотопластинке? Может ли она стать равной или превысить l_0?

б) При каком угле наклона α' сфотографируется только торец стержня?

в) Каков угол наклона α стержня к оси Ox?

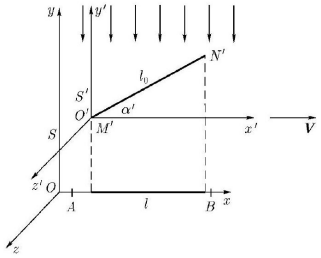


Рис. 3.7

3.44. Шар, движущийся со скоростью V, фотографируется неподвижным наблюдателем под малым телесным углом. Лучи света от шара падают параллельным пучком на объектив фотоаппарата, составляя прямой угол с направлением скорости V. Какую форму будет иметь изображение на фотопластинке? Какая часть поверхности шара будет сфотографирована?

УкАзАНиЕ. Представить шар в виде совокупности тонких дисков, движущихся параллельно своим плоскостям, и построить изображение каждого диска.

3.45. Пусть движущийся непрозрачный куб фотографируется неподвижным наблюдателем в момент, когда лучи, приходящие от куба, составляют произвольный угол α с направлением скорости $\boldsymbol{V}$ куба (в системе наблюдателя). Телесный угол, под которым виден куб, мал, вследствие чего лучи приходят параллельным пучком и падают на фотопластинку нормально к ее поверхности (рис. 3.8). Показать, что фотография должна совпадать с фотографией неподвижного, но повернутого на некоторый угол куба. Найти угол поворота изображения при разных значениях V и фиксированном α. При каком значении V будет сфотографирована одна грань $A'B'$? одна грань $B'C'$?

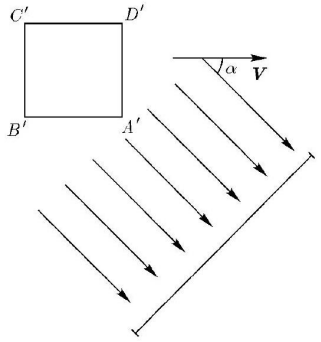


Рис. 3.8

3.46*. Космический корабль движется равномерно вдоль прямой, соединяющей его с наблюдателем. Находясь на заданных расстояниях l_1 и $l_2 < l_1$ от наблюдателя, корабль испускает две короткие световые вспышки, которые регистрируются наблюдателем по его часам в моменты времени t_1 и t_2. С какой скоростью V корабль приближается к наблюдателю и в какой момент t_* он прибудет? Как связана «видимая» скорость корабля с его истинной скоростью в системе наблюдателя?

УказАниЕ. Под «видимой» или «кажущейся» скоростью следует понимать отношение пройденного пути $l_1 - l_2$ к промежутку времени $\Delta t = t_2 - t_1$, который зарегистрировал наблюдатель. Именно таким образом определялась бы скорость в классической механике, в которой $v \ll c$.

3.47*. Космический корабль приближается к наблюдателю с известной скоростью V. Для определения длины космического корабля наблюдатель посылает два коротких световых импульса, которые отражаются от зеркал, установленных в голове и хвосте корабля, и возвращаются к наблюдателю одновременно

по его часам. Как на основе такого мысленного эксперимента найти длины корабля: а) «кажущуюся» a_*, определяемую как расстолние между положениями зеркал, отраженные импульсы от которых пришли к наблюдателю одновременно; б) длину a в системе наблюдателя; в) длину a_0 в собственной системе корабля, в которой он неподвижен. Какими окажутся искомые длины, если корабль удаляется от наблюдателя?

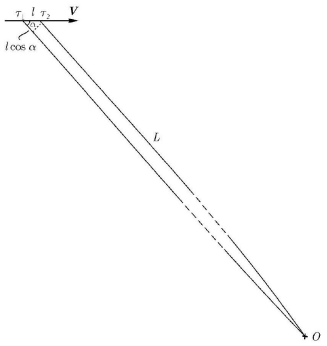


Рис. 3.9

3.48*. Космический корабль движется со скоростью $V = \text{const}$ относительно наблюдателя, который находится в стороне на большом расстоянии от его траектории (рис. 3.9). Вычислить «кажущуюся» (в том смысле, в каком это понятие использовалось в задаче 3.46) скорость корабля с помощью световых сигналов. Найти проекции этой скорости на луч, направлен-

ный к наблюдателю, и на плоскость, перпендикулярную лучу. При каких условиях «кажущаяся» скорость оказывается сверхсветовой? Рассмотреть, в частности, случай, когда релятивистский фактор корабля велик, $\gamma \gg 1$, а угол α мал.

3.49. Ввести волновой 4 -вектор, описывающий распространение плоской монохроматической волны в движущейся со скоростью V среде с показателем преломления n (фазовая скорость волны в неподвижной диэлектричсской срсдс $v' = c/n$). Найти формулы прсобразования частоты, фазовой скорости и угла между волновым вектором и относительной скоростью.

3.50. Плоская волна распространяется в движущейся со скоростью V среде в направлении перемещения среды. Длина волны в вакууме λ. Найти скорость v волны относительно лабораторной системы (опыт Физо). Показатель преломления n определяется в системе S', связанной со средой, и зависит от длины волны λ' в этой системе. Вычисления проводить с точностью до первого порядка по V/c.

Рекомендуемая литература: [Эйнштейн (1905)], [Болотовский (1990)], [Ландау и Лифшиц, Теория поля], [Мандельштам (1955)], [Меллер (1975)], [Фок (1955)], [Угаров (1977)], [Бредов и др. (1985)], [Лайтман и др. (1979)], [Батыгин и Топтыгин (1970)], [Дюге (1973)], [Пановский и Филипс (1963)], [Принцип относительности (1973)], [Болотовский (1985)], [Толмен (1974)], [Борн (1977)], [Вайскопф (1964)], [Тейлор и Уилер (1971)], [Толмен (1974)], [Гинзбург (1979)], [Минковский (1959)], [Эйнштейн (1955)].

C.2.2 3.2. Kinematics of Relativistic Particles

Энергия и импульс.

Как известно из нерелятивистской классической механики, наиболее компактная и простая форма записи законов движения (в отсутствие макроскопических диссипативных сил) достигается на основе вариационного принципа и имеет вид

$$\delta S = 0 \tag{3.26}$$

Здесь

$$S = \int^{(2)} L dt \tag{3.27}$$

(1)

- действие рассматриваемой механической системы, L - ее функция Лагранжа. В состояниях (1) и (2) задаются координаты частиц и моменты времени. При движении механической системы по физической (истинной)
  траектории действие принимает стационарное значение, что и выражается в виде равенства нулю его первой вариации (3.26). Для свободной нерелятивистской частицы функция Лагранжа совпадает с ее кинетической энергией, выраженной через скорость:

$$L = \frac{mv^2}{2} \tag{3.28}$$

где v - скорость, $m > 0$ - положительная постоянная, инертная масса частицы. Она определяется в нерелятивистской классической механике как коэффициент пропорциональности между силой $\boldsymbol{F}$ и ускорением $\dot{\boldsymbol{v}}$, которое приобретает частица под действием этой силы:

$$\dot{\boldsymbol{v}} = \frac{1}{m}\boldsymbol{F}$$

В релятивистской механике вариационный подход облегчает формулировку релятивистски инвариантных уравнений, позволяющих описать движение в любой ИСО. Кроме того, вариационный принцип дает возможность описания электромагнитного и других классических и квантовых полей. Поэтому мы положим его в основу изложения релятивистской механики и классической теории поля.

При определении вида действия для свободной релятивистской частицы используем два общефизических принципа: а) релятивистскую инвариантность действия, обеспечивающую одинаковость законов механики во всех ИСО, т. е. принцип относительности; б) принцип соответствия - при скоростях $v \ll c$ из релятивистского действия должны следовать нерелятивистские формулы (3.27) и (3.28).

Принцип релятивистской инвариантности в совокупности со свойствами однородности и изотропии 4-пространства в ИСО позволяет выразить действие свободной частицы через единственный инвариант - длину мировой линии частицы между точками 1 и 2 четырехмерного пространства:

$$S = \alpha \int^{(2)} ds \tag{3.29}$$

(1)

Величина и знак инвариантной постоянной α определяются из принципа соответствия. Пользуясь формулой (3.11), записываем (3.29) в виде интеграла по времени в лабораторной системе:

$$S = \alpha c \int_{(1)}^{(2)} \sqrt{1 - v^2/c^2}\, dt \tag{3.30}$$

Отсюда определяется функция Лагранжа. В нерелятивистском пределе $v \ll c$ имеем

$$L = \alpha c \left(1 - \frac{v^2}{2c^2}\right) = -mc^2 + \frac{mv^2}{2} \tag{3.31}$$

Последнее равенство получено при подстановке $\alpha = -mc$ и обеспечивает эквивалентность двух выражений (3.28) и (3.31) для функции Лагранжа в нерелятивистском пределе, так как в классической механике энергия системы определена с точностью до постоянной, а функция Лагранжа - с еще большим произволом.

Для свободной релятивистской частицы функция Лагранжа согласно (3.30) имеет вид

$$L = -mc^2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \tag{3.32}$$

Подчеркнем, что входящая во все предыдущие формулы масса m - инвариантная величина, одинаковая во всех ИСО. В противном случае релятивистская инвариантность теории нарушится.

Пример 3.9. С помощью функиии Лагранжа (3.32) вычислить энергию $\mathscr{E}$ и импульс p релятивистской частиць как функиии ее скорости.

Решение. Пользуясь формулами

$$\boldsymbol{p} = \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}}, \quad \mathscr{E} = \boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{v} - L$$

известными из механики, находим

$$p = \frac{m\boldsymbol{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad \mathscr{E} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{3.33}$$

Импульс релятивистской частицы при $v \ll c$ превращается в хорошо известное выражение $p = m\boldsymbol{v}$ ньютоновской механики. Энергия же в этом пределе,

$$\mathscr{E} = mc^2 + \frac{mv^2}{2} \tag{3.34}$$

кроме нерелятивистского слагаемого - кинетической энергии $mv^2/2$ - содержит еще постоянную

$$\mathscr{E}_0 = mc^2 \tag{3.35}$$

которая называется энергией покоя частицы. Эта постоянная, в отличие от произвольного слагаемого в потенциальной энергии нерелятивистской системы, наблюдаема и может превращаться частично или полностью в другие формы энергии. В частности, энергия, получаемая при сгорании химического или ядерного топлива, черпается из его энергии покоя. Поскольку энергия (3.33) включает в себя энергию покоя, ее называют полной энергией. Полная энергия в указанном смысле отличается от суммы кинетической и потенциальной энергии $E = T + U$ в нерелятивистской механике, которую тоже называют полной энергией. Кинетическая энергия частицы T отличается от ее полной энергии на величину энергии покоя:

$$T = \mathscr{E} - mc^2 \tag{3.36}$$

Из выражений (3.33) получается полезная связь между полной энергией, импульсом и скоростью:

$$\mathscr{E}\boldsymbol{v} = c^2\boldsymbol{p} \tag{3.37}$$

Пример 3.10. Вывести уравнение движения релятивистской частицы путем варьирования действия (3.29) (где $\alpha = -c$), сохраняя на всех этапах вычислений ковариантную форму записи, т. е. выражал все величины через 4-векторы и 4-инварианты. После варьирования 4-координат перейти к интегрированию по инвариантному параметру, в качестве которого удобно выбрать собственное время τ.

Решение. Записав (3.29) в форме

$$S = -mc \int_1^{(2)} \sqrt{dx^k dx_k} \tag{1}$$

получаем

$$\delta S = -mc \int_{(1)}^{(2)} \frac{\delta\left(dx^k dx_k\right)}{2ds} = -mc \int_{(1)}^{(2)} \frac{dx^k}{ds} \delta dx_k = -m \int_{(1)}^{(2)} u^k d\delta x_k$$

так как $cdx^k/ds = u^k$ – 4-скорость, а операции дифференцирования и варьирования перестановочны. Интегрируя последнее выражение по частям, имеем

$$\delta S = - mu^k \delta x_k \big|_{(1)}^{(2)} + m \int_{(1)}^{(2)} \delta x_k du^k$$

Поскольку 4-координаты точек 1 и 2 фиксированы, $\delta x_k = 0$ в этих точках. Записывая $du^k = \left(du^k/d\tau\right) d\tau$, получаем

$$\delta S = m \int_{(1)}^{(2)} \frac{du^k}{d\tau} \delta x_k d\tau = 0 \tag{1}$$

Ввиду произвольности и независимости δx_k отсюда следует уравнение движения

$$m \frac{du^k}{d\tau} = 0 \tag{3.38}$$

Последнее уравнение означает равенство нулю 4 -ускорения у свободной частицы - совершенно естественный и даже тривиальный результат. Но форма его записи позволяет дать весьма полезную релятивистскую интерпретацию энергии и импульсу частицы. Четырехвектор

$$p^k = mu^k = \left(\frac{mc}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \frac{m\boldsymbol{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) \tag{3.39}$$

называется четырехмерным импульсом частицы. Его пространственная часть совпадает с трехмерным импульсом (3.33), а временная компонента равна $\mathscr{E}/\mathcal{C}$:

$$p^k = (\mathscr{E}/c, p) \tag{3.40}$$

Поскольку квадрат 4-вектора - инвариант, то

$$p^k p_k = \left(\frac{\mathscr{E}}{c}\right)^2 - p^2 = \left(\frac{\mathscr{E}'}{c}\right)^2 - p'^2$$

Пусть в штрихованной системе частица покоится, т. е. $p' = 0, \mathscr{E}\mathscr{E}' = mc^2$. Из предыдущего равенства получаем связь между энергией и импульсом:

$$p^k p_k = \left(\frac{\mathscr{E}}{c}\right)^2 - p^2 = (mc)^2 \quad \text{или} \quad \mathscr{E} = \sqrt{c^2 p^2 + m^2 c^4} \tag{3.41}$$

Здесь выбран знак плюс перед корнем, чтобы получить правильный нерелятивистский предел. Объединение энергии и импульса частицы в единый 4 -вектор позволяет легко преобразовывать их в любые ИСО. Преобразование осуществляется по правилам (3.20).

Полученные выше формулы допускают движение частиц с предельной скоростью [8] $v = c$, но лишь в том случае, если их масса $m = 0$. Это вытекает из соотношений (3.37) и (3.41), которые дают для таких частиц

$$\mathscr{E} = cp \tag{3.42}$$

Такая же связь между энергией и импульсом будет приближенно справедлива для любой ультрарелятивистской частицы, имеющей энергию $\mathscr{E} \gg mc^2$. Отношение $\mathscr{E}/mc^2 = (1 - v^2/c^2)^{-1/2} = \gamma$ называют релятивистским фактором (лоренц-фактором).

Нулевую массу имеют кванты электромагнитного поля - фотоны (фотоны высоких энергий называют гамма-квантами), а также, возможно, нейтрино и некоторые другие гипотетические (пока не обнаруженные экспериментально) частицы. Энергия и импульс фотонов в вакууме связаны с их частотой ω и волновым вектором k квантовыми формулами (см. главу 6)

$$\mathscr{E} = \hbar\omega, \quad p = \frac{\hbar\omega}{c} = \hbar k \tag{3.43}$$

где $\hbar \approx 1,05 \times 10^{-34}$ Дж·с $\approx 1,05 \times 10^{-27}$ эрг ·с - постоянная Планка.

Кинематические задачи. Полезную и разнообразную информацию о процессах столкновений и распадов частиц можно получить только на основе законов сохранения энергии и импульса, не задаваясь явным видом взаимодействия между частицами. Энергия и импульс замкнутой (не обменивающейся с внешними полями или телами) системы частиц представляют собой интегралы движения. Связь этого фундаментального факта с симметрией пространства-времени будет установлена в разделе 4.2.

Общая кинематическая задача может быть сформулирована следующим образом. Пусть имеется несколько частиц $a, b, \ldots$ с четырехимпульсами $p_a^i, p_b^i, \ldots$, находящихся на значительных расстояниях друг от друга и потому не взаимодействующих. При движении частицы сближаются и между ними происходит взаимодействие. Характер взаимодействия при решении кинематических задач не играет роли, требуется лишь, чтобы взаимодействие выключалось при последующем разлете частиц. Взаимодействие может вызывать упругие столкновения, при которых сами частицы и их внутренние состояния остаются неизменными, либо распады и неупругие столкновения, когда могут изменяться массы частиц, их внутренние состояния, появляться новые частицы. Этот процесс взаимодействия можно

записать в виде

$$a + b + \ldots \to m + n + \ldots$$

Считая, что в конечном состоянии частицы $m, n, \ldots$ находятся опять на значительных расстояниях, имеют 4 -импульсы $p_m^i, p_n^i, \ldots$ и не взаимодействуют, мы можем записать закон сохранения 4 -импульса всей системы в виде равенства

[48] В научной литературе обсуждалась гипотеза о существовании частиц (тахионов), которые движутся со скоростями, превышающими предельную скорость c. В экспериментах такие частицы не обнаружены. С их гипотетическими свойствами можно познакомиться по обзорам [Барашенков (1974)], [Фейнберг (1974)].

$$p_a^i + p_b^i + \ldots = p_m^i + p_n^i + \ldots \tag{3.44}$$

которое выполняется в любой ИСО. Это равенство является основой для всех кинематических расчетов. Следует также постоянно иметь в виду, что квадрат любого 4-импульса есть инвариант и, следовательно, имеет одно и то же значение во всех ИСО. Наиболее удобными при кинематических расчетах являются лабораторная система отсчета S (Л-система) и система центра инерции S' (Ц-система). Последняя определяется как такая система, в которой полный трехмерный импульс частиц $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_a + \boldsymbol{p}_b + \ldots$ равен нулю.

Как следует из (3.44), сохраняется полная энергия и полный трехмерный импульс, но отнюдь не полная масса, понимаемая как сумма масс отдельных частиц. При неупругом столкновении суммы масс до столкновения и после него как правило неодинаковы:

$$\Delta M = m_a + m_b + \ldots - (m_n + m_k + \ldots) \neq 0 \tag{3.45}$$

Величина $Q = c^2 \Delta M$ называется энергетическим выходом реакции, а ΔM - дефектом массы. Дефект массы может достигать значения полной массы частиц, вступающих в реакцию. Примером таких неупругих столкновений служит аннигиляция электронно-позитронной или мюонной пары с испусканием гамма-квантов:

$$e^+ + e^- \to \gamma_1 + \gamma_2, \quad \mu^+ + \mu^- \to \gamma_1 + \gamma_2$$

Поскольку гамма-кванты не имеют массы, в этих случаях $\Delta M = 2m_e$ и $\Delta M = 2m_\mu$. В нерелятивистских процессах (например, в химических реакциях) масса тоже, строго говоря, не сохраняется. Но дефект массы при этом составляет малую долю суммарной массы участвующих в реакции веществ (оценки см. в задаче 3.88). Поэтому закон сохранения массы при химических реакциях обычно рассматривают как точный закон природы.

Следует иметь в виду, что понятие дефекта массы имеет достаточно строгий смысл только в нерелятивистском пределе, когда величина ΔM мала по сравнению с $m_a + m_b + \ldots$ В релятивистском случае масса системы взаимодействующих частиц, аналогичная по смыслу массе отдельной
частицы, должна определяться как инвариантная величина

$$M = \left[\mathscr{E}^2/c^4 - P^2/c^2\right]^{1/2} = \left[\left(\sum_a \frac{\mathscr{E}_a}{c^2}\right)^2 - \left(\sum_a \frac{p_a}{c}\right)^2\right]^{1/2} \tag{3.46}$$

т. е. через полную энергию $\mathscr{E}$ и полный трехмерный импульс $\boldsymbol{P}$ системы, которые являются аддитивными величинами и выражаются в виде сумм энергий и импульсов всех частиц. Определенная таким образом масса одинакова до и после любого процесса взаимодействия частиц, поскольку $\mathscr{E}$ и $\boldsymbol{P}$ по отдельности сохраняются. Но она неаддитивна и зависит от углов между импульсами частиц. Лишь в Ц-системе, в которой $P = 0$, она вновь становится аддитивной величиной и выражается через полные энергии частиц: $M = \sum\limits_a \mathscr{E}_a/c^2$. В этой ИСО, в которой система частиц как целое неподвижна ($\boldsymbol{P} = 0$), связь между массой и полной энергией приобретает вид (3.35), аналогичный энергии покоя отдельной частицы:

$$\mathscr{E} = Mc^2 \tag{3.47}$$

Реакции, идущие по схеме

$$a + b \to c + d \tag{3.48}$$

т. е. такие, при которых две частицы превращаются в две другие частицы, называются двухчастичными (частным случаем двухчастичной реакции является упругое рассеяние двух частиц). Кинематику двухчастичных реакций удобно описывать с помощью инвариантных переменных s, t, u, которые выражаются через 4 -импульсы частиц, участвующих в реакции:
$s = (p_a + p_b)_i (p_a + p_b)^i$, $t = (p_a - p_c)_i (p_a - p_c)^i$, $u = (p_a - p_d)_i (p_a - p_d)^i$.
Любую из величин $s, t,$ можно выразить через две другие с помощью соотношения [9]

$$s + t + u = \left(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 + m_d^2\right) c^2 \tag{3.50}$$

Наглядное представление о кинематике двухчастичных реакций дает кинематическая плоскость, на которой откладываются значения переменных s, t, u. Законы сохранения энергии и импульса ограничивают на кинематической плоскости область значений параметров, возможную (физическую) для данной реакции.

Многие формулы релятивистской кинематики приобретают более простой вид, если пользоваться системой единиц, в которой скорость света $c = 1$. При этом масса, энергия и импульс измеряются в одинаковых единицах, например, в МэВ (1М = 10^6 э В = 10^{-3} ГэВ = $1,602 \times 10^{-6}$ эрг). В некоторых задачах этого раздела используется такая система единиц (что всегда оговаривается). В ряде случаев массы элементарных частиц измеряют в единицах массы электрона m_e (т. е. используют систему, в которой $m_e = 1$).

Таблица 3.1. Массы некоторых элементарных частиц

	Масса			Масса	
Частица	в единицах m_e	в М э B	Частица	в единицах m_e	в МэВ
ФОТОН γ	0	0	АДРОНЫ		
ПРОМЕЖУТОЧНЫЕЕ БОЗОНЫ			Мезоны		
$W^{\pm}$	$1,59 \times 10^5$	$8,10 \times 10^4$	$\pi^{\pm}$	273	139,6
Z	$1,81 \times 10^5$	$9,24 \times 10^4$	π^0	264	135,0
ЛЕПТОНЫ			$K^{\pm}$	965,9	493,6
$e^{\pm}$	1	0,511	$K^0, \bar{K}^0$	974,0	497,7
$\nu_e, \bar{\nu}_e$	0	0	Барионы		
$\mu^{\pm}$	207	105,7	$p, \bar{p}$	1836	938,2
$\nu_\mu, \bar{\nu}_\mu$	$< 0,5$	$< 0,25$	$n, \bar{n}$	1839	939,5
$\tau^{\pm}$	3491,4	1784,1	$\Lambda, \bar{\Lambda}$	2183,2	1115,6
$\nu_\tau, \bar{\nu}_\tau$	$< 68,5$	< 35	$\Omega^{\pm}$	3272,8	1672,4

Таблица 3.2. Энергии связи атомных ядер

Изотопы	$^2\mathrm{H}_1$	$^4\mathrm{He}_2$	$^7\mathrm{Li}_3$
B, МэВ	2,23	28,11	38,96

В таблице 3.1 приведены для справок массы ряда элементарных частиц и их принятые обозначения. Черточками сверху обозначены символы античастиц, которые могут отличаться от частиц не только знаком электрического заряда, но и другими квантовыми числами. Но массы частиц и античастиц одинаковы. Среди приведенных в таблице частиц фотон γ, бозон Z, все типы нейтрино ν, мезоны π^0, K^0, нейтрон n и

[49] В качестве двух независимых величин можно выбрать, например, s и t. Все другие величины (энергии и углы рассеяния частиц в лабораторной системе и системе центра инерции) выражаются через них - см. задачи 3.?, 3.?

гиперон Λ электронейтральны, остальные частицы имеют электрические заряды, равные по абсолютной величине элементарному заряду. Заряженные лептоны имеют имена электрон (позитрон), мюон, таон. Барионы протон (p) и нейтрон (n) называются нуклонами (ядерными частицами).

В таблице 3.2 приведены значения энергий связи B некоторых атомных ядер. Верхний индекс указывает число нуклонов (протонов и нейтронов) в ядре. Нижний индекс обозначает число протонов и заряд ядра в единицах элементарного заряда. Под энергией связи понимается величина

$$B = \Delta M c^2 = \sum \mathscr{E}_{0n} - \mathscr{E}_0 \tag{3.51}$$

где $\mathscr{E}_{0n}$ - энергия покоя свободного нуклона, $\mathscr{E}_0$ - энергия покоя ядра. Суммирование производится по всем нуклонам ядра.

Задачи

3.51. Выразить импульс p релятивистской частицы через ее кинетическую энергию T.
3.52. Выразить скорость $\boldsymbol{v}$ частицы через ее импульс $\boldsymbol{p}$.
3.53. Частица с массой m обладает энергией $\mathscr{E}$. Найти скорость v частицы. Рассмотреть, в частности, нерелятивистский и ультрарелятивистский пределы.
3.54. Найти приближенные выражения кинетической энергии T частицы с массой m: а) через ее скорость v и б) через ее импульс p с точностью до v^4/c^4 и p^4/m^4c^4 соответственно, при $v \ll c$.
3.55. Найти скорость v частицы с массой m и зарядом e, прошедшей разность потенциалов V (начальная скорость равна нулю). Упростить общую формулу для нерелятивистского и ультрарелятивистского случаев (учесть по два члена разложения).
3.56. Найти скорость v частиц в следующих случаях: а) электроны в электронной лампе ($\mathscr{E} = 300$ эв); б) электроны в синхротроне на 300 МэВ; в) протоны в синхроциклотроне на 680МВ; г) протоны в синхрофазотроне на 10 Гэв.
3.57. Ускоритель дает на выходе пучок зараженных частиц с кинетической энергией T; сила тока в пучке равна $\mathscr{J}$. Найти силу F давления пучка на поглощающую его мишень и выделяемую в мишени мощность W. Масса частицы m, заряд e.
3.58. Некоторое тело движется с релятивистской скоростью v через газ, в единице объема которого содержится N медленно движущихся частиц с массой m Найти давление p, производимое газом на элемент поверхности тела, нормальный к его скорости, если частицы упруго отражаются от поверхности тела.
3.59. В линейном ускорителе частица ускоряется в щели между полыми цилиндрическими электродами - «пролетными трубками», вдоль общей оси которых проходит траектория частицы. Ускорение происходит под действием высокочастотного электрического поля с частотой $\nu = \text{const}$. Разгоняются те частицы, которые проходят все промежутки между трубками при наличии там ускоряющегося поля. Каковы должны быть длины пролетных трубок, чтобы частица с зарядом e и массой m пролетела через ускоряющие промежутки в те моменты времени, когда на них имеется максимальное напряжение V_e? Оценить также полную длину ускорителя с N пролетными трубками.
3.60. Поток монохроматических μ-мезонов, родившихся в верхних слоях атмосферы [10], падает вертикально вниз. Найти отношение интенсивности потока μ-мезонов на высоте h над уровнем моря (I_h) и на уровне моря (I_0), считая, что в рассматриваемом слое воздуха толщиной h происходит только ослабление потока за счет естественного распада μ-мезонов. Энергия μ-мезонов $\mathscr{E} = 4,2 \cdot 10^8$ эв, $h = 3$ км, среднее время жизни покоящегося μ-мезона $\tau_0 = 2,2 \cdot 10^{-6}$ сек.

3.61. Система отсчета S' движется со скоростью V относительно системы S. Частица с массой m, обладающая в S' энергией $\mathscr{E}'$ и скоростью v', движется под углом ϑ' к направлению $\boldsymbol{V}$. Найти угол ϑ между импульсом $\boldsymbol{p}$ частицы и направлением $\boldsymbol{V}$ в системе S. Выразить энергию и импульс частицы в S через $\vartheta', \mathscr{E}'$ или ϑ', v'. Рассмотреть, в частности, ультрарелятивистский случай $\mathscr{E}' \gg mc^2, V \approx c$. Показать, что в этом случае в некотором (каком?) интервале углов можно пользоваться приближенной формулой $\vartheta' \approx \frac{1}{\gamma} \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2}$.

3.62. Система S' движется относительно системы S со скоростью V. Угловое распределение частиц, имеющих в S' одинаковую энергию $\mathscr{E}'$, описывается функцией $dW/d\Omega' = F'(\vartheta', \alpha')$, где величина dW представляет собой долю частиц, движущихся в системе S' внутри телесного угла $d\Omega'$. Ее обычно нормируют так, что

$$\int dW = \int F'(\vartheta', \alpha')\, d\Omega' = 1$$

Угол ϑ' отсчитывается от направления V. Найти угловое распределение таких частиц в системе S. Рассмотреть, в частности, ультрарелятивистский случай.

3.63. Вывести уравнение движения свободной релятивистской частицы путем варьирования действия (3.30) с функцией Лагранжа (3.32) и с неинвариантной переменной интегрирования - координатным временем t. Убедиться в эквивалентности полученного уравнения и (3.38).

3.64 Показать, что элемент объема в пространстве трехмерных импульсов d^3p преобразуется при переходе в другую ИСО следующим обра30м:

$$\frac{d^3p}{\mathscr{E}} = \frac{d^3p'}{\mathscr{E}'}$$

где $\mathscr{E}, \mathscr{E}'$ - соответствующие энергии.

3.65 . Функция распределения $f(\boldsymbol{p})$ частиц по импульсам нормирована таким образом, что полное число частиц dN в системе, импульсы которых лежат внутри объема d^3p, дается выражением $dN = f(\boldsymbol{p})d^3p$. Найти закон преобразования функции распределения при переходе в другую ИСО.

3.66*. Число частиц dN, находящихся в элементе объема dV и имеющих составляющие импульса, заключенные в пределах $p_x, p_x + dp_x$; $p_y, p_y + dp_y$; $p_z, p_z + dp_z$, выражается в виде

$$dN = f(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}, t) dV d^3p$$

где $d^3p = dp_x dp_y dp_z$ - элемент объема в пространстве импульсов, $f(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p})$ - функция распределения по координатам и импульсам, т. е. плотность числа частиц в фазовом пространстве. Найти закон релятивистского преобразования $f(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}, t)$.

3.67. Частицы сорта 1, обладающие в системе S скоростью v_1, рассеиваются неподвижными частицами сорта 2. Как преобразуется сечение рассеяния $d\sigma_{12}$ при переходе к системе отсчета S', в которой частицы сорта 2 обладают скоростью $\boldsymbol{v}_2'$, а частицы сорта 1 - скоростью v_1'? Рассмотреть, в частности, случай, когда скорости $\boldsymbol{v}_1'$ и $\boldsymbol{v}_2'$ параллельны.

У КАЗАниЕ. Сечением рассеяния $d\sigma_{12}$ называется отношение числа частиц, рассеиваемых в единицу времени в телесный угол $d\Omega$ одним рассеивающим центром, к плотности потока рассеиваемых частиц $J_{12} = n_1 v_0$, где n_1 - число рассеиваемых частиц в единице объема, $v_0 = |\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2|$ - относительная скорость частиц 1-го и 2 -го сорта (ср. с задачей 3.19).

3.68. π^0-мезон движется со скоростью v и распадается на лету на два γ-кванта. Найти

[410] Задача формулируется в упрощенном виде.

угловое распределение γ-квантов распада $dW/d\Omega$ в лабораторной системе отсчета, учитывая, что в системе покоя π^0-мезона оно сферически симметрично.

3.69. Выразить энергию π^0-мезона, рассмотренного в предыдущей задаче, через отношение f числа γ-квантов распада, испускаемых в переднюю полусферу, к числу γ-квантов испускаемых в заднюю полусферу.

3.70. π^0-мезон распадается на лету на два γ-кванта. Показать, что минимальный угол $\vartheta_{\min}$ разлета γ-квантов определяется условием $\cos\frac{\vartheta_{\min}}{2} = \frac{v}{c}$ в той системе отсчета, в которой скорость π^0-мезона равна v.

3.71. Найти зависимость энергии γ-кванта, возникающего при распаде π^0-мезона (ср. с задачей 3.68), от угла ϑ между направлениями распространения кванта и движения π^0-мезона. Определить энергетический спектр γ-квантов распада в лабораторной системе отсчета.

УказАниЕ. Из законов сохранения энергии и импульса следует, что в системе покоя π^0-мезона энергия γ-кванта $\mathscr{E}' = mc^2/2$ (m - масса π^0-мезона).

3.72. Показать, что какова бы ни была форма энергетического спектра π^0-мезонов, энергетический спектр γ-квантов распада в лабораторной системе отсчета будет иметь максимум при $\mathscr{E} = \mathscr{E}'$, $\mathscr{E}' = mc^2/2$, где m - масса π^0-мезона. Пусть $\mathscr{E}_1$ и $\mathscr{E}_2$ - произвольные значения энергии γ-квантов распада, расположенные по разные стороны указанного максимума и отвечающие одинаковым значениям функции распределения. Выразить массу m π^0-мезона через $\mathscr{E}_1$ и $\mathscr{E}_2$

УказаниЕ. Воспользоваться энергетическим спектром γ-квантов, найденным в задаче 3.71 .

3.73. Определить массу m некоторой частицы, зная, что она распадается на две частицы с массами m_1, m_2. Из опыта известны величины импульсов $p_1 p_2$ частиц, образовавшихся при распаде, и угол ϑ между их направлениями. Вычислить массу зараженного π-мезона, распадающегося по схеме $\pi \to \mu + \nu$, если из опыта известно, что π-мезон до распада покоился, а μ-мезон получил после распада импульс $p_\mu = 29,8\text{МВ/с}$. Масса μ-мезона приведена в таблице 3.1.

3.74. Определить массу m_1 некоторой частицы, зная, что она представляет собой одну из двух частиц, образовавшихся при распаде частицы с массой m и импульсом p. Импульс p_2, масса m_2 и угол ϑ_2 вылета второй частицы, образовавшейся при распаде, также известны.

3.75. Частица с массой m_1 и скоростью v сталкивается с покоящейся частицей массы m_2 и поглощается ею. Найти массу m и скорость V образовавшейся частицы.

3.76. Покоящееся тело с массой m_0 распадается на две части с массами m_1 и m_2. Вычислить кинетические энергии T_1 и T_2 продуктов распада.

Найти распределение энергии распада в системе покоя распадающейся частицы между а) α-частицей и дочерним ядром при α-распаде U^{238}; б) μ-мезоном и нейтрино (ν) при распаде π-мезона ($\pi \to \mu + \nu$); в) γ-квантом и ядром отдачи при излучении γ-кванта.

3.77. Покоящаяся частица a распадается по схеме $a \to b + d$. Выразить энергию распада $Q_a = m_a - m_b - m_d (c = 1)$ через кинетическую энергию T_b одной из частиц распада и массы m_b, m_d. Вычислить энергию распада и массу Σ^+-частицы, распадающейся по схеме $\Sigma^+ \to n + \pi^+$, пользуясь найденным из опыта значением $T_{\pi+} = 91,7\text{М}$ и массами нейтрона и π^+-мезона, приведенными в таблице 3.1. Сделать то же самое для распада Σ^+по другой схеме $\Sigma^+ \to p + \pi^0$, если известна $T_p = 18,8\text{МВ}$.

3.78. Покоящееся свободное возбужденное ядро (энергия возбуждения $\Delta\mathscr{E}$) излучает γ-квант. Найти его частоту ω. Масса возбужденного ядра m. В чем причина того, что $\omega \neq \Delta\mathscr{E}/\hbar$? Как изменится результат, если ядро жестко закреплено в кристаллической решетке (эффект Мёссбауэра)?

3.79*. Покояшаяся частица a с массой m распадается по схеме $a \to a_1 + a_2 + a_3$ на три

частицы с массами m_1, m_2, m_3 и кинетическими энергиями T_1, T_2, T_3. Исследовать кинематику такого распада с помощью диаграммы Далица. Для этого ввести переменные $x = (T_2 - T_3)/\sqrt{3}$, $y = T_1$ и рассмотреть плоскость (x, y). Каждому конкретному распаду отвечает определенная точка на этой плоскости.
а) Доказать, что закон сохранения энергии ограничивает на плоскости (x, y) область, имеющую форму равностороннего треугольника. Убедиться в том, что длины перпендикуляров, опущенных из точки, изображающей данный распад, на стороны треугольника, равны кинетическим энергиям образующихся частиц.
б) Убедиться в том, что двух введенных величин x и y достаточно для определения величин импульсов образующихся частиц и углов между импульсами в системе покоя распадающейся частицы.
в) Закон сохранения трехмерного импульса приводит к тому, что не все точки внутри треугольника отвечают истинным распадам. Найти на плоскости xy область, внутри которой распады кинематически возможны, для частного случая $m_2 = m_3 = 0, m_1 \neq 0$.
3.80. Построить диаграмму Далица (см. условие предыдущей задачи) для распадов μ и K-мезонов:

$$\text{а) } \mu^{\pm} \to e^{\pm} + 2\nu, \qquad \text{б)} \qquad K^{\pm} \to \pi^0 + e^{\pm} + \nu$$

В последнем процессе электрон, как правило, рождается ультрарелятивистским, и его массой покой можно пренебречь. Определить максимальные энергии частиц.
3.81. Построить диаграмму Далица (см. задачу 3.79) для распада покоящегося K^+-мезона по схеме

$$K^+ \to \pi^- + \pi^+ + \pi^+$$

Энергия распада $Q = m_K - 3m_\pi \approx 75\text{M}B < m_\pi (c = 1)$, поэтому рождающиеся π-мезоны можно приближенно считать нерелятивистскими. Какова максимальная энергия каждой из частиц?
3.82. Построить диаграмму Далица (см. условие задачи 3.79) для распада ω-мезона по схеме

$$\omega \to \pi^+ + \pi^- + \pi^0.$$

Считать массы всех трех мезонов одинаковыми, энергия распада $Q = m_\omega$ - $-3m_\pi \approx 360\text{M} > m_\pi, m_\omega \approx 780\text{M}(c = 1)$. Какова наибольшая энергия каждого из мезонов?
3.83^. В условии задачи 3.79 изложены правила построения диаграммы Далица для распада трех частиц. Вероятность dW распада имеет вид

$$dW = \rho d\Gamma$$

Здесь ρ - величина, зависящая от сил взаимодействия, ответственных за распад, и от импульсов частиц, а $d\Gamma$ - элемент фазового объема Γ, определяемого интегралом

$$\Gamma = \int \frac{(d\boldsymbol{p}_1)}{\mathscr{E}_1} \frac{(d\boldsymbol{p}_2)}{\mathscr{E}_2} \frac{(d\boldsymbol{p}_3)}{\mathscr{E}_3} \delta\left(p_i - p_{1i} - p_{2i} - p_{3i}\right)$$

где p_i – 4-импульс распадающейся частицы ($p_i = (m, 0)$ при распаде из состояния покоя), $p_{\alpha i} = (\mathscr{E}_\alpha, \boldsymbol{p}_\alpha), \alpha = 1, 2, 3$ – 4-импульсы образующихся частиц, $(d^3\boldsymbol{p}_\alpha)$ - элемент обьема импульсного пространства α-й частицы. Четырехмерная δ-функция выражает собой закон сохранения 4 -го импульса при распаде и показывает, что интегрирование производится только по тем значениям импульсов $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2, \boldsymbol{p}_3$, которые совместимы с законами сохранения энергии и импульса.

Выразить $d\Gamma$ через dx, dy и показать, что фазовый объем Γ выражается в соответствующем масштабе площадью разрешенной области на диаграмме Далица. Доказательство произвести для общего случая $m_1 \neq m_2 \neq m_3 \neq 0$.

3.84. Частица с массой m налетает на покоящуюся частицу с массой m_1. Происходит реакция, в которой рождается ряд частиц с общей
массой M. Если $m + m_1 < M$, то при малых кинетических энергиях налетающей частицы реакция не идет - она запрещена законом сохранения энергии. Найти минимальное значение кинетической энергии налетающей частицы (энергетический порог T_0 реакции), начиная с которого реакция становится энергетически возможной.

3.85. Промежуточный бозон W^+рождается в реакции $\nu_\mu + p \rightarrow \mu^- + +W^+ + p$. Вычислить пороговую энергию T_0 нейтрино ν_μ.

3.86. Найти энергетические пороги T_0 следующих реакций: а) рождение π-мезона при столкновении двух нуклонов ($N + N \rightarrow N + N + \pi$); б) фоторождение π-мезона на нуклоне ($N + \gamma \rightarrow N + \pi$); в) рождение K-мезона и Λ-гиперона при столкновении π-мезона с нуклоном ($\pi + N \rightarrow \Lambda + K$); г) рождение пары протон - антипротон при столкновении протона массы m_p с ядром массы m. Рассмотреть, в частности, столкновение с протоном. Оценить порог для рождения антипротона на ядре с массовым числом A, считая $m \approx m_p A$.

3.87. Найти приближенное выражение энергетического порога T_0 реакций, в которых изменение ΔM массы сталкивающихся частиц составляет малую часть их общей массы M («реакция между нерелятивистскими частицами»). Применить полученную формулу к нахождению энергетического порога T_0 реакций: а) фоторасщепление дейтерия (реакция $\gamma + H_1^2 \rightarrow p + n$); б) реакция $\mathrm{He}_2^4 + \mathrm{He}_2^4 \rightarrow \mathrm{Li}_3^7 + p$. Сравнить полученные приближенные значения с точными (см. задачу 3.84).

3.88. Оценить дефект массы ΔM и относительное изменение массы $\Delta M/M$ в следующих процессах:

а) реакция горения водорода на Солнце и в звездах (идет по нескольким параллельным каналам):

$$2e^- + 4p \rightarrow {}^4\mathrm{He} + 2\nu + Q, \quad Q = 26,2\mathrm{M}\vartheta\mathrm{B}$$

В энергетический выход реакции не включены энергии нейтрино ν, поскольку эта энергия уносится из системы и не приводит к нагреву окружающего вещества.

б) реакция горения дейтория и трития в установках по управляемому термоядерному синтезу (или в водородной бомбе):

$$^2\mathrm{H} + {}^3\mathrm{H} \rightarrow {}^4\mathrm{He} + n + Q, \quad Q = 17,6\mathrm{MB};$$

в) реакция деления урана под действием медленного нейтрона:

$$n + {}^{235}\mathrm{U} \rightarrow A + B + (2 \operatorname{div} 3)n + Q, \quad Q = 200\mathrm{MB}$$

г) горение метана в газовой горелке:

$$\mathrm{CH_4} + 2\mathrm{O_2} \rightarrow \mathrm{CO_2} + 2\mathrm{H_2O} + Q, \quad Q = 0,67 \text{ эВ};$$

д) реакция плавления льда при 0°C: энергия поглощается, $Q = -0,6 \times 10^{-2}$ эВ в расчете на одну молекулу, перешедшую из куска льда в воду.

3.89^. Электрон и позитрон, имеющие в Л-системе трехмерные импульсы $\boldsymbol{p}_-, \boldsymbol{p}_+$, аннигилируют на лету в два гамма-кванта. Вычислить инвариантную массу системы. Какая дополнительная информация необходима для вычисления энергий квантов $\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2$?

3.90. Доказать, что рождение пары электрон - позитрон одним γ-квантом возможно только, если в реакции участвует частица с массой покоя $m_1 \neq 0$ (внутреннее состояние

этой частицы не меняется; ее роль состоит в том, что она принимает часть энергии и импульса, делая возможным выполнение закона сохранения). Найти порог T_0 реакции рождения пары.

3.91. Доказать, что законом сохранения энергии-импульса запрещена аннигиляция пары электрон - позитрон, сопровождаемая испусканием одного γ-кванта, но нет запрета на реакцию аннигиляции пары с испусканием двух фотонов.

3.92. Частица с энергией $\mathscr{E}$ и массой m_1 налетает на покоящуюся частицу с массой m_2. Найти скорость v центра инерции относительно лабораторной системы отсчета при таком столкновении.

3.93*. Частица с массой m_1 и энергией $\mathscr{E}_0$ испытывает упругое соударение с неподвижной частицей, масса которой m_2. Выразить углы рассеивания ϑ_1, ϑ_2 частиц в лабораторной системе отсчета через их энергии $\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2$ после столкновения.

3.94. Основываясь на решении предыдущей задачи, выразить энергию частиц, испытавших упругое рассеяние, через углы рассеяния в лабораторной системе отсчета.

3.95. Ультрарелятивистская частица с массой m и энергией $\mathscr{E}_0$ упруго рассеивается на неподвижном ядре с массой $M \gg m$. Определить зависимость конечной энергии $\mathscr{E}$ частицы от угла ϑ ее рассеяния.

3.96. Решить предыдущую задачу для случая неупругого рассеяния частицы на ядре. Энергия возбуждения ядра ΔE в системе его покоя удовлетворяет неравенству $mc^2 \ll \Delta E \ll Mc^2$.

3.97. Частица с массой m испытывает упругое соударение с неподвижной частицей такой же массы. Выразить кинетическую энергию T_1
рассеянной частицы через кинетическую энергию T_0 налетающей частицы и угол рассеяния ϑ_1.

3.98. Используя результаты задачи 3.94, найти в нерелятивистском случае зависимость кинетических энергий T_1 и T_2 частиц, испытавших упругое соударение, от начальной кинетической энергии T_0 первой частицы и углов рассеяния ϑ_1 и ϑ_2 в лабораторной системе отсчета (вторая частица до столкновения покоилась).

3.99. Частицы с массами m_1 и m_2 испытывают упругое столкновение. Их скорости в системе ц. и. v_1' и v_2', угол рассеяния ϑ', скорость системы ц. и. относительно лабораторной системы V. Определить угол χ разлета частиц в лабораторной системе. Рассмотреть, в частности, случай $m_1 = m_2$.

3.100. Квант света с частотой ω_0 рассеивается на движущемся свободном электроне. Начальный импульс p_0 электрона составляет угол ϑ_0 с направлением распространения кванта. Найти зависимость частоты ω рассеянного фотона от направления его движения (эффект Комптона). Рассмотреть, в частности, случай, когда электрон до столкновения покоился.

3.101. Фотон с энергией $\hbar\omega_0$ рассеивается на ультрарелятивистском электроне с массой m и энергией $\mathscr{E}_0 \gg \hbar\omega_0$. Найти максимальную энергию $\hbar\omega$ рассеянного фотона.

3.102. Найти изменение энергии электрона при столкновении его с фотоном. Начальная энергия электрона $\mathscr{E}_0$, фотона $\hbar\omega_0$, угол между их импульсами ϑ. Исследовать результат. При каких условиях электроны будут ускоряться под действием фотонных ударов?

3.103. Выразить инвариантные переменные s, t, u (3.49) для случая упругого рассеяния одинаковых частиц через массу m, абсолютную величину импульса q и угол рассеяния ϑ в системе ц. и.

3.104. Пусть в лабораторной системе частица b покоится. Выразить энергию $\mathscr{E}_a$ частицы a в лабораторной системе, а также энергии $\mathscr{E}_a', \mathscr{E}_b'$ частиц в системе ц. и. через инвариантную переменную s (см. (3.49)). Сделать то же самое для абсолютных величин трехмерных импульсов p_a, p' ($p_a' = p_b' = p'$). Использовать систему единиц, в которой скорость света $c = 1$.

3.105. Выразить энергии $\mathscr{E}_c, \mathscr{E}_d$ частиц, возникающих в результате двухчастичной реакции, через инвариантные переменные (3.49). Энергии $\mathscr{E}_c, \mathscr{E}_d$ относятся к лабораторной системе отсчета.
3.106. Выразить угол ϑ между трехмерными импульсами p_a и p_c в лабораторной системе при двухчастичной реакции через инвариантные переменные s, t, u (3.49). Выразить через эти же переменные угол ϑ' между импульсами $\boldsymbol{p}'_a, \boldsymbol{p}'_c$ в системе ц. и.
3.107. Построить область допустимых значений переменных s и t (см. (3.49)) для реакции $\gamma + p \to \pi^0 + p$ (фоторождение π^0-мезона на протоне). Какая точка этой области соответствует порогу реакции? Каково пороговое значение T_0 энергии γ-кванта в лабораторной системе? Какую кинетическую энергию T_π имеет в лабораторной системе π^0-мезон при пороговой энергии γ-кванта?
3.108. Два γ-кванта превращаются в пару электрон - позитрон. Энергия одного из них задана и равна $\mathscr{E}_0$. При каких значениях $\mathscr{E}_2$ энергии второго кванта и угла ϑ между их импульсами возможна эта реакция? Изобразить эти значения на плоскости переменных $\mathscr{E}_2, \cos\vartheta$. Найти также область допустимых значений переменных s, t (3.49). Энергию записывать в единицах mc^2, где m - масса электрона.
3.109*. Построить на кинематической плоскости переменных s, t (3.49) физические области, соответствующие следующим трем процессам:
а) $\pi^+ + p \to \pi^+ + p$ - упругое рассеяние,
б) $\pi^- + \bar{p} \to \pi^- + \bar{p}$ - упругое рассеяния античастиц,
в) $\pi^+ + \pi^- \to p + \bar{p}$ - рождение пары протон - антипротон.

Массы всех мезонов и всех нуклонов одинаковы (m и M соответственно).
3.110. Доказать, что излучение и поглощение света свободным электроном в вакууме невозможно. Исходить из закона сохранения энергии импульса.
3.111. Доказать, что при равномерном движении заряженной свободной частицы в среде с показателем преломления $n(\omega)$ (масса частицы m, заряд e, скорость v) может происходить излучение электромагнитных волн (эффект Вавилова - Черенкова) [11]). Выразить угол ϑ между направлением распространения волны и направлениям скорости v частицы через $v, \omega, n(\omega)$.

УказАниЕ. В покоящейся среде с показателем преломления $n(\omega)$ фотон обладает энергией $\mathscr{E} = \hbar\omega$ и импульсом $p = n(\omega)\frac{\hbar\omega}{c}$.
3.112. Доказать, что свободный электрон, движущийся в среде со скоростью v, может поглощать электромагнитные волны, частоты ω которых удовлетворяют неравенству $v > c/n(\omega)$, где $n(\omega)$ - показатель преломления среды.

3.113. Частица, имеющая,вообще говоря, сложную структуру и содержащая внутри себя электрические заряды (например, атом), движется равномерно со скоростью v в среде с показателем преломления $n(\omega)$ и находится в возбужденном состоянии. При переходе в нормальное состояние частица излучает квант с частотой ω_0 (в системе покоя). Этот квант наблюдается в лабораторной системе отсчета под углом ϑ к направлению движения частицы. Какая частота ω наблюдается в лабораторной системе (эффект Доплера в преломляющей среде)? Рассмотреть, в частности, случай $\omega_0 \to 0$.

УказАниЕ. Члены второго порядка по $\hbar$ не учитывать, считать, что $\hbar\omega_0 \ll mc^2$, где m - масса частицы.
3.114. Частица, рассмотренная в задаче 3.113, движется равномерно через среду, находясь в своем нормальном состоянии (остальные условия задачи 3.113 сохраняются). Доказать, что при этом может происходить излучение, сопровождаемое возбуждением частицы. Выяснить, какие условия необходимы для возникновения такого излучения. Найти частоту ω этого излучения (сверхсветовой эффект Доплера).

[411] Аналогичный эффект может иметь место также при прохождении через вещество нейтральной частицы, обладающей электрическим или магнитным моментом.

3.115. Из законов сохранения энергии и импульса следует, что черенковское излучение одного кванта частоты ω невозможно, если показатель преломления среды $n(\omega) \leqslant 1$ (см. задачу 3.112). В частности, невозможно одноквантовое черенковское излучение достаточно жестких фотонов, так как при больших частотах $n(\omega) < 1$. Показать, что при равномерном движении быстрой заряженной частицы с энергией $\mathscr{E}_0$ через среду может происходить излучение сразу двух фотонов, один из которых (с частотой ω_2) может быть жестким, так что для него $n(\omega_2) \to 1$. Выяснить, каким условиям должны удовлетворять частота ω_1 другого фотона и скорость v_0 частицы ($\hbar\omega_1 \ll cp_0$), чтобы был возможен такой процесс (жесткое излучение Ва вилова-Черенкова). Какова наибольшая энергия жесткого кванта?

3.116. Рассмотреть кинематику жесткого излучения Вавилова-Черенкова (см. предыдущую задачу), считая электрон ультрарелятивистским, $\mathscr{E}_0 \gg mc^2$, а угол ϑ_2 вылета жесткого кванта малым. Определить максимальное значение энергии $(\hbar\omega_2)_{\max}$ жесткого кванта, которого можно достичь в этом случае; рассмотреть характерные частные случаи.

3.117. Кристаллическая решетка способна принимать импульс только дискретными порциями $\boldsymbol{q} = 2\pi\hbar\boldsymbol{g}$, где $\boldsymbol{g}$ - вектор обратной обратной решетки. В случае кристаллической решетки, элементарная ячейка которой имеет форму прямоугольного параллелепипеда с ребрами a_1, a_2, a_3, вектор $\boldsymbol{g} = \left(\frac{n_1}{a_1}, \frac{n_2}{a_2}, \frac{n_3}{a_3}\right)$, где n_1, n_2, n_3 - любые целые числа. Считая, что кристалл, имеющий очень большую массу, не может принимать от части-

цы энергию, выяснить, какой характер будет иметь угловое распределение частиц, рассеиваемых на монокристалле.

3.118. Учитывая связь $p_0 = 2\pi\hbar/\lambda_0$ между импульсом p_0 частицы и соответствующей длиной волны λ_0, вывести условие Брэгга-Вульфа: $2a\sin(\vartheta/2) = n\lambda_0$, где a - расстояние между кристаллическими плоскостями, ϑ - угол рассеяния частицы, n - целое число.

3.119. Выяснить, какой характер будет иметь энергетический спектр тормозных квантов, возникающих при рассеянии заряженных частиц на монокристалле (ср. с задачей 3.117). Угол между направлением распространения тормозного кванта и первоначальным импульсом частицы фиксирован и мал, $\vartheta \ll 1$. Частица ультрарелятивистская, $\mathscr{E}_0 \gg mc^2$.

3.120*. В классической модели электрон можно представить в виде заряженного шара с некоторым радиусом R. Оценить R в предположении, что масса электрона имеет электростатическое происхождение, т. е. его энергия покоя равна электростатической энергии заряженного шара.

Рекомендуемая литература: кроме источников, указанных к разделу 3.1, весьма полезны книги и статьи [Ландау и Лифшиц, Механика], [Окунь (2000)], [Барашенков (1974)], [Окунь (1989)], [Фейнберг (1974)], [Медведев (1977)], [Никитин и др. (1992)], [Смородинский (1972)], [Бюклинг и Каянти (1975)].

C.2.3 3.3. Answers and Solutions

3.1. 1. Из однородности пространства и времени следует, что преобразования должны быть линейными:

$$x' = \alpha x + \alpha' y + \beta' z + \beta t + p \quad \text{и т. д.} \tag{1}$$

где $\alpha, \alpha', \beta \ldots$ - постоянные коэффициенты, которые могут зависеть от относительной скорости V. Если бы эти величины зависели от координат и времени, это означало бы, что закон преобразования (1) неодинаков для разных точек пространства и разных моментов времени, что противоречит однородности пространства-времени.

2. Пусть три пространственные оси двух систем отсчета, S и S', совпадают при $t = t'$

(рис. 1.1). В этих условиях свободные члены в равенствах (1) (постоянные p и т.п.) обращаются в нуль. Мы видим, далее, что плоскость xy совпадает с плоскостью $x'y'$. Это означает, что при $z = 0$ должно быть и $z' = 0$, причем эти равенства должны выполняться при любых значениях x', y', z' и соответственно x, y, z. Это возможно только если связь между z и z' имеет вид $z' = kz, k = \text{const}$. Ввиду произвольности направления осей y и z (изотропия пространства!) такая же связь с тем же коэффициентом k должна быть между y и $y' : y' = ky$.

Преобразования x' и t' запишем в виде

$$x' = \alpha x + \beta t + \alpha' y + \beta' z, \quad t' = \sigma x + \delta t + \sigma' y + \delta' z \tag{2}$$

В плоскости $x' = 0$ имеем $x = Vt$ при любых z и y, так как система S' движется относительно S со скоростью V. Подставив эти значения x и x' в первое равенство (2), будем иметь $\alpha' = \beta' = 0, \beta = -\alpha V$. Наконец, обратимся к формуле преобразования для t'. Мы установили часы в системе S' так, чтобы при $x = 0$ и $t = 0$ было $t' = 0$. Это возможно только при $\sigma' = \delta' = 0$. В итоге имеем следующие формулы преобразований:
(3) $x' = \alpha(V)(x - Vt), \quad y' = k(V)y, \quad z' = k(V)z, \quad t' = \sigma(V)x + \delta(V)t,$

где у коэффициентов явно указана зависимость от относительной скорости.
3. Используем теперь условие равноправия систем S и S'. Оно означает, что формулы перехода из S' в S должны получаться из формул перехода (3) заменой V на $-V$:

$$x = \alpha(-V)\left(x' + Vt'\right), \quad y = k(-V)y', \quad z = k(-V)z'$$
$$t = \sigma(-V)x' + \delta(-V)t' \tag{4}$$

Обратимся сначала к формулам для y и z. Случаи (3) и (4) отличаются только направлением относительной скорости, которая в том и другом случаях перпендикулярна плоскости yz. Но оба направления совершенно равноправны (изотропия пространства, равноправие правого и левого!), поэтому $k(-V) = k(V)$. Совершая преобразование от y к y' и затем снова от y' к y, будем иметь $y = k^2 y$, т. е. $k^2 = 1, k = \pm 1$. Значение $k = -1$ отвечает противоположной ориентации осей y и y', поэтому соответствие с рис. 1.1 будет только при значении $k = 1$.

Подставим в формулу (4) для x значения x' и t' из (3):

$$x = [\alpha(-V)\alpha(V) + V\sigma(V)\alpha(-V)]x + \alpha(-V)V[\delta(V) - \alpha(V)]t. \tag{5}$$

Чтобы это равенство было справедливо при всех x и t, коэффициенты преобразования должны удовлетворять соотношению

$$\delta(V) = \alpha(V) \tag{6}$$

Второе соотношение, следующее из (5), нам не потребуется. Вместо него воспользуемся постулатом об инвариантности скорости света.
4. Пусть в момент совпадения систем S и S' $(t = t' = 0)$ из совпадающих начал отсчета испущен короткий световой сигнал. Точка пересечения
фронта волны с осью x движется в системе S со скоростью $x/t = c$. Но вследствие того, что световой сигнал распространяется во всех системах отсчета с одинаковой скоростью, скорость фронта в системе S' будет той же самой: $x'/t' = c$. С помощью этих условий получаем из (3), поделив уравнение для x' почленно на уравнение для t':

$$c = \frac{\alpha(c - V)}{\sigma c + \alpha}$$

Отсюда

$$\sigma(V) = -\frac{V}{c^2}\alpha(V) \tag{7}$$

Чтобы определить коэффициент $\alpha(V)$, рассмотрим уравнения сферического волнового фронта в системах S и S':

$$x^2 + y^2 + z^2 = (ct)^2, \quad x'^2 + y'^2 + z'^2 = (ct')^2 \tag{8}$$

В этих уравнениях опять использовано свойство инвариантности скорости света, поэтому c - одинаковое. Поскольку $y' = y, z' = z$, то $(ct')^2 - x'^2 = (ct)^2 - x^2$. С помощью (3), (6) и (7) получаем из последнего уравнения

$$\alpha^2\left(1 - v^2/C^2\right)\left(c^2t^2 - x^2\right) = (ct)^2 - x^2$$

откуда

$$\alpha(V) = \pm\left(1 - V^2/c^2\right)^{-1/2} \tag{9}$$

Здесь снова нужно взять только знак плюс, так как минус соответствует противоположному направлению осей x и x'. Собирая воедино результаты (3)-(9), приходим к преобразованиям Лоренца (3.7).

3.2.

$$x - x_0 = \frac{x' - x'_0 + V\left(t' - t'_0\right)}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad y - y_0 = y' - y'_0$$
$$z - z_0 = z' - z'_0, \quad t - t_0 = \frac{t' - t'_0 + \frac{\mathbf{V}}{c^2}\left(x' - x'_0\right)}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

3.5. Координаты часов, показывающих равное время $t = t'$ в системах S и S' :

$$x = \frac{c^2}{V}\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)t, \quad x' = -\frac{c^2}{V}\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)t$$

Из этих формул видно, что точка, в которой $t = t'$, движется равномерно в каждой из систем S и S'. Если ввести систему отсчета, относительно которой эта точка неподвижна, то S и S' движутся в противоположные стороны с равными скоростями $V_0 = \frac{c^2}{V}\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)$ (V_0 представляет собой релятивистскую «половину» скорости V в том смысле, что релятивистское сложение двух скоростей V_0 даст V).

3.6. В системе S' продолжительность одного периода $T' = 2l/c$; в системе S время T_1 движения «зайчика» вдоль стержня в направлении относительной скорости V вычисляется из уравнения

$$T_1 = \frac{1}{c}\left(t\sqrt{1 - V^2/c^2} + VT_1\right)$$

время движения в обратном направлении T_2 получается заменой V на $-V$. Для отношения T' к $T = T_1 + T_2$ находим

$$\frac{T'}{T} = \sqrt{1 - V^2/c^2}$$

откуда следует (3.11).

3.8. а) Нельзя. 12 час 00 мин могут показать одновременно двое часов в одной из систем отсчета и только одни часы в другой системе отсчета.

б) Показания пространственно совпадающих часов не зависят от выбора системы отсчета:

$$t'_A = 12 \text{ час } 00 \text{ мин } + \frac{l_0}{V} = 13 \text{ час } 00 \text{ мин}$$

$$t_A = 12 \text{ час } 00 \text{ мин } + \frac{l_0}{V}\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} = 12 \text{ час } 36 \text{ мин.}$$

Показания оставшихся часов B и B' будут зависеть от выбора системы отсчета вследствие относительности одновременности.

С точки зрения наблюдателя на «платформе» (рис. 3.10 а):

$$t'_B = 12 \text{ час } 21,6 \text{ мин}, \; t_B = t_A = 12 \text{ час } 36 \text{ мин.}$$

С точки зрения наблюдателя в «поезде» (рис. 3.10 б):

$$t'_B = t'_A = 13 \text{ час } 00 \text{ мин }, \quad t_B = 13 \text{ час } 14,4 \text{ мин.}$$

в) С точки зрения наблюдателя на «платформе»:

$$t_A = 13 \text{ час } 00 \text{ мин } = t_B, \quad t'_B = 12 \text{ час } 36 \text{ мин }, \quad t'_A = 13 \text{ час } 14,4 \text{ мин.}$$

С точки зрения наблюдателя в «поезде»:

$$t_A = 12 \text{ час } 21,6 \text{ мин }, \quad t'_A = t'_B = 12 \text{ час } 36 \text{ мин }, \quad t_B = 13 \text{ час } 00 \text{ мин.}$$

Во всех случаях отстают те часы, показания которых приходится сравнивать с показаниями двух часов в другой системе отсчета.

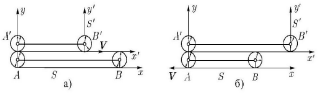


Рис. 3.10

3.9. По земным часам: $\Delta t = 8$ лет. При расчете запасов снаряжения следует брать в основу промежуток времени $\Delta t_0 = 0,01\Delta t \approx 1$ месяц по часам в ракете;

$$T = mc^2(\gamma - 1) \equiv 2,5 \cdot 10^{16} \text{ КвТ-Ч.}$$

Это количество энергии примерно в 10000 раз превышает годовую выработку электроэнергии во всем мире в настоящее время.

3.10.

$$v = \frac{2l_0\Delta t}{(\Delta t)^2 + l_0^2/c^2}$$

Для наблюдателя, связанного с первым масштабом (рис. 3.11 а), сначала совпадут левые концы, потом правые; для наблюдателя, связанного со вторым масштабом (рис. 3.11 б), - наоборот. С точки зрения наблюдателя, относительно которого масштабы движутся с одинаковой по величине скоростью, концы совпадают одновременно.

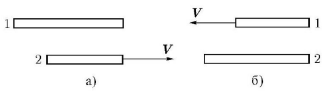


Рис. 3.11

3.11. Введем поперечную и продольную компоненты радиуса-вектора

$$\boldsymbol{r}_{\parallel} = \boldsymbol{V}\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{V}}{V^2}, \boldsymbol{r}'_{\parallel} = \boldsymbol{V}\frac{\boldsymbol{r}'\cdot\boldsymbol{V}}{V^2}$$
$$\boldsymbol{r}_{\perp} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_{\parallel}, \boldsymbol{r}'_{\perp} = \boldsymbol{r}' - \boldsymbol{r}'_{\parallel}$$

Применив к $\boldsymbol{r}_{\parallel}$и $r_{\perp}$ преобразования Лоренца (3.7), получим

$$\boldsymbol{r}_{\parallel} = \gamma\left(\boldsymbol{r}'_{\parallel} + \boldsymbol{V}t'\right), \quad \boldsymbol{r}_{\perp} = \boldsymbol{r}'_{\perp}$$

Окончательно:

$$\boldsymbol{r} = \gamma\left(\boldsymbol{r}' + \boldsymbol{V}t'\right) + (\gamma-1)\frac{(\boldsymbol{r}'\times\boldsymbol{V})\times\boldsymbol{V}}{V^2}, \quad t = \gamma\left(t' + \frac{\boldsymbol{r}'\cdot\boldsymbol{V}}{c^2}\right)$$

3.12.

$$\boldsymbol{A} = \gamma\left(\boldsymbol{A}' + \frac{\boldsymbol{V}}{c}A'_0\right) + (\gamma-1)\frac{(\boldsymbol{A}'\times\boldsymbol{V})\times\boldsymbol{V}}{V^2}, \quad A_0 = \gamma\left(A'_0 + \frac{\boldsymbol{A}'\cdot\boldsymbol{V}}{c}\right)$$

3.13. $v = v_{\parallel} + v_{\perp} = \dfrac{v' + \boldsymbol{V} + (\gamma-1)\frac{\boldsymbol{V}}{V^2}\left[(v'\cdot\boldsymbol{V}) + V^2\right]}{\gamma\left(1 + \frac{v'\cdot\boldsymbol{V}}{c^2}\right)}$

где v и v' - скорости в системах S и S'. Можно также просто продифференцировать по времени радиус-вектор r, выраженный через r' и t' формулой, полученной в задаче 3.11 .

3.17. Угол томасовской прецессии определяется соотношением

$$\varphi = -\arccos\frac{v^2\sqrt{1-V^2/c^2} + V^2\sqrt{1-v^2/c^2}}{V^2 + v^2 - V^2v^2/c^2}$$

При $v, V \ll$ угол $\varphi \approx 0$.

При $v \to c$ угол $\varphi \to -\arccos\sqrt{1-V^2/c^2}$; если при этом и $V \to c$, то $\varphi \to \pi/2$.

3.18. $l = l_0\frac{1-v^2/c^2}{1+v^2/c^2}$.

3.19. а) $V = 2\cdot 0,9c = 1,8c$; б) $V = 0,994c$.

3.20. Относительная скорость двух частиц в системе, связанной с одной из них, $V = \frac{2v}{1+v^2/c^2}$. Отсюда

$$\mathscr{E} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-V^2/c^2}} = mc^2\left[2\left(\frac{\mathscr{E}_0}{mc^2}\right)^2 - 1\right]$$

В ультрарелятивистском случае $\mathscr{E}_0 \gg mc^2$ и, следовательно,

$$\mathscr{E} = \frac{2\mathscr{E}_0^2}{mc^2}$$

Если ускорению подвергаются электроны ($mc^2 = 0,5$МВ), то, например, при $\mathscr{E}_0 = 50$ МэВ получается выигрыш мощности ускорителя в 200 раз: $\mathscr{E} = 10000$МВ.

3.21. Эту задачу, как и задачу 3.13, можно решить двумя способами. Результат: □

$$\dot{v} = \frac{1}{\gamma^2 s^2}\dot{v}' - \frac{(\gamma-1)(\dot{v}'\cdot\boldsymbol{V})\boldsymbol{V}}{\gamma^3 s^3 V^2} - \frac{(\dot{v}'\cdot\boldsymbol{V})v'}{\gamma^2 s^3 c^2}$$

где

$$s = 1 + \frac{v'\cdot\boldsymbol{V}}{c^2}$$

Из этих формул видно, что если в одной системе отсчета частица движется с постоянным ускорением $\dot{v}'$, то в другой системе отсчета ускорение $\dot{v}$, вообще говоря, зависит от времени (так как в формулы преобразования входит переменная скорость v' частицы).

3.22. $w_i w^i = -\gamma^6 \left[\dot{v}^2 - \left(\dot{v} \times \frac{v}{c}\right)^2\right] = -\gamma^4 \left[\dot{v}^2 + \gamma^2 v^2 \frac{\dot{v}^2}{c^2}\right] < 0$, т. е. четырехмерное ускорение - пространственноподобный вектор.

3.23. Пусть S' - мгновенно сопутствующая частице система. Согласно ответу к задаче 3.21,

$$\dot{v}' = \gamma^2 \left[v + \frac{\gamma - 1}{v^2}(\dot{v} \cdot v)v\right] \tag{1}$$

Отсюда квадрат ускорения

$$\dot{v}'^2 = \gamma^4 \left[\dot{v}^2 + \frac{\gamma^2 (\dot{v} \cdot v)^2}{c^2}\right] = \gamma^6 \left[\dot{v}^2 - \left(\dot{v} \times \frac{v}{c}\right)^2\right] \tag{2}$$

Если скорость частицы меняется только по величине, то $\dot{v} \| v$ и

$$\dot{v}' = \gamma^3 \dot{v} \tag{3}$$

Если скорость частицы меняется только по направлению, то $v \perp \dot{v}$ и $v \cdot \dot{v} = 0$, так что

$$\dot{v}' = \gamma^2 \dot{v} \tag{4}$$

Результат (2) можно получить и другим, более простым способом, воспользовавшись выражением квадрата четырехмерного ускорения, найденным в предыдущей задаче. Квадрат $w_i w^i$ является четырехмерным инвариантом. Это значит, что вычисление $w_i w^i$ как в системе S, так и в системе S' должно дать один и тот же результат. Замечая, что скорость частицы $v' = 0$, получим формулу (2).

3.24 .

$$v(t) = \frac{wt + v_0/\sqrt{1 - (v_0/c)^2}}{\sqrt{1 + (wt)^2/c^2 + (v_0/c)^2 / (1 - v_0^2/c^2)\big]^2}}$$

$$x(t) = \frac{c^2}{w}\left\{\sqrt{1 + \frac{1}{c^2}\left(wt + \frac{v_0}{1 - v_0^2/c^2}\right)^2} - \frac{v_0/c}{1 - v_0^2/c^2}\right\} + x_0$$

В ультрарелятивистском пределе:

$$v(t) \approx c, \quad x(t) \approx ct - c^2/w$$

В нерелятивистском пределе:

$$v(t) = v_0 + wt, \quad x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} w t^2$$

3.25. Время разгона по часам в неподвижной системе:

$$T = \frac{1}{|\dot{v}|} \int_0^V \frac{dv}{(1 - v^2/c^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{v}{|\dot{v}|\sqrt{1 - v^2/c^2}} = 47.5 \text{ лет}$$

Время разгона по часам в системе, связанной с ракетой,

$$\tau = \frac{c}{2|\dot{v}|} = \ln\left|\frac{1+v/c}{1-v/c}\right| = 2,5 \text{ года}$$

3.26. Формулы (1) описывают преобразование Лоренца с малой относительной скоростью Δv и поворот на угол $\Delta\varphi = |\Delta\varphi|$, причем ось вращения проходит через начало координат и параллельна вектору $\Delta\varphi$. Эти преобразования вследствие малости Δv и $\Delta\varphi$ могут производится в любой последовательности. Таким образом, мгновенно сопутствующая система является вращающейся. Это вращение представляет собой чисто кинематический релятивистский эффект и называется прецессией Томаса (см. задачу 3.17).

При $v \ll c$ формулы (2) принимают вид

$$\Delta v \approx \delta v, \quad \Delta\varphi \approx \frac{1}{2c^2}\delta v \times v$$

В этом пределе величину

$$\omega_T = \frac{\Delta\varphi}{\delta t} = \frac{1}{2c^2}\dot{v} \times v$$

можно рассматривать как угловую скорость томасовской прецессии мгновенно сопутствующей системы относительно лабораторной системы S.

3.27. $\operatorname{tg}\vartheta = \frac{v'\sqrt{1-V^2/c^2}\sin\vartheta'}{v'\cos\vartheta'+V}$.

3.28. В системе S : $\cos\alpha = \frac{\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_2}{|\boldsymbol{v}_1||\boldsymbol{v}_2|}$. В системе S' :

$$\cos\alpha' = \frac{(\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{V})\cdot(\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{V}) - \frac{1}{c^2}(\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{V})\cdot(\boldsymbol{v}_2\times\boldsymbol{V})}{\sqrt{(\boldsymbol{v}_1-\boldsymbol{V})^2 - \frac{1}{c^2}(\boldsymbol{v}_1\times\boldsymbol{V})^2}\sqrt{(\boldsymbol{v}_2-\boldsymbol{V})^2 - \frac{1}{c^2}(\boldsymbol{v}_2\times\boldsymbol{V})^2}}$$

3.29. Угол в системе S' стремится к нулю. Для того чтобы убедиться в этом, положим $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}_0 c$, где $|\boldsymbol{V}_0| = 1$. Вычислим $\cos\alpha'$ по формуле, полученной в предыдущей задаче. Воспользовавшись тождеством

$$(a\times b)\cdot(a_1\times b_1) = (a\cdot a_1)(b\cdot b_1) - (a\cdot b_1)(a_1\cdot b)$$

получим

$$\cos\alpha' = \frac{c^2 - \boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{V} - \boldsymbol{v}_2\cdot\boldsymbol{V} + \frac{1}{c^2}(\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{V})(\boldsymbol{v}_2\cdot\boldsymbol{V})}{\sqrt{(c-\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{V}/c)^2}\cdot\sqrt{(c-\boldsymbol{v}_2\cdot\boldsymbol{V}/c)^2}} = 1$$

откуда $\alpha' = 0$. Это сужение углового распределения является характерным релятивистским эффектом, проявляющимся во многих явлениях.

3.30. $\cos\vartheta = \frac{\cos\vartheta'+\beta}{1+\beta\cos\vartheta'}$.

3.31. Определение угла аберрации сводится к вычислению двух углов (рис. 3.12.): угла α_1 между направлением луча AC и направлением скорости v Земли в первом ее положении и угла α_2 между направлением BC

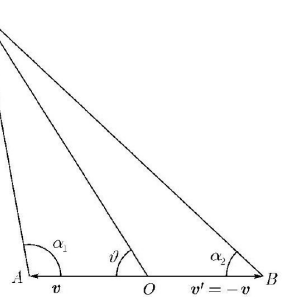


Рис. 3.12

луча и направлением скорости v' Земли во втором ее положении (через полгода). Угол аберрации δ можно определить как $\delta = (\pi - \alpha_2) - \alpha_1 = \pi - \alpha_1 - \alpha_2$. Углы α_1 и α_2 вычислим по формулам задачи 3.27, выразив

их через угол ϑ, который наблюдается в системе отсчета, связанной с Солнцем, между лучом OC света и вектором скорости Земли:

$$\operatorname{tg}(\pi - \alpha_1) = \frac{1}{\gamma}\frac{\sin\vartheta}{\cos\vartheta - \beta}, \quad \operatorname{tg}(\pi - \alpha_2) = -\frac{1}{\gamma}\frac{\sin\vartheta}{\cos\vartheta + \beta}$$

где $\beta = \frac{v}{c}, \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$.

Отсюда находим

$$\operatorname{tg}\frac{\delta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\delta}{1+\cos\delta}} = \beta\gamma\sin\vartheta$$

Заметим, что все три угла между скоростями, изображенные на рис. 3.12, относятся к разным системам отсчета и что сам рисунок условен (например, изображенные на нем отрезки $AC = CO = CB = c$).

Из полученных результатов видно, в частности, что угол аберрации δ зависит только от относительной скорости v Земли и Солнца и не зависит от скорости Солнечной системы относительно звезды.

3.32. Если положение Земли на орбите определяется азимутальным углом φ и $\boldsymbol{a} = (0, a_\vartheta, a_\alpha)$ - вектор, проведенный из точки (ϑ, α) небесной сферы в точку видимого положения звезды на небесной сфере, то

$$a_\vartheta = -\beta\cos\vartheta \cdot \sin(\alpha - \varphi),$$
$$a_\alpha = -\beta\cos(\alpha - \varphi).$$

Отсюда видно, что видимое положение звезды на небосводе в течение года описывает эллипс с полуосями $\boldsymbol{\beta}\cos\vartheta$ и $\boldsymbol{\beta}$.

3.33. Рассмотрим в системе S пучок внутри телесного угла $d\Omega = \sin\vartheta d\vartheta d\alpha$. В системе S' этот пучок будет наблюдаться внутри угла $d\Omega' = \sin\vartheta' d\vartheta' d\alpha'$. Угол $\alpha = \alpha', \mathbf{a}\cos\vartheta' = \frac{\cos\vartheta - \boldsymbol{\beta}}{1 - \boldsymbol{\beta}\cos\vartheta}$. Отсюда

$$d\Omega' = \sin\vartheta' d\vartheta' d\alpha' = \frac{1-\beta^2}{(1-\boldsymbol{\beta}\cos\vartheta)^2} d\Omega$$

При этом, разумеетсяя $\int d\Omega' = \int d\Omega = 4\pi$.

3.34. В системе S та же доля dN от полного излучения придется на другой телесный угол $d\Omega$. Поэтому с помощью формулы из ответа к предыдущей задаче получим

$$f(\vartheta) = \frac{1-\beta^2}{(1-\beta\cos\vartheta)^2} = \frac{1}{\gamma^2\left[1 - (1-\gamma^{-2})^{1/2}\cos\vartheta\right]^2}$$

где ϑ - угол между направлением наблюдения и скоростью источника. Угловое распределение света становится анизотропным по мере роста $\beta = v/c$

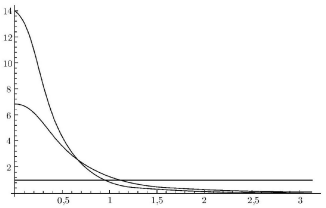


Рис. 3.12 а
(см. рис. 3.12 а, на котором представлена функция $f(\vartheta)$ для $\gamma = 1,0,1,5,2,0$. Угол измерен в радианах). При $\gamma \gg 1$ распределение становится резко анизотропным, так что в направлении относительной скорости излучается подавляющая часть света: $f(0)/f(\pi) \approx 4\gamma^2 \gg 1$. Функцию распределения при углах $\vartheta \ll 1$ можно упростить путем разложения $\cos\vartheta$ в ряд:

$$f(\vartheta) = \frac{4}{\gamma^2\left(\gamma^{-2} + \vartheta^2\right)^2}$$

Из последней формулы следует, что любой источник света, движущийся с релятивистской скоростью, будет в основном излучать вперед по движению внутри конуса с углом раствора

$$\Theta_0 \approx \gamma^{-1} \ll 1$$

если его излучение в системе покоя не сильно отличается от изотропного.

3.35. $\boldsymbol{k} = \gamma\left(\boldsymbol{k}_0 + \frac{\boldsymbol{V}\omega_0}{c^2}\right) + \frac{\gamma-1}{V^2}\left(\boldsymbol{k}_0 \times \boldsymbol{V}\right) \times \boldsymbol{V}$

3.36. Если ω_0 - частота в той системе, где источник покоится и V скорость источника относительно приемника света, то приемник зарегистрирует меньшую частоту $\omega = \omega_0\sqrt{1 - V^2/c^2}$ (красное смещение).

Угол α луча с направлением движения источника в системе его покоя определяется формулой

$$\cos\alpha = -\frac{V}{c}$$

Угол α близок 90° только при $V \ll c$. Если $V \to c$, то $\alpha \to \pi$.

3.37. а) $\lambda = \lambda_0\sqrt{\frac{1-V/c}{1+V/c}}$; $\quad \sigma\Big)\ \lambda = \lambda_0\sqrt{\frac{1+V/c}{1-V/c}}$.

3.38. $\omega = \omega_0\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta\cos\Theta}, \quad J = J_0\frac{\left(1-\beta^2\right)^{\frac{3}{2}}}{(1-\boldsymbol{\beta}\cos\Theta)^2}$.

Частоты совпадают, $\omega = \omega_0$, при $\Theta = \Theta_0$, где $\cos\Theta = \left(1 - \sqrt{1-\beta^2}\right)/\boldsymbol{\beta}$; при этом $J = J_0\sqrt{1-\beta^2}$. Интенсивности сравниваются, $J = J_0$, при $\Theta = \Theta_1 < \Theta_0, \cos\Theta_1 = \left[1 - (1-\boldsymbol{\beta}^2)^{\frac{8}{4}}\right]/\boldsymbol{\beta}$. Когда источник света находится далеко от наблюдателя, приближаясь к нему, так что $\Theta < \Theta_0$, частота $\omega > \omega_0$ из-за эффекта Доплера («фиолетовое» смещение). Если к тому же $\Theta < \Theta_1$, то интенсивность J также превышает J_0 - движущийся источник выглядит более ярким, чем неподвижный. Интенсивность максимальна при $\Theta = 0$ и составляет $J_{\max} = J_0(1+\beta)^{\frac{3}{2}}/\sqrt{1-\beta}$. При $\Theta = \Theta_0$ частота $\omega < \omega_0$, и наблюдатель видит «красное» смещение; интенсивность света теперь меньше, чем у неподвижного источника. Эти эффекты особенно заметны при $V \approx c$, когда

$$\omega_{\max} = \omega_0\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}} \gg \omega_0 \quad \text{и} \quad J_{\max} = J_0\frac{(1+\beta)^{\frac{3}{2}}}{(1-\beta)^{\frac{1}{2}}} \gg J_0$$

а угол

$$\Theta \approx \sqrt{2}(1-\beta)^{\frac{1}{4}} \ll 1$$

так что покраснение света начинается, когда источник находится еще далеко от наблюдателя, приближаясь к нему. Это происходит, начиная с расстояний $l \approx d/\Theta_0$.

Число фотонов, излучаемых в единицу лабораторного времени в интервале углов $0 < \Theta < \Theta_0$, есть

$$N_1 = J_0\left(1-\beta^2\right)\int\limits_0^{\Theta_0}\frac{2\pi\sin\Theta d\Theta}{(1-\boldsymbol{\beta}\cos\Theta)^2} = 2\pi J_0\sqrt{1-\beta^2}\,\frac{1+\boldsymbol{\beta}-\sqrt{1-\beta^2}}{\boldsymbol{\beta}} =$$

$$= 2\pi J_0\sqrt{1-\boldsymbol{\beta}^2}\,(1+\cos\Theta_0)$$

а в интервале $\Theta_0 < \Theta < \pi$

$$N_2 = 2\pi J_0\sqrt{1-\beta^2}\,\frac{\sqrt{1-\beta^2}-1+\boldsymbol{\beta}}{\beta} = 2\pi J_0\sqrt{1-\beta^2}\,(1-\cos\Theta_0)$$

Очевидно, что $N_1 + N_2 = 4\pi J_0\sqrt{1-\beta^2}$ соответствует полному числу фотонов, излучаемому в единицу времени по всем направлениям. N_1 и N_2 равны между собой при $\boldsymbol{\beta} \ll 1$, когда $\cos\Theta_0 \approx 0$. Если же $\boldsymbol{\beta}$ приближается к единице, то N_1 делается много больше, чем N_2. Таким образом в этом ультрарелятивистком случае подавляюшая часть света излучается в узком конусе $\Theta < \Theta_0$, испытывая при этом фиолетовое смещение.

3.39. Используя решение предыдущей задачи, получим

$$I = Jh\omega = I_0\frac{\left(1-\beta^2\right)^2}{(1-\beta\cos\Theta)^3}$$

где $I_0 = J_0\hbar\omega_0$ - изотропно распределенная сила света в системе покоя источника. Полный световой поток

$$\Phi = \int\limits_{4\pi} I d\Omega = 2\pi I_0\left(1-\beta^2\right)^2\int\limits_0^{\pi}\frac{\sin\Theta d\Theta}{\left(1-\beta^2\cos\Theta\right)^3} = 4\pi I_0 = \Phi_0$$

одинаков в системе покоя источника и в лабораторной системе.

3.40. Введем систему S', связанную с зеркалом (S - лабораторная система). Обозначим через α_1' и α_2' углы, образуемые волновыми векторами k_1' и $\boldsymbol{k}_2'$ падающей и отраженной волн с направлением скорости V зеркала (рис. 3.13). Частоту до и после отражения будем обозначать ω_1' и ω_2' соответственно. Аналогичные величины в системе S будем обозначать теми же буквами без штрихов. Будем исходить из известных законов отражения в системе S' : $\omega_1' = \omega_2' = \omega'$ и $\alpha_2' = \pi - \alpha_1'$, откуда $\cos\alpha_2' = -\cos\alpha_1'$.

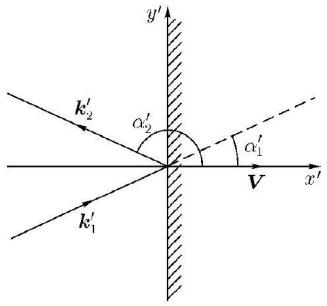


Рис. 3.13

Выражая ω' через $\omega, \cos\alpha'$ через $\cos\alpha$ с помощью формул (3.20) и (3.24) и решая получившиеся уравнения относительно ω_2 и $\cos\boldsymbol{\alpha}_2$, найдем

$$\cos\alpha_2 = -\frac{(1+\beta^2)\cos\alpha_1 - 2\beta}{1-2\beta\cos\alpha_1+\beta^2}$$

$$\omega_2 = \omega_1\frac{1-2\beta\cos\alpha_1+\beta^2}{1-\beta^2}$$

Если $\boldsymbol{\beta} \to 1$, то при нормальном падении на удаляющееся зеркало $\omega_2 \to 0$, а при нормальном падении на приближающееся зеркало $\omega_2 \to \infty$.

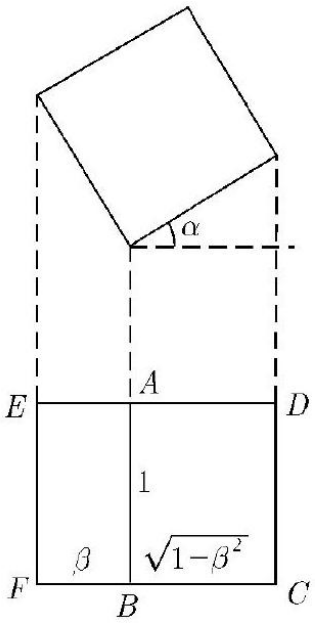
3.41. $\omega_1 = \omega_2$.

Угол падения равен углу отражения.

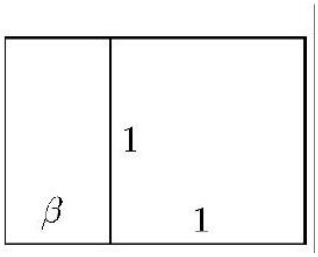
3.42. Изображение создается квантами света, одновременно достигающими фотопластинки. Но эти кванты испускаются точками движущегося тела, вообще говоря, неодновременно. Это происходит как вследствие неодинаковости расстояний различных точек тела до фотопластинки, так и из-за того, что события, одновременные в одной системе отсчета, неодновременны в другой. Поэтому изображение движущегося предмета будет не таким, как изображение неподвижного предмета.

Кванты, испущенные разными точками ребра $A'B'$ одновременно в системе S' (куба), достигнут фотопластинки тоже одновременно. Длина изображения AB будет такой же, как и в случае неподвижного куба, и будет определяться только тем сокращением, которое обусловлено расстоянием до предмета и фокусным расстоянием фотоаппарата. Примем эту длину за 1.

У неподвижного куба изображение ребра $E'F'$ было бы слито с изображением $A'B'$ (в предельном случае сколь угодно малого телесного угла, когда все лучи параллельны). В случае движущегося куба кванты от ребра $E'F'$ достигнут фотопластинки одновременно с квантами от ребра $A'B'$, если первые испущены раньше на время $\Delta t = l_0/c$ (в системе S). В это время ребро $E'F'$ занимало положение $E'_1F'_1$ и до испускания света ребром $A'B'$ проделало путь, равный Vl_0/c. Следовательно, теперь ребро $E'F'$ не будет загорожено ребром AB, изображения ребер $A'E'$ и $B'F'$ будут иметь длину $V/c = \boldsymbol{\beta}$, а не нуль, как у неподвижного куба, и вся грань $A'B'F'E'$ сфотографируется в виде прямоугольника $ABFE$ (рис. 3.14 а) с отношением сторон $1 : \boldsymbol{\beta}$.



а)



б)

Рис. 3.14

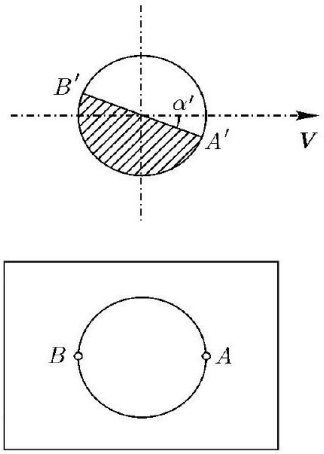


Рис. 3.15

Кванты, создающие изображение ребер $A'B'$ и $C'D'$, испускаются кубом одновременно в системе S. В системе S', как следует из преобразований Лоренца (3.7), кванты с ребра $C'D'$ должны быть испущены раньше, чем с ребра $A'B'$, на время $\Delta t' = \frac{1}{c^2}\gamma V l$, где l - длина ребер $B'C'$ и $A'D'$ в системе S. Можно считать, что в системе S' в точках, отстоящих друг от друга на расстоянии $\Delta x' = l_0$, произошли два события, одно на $\Delta t'$ позже другого. Расстояние между ними в системе S определяется с помощью (3.7):

$$l \equiv \Delta x = \gamma\left(\Delta x' - V\Delta t'\right)$$

откуда, подставляя $\Delta x'$ и $\Delta t'$, находим $l = l_0\sqrt{1-\beta^2}$ - длину ребер BC и AD в системе S. Они испытали обычное лоренцево сокращение. Их изображения (с учетом сокращения в фотоаппарате) будут иметь длины $\sqrt{1-\beta^2}$.

Чертеж изображения куба приведен на рис.3.14 а. Любопытно отметить, что такое же изображение даст неподвижный куб, повернутый относительно V на угол $\alpha = \arcsin(V/c)$. Видимая форма предмета в данном случае не испытывает деформации из-за лоренцева сокращения - предмет только «повернулся» на угол α. Этот результат, как оказывается (см. Вайскопф (1964), а также следующие задачи), имеет место для любого предмета и любого угла между скоростью и направлением наблюдения. Нужно только, чтобы предмет был виден под малым телесным углом.

Если бы были справедливы преобразования Галилея, то ребра $A'D'$ и $B'C'$ не испытали бы лоренцева сокращения, и изображение приняло бы вид, показанный на рис. 3.14 б. Задняя (по отношению к направлению движения) грань куба по-прежнему была бы сфотографирована. Таким образом, видимая форма движущегося предмета подверглась бы искажению.

3.43. а) $l = l_0\left|\sqrt{1-\beta^2}\cos\alpha' - \boldsymbol{\beta}\sin\alpha'\right|, \boldsymbol{\beta} = V/c$. Значение $\alpha'_{\max}$, при котором функция $\left|\sqrt{1-\beta^2}\cos\alpha' - \beta\sin\alpha'\right|$ имеет максимум, определяется условием $\operatorname{tg}\alpha' = -\beta/\sqrt{1-\beta^2}$. При этом $l = l_0$: таким образом, наибольшая длина l равна l_0. Изображение в этом случае эквивалентно изображению неподвижного стержня, ориентированного параллельно фотопластинке. Стержень «повернулся» на угол $\pi - \alpha'_{\max}$.

б) $\alpha' = \operatorname{arctg}\left(\frac{1-\beta^2}{\beta}\right)$; в этом случае изображение получится таким, как если бы стержень был неподвижен и ориентирован перпендикулярно фотопластинке.

в) Если два наблюдателя, неподвижных в системе S, одновременно сделают зарубки на плоскости xy в точках M и N, мимо которых в данный момент проходят концы стержня, то полученный ими отрезок MN будет составлять с осью x угол

$$\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{tg}\alpha'}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)$$

3.44. Изображение будет иметь форму круга. Сфотографируется полусфера, заштрихованная на рис. 3.15 . Она ограничена плоскостью $A'B'$, составляющей угол.

$$\alpha' = \operatorname{arctg}\frac{\beta}{1-\beta^2}$$

с направлением V (в системе шара). Вопреки естественному интуитивному представлению, движущийся шар не воспринимается наблюдателем как эллипсоид, сплющенный в направлении движения. Лоренцево сокращение оказывается невидимым! Но это, разумеется, не означает, что оно отсутствует.

3.45. Видимые положения куба изображены схематически на рис. 3.16. При $V/c < \cos\alpha$ видна передняя грань $A'D'$ и нижняя грань $A'B'$.

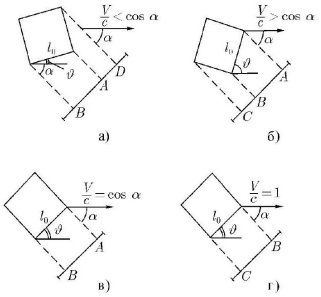


Рис. 3.16

Если в оптической системе фотоаппарата не происходит сокращения размеров предмета, то

$$AB = l_0\sqrt{1-\beta^2}\frac{\sin\alpha}{1-\beta\cos\alpha}, \quad AD = l_0\frac{\cos\alpha-\beta}{1-\beta\cos\alpha}$$

С помощью этих формул находим угол ϑ поворота куба:

$$\vartheta = \frac{\pi}{2} - \alpha - \Theta, \quad \operatorname{tg}\Theta = \frac{\cos\alpha-\beta}{\sin\alpha\sqrt{1-\beta^2}}$$

При $V/c = \cos\alpha$ имеем $\vartheta = \pi/2 - \alpha$ и видна только нижняя грань $A'B'$.

При $V/c > \cos\alpha$ видны нижняя и задняя грани,

$$\vartheta = \frac{\pi}{2} - \alpha + \operatorname{arctg}\frac{\beta-\cos\alpha}{\sqrt{1-\beta^2\sin\alpha}}$$

Наконец, при $V/c \to 1$ видна только задняя грань, нижняя грань испытала лоренцево сокращение до нуля, $\vartheta = \pi - \alpha$.

3.46. Скорость корабля V равна отношению расстояния $l_1 - l_2$ ко времени $\Delta\tau = \tau_2 - \tau_1$ между моментами испускания световых вспышек. Ввиду независимости скорости света от скоростей источника и приемника имеем $\tau_{1,2} = t_{1,2} - l_{1,2}/c$. Поэтому

$$V = \frac{l_1 - l_2}{\Delta t + (l_1 - l_2)/c} \tag{1}$$

где $\Delta t = t_2 - t_1$ - промежуток времени между вспышками, зарегистрированный наблюдателем. Записав (1) в виде

$$l_1 - l_2 = \frac{V}{1 - V/c}\Delta t = V_*\Delta t \tag{2}$$

замечаем, что коэффициент пропорциональности между расстоянием $l_1 - l_2$ и временем Δt («кажущаяся» скорость $V_* = V/(1 - V/c)$) превышает скорость света при $V > c/2$. «Кажущаяся» скорость и «кажущееся» положение объекта возникают из-за того, что наблюдатель видит положение объекта не в момент наблюдения, а в предшествующий момент $t - l/c$ из-за конечного значения скорости света.

Аналогичный эффект конечности скорости звука хорошо заметен при наблюдениях за движением сверхзвукового самолета: звук отстает от самолета и приходит к наблюдателю из точек траектории, находящихся позади самолета.

Момент прибытия корабля: $t_* = \tau_1 + l_1/V = \tau_2 + l_2/V$. Все времена здесь определены в одной системе отсчета - системе наблюдателя.

3.47. Для определения искомых длин мы располагаем тремя величинами: двумя скоростями c, V и промежутком времени Δt между посылками сигналов. Обозначим времена отражения сигналов от заднего и переднего зеркал соответственно через τ_1 и τ_2 (в системе наблюддателя). Положения корабля в моменты τ_1 и τ_2 изображены на рис. 3.17. Времена испускания сигналов:

$$t_1 = \tau_1 - \frac{l + a}{c}, \quad t_2 = \tau_2 - \frac{l - V\Delta\tau}{c}, \quad \Delta\tau = \tau_2 - \tau_1 \tag{1}$$

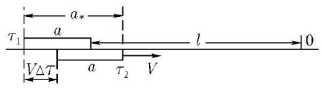


Рис. 3.17

Времена возвращения сигналов к наблюдателю:

$$t_1' = \tau_1 + \frac{l + a}{c}, \quad t_2' = \tau_2 + \frac{l - V\Delta\tau}{c} \tag{2}$$

Из условия $t_1' = t_2'$ находим $a = (c - V)\Delta\tau$ и из (1) получаем время между посылками сигналов наблюдателем: $\Delta t = t_2 - t_1 = 2\Delta\tau$, т. е. $\Delta\tau = \Delta t/2$. Из этих данных и рис. 3.17 находим

$$a_* = a + V\Delta\tau = \frac{a}{1 - V/c} = \frac{1}{2}c\Delta t, \quad a = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{V}{c}\right)c\Delta t \tag{3}$$

«Кажушаяся» длина a_* корабля из-за конечности скорости света больше, чем его «истинная» длина a в системе наблюдателя.

Длина корабля a_0 в собственной системе связана с его длиной a в системе наблюдателя лоренцевой формулой (3.12). Используя (3) и (3.12), находим

$$a_0 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1 - V/c}{1 + V/c}}c\Delta t = \sqrt{\frac{1 - V/c}{1 + V/c}}a_*$$

Вопреки интуитивному представлению о лоренцевом сокращении масштабов, собственная длина корабля a_0 меньше его «кажущейся», т. е. «видимой» (с помощью приборов) длины a_*. Этот «парадокс» объясняется использованным способом измерения длин с помощью световых сигналов и конечностью скорости света. При $c \to \infty$ все три рассмотренные выше длины совпадают.

Случай корабля, удаляющегося от наблюдателя, получается из рассмотренного заменой V на $-V$. При этом кажущаяся длина a_* становится меньше двух других длин,

а связь между a и a_0 остается прежней.

3.48. Пренебрегая собственным размером корабля, рассмотрим его движение на отрезке $l \ll L$. В этих условиях лучи, проведенные из начала и конца отрезка l к наблюдателю, можно считать параллельными. Свет, испущенный в начале отрезка l (момент τ_1) будет зарегистрирован наблюдателем в момент $t_1 = \tau_1 + (L + l\cos\alpha)/c$. Свет, испущенный в конце отрезка
(момент τ_2) придет к наблюдателю в момент $t_2 = \tau_2 + L/$ (см. рис. 3.9). Поскольку $l = V\Delta\tau, \Delta t = t_2 - t_1 = \Delta\tau(1 - V\cos\alpha/c)$. «Кажущаяся» скорость

$$V_* = \frac{l}{\Delta t} = \frac{V}{1 - \beta\cos\alpha}, \quad \beta = \frac{V}{c}. \tag{1}$$

Проецируя вектор $\boldsymbol{V}_*$, направленный вдоль $\boldsymbol{V}$, на направление луча и на перпендикулярную лучу плоскость, получаем

$$V_{*\parallel} = \frac{V\cos\alpha}{1 - \beta\cos\alpha}, \quad V_{*\perp} = \frac{V\sin\alpha}{1 - \beta\cos\alpha} \tag{2}$$

При $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2} \gg 1$ и $\alpha \ll 1$ имеем

$$V_{*\parallel} = \frac{2c}{\gamma^{-2} + \alpha^2}, \quad V_{*\perp} = \frac{2c\alpha}{\gamma^{-2} + \alpha^2} \tag{3}$$

и, следовательно, $V_{*\parallel\max} \approx 2c\gamma^2 \gg c, V_{*\perp\max} \approx c\gamma \gg c$. Сверхсветовые скорости макроскопических объектов (облаков релятивистской плазмы) неоднократно наблюдались в астрономии. По-видимому, их происхождение объясняют формулы (1) (3).

3.49. Пусть в системе отсчета S', связанной со средой, распространяется плоская волна с частотой ω' и волновым вектором $\boldsymbol{k'} = (k'\cos\alpha', k'\sin\alpha', 0), \boldsymbol{k'} \perp Oz$. Фазовая скорость волны $v' = c/n = \omega'/k'$ в системе S' не зависит от угла α', определяющего направление распространения волны. Компоненты поля пропорциональны $e^{-ik'_i x^i}$, где $k'_i = \left(\frac{\omega'}{c}, -\boldsymbol{k'}\right)$. Так как фаза $k_i x^i = k'_i x'^i$ - инвариант относительно преобразования Лоренца, то k_i представляет собой 4 -вектор (волновой 4 -вектор). Используя (3.20) и (3.24), мы можем найти компоненты k_i в системе S, относительно которой среда движется со скоростью $\boldsymbol{V} \| Ox$, откуда

$$\omega = \gamma\omega'\left(1 + \beta n\cos\alpha'\right) \tag{1}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha'}{\gamma\left(\cos\alpha' + \beta/n\right)} \tag{2}$$

$$v = \frac{\omega}{k} = c\frac{1 + \beta n\cos\alpha'}{\sqrt{n^2 + 2\beta n\cos\alpha' + \beta^2\left(1 - n^2\sin^2\alpha'\right)}} \tag{3}$$

где $\beta = V/c, \gamma = (1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}}$. Из (3) видно, что фазовая скорость волны относительно системы S зависит от направления распространения. Возникает своеобразная анизотропия, связанная с движением среды.

3.50. Искомую скорость можно найти по формуле (3) предыдущей задачи

$$v = c\frac{1 + \beta n\left(\lambda'\right)}{n\left(\lambda'\right) + \beta} \approx \frac{c}{n\left(\lambda'\right)} + V\left(1 - \frac{1}{n^2\left(\lambda'\right)}\right)$$

Здесь $\lambda' = 2\pi c/\omega', \omega'$ - частота, наблюдаемая в системе S', относительно которой среда покоится. По формуле (1) предыдущей задачи находим с точностью до членов первого порядка по V/c:

$$\frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{\omega}{\omega'} = 1 + \frac{nV}{c}$$

откуда

$$\frac{c}{n(\lambda')} = \frac{c}{n(\lambda)} - \frac{c}{n^2}\frac{dn}{d\lambda}\lambda\frac{nV}{c}$$

и окончательно

$$v = \frac{c}{n(\lambda)} + V\left(1 - \frac{1}{n^2(\lambda)} - \frac{\lambda}{n(\lambda)}\frac{dn(\lambda)}{d\lambda}\right)$$

3.51. $\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = 0$, где $\boldsymbol{p} = \frac{m\boldsymbol{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$.

3.52. $p = \frac{1}{c}\sqrt{T(T+2mc^2)}$.

3.53. $\boldsymbol{v} = \frac{c\boldsymbol{p}}{\sqrt{p^2+m^2c^2}}$.

3.54. $\beta = \frac{v}{c} = \sqrt{1-(\mathscr{E}_0/\mathscr{E})^2}, \mathscr{E}_0 = mc^2$.

В нерелятивистском случае $\beta \approx \sqrt{2T/\mathscr{E}_0}$, в ультрарелятивистском $\beta = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\mathscr{E}_0}{\mathscr{E}}\right)^2$

3.55. а) $T = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{3}{8}m\frac{v^4}{c^2} + \ldots$,

б) $T = \frac{p^2}{2m} - \frac{1}{8}\frac{p^4}{m^3c^2} + \ldots$

3.56. $v = \sqrt{\frac{2eV}{m}\cdot\frac{1+\frac{eV}{2mc^2}}{\left(1+\frac{eV}{mc^2}\right)^2}}$.

В частности, при eV $\ll mc^2$,

$$v = \sqrt{\frac{2eV}{m}}\left(1 - \frac{3}{4}\frac{eV}{mc^2}\right) \ll c$$

при $eV \gg mc^2$,

$$v = c\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{mc^2}{eV}\right)^2\right] \approx c$$

3.57. а) $v = 3,42\cdot 10^{-2}c$;

б) $v = 0,9999985c$;

в) $0,81c$; г) $0,9956c$.

3.58. $F = \frac{\mathscr{I}}{ce}\sqrt{T(T+2mc^2)}, W = \frac{\mathscr{I}}{e}T$.

3.59. $p = \frac{2mv^2N}{1-v^2/c^2}$.

Давление имеет одинаковое значение в системе, связанной с телом, и в системе, связанной с газом. В этом можно убедиться как путем прямого вычисления давления в каждой из этих систем отсчета, так и произведя преобразование Лоренца для четырехмерной силы (см. раздел 4.2).

3.60. Длина n-й трубки

$$L_n = \frac{v_n}{2\nu} = \frac{c}{2\nu}\sqrt{1-\left(\frac{mc^2}{nV_e e + mc^2}\right)^2}$$

где v_n - скорость частицы в n-й трубке. В начале ускорения $mc^2 \gg neV_e$ и $L_n \approx \frac{1}{2\nu}\sqrt{\frac{2eV_e}{m}}\sqrt{n}$. В ультрарелятивистском пределе $T_n \gg mc^2, v \approx c$ и $L_n \approx c/2\nu$.

Оценим длину ускорителя:

$$L = \sum_n L_n \approx \frac{c}{2\nu} \int\limits_0^N \sqrt{1 - \left(\frac{mc^2}{nV_e e + mc^2}\right)^2}\, dn =$$

$$= \frac{c}{2\nu e V_e} \left[\sqrt{\left(NeV_e + mc^2\right)^2 - m^2c^4} - mc^2 \arccos \frac{mc^2}{NeV_e + mc^2} \right]$$

3.61. Отношение интенсивностей

$$\frac{I_h}{I_0} = \exp \frac{h}{v\tau} \approx \exp \left[\frac{h}{\tau_0 c} \frac{m_\mu c^2}{\mathscr{E}} \right] \approx 2,5$$

$\left(\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right.$ - время жизни μ-мезона, движущегося со скоростью v).

Если бы релятивистское преобразование времени не имело места, мы получили бы для отношения интенсивностей (считая, что скорость мезонов равна c):

$$\frac{I'_h}{I'0} \approx \exp \frac{h}{\tau_0 c} \approx 94,4$$

Наблюдения согласуются с первым результатом ($I_h/I_0 \approx 2,5$) и тем самым дают прямое экспериментальное доказательство существования релятивистского эффекта замедления хода движущихся часов.

3.62. $\operatorname{tg}\vartheta = \frac{1}{\gamma} \frac{p' \sin\vartheta'}{p' \cos\vartheta' + V\frac{\mathscr{E}'}{c^2}} = \frac{1}{\gamma} \frac{\sin\vartheta'}{\cos\vartheta' + \frac{V}{v'}}$, где

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \quad \mathscr{E} = \gamma \left(\mathscr{E}' + p'V \cos\vartheta'\right)$$

p, p' - импульсы частицы в системах S и S' соответственно.

Приведенной в условии приближенной формулой для ультрарелятивистского случая можно пользоваться, если $\cos\frac{y'}{2} \gg \sqrt{\left|1 - \frac{V}{v'}\right|}$, где $v' = p'\frac{c^2}{\mathscr{E}'}$ - скорость частицы в S'. Энергия в ультрарелятивистском случае принимает вид

$$\mathscr{E} \approx pc \approx 2\gamma \mathscr{E}' \cos^2 \frac{\vartheta'}{2}$$

3.63. Рассмотрим dN частиц, движущихся в системе S' внутри телесного угла $d\Omega'$. В системе S те же dN частиц будут двигаться внутри телесного угла $d\Omega = \sin\vartheta d\vartheta d\alpha$, образованного векторами скоростей этих частиц в системе S. Угловое распределение частиц в системе S будет описываться функцией $F(\vartheta, \alpha)$, определяемой из равенства

$$F(\vartheta, \alpha) d\Omega = F'\left(\vartheta', \alpha'\right) d\Omega' = dW = \frac{dN}{N} \tag{1}$$

Угол ϑ' должен быть выражен через ϑ с помощью формулы

$$\cos^2\vartheta = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2\vartheta} = \frac{\left(\cos\vartheta' + \frac{V}{v'}\right)^2}{\left(\cos\vartheta' + \frac{V}{v'}\right)^2 + \frac{1}{\gamma^2}\sin^2\vartheta'}$$

следующей из решения задачи 3.62 $\left(v' = p'\frac{c^2}{\mathscr{E}'} -\right.$ скорость частицы в системе S'). Учитывая, что $\alpha = \alpha'$, получим окончательно:

$$F(\vartheta, \alpha) = F'\left[\vartheta'(\vartheta), \alpha\right] \frac{\gamma^2 \left[\left(\cos\vartheta' + \frac{V}{v'}\right)^2 + \frac{1}{\gamma^2}\sin^2\vartheta'\right]^{\frac{3}{2}}}{\left|1 + \frac{V}{v'}\cos\vartheta'\right|} \tag{2}$$

В случае ультрарелятивистских частиц $v' = c$ и угловое распределение в системе S упрощается (ср. с задачей 3.33):

$$F(\vartheta, \alpha) = F'\left[\vartheta'(\vartheta), \alpha\right] \frac{\left(1 + \frac{V}{c}\cos\vartheta'\right)^2}{1 - \frac{V^2}{c^2}} \tag{3}$$

Заметим, что частицы, движущиеся в системе S под разными углами ϑ, обладают различной энергией, несмотря на то, что в системе S' у них одна и та же энергия.

3.65.

$f'(\boldsymbol{p}') = \gamma\left(1 + \frac{\boldsymbol{p}'\cdot\boldsymbol{V}}{\mathscr{E}'}\right) f\left(\gamma\left(p'_x + V\mathscr{E}'/c^2\right), p'_y, p'_z\right), \quad \gamma = \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{-1/2}$

3.66. Функция распределения f является инвариантной величиной. это означает, что при переходе к другой системе отсчета S':

$$f'(\boldsymbol{r}', \boldsymbol{p}', t') = f(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{p}, t)$$

где в правой части равенства надо выразить r, p и t через штрихованные величины по формулам (3.20).

3.67. Обозначим через n_1 и n_2 числа рассеиваемых и рассеивающих частиц в единице объема. Рассмотрим процесс рассеяния в системе S. Общее число частиц dN, рассеянных в интервал телесного угла $d\Omega$ за время t рассеивающими частицами, заключенными в объеме V, выражается, согласно определению сечения, формулой: $dN = d\sigma_{12} J_{12} n_2 V t$, где $J_{12} = n_1 v_1$. В системе S' можно написать для того же числа dN аналогичное выражение: $dN = d\sigma'_{12} J'_{12} n'_2 V' t'$, где $J'_{12} = n'_1 \left|\boldsymbol{v}'_1 - \boldsymbol{v}'_2\right|$ (в этой системе dN представляет собой число частиц, рассеиваемых в телесный угол $d\Omega'$, соответствующий $d\Omega$). Таким образом,

$$d\sigma_{12} n_1 n_2 v_1 V t = d\sigma'_{12} n'_1 n'_2 \left|\boldsymbol{v}'_1 - \boldsymbol{v}'_2\right| V' t' \tag{1}$$

Подобно четырехмерной плотности $(\boldsymbol{\rho c}, \boldsymbol{\rho v})$ электрического тока, величина $(nc, n\boldsymbol{v})$ является 4 -вектором. Отсюда следует, что

$$n_1 n_2 = n'_1 n'_2 \left(1 - \frac{\boldsymbol{v}'_1 \cdot \boldsymbol{v}'_2}{c^2}\right) \tag{2}$$

так как скалярное произведение двух 4-векторов инвариантно. Учитывая (2) и то, что 4-объем инвариантен: $Vt = V't'$, мы получим окончательно:

$$d\sigma'_{12} = d\sigma_{12} \frac{v_1 \left(1 - \frac{\boldsymbol{v}'_1 \cdot \boldsymbol{v}'_2}{c^2}\right)}{\left|\boldsymbol{v}'_1 - \boldsymbol{v}'_2\right|} \tag{3}$$

В том частном случае, когда $\boldsymbol{v}'_1 \| \boldsymbol{v}'_2$,

$$\boldsymbol{v}_1 = \frac{\boldsymbol{v}'_1 - \boldsymbol{v}'_2}{1 - \frac{\boldsymbol{v}'_1 \cdot \boldsymbol{v}'_2}{c^2}}$$

(см. задачу 3.13) и из (3) следует, что сечение инвариантно:

$$d\sigma_{12} = d\sigma'_{12} \tag{4}$$

Этот случай имеет место, например, при преобразовании от лабораторной системы отсчета к системе ц. и. Заметим, что если поток определить формулой $J_{12} = n_1 \widetilde{v}$, где $\widetilde{v} = v_1 \left(1 - \frac{\boldsymbol{v}'_1 \cdot \boldsymbol{v}'_2}{c^2}\right)$, то сечение будет инвариантно при произвольном преобразовании Лоренца.

3.68. $dW = \frac{d\Omega}{4\pi\gamma^2(1-\beta\cos\vartheta)^2}$, $\int\limits_{4\pi} dW = 1$, где $\beta = v/c$.

3.69. $f = \frac{1+\beta}{1-\beta}$, откуда $\mathscr{E} = mc^2\frac{f+1}{2\sqrt{f}}$, где m - масса π^0-мезона.

3.71. Поскольку импульс фотона $p = \mathscr{E}/c$, то (ср. с задачей 3.62)

$$\mathscr{E} = \frac{\mathscr{E}'}{\gamma(1-\beta\cos\vartheta)}, \quad \mathscr{E}' = \frac{mc^2}{2}, \quad \beta = \frac{v}{c}$$

Сопоставив следующее отсюда выражение $d\mathscr{E} = -\frac{\mathscr{E}' d(1-\beta\cos\vartheta)}{\gamma(1-\beta\cos\vartheta)^2}$ с угловым распределением γ-квантов распада, найденным в ответе к задаче 3.68, получим распределение вероятностей для энергий фотонов распада:

$$dW(\mathscr{E}) = \frac{|d\mathscr{E}|}{\mathscr{E}_{\max} - \mathscr{E}_{\min}}$$

где $\mathscr{E}_{\min} = \mathscr{E}'\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$ - минимальное значение энергии γ-кванта распада (при $\vartheta = \pi$), $\mathscr{E}_{\max} = \mathscr{E}'\sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$ - максимальное значение энергии γ-кванта распада (при $\vartheta = 0$). Отсюда видно, что спектр γ-квантов распада имеет в лабораторной системе отсчета прямоугольную форму, т. е. любые значения энергии в промежутке от $\mathscr{E}_{\min}$ до $\mathscr{E}_{\max}$ равновероятны.

3.72. $m = \frac{2\sqrt{\mathscr{E}_1\cdot\mathscr{E}_2}}{c^2}$

3.73. $m^2 = m_1^2 + m_2^2 + 2\left[\sqrt{(p_1^2+m_1^2)(p_2^2+m_2^2)} - p_1p_2\cos\vartheta\right], c = 1;\ m_\pi = 139,58\text{МВ}.$

3.74. $m_1^2 = m^2 + m_2^2 - 2\left[\sqrt{(p^2+m^2)(p_2^2+m_2^2)} - pp_2\cos\vartheta_2\right], c = 1.$

3.75. $m^2 = \mathscr{E}^2 - p^2 = m_1^2 + m_2^2 + \frac{2m_1m_2}{\sqrt{1-v^2}}$,

$$V = \frac{p}{\mathscr{E}} = \frac{m_1 v}{m_1 + m_2\sqrt{1-v^2}}, \quad c = 1$$

3.76. $T_1 = \frac{(m_0-m_1)^2-m_2^2}{2m_0}; T_2 = \frac{(m_0-m_2)^2-m_1^2}{2m_0}, c = 1.$

а) $T_\alpha/T_я = 58,5$

б) $T_\nu/T_\mu = 7,27$

в) $T_\gamma/T_я \approx \frac{2mc^2}{\Delta\mathscr{E}}$

где m - масса исходного ядра, $\Delta\mathscr{E}$ - энергия его возбуждения, причем $mc^2 \gg \Delta\mathscr{E}$.

Из общих формул для T_1, T_2, а также из рассмотренных примеров видно, что большая часть энергии приходится на долю более легкой частицы.

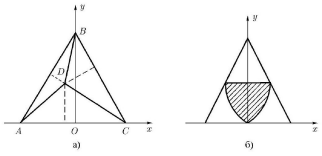


Рис. 3.18

3.77. $Q_a = T_b\left[1 + \frac{T_b+2m_b}{m_d+\sqrt{T_b^2+2T_bm_b+m_d^2}}\right]$

$$Q_{\Sigma^+} = 109,6\text{МВ}; \quad M_{\Sigma^+} = 1188,7\text{МВ} \quad \left(\Sigma^+ \to n + \pi^+\right);$$
$$Q_{\Sigma+} = 116,1\text{МВ}; \quad M_{\Sigma+} = 1189,3\text{МВ} \quad \left(\Sigma^+ \to p + \pi^0\right).$$

Оба значения $M_{\Sigma+}$ находятся в хорошем согласии друг с другом.

3.78.

$$\omega = \frac{\Delta\mathscr{E}}{\hbar}\left(\frac{\Delta\mathscr{E}}{2mc^2}\right)$$

Энергия $\hbar\omega$, уносимая квантом, меньше чем $\Delta\mathscr{E}$, на величину энергии $(\Delta\mathscr{E})^2/(2mc^2)$, уносимой ядром отдачи. В условиях жесткой связи ядра
с кристаллической решеткой последняя не получает энергии (так как ее масса $M \gg m$ очень велика) и квант уносит всю энергию, $\hbar\omega = \Delta\mathscr{E}$.

3.79. а) Закон сохранения энергии ограничивает равносторонний треугольник ABC (рис. 3.18 а), высота BO которого равна энергии распада $Q = m - m_1 - m_2 - m_3 (c = 1)$. Расстояние от точки D до основания AC равно T_1 по построению, расстояния от D до AB и BC легко вычисляются и оказываются равными T_2 и T_3 соответственно.

б) Величины импульсов при заданных массах всех частиц определяются заданием двух энергий, например T_1 и T_2 (так как $T_3 = Q - T_1 - T_2$), или их двумя линейными комбинациями x и y. Импульсы частиц, образовавшихся при распаде, являются сторонами треугольника ($\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 + \boldsymbol{p}_3 = 0$ в системе покоя распадающейся частицы). Углы треугольника характеризуют относительные направления вылета частиц и могут быть найдены по известным p_1, p_2, p_3.

в) Границы разрешенной области определяются условиями

$$p_1 + p_2 \geqslant p_3, \quad -p_3 \leqslant p_1 - p_2 \leqslant p_3$$

Эти условия приводят к области, заштрихованной на рис. 3.18б. Сверху область ограничена прямой $y = (m - m_1)^2/2m$, снизу - гиперболой $x = \pm\sqrt{\frac{y^2+2m_1 g}{3}}$.

3.80. Диаграмма Далица имеет вид, изображенный на рис. 3.18 б.

а) $T_{1\max} \approx T_2 \max \approx T_{3\max} \approx 69,8$М ЭВ.

б) $T_{1\ \max} = \frac{(m-m_1)^2}{2m} \approx 127$М3 В, $T_{2\max} = T_{3\max} = \frac{m^2-m_1^2}{2m} \approx \approx 228$МВ.

Максимальные импульсы всех трех частиц одинаковы.

3.81. Диаграмма Далица в приближении $Q \ll m_\pi$ приведена на рис. 3.19.

$$OB = Q, \quad R = Q/3, \quad T_{\max} = 2Q/3 \approx 50\text{МВ}$$

3.82. Диаграмма Далица приведена на рис. 3.20. $OB = Q, T_{\max} \approx \approx 210$М. Внутренняя замкнутая кривая дается уравнением

$$x = \pm\sqrt{\frac{(2m_\pi y + y^2)\left[(m_\omega - m_\pi)^2 - 4m_\pi^2 - 2m_\omega y\right]}{3\left[(m_\omega - m_\pi)^2 - 2m_\omega y\right]}}$$

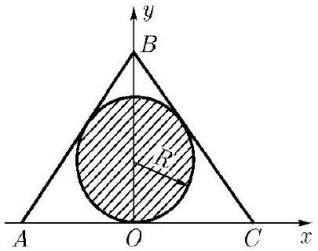


Рис. 3.19

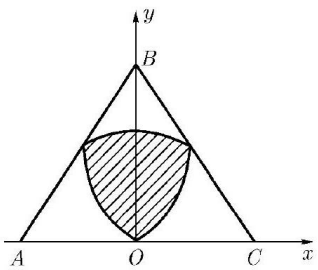


Рис. 3.20

3.83. δ-функцию от 4 -вектора нужно понимать как произведение четырех δ-функций от его компонент:

(1) $\delta(p_i - p_{i1} - p_{i2} - p_{i3}) = \delta(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_1 - \boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{p}_3)\,\delta(\mathscr{E} - \mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_2 - \mathscr{E}_3)$.

Производя интегрирование по d^3p_3 с помощью (1), придем к выражению

$$\Gamma = \int \frac{d^3\boldsymbol{p}_1 d^3\boldsymbol{p}_2}{\mathscr{E}_1\mathscr{E}_2\mathscr{E}_3}\delta\left(\sqrt{p_1^2 + p_2^2 + m_3^2 + 2p_1p_2\cos\vartheta} - \mathscr{E}_3\right) \tag{2}$$

где $\mathscr{E}_3 = m - \mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_2, \vartheta$ - угол между $\boldsymbol{p}_1$ и $\boldsymbol{p}_2$

Представим d^3p_2 в виде $d^3\boldsymbol{p}_2 = p_2^2 dp_2 d\Omega_2, d\Omega_2$ - элемент телесного угла. Примем за полярную ось направление p_1; тогда $d\Omega_2 = 2\pi\sin\vartheta d\vartheta$. Кроме того, $p_2dp_2 = \mathscr{E}_2 d\mathscr{E}_2$, как следует из (3.41). Преобразуем δ-функцию в (2), использовав формулу (1.209):

$$\delta\left(\sqrt{p_1^2 + p_2^2 + m_3^2 + 2p_1p_2\cos\vartheta} - \mathscr{E}_3\right) =$$

$$= 2\mathscr{E}_3\delta\left(2p_1p_2\cos\vartheta + p_1^2 + p_2^2 + m_3^2 - \mathscr{E}_3^2\right) \tag{3}$$

Поскольку $-1 \leqslant \cos\vartheta \leqslant 1$, то интеграл (2) будет отличен от нуля только при выполнении неравенств

$$p_1 + p_2 \geqslant p_3, \quad p_1 - p_2 \leqslant p_3, \quad p_1 - p_2 \geqslant -p_3$$

но именно эти неравенства определяют границы разрешенной области на диаграмме Далица.

С помощью (3) и (1.207), выполнив интегрирование по $d\vartheta$, получим

$$\Gamma = \pi\int \frac{d^3p_1 d\mathscr{E}_2}{\mathscr{E}_1 p_1} = 4\pi^2\int d\mathscr{E}_1 d\mathscr{E}_2$$

Перейдем теперь к интегрированию по переменным

$$x = \frac{T_2 - T_3}{\sqrt{3}} = \frac{\mathscr{E}_1 + 2\mathscr{E}_2 + m_3 - m_2 - m}{\sqrt{3}}, \quad y = T_1 = \mathscr{E}_1 - m_1$$

которые использовались при построении диаграммы Далица. Преобразовав элемент $d\mathscr{E}_1 d\mathscr{E}_2$, найдем

$$\Gamma = 2\sqrt{3}\pi^2\int dxdy$$

где область интегрирования ограниченна внутренней кривой диаграммы (см. рис. 3.18 б -3.20).

Последняя формула показывает, что элемент фазового объема $d\Gamma = 2\sqrt{3}\pi^2 dxdy$ пропорционален элементу площади на диаграмме Далица. Энергии T_1, T_2 и T_3 частиц, образующихся при распаде, можно измерять экспериментально и наносить соответствующие точки на диаграмму Далица. При этом густота точек будет пропорциональна величине ρ (см. условие задачи), которая таким образом может быть найдена из данных эксперимента.

3.84. Рассмотрим 4 -вектор энергии - импульса системы частиц p_i. Он сохраняется, т. е. его соответствуюшие компоненты до и после реакции равны между собой. При значении кинетической энергии T_0, соответствующем порогу реакции, образовавшиеся частицы покоятся в системе ц. и. (заметим, что в лабораторной системе отсчета частицы не могут покоится при пороговом значении T_0, так как это означало бы нарушение закона

сохранения импульса). Вектор полного 4 -импульса системы до реакции имеет в лабораторной системе вид

$$p^i_{(0)} = \left(\frac{\mathscr{E}_0}{c} + m_1 c, \boldsymbol{p}_0 \right)$$

где $\mathscr{E}_0$ - полная энергия и p_0 - полный импульс, соответствующие порогу реакции.

После же реакции в системе ц. и. 4-импульс равен $p'_i = (Mc, 0)$. Вследствие инвариантности квадрата 4 -вектора и закона сохранения 4 -импульса $p^i_{(0)} p_i^{(0)} = p' p'_i$. Запишем последнее равенство в развернутом виде

$$M^2 c^2 = \frac{\mathscr{E}_0^2}{c^2} + 2 m_1 \mathscr{E}_0 + m_1^2 c^2 - p_0^2$$

откуда

$$T_0 = \frac{c^2}{2m_1} \left(M - m_1 - m \right) \left(M + m_1 + m \right)$$

3.85. $T_0 \approx 3,5 \times 10^6$М $\ni$ В $= 3,5$ Т$\ni$ В.

3.86. а) $T_0 = 288$МВ;

б) $T_0 = 160$МВ;

в) $T_0 = 763$М В;

г) $T_0 = \frac{2m_p(m+2m_p)c^2}{m}$.

В частном случае столкновения с протоном $m = m_p$ имеем

$$T_0 = 6 m_p c^2 = 5,63 \text{ Гэв.}$$

Приближенная формула для пороговой энергии

$$T_0 = \frac{2(A+2)}{A} m_p c^2$$

При больших $A, T_0 \approx 2 m_p c^2$.

3.87. $T_0 = \left(1 + \frac{m}{M}\right) \Delta\mathscr{E}$. В случае а) имеем по приведенной выше приближенной формуле

$$\Delta\mathscr{E} = T_0 = 2,18 \text{ МэВ} \quad (m = 0)$$

По точной формуле (см. задачу 3.35) мы получили бы больше на $\frac{|Q|^2}{2Mc^2} \approx \approx 0,0012$М, где $Q = -\left(M - m_1 - m\right) c^2$ - энергетический выход реакции. В случае б) приближенная формула дает $T_0 = 2|Q| = 7,96$ МэВ. Отличие от точной формулы составляет $0,003$М ЭВ.

3.88.

	ΔM, г	$\Delta M / M$
а)	$4,6 \times 10^{-26}$	$0,65 \times 10^{-2}$
б)	$3,1 \times 10^{-26}$	$0,35 \times 10^{-2}$
в)	$3,6 \times 10^{-25}$	$0,85 \times 10^{-3}$
г)	$1,2 \times 10^{-33}$	$1,4 \times 10^{-11}$
д)	10^{-35}	3×10^{-13}

3.89.

$$M^2 = 2\left(m^2 + \mathscr{E}_- \mathscr{E}_+ / c^4 - \boldsymbol{p}_- \cdot \boldsymbol{p}_+ / c^2\right) > 0$$

$$\mathscr{E}_1 = \frac{m^2 c^4 + \mathscr{E}_- \mathscr{E}_+ - c^2 \boldsymbol{p}_- \cdot \boldsymbol{p}_+}{\left(\mathscr{E}_- + \mathscr{E}_+\right)\left(1 - V \cos\theta / c\right)}$$

$$\mathscr{E}_2 = \mathscr{E}_- + \mathscr{E}_+ - \mathscr{E}_1$$

где $\boldsymbol{V} = (\boldsymbol{p}_- + \boldsymbol{p}_+)/M, \theta$ - угол вылета первого кванта относительно $\boldsymbol{V}$, $\mathscr{E}_\pm$- энергии электрона и позитрона в Л-системе.

3.90. Уравнение реакции имеет вид

$$\gamma + \text{ частица } \to e^+ + e^- + \text{частица}.$$

Порог можно найти по общей формуле (см. задачу 3.84)

$$T_0 = \hbar\omega_0 = \frac{c^2}{2m_1}(m_1 + 2m - m_1)(m_1 + 2m + m_1) = 2mc^2\left(1 + \frac{m}{m_1}\right)$$

где m - масса электрона (или позитрона). Когда частицы нет, так что $m_1 \to 0$, пороговая энергия $T_0 \to \infty$, что и означает невозможность реакции.

Последний результат можно также получить, показав невозможность выполнения равенства $k_i = p_{+i} + p_{-i}$, где k_i, p_{+i}, p_{-i} − 4-импульсы фотона позитрона и электрона. Возводя обе части последнего равенства в квадрат, будем иметь

$$k^i k_i = (\mathscr{E}_+ + \mathscr{E}_-)^2 - (\boldsymbol{p}_+ + \boldsymbol{p}_-)^2$$

Но $k^i k_i = 0$, а инвариантная величина, стоящая в правой части, не равна нулю ни при каких значениях $\boldsymbol{p}_+, \boldsymbol{p}_-$. Это становится очевидным, если перейти в систему отсчета, в которой $p_+ + p_- = 0$.

3.92. $v = \frac{c\sqrt{\mathscr{E}^2 - m_1^2c^4}}{\mathscr{E} + m_2c^2}$.

3.93. По закону сохранения 4 -импульса

$$p_{1i}^{(0)} + p_{2i}^{(0)} = p_{1i} + p_{2i} \tag{1}$$

Чтобы определить угол рассеяния первой частицы, перенесем p_{1i} налево и возведем обе части получившегося равенства в квадрат:

$$p_1^{(0)i}p_{1i}^{(0)} + p_2^{(0)i}p_{2i}^{(0)} + p_1^i p_{1i} + 2p_1^{(0)}ip_2^{(0)i} - 2p_{1i}^{(0)}p_1^i - 2p_{2i}^{(0)}p_1^i = p_{2i}p_2^i \tag{2}$$

Согласно (3.41.), $p_1^{(0)i}p_{1i}^{(0)} = p_1^i p_{1i} = m_1^2c^2, p_2^{(0)i}p_{2i}^{(0)} = p_2^i p_{2i} = m_2^2c^2$. Скалярные произведения преобразуются следующим образом $\left(\boldsymbol{p}_2^{(0)} = 0\right)$:

$$-p_{1i}^{(0)}p_2^{(0)i} = \boldsymbol{p}_1^{(0)} \cdot \boldsymbol{p}_2^{(0)} - \frac{1}{c^2}\mathscr{E}_1^{(0)}\mathscr{E}_2^{(0)} = -\mathscr{E}_0 m_2, \quad p_{2i}^{(0)}p_1^i = m_2\mathscr{E}_1$$

$$-p_{1i}^{(0)}p_1^i = \boldsymbol{p}_1^{(0)} \cdot \boldsymbol{p}_1 - \frac{1}{c^2}\mathscr{E}_1^{(0)}\mathscr{E}_1 = p_0p_1\cos\vartheta_1 - \frac{\mathscr{E}_0\mathscr{E}_1}{c^2}$$

где $p = \frac{1}{c}\sqrt{\mathscr{E}_0^2 + m_1^2c^4}$. Подставляя полученные выражения в (2), найдем

$$\cos\vartheta_1 = \frac{\mathscr{E}_1(\mathscr{E}_0 + m_2c^2) - \mathscr{E}_0m_2c^2 - m_1^2c^4}{c^2p_0p_2}$$

Аналогично

$$\cos\vartheta_2 = \frac{(\mathscr{E}_0 + m_2c^2)(\mathscr{E}_2 - m_2c^2)}{c^2p_0p_2}$$

3.94.

(1) $\mathscr{E}_1 = m_1c^2\dfrac{\left(\gamma_0 + \frac{m_2}{m_1}\right)\left(1 + \gamma_0\frac{m_2}{m_1}\right) \pm \cos\vartheta_1\left(\gamma_0^2 - 1\right)\sqrt{\frac{m_2^2}{m_1^2} - \sin^2\vartheta_1}}{\left(\gamma_0 + \frac{m_2}{m_1}\right)^2 - \left(\gamma_0^2 - 1\right)\cos^2\vartheta_1}$,

(2) $\mathscr{E}_2 = \dfrac{\left(\gamma_0 + \frac{m_2}{m_1}\right)^2 + \left(\gamma_0^2 - 1\right)\cos^2\vartheta_2}{\left(\gamma_0 + \frac{m_2}{m_1}\right)^2 - \left(\gamma_0^2 - 1\right)\cos^2\vartheta_2}m_2c^2$,

где

$$\gamma_0 = \frac{\mathscr{E}_0}{m_1 c^2}$$

Из этих формул видно, что при $m_1 > m_2$ возможно рассеяние только на углы ϑ_1, не превышающие $\arcsin\sqrt{m_2/m_1}$ (подкоренное выражение в (1) должно быть положительно). При этом каждому значению ϑ_1 отвечают два значения энергии $\mathscr{E}_1$.

При $m_1 = m_2$ угол рассеяния ϑ_1 не превышает $\pi/2$ и каждому значению ϑ_1 означает только одно значение энергии, соответствующее выбору знака «+» в формуле (1). Знаку «-» отвечало бы значение $\mathscr{E}_1 = m_1 c^2$ не зависимо от угла рассеяния, что, очевидно, не соответствует действительности. По аналогичной причине в числителе формулы (2) для $\mathscr{E}$ оставлен только знак «+».

При $m_1 < m_2$ возможно рассеяние на любой угол и каждому значению ϑ_1 отвечает одно значение $\mathscr{E}_1$. Если $0 < \vartheta_1 < \pi/2$, то в формуле (1) нужно выбрать знак «+», если $\pi/2 < \vartheta_1 < \pi$, то нужно выбрать знак «-». При таком выборе знаков рассеянию налетающей частицы на больший угол соответствует большая потеря энергии, как и должно быть.

3.95. $\mathscr{E} \approx \frac{\mathscr{E}_0}{1+\frac{\mathscr{E}_0}{Mc^2}(1-\cos\vartheta)}$.

3.96. $\mathscr{E} \approx \frac{\mathscr{E}_0-\Delta E}{1+\frac{\mathscr{E}_0}{Mc^2}(1-\cos\vartheta)}$.

3.97. $T_1 = \frac{T_0\cos^2\vartheta_1}{1+\frac{1}{2}\left(\frac{T_0}{mc^2}\right)\sin^2\vartheta_1}$.

3.98.

$$T_1 = T_0\left(\frac{m_1}{m_1+m_2}\right)^2\left[1+\left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2 - 2\sin^2\vartheta_1 \pm 2\cos\vartheta_1\sqrt{\left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2-\sin^2\vartheta_1}\right];$$

$$T_2 = \frac{4m_1m_2}{(m_1+m_2)^2}T_0\cos^2\vartheta_2$$

Правило знаков сформулировано в решении задачи 3.94.

3.99. Угол разлета частиц $\chi = \vartheta_1 + \vartheta_2$ выражается формулой

$$\operatorname{tg}\chi = \frac{(v_1'+v_2')\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}\sin\vartheta'}{\frac{V^2}{c^2}v_1'\sin^2\vartheta' + (V-v_1')(1-\cos\vartheta')}$$

(ср. с задачей 3.28).

При $m_1 = m_2$ скорости $v_1' = v_2' = V$ и

$$\operatorname{tg}\chi = \frac{2c^2\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}}{V^2\sin\vartheta'}$$

В этом случае $\chi < 90°$.

3.100. Поступая так же, как при решении задачи 3.93, получим

$$\omega = \frac{\omega_0\left(\frac{\mathscr{E}_0}{c} - p_0\cos\vartheta_0\right)}{\frac{\mathscr{E}_0}{c} - p_0\cos\vartheta_1 + \frac{\hbar\omega_0}{c}(1-\cos\vartheta)}$$

где ϑ - угол между направлениями движения первичного и рассеянного фотонов, ϑ_1 - угол между направлениями начального движения электрона и движения фотона после рассеяния.

Если электрон до столкновения покоился, то

$$\omega = \frac{\omega_0}{1 + \frac{\hbar\omega_0}{mc^2}(1 - \cos\vartheta)}$$

3.101. Энергия рассеянного кванта максимальна при $\vartheta_0 = \vartheta = \pi$, $\vartheta_1 = 0$, т. е. при лобовом столкновении с рассеянием кванта назад. При этом

$$\hbar\omega \approx \hbar\omega_0 \frac{2\mathscr{E}_0}{\frac{(mc^2)^2}{2\mathscr{E}_0} + 2\hbar\omega_0} \tag{1}$$

Из (1) видно, что в ультрарелятивистском случае происходит значительное «ужесточение» кванта, $\hbar\omega \gg \hbar\omega_0$. Отметим два частных случая. При $\hbar\omega_0 \ll mc^2 \left(\frac{mc^2}{\mathscr{E}_0}\right)$ формула (1) дает: $\mathscr{E}_0 \gg \hbar\omega = 4\hbar\omega_0 \left(\frac{\mathscr{E}_0}{mc^2}\right)^2 \gg \hbar\omega_0$. Если же $\hbar\omega_0 \gg mc^2 \left(\frac{mc^2}{\mathscr{E}_0}\right)$, то $\hbar\omega$ приближается к $\mathscr{E}_0$.

3.102. $\mathscr{E} - \mathscr{E}_0 = \hbar\omega_0 \frac{p_0 c(\cos\vartheta_0 - \cos\vartheta_1) + \hbar\omega_0(1 - \cos\vartheta)}{\mathscr{E}_0 - p_0 c\cos\vartheta_1 + \hbar\omega_0(1 - \cos\vartheta)}$.

Обозначения углов те же, что в задаче 3.100. Покоившийся вначале электрон при столкновении с фотоном всегда увеличивает свою энергию:

$$\mathscr{E} - mc^2 = \frac{(\hbar\omega_0)^2 (1 - \cos\vartheta)}{mc^2 + \hbar\omega_0(1 - \cos\vartheta)}$$

Если электрон обладает до рассеяния импульсом $p_0 \gg \hbar\omega/c$, то его энергия увеличивается при рассеянии, если $\vartheta_0 < \vartheta_1$, и уменьшается в противном случае. Максимальное ускорение электрона получится при $\vartheta_0 = 0, \vartheta = \vartheta_2 = \pi$. При этом

$$\mathscr{E} - \mathscr{E}_0 = 2\hbar\omega_0 \frac{p_0 c + \hbar\omega_0}{\mathscr{E}_0 + p_0 c + 2\hbar\omega_0}$$

Если электрон нерелятивистский, но $p_0 c \gg \hbar\omega_0$, то $\mathscr{E} - \mathscr{E}_0 = 2\hbar\omega_0 (v_0/c) \ll \ll \hbar\omega_0$. Если электрон ультрарелятивистский, то $\mathscr{E} - \mathscr{E}_0 \approx \hbar\omega_0$ и условия ускорения электрона оптимальны.

3.103. $s = 4\left(m^2 + q^2\right), t = -2q^2(1 - \cos\vartheta), u = -2q^2(1 + \cos\vartheta)$.

3.104. $\mathscr{E}_a = \frac{1}{2m_b}\left(s - m_a^2 - m_b^2\right), \quad p_a = \frac{1}{2m_b}\sqrt{\lambda\left(s, m_a^2, m_b^2\right)}$,

$$\mathscr{E}'_a = \frac{1}{2\sqrt{s}}\left(s + m_a^2 - m_b^2\right), \quad p' = \frac{1}{2\sqrt{s}}\sqrt{\lambda\left(s, m_a^2, m_b^2\right)}$$

$$\mathscr{E}'_b = \frac{1}{2\sqrt{s}}\left(s + m_b^2 - m_a^2\right)$$

где

$$\lambda(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz$$

Поскольку в системе ц. и. $\boldsymbol{p}_a = -\boldsymbol{p}_b$, то величина s имеет смысл квадрата полной энергии в этой системе отсчета:

$$s = \left(\mathscr{E}'_a + \mathscr{E}'_b\right)^2 = \left(\mathscr{E}'_c + \mathscr{E}'_d\right)^2$$

3.105. $\mathscr{E}_c = \frac{1}{2m_b}\left(m_b^2 + m_c^2 - u\right)$

$$\mathscr{E}_d = \frac{1}{2m_b}\left(m_b^2 + m_d^2 - t\right); \quad c = 1$$

3.106. $\cos\Theta = \frac{\left(s - m_a^2 - m_b^2\right)\left(m_b^2 + m_c^2 - u\right) + 2m_b^2\left(t - m_a^2 - m_c^2\right)}{\sqrt{\lambda\left(s, m_a^2, m_b^2\right)}\sqrt{\lambda\left(u, m_b^2, m_c^2\right)}}$;

$$\cos\Theta' = \frac{s^2 + s\,(2t - m_a^2 - m_b^2 - m_c^2 - m_d^2) + (m_a^2 - m_b^2)\,(m_c^2 - m_d^2)}{\sqrt{\lambda\,(s, m_a^2, m_b^2)}\sqrt{\lambda\,(s, m_c^2, m_d^2)}}$$

Здесь $c = 1$, а величина λ определена в ответе к задаче 3.104.

3.107. Величина $s = \left(\mathscr{E}_\pi' + \mathscr{E}_p'\right) 2$ имеет смысл квадрата полной энергии двух частиц в системе ц. и., поэтому она всегда положительна. Минимальное значение $s_{\min} = (m + M)^2$ соответствует случаю, когда π-мезон (масса m) и протон (масса M) покоятся в системе ц. и. Таким образом, $(m + M)^2 \leqslant s \leqslant \infty$.

Косинус угла рассеяния Θ' в системе ц. и. связан с s и t формулой

$$\cos\Theta' = \frac{s^2 + s\,(2t - 2M^2 - m^2) + M^2\,(M^2 - m^2)}{(s - M^2)\sqrt{s^2 - 2s\,(M^2 + m^2) + (M^2 - m^2)^2}} \tag{1}$$

Поскольку $-1 \leqslant \cos\Theta' \leqslant 1$, то, подставляя в это двойное неравенство $\cos\Theta'$ из (1), найдем допустимые при заданном s значения t.

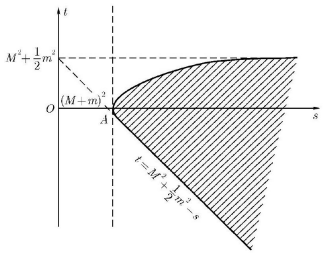


Рис. 3.21

Физическая область заштрихована на рис. 3.21. Порогу реакции отвечает точка A, причем $s_A = (M + m)^2, t_A = -\frac{m^2 M}{M+m}$.

$$T_0 = m + \frac{m^2}{2M}, \quad T_\pi = \frac{m^3}{2M(M + m)}$$

3.108. Искомые области изображены на рис. 3.22.

3.109. Разрешенные области для первых двух процессов изображены на рис. 3.23 а, для третьего - на рис. 3.23 б.

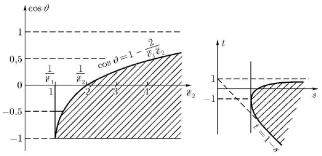


Рис. 3.22

Можно построить одну кинематическую диаграмму для всех трех процессов, рассматривая их как три возможных канала одной реакции, в которой участвуют два нуклона и два мезона. Начальные и конечные состояния мезонов и нуклонов в рассматриваемых каналах различаются энергиями, импульсами и зарядами [12].

Для построения диаграммы (рис. 3.24) проведем три прямые, на которых соответственно $s = 0, t = 0$ и $u = 0$, таким образом, чтобы они, пересекаясь, образовывали равносторонний треугольник с высотой $h = s+ +t + u = m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 + m_d^2 (c = 1)$. Значениями $s = s_0 = \text{const}$ будет соответствовать прямая, параллельная оси $s = 0$ и отстоящая от нее на расстояние $|s_0|$. Эта прямая проводится с той же стороны, с которой находится треугольник, если $s_0 > 0$, и со стороны, противоположной треугольнику, при $s_0 < 0$. Аналогично строятся линии $t = \text{const}$ и $u = \text{const}$.

[412] А также еще некоторыми характеристиками, изучаемыми в квантовой теории.

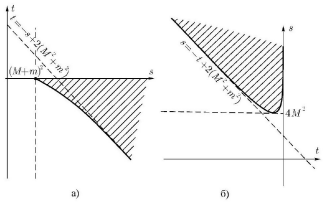


Рис. 3.23

В результате на плоскости построена косоугольная система координат и любой точке плоскости сопоставлены три числа s, t и u, положительные или отрицательные. Сумма этих трех величин удовлетворяет нужному условию (3.50). Чтобы в этом убедиться, возьмем произвольную точку D и опустим из нее перпендикуляры на стороны AB, BC и AC или их продолжения. Поскольку площадь ABC = площади ABD - (площадь BCD+ + площадь ACD), то

$$DM - DN - DK = h = m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 + m_d^2 \tag{1}$$

Но $-DN = s, -DK = t, -DM = u$, откуда и следует (3.50).

Для нашей цели удобно несколько изменить определения s, t и u по сравнению с (3.49). Пусть

$$s = (p_a + p_b)^i (p_a + p_b)_i, \quad t = (p_a + p_c)^i (p_a + p_c)_i \tag{2}$$
$$u = (p_a + p_d)^i (p_a + p_d)_i$$

где для частиц, исчезающих в результате реакции, $p^i = (-\mathscr{E}, -\boldsymbol{p})$, а для частиц, рождающихся в реакции, $p^i = (\mathscr{E}, \boldsymbol{p})$. Это правило знаков соответствует тому, что $\sum\limits_a p_a^i = 0$, как и в случае распада. Припишем индексы a и b мезонам, а c и d - нуклонам. Тогда для канала в) $p_a^i = (-\mathscr{E}_a, -\boldsymbol{p}_a)$,

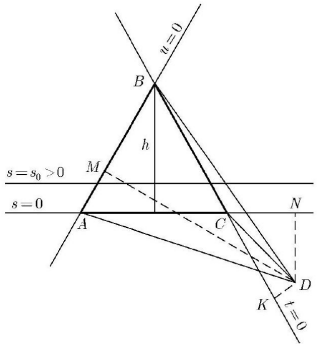


Рис. 3.24

$p_b^i = (-\mathscr{E}_b, -\boldsymbol{p}_b), p_c^i = (\mathscr{E}_c, \boldsymbol{p}_c), p_d^i = (\mathscr{E}_d, \boldsymbol{p}_d); s = (\mathscr{E}_a' + \mathscr{E}_d')^2 = (\mathscr{E}_c' + \mathscr{E}_d')^2 \geqslant 4M^2$ допустимые значения t получаются из условия $|\cos\Theta'| \leqslant 1$.

Граница физической области дается уравнением

$$s = -t - \frac{(M^2 - m^2)^2}{t} + 2\left(M^2 + m^2\right) \geqslant 4M^2 \tag{3}$$

и представляет собой гиперболу с асимптотами $t = 0$ и $u = 0$ (рис. 3.25).

В случае канала а) полагаем $p_a^i = (-\mathscr{E}_a, -\boldsymbol{p}_a), p_c^i = (-\mathscr{E}_c, -\boldsymbol{p}_c), p_b^i = (\mathscr{E}_b, \boldsymbol{p}_b), p_d^i = (\mathscr{E}_d, \boldsymbol{p}_d)$. Физическая область ограничена прямой $s = 0$ и гиперболой

$$s = -t - \frac{\left(M^2 - m^2\right)^2}{t} + 2\left(M^2 + m^2\right), \quad t \geqslant (M+m)^2$$

которая является второй ветвью гиперболы (3).
Аналогично строится физическая область для канала б). Как видно из изложенного, полученная диаграмма очень похожа на диаграмму Далица для трехчастичного распада (см. задачу 3.79).

Сходство обусловлено тем, что в обоих случаях в процессе участвуют 4 частицы, 4-импульсы которых в силу закона сохранения связаны усло-
вием $p_{ai} + p_{bi} + p_{ci} + p_{di} = 0$. Из 4-импульсов частиц с учетом того, что при заданных массах всех частиц $m_a^2 = p_{ai}^2$ и т. д., как нетрудно убедиться, можно составить только 2 независимых инварианта, например $s = (p_a + \ + p_b)^i (p_a + p_b)_i$ и $t = (p_a + p_c)^i (p_a + p_c)_i$. Поэтому для изображения таких процессов требуется двумерное пространство (кинематическая плоскость).

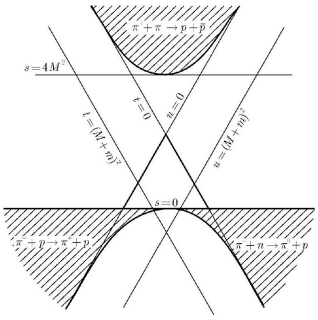


Рис. 3.25
3.111. Если частица, двигавшаяся с 4 -импульсом p_{0i}, испустила в среде фотон с 4-импульсом $k = \left(\frac{\hbar\omega}{c}, \frac{\hbar\omega n}{c}\right)$, то законы сохранения энергии и импульса могут быть выражены четырехмерным равенством

$$p_{0i} = p_i + k_i$$

где p_i – 4-импульс частицы после излучения фотона. Перенесем k_i налево и возведем обе части получившегося равенства в квадрат. После элементар-
ных преобразований получим

$$\cos\vartheta = \frac{1}{n\beta}\left[1 + \frac{\pi\Lambda}{n\lambda}\left(n^2 - 1\right)\sqrt{1 - \beta^2}\right] \tag{1}$$

где $\Lambda = \hbar/mc$ - комптонова длина волны частицы, $\lambda = 2\pi c\omega n$ - длина волны фотона, $\beta = v/c$. второй член, равный по порядку величины Λ/λ, обычно очень мал. Если опустить этот член, выражающий квантовые поправки (Λ пропорциональна $\hbar$), то выражение (1) сведется к классическому условию излучения Вавилова- Черенкова:

$$\cos\vartheta = \frac{1}{n\boldsymbol{\beta}}$$

3.113. Обозначив через p_{0i} и p_i4-импульсы частицы до и после излучения, через k_i – 4-импульс фотона, напишем закон сохранения энергии и импульса в виде

$$p_{0i} - k_i = p_i$$

Возводя обе части этого равенства в квадрат и отбрасывая член с $\hbar^2$, получим

$$\left(m^2 - m_0^2\right) c^2 - 2p \cdot k + \frac{2\mathscr{E}_0 k}{c} = 0$$

где m_0 - масса возбужденной частицы, m - масса частицы в нормальном состоянии. Представим разность $c^2\left(m_0^2 - m^2\right)$ в виде $c^2\left(m_0 - m\right)\left(m_0 + m\right) \approx \approx 2\hbar\omega_0 m$. Тогда

$$n(\omega)\boldsymbol{\beta}\cos\vartheta = 1 - \frac{\omega_0}{\omega}\sqrt{1 - \boldsymbol{\beta}^2} \tag{1}$$

где $\beta = v/c$. При $\omega_0 \to 0$ равенство (1) переходит в условие

$$n(\omega)\boldsymbol{\beta}\cos\vartheta = 1$$

возникновения излучения Вавилова- Черенкова. Это излучение не связано, таким образом, с изменением внутреннего состояния частицы.

При $\omega_0 \neq 0$ перепишем (1) в виде

$$\omega = \frac{\omega_0\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - n(\omega)\beta\cos\vartheta} \tag{2}$$

Формулой (2) описывается эффект Доплера в преломляющей среде (ср. с задачей 3.49). Она применима, если $n(\omega)\boldsymbol{\beta}\cos\vartheta < 1$ и отличается от соответствующей формулы, описывающей эффект Доплера в вакууме, только наличием $n(\omega)$ в знаменателе. При $\beta \ll 1$ никаких качественно новых явлений не возникает, но при $\boldsymbol{\beta} \approx 1$ и при наличии дисперсии в среде явление усложняется.

В общем случае формула (2) представляет собой нелинейное уравнение относительно ω (n - функция ω!) и может иметь более чем одно решение. При этом вместо одной смещенной линии, как в обычном эффекте Доплера, в лабораторной системе будет наблюдаться несколько линий (сложный эффект Доплера).

3.114. Поступая так же, как и при решении задачи 3.113, получим следуюшие результаты.

Излучение частоты ω, сопровождаемое возбуждением частицы, может возникнуть, если скорость $v = \boldsymbol{\beta}$ движения частицы превосходит пороговое значение $\frac{c}{n(\omega)\cos\vartheta}$($\vartheta$ - угол между направлением скорости частицы и направлением импульса фотона). Необходимая для этого энергия заимствуется из кинетической энергии частицы. Излучение такого типа наблюдается при фиксированном значении ω только в некотором интервале острых углов ϑ внутри черенковского конуса, поверхность которого определяется уравнением $n\boldsymbol{\beta}\cos\vartheta = 1$. Наблюдаемая частота ω связана с углом ϑ и величинами $\boldsymbol{\beta}, n(\omega)$ формулой

$$\omega = \frac{\omega_0\sqrt{1 - \beta^2}}{n(\omega)\boldsymbol{\beta}\cos\vartheta - 1} \quad [n(\omega)\boldsymbol{\beta}\cos\vartheta > 1]$$

представляющей собой,как и в случае задачи 3.113, уравнение относительно ω. Это уравнение допускает, в общем случае, несколько решений (сложный сверхсветовой эффект Доплера).

3.115. Обозначим через ϑ_1 угол между начальным импульсом электрона p_0 и направлением распространения мягкого кванта, а через ϑ_2 угол между p_0 и направлением распространения жесткого кванта. Из закона сохранения 4 -импульса (ср. задачу 3.111) в предложении $\hbar\omega_1 \ll \mathscr{E}_0$, $\hbar\omega_0 \ll \mathscr{E}_0$ следует

$$\cos\vartheta_2 = \frac{c}{v_0 n\left(\omega_1\right)} + \frac{\hbar\omega_2}{\hbar\omega_1} \cdot \frac{1 - \frac{v_0}{c}\cos\vartheta_1}{\frac{v_0}{c} n\left(\omega_1\right)} \tag{1}$$

Отсюда видно, что жесткий черенковский квант $\hbar\omega_2$ распространяется внутри черенковского конуса, отвечающего мягкому черенковскому кванту с частотой ω_1. Угол

раствора этого конуса при принятой точности определяется условием $\cos\vartheta_1 = c/v_0 n(\omega_1)$. Для возникновения жесткого излучения Ва вилова - Черенкова необходимо выполнение неравенства $v_0 > c/n(\omega_1)$, как и в случае обычного черенковского излучения. Это возможно только при $n(\omega_1) > 1$. Следовательно, один из квантов должен быть достаточно мягким. Решая (1) относительно $\hbar\omega_2$, получим

$$\hbar\omega_2 = \hbar\omega_1 \frac{\frac{n(\omega_1)v_0}{c}\cos\vartheta_1 - 1}{1 - \frac{v_0}{c}\cos\vartheta_2}$$

Максимальное значение энергии $\hbar\omega_2$ достигается при $\vartheta_1 = \vartheta_2 = 0$:

$$(\hbar\omega_2)_{\max} = \hbar\omega_1 \frac{n(\omega_1)\frac{v_0}{c} - 1}{1 - \frac{v_0}{c}}$$

3.116. $\hbar\omega_2 = \frac{2\hbar\omega_1[n(\omega_1)\cos\vartheta_1 - 1]}{(mc^2/\mathscr{E}_0)^2 + 2(\hbar\omega_1/\mathscr{E}_0)[n(\omega_1)\cos\vartheta_1 - 1] + \vartheta_2^2}$.

Максимальное значение $\hbar\omega_2$ достигается при $\vartheta_1 = \vartheta_2 = 0$. Частные случаи: при $\mathscr{E}_0 \ll (mc^2)^2/\hbar\omega_1$

$$(\hbar\omega_2)_{\max} \approx 2\hbar\omega_1 \left(\frac{\mathscr{E}_0}{mc^2}\right)^2 [n(\omega_1) - 1]$$

при $\mathscr{E}_0 \gg (mc^2)^2/\hbar\omega_1$

$$(h\omega_2)_{\max} \approx \mathscr{E}_0$$

Из последнего выражения видно, что жесткий черенковский квант может уносить большую часть первоначальной энергии ультрарелятивистского электрона.

3.117. Угол рассеяния принимает дискретные значения, определяемые уравнением

$$\sin\frac{\vartheta}{2} = \frac{n\pi\hbar}{ap_0}$$

где $\frac{1}{a} = \frac{n_1}{a_1} + \frac{n_2}{a_2} + \frac{n_3}{a_3}$, n_i - целые числа.

3.119. При $h\omega \ll \mathscr{E}_0$

$$h\omega = \frac{(qc)^2/2\mathscr{E}_0}{(mc^2/\mathscr{E}_0)^2 + \vartheta^2 - 2(qc/\mathscr{E}_0)}$$

Энергия $\hbar\omega$ тормозного кванта принимает дискретные значения при фиксированных значениях угла ϑ, так как передаваемый импульс $q = 2\pi\hbar g$ дискретен.

3.120. Согласно результатам задачи 2.56, электростатическая энергия заряженного шара дается выражением $W = \alpha e^2/R$, где e - полный заряд шара, α - численный множитель порядка единицы. Приравнивая $W = m_e c^2$, находим $R = \alpha e^2/m_e c^2$. Величина

$$r_0 = \frac{e^2}{m_e c^2} = 2,8 \times 10^{-13}\ \text{cm}$$

называется классическим радиусом электрона. Этот параметр появляется во многих задачах электродинамики. Однако ему нельзя приписывать буквальный смысл радиуса элементарной частицы, так как классическая теория, на основе которой получена его оценка, из-за квантовых эффектов теряет силу уже на значительно больших расстояниях

$$\Lambda = \frac{\hbar}{mc}$$

Для электрона $\Lambda = 137 r_0 = 3,9 \times 10^{-11}$ см. Величина Λ называется комптоновской длиной волны.

C.3 4 The Variational Principle in Relativistic Mechanics and Field Theory

C.3.1 4.1. Four-Vectors and Tensors

Преобразования тензоров. При переходе от одной инерциальной системы S' к другой S контравариантные компоненты 4 -вектора преобразуются по правилу

$$A^i = \Lambda^i{}_k A'^k \tag{4.1}$$

где матрица (Λ^i_k) преобразования Лоренца частного вида (3.20) (буст вдоль оси Ox) дается таблицей

$$\Lambda^i{}_k = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

Матрицу преобразования часто записывают через параметр ψ («быстроту») согласно формулам

$$\operatorname{ch}\psi = \gamma, \quad \operatorname{sh}\psi = \beta\gamma, \quad \operatorname{ch}^2\psi - \operatorname{sh}^2\psi = 1 \tag{4.3}$$

Ковариантные компоненты 4-вектора, согласно (3.21) и (3.18), преобразуются с другой матрицей:

$$A_i = \Lambda^k_i A'_k \tag{4.4}$$

где

$$\Lambda^k_i = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\psi & -\operatorname{sh}\psi & 0 & 0 \\ -\operatorname{sh}\psi & \operatorname{ch}\psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.5}$$

Определения (4.1), (4.4) непосредственно обобщаются на тензор любого ранга. Так, смешанный тензор II ранга представляет собой 16 -компонентную величину $T^k_i (i,k = 0,1,2,3)$, преобразующуюся по правилу

$$T_i^k = \Lambda^m_i \Lambda^k_n T'_{m}{}^{m} \tag{4.6}$$

Рассмотрению более общих преобразований Лоренца, чем то, которому отвечают матрицы (4.2), (4.5), посвятим следующий пример.

Пример 4.1. Какой вид имеет наиболее общее линейное преобразование координат? Какие условия накладывает требование инвариантности интервала между двумя событиями на коэффициенты преобразования? Сколько независимых параметров определяют такое преобразование?

Решение. Преобразование имеет вид

$$x^k = \Lambda^k{}_n x'^n + a^k \tag{4.7}$$

где $\Lambda^k{}_n, a^k$ - коэффициенты преобразования. Поскольку координаты - действительные величины, то и коэффициенты преобразования должны быть действительными. Тождественному преобразованию отвечают значения

$$\Lambda_n^k = \delta_n^k, \quad a^k = 0 \tag{4.8}$$

При $\Lambda^k{}_n = \delta_n^k$ имеем

$$x^k = x'^k + a^k, \tag{4.9}$$

откуда следует, что a^k – 4-вектор сдвига системы отсчета, компоненты которого независимы и произвольны.

Из условия инвариантности малого интервала $ds'^2 = ds^2$ находим

$$g_{ik}dx^i dx^k = g_{ik}\Lambda^i{}_m\Lambda^k{}_n dx'^m dx'^n = g_{mn}dx'^m dx'^n$$

откуда

$$g_{ik}\Lambda_m^i\Lambda_n^k = g_{mn} \tag{4.10}$$

Умножая последнее равенство на g^{nr}, получим

$$g_{ik}\Lambda^k{}_n g^{nr}\Lambda^i{}_m = \delta_m^r \tag{4.11}$$

Вспоминая определение обратной матрицы Λ^{-1},

$$\Lambda^n{}_i \left(\Lambda^{-1}\right)^i{}_m = \left(\Lambda^{-1}\right)^n{}_i \Lambda^i{}_m = \delta_m^n, \tag{4.12}$$

находим для нее следующее выражение:

$$\left(\Lambda^{-1}\right)_i^n = g_{ik}\Lambda_r^k g^{rn} = \Lambda_i^n \tag{4.13}$$

Обращаем внимание читателя на обратный порядок индексов i и n в правой и левой частях. Этот факт в совокупности с явным видом метрического тензора g_{ik} означает, что обратная матрица получается из исходной путем транспонирования и изменения знака элементов первой строки и первого столбца (отвечающих индексу 0). Преобразование, обратное (4.7), выглядит следующим образом:

$$x'^i = \left(\Lambda^{-1}\right)^i{}_k \left(x^k - a^k\right) = \Lambda_k{}^i \left(x^k - a^k\right) \tag{4.14}$$

Свойство (4.11) матрицы преобразования называется псевдоортогональностью. Оно означает, что 16 матричных элементов $\Lambda^i{}_m$ $(i, m = 0, 1, 2, 3)$ связаны между собой десятью соотношениями (уравнений десять, а не шестнадцать, так как перемена местами индексов m и r не приводит к новым равенствам). Следовательно, матрица преобразования Λ определяется шестью независимыми параметрами. Это находится в соответствии с физическими представлениями о преобразовании Лоренца общего вида, которое задается шестью параметрами (например, величиной и направлением относительной скорости и тремя углами, определяющими ориентацию пространственных осей). Указанные шесть параметров, как и четыре компоненты вектора сдвига a^k, меняются непрерывным образом и в совокупности образуют десять независимых величин.

Кроме десяти непрерывных параметров, преобразование (4.7) определяется еще двумя дискретными параметрами, принимающими всего по два значения. Это следует из равенства (4.11): поскольку определитель произведения матриц равен произведению определителей, то

$$(\det \widehat{g})^2 (\det \widehat{\Lambda})^2 = 1$$

или

$$\det \widehat{\Lambda} = \pm 1 \tag{4.15}$$

Положив в (4.11) $r = m = 0$, находим

$$\left(\Lambda_0^0\right)^2 - \left(\Lambda_0^1\right)^2 - \left(\Lambda_0^2\right)^2 - \left(\Lambda_0^3\right)^2 = 1 \tag{4.16}$$

откуда $\left(\Lambda^0{}_0\right)^2 \geqslant 1$ или

$$\Lambda^0{}_0 / \left|\Lambda_{00}^0\right| = \pm 1 \tag{4.17}$$

Таким образом, кроме десяти непрерывных параметров преобразования необходимо задать знак $\det \widehat{\Lambda}$ и знак $\Lambda^0{}_0$.

Тождественному преобразованию соответствует $\det \widehat{\Lambda} = +1$ и $\Lambda^0{}_0 = +1$, и никакими изменениями непрерывных параметров невозможно изменить знаки этих величин. Значениям $\Lambda_0^0 = -1$ и $\det \widehat{\Lambda} = -1$ соответствует, в частности, отражение времени при неизменных координатах (преобразование $t' = -t, x'^{\mu} = x^{\mu}$). Значениям $\Lambda^0{}_0 = -1$, $\det \widehat{\Lambda} = +1$ соответствует, например, инверсия всех четырех осей, $x'^k = -x^k$; наконец, значениям $\Lambda^0{}_0 = +1$, $\det \widehat{\Lambda} = -1$ отвечает пространственная инверсия, $x'^{\mu} = -x^{\mu}$, $t' = t$.

Преобразования (4.7) образуют группу [1], которая называется группой Пуанкаре. Преобразования, не содержащие сдвига ($a^k = 0$), также образуют группу - группу общих преобразований Лоренца. Преобразования с $\Lambda^0{}_0 \geqslant 1$ и $\det \widehat{\Lambda} = 1$ образуют шестипараметрическую группу собственных преобразований Лоренца.

Пример 4.2. Вывести преобразование Лоренйа (3.5) на основе общих соотношений (4.7)-(4.16), полученных в предыдуцем примере.

Решение. Преобразования (3.7) соответствуют случаю, изображенному на рис. 3.1, причем $t = t' = 0$ в момент, когда трехмерные точки O и O' совпадали. Поэтому в общих формулах (4.7) нужно положить $a^i = 0$. Обратимся далее к преобразованиям координат x^2 и x^3. Ввиду совпадения плоскостей (x^1, x^2) и (x'^1, x'^2) значению $x^3 = 0$ должно соответствовать $x'^3 = 0$ независимо от значений x^0, x^1, x^2. Это возможно только, если в линейной связи

$$x'^3 = \Lambda^3{}_0 x^0 + \Lambda^3{}_1 x^1 + \Lambda^3{}_2 x^2 + \Lambda^3{}_3 x^3$$

следуюшей из (4.7), коэффициенты $\Lambda^3{}_0 = \Lambda^3{}_1 = \Lambda^3{}_2 = 0$. Аналогичные соображения показывают, что и $\Lambda^2{}_0 = \Lambda^2{}_1 = \Lambda^2{}_3 = 0$. Кроме того, ввиду равноправия осей x^2 и x^3 должно быть $\Lambda^3{}_3 = \Lambda^2{}_2 = k(\boldsymbol{V})$, т. е.

$$x'^2 = k(\boldsymbol{V}) x^2, \quad x'^3 = k(\boldsymbol{V}) x^3, \tag{4.18}$$

где указана возможная зависимость коэффициента преобразования k от относительной скорости. В силу равноправия систем S и S' формулы (4.18) должны давать обратные преобразования при замене V на $-V$:

$$x^2 = k(-\boldsymbol{V}) x'^2, \quad x^3 = k(-\boldsymbol{V}) x'^3. \tag{4.19}$$

Но оба направления $\boldsymbol{V}$ перпендикулярны к плоскости $x^2 x^3$ и совершенно равноценны (изотропия пространства!). Поэтому $k(-\boldsymbol{V}) = k(\boldsymbol{V})$. Переходя

от x^2 к x'^2 и затем снова к x^2, найдем $x^2 = k^2(\boldsymbol{V}) x^2$, т. е. $k = \pm 1$. Значение $k = -1$ отвечает противоположной ориентации осей x^2 и x'^2, поэтому рисунку 3.1 соответствует только

$$$$

[41] Краткие сведения по теории групп см., например, в [Боголюбов и Ширков (1980)]

$$\Lambda^3{}_3 = \Lambda^2{}_2 = k = +1 \tag{4.20}$$

$$

Теперь записываем равенства (4.7) для $k = 0$ и 1:

$$x'^0 = \Lambda^0{}_0 x^0 + \Lambda^0{}_1 x^1, \quad x^{11} = \Lambda^1{}_0 x^0 + \Lambda^1{}_1 x^1 \tag{4.21}$$

Четыре неизвестных коэффициента находим из следующих соотношений:
а) Уравнение плоскости $x'^1 = 0$ в системе S имеет вид $x^1 = Vt = \beta x^0$. Отсюода с помощью (4.21) находим

$$\Lambda^1{}_0 = -\beta \Lambda^1{}_1 \tag{4.22}$$

б) Из уравнений (4.11) при $r = 0, m = 1$ получаем

$$\Lambda^0_0 \Lambda^0{}_1 - \Lambda^1{}_0 \Lambda^1{}_1 = 0 \tag{4.23}$$

откуда с помощью (4.22) находим

$$\Lambda^0{}_1 = -\beta \left(\Lambda^1{}_1\right)^2 / \Lambda^0_0 \tag{4.24}$$

в) Из уравнений (4.11) при $r = m = 0$ и $r = m = 1$ получаем два уравнения:

$$\left(\Lambda^0_0\right)^2 - \left(\Lambda^1_0\right)^2 = 1, \quad \left(\Lambda^1_1\right)^2 - \left(\Lambda^0_{01}\right)^2 = 1 \tag{4.25}$$

Из четырех алгебраических уравнений (4.22)-(4.25) вычисляем коэффициенты преобразования, отбирая положительные значения $\Lambda^0{}_0$ и $\Lambda^1{}_1$:

$$\Lambda^0{}_0 = \Lambda^1{}_1 = \gamma, \quad \Lambda^0{}_1 = \Lambda^1{}_0 = -\beta\gamma. \tag{4.26}$$

(собственное преобразование Лоренца).
4-тензоры, как и тензоры в трехмерном пространстве, могут по-разному вести себя при инверсии пространственных координатных осей (см. раздел 1.1). Контравариантным псевдотензором N-го ранга называется совокупность 4^N величин $P^{ik\ldots l}$, которые преобразуются при отражениях и поворотах в четырехмерном пространстве Минковского по правилу

$$P^{ik\ldots l} = |\widehat{\Lambda}| \Lambda^i{}_m \Lambda^k{}_n \ldots \Lambda^l_p P'^{mn\ldots p} \tag{4.27}$$

Определитель $|\widehat{\Lambda}| = -1$, если преобразование включает в себя отражение нечетного числа (одной или трех) координатных осей. Примером псевдотензора является антисимметричный единичный псевдотензор IV ранга e^{iklm}. Он определяется условиями:
а) компоненты e^{iklm} меняют знак при перестановке любой пары значков (это условие, как и в трехмерном пространстве, обращает в нуль все компоненты, у которых имеется два или больше совпадающих значков);
б) $e^{0123} = 1$
в) правилом (4.27) перехода в другую систему координат.

Эти правила приводят к тому, что e^{iklm} оказывается инвариантным псевдотензором: в любой системе координат

$$e'^{iklm} = e^{iklm} \tag{4.28}$$

Дуальные тензоры. С помощью тензора e^{iklm} можно строить новые тензоры. Так, произвольному ковариантному 4 -вектору B_m можно сопоставить антисимметричный тензор III ранга

$$\widetilde{B}^{ikl} = e^{iklm} B_m \tag{4.29}$$

Антисимметричный ковариантный тензор II ранга $A_{lm} = -A_{ml}$ можно превратить в другой антисимметричный тензор

$$\widetilde{A}^{ik} = (1/2) e^{iklm} A_{lm} \tag{4.30}$$

Наконец, из компонент антисимметричного тензора III ранга можно построить вектор

$$\widetilde{J}^{i} = (1/3!) e^{iklm} J_{klm}$$

Во всех трех случаях дело сводится к переименованию компонент исходных тензоров. Пары тензоров с тильдой и без нее называются дуальными друг другу. В дуальные пары могут входить только антисимметричные тензоры. Если в правые части двух последних равенств подставить тензоры с произвольной симметрией, то их симметричные части при суммировании дадут нулевой вклад, и, таким образом, никак не отразятся на значениях левых частей. □

Дифференцирование тензора по 4-координатам приводит к изменению его ранга. Это связано с тем, что оператор производной представляет собой 4-вектор.

Пример 4.3. Показать, что оператор 4-градиента д/дх ^{k} преобразуется как истинный ковариантный 4-вектор.

Решение. С помощью (4.14) находим преобразование

$$\frac{\partial}{\partial x^k} = \frac{\partial x'^m}{\partial x^k} \frac{\partial}{\partial x^m} = \Lambda^m_k \frac{\partial}{\partial x'^m} \tag{4.32}$$

которое совпадает с правилом преобразования (4.4) ковариантного 4-вектора. Поэтому для обозначения 4 -градиента наряду с (4.32) применяют и другие символы, явно использующие ковариантный (нижний) значок, например:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x^k} = \partial_k \Phi = \Phi_{,k} \tag{4.33}$$

При инверсии осей 4-градиент преобразуется как 4-координаты.

Рекомендуемая литература: [Фок (1955)], [Батыгин и Топтыгин (1970)], [Рашевский (1953)], [Медведев (1977)], [Вейнберг (1977)], [Паули (1947)], [Берке (1985)], [Ландау и Лифшиц, Теория поля].

Задачи

4.1. Показать, что метрический тензор (3.9) имеет одинаковый вид во всех инерциальных системах координат.

4.2. Доказать равенство

$$e^{iklm} A_i B_k C_l D_m = \begin{vmatrix} A_0 & A_1 & A_2 & A_3 \\ B_0 & B_1 & B_2 & B_3 \\ C_0 & C_1 & C_2 & C_3 \\ D_0 & D_1 & D_2 & D_3 \end{vmatrix} \tag{4.34}$$

4.3. На основе определения тензора e^{iklm} доказать равенства (4.28).

4.4. Некоторый контравариантный тензор II ранга обладает свойством симметрии $\left(S^{ik} = S^{ki}\right)$ либо антисимметрии $(A^{ik} = -A^{ki})$. Как выглядят соответствующие соотношения для ковариантного и смешанного тензоров?

4.5. Записать тензор II ранга T_i^k с произвольной симметрией в виде суммы тензора,

пропорционального единичному δ_i^k, и тензора с нулевым следом.
4.6. Имеется тензор T^{ikl} с произвольной симметрией. Составить из его компонент тензоры S^{ikl} и A^{ikl}, которые были бы симметричны и антисимметричны по любой паре значков.
4.7. Показать, что

$$e_{iklm} = -e^{iklm} \tag{4.35}$$

4.8 *. Доказать тождества:
а) $e_{iklm}e^{iklm} = -24$
б) $e_{iklm}e^{ikln} = -6\delta_m^n$
в) $e_{iklm}e^{ikjr} = -2\left(\delta_l^j\delta_m^r - \delta_l^r\delta_m^j\right)$
г)

$$e_{iklm}e^{iprs} = -\begin{vmatrix} \delta_k^p & \delta_k^r & \delta_k^s \\ \delta_l^p & \delta_l^r & \delta_l^s \\ \delta_m^p & \delta_m^r & \delta_m^s \end{vmatrix} \tag{4.36}$$

д)

$$e_{iklm}e^{jprs} = -\begin{vmatrix} \delta_i^j & \delta_i^p & \delta_i^r & \delta_i^s \\ \delta_k^j & \delta_k^p & \delta_k^r & \delta_k^s \\ \delta_l^j & \delta_l^p & \delta_l^r & \delta_l^s \\ \delta_m^j & \delta_m^p & \delta_m^r & \delta_m^s \end{vmatrix}$$

4.9. Обратить равенства (4.29)-(4.31) и выразить вектор B_m и тензоры A_{lm}, J_{klm} через $\widetilde{B}^{ikl}, \widetilde{A}^{ik}$ и $\widetilde{J}^i$ соответственно. Как преобразуются тензоры с тильдой при отражении координатных осей, если исходные тензоры являются полярными?
4.10. Два непараллельных 4 -вектора A_i и B_k, имеющие общее начало, определяют двумерную гиперплоскость в 4 -пространстве. Показать, что тензор $\widetilde{C}^{ik}$, дуальный антисимметричному тензору $A_iB_k - A_kB_i$, ортогонален любому 4 -вектору, лежащему в указанной гиперплоскости.
4.11*. Три некомпланарных (линейно независимых) 4-вектора A_i, B_j, C_k являются ребрами 3 -мерного гиперпараллелепипеда в 4 -мерном псевдоевклидовом пространстве. Определить объем указанного параллелепипеда. Показать, что 4-вектор $\widetilde{V}_i$, дуальный антисимметричному тензору III ранга, изображающему указанный объем, ортогонален любому 4 -вектору, принадлежащему данному трехмерному гиперпараллелепипеду.
4.12*. Найти, на какие трехмерные тензоры расщепляется 4 -тензор II ранга T^{ik} при пространственных поворотах.
4.13*. Найти, на какие трехмерные тензоры расщепляется истинный антисимметричный 4-тензор II ранга A_{ik} при пространственных поворотах и отражениях.

Указание. Использовать результаты задачи 1.10 .
4.14. Для антисимметричного тензора A_{ik}, рассмотренного в предыдущей задаче, доказать тождества

$$A_{ik}\widetilde{A}^{kl} = \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{a}\delta_i^l, \quad \widetilde{A}_{ik}\widetilde{A}^{kl} = A_{ik}A^{kl} + (1/2)A_{mn}A^{mn}\delta_i^l \tag{4.37}$$

где $\widetilde{A}_{ik}$ - дуальный тензор, p и a - полярный и аксиальный 3 -векторы, составляющие A_{ik}.
4.15. Два 4-вектора, A_i и B_i, называются параллельными, если

$$\frac{A_0}{B_0} = \frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2} = \frac{A_3}{B_3}$$

Доказать, что отношение одноименных компонент параллельных 4-векторов инвариантно относительно преобразования Лоренца.

УкАзАние. Воспользоваться свойством равных отношений.

4.16. Пространственные повороты координатной системы образуют подгруппу собственных преобразований Лоренца. Записать матрицу преобразования Лоренца для пространственного поворота, выбрав в качестве параметров преобразования углы Эйлера (рис. 1.2).

4.17. Система отсчета S'' движется относительно S' со скоростью V', параллельной оси x', S' - относительно S со скоростью V, параллельной оси x. Одноименные оси всех трех систем параллельны. Путем перемножения соответствующих матриц получить матрицу преобразования от S'' к S. Получить также формулу сложения одинаково направленных скоростей.

4.18. Система S' движется относительно S со скоростью $\boldsymbol{V}$, направление которой задается в S сферическими углами Θ, Φ. Пространственные оси двух систем параллельны. Получить матрицу преобразования Лоренца путем перемножения матриц пространственного поворота и буста вдоль одной из координатных осей.

4.19^. Получить матрицу преобразования $\widehat{\Lambda}$ для случая, указанного в предыдущей задаче, на основе общих свойств этой матрицы, разобранных в примере 4.1.

4.20. Запишем бесконечно малое собственное преобразование Лоренца общего вида в форме

$$x^k = x'^k + \delta\Omega_l^k x'^l$$

где $\delta\Omega_l^k$ - параметры преобразования. Какие ограничения на матрицу $\delta\Omega_l^k$ накладывает требование инвариантности интервала и каково число независимых параметров преобразования? Какой геометрический смысл имеют величины $\delta\Omega_l^k$?

4.21. Найти правила преобразования производных $A^i{}_{,i}, \partial_k A_i, \partial_i T^i{}_k$, где A - вектор, Tk - тензор II ранга.

4.22. Показать, что оператор Даламбера

$$\Box = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \tag{4.38}$$

- релятивистский инвариант.

  4.23. По аналогии с ротором трехмерного вектора rot $\boldsymbol{A}$ определить ротор 4-вектора A_i. Можно ли рассматривать 4 -ротор как 4 -вектор?

  4.24^. В четырехмерном псевдоевклидовом пространстве задана гладкая замкнутая линия l. Для произвольного дифференцируемого 4 -вектора $A_i(x) \equiv A_i\left(x^0, x^1, x^2, x^3\right)$ доказать теорему Стокса:

$$\oint_l A_i dl^i = \int\limits_S \left(\frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k}\right) dS^{ik} \tag{4.39}$$

где S - произвольная незамкнутая гиперповерхность, опирающаяся на контур l; dS^{ik} - направленный элемент этой гиперповерхности, dl^i - направленный элемент контура l.

4.25*. Доказать теорему Остроградского-Гаусса в четырехмерном псевдоевклидовом пространстве:

$$\oint_\Sigma A^i dS_i = \int\limits_\Omega \frac{\partial A^i}{\partial x^i} d^4x \tag{4.40}$$

где A^i - произвольный дифференцируемый 4 -вектор, Σ - замкнутая трехмерная гиперповерхность, ограничивающая 4 -объем Ω, dS_i - направленный элемент гиперповерхности, d^4x - элемент 4 -объема.

УкАзАниЕ. Элементы трехмерной гиперповерхности, перпендикулярные координатным осям, образуют 4 -вектор и даются выражениями (ср. с задачей 4.11)

$$dS_0 = \pm dx^1 dx^2 dx^3, \quad dS_1 = \pm dx^0 dx^2 dx^3$$
$$dS_2 = \pm dx^0 dx^1 dx^3, \quad dS_3 = \pm dx^0 dx^1 dx^2$$

ЗАмечаниЕ. Теоремы Стокса и Остроградского-Гаусса справедливы для любого 4 -тензора ранга $s \neq 0$. Все индексы кроме тех, по которым производится суммирование в равенствах (4.39) и (4.40), остаются свободными.

C.3.2 4.2. Motion of Charged Particles in Electromagnetic Fields. Electromagnetic Field Conversion

Взаимодействие заряженных частиц с электромагнитным полем. Воздействие внешнего электромагнитного поля на заряженную частицу, движущуюся с произвольной скоростью (постоянной или переменной) описывается силой Лоренца

$$\mathscr{F} = e\boldsymbol{E} + \frac{e}{c}\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{H}, \tag{4.41}$$

и мы будем рассматривать это утверждение как фундаментальный опытный факт. Используя его, а также некоторые общефизические принципы, мы установим вид взаимодействия между заряженными частицами и электромагнитным полем, построим функции Лагранжа и Гамильтона, выясним правила релятивистского преобразования напряженностей электромагнитного поля $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}$ и найдем инвариантную форму уравнений движения релятивистских частиц в электромагнитном поле.

Дзя выполнения этой программы на основе вариационного подхода необходимо установить вид действия для заряженной частицы в электромагнитном поле. Для этого к действию (3.29) для свободной частицы необходимо добавить слагаемое, описывающее взаимодействие частицы с полем:

$$S = -mc \int_{(1)}^{(2)} ds + S_{int} \tag{4.42}$$

(1)

Оно должно быть релятивистским инвариантом, содержать в виде произведения заряд частицы и величины, характеризующие поле, а также - и это самое главное - приводить к следствиям, подтверждаемым опытом, в том числе к силе Лоренца (4.41). Первое из перечисленных условий вытекает
из принципа относительности, второе можно рассматривать как обобщение данных опыта, согласно которым взаимодействие частиц с полем описывается единственной скалярной характеристикой частицы - ее электрическим зарядом (см. главу 2). В качестве величин, относящихся к полю, в S_{int} не удается ввести напряженности $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ ввиду достаточно сложного закона их преобразования в произвольную инерциальную систему. Поэтому поле описывают другой, но связанной с напряженностями поля системой полевых функций - четырехмерным векторным потенциалом $A_i\left(x^0, x^1, x^2, x^3\right), i = 0, 1, 2, 3$, который в трехмерных обозначениях уже использовался в главе 2. В этих предположениях релятивистски инвариантное выражение для S_{int} записывается в максимально простом виде:

$$S_{int} = -\frac{e}{c}\int\limits_{(1)}^{(2)} A_i\left(x^0, x^1, x^2, x^3\right) dx^i \tag{4.43}$$

где интеграл, как и в (3.29), берется вдоль мировой линии частицы. Множитель c^{-1} определяется используемой (абсолютной гауссовой) системой единиц, а знак минус - требованием, чтобы компоненты A_i совпали с уже введенными в главе 2 скалярным φ и векторным $\boldsymbol{A}$ потенциалами. Запись действия в форме (4.43) иногда называют гипотезой минимальности электромагнитного взаимодействия. Все исследованные до сих пор многочисленные электромагнитные явления находятся в согласии с (4.43) и это выражение для широкой области физических явлений можно считать твердо установленным фактом. Не исключено, однако, что описание электромагнитного взаимодействия с некоторыми еще не открытыми экспериментально частицами, поиски которых продолжаются (пример - магнитный монополь Дирака), потребуют пересмотра этого взаимодействия.

Если имеется несколько заряженных частиц, то действие для них записывается в виде суммы выражений (4.43):

$$S_{int} = -\sum_a \frac{e_a}{c}\int\limits_{(1)}^{(2)} A_i\left(x_a^0, x_a^1, x_a^2, x_a^3\right) dx_a^i \tag{4.44}$$

где начальная и конечная точки (1) и (2) для каждой частицы свои, а индекс a у координат обозначает номера частиц. Здесь под A_i нужно понимать значения 4 -потенциала, создаваемого внешними телами и всеми частицами, кроме a-й, в точке нахождения частицы с номером a. Таким образом,

действие частицы на самое себя исключается из взаимодействия, как уже отмечалось в гл. 2. Это связано с тем, что современная электродинамика (не только классическая, но и квантовая) не в состоянии правильно вычислить энергию самодействия.

Выражение (4.44) означает, что воздействие на данную частицу осуществляется через поле, которое создают другие частицы в ее окрестности (и которое, согласно теории относительности, должно распространяться с конечной скоростью, не превышающей предельной скорости c). Концепция взаимодействия частиц через промежуточный агент (поле) называется близкодействием. Она находит подтверждение и в современной квантовой теории элементарных частиц, где переносчиками взаимодействия выступают кванты соответствующих полей - фотоны, глюоны, промежуточные бозоны и др. Эта картина принципиально отличается от концепции взаимодействия частиц в нерелятивистской механике, основанной на понятии потенциальной энергии $U\left(\boldsymbol{r}_1(t) - \boldsymbol{r}_2(t)\right)$. Радиусы-векторы двух частиц входят в потенциальную энергию в один и тот же момент времени, и изменение положения одной частицы мгновенно приводит к изменению силы, действующей на вторую частицу. Скорость распространения взаимодействий при этом бесконечна, и никакого промежуточного агента для переноса взаимодействия не требуется. Хотя в этом случае тоже можно использовать понятие поля, но оно выступает лишь как формально-математический объект и не является органической составной частью физического процесса взаимодействия частиц. Такая картина взаимодействия называется дальнодействием.

[42] Классическая формула (4.43) не описывает взаимодействие внутреннего (спинового) магнитного момента элементарной частицы с электромагнитным полем, поскольку спин представляет собой квантовую характеристику частицы. Приближенную квазиклассическую теорию такого взаимодействия см. ниже в этом разделе.

Концепция дальнодействия несовместима с теорией относительности, которая устанавливает конечную предельную скорость распространения взаимодействия. Это приводит к тому, что энергия и импульс, испущенные одной из взаимодействующих частиц, разделенных конечным расстоянием $|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|$, должны принадлежать некоторой промежуточной субстанции полю - в течение конечного времени $|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|/c$, пока они не будут восприняты второй частицей. Понятие поля как физической реальности является, таким образом, неизбежным атрибутом теории относительности. Оно вытекает, разумеется, и из опыта, поскольку электромагнитное поле может существовать как самостоятельный объект и в отсутствие заряженных частиц.

Уравнения движения релятивистской частицы. Теперь мы займемся анализом следствий, вытекающих из формул (4.42), (4.43) для действия, описывающего заряженную частицу в электромагнитном поле:

$$S = -\int^{(2)} \left(mcds + \frac{e}{c} A_i dx^i \right) \tag{4.45}$$

Пример 4.4. Пользуясь выражсеним (4.45), установить вид функции Лагранжа для частицы в электромагнитном поле. Произвести переход к нерелятивистскому пределу. Записать уравнения движения в лагранжевой форме.

Решение. В интеграле (4.45) нужно перейти к интегрированию по координатному времени t, и тогда подынтегральное выражение по определению действия будет функцией Лагранжа. Записывая с помощью (3.12) $ds = c\sqrt{1 - v^2/c^2}dt$ и $A_2 dx^i = A_0 cdt - \boldsymbol{A}d\boldsymbol{r} = c\varphi dt - \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{A}dt$, где использовано обозначение $A_0 = \varphi$, находим функцию Лагранжа для релятивистской частицы, взаимодействующей с электромагнитным полем:

$$L = -mc^2\sqrt{1 - v^2/c^2} + \frac{e}{c}\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{A} - e\varphi \tag{4.46}$$

Здесь в качестве обобщенных координат выступают декартовы координаты частицы $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$, от которых (а также от времени t) зависят $\boldsymbol{A}$ и φ.

Нерелятивистское приближение:

$$L = \frac{mv^2}{2} + \frac{e}{c}\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{A} - e\varphi \tag{4.47}$$

(постоянная mc^2 опущена).

Обобщение на систему частиц:

$$L = -\sum_a m_a c^2\sqrt{1 - v_a^2/c^2} + \sum_a e_a \left(\frac{1}{c}\boldsymbol{v}_a \cdot \boldsymbol{A}_a - \varphi_a \right)$$

Через $\boldsymbol{A}_a, \varphi_a$ обозначены электромагнитные потенциалы в точке нахождения частицы без учета поля самой частицы. Время t общее для всех частиц.

Уравнения движения могут быть записаны в лагранжевой форме:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \tag{4.49}$$

где $q_i, \dot{q}_i$ - обобщенные координаты и скорости (они не обязаны быть 4 -векторами). Если в качестве обобщенных координат выбраны декартовы координаты частицы, то уравнение (4.49) можно записать в векторной форме

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}} - \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}} = 0 \tag{4.50}$$

где $v = \dot{r}$.

Пример 4.5. Вывести уравнение движения заряженной частицы 6 релятивистски-инвариантной форме путем варьирования действия (4.45) и перехода к инвариантной переменной интегрирования - собственному времени τ.

Решение. Первая вариация действия имеет вид:

$$\delta S = \int\limits_{(1)}^{(2)} \left(-mc\delta ds - \frac{e}{c}\delta A_i dx^i - \frac{e}{c} A_i \delta dx^i \right)$$

Далее вычисляем

$$\delta ds = \delta\sqrt{dx^i dx_i} = \frac{dx_i}{ds}\delta dx^i = \frac{1}{c} u_i \delta dx^i$$

где $u_i = dx_i/d\tau$ – 4-скорость частицы, и находим

$$\delta S = \int\limits_{(1)}^{(2)} \left[\left(-mu_i - \frac{e}{c} A_i \right) \delta dx^i - \frac{e}{c}\delta A_i dx^i \right]$$

Пользуясь возможностью перестановки $\delta dx^i = d\delta x^i$ и проведя интегрирование по частям, получим

$$\delta S = -\left(mu_i + \frac{e}{c} A_i \right) \delta x^i \Big|_{(1)}^{(2)} + \int\limits_{(1)}^{(2)} \left(m du_i \delta x^i + \frac{e}{c} dA_i \delta x^i - \frac{e}{c}\delta A_i dx^i \right) \tag{4.51}$$

В фиксированных 4-точках 1 и 2 $\delta x^i = 0$, поэтому внеинтегральный член обращается в нуль. Под знаком интеграла производим преобразования:

$$du_i = \frac{du_i}{d\tau} d\tau; \quad dA_i \delta x^i = \frac{\partial A_i}{\partial x^k}\frac{dx^k}{d\tau} d\tau \delta x^i = \frac{\partial A_i}{\partial x^k} u^k d\tau \delta x^i$$
$$\delta A_i dx^i = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} dx^k \delta x^i = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} u^k d\tau \delta x^i$$

Последние два слагаемых объединяем, вводя антисимметричный тензор (ротор 4-потенциала)

$$F_{ik} = \partial_i A_k - \partial_k A_i \tag{4.52}$$

который называется тензором электромагнитного поля. В итоге получаем вариацию действия в компактной инвариантной записи:

$$\delta S = \int\limits_{1}^{(2)} \left(m\frac{du_i}{d\tau} - \frac{e}{c} F_{ik} u^k \right) \delta x^i d\tau \tag{1}$$

Приравнивая ее нулю и пользуясь независимостью вариаций δx^i, которые являются функциями инвариантного параметра τ, находим уравнение движения:

$$m\frac{du_i}{d\tau} = \frac{e}{c} F_{ik} u^k, \quad i = 0, 1, 2, 3 \tag{4.53}$$

Существует очевидное формальное сходство между релятивистским уравнением (4.53) и нерелятивистским уравнением Ньютона $m\dot{\boldsymbol{v}} = \mathscr{F}$. Левая часть уравнения (4.53)

представляет собой произведение массы на 4 -ускорение. Правая часть описывает воздействие электромагнитного поля на частицу и называется четырехмерной электромагнитной силой:

$$\mathscr{F}_i = \frac{e}{c} F_{ik} u^k. \tag{4.54}$$

Смысл полученного уравнения становится еще более прозрачным, если переписать его в трехмерной форме. Пользуясь определением 4 -скорости, записываем левую часть при $i = 1, 2, 3$ в виде $-\gamma dp/dt$, где $\gamma = 1/\sqrt{(1 - v^2/c^2)}$ - релятивистский фактор. В правую часть введем вместо A_i трехмерный скаляр $\varphi(\boldsymbol{r}, t)$ и трехмерный вектор $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t)$, $A_i = (\varphi, -\boldsymbol{A})$, $A^i = (\varphi, \boldsymbol{A})$. В этих обозначениях имеем следующие отличные от нуля значения компонент тензора электромагнитного поля:

$$\begin{array}{ll} F_{0x} = -F_{x0} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{1}{c}\frac{\partial A_x}{\partial t}, & F_{xy} = -F_{yx} = -\operatorname{rot}_z \boldsymbol{A} \\ F_{0y} = -F_{y0} = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{1}{c}\frac{\partial A_y}{\partial t}, & F_{xz} = -F_{zx} = \operatorname{rot}_y \boldsymbol{A} \\ F_{0z} = -F_{z0} = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{1}{c}\frac{\partial A_z}{\partial t}, & F_{yz} = -F_{zy} = -\operatorname{rot}_x \boldsymbol{A} \end{array} \tag{4.55}$$

Это позволяет записать пространственную часть уравнения (4.53) в виде

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = e\left(-\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right) + \frac{e}{c}\boldsymbol{v} \times \operatorname{rot} \boldsymbol{A} \tag{4.56}$$

Но производная по времени от импульса равна силе, действующей на частицу. В электромагнитном поле это должна быть сила Лоренца (4.41). Сравнение (4.56) с (4.41) позволяет выразить напряженности поля $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}$ через электромагнитные потенциалы:

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}, \quad \boldsymbol{H} = \nabla \times \boldsymbol{A} \tag{4.57}$$

Уравнение движения частицы приобретает ньютоновскую форму

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = e\boldsymbol{E} + \frac{e}{c}\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{H} \tag{4.58}$$

но с релятивистской зависимостью (3.33) импульса от скорости и с силой Лоренца в правой части. Временная компонента уравнения (4.53) описывает изменение полной энергии частицы:

$$\frac{d\mathscr{E}}{dt} = e\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{v} \tag{4.59}$$

Это уравнение не является независимым, оно может быть получено умножением обеих частей (4.58) скалярно на $\boldsymbol{v}$. При этом $\boldsymbol{v}, d\boldsymbol{p} = d\mathscr{E}$. Магнитное поле не производит работы над частицей, так как магнитная сила всегда перпендикулярна скорости.

Пример 4.6. Пусть уравнение движения релятивистской частицы имеет вид (ср. с (4.58))

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \mathscr{F}$$

где $\mathscr{F}$ - сила любой природы (не обязательно электромагнитная). Записать это уравнение в релятивистски ковариантной форме, введя 4-вектор силь для произвольного случая.

Решение. Вводим дифференциал собственного времени $d\tau = \gamma^{-1} dt$ и записываем уравнение движения так, чтобы в левой части был 4-вектор:

$$\frac{dp^\alpha}{d\tau} = \gamma \mathscr{F}^\alpha, \quad \frac{dp^0}{d\tau} = \frac{1}{c}\frac{d\mathscr{E}}{d\tau} = \frac{1}{c}\frac{d\mathscr{E}}{d\boldsymbol{p}} \cdot \frac{d\boldsymbol{p}}{d\tau} = \frac{\gamma}{c}\mathscr{F} \cdot \boldsymbol{v}$$

(второе уравнение, как и (4.59), не является независимым). Совокупность величин в правых частях этих равенств образует 4-вектор силы:

$$\mathscr{F}^k = (\gamma \mathscr{F} \cdot \boldsymbol{v}/c, \gamma \mathscr{F}), \tag{4.60}$$

где $\mathscr{F}$ - трехмерная сила, действующая на релятивистскую частицу. Ее можно выразить через силу, приложенную к частице в ее системе покоя (см. задачу 4.42).

Пример 4.7. Пользуясь соотношением (4.51), найти функиию Гамильтона заряженной частицы и записать ее уравнение движения в форме уравнения Гамильтона-Якоби.

Решение. В отличие от подхода, использованного в примере 4.5, когда действие рассматривалось для разных произвольно выбранных траекторий частицы (и из условия стационарности определялась та из них, которая отвечает реальному движению), теперь считаем действие определенным на реальной физической траектории, но рассматриваем его как обычную функцию 4 -координат конечной точки (2) движения, считая фиксированной точку (1). На физической траектории интегральный член в правой части (4.51) (вариация действия при закрепленных концах) обращается в нуль. Имеем также $\delta x^i|_{(1)} = 0$, поскольку точка (1) зафиксирована. Таким образом, $\delta S = -\left(mu_i + \frac{e}{c}A_i\right)\delta x^i$, откуда $\partial_i S = -mu_i - (e/c)A_i$.

Но из классической гамильтоновой механики известно, что производные действия по пространственным координатам равны компонентам обобщенного импульса $\boldsymbol{P}$, а взятая с обратным знаком производная по времени представляет собой функцию Гамильтона частицы $\mathscr{H}$:

$$\mathscr{H} = -\frac{\partial S}{\partial t}, \quad \boldsymbol{P} = \nabla S \tag{4.61}$$

Поэтому назовем величину

$$P_i = -\frac{\partial S}{\partial x^i} = mu_i + \frac{e}{c}A_i \tag{4.62}$$

ковариантным обобщенным 4-импульсом. Более удобно использовать его контравариантные компоненты:

$$P^i = \left(\frac{\mathscr{E} + e\varphi}{c}, \boldsymbol{p} + \frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right) \tag{4.63}$$

где p - обычный трехмерный импульс (3.33), $\mathscr{E}$ - полная энергия свободной частицы, а $\mathscr{E} + e\varphi = \mathscr{H}$ - функция Гамильтона. Как известно из механики, она должна быть выражена через обобщенные координаты (у нас $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$) и обобщенный импульс $\boldsymbol{P}$. Находя из (4.63)

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{P} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A} \tag{4.64}$$

и пользуясь второй формулой (3.33), находим функцию Гамильтона релятивистской частицы:

$$\mathscr{H}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{P}, t) = \sqrt{m^2c^4 + c^2\left(\boldsymbol{P} - \frac{e}{c}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t)\right)^2} + e\varphi(\boldsymbol{r}, t) \tag{4.65}$$

В нерелятивистском приближении получим из (4.65)

$$\mathscr{H}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{P},t)=\frac{1}{2m}\left(\boldsymbol{P}-\frac{e}{c}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t)\right)^2+e\varphi(\boldsymbol{r},t)$$

(постоянное mc^2 опущено).
Теперь не составляет труда записать уравнение Гамильтона-Якоби. Используем равенства (4.61) и подставляем в первое из них функцию Гамильтона (4.65), в которой $\boldsymbol{P}$ заменен на ∇S:

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\sqrt{m^2c^4+c^2\left(\nabla S-\frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)^2}+e\varphi=0 \tag{4.66}$$

Более удобна запись без радикала:

$$\left(\nabla S-\frac{e}{c}\boldsymbol{A}\right)^2-\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t}+e\varphi\right)^2+m^2c^2=0 \tag{4.67}$$

Последние два равенства и представляют собой разные формы записи уравнения Гамильтона - Якоби для релятивистской частицы. Неизвестной величиной, которая определяется из полученных уравнений, выступает в этом методе функция $S(\boldsymbol{r},t)$.

Преобразование напряженностей электромагнитного поля.

Пример 4.8. Пользуясь определением тензора электромагнитного поля (4.52) и соотношениями (4.55), (4.57), составить таблицы, связывающие компоненты F^{ik} и F_{ik} с напряэсенностями E, H. Записать формульь релятивистского преобразования напряженностей поля $\boldsymbol{E},\boldsymbol{H}$.

Решение. Получаем:

$$F_{ik}=\begin{pmatrix}0&E_x&E_y&E_z\\-E_x&0&-H_z&H_y\\-E_y&H_z&0&-H_x\\-E_z&-H_y&H_x&0\end{pmatrix}$$
$$F^{ik}=\begin{pmatrix}0&-E_x&-E_y&-E_z\\E_x&0&-H_z&H_y\\E_y&H_z&0&-H_x\\E_z&-H_y&H_x&0\end{pmatrix} \tag{4.68}$$

Поучительно сравнить эти две таблицы с общей структурой антисимметричного тензора II ранга, рассмотренного в задаче 4.23. Из предлагаемого
сравнения, а также из формул (4.57) следует, что относительно инверсии пространственных осей $\boldsymbol{E}$ - истинный вектор, а $\boldsymbol{H}$ - псевдовектор.

Преобразование в другую систему отсчета осуществляем по общим правилам типа (4.6): $F_{ik}=\Lambda_i{}^l\Lambda_k{}^nF'_{ln}$, где матрица Λ_i^l определена равенством (4.5). Находим

$$F_{01}=\Lambda_0{}^0\Lambda_1{}^1F'_{01}+\Lambda_0{}^1\Lambda_1{}^0F'_{10}=\left(\mathrm{ch}^2\,\psi-\mathrm{sh}^2\,\psi\right)F'_{01}=F'_{01}$$
$$F_{02}=\Lambda_0{}^0\Lambda_2{}^2F'_{02}+\Lambda_0{}^1\Lambda_2{}^2F'_{12}=\mathrm{ch}\,\psi F'_{02}-\mathrm{sh}\,\psi F'_{12}$$

и т. д. С помощью таблиц (4.68) и (4.5) получаем

$$\begin{array}{lll}E_x=E'_x, & E_y=\gamma\left(E'_y+\beta H'_z\right), & E_z=\gamma\left(E'_z-\beta H'_y\right)\\ H_x=H'_x, & H_y=\gamma\left(H'_y-\beta E'_z\right), & H_z=\gamma\left(H'_z+\beta E'_y\right.\end{array} \tag{4.69}$$

Здесь ось Ox направлена вдоль относительной скорости $\boldsymbol{V}$, а оси Oy и Oz перпендикулярны ей. Поэтому (4.69) легко записать для произвольного направления скорости V:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}'_{\parallel} &= \boldsymbol{E}_{\parallel}, & \boldsymbol{E}'_{\perp} &= \gamma\left(\boldsymbol{E}_{\perp} + \boldsymbol{V}\times\boldsymbol{H}/c\right) \\ \boldsymbol{H}'_{\parallel} &= \boldsymbol{H}_{\parallel}, & \boldsymbol{H}'_{\perp} &= \gamma\left(\boldsymbol{H}_{\perp} - \boldsymbol{V}\times\boldsymbol{E}/c\right) \end{aligned} \tag{4.70}$$

Значками $\parallel$ и $\perp$ отмечены составляющие, параллельная и перпендикулярная $\boldsymbol{V}$. При $V \ll c$ с точностью до линейных членов следует положить в (4.69), (4.70)$\gamma = 1$.

Пример 4.9. Построить все возиожные независимьее релятивистские инварианты из компонент тензора электромагнитного поля.

Решение. Пространственные повороты составляют часть преобразований, относящихся к группе общих преобразований Лоренца, поэтому число лоренц-инвариантов не может быть больше числа инвариантов относительно трехмерных вращений. А последних из двух 3 -векторов, $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$, входящих в состав тензора электромагнитного поля, можно составить только три: два истинных скаляра, $\boldsymbol{E}^2$ и $\boldsymbol{H}^2$, и один псевдоскаляр $\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{H}$. Последний оказывается инвариантом и относительно собственных преобразований Лоренца, как это следует из тензорной формы записи (см.(4.37)):

$$e^{iklm}F_{ik}F_{lm} = -8\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{H} \tag{4.71}$$

При инверсии осей инвариантом является $(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{H})^2$.
Величины $\boldsymbol{E}^2$ и $\boldsymbol{H}^2$ не лоренц-инвариантны, так как согласно (4.70) напряженности при переходе в другую систему в общем случае меняют
свою величину и направление. Но их разность является истинным скаляром, как это следует из явной лоренц-инвариантной записи

$$2\left(\boldsymbol{H}^2 - \boldsymbol{E}^2\right) = F_{ik}F^{ik} \tag{4.72}$$

Этим исчерпываются независимые инварианты тензора электромагнитного поля.

Пример 4.10. Рассмотреть преобразование 4-потенциала, состоящее в добавлении к нему некоторого 4-вектора f_i : $\widetilde{A}_i = A_i + f_i$. Каким свойством должсен обладать вектор f_i, чтобы преобразование не изменяло компонент тензора электромагнитного поля, т. е. напряженностей $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}$?

Решение. Из условий $\widetilde{F}_{ik} = \partial_k\widetilde{A}_i - \partial_i\widetilde{A}_k = \partial_k A_i - \partial_i A_k = F_{ik}$ находим $\partial_k f_i = \partial_i f_k$. Общее решение последнего уравнения имеет вид $f_k = \partial_k f$, где f - произвольная дифференцируемая скалярная функция 4 -координат. Преобразование 4-потенциала

$$\widetilde{A}_i = A_i + \partial_i f \tag{4.73}$$

оставляющее инвариантным наблюдаемые величины - напряженности поля - называется калибровочным (градиентным). Оно связано с простым математическим фактом равенства нулю ротора градиента скалярной функции, имеющем место как в трехмерном, так и в четырехмерном псевдоевклидовом пространстве. Таким образом, электромагнитные потенциалы определяются неоднозначно.

В трехмерной записи калибровочное преобразование потенциалов имеет вид, уже найденный в главе 2 (см. (2.103), (2.104)):

$$\widetilde{\varphi} = \varphi + \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t}, \quad \widetilde{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{A} - \nabla f \tag{4.74}$$

классической электродинамике наблюдаемыми и измеряемыми величинами являются сила (4.41), действуюпцая на заряженную частицу, или изменение ее энергии (4.59), а также энергия и поток энергии самого электромагнитного поля. Все эти величины выражаются через напряженности $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$, которые и могут быть найдены таким путем из эксперимента. Потенциалы $\boldsymbol{A}$ и φ играют роль вспомогательных функций, из которых напряженности получаются дифференцированием по формулам (4.57). Теория электромагнитного поля, позволяющая вычислять тензор F_{ik}, должна быть калибровочно инвариантной, т. е. ее выводы не должны зависеть от изменений потенциала, вызванных преобразованием (4.73). Это требование приводит к глубоким следствиям, и не только в классической электродинамике, но и при построении современных теорий квантовых полей и элементарных частиц.

Рекомендуемая литература: [Бредов и др. (1985)], [Голдстейн (1957)], [Коткин и Сербо (1977)], [Батыгин и Топтыгин (1970)], [Меллер (1975)], [Ландау и Лифшиц, Теория поля], [Френкель (1956)], [Айзерман (1974)], [Новожилов и Яппа (1978)], [Ландау и Лифшиц, Механика], [Фок (1955)], [Паули (1947)].

Задачи

4.26. Записать в виде таблиц через напряженности $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}$ тензоры $\widetilde{F}_{ik}$ и $\widetilde{F}^{ik}$, дуальные тензору электромагнитного поля.

4.27. Записать инварианты электромагнитного поля с использованием тензора, дуального тензору F_{ik}.

4.28*. В системе S имеется однородное электромагнитное поле $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}$. Найти все возможные инерциальные системы отсчета, в которых поле будет обладать одним из следующих свойств:

а) напряженности становятся параллельными, $\boldsymbol{E}' \| \boldsymbol{H}'$, либо антипараллельными;

б) одна из напряженностей обращается в нуль, $\boldsymbol{E}' = 0$ или $\boldsymbol{H}' = 0$;

в) напряженности становятся взаимно перпендикулярными, $\boldsymbol{E}' \perp \boldsymbol{H}'$;

г) напряженности становятся одинаковыми по абсолютной величине, $E' = H'$;

д) обе напряженности обращаются в нуль, $E' = H' = 0$.

Указать, при каких значениях исходных полей $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}$ реализуются эти случаи.

4.29. Бесконечно длинный круговой цилиндр равномерно заряжен с линейной плотностью κ. Вдоль оси цилиндра течет равномерно распределенный ток J. Найти такую систему отсчета, в которой существует только электрическое или только магнитное поле. Найти величины этих полей.

4.30. Записать уравнения Максвелла (2.82)-(2.85) и дифференциальный закон сохранения электрического заряда (2.47) в ковариантной четырехмерной форме через тензор электромагнитного поля (4.67).

4.31*·. Система дифференциальных уравнений для магнитных силовых линий вида

$$d\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{H} = 0 \tag{1}$$

не является релятивистски инвариантной и при переходе в другую инерциальную систему отсчета не сохраняет своего вида.

а) Показать, что для полей некоторого специального вида система уравнений

$$d\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{H} + c\boldsymbol{E}dt = 0, \quad \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{r} = 0 \tag{2}$$

может рассматриваться как релятивистски инвариантное обобщение системы (1).

б) Выяснить структуру полей, для которых такое обобщение возможно, путем рассмотрения условий совместности уравнений (2). Сколько независимых уравнений содержится в системе (2)?

в) Какой вид имеет условие интегрируемости системы (2)?
г) Убедиться в том, что силовые линии, определяемые системой (2), перемещаются в поперечном направлении со скоростью $\boldsymbol{u} = c\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}/H^2$, т. е. являются движущимися даже в случае статических полей.
4.32*. Показать, что релятивистски инвариантная система уравнений для электрических силовых линий, аналогичная системе (2) предыдущей задачи, имеет вид

$$e_{iklm}F^{lm}dx^k = 0 \tag{1}$$

Какие требования налагаются на $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$, а также на распределение зарядов и токов условиями совместности и интегрируемости системы (1)? Как перемешаются силовые линии, определяемые системой (1)?
4.33. Найти величину ЭДС электромагнитной индукции, возникающей при движении проводника в магнитном поле . Воспользоваться либо формулами преобразования напряженностей поля, либо формулами преобразования потенциалов.
4.34 Найти поля $\varphi, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}$ точечного заряда e, движущегося равномерно со скоростью V, произведя преобразование Лоренца из системы отсчета, в которой заряд покоится. Записать 4-потенциал в явно релятивистски-ковариантной форме.

УКазАНиЕ. Для ковариантной записи 4 -потенциал следует выразить через 4 -скорость частицы и 4 -радиус-вектор, соединяющий два события: наблюодение поля в 3-точке r в момент t и его генерацию зарядом в 3 -точке $s\,(t')$ в предшествующий момент времени t'.
4.35. Показать, что электрическое поле равномерно движущегося точечного заряда «сплющивается» в направлении движения. При этом происходит ослабление поля E на линии движения заряда по сравнению с кулоновым полем. Как согласуется это ослабление с формулой преобразования $E_\parallel = E'_\parallel$?
4.36*. Электрический диполь с моментом p_0 в сопутствующей системе равномерно движется со скоростью V. Найти создаваемое им электромагнитное поле $\varphi, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}$.
4.37. В некоторой системе координат заряженные частицы совершают нерелятивистское периодическое движение или покоятся, создавая при этом дипольные электрический и магнитный моменты $p_0, \boldsymbol{m}_0$. Найти правило преобразования моментов при переходе в произвольную инерциальную систему отсчета.

УказаниЕ. Представить совокупность дипольных моментов как интеграл по трехмерному объему от некоторой ковариантной «плотности момента» и воспользоваться преобразованиями Лоренца.
4.38. Незаряженная проволочная петля с током J', имеющая форму прямоугольника $a \times b$, движется равномерно со скоростью V параллельно своей стороне a. Провод имеет конечное сечение. Найти распределение электрических зарядов на петле, а также ее электрический и магнитный моменты, наблюдаемые в лабораторной системе отсчета.
4.39. Вывести уравнение движения релятивистской частицы (4.58) на основе функции Лагранжа (4.46).
4.40°. Сделать то же самое с помощью функции Гамильтона (4.65).
4.41. Записать релятивистское уравнение движения частицы под действием силы $\mathscr{F}$, выразив импульс явным образом через скорость v частицы. Рассмотреть, в частности, случаи, когда скорость а) меняется только по величине; б) меняется только по направлению; в) $v \ll c$.
4.42. Выразить друг через друга 3 -вектор силы, действующей на частицу в лабораторной системе ($\mathscr{F}$) и в системе покоя ($\mathscr{F}'$). Скорость частицы v. Проверить полученные формулы путем применения их к силе Лоренца.
4.43. Какая сила $\mathscr{F}$ действует с точки зрения наблюдателя в мгновенно сопутствующей системе на тело массы m, находящееся в ракете и неподвижное относительно нее, если

ракета движется с релятивистской скоростью v по круговой орбите радиуса R?

4.44. Две частицы с зарядами e_1 и e_2 движутся параллельно оси x с равными постоянными скоростями v. Найти силу взаимодействия частиц в лабораторной системе. Рассмотреть, в частности, ультрарелятивистский предел. Показать, что найденная сила может быть вычислена по формуле $\mathscr{F} = -e_2\nabla\psi$ из так называемого конвекционного [3] потенциала

$\psi = e_1/\gamma^2 R$, где $R = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (1-\beta^2)\left[(y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2\right]}$,

r_1, r_2 - радиусы-векторы зарядов.

УКАЗАНИЕ. Удобно исходить из кулоновской силы в сопутствующей системе и выполнить ее преобразование по формулам задачи 4.42.

4.45. Найти конвекционный потенциал ψ бесконечно длинного прямого равномерно заряженного провода. Линейная плотность заряда κ в той системе отсчета, где провод покоится. Провод перемещается поступательно со скоростью v под углом α к своей длине (в лабораторной системе отсчета). Рассмотреть, в частности, случаи $\alpha = 0, \alpha = \pi/2$.

4.46. Бесконечно длинная равномерно заряженная нить с линейной плотностью заряда κ в системе, где нить покоится, перемещается вдоль своей длины равномерно со скоростью v. На расстоянии r от нее находится точечный заряд, движущийся параллельно прямой с той же скоростью. Найти электромагнитную силу $\mathscr{F}$, действующую на заряд.

4.47. Распределение электронов в параллельном пучке обладает аксиальной симметрией и характеризуется объемной плотностью заряда ρ в системе отсчета, связанной с электронами. Электроны ускорены разностью потенциалов V. Полный ток в пучке равен J. Найти величину электромагнитной силы $\mathscr{F}$, приложенной к одному из электронов пучка в лабораторной системе отсчета.

УказАниЕ. Полезно использовать результат предыдущей задачи.

4.48. Найти уширение Δa пучка электронов, рассмотренного в предыдущей задаче, на пути L вследствие взаимного отталкивания электронов. Сечение пучка - круг радиуса a. Считать уширение малым ($\Delta a \ll L$).

4.49*·. Частица с зарядом e и массой m движется с произвольной скоростью в однородном постоянном электрическом поле E. В начальный момент $t = 0$ частица находилась в начале координат и имела импульс p_0. Определить трехмерные координаты и время t, а также энергию частицы в лабораторной системе в функции ее собственного времени τ. Исключив τ, представить трехмерные координаты в зависимости от t. Рассмотреть, в частности, нерелятивистский и релятивистский пределы.

4.50. Найти в аналитической форме траекторию заряженной частицы, рассмотренной в предыдущей задаче. Построить на компьютере траектории

для разных начальных условий. Исследовать, в частности, нерелятивистский и ультрарелятивистский случаи.

4.51. Найти пробег l релятивистской заряженной частицы с зарядом e, массой m и начальной энергией $\mathscr{E}$ в тормозящем однородном электрическом поле $\boldsymbol{E}$, параллельном начальной скорости частицы.

4.52*·. Релятивистская частица с зарядом e и массой m движется в однородном постоянном магнитном поле $\boldsymbol{H}$. В начальный момент времени $t = 0$ частица имела импульс p_0 и находилась в точке с радиусом-вектором r_0. Вычислить импульс и энергию, а также координаты частицы в функции собственного и координатного времени.

4.53*. Нерелятивистская частица с зарядом e и массой m движется в скрещенных постоянных однородных электрическом $\boldsymbol{E} = (0, E_y, E_z)$ и магнитном $\boldsymbol{H} = (0, 0, H)$ полях. В начальный момент $t = 0$ частица находилась в начале координат и имела скорость

[43] Конвекионным потенциалом движущейся как целое системы зарядов называется функция координат, дифференцирование которой дает компоненты силы, действующей в лабораторной системе на единичный пробный заряд, движушийся вместе с этой системой зарядов.

$\boldsymbol{v} = (v_{ox}, 0, v_{oz})$. Определить зависимости компонент скорости и координат от времени, начертить с помощью компьютера возможные траектории частицы.

4.54. Релятивистская частица движется в параллельных однородных постоянных электрическом $\boldsymbol{E}$ и магнитном $\boldsymbol{H}$ полях ($\boldsymbol{E} \| \boldsymbol{H} \| Oz$). При $t = 0$ частица находилась в начале координат, обладая импульсом $p_0 = (p_{ox}, 0, p_{oz})$. Определить зависимость компонент импульса и энергии от собственного времени частицы τ. Построить на компьютере проекции траектории частицы на координатные плоскости.

4.55. Найти зависимость от собственного времени компонент импульса и энергии релятивистской частицы, движущейся в однородных и постоянных электрическом $\boldsymbol{E}$ и магнитном $\boldsymbol{H}(H > E)$ взаимно перпендикулярных полях. Начальный импульс частицы $p_0, x = y = z = 0$ при $t = 0$.

4.56. Решить предыдущую задачу для $E > H$. Исследовать путем предельного перехода $E \to H$ движение частицы в одинаковых по абсолютной величине взаимно перпендикулярных электрическом и магнитном полях.

4.57*. Найти закон движения частицы с зарядом e и массой m в поле плоской электромагнитной волны, четырехмерный потенциал которой имеет вид

$$A^i = \varepsilon^i f(s), \quad \varepsilon^i = \text{const}$$

(линейно поляризованная волна). Здесь $f(s)$ - произвольная дважды дифференцируемая функция, ее аргумент $s = n_l x^l$ выражается через нулевой 4 -вектор $n_l = (1, -\boldsymbol{n})$, указывающий направление распространения плоской волны ($n^l n_l = 0, n^2 = 1$), ε^i - четырехмерный пространственноподобный вектор поляризации, нормированный условием $\varepsilon^i \varepsilon_i = -1$ и ортогональный волновому вектору ($n^t \varepsilon_l = 0$). Заданы начальные условия общего
вида. Найти также изменение энергии частицы за конечное время. Рассмотреть, в частности, случаи периодической плоской волны и волнового пакета конечной протяженности.

УкАзАНИЕ. Показать, что собственное время частицы пропорционально аргументу s плоской волны, и использовать это при решении задачи.

4.58*. Решить предыдущую задачу для плоской волны с произвольной поляризацией. Четырехмерный потенциал $A^i(s)$ удовлетворяет условию $n_i A^i(s) = 0$. Сделать то же самое в трехмерной форме, выразив в явном виде координаты и время через напряженности поля $\boldsymbol{E}(s)$ и $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{E}(s)$.

4.59. Нерелятивистская заряженная частица с зарядом e и массой m проходит через двумерное электростатическое поле с потенциалом $\phi = k\,(x^2 - y^2)$, где $k = \text{const} > 0$ (линза с сильной фокусировкой). В момент времени $t = 0$ частица находится в точке с координатами (x_0, y_0, z_0); начальная скорость v_0 параллельна оси z. Определить движение частицы.

4.60. Записать дифференциальные уравнения движения релятивистской частицы в электромагнитном поле, исходя из функции Лагранжа в цилиндрических координатах.

4.61*. Между обктадками цилиндрического конденсатора с радиусами $a, b(a < b)$ поддерживается разность потенциалов V. В пространстве между обкладками имеется аксиально симметричное магнитное поле, напряженность которого параллельна оси конденсатора. Из внутренней обкладки, играющей роль катода, вылетают электроны с нулевой начальной скоростью. Найти критическое значение потока магнитного поля Φ_{cr} между обкладками, при котором электроны перестанут попадать на анод вследствие искривления их траекторий в магнитном поле.

4.62. Длинный прямой цилиндрический катод радиуса a, по которому течет равномерно распределенный ток $\mathscr{J}$, испускает электроны с нулевой начальной скоростью. Эти электроны движутся под действием ускоряющего потенциала V к длинному

коаксиальному аноду радиуса b. Каково должно быть минимальное значение разности потенциалов V_{cr} между катодом и анодом, чтобы электроны достигали анода, несмотря на искривление их траекторий магнитным полем тока $\mathscr{J}$?

4.63. По бесконечно длинному прямому цилиндрическому проводу радиуса a течет ток $\mathscr{J}$. С поверхности провода срывается электрон, начальная скорость v_0 которого направлена вдоль провода. Найти наибольшее расстояние b, на которое электрон может удалиться от оси провода.

4.64. Решить задачу 4.62, используя преобразование Лоренца к системе отсчета, в которой имеется только одно поле ($\boldsymbol{E}$ или $\boldsymbol{H}$). Такое преобразование было рассмотрено в задаче 4.29.

4.65. Заряженные частицы совершают нерелятивистское движение в ограниченной области пространства. а) Найти связь между их кинетической и потенциальной энергиями, усредненными по большому промежутку времени. б) Сделать то же самое при наличии однородного магнитного поля $\boldsymbol{H}$ и при условии $e_a/m_a = e/m$, где e_a, m_a - заряд и масса отдельной частицы.

4.66. Найти траекторию относительного движения нерелятивистских частиц с зарядами e, e' и массами m_1, m_2. Исследовать решение в зависимости от начальных условий, задаваемых полной энергией взаимодействующих нерелятивистских частиц $\mathscr{E}$ и моментом импульса l их относительного движения.

4.67*. Найти дифференциальное сечение рассеяния $\sigma(\theta)$ нерелятивистских частиц с зарядом e в поле неподвижного точечного заряда e'. Скорость частиц вдали от неподвижного рассеивающего центра равна v_0.

4.68. Найти дифференциальное сечение рассеяния заряженных частиц на точно таких же частицах. Записать дифференциальное сечение через угол рассеяния и энергию, определенные в системе центра масс и в лабораторной системе, в которой частицы мишени первоначально покоятся.

4.69. На неподвижную частицу с зарядом e' налетает ограниченный стационарный поток одинаковых нерелятивистских частиц с зарядами e, массами m и скоростями v (рис. 4.1). Кон-

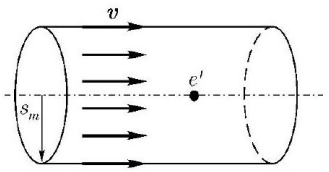


Рис. 4.1 центрация частиц в потоке n. Вычислить силу, действующую на неподвижную частицу, пренебрегая взаимодействием налетающих частиц друг с другом. Объяснить причину того, что при радиусе пучка $s_m \to \infty$ эта сила обращается в бесконечность. Сохраняется ли для силы бесконечное значение, если заряд e^t является одним из зарядов нейтральной системы (нейтральный атом, плазма)?

4.70. «Пробная» частица с зарядом e и массой m движется со скоростью $\boldsymbol{v}$ в газе, состоящем из одинаковых заряженных частиц. Их массы m', заряды e', концентрация n', распределение по скоростям описывается функцией $f(\boldsymbol{v})$ $\left(\int f(\boldsymbol{v})d^3v = n'\right)$. Записать выражение для средней силы $\mathscr{F}(\boldsymbol{v})$, действующей на «пробную» частицу.

УказАниЕ. Использовать результат, полученный при решении предыдущей задачи. Зависимостью кулонова логарифма от скорости пренебречь.

4.71. Пробная частица с зарядом e и массой m движется в среде, состоящей из беспорядочно распределенных неподвижных бесконечно тяжелых одинаковых частиц с зарядами e' и концентрацией n. Как изменяются во времени энергия и импульс пробной частицы под действием средней силы со стороны среды?

4.72. Частицы среды имеют одинаковые по абсолютной величине скорости v_0, распределенные сферически симметрично, заряды e и массы m. Вычислить среднюю силу $\overline{\mathscr{F}}$, действующую на пробную частицу с зарядом e' и массой m', которая движется со скоростью v.

Сделать то же самое для случая, когда частицы среды движутся с одинаковой по величине и направлению скоростью $\boldsymbol{v}_0$.

4.73*. Электроны в плазме совершают беспорядочное тепловое движение и, кроме того, имеют упорядоченную составляющую скорости, которая возникает под действием однородного электрического поля $\boldsymbol{E}$, созданного внешним источником. Произвести порядковую оценку зависимости средней силы трения $\overline{\mathscr{F}}$ от упорядоченной скорости $\boldsymbol{u}$, считая, что трение вызвано столкновениями с неподвижными ионами. Показать, что $\overline{\mathscr{F}}$ как функция u имеет максимум, и оценить $\overline{\mathscr{F}}_{\max}$. Как будет вести себя электронный газ под действием электрического поля E при $E < \overline{\mathscr{F}}_{\max}/e$ и $E > \overline{\mathscr{F}}_{\max}/e$?

4.74*. Релятивистская частица с зарядом $-\epsilon$ и массой m движется в поле неподвижного точечного заряда Ze. Найти уравнение траектории частицы. Исследовать все возможные случаи движения в зависимости от начальных условий, задаваемых полной энергией частицы $\mathscr{E}$ и ее моментом импульса l.

4.75*. Исследовать процесс падения релятивистской частицы на центр в кулоновском поле притяжения (см. предыдущую задачу, случай $Ze^2 > lc$): а) вычислить время Δt падения с расстояния r; б) показать, что скорость частицы стремится к c при $r \to 0$.

4.76*. Релятивистская частица с зарядом e и массой m движется в поле одноименного неподвижного точечного заряда Ze. Найти уравнение траектории частицы. Исследовать все возможные случаи движения в зависимости от начальных условий, задаваемых полной энергией частицы $\mathscr{E}$ и ее моментом импульса l.

4.77. Вычислить угол θ отклонения релятивистской частицы с зарядом $\pm e$, энергией $\mathscr{E} > mc^2$ и моментом импульса $l > Ze^2/c$, пролетающей в кулоновском поле неподвижного заряда Ze.

4.78. Релятивистская частица с зарядом $\pm e$, массой m и скоростью на бесконечности v_0 рассеивается на малый угол кулоновским полем
неподвижного заряда Ze. Вычислить дифференциальное сечение рассеяния $\sigma(\theta)$.

4.79^. В бетатроне во время ускорения электрона магнитное поле непрерывно нарастает, порождая разгоняющую электрон ЭДС индукции, а орбита его остается неизменной. Доказать, что для ускорения электрона на орбите постоянного радиуса необходимо, чтобы полный магнитный поток Ф, пронизывающий орбиту, был вдвое больше потока Φ_0, который получился бы, если бы поле внутри орбиты было однородно и равно полю на орбите (бетатронное правило «2:1»).

4.80*. Показать, что с точностью до членов v^2/c^2 энергия запаздывающего взаимодействия двух заряженных частиц имеет вид [4]

$$U(t) = \frac{e_1 e_2}{R}\left\{1 - \frac{1}{2c^2}\left[\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{v}_2 + (\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{n})\,(\boldsymbol{v}_2 \cdot \boldsymbol{n})\right]\right\} \tag{4.75}$$

где $\boldsymbol{R}$ - радиус-вектор относительного положения частиц, $n = R/R$, $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2$ - скорости частиц. Все величины в правой части равенства берутся в момент t.

УказАниЕ. Воспользоваться разложениями потенциалов Льенара - Вихерта (см. следующую главу) по степеням времени запаздывания, учитывая только те члены, которые не зависят от ускорений и их производных. Произвести калибровочное преобразование потенциалов таким образом, чтобы скалярный потенциал принял форму кулоновского потенциала.

4.81. Найти приближенное выражение функции Лагранжа двух взаимодействующих частиц с зарядами e_1, e_2 и массами m_1, m_2, учитывая эффект запаздывания с точностью

до поправочных членов порядка v^2/c^2.

Динамика орбитальных и спиновых магнитных моментов. При движении заряженной частицы в центрально-симметричном электрическом поле сохраняется ее момент импульса относительно центра симметрии $\boldsymbol{l} = \boldsymbol{r}_0(t) \times \boldsymbol{p}(t)$, где $\boldsymbol{r}_0(t)$ - радиус-вектор частицы. Это приводит к сохранению магнитного момента $\boldsymbol{m}_l$, создаваемого орбитальным движением частицы (орбитального магнитного момента):

$$\boldsymbol{m}_l = \frac{1}{2c}\int r \times j d^3 r = \eta \boldsymbol{l} \tag{4.76}$$

где в интеграл подставлено выражение $j = e\boldsymbol{v}\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0(t))$ для тока, создаваемого движущейся точечной частицей, а коэффициент пропорциональности $\eta = ec/2\mathscr{E}$ называется гиромагнитным отношением. Для нерелятивистской частицы $\eta = \eta_0 = e/2mc$ зависит от отношения ее заряда к массе (см. задачу 2.88).

Пример 4.11. Вывести уравнение, описываюшее движение орбитального магнитного момента во внешнем магнитном поле $\boldsymbol{H}$.

Решение. На магнитный диполь во внешнем поле действует момент сил $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{m}_l \times \boldsymbol{H}$. Изменение момента импульса дается уравнением механики

$$\frac{dl}{dt} = \boldsymbol{N} = \boldsymbol{m}_l \times \boldsymbol{H} \tag{4.77}$$

Из уравнения (4.76) находим $\dot{\boldsymbol{m}}_l = \eta\dot{\boldsymbol{l}} - (\dot{\mathscr{E}}/\mathscr{E})\eta l$. Поскольку энергия частицы в постоянном магнитном поле сохраняется, $\dot{\mathscr{E}} = 0$, то уравнение движения орбитального магнитного момента принимает вид

$$\frac{d\boldsymbol{m}_l}{dt} = \eta \boldsymbol{m}_l \times \boldsymbol{H} \tag{4.78}$$

Кроме механического и магнитного орбитальных моментов, большинство элементарных частиц обладает собственными (спиновыми) механическим s и магнитным $\boldsymbol{m}_s$ моментами, коэффициент пропорциональности между которыми различен для разных частиц:

$$\boldsymbol{m}_s = g\eta_0 \boldsymbol{s} \tag{4.79}$$

Для электрона $g_e \approx 2(1 + \alpha/2\pi)$, где $\alpha = e^2/\hbar c \approx \frac{1}{137}$ - постоянная тонкой структуры; для протона $g_p \approx 5,59$, а величина $\eta_0 = e/2m_p c$ определяется зарядом и массой протона. Она приблизительно на три порядка меньше, чем соответствующая величина для электрона. Изменение спинового механического момента во времени [5] описывается уравнением, аналогичным (4.77):

$$\frac{d\boldsymbol{s}}{dt} = \boldsymbol{m}_s \times \boldsymbol{H} \tag{4.80}$$

Нейтрон не имеет электрического заряда, но обладает спиновым магнитным моментом ($g_n\eta_0 s$, где $g_n \approx -3,83$). Благодаря квантованию спина ($s \cdot \boldsymbol{H}/H = \pm\hbar/2$, где $\hbar$ - постоянная Планка) магнитный момент нейтрона может ориентироваться во внешнем магнитном поле $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$ только двумя

[44] Это выражение носит название формулы Брейта. Аналогичное выражение используется при приближенном квантовом описании запаздывающего взаимодействия.

[45] Спиновый момент имеет квантовую природу и его последовательное описание достигается методами квантовой механики. В приведенных формулах под $\boldsymbol{s}, \boldsymbol{m_s}$ следует понимать средние по квантовомеханическому состоянию значения спиновых моментов микрочастицы.

способами: по или против поля. Первоначальная ориентация сохраняется, если выполнено условие достаточно плавного изменения поля, или его адиабатичности, состоящее в том, что скорость поворота поля в системе покоя нейтрона мала по сравнению с частотой прецессии спина $\omega_L = 2\,|m_s|\,H/\hbar$ в магнитном поле. В этом случае движение нейтронов с магнитным моментом, ориентированным по полю или против него, можно рассматривать как движение классической частицы в силовом поле с потенциальной энергией
$$

$$U(\boldsymbol{r}) = \mp\,|\boldsymbol{m}_s|\,H(\boldsymbol{r}) \tag{4.81}$$

$$
Энергия U обычно очень мала, поэтому магнитное поле оказывает влияние практически лишь на движение очень медленных («холодных») нейтронов.

Рекомендуемая литература: [Френкель (1956)], [Матышев (2000)], [Берестецкий и др. (1989)], [Батыгин и Топтыгин (1970)], [Джексон (1975)], [Джексон (1965)].

Задачи

4.82. Проинтегрировать уравнение (4.78) движения магнитного момента в магнитном поле и выразить компоненты m_l через его начальное значение $\boldsymbol{m}_l(0)$. Каков характер движения магнитного момента?

4.83*. Частица с зарядом e и массой m, имеющая внутренние (спиновые) механический s и магнитный

$$\boldsymbol{m}_s = \frac{eg}{2mc}s$$

моменты, совершает нерелятивистское движение во внешнем электростатическом центрально-симметричном поле $\varphi(r)$. Вычислить энергию взаимодействия U спина с внешним полем в первом неисчезающем приближении по v/c, приняв во внимание томасовскую прецессию мгновенно сопутствующей системы с угловой скоростью

$$\boldsymbol{\omega}_T = \frac{\dot{\boldsymbol{v}} \times \boldsymbol{v}}{2c^2}$$

Происхождение прецессии Томаса поясняется в задаче 3.26.

УказАниЕ. Скорости изменения произвольного вектора $\boldsymbol{A}$ в лабораторной инерциальной и вращающейся системах координат связаны соотношением

$$\left(\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}\right)_{lab} = \left(\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}\right)_{\text{rot}} + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{A}$$

где $\boldsymbol{\Omega}$ - утловая скорость вращения ([Ландау и Лифшиц, Механика])

4.84*. Вычислить энергию взаимодействия спина s нерелятивистского нуклона с полем ядерных сил, которым можно сопоставить потенциальную энергию $V(r)$. Действием слабых электростатических сил на нуклон пренебречь.

4.85**. Записать уравнение движения спинового момента частицы (4.80) в четырехмерной ковариантной форме, справедливой в любой инерциальной системе отсчета.

УказАниЕ. Для ковариантного описания спина использовать аксиальный 4 -вектор S^k, совпадающий в системе покоя частицы с трехмерным вектором спина s. В качестве независимой переменной использовать собственное время частицы.

4.86. Записать компоненты 4 -вектора спина S^k предыдущей задачи в произвольной инерциальной системе отсчета через трехмерный вектор s, определенный в системе покоя частицы.

4.87**. Вывести для релятивистской частицы уравнение эволюции трехмерного вектора s, характеризующего спин частицы в сопутствующей системе отсчета. Исследовать движение спина в постоянном и однородном поле для трех основных случаев: а) движение поперек магнитного поля; б) движение вдоль магнитного поля; в) произвольное движение в электрическом поле.

УкАзАниЕ. Воспользоваться результатами предыдущей задачи.

4.88. Убедиться в том, что уравнение движения спина (4.82) учитывает томасовскую прецессию, рассмотренную в задачах 3.26, 4.83.

4.89. Нейтрон с магнитным моментом $\boldsymbol{m}_n$ и кинетической энергией T влетает из пустоты в магнитное поле с напряженностью $H = \text{const}$, имеющее плоскую границу. При каком условии нейтрон отражается от поля?

4.90. Рассмотреть возможные траектории холодного нейтрона (масса M, магнитный момент $\boldsymbol{m}_n$) в поле бесконечного прямого провода с током $\mathscr{J}$.

4.91. Поток холодных нейтронов (скорость v_0, магнитный момент $\boldsymbol{m}_n$, масса M) рассеивается на магнитном поле бесконечного прямого провода с током $\mathscr{J}$. Вычислить дифференциальную поперечную длину рассеяния

$$l(\alpha) = \left| \frac{ds}{d\alpha} \right|$$

где $s(\alpha)$ - прицельное расстояние, при котором нейтрон рассеивается на угол α.

Приближенные методы. Усреднение по быстрым движениям. Для большинства задач о движении заряженных частиц в неоднородных и переменных электромагнитных полях не удается получить точных решений. Многие приближенные методы решения таких задач основаны на разделении и последовательном учете «быстрых» и «медленных» движений. Пусть частица участвует в быстром квазипериодическом движении (например, вращение вокруг направления магнитного поля или колебания в высокочастотной волне), наряду с которыми происходит более медленное и регулярное изменение ее координат и энергии, связанное с медленным изменением магнитного поля или амплитуды волны. Тогда можно произвести усреднение по быстрому движению, что дает как правило более простые уравнения, приближенно описывающие сглаженное движение частицы на достаточно больших временах и расстояниях. Такой метод находит, в частности, широкое применение при исследовании движения частиц в слаб неоднородных и медленно изменяющихся во времени электромагнитных полях при $H > E$ и называется в этом случае приближением ведущего центра, или дрейфовым приближением. Усреднение по ларморовскому вращению приводит к тому, что исследуется движение не самой частицы, а центра ее ларморовского кружка (ведущего центра) - см. разобранные ниже примеры и последующие задачи. Более глубокие сведения по методу усреднения можно почерпнуть из книг и обзоров [Боголюбов и Митропольский (1958)], [Сивухин (1963)], [Чирков (2001)], [Альвен и Фельтхаммар (1967)], [Заславский и Сагдеев (1988)], [Морозов и Соловьев (1963)].

Пример 4.12. Усреднить по ларморовскому вращению энергию и импульс заряженной частицы, движущейся во взаимно перпендикулярных однородных и постоянных полях $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}(E < H)$. Найти таким путем сллаженную скорость движения ведущего центра частицы.

Решение. Используем формулы, полученные в задаче 4.55 и проводим усреднение по собственному времени, что является заведомо инвариантной операцией, не изменяющей закона преобразования усредняемой величины. Обозначив усреднение чертой, находим

$$\bar{p}_x = \gamma_E^2 \left(\mathscr{E}_0 - v_E p_{0x} \right) v_E / c^2, \quad \bar{p}_y = 0, \quad \bar{p}_z = p_{0z}, \quad \overline{\mathscr{E}} = \gamma_E^2 \left(\mathscr{E}_0 - v_E p_{0x} \right)$$

Скорость ведущего центра v_c определяем через усредненные величины:

$$\boldsymbol{v}_c = \frac{c^2\overline{\boldsymbol{p}}}{\overline{\mathscr{E}}} = \boldsymbol{v}_E + \boldsymbol{v}_\parallel, \quad \boldsymbol{v}_\parallel = \frac{c^2 p_{0z}}{\overline{\mathscr{E}}}\boldsymbol{h} \tag{4.82}$$

где $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{H}/\boldsymbol{H}$ - единичный вектор. Частица движется поперек магнитного и электрического полей со скоростью электрического дрейфа $v_E < c$:

$$\boldsymbol{v}_E = c\frac{\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}}{H^2} \tag{4.83}$$

Скорость электрического дрейфа не зависит от знака заряда частицы и его величины, а также от массы и энергии частицы.

Скорость вдоль магнитной силовой линии в общем случае имеет вид

$$v_\parallel = v_{0z}\frac{1-E^2/H^2}{1-v_{0x}E/cH} \tag{4.84}$$

Она сводится к начальной продольной скорости v_{0z}, если $E \ll H$.

Пример 4.13. Заряженная частица движется в постоянном, но неоднородном магнитном поле. Напряженность $\boldsymbol{H}$ не меняется по направлению, но слабо (на расстоянии порядка ларморова радиуса частицы) изменяется по абсолютной величине. Вычислить в первом неисчезаюем приближении скорость поперечного дрейфа частицы, обусловленную неоднородностью магнитного поля.

Решение. Поскольку энергия частицы сохраняется, поперечное движение описывается уравнением

$$\dot{\boldsymbol{v}}_\perp = \boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{v}_\perp, \quad \boldsymbol{\Omega} = -\frac{ec}{\mathscr{E}}\boldsymbol{H} \tag{1}$$

где $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}\boldsymbol{h}$ - поле в точке, в которой находится частица. Представим ее радиус-вектор в виде суммы $\boldsymbol{R}+\boldsymbol{r}$ радиуса-вектора ведущего центра $\boldsymbol{R}$ и радиуса-вектора r самой частицы относительно ведущего центра. С точностью до членов I порядка малости имеем $H(\boldsymbol{R}+\boldsymbol{r}) = H(\boldsymbol{R}) + (\boldsymbol{r}_\perp\cdot\nabla)\,H(\boldsymbol{R})$. Уравнение (1) примет вид

$$\dot{\boldsymbol{v}}_\perp = \boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{v}_\perp\left(1+\frac{(\boldsymbol{r}_\perp\cdot\nabla)\,H}{H}\right) \tag{2}$$

где теперь $H(\boldsymbol{R})$ всюду берется в точке ведущего центра и не зависит от координат самой частицы.

Представим скорость частицы в виде $v_\perp = v_{0\perp} + v'_\perp$, где $v_{0\perp} = \dot{r}_{0\perp}$ - скорость в однородном поле $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{R}), v'_\perp$ - малая добавка, вызванная неоднородностью поля. В поправочном члене в (2) заменим $\boldsymbol{v}_\perp$ и $\boldsymbol{r}_\perp$ на их
невозмущенные значения $\boldsymbol{v}_{0\perp}$ и $\boldsymbol{r}_{0\perp}$, причем $\dot{v}_{0\perp} = \boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{v}_{0\perp}$. Таким обра30М,

$$\dot{\boldsymbol{v}}'_\perp = \boldsymbol{\Omega}\times\left[\boldsymbol{v}'_\perp + \boldsymbol{v}_{0\perp}\left(\boldsymbol{r}_{0\perp}\cdot\nabla H\right)/H\right] \tag{3}$$

Теперь усредняем (3) по ларморовскому вращению, т. е. по периоду $T = 2\pi/\Omega$. Имеем

$$\overline{\dot{\boldsymbol{v}}'}\perp= \frac{1}{T}\left[\boldsymbol{v}'_\perp(t+T) - \boldsymbol{v}'_\perp(t)\right] \approx 0$$

с точностью до членов I порядка, так как поправки к членам I порядка имеют порядок не ниже второго. Следовательно, скорость поперечного дрейфа

$$\boldsymbol{v}_g = \bar{v}_{0\perp} + \overline{v'}\perp= \overline{v'}\perp= -\overline{v_{0\perp}\left(r_{0\perp}\right.}\cdot\nabla H\Big)/H$$

где $r_{0\perp}(t) = R_\perp (e_1 \sin\Omega t + e_2 \cos\Omega t)$ - радиус-вектор частицы в однородном поле, $R_\perp = cp_\perp/eH$ - ларморов радиус. Проведя усреднение по времени, найдем скорость градиентного дрейфа:

$$v_g = \frac{v_\perp R_\perp}{2H} \boldsymbol{h} \times \nabla H \tag{4.85}$$

В отличие от электрического дрейфа, скорость градиентного дрейфа зависит от энергии и заряда частицы. Параметром малости, по которому производилось разложение, выступает безразмерная величина

$$R_\perp |\nabla H|/H \ll 1 \tag{4}$$

Пример 4.14. Нерелятивистская заряженная частица совершает колебания в одномерном потениальном поле $U(x)$ с периодом T_0. B некоторый момент включается модулированное по амплитуде быстропеременное электрическое поле $E(x)\cos\omega t, \omega \gg 2\pi/T_0$. Произвести усреднение по быстрым осииллячиям электрического поля и получить уравнение, которое описывало бы усредненное движение частицы в результирующем поле. Оценить предельт применимости описания на основе усредненного уравнения.

Решение. Точное уравнение движения имеет вид

$$m\ddot{x} = -\frac{dU(x)}{dx} + eE(x)\cos\omega t \tag{1}$$

Его усреднение основано на выделении малой осциллирующей добавки $q(t)$ к координате частицы:

$$x(t) = X(t) + q(t), \quad \bar{x}(t) = X(t), \quad \bar{q}(t) = 0. \tag{2}$$

Чертой обозначено усреднение по быстрым осцилляциям с частотой ω. При таком усреднении медленная координата $X(t)$ и выражающиеся через нее величины могут считаться постоянными на временах порядка периода $T = 2\pi/\omega$ быстрых осцилляций. Малость q может достигаться не малостью поля E, а его быстрыми изменениями, уменьшающими амплитуду колебаний частицы.

Уравнение (1) после подстановки (2) и учета членов первого порядка по q принимает вид

(3) $\ddot{X} + \ddot{q} = -\frac{1}{m}\frac{dU(x)}{dX} - \frac{1}{m}\frac{d^2U(x)}{dX^2}q + \frac{e}{m}E(X)\cos\omega t + \frac{e}{m}\frac{dE(x)}{dX}q\cos\omega t.$

Это разложение предполагает неравенства

$$\left|q\frac{d^2U}{dX^2}\right| \ll \left|\frac{dU}{dX}\right|, \quad \left|q\frac{dE}{dX}\right| \ll |E|$$

а следуюшие члены должны быть пренебрежимо малы. Иными словами, должна быть обеспечена малость $|q|$ по сравнению с меньшим из масштабов L изменения функций $E(X)$ и dU/dX.

Усреднив (3) по периоду $2\pi/\omega$, получаем уравнение

$$\ddot{X} = -\frac{1}{m}\frac{dU}{dX} + \frac{e}{m}\frac{dE}{dX}\overline{q\cos\omega t} \tag{4}$$

В нем нужно выразить q через X и произвести усреднение в последнем слагаемом. Вычитая (4) из (3), получаем уравнение для осциллирующей добавки

$$\ddot{q} = -\frac{q}{m}\frac{d^2U}{dX^2} + \frac{e}{m}E(X)\cos\omega t + \frac{e}{m}\frac{dE}{dX}(q\cos\omega t - \overline{q\cos\omega t})$$

Поскольку $q(t)$ осциллирует с частотой вынуждающей силы ω, то по порядку величины $\ddot{q} \sim \omega^2 q, qU''/m \sim \omega_0^2 q$, а последнее слагаемое имеет лишний малый множитель порядка q/L по сравнению с предпоследним. В итоге в пренебрежении малыми членами остается приближенное уравнение

$$\ddot{q} = \frac{e}{m} E(X) \cos \omega t$$

решение которого, обусловленное вынуждающей силой, имеет вид

$$q(t) = -\frac{e}{m\omega^2} E(X) \cos \omega t \tag{5}$$

Возвращаясь к уравнению (4) и произведя усреднение, получим искомое уравнение для сглаженного по быстрым осцилляциям движения

$$m\ddot{X} = -\frac{dU_{eff}}{dX}, \quad \text{где} \quad U_{eff}(X) = U(X) + \frac{e^2}{4m\omega^2} E^2(X) = U(X) + \frac{m\overline{\dot{q}^2}}{2} \tag{4.86}$$

- эффективная потенциальная энергия, учитывающая усредненное воздействие высокочастотного поля.

Фазовые траектории и фазовый портрет. Характер движения частицы в поле $U_{eff}(X)$ зависит от его конкретного вида, а также от начальных условий. Можно составить общее представление о характере движения при разных начальных условиях, если найти особые точки фазовой плоскости (X, p), ее сепаратрисы и изобразить фазовый портрет рассматриваемой системы, т. е. характерные типы фазовых траекторий.

Особыми точками называются точки, в которых одновременно $\dot{X} = 0, \dot{p} = 0$. Поскольку $\dot{X} = p/m$, то все особые точки лежат (в рассматриваемом простейшем случае) на оси OX и находятся в точках равновесия $X_n, U'_{\text{eff}} = 0$. Точки равновесия являются устойчивыми при $U''_{eff}(X_n) = k_n > 0$ и неустойчивыми при $k_n < 0$. При $k_n = 0$ требуется рассмотреть старшие производные.

Вблизи особых точек нетрудно исследовать движение частицы в общем виде. Разлагая функцию Гамильтона $H(p, X) = p^2/2m + U_{\text{eff}}(X)$ по малым отклонениям p и $x = X - X_n$ от особой точки, получим уравнение кривой II порядка на фазовой плоскости:

$$p^2 \pm mk_n x^2 = 2m(E - E_n)$$

где E - полная энергия частицы, $E_n = U_{eff}(X_n)$. Знак (+) в левой части соответствует устойчивой точке, которая называется эллинтической, или центром, так как фазовые траектории остаются в ее окрестности и имеют вид эллипсов. При этом возможны только значения $E \geqslant E_n$.

Знак (-) отвечает гиперболам, а значения E при этом могут быть как больше, так и меньше E_n. При $E = E_n$ фазовые траектории вырождаются в четыре прямолинейных отрезка, исходящие из особой точки (две пересекающиеся прямые - асимптоты гипербол). Соответствующая точка неустойчива (частица уходит от нее) и называется гиперболической, или седлом.

Фазовые траектории, проходящие через неустойчивые особые точки и разделяющие области финитного (хотя бы с одной стороны) и инфинитного движения, называются сепаратрисами. Примеры особых точек и фазовых траекторий приведены на рис. 4.2. На нем изображено одномерное потенциальное поле $U(q)$ и фазовый портрет частицы, движущейся в этом поле. C_1 и C_2 - сепаратрисы, точки $(0, q_1)$ и $(0, q_3)$ на фазовой плоскости эллиптические (центры), точки $(0, q_2)$ и $(0, q_4)$ - гиперболические (седла).

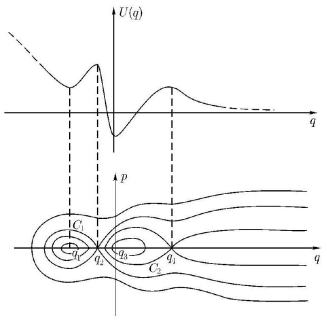


Рис. 4.2

Адиабатические инварианты. Обратимся теперь к случаю, противоположному тому, который был рассмотрен в примере 4.14. Пусть внешнее поле $U(x, \lambda(t))$, в котором частица совершает периодическое движение с периодом T, медленно (адиабатически) изменяется со временем, так что параметр $\lambda(t)$ удовлетворяет условию

$$|T\dot{\lambda}| \ll \lambda \tag{4.87}$$

(разумеется, при переменном λ движение будет не строго периодическим, но близким к периодическому). Как известно из механики [Ландау и Лифшиц, Механика], [Заславский и Сагдеев (1988)], в этом случае можно по-
строить приближенный интеграл движения - адиабаатический инвариант

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint p dq \tag{4.88}$$

где интегрирование производится по квазипериоду колебаний, а p и q - канонические переменные. Хотя адиабатический инвариант (4.88), вычисленный с точными p и q, испытывает малые осцилляции с периодом колебаний системы, его усреднение по указанному периоду приводит к постоянному значению, которое сохраняется с высокой (часто экспоненциальной) точностью в течение многих периодов. При фактическом вычислении интеграла (4.88) в большинстве случаев достаточно это сделать в нулевом приближении, т. е. считать $\lambda = \text{const}$ и только после нахождения явной зависимости $I(\lambda)$ придавать параметру λ зависимость от t. С помощью адиабатических инвариантов можно решать многие задачи о движении частиц в медленно изменяющихся электромагнитных полях.

Пример 4.15. Построить адиабатический инвариант, связанный с вращением заряженной частицы вокруг направления магнитного поля. Поле испытывает медленные изменения в пространстве и во времени.

Решение. Определим адиабатический инвариант в системе S' ведущего центра частицы. Канонические переменные p' и q' берем в нулевом приближении, т. е. без учета пространственной и временной неоднородности поля. Выберем в качестве q' азимутальный угол α', определяющий положение частицы на ларморовой орбите. Линейная скорость частицы имеет только азимутальную составляющую $v' = v'_\alpha = R'_\perp \dot{\alpha}'$, где $R'_\perp$ - ларморов радиус. Функция Лагранжа (4.46) имеет вид

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{R'^2_\perp \dot{\alpha}'^2}{c^2}} + \frac{e}{c} A'_\alpha R'_\perp \dot{\alpha}' - e\varphi'$$

где $\boldsymbol{A}'$ и φ' - электромагнитные потенциалы в системе ведущего центра.
Вычислив обобщенный импульс

$$p'_\alpha = \mathscr{E}' R'^2_\perp \dot{\alpha}'/c^2 + (e/c) A'_\alpha R'_\perp$$

и подставив его в интеграл (4.88), получим два интеграла, из которых первый дает

$$\int_0^{2\pi} \mathscr{E}' R_\perp'^2 \dot{\alpha}' d\alpha' = \frac{2\pi e}{c} R_\perp'^2 H'$$

так как $\dot{\alpha}' = ceH'/\mathscr{E}'$ - частота вращения. Второй интеграл представляется в виде

$$\int_0^{2\pi} A'_\alpha R'_\perp d\alpha' = \oint \boldsymbol{A}' \cdot d\boldsymbol{l}' = \int \operatorname{rot} \boldsymbol{A}' \cdot \boldsymbol{n} dS = \pi R_\perp'^2 H'$$

где использована теорема Стокса. Объединяя два последних результата, находим

$$I' = \frac{3e}{2c} R_\perp'^2 H' = \frac{3e}{2c} \frac{p_\perp'^2}{H'}$$

При переходе в лабораторную систему, движущуюся вдоль $\boldsymbol{H}'$ со скоростью частицы $v_\parallel$, имеем $H' = H$ и $p'_\perp = p_\perp$. Таким образом, адиабатический инвариант в лабораторной системе

$$\frac{p_\perp^2}{H} = \text{ const.} \tag{4.89}$$

Если поле однородно, но медленно меняется со временем, то $p_\parallel$ =const, а $p_\perp(t) = p_\perp(0)\sqrt{H(t)/H(0)}$. Вместе с поперечным импульсом изменяется и энергия частицы. Если поле постоянно, но неоднородно в пространстве, то энергия частицы $\mathscr{E}$ = const, но при движении частицы будет изменяться угол ϑ между импульсом частицы и направлением поля:

$$\sin\vartheta = \sqrt{\frac{H(\boldsymbol{r})}{H(\boldsymbol{r}_0)}} \sin\vartheta_0$$

где поле H берется в точке ведущего центра частицы.

Задачи

4.92. Дать качественное объяснение происхождению электрического дрейфа. Для этого построить с помощью компьютера несколько витков траектории частицы во взаимно перпендикулярных полях $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ и указать причину ее регулярного смешения в направлении $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}$.

4.93. Сделать то же самое для градиентного дрейфа.

4.94. К заряженной частице, движущейся в однородном магнитном поле $\boldsymbol{H}$, приложена слабая неэлектромагнитная сила $\mathscr{F}$, перпендикулярная $\boldsymbol{H}$. Вычислить скорость поперечного дрейфа, вызванного приложенной силой.

4.95. Магнитное поле постоянно по абсолютной величине в рассматриваемой области пространства, но слабо (на расстояниях порядка ларморова радиуса) изменяется по направлению. Вычислить скорость поперечного дрейфа заряженной частицы, вызванного кривизной силовых линий (такой дрейф называется центробежным). Используя результаты решения примеров 4.12 и 4.13, показать, что при наличии слабо неоднородного магнитного поля и малого ($E \ll H$) электрического поля скорость движения ведущего центра частицы с учетом поперечных дрейфов первого порядка имеет вид

$$\dot{\boldsymbol{r}}_c \equiv \boldsymbol{v}_c = v_\parallel \boldsymbol{h} + \frac{c}{H} \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{h} + \frac{1}{2H} v_\perp R_\perp \boldsymbol{h} \times \nabla H + v_\parallel R_\parallel \boldsymbol{h} \times (\boldsymbol{h} \cdot \nabla)\boldsymbol{h} \tag{4.90}$$

где $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{H}/H, R_{\perp,\parallel} = cp_{\perp,\parallel}/eH$. Каков порядок величины дрейфов, вызванных медленным изменением во времени магнитного поля и пространственной неоднородностью электрического поля?

4.96. Прямым расчетом доказать адиабатическую инвариантность величины $I = p_\perp^2/H$ при медленном изменении магнитного поля со временем. Для этого вычислить изменение поперечного импульса частицы за ларморов период, считая ее траекторию окружностью в плоскости, перпендикулярной $\boldsymbol{H}$, и связать его с изменением магнитного поля.

4.97. Показать, что скорость изменения энергии заряженной частицы в медленно меняющихся в пространстве и во времени электрическом и магнитном полях ($E \ll H$) в приближении ведущего центра имеет вид

$$\dot{\mathscr{E}} = e\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{v}_c - \frac{e}{2}v_\perp R_\perp \boldsymbol{h}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{E} \tag{4.91}$$

Здесь учтены слагаемые до II порядка малости включительно.

Замечание. Уравнения (4.89), (4.90) и (4.91) образуют полную систему уравнений, описывающих движение частицы в заданном медленно меняющемся электромагнитном поле ($E \ll H$). Все величины в правых частях этих уравнений следует брать в точке нахождения ведущего центра частицы. Более подробные сведения о выводе и применениях этих уравнений можно найти в [Сивухин (1963)].

4.98. Исходя из инвариантности величины $I = p_\perp^2/H$, показать, что в дрейфовом приближении сохраняются магнитный поток через орбиту циклотронного вращения частицы и магнитный момент нерелятивистской частицы, создаваемый ее циклотронным вращением. При каких дополнительных условиях сохраняется магнитный момент релятивистской частицы?

4.99. Частица движется в слабо неоднородном постоянном магнитном поле. Пользуясь инвариантностью величины $I = p_\perp^2/H$ и законом сохранения энергии, показать, что в дрейфовом приближении на частицу действует
сила $\mathscr{F}$, направленная вдоль магнитной силовой линии, и найти величину этой силы. Выразить ее через магнитный момент циклотронного вращения частицы.

4.100. Поляризующаяся нейтральная система заряженных частиц, не имеющая дипольного момента в отсутствие внешнего поля, помещена в слабо неоднородное статическое электрическое поле $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$. Считая скалярную поляризуемость β системы известной, записать в дипольном приближении нерелятивистское уравнение движения ее центра масс. Найти потенциальную энергию и интеграл энергии системы.

4.101. Пусть на нейтральную систему предыдущей задачи действует дополнительно слабо неоднородное магнитное поле $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$. Записать уравнение движения центра масс.

4.102^. Система одинаковых заряженных нерелятивистских частиц находится в аксиально-симметричном внешнем потенциальном поле. Показать, что слабое однородное внешнее магнитное поле $\boldsymbol{H}$, приложенное вдоль оси симметрии системы, приводит систему частиц как целое во вращение с угловой скоростью

$$\boldsymbol{\Omega}_L = -\frac{e\boldsymbol{H}}{2mc}$$

(ларморовская прецессия). Указать критерий слабости магнитного поля.

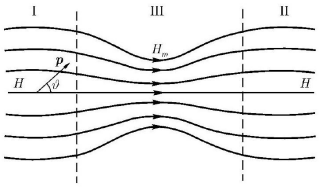


Рис. 4.3

4.103. Между областями I и II, в которых статическое магнитное поле однородно и равно H, находится область III, в которой поле усилено («магнитная пробка»). Максимальное значение поля равно H_m, схематический вид силовых линий показан на рис. 4.3. В области I движется частица, импульс p которой в некоторый момент времени составляет угол ϑ с направлением силовой линии. Считая изменение поля в пространстве медленным, найти соотношение между ϑ, H и H_m, при котором частица отразится от области с сильным полем.

4.104. Структура магнитного поля в адиабатической ловушке с аксиально-симметричным полем имеет вид, схематически изображенный на рис. 4.4. В среднюю часть ловушки, где напряженность поля равна $\boldsymbol{H}$, впрыснута порция частиц с изотропно распределенными скоростями. Какая доля R частиц удержится в ловушке в течение длительного времени?

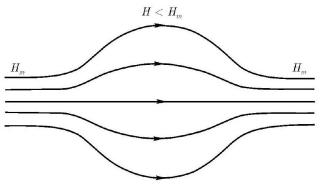


Рис. 4.4

4.105. В ловушку с аксиально-симметричным полем, изображенным на рис. 4.4, захвачена порция частиц. Частицы проводят большую часть времени в средней части ловушки, где поле почти однородно. Пусть поле ловушки медленно нарастает во времени таким образом, что форма магнитных силовых линий не меняется. Найти, как изменяется расстояние от ведущего центра каждой из частиц до оси ловушки.

4.106. В однородном магнитном поле с напряженностью H находится неподвижный точечный заряд q. Частица с зарядом e и массой m, имеющая на бесконечности продольную составляющую скорости $v_\parallel$, рассеивается на заряде q. Считая применимым дрейфовое приближение и пренебрегая изменением продольной скорости при рассеянии, найти, по какой силовой линии будет двигаться ведущий центр частицы после рассеяния. До рассеяния он двигался по силовой линии, уравнение которой в цилиндрических координатах с осью Oz, проходящей через заряд q и ориентированной вдоль поля, имеет вид $r = l, \varphi = 0$.

4.107. Магнитное поле Земли можно представить приближенно как поле точечного диполя с магнитным моментом $\mu = 8,1 \cdot 10^{25}\text{Гс} \cdot \text{см}^3$. Протон с энергией $\mathscr{E} = 50\text{М}$ в некоторый момент времени находится в плоскости магнитного экватора на расстоянии двух земных радиусов от центра Земли и движется поперек магнитных силовых линий. Найти в дрейфовом приближении закон движения ведущего центра протона. За какое время T он совершит полный оборот вокруг земного шара? Каков ларморов радиус R протона? Радиус земного шара $r_* = 6380$ км, его масса $M = 6 \times 10^{27}$ г.

4.108*. Протон находится в плоскости геомагнитного экватора (см. условие предыдущей задачи) на расстоянии r от центра Земли, его импульс составляет угол α с направлением магнитной силовой линии. а) Пренебрегая гравитационным полем, показать,что ведуший центр протона, наряду с движением вдоль магнитных силовых линий, будет испытывать азимутальный дрейф, и найти угловую скорость дрейфа ω_d, выразив ее через r и геомагнитную широту λ. б) Указать значения λ_m, соответствующие точкам отражения частицы в земном магнитном поле. в) Найти условия, при которых протон может достичь поверхности Земли.

4.109. Расстояние между магнитными пробками в адиабатической аксиально-симметричной ловушке, изображенной на рис. 4.4, медленно изменяется по

закону $l(t)$. Построить адиабатический инвариант, связанный с продольными колебаниями захваченной в ловушку частицы. Пользуясь адиабатическим инвариантом, выразить изменение энергии частицы через расстояние между пробками $l(t)$, считая поле в большей части ловушки квазиоднородным (отражение от «магнитных зеркал»).

4.110**. Электрическое поле $\boldsymbol{E}$ всюду однородно и направлено вдоль оси Ox, а магнитное поле параллельно Oy и испытывает скачок по абсолютной величине на плоскости $z = 0$, так что при $z < 0 H = H_1$, а при $z > 0$ $H = H_2 > H_1 \gg E$.

Частица первоначально находится в области $z < 0$ и имеет импульс $\boldsymbol{p}_1 \perp \boldsymbol{H}_1$. Вычислить энергию частицы $\mathscr{E}_2$, усредненную по ларморовскому врашению, после того, как ее ларморов кружок продрейфует в область $z > 0$.

4.111***. Релятивистская частица движется в неоднородных электрическом и магнитном полях

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{e}_x E_x(x) + \boldsymbol{e}_y E_y, \quad \boldsymbol{H} = \boldsymbol{e}_x H_x + \boldsymbol{e}_z H_z(x)$$

где $E_y = \text{const} > 0, H_x = \text{const}$, а $E_x(x)$ и $H_z(x)$ - произвольные (не обязательно медленно меняющиеся) функции x, принимающие значения $E_x = 0$, $H_z = H_1$ при $x \to -\infty$ и $E_x = 0, H_z = H_2 > H_1$ при $x \to +\infty$. Кроме того, всюду $E_y \ll H$ и $|H_x| \ll H_z$.

Построить адиабатический инвариант частицы, связанный с ее движением в направлении оси Ox. С помощью адиабатического инварианта найти изменение энергии частицы при переходе из области с полем H_1 в область, где поле $H_z = B_2$. Проанализировать частные случаи, в том числе случай резкого скачка H_z.

ЗАМЕЧАНиЕ. В этой и предыдущей задачах предлагается в упрощенной модели исследовать взаимодействие заряженной частицы с фронтом ударной волны в плазме с магнитным полем.

4.112. Обобщить уравнения (4.86), выведенные в примере 4.14, на случай одномерного движения релятивистской частицы в быстро осциллирующем поле.

4.113*. Нерелятивистская заряженная частица движется в периодическом постоянном потенциальном поле $U(x) = U_0[1 - \cos(2\pi x/L)]$, на которое наложено быстроосциллирующее модулированное электрическое поле $E(x,t) = E_0 \sin(2\pi x/L)\cos\omega t$.

а) Провести усреднение по быстрым осцилляциям и найти усредненную потенциальную энергию, которой можно описать сглаженное движение частицы. Указать пределы применимости метода.

б) Найти особые точки на фазовой плоскости «медленных» переменных p, X. Дать их классификацию и вычислить частоты малых колебаний вблизи точек устойчивого равновесия.

в) Изобразить фазовый портрет системы.

4.114. Сделать то же самое, что в предыдущей задаче, при наличии быстроосциллируюшего электрического поля

$$E(x,t) = E_0 \cos(2\pi x/L)\cos\omega t$$

4.115. Согласно гипотезе Дирака [6], могут существовать частицы, имеющие магнитные заряды («монополи Дирака»). Величина магнитного заряда g, по Дираку, квантуется:

$$\frac{e_0 g}{\hbar c} = \frac{1}{2}k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

где e_0 - элементарный электрический заряд. На частицы с магнитным зарядом в магнитном поле действует сила $\mathscr{F} = g\boldsymbol{H}$. Вычислить величину минимального

[46] Дирак П. А. М. - выдающийся английский физик-теоретик, основоположник релятивистской квантовой механики и квантовой электродинамики.

магнитного заряда и приращение энергии магнитного монополя в поле $H = 1$ кЭ на единицу пути.

4.116*. Дирак предложил описывать векторный потенциал магнитного заряда g в сферической системе координат (r, ϑ, α) выражением $\boldsymbol{A} = (0, 0, (g/r)\,\mathrm{tg}(\vartheta/2))$. Вычислить напряженность магнитного поля и его поток через замкнутую поверхность, окружающую начало координат. Какие трудности формального и физического характера возникают при его использовании?

4.117*. Частица с зарядом e и массой m движется в поле магнитного монополя с магнитным зарядом g. Найти ее интегралы движения. Для нерелятивистской частицы найти также зависимость координат от времени.

C.3.3 4.3. Four-Dimensional Formulation of Electrodynamics. An Introduction to Field Theory

Методы Лагранжа и Гамильтона в теории поля. В истории физики электродинамика явилась первой полевой теорией, в которой были развиты и отработаны методы классической теории поля (принцип наименьшего действия, лагранжево и гамильтоново описание поля, методы теории преобразований). Квантовая электродинамика явилась первой квантовой теорией поля, позволившей рассчитывать различные квантовоэлектродинамические эффекты с точностью, которая до сих пор не достигнута ни в какой другой области физики.

Одно время казалось, однако, что лагранжев и гамильтонов подходы, столь эффективно применявшиеся в электродинамике, не имеют перспективы в квантовой теории элементарных частиц, особенно при описании сильных взаимодействий (см., например, статью [Ландау (1960)] [7]). Но создание вскоре теории электрослабого взаимодействия и экспериментальное обнаружение предсказанных ею промежуточных бозонов, а также создание современной квантовой теории сильных взаимодействий - квантовой хромодинамики, построенной в значительной степени по аналогии с квантовой электродинамикой - не оставляют сомнений в важной роли методов классической теории поля в новейших теориях элементарных частиц. Поэтому в настоящую книгу включены разделы, посвященные общим принципам

теории полей. В необходимых случаях мы используем и квантовые понятия, как правило не выходящие за пределы стандартного университетского курса квантовой механики.

В этом разделе главное внимание уделено лагранжевой форме уравнений поля и принципу наименьшего действия, законам сохранения, а также основным понятиям теории преобразований. Дополнительные сведения по классической теории поля и ее связи с современными квантовыми теориями элементарных частиц можно почерпнуть из учебников и монографий [Ландау и Лифшиц, Теория поля], [Иваненко и Соколов (1951)], [Волошин и Тер-Мартиросян (1984)], [Рубаков (1999)], [Медведев (1977)], [Коноплева и Попов (1980)], [Гальцов и др. (1991)], [Соколов и др. (1986)], [Линде (1990)], [Окунь (1988)].

Наиболее естественный путь введения вариационного принципа в теорию непрерывных систем, каковыми являются электромагнитное и другие поля - это предельный переход от механики дискретных точечных масс к механике непрерывной среды (см. Дополнение 2). В результате мы приходим к определению действия как интеграла по некоторой фиксированной области Ω в четырехмерном пространстве-времени от плотности функции Лагранжа (или лагранжиана) $\mathscr{L}$:

[47] Ландау Лев Давидович (1908-1968) - выдающийся советский физик-теоретик, Нобелевский тауреат, автор (вместе с Е.М.Лифшицем) всемирно известного курса теоретической физики.

$$S = \frac{1}{c} \int\limits_{\Omega} \mathscr{L}\left(q^A, q^B_{,2}, x\right) d^4x \tag{4.92}$$

Лагранжиан [8]$\mathscr{L}$ в общем случае зависит от функций [9]$q^A\left(x^k\right)$, описывающих рассматриваемое поле, и их производных $q^A_{,,k} \equiv \partial q^A/\partial x^k$, а также от четырехмерных координат x^k. В зависимости от природы поля полевые функции q^A могут быть действительными или комплексными, а их число (число значений индекса A) может быть различным. Полевые функции q^A, как и их вариации, считаются в дальнейшем независимыми.

Структура лагранжиана не может быть полностью произвольной она должна подчиняться ряду ограничений, которые вытекают из общефизических принципов и надежно установленных симметрий, присущих физическим явлениям и подтверждаемых опытом. Перечислим основные ограничения:

1. Релятивистская инвариантность. Действие S должно быть инвариантом преобразования Лоренца, чтобы получаемые из него следствия не противоречили принципу относительности [10]. Поскольку d^4x - тоже релятивистский инвариант,то инвариантом должен быть и лагранжиан $\mathscr{L}$.

2. Локальность. Лагранжиан может зависеть только от конечного числа производных. Все величины, входящие в него, берутся в одной пространственно-временной точке. В электродинамике такая структура теории естественным образом приводит к картине взаимодействия частиц через поле, имеющееся в точке локализации каждой из частиц.

3. Включение в лагранжиан производных не выше первого порядка от полевых функций. Это ограничивает уравнения поля вторым порядком по координатам и времени.

4. Инвариантность действия относительно некоторых преобразований (помимо преобразований Лоренца), связанных с внутренними симметриями теории. Особенно большую роль в теории элементарных частиц играет калибровочное преобразование, обобщающее калибровочное (градиентное) преобразование электромагнитных потенциалов, смысл и следствия которого будут разъяснены ниже.

5. Действительность лагранжиана, обеспечивающая действительность (отсутствие мнимой части) у энергии поля и других физических величин.

Можно дать следующую формулировку вариационного принципа для поля:

Эволюция поля в пространстве и во времени происходит таким образом, что действие остается стационарным относительно малых изменений поля при фиксированном его значении на границе области интегрирования, т. е.

$$\delta S = 0 \quad \text{при} \quad \delta q^A\big|_{\Sigma} = 0 \tag{4.93}$$

[48] Здесь выделен множитель $1/c$, чтобы в нерелятивистском пределе имелась обычная связь между действием и функцией Лагранжа

[9] В этом разделе мы используем большие латинские индексы для нумерации компонент полевых функций $(A, B = 1, 2 \ldots N)$. Малые латинские индексы нумеруют четырехмерные координаты $(i, k = 0, 1, 2, 3)$. Малые греческие индексы, как и раньше, будут использованы для обозначения номера пространственной координаты $(\alpha, \mu = 1, 2, 3)$. В некоторых случаях, когда это не будет вызывать недоразумений, через q и x без индексов будут обозначаться совокупности N полевых функций и четырех координат соответственно.

где Σ - трехмерная гиперповерхность, ограничивающая четырехмерный объем интегрирования Ω в (4.92).

Одни и те же уравнения поля можно получить из различных лагранжианов $\mathscr{L}'$, отличающихся дивергенцией произвольного вектора $F^m\left(q^A, x\right)$:

$$\mathscr{L}' = \mathscr{L} + \frac{dF^m\left(q^A, x\right)}{dx^m} \tag{4.94}$$

Это объясняется тем, что четырехкратный интеграл от дивергенции преобразуется в трехмерный интеграл по гиперповерхности Σ, вариация которого равна нулю в силу того, что полевые функции $q^A\left(x^i\right)$ на этой поверхности заданы.

Пример 4.16. Предполагая известным лагранжсан поля, записать уравнения поля в лагранжевой форме, пользуясь сформулированнылм выие вариационным принципм для поля.

Решение. Придаем компонентам полевых функций малые независимые приращения $\delta q^A\left(x^i\right)$, не связанные с изменением 4-координат, и вычисляем в первом порядке вариацию

$$\delta S = S\left[q^A + \delta q^A\right] - S\left[q^A\right] = \int\limits_\Omega d^4x \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q^A}\delta q^A + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q^A_{,i}}\delta q^A_{,i}\right) \tag{1}$$

Здесь использовано правило суммирования по повторяющимся значкам (как i, так и A). Пользуясь равенством

$$\delta q^A_{,i} \equiv \delta\frac{\partial q^A}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i}\delta q^A \tag{2}$$

освобождаем δq^A из-под знака производной путем интегрирования (1) по частям:

$$\delta S = \int\limits_\Omega d^4x \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q^A} - \frac{d}{dx^i}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q^A_{,i}}\right)\delta q^A\left(x^k\right) + \int\limits_\Sigma d^3\Sigma_i \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q^A_{,i}}\delta q^A \tag{3}$$

Здесь $d^3\Sigma_i$ - проекция элемента трехмерной гиперповерхности Σ на ось i; ввиду того, что поле на Σ задано, имеем $\delta q^A\big|_\Sigma = 0$, и последнее слагаемое в правой части (3) обращается в нуль. Приравнивая нулю первую вариацию действия, получаем из (3) вследствие произвольности и независимости функций δq^A и произвольности области интегрирования

$$\frac{\delta S}{\delta q^A} \equiv \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q^A} - \frac{d}{dx^i}\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q^A_{,i}} = 0, \quad A = 1, 2, \ldots, N \tag{4.95}$$

Это и есть искомые уравнения поля в лагранжевой форме. Тождество в левой части определяет вариационную производную от функционала действия.

Пример 4.17. По аналогии с механикой системыь материальных точек ввести плотность обобщенного импульса поля

$$\pi_A = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q^A_0}, \quad A = 1, 2, \ldots, N \tag{4.96}$$

построить гамильтониан (плотность функиии Гамильтона) поля и сформулировать уравнения эволюции поля в гамильтоновой форме.

Решение. По аналогии с ктассической механикой материальных точек определяем гамильтониан поля через его лагранжиан:

[410] Разумеется, при формулировке нерелятивистских теорий действие не обязано быть релятивистским инвариантом (см., например, задачи (4.118)-(4.124))

$$\mathscr{H}\left(q^A, \pi_B, q^C_{,\alpha}, x^k\right) = q^A_{,0}\pi_A - \mathscr{L} \tag{4.97}$$

В правой части равенства, где подразумевается суммирование по индексу A, нужно выразить все «обобщенные скорости» q^A_0 через обобщенные импульсы π_A с помощью равенств (4.96). В результате гамильтониан станет функцией q^A и π_A, пространственных производных $q^A_{,\alpha}$ и, при наличии внешних полей или источников, также функцией координат x^k.

Для получения уравнений поля в гамильтоновой форме удобно снова воспользоваться вариационным принципом. Однако, прямое перенесение расчета, произведенного в предыдущем примере, на рассматриваемый случай невозможно. Это связано с тем, что уравнений Гамильтона вдвое больше, чем уравнений Лагранжа, и для их получения, следовательно, нужно иметь вдвое больше независимых вариаций.

Это затруднение можно преодолеть, если ввести в лагранжиан дополнительные формально независимые переменные, подчинив их соответствующим условиям связи. Рассмотрим этот прием сначала на примере вывода уравнений Лагранжа. Обозначим $s^A = q^A_0$ и введем величины s^A в правую часть равенства (4.92):

$$S = \int\limits_\Omega \mathscr{L}\left(q^A, s^B, q^C_{,\alpha}, x^k\right) d^4x \tag{1}$$

Вариационная задача с действием (1) и уравнениями связи

$$s^A - q^A_{,0} = 0 \quad (A = 1, 2, \ldots N) \tag{2}$$

очевидно, эквивалентна той, которая была рассмотрена в примере (4.16). Но теперь мы можем считать переменные q^A, s^A и их вариации независимыми, если введем в задачу неопределенные множители Лагранжа $\lambda_A\left(x^k\right)$:

$$S = \int\limits_\Omega \left[\mathscr{L}\left(q^A, s^B, q^C_{,\alpha}, x^k\right) - \lambda_A\left(s^A - q^A_{,0}\right)\right] d^4x \tag{3}$$

Вычислив первую вариацию действия, как в примере (4.16), получим $2N$ уравнений, в которые войдут и множители Лагранжа:

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial q^A} - \frac{d}{dx^\mu}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial q^A_{,\mu}} - \frac{\partial\lambda_A}{\partial x^0} = 0, \quad \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial s^A} - \lambda_A = 0 \tag{4}$$

С учетом уравнений связи (2) система (4) эквивалентна лагранжевым уравнениям (4.95).

Теперь используем тот факт, что согласно (4), (2) и (4.96) лагранжевы множители совпадают с плотностью обобщенного импульса:

$$\lambda_A = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial s^A} = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial q^A_{,0}} = \pi_A \tag{5}$$

Вводим их в выражение (3) и вместо величин q^A, s^A принимаем за независимые переменные систему q^A, π_A

$$S = \int\limits_\Omega \left[\pi_A q^A_0 - \mathscr{H}\left(q^A, \pi_B, q^C_\alpha, x^k\right)\right] d^4x \tag{4.98}$$

Приравнивая нулю первую вариацию действия при независимых $\delta q^A, \delta\pi_A$, получаем уравнения поля в гамильтоновой форме:

$$\frac{\partial q^A}{\partial x^0} = \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial \pi_A}, \quad \frac{\partial \pi_A}{\partial x^0} = -\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial q^A} + \frac{d}{dx^\alpha}\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial q^A_{,\alpha}} \tag{4.99}$$

Эти уравнения менее симметричны, чем уравнения Лагранжа (4.95), поскольку координата x^0 оказывается выделенной.

Задачи

4.118. Уравнение, описывающее волны малой амплитуды в упругой изотропной среде, имеет в трехмерных обозначениях вид

$$\rho\frac{\partial^2 \boldsymbol{q}}{\partial t^2} = \mu\Delta\boldsymbol{q} + \left(K + \frac{\mu}{3}\right)\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{q}) \tag{1}$$

где положительные постоянные ρ, μ, K - это соответственно плотность среды, модуль сдвига и модуль всестороннего сжатия; вектор $\boldsymbol{q}(\boldsymbol{r}, t)$ описывает смещение малого элемента среды в результате деформации, вызванной распространяющейся волной.

Записать лагранжиан и гамильтониан, приводящие к уравнению (1).

4.119. Система макроскопических тел малых размеров («материальных точек»), взаимодействуя гравитационными силами, совершает нерелятивистское движение. Построить действие для полной системы, состоящей
из вещества и гравитационного поля, описываемого ньютоновским гравитационным потенциалом $\varphi(\boldsymbol{r}, t)$. Вывести из вариационного принципа уравнения движения для материальных точек и гравитационного потенциала.

4.120. Сделать то же самое для системы точечных заряженных частиц в пренебрежении магнитным взаимодействием и гравитацией.

4.121. В пространстве задано распределение стационарных электрических токов $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$. Записать действие, приводящее к уравнениям магнитостатики.

4.122*. Комплексное скалярное поле $\psi(\boldsymbol{r}, t)$ в нерелятивистском приближении имеет лагранжиан

$$\mathscr{L} = \frac{i\hbar}{2}\left(\psi^*\frac{\partial\psi}{\partial t} - \psi\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\right) - \frac{\hbar^2}{2m}|\nabla\psi|^2 - U|\psi|^2 \tag{4.100}$$

где $m > 0$ - масса частицы, $\hbar$ - постоянная Планка, $U(\boldsymbol{r}, t)$ - потенциальное поле, в котором движется частица. Получить из лагранжиана и интерпретировать уравнение движения для $\psi(\boldsymbol{r}, t)$.

УКАзАниЕ. Комплексное поле $\psi = q^1 + iq^2$ эквивалентно двум действительным функциям $q^1(\boldsymbol{r}, t)$ и $q^2(\boldsymbol{r}, t)$. В качестве независимых вариаций удобно рассматривать линейные комбинации вариаций этих функций $\delta q^1 + i\delta q^2 = \delta\psi$ и $\delta q^1 - i\delta q^2 = \delta\psi^*$.

4.123*. Построить плотность функции Гамильтона $\mathscr{H}$, используя лагранжиан (4.100). Вычислить полную энергию поля и дать квантовую интерпретацию полученного результата.

4.124*. Уравнение Шредингера для волновой функции $\psi(\boldsymbol{r}, t)$ бесспиновой нерелятивистской заряженной частицы во внешнем электромагнитном поле имеет вид

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\left[\nabla - \frac{ie}{\hbar c}\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t)\right]^2\psi + e\varphi(\boldsymbol{r}, t)\psi \tag{4.101}$$

где $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t)$ и $\varphi(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{t})$ - электромагнитные потенциалы (заданные действительные функции). Построить лагранжиан, приводящий к уравнению (4.101).

4.125*. Комплексное скалярное поле $\varphi\left(x^k\right)$ имеет релятивистски инвариантный лагранжиан

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\left(\partial^k \varphi \partial_k \varphi^*\right) - \frac{m^2 c^2}{2\hbar^2}|\varphi|^2 \tag{4.102}$$

Найти уравнение движения для поля $\varphi\left(x^k\right)$. Какой вид имеет дисперсионное соотношение между волновым вектором и частотой соответствующих волн? Интерпретировать его в духе квантовых соотношений де-Бройля.
4.126*. Пусть лагранжиан действительного скалярного поля φ имеет вид

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\left(\partial^k \varphi \partial_k \varphi\right) - V(\varphi) \tag{1}$$

где потенциал $V(\varphi)$ имеет вид

$$V(\varphi) = -\frac{\mu^2}{2}\varphi^2 + \frac{\lambda}{4}\varphi^4 \tag{2}$$

(модель Хиггса). По сравнению с потенциалом предыдущей задачи квадратичный член поменял знак и добавлен положительный член четвертого порядка.

Записать дифференциальное уравнение для поля φ. Какой характер будет иметь решение при $\varphi^2 \ll \mu^2/\lambda$? При каких условиях для указанного эффективного потенциала можно сохранить интерпретацию φ как волновой функции квантов поля и какую массу будут иметь эти кванты?

Действие для электромагнитного поля. После нескольких примеров и задач, которые иллюстрировали эффективность вариационного принципа в теории самых разных полей, перейдем к дальнейшему изучению электромагнитного поля на основе этого исключительно мощного метода исследования. Начнем с составления действия, пригодного для описания в классической теории в наиболее общем случае физической системы, состоящей из электромагнитного поля и заряженных релятивистских частиц, взаимодействующих через посредство поля. Для частных случаев этот вопрос уже рассматривался в задачах (4.120), (4.121). Две составляющие части действия были построены ранее - действие для свободной частицы (3.27) и член взаимодействия частицы с полем (4.43). Обобщая эти выражения на систему частиц, будем иметь

$$S_p = -\sum_a m_a c \int ds_a \tag{4.103}$$

И

$$S_{\text{int}} = -\sum_a \frac{e_a}{c} \int A_i\left(x_a\right) dx_a^i \tag{4.104}$$

где индекс a обозначает номер частицы и суммирование производится по всем частицам. Для полного описания рассматриваемой системы необходимо дополнить действие слагаемым S_{em} относящимся к электромагнитному полю:

$$S = S_p + S_{int} + S_{em} \tag{4.105}$$

Последнее слагаемое должно быть выражено через полевые функции, то есть 4 -потенциал A_i, и удовлетворять сформулированным выше принципам релятивистской инвариантности и симметрии. Для электромагнитного поля следует добавить еще одно важное условие, ограничивающее возможный вид действия - линейность уравнений поля, вытекающую из принципа суперпозиции полей в вакууме Из этого условия следует, что действие должно быть билинейным функционалом 4 -потенциала. К тому же действие для поля должно быть релятивистским и калибровочным инвариантом.

Всем этим требованиям удовлетворяет единственный инвариант электромагнитного поля $F^{2k}F_{ik}$, [11] через который и выражается действие для электромагнитного поля:

$$S_{em} = -\frac{1}{16\pi c}\int F^{ik}F_{ik}d^4x \tag{4.106}$$

Численный множитель соответствует гауссовой абсолютной системе единиц. При выводе уравнений движения поля из действия (4.105) нужно варьировать электромагнитный потенциал при фиксированных значениях 4 -координат частиц. При этом удобно записать слагаемые, в которые входит потенциал, единообразно, то есть в виде интеграла по четырехмерному пространству-времени, тогда как в (4.104) S_{int} записано в виде суммы интегралов по мировым линиям частиц. Требуемая запись достигается путем использования дельта-функции Дирака, через которую легко выразить плотности заряда и электрического тока:

$$\rho(\boldsymbol{r},t) = \sum_a e_a\delta\left(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_a(t)\right), \quad \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t) = \sum_a e_a\boldsymbol{v}_a\delta\left(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_a(t)\right) \tag{4.107}$$

Введя единое время t для всех частиц, будем иметь $dx_a^i/dt = (c, \boldsymbol{v}_a)$ и

$$S_{\text{int}} = -\frac{1}{c^2}\int j^i(x)A_i(x)d^4x \tag{4.108}$$

где

$$\boldsymbol{j}^i(x) = (c\rho(\boldsymbol{r},t), \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r},t)) \tag{4.109}$$

- 4-вектор плотности тока. Ток можно записать в такой форме, чтобы его векторная природа была видна явным образом. Используем 4-скорость частицы:
  $j^i(x) = \sum\limits_a e_a u_a^i\sqrt{1-v_a^2/c^2}\delta\left(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_a(t)\right) = \sum\limits_a ce_a\int u_a^i\delta^4\left(x-x_a\left(\tau_a\right)\right)d\tau_a$.
  В последнем выражении интегрирование проводится по инвариантному собственному времени a-й частицы, $d\tau_a = \sqrt{1-v_a^2/c^2}dt$, а

$$\delta^4\left(x-x_a\right) = \delta\left(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_a\right)\delta\left(x^0-ct\right)$$

- также релятивистский инвариант. Последнее утверждение следует из инвариантности d^4x и интеграла

$$\int\limits_\Omega \delta^4\left(x-x_a\right)d^4x = 1$$

который имеет указанное значение для любой четырехмерной области Ω, если она включает точку x_a.

Пример 4.18. Показать, что вариация действия δS_{int} при заданном токе $j^i(x)$ калибровочно инвариантна, хотя величина S_{int} зависит от калибровки 4-потенциала $A_i(x)$.

Решение. Подставив в (108) преобразованный согласно (4.73) потенциал $A_i = \widetilde{A}_i - \partial_i f$, находим

[411] Второй инвариант преобразования Лоренца, $e^{iklm}F_{ik}F_{lm}$, меняет знак при инверсии пространственных осей, и его включение в действие приведет к уравнениям различного вида в правой и левой системах координат.

$$S_{\text{int}} = \widetilde{S}_{\text{int}} + \frac{1}{c^2}\int j^i(x)\partial_i f(x) d^4x$$

Далее преобразуем подынтегральное выражение:

$$j^i(x)\partial_i f(x) = \partial_i\left(f j^i\right) - f\partial_i j^i$$

Последнее слагаемое обращается в нуль в силу сохранения электрического заряда (уравнение неразрывности):

$$\partial_i j^i \equiv \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \boldsymbol{j} = 0 \tag{4.111}$$

Оставшееся слагаемое при интегрировании преобразуется по теореме Остроградского - Гаусса в интеграл по трехмерной гиперповерхности, ограничивающей объем интегрирования:

$$\int \partial_i\left(f j^i\right) d^4x = \oint f j^i d^3\Sigma_i$$

Но поскольку поле на указанной гиперповерхности фиксировано, то вариация от последнего интеграла равна нулю. Таким образом, вариация δS_{int} калибровочно инвариантна: $\delta S_{\text{int}} = \delta\widetilde{S}_{\text{int}}$.

Пример 4.19. Вывести уравнения Максвелла в четырехмерной форме путем варьирования действия (4.105).

Решение. Уравнение $\delta S = 0$ принимает вид

$$\delta\int\left(-\frac{1}{16\pi c}F^{ik}F_{ik} - \frac{1}{c^2}j^i A_i\right) d^4x = 0 \tag{1}$$

где варьируется 4-потенциал, а j^i следует рассматривать как заданный источник поля. Имеем:

$$\delta\left(F^{ik}F_{ik}\right) = 2F^{ik}\delta F_{ik} = 2F^{ik}\delta\left(\partial_i A_k - \partial_k A_i\right) = -4F^{ik}\partial_k\delta A_i$$

Далее преобразуем последнее выражение:

$$F^{ik}\partial_k\delta A_i = \partial_k\left(F^{ik}\delta A_i\right) - \left(\partial_k F^{ik}\right)\delta A_i$$

При интегрировании по 4-объему первого слагаемого в правой части получим с помощью теоремы Остроградского-Гаусса

$$\int\limits_\Omega \partial_k\left(F^{ik}\delta A_i\right) d^4x = \oint\limits_\Sigma F^{ik}\delta A_i d^3\Sigma_k = 0$$

так как $\delta A_i = 0$ на ограничивающей 4-объем гиперповерхности Σ. В итоге (1) принимает вид

$$\int\limits_\Omega\left(-\frac{1}{16\pi c}\partial_k F^{ik} - \frac{1}{c^2}j^i\right)\delta A_i d^4x = 0$$

откуда ввиду произвольности δA_i и области интегрирования следует уравнение Максвелла в 4-форме

$$\partial_k F^{ik} = -\frac{4\pi}{c}j^i \tag{4.112}$$

Второе уравнение Максвелла запишем через дуальный тензор поля: согласно (4.30), $\widetilde{F}^{ik} = (1/2)e^{iklm}F_{lm} = e^{iklm}\partial_l A_m$, откуда $\partial_i \widetilde{F}^{ik} = e^{iklm}\partial_i\partial_l A_m = 0$. Последнее равенство и дает второе уравнение Максвелла:

$$\partial_i \widetilde{F}^{ik} = 0 \tag{4.113}$$

С помощью (4.36) его можно записать через исходный тензор поля:

$$\partial_l F_{ik} + \partial_i F_{kl} + \partial_k F_{li} = 0 \tag{4.114}$$

Задача

4.127*. Получить уравнения Максвелла в трехмерной форме из равенств (4.112) и (4.114).

Теорема Нетер и интегралы движения. Уже упоминавшиеся выше свойства симметрии классических и квантовых полей, которые выражаются в инвариантности действия относительно некоторых преобразований четырехмерных координат x^k и полевых функций $q^A(x)$, приводят к сохранению ряда динамических величин, характеризующих поле. Нахождение интегралов движения играет в теории поля не менее важную роль, чем в классической механике. Связь между законами сохранения и свойствами симметрии поля устанавливает теорема Э. Нетер, рассмотренная в следующем примере.

Пример 4.20. Пусть действие для некоторого поля инвариантно относительно бесконечно малого преобразования 4-координат и полевых фуикиий вида [12]

$$\begin{gathered} x'^k = x^k + \delta x^k, \quad \delta x^k = \Gamma^k_a \delta\lambda^a; \quad q'^A(x') = q^A(x) + \delta^* q^A(x) \\ \delta^* q^A(x) = G^A_{Ba} q^B(x)\delta\lambda^a. \end{gathered} \tag{4.115}$$

Здесь $\lambda^a (a = 1, 2, \ldots, n)$ - не зависящие от координат и взаимно независимые параметры преобразования; тождественному преобразованию отвечают значения $\lambda^a = 0; \delta\lambda^a$ - их малье приращения; $\delta q^A(x) = \delta^* q^A(x)$ - $-q^A_{,l}\delta x^l$ - вариация вида функиии при неизменном аргументе, аналогичная той, которая использовалась в примере 4.16, и отличающаяся от полной вариации $\delta^* q^A(x)$, определенной выше и включающей в себя и изменение аргумента; все вариации линейны по $\delta\lambda^a$.

Показать, что при указанных условиях можно построить п 4-компонентных величин $J^k_a (a = 1, 2, , \ldots, n)$ - обобщенных токов [13], или токов

Нетер [14] - удовлетворяюших уравнениям непрерывности

$$\partial_k J^k_a = 0 \tag{4.116}$$

Какие сохраняющиеся величины связаны с обобщенными токами?

Решение. Естественный путь решения поставленной задачи - приравнять нулю вариацию действия, обусловленную рассматриваемым преобразованием (4.115), и из полученного равенства, которое должно линейно зависеть от параметров $\delta\lambda^a$, извлечь требуемые уравнения непрерывности (4.116). Начнем с вычисления вариации действия $\delta^* S$, обозначая ее звездочкой, поскольку преобразование (4.115) затрагивает не только изменение формы полевых функций q^a, но и преобразование координат:

[412] Преобразования (4.115), не обязательно бесконечно малые, образуют группу Ли - см, например, [Боголюбов и Ширков (1980)].

[13] Индекс k является векторным значком. Смысл индекса a зависит от выбора параметров преобразования λ^a. Если λ^a - скалярный параметр, то J^k_a – 4-вектор. Если a - векторный значок, то ток Нетер - тензор II ранта. Если включает в себя два векторных значка, то ток Нетер - тензор III ранга и т. д.

$$\delta^* S = \int\limits_{\Omega'} \mathscr{L}\left(q'^A\left(x'\right), \frac{\partial q'^A\left(x'\right)}{\partial x'^k}, x'^l\right) \mathrm{d}^4 x' - \int\limits_{\Omega} \mathscr{L}\left(q^A(x), q^A_{,k}, x^l\right) \mathrm{d}^4 x \tag{4.117}$$

Перейдем в первом интеграле к переменным x. С помощью (4.115) находим

$$\mathrm{d}^4 x' = \left|\frac{\partial x'^k}{\partial x^l}\right| = \left|\delta^k_l + \frac{\partial \delta x^k}{\partial x^l}\right| \mathrm{d}^4 x \approx \left(1 + \frac{\partial \delta x^l}{\partial x^l}\right) \mathrm{d}^4 x$$

где использован якобиан преобразования от штрихованных координат к нештрихованным, а последнее приближенное равенство записано с точностью до членов первого порядка по δx. Далее,

$$\frac{\partial q'^A\left(x'\right)}{\partial x'^k} = \frac{\partial x^l}{\partial x'^k} \frac{\partial}{\partial x^l}\left[q^A(x) + \delta q^A(x) + \frac{\partial q^A(x)}{\partial x^j} \delta x^j\right]$$

Опять с точностью до линейных членов находим

$$\frac{\partial x^l}{\partial x'^k} \approx \frac{\partial}{\partial x'^k}\left(x'^l - \delta x^l\left(x'\right)\right) \approx \delta^l_k - \frac{\partial \delta x^l(x)}{\partial x^k}$$

и окончательно получаем

$$\frac{\partial q'^A\left(x'\right)}{\partial x'^k} = q^A_{,k} + \delta q^A_{,k} + q^A_{,k,j} \delta x^j$$

Используя полученные формулы, приводим (4.117) к виду

$$\delta^* S = \int\limits_{\Omega} \left\{\mathscr{L}\left(q^A + \delta q^A + q^A_{,j} \delta x^j \ , q^A_{,k} + \delta q^A_{,k} + q^A_{,k,j} \delta x^j, x^l + \delta x^l\right) \times \right.$$
$$\left. \times \left(1 + \frac{\partial \delta x^n}{\partial x^n}\right) - \mathscr{L}\left(q^A, q^A_{,k}, x^l\right)\right\} \mathrm{d}^4 x$$

и после устранения членов выше первого порядка малости получаем

$$\delta^* S = \int\limits_{\Omega} \left\{\mathscr{L} \frac{\partial \delta x^l}{\partial x^l} + \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial x^l} + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q^A} q^A_{,l} + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q^A_{,k}} q^A_{,k,l}\right) \delta x^l\right\} \mathrm{d}^4 x +$$
$$+ \int\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q^A} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^k} \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q^A_{,k}}\right) \delta q^A \ \mathrm{d}^4 x + \int\limits_{\Omega} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^k}\left(\partial \mathscr{L} q^A_{,k} \delta q^A\right) \mathrm{d}^4 x.$$

Здесь производится суммирование по повторяющимся индексам A, l, k.
Первый интеграл сворачивается в простое выражение

$$\int\limits_{\Omega} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^k}\left(\mathscr{L} \delta x^k\right) \mathrm{d}^4 x$$

а второй равен нулю ввиду выполнения уравнений Лагранжа (4.95). В оставшиеся члены подставляем величины $\delta q^A = G^a_{Ba} q^B \delta\lambda^a - q^A_{,k} \delta x^k, \delta x^k = \Gamma^k{}_a \delta\lambda^a$ и приравниваем вариацию действия нулю:

[414] Нетер Амали Эмми (1882-1935) - немецкий математик, автор фундаментальных работ по теоретической физике, устанавливающих связь законов сохранения со свойствами симметриии физической системы.

$$\delta^* S = \delta\lambda^a \int\limits_\Omega \mathrm{d}^4 x \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^k} \left\{ \left(\mathscr{L}\delta_l^k - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q^A_{,k}} q^A_{,l} \right) \Gamma^l{}_a + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q^A_{,k}} G^A_{Ba} q^B \right\} = 0 \tag{4.118}$$

Параметры преобразования $\delta\lambda^a$ не зависят от координат и поэтому вынесены за знак интеграла.

Ввиду линейной независимости величин $\delta\lambda^a$ и произвольности области интегрирования Ω из (4.118) следует n равенств (4.116), где

$$J_a^k = -\left(\mathscr{L}\delta_l^k - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q^A_{,k}} q^A_{,l} \right) \Gamma^l{}_a - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q^A_{,k}} G^A_{Ba} q^B \tag{4.119}$$

- обобщенные токи (токи Нетер).

Равенства нулю четырехмерных дивергенций выражают собой в дифференциальной форме законы сохранения физических величин, связанных с обобщенными токами:

$$\frac{1}{c}\frac{\partial J_a^0}{\partial t} + \operatorname{div} J_a = 0 \tag{4.120}$$

Здесь $J_a^0/$ можно рассматривать как трехмерную плотность некоторой величины, а J_a - как плотность ее потока. Пользуясь трехмерной теоремой Остроградского - Гаусса и считая все величины достаточно быстро убывающими в любом пространственно-подобном направлении (т. е. при удалении от начала координат вдоль пространственных осей), находим обычным образом интегральные законы сохранения:

$$Q_a\left(x^0\right) = \int J_a^0\left(x^0, x^1, x^2, x^3\right) d^3x = \text{ const} \tag{4.121}$$

где интегрирование производится по всему бесконечному трехмерному пространству.

Токи Нетер определяются использованным выше способом неоднозначно, так как в фигурные скобки равенства (4.118) можно добавить произвольный вектор (по индексу k) j_a^k с равной нулю дивергенцией, зависящий от тех же величин, что и лагранжиан. Указанный вектор можно выразить через произвольный антисимметричный тензор второго ранга:

$$j_a^k = f_{a,l}^{lk}, \quad f_a^{lk} = -f_a^{kl} \tag{4.122}$$

поскольку

$$j^k_{a,k} = \frac{\partial^2}{\partial x^k \partial x^l} f_a^{lk} \equiv 0$$

Но эта неоднозначность не сказывается на значениях интегральных величин Q_a, так как добавка к интегралу в правой части (4.121) имеет вид $\int f_a^{\mu 0}{}_{,\mu} d^3x$. Этот интеграл по бесконечному трехмерному объему от трехмерной дивергенции преобразуется по теореме Остроградского- Гаусса в интеграл по бесконечно удаленной поверхности и обращается в нуль ввиду отсутствия поля на бесконечности. Плотность же распределения величины Q_a в пространстве и ее трехмерный ток остаются неоднозначными, и для доопределения этих дифференциальных величин требуются дополнительные соображения (см. примеры и задачи далее в этой главе).

Задачи

4.128. Лагранжиан (4.100) квантовомеханической частицы инвариантен относительно изменения фазы волновой функции на постоянную величину, т. е. преобразования $\psi'(x,t) = \psi(x,t)\exp(i\alpha), \alpha = \text{const}$ (координаты и время не преобразуются). Построить обобщенный нетеровский ток, связанный с этим преобразованием, и выяснить, сохранение какой величины связано с инвариантностью относительно фазового преобразования.

4.129. Сделать то же самое для релятивистского лаграшжиана (4.102). Можно ли для обобщенного тока сохранить в релятивистском случае ту же интерпретацию, что и в нерелятивистской квантовой механике?

4.130. Сделать то же самое для лагранжиана, построенного в задаче (4.124) (нерелятивистская заряженная частица во внешнем электромагнитном поле)

4.131 *. Какое преобразование нужно произвести над волновой функцией ψ предыдущей задачи, чтобы при калибровочном преобразовании потенциалов

$$\boldsymbol{A} = \tilde{\boldsymbol{A}} - \nabla f(\boldsymbol{r},t), \quad \varphi = \widetilde{\varphi} + \frac{1}{c}\frac{\partial f(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}$$

не изменились плотность и ток вероятности, а также лагранжиан заряженной частицы (последний был построен в задаче 4.124).

4.132$^\wedge$. Действительное векторное поле $V^k(x)$ взаимодействует со скалярным комплексным полем $\chi(x) = 2^{-1/2}(\chi_1(x) + i\chi_2(x))$. Лагранжиан, описывающий взаимодействующие поля, имеет вид

$$\begin{aligned}\mathscr{L} = &-\frac{1}{4}\left(\partial_k V_i - \partial_i V_k\right)\left(\partial^k V^i - \partial^i V^k\right) + \\ &+ \left[\left(\partial_k + igV_k\right)\chi^*\right]\left[\left(\partial^k - igV^k\right)\chi\right] + \mu^2\chi^*\chi - \lambda\left(\chi^*\chi\right)^2\end{aligned} \tag{1}$$

где g - константа взаимодействия.

1. Показать, что в отсутствие взаимодействия ($g = 0$) кванты поля V^k имеют нулевую массу, а кванты поля χ - массу, найденную в задаче 4.126.
2. При включении взаимодействия кванты векторного поля V^k приобретают массу $m_v = g\mu/\sqrt{\lambda}$ (хиггсовский механизм возникновения массы у векторных частиц).

У казаниЕ. Для облегчения расчетов сначала произвести фазовое преобразование над полем $\chi \to 2^{-1/2}(\varphi_0 + \eta(x))\exp(i\zeta(x)/\varphi_0)$ и калибровочное преобразование над полем $V^k \to A^k(x) - (1/g\varphi_0)\,\partial^k\zeta(x)$, где $\zeta(x), \varphi_0, \eta(x)$ - действительные величины.

4.133**. Бесконечно малый сдвиг системы отсчета на вектор δa^k описывается преобразованием 4-координат и полевых функций

$$x'^k = x^k + \delta a^k, \quad q'^A(x') = q'^A(x + \delta a) = q^A(x) \tag{4.123}$$

Показать, что обобщенный нетеровский ток представляет собой тензор II ранга (канонический тензор энергии-импульса) и имеет вид

$$J_l^k = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial q^A_{,k}} q^A_{,l} - \mathscr{L}\delta_l^k \tag{4.124}$$

К сохранению каких величин приводит инвариантность лагранжиана относительно 4-мерного сдвига?

Пример 4.21. На основе теоремы Нетер найти тензор энергии-импульса электромагнитного поля в отсутствие заряженных частиц. Искомый тензор должен обладать следуошими свойствами: а) калибровочной инвариантностью (т.е. выражаться только через компонентьи тензора поля F_{ik}); б) симметрией относительно перестановки тензорных значков [15].

Решение. Согласно (4.92), (4.106), лагранжиан свободного электромагнитного поля имеет вид

$$\mathscr{L}_{em} = -\frac{1}{16\pi} F^{ik} F_{ik}$$

В данном случае полевые функции $q^A = A^i$. Чтобы вычислить частную производную, входящую в (4.124), воспользуемся формулой

$$\delta \mathscr{L}_{em} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial A^i{}_{,k}} \delta A^i{}_{,k} = -\frac{1}{8\pi} F^{ik} \delta \left(A_{k,i} - A_{i,k} \right) = \frac{1}{4\pi} F^{ik} \delta A_{i,k}$$

откуда

$$\frac{\partial \mathscr{L}_{em}}{\partial A^i_{,k}} = \frac{1}{4\pi} F_i^{\,k}$$

Подставляя последнюю величину в (4.124), находим канонический тензор энергии-импульса свободного электромагнитного поля:

$$J^{kl} = \frac{1}{4\pi} F^{ik} A_i{}^l + \frac{1}{16\pi} \left(F^{mn} F_{mn} \right) g^{kl} \tag{4.125}$$

Этот тензор имеет в силу теоремы Нетер равную нулю дивергенцию, $J^{kl}{}_{,k} = 0$, но он несимметричен и неинвариантен относительно калибровочного преобразования 4-потенциала. Чтобы избавить его от этих существенных недостатков, следует добавить к нему подходящий тензор с равной нулю дивергенцией, взятой по индексу k. Такой тензор, как было разьяснено в примере 4.20, сам должен представлять собой дивергенцию от некоторого тензора (в данном случае III ранга), антисимметричного по двум значкам.

Исходя из вида (4.125), естественно выбрать $f^{ikl} = (a/4\pi) F^{\imath k} A^l$, $f^{kil} = -f^{\imath kl}$, с неопределенным пока множителем a. Его дивергенция $f^{ikl}{}_{,i} = (a/4\pi) F^{ik} A^l{}_{,i}$; при этом учтено, что $F^{ik}{}_{,i} = 0$ при $j^k = 0$ в силу уравнения Максвелла (4.112). Заметим, что $f^{ikl}{}_{,i,k} = (a/4\pi) F^{ik} A^l{}_{,i,k} = 0$. Добавляя тензор II ранга $f^{ikl}{}_{,i}$ к каноническому тензору (4.125), находим

$$T^{kl} = J^{kl} + f^{ikl}_{\,,i} = \frac{1}{4\pi} F^{ik} \left(A_i{}^{,l} + a A^l{}_{,i} \right) + \frac{1}{16\pi} \left(F^{mn} F_{mn} \right) g^{kl}$$

При $a = -1$ получаем выраженный только через калибровочно инвариантные компоненты F^{ik} симметричный тензор энергии-импульса

$$T^{kl} = \frac{1}{4\pi} \left(F^{ki} F_i^l + \frac{1}{4} g^{kl} F^{mn} F_{mn} \right) \tag{4.126}$$

След симметричного тензора энергии-импульса электромагнитного поля, как следует из (4.126), обращается в нуль во всех системах отсчета: $T^k{}_k = 0$.

[415] Второе свойство требуется, чтобы связь между плотностью импульса и плотностью момента импульса имела тот же вид, что и связь между импульсом и моментом в классической механике - см. задачу 4.139.

С помощью таблиц (4.68) найдем отдельные компоненты тензора энергии-импульса. Величина

$$T^{00} = w = \frac{1}{8\pi}\left(E^2 + H^2\right) \tag{4.127}$$

представляет собой плотность энергии электромагнитного поля, уже рассмотренную в разделе 2.3. Компоненты $T^{0\alpha}/c = T^{\alpha 0}/c = g^{\alpha}(\alpha = 1, 2, 3)$ образуют плотность импульса электромагнитного поля

$$\boldsymbol{g} = \frac{1}{4\pi c}\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H} \tag{4.128}$$

которая отличается от плотности потока энергии γ (вектора Пойнтинга) множителем $1/c^2$. Уравнение неразрывности для компонент тензора $T^{\alpha k}$ имеет вид $g^{\alpha}_{,t} + T^{\alpha\beta}_{,\beta} = 0$. Записав его в интегральной форме с помощью
трехмерной теоремы Остроградского - Гаусса,

$$-\frac{dG^{\alpha}}{dt} = \oint_S T^{\alpha\beta} dS_{\beta} \tag{4.129}$$

где

$$\boldsymbol{G} = \int\limits_V \boldsymbol{g} d^3x \tag{4.130}$$

- полный импульс поля в объеме V, мы видим, что пространственная часть $T^{\alpha\beta}$ представляет собой плотность потока импульса, а интеграл в (4.129) дает поток α-й компоненты импульса из трехмерного объема V через его поверхность S. Трехмерный тензор

$$\sigma_{\alpha\beta} = \sigma^{\alpha\beta} = -T^{\alpha\beta} = \frac{1}{4\pi}\left(E_{\alpha}E_{\beta} + H_{\alpha}H_{\beta}\right) - \frac{1}{8\pi}\left(E^2 + H^2\right)\delta_{\alpha\beta} \tag{4.131}$$

называется максвелловским тензором натяжений.

Пример 4.22. Построить тензор энергии-импульса системыи, состоящей из электромагнитного поля и взаимодействующих с ним заряженных релятивистских частиц.

Решение. Следует ожидать, что при наличии заряженных частиц дивергенция тензора электромагнитного поля (4.126) (который мы теперь обозначим через T^{ik}_{em}) не обратится в нуль, так как энергия и импульс поля могут изменяться при взаимодействии с частицами. Но полная энергия и импульс замкнутой системы, состоящей из частиц и электромагнитного поля, должны сохраняться. Поэтому величина $T^{ik}_{em,k}$ должна преобразовываться в дивергенцию некоторого другого тензора, относящегося к частицам:

$$T^{ik}_{em,k} = -T^{ik}_{part,k} \tag{4.132}$$

Суммарный тензор $T^{ik} = T^{ik}_{em} + T^{ik}_{part}$ и можно будет рассматривать как полный тензор энергии-импульса замкнутой системы.

Следуя этому плану, вычисляем

$$T^{ik}_{em,k} = \frac{1}{4\pi}\left(F^{il}F_{l,k} + F_l{}^k F^{il}{}_{,k} + (1/2)F_{mn}F^{mn,i}\right)$$

Далее, используя уравнения Максвелла (4.112) и (4.114) соответственно, находим

$$\frac{1}{4\pi}F^{il}F_l{}^k{}_{,,k} = -\frac{1}{c}F^{il}j_l$$
$$F_l{}^kF^{il}{}_{,,k} = -(1/2)F_{kl}F^{kl,i}$$

и получаем

$$T^{ik}_{em,k} = -(1/c)F^{il}j_l$$

Теперь используем выражение для 4-тока в форме (4.110) и уравнение движения частицы (4.53):

$$T^{ik}_{em,k} = -\sum_a e_a \int u^a_k F^{ik}_a \delta^4(x-x_a)\,d\tau_a = -\sum_a cm_a \int \frac{du^i_a}{d\tau_a}\delta^4(x-x_a)\,d\tau_a =$$
$$= -\sum_a cm_a u^i_a \delta(x-x_a)\Big|^{+\infty}_{\tau_a=-\infty} + \sum_a cm_a \int u^i_a \frac{d}{d\tau_a}\delta^4(x-x_a)\,d\tau_a$$

внеинтегральный член обращается в нуль, а производная от дельта-функции преобразуется следуюшим образом:

$$\frac{d}{d\tau_a}\delta^4(x-x_a) = -\frac{dx^k_a}{d\tau_a}\frac{\partial}{\partial x^k}\delta^4(x-x_a) = -u^k_a\frac{\partial}{\partial x^k}\delta^4(x-x_a)$$

Окончательно получаем:

$$\frac{\partial T^{ik}_{em}}{\partial x^k} = -\frac{\partial}{\partial x^k}\sum_a cm_a \int u^i_a u^k_a \delta^4(x-x_a)\,d\tau_a = -\frac{\partial T^{ik}_{part}}{\partial x^k}$$

откуда находим симметричный тензор энергии-импульса частиц:

$$T^{ik}_{part} = \sum_a cm_a \int u^i_a u^k_a \delta^4(x-x_a)\,d\tau_a \tag{4.133}$$

Полученный тензор обладает всеми нужными свойствами: интеграл по трехмерному объему V дает

$$\int\limits_V T^{00}_{part}d^3x = \sum_a cm_a \int u^0_a u^0_a \sqrt{1-v^2_a/c^2}\,\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_a)\,d^3x\,\delta(x^0-ct)\,dt =$$
$$= \sum_V m_a u^0_a u^0_a \sqrt{1-v^2_a/c^2} = \sum_V \mathscr{E}_a$$

- полную энергию частиц в объеме V; интеграл

$$\frac{1}{c}\int\limits_V T^{0\alpha}_{part}d^3x = \frac{1}{c}\int\limits_V T^{\alpha 0}_{part}d^3x = \sum_a p^\alpha_a$$

- полный импульс частиц в том же объеме. Трехмерный тензор

$$T^{\alpha\beta}_{\text{part}} = \sum_a p^\alpha_a v^\beta_a \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_a(t)) \tag{4.134}$$

представляет собой плотность потока импульса частиц.

Задачи

4.134. Привести тензор энергии-импульса электромагнитного поля к диагональному виду. Найти все системы отсчета, в которых тензор имеет диагональную форму. В каком случае диагонализация тензора невозможна?

4.135. Построить тензор энергии-импульса для лагранжиана (4.100), соответствующего нерелятивистскому уравнению Шредингера. Дать квантовомеханическое истолкование интегралам по трехмерному объему от отдельных компонент тензора энергии-импульса.

УКазанИЕ. Чтобы можно было в этой задаче использовать общую формулу (4.124), нужно включить в лагранжиан энергию покоя частицы.

4.136. Пусть в некоторой инерциальной системе отсчета S известен тензор T^{ik} энергии-импульса поля. Наблюдатель движется относительно S с 4 -скоростью u_i. Какие плотности энергии и импульса (в расчете на единицу трехмерного объема) измерит наблюддатель в своей системе отсчета?

4.137. Показать, что поток тензора натяжений Максвелла через поверхность некоторого трехмерного объема в статическом случае равен полной электромагнитной силе, приложенной к частицам, находящимся в этом объеме (если частицы не пересекают его границ). Какая величина добавляется к этому балансу в переменном поле?

4.138. На основе общих результатов, полученных в примере 4.20, выразить через лагранжиан и его производные обобщенный нетеровский ток, соответствующий бесконечно малому собственному преобразованию Лоренца (см. задачу 4.20). Проанализировать частный случай, когда преобразование сводится только к повороту пространственных осей. На примерах лагранжиана (4.100) для бесспиновой нерелятивистской частицы и аналогичного лагранжиана для нерелятивистской частицы со спином 1/2 выделить в нетеровском токе слагаемые, относящиеся к орбитальному моменту импульса, и те, которые относятся к спиновому моменту. Записать средние квантовомеханические значения этих величин в форме, принятой в квантовой механике.

4.139*. Пользуясь теоремой Нетер, построить 4-тензор плотности момента импульса для электромагнитного поля в отсутствие частиц. Для этого рассмотреть бесконечно малое собственное преобразование Лоренца, включающее в себя как чисто пространственные повороты, так и лоренцевские псевдоповороты (см. задачу 4.20). Путем добавления к тензору момента некоторой дивергенции привести его к такому виду, чтобы связь между плотностью импульса и плотностью момента импульса имела тот же вид, что связь между импульсом и моментом системы частиц: $\boldsymbol{M} = \sum\limits_a \boldsymbol{r}_a \times \boldsymbol{p}_a$.

4.140^. Построить тензор плотности момента M_{kij} для замкнутой системы, состоящей из частиц и электромагнитного поля. Выяснить смысл пространственных $M_{\alpha\beta}$ и смешанных $M_{0\alpha}$ компонент тензора полного момента импульса системы.

4.141*. Пользуясь теоремой Нетер, найти интегралы движения нерелятивистской заряженной частицы в однородном магнитном поле $\boldsymbol{H}$. Показать, что полный момент импульса складывается из момента импульса $m[\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}]$ самой частицы и момента импульса $\int \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{g} d^3x$ электромагнитного поля. Его электрическая составляющая - это кулоновское поле частицы, магнитная составляющая - внешнее магнитное поле $\boldsymbol{H}$.

4.142. Электромагнитное поле отлично от нуля лишь внутри некоторого конечного пространственного объема V, в котором отсутствуют заряды. Показать, что полные энергия и импульс поля образуют 4 -вектор.

4.143*. Система состоит из частиц и электромагнитного поля и занимает конечный обьем. Из рассмотрения баланса полного момента импульса M_{ik} этой системы найти выражение для плотности потока $\mathscr{R}$ момента импульса поля. Воспользоваться результатами задачи 4.140.

C.3.4 4.4. Answers and Solutions

4.4. $S_{ik} = S_{ki}, A_{ik} = -A_{ki}, S_i{}^k = S^k{}_i \neq S_k{}^i, A_i{}^k = -A^k{}_i \neq -A_k{}^i$.
4.5. $T_i{}^k = (1/4)T_l^l\delta_i^k + \left(T_i^k - (1/4)T_l^l\delta_i^k\right)$.
4.6. $S^{ikl} = T^{ikl} + T^{kli} + T^{lik} + T^{kil} + T^{ilk} + T^{lki}$;
$A^{ikl} = T^{ikl} + T^{kli} + T^{lik} - T^{kil} - T^{ilk} - T^{lki}$.
4.9. $B_m = +(1/6)e_{mikl}\widetilde{B}^{ikl}, A_{lm} = -(1/2)e_{lmik}\widetilde{A}^{ik}, J_{klm} = e_{iklm}\widetilde{J}^i$. Поскольку e_{iklm} - псевдотензор, то $\widetilde{B}_{ikl}, \widetilde{A}^{ik}$ и $\widetilde{J}^i$ также псевдотензоры, если B_m, A_{lm} и J_{klm} - истинные тензоры.
4.10. Вектор C_l, лежащий в плоскости (A_i, B_k), можно представить как линейную суперпозицию векторов A_i и B_k:

$$C_l = SA_l + PB_l$$

где S и P - некоторые инварианты. Дуальный тензор согласно (4.30) имеет вид

$$\widetilde{C}^{ik} = (1/2)e^{iklm}\left(A_lB_m - A_mB_l\right) = e^{iklm}A_lB_m$$

Ортогональность вектора C_l и тензора $\widetilde{C}^{ik}$ означает обращение в нуль их скалярного произведения $C_l\widetilde{C}^{lk} = 0$, что фактически имеет место в силу антисимметрии псевдотензора e^{iklm} по любой паре значков.
4.11. В трехмерном пространстве объем, построенный на трех векторах $d\boldsymbol{r}, d\boldsymbol{r}', d\boldsymbol{r}''$, можно записать в виде определителя (см. задачу 1.14)

$$dV = \begin{vmatrix} dx_1 & dx_2 & dx_3 \\ dx_1' & dx_2' & dx_3' \\ dx_1'' & dx_2'' & dx_3'' \end{vmatrix}$$

Он не имеет направления (является псевдоскаляром), но может быть положительным или отрицательным. По аналогии трехмерный объем в 4 -пространстве можно выразить в виде определителя, который представляет собой, однако, антисимметричный 4-тензор III ранга:

$$V_{ikl} = \begin{vmatrix} A_i & A_k & A_l \\ B_i & B_k & B_l \\ C_i & C_k & C_l \end{vmatrix}$$

Имеется 4 существенно различных компоненты такого тензора (с индексами $123, 120, 103, 023$), которые можно трактовать как компоненты дуального псевдовектора

$$\widetilde{V}_i = (1/6)e^{iklm}V_{klm} = e^{iklm}A_kB_lC_m$$

Наличие направления у трехмерного гиперобъема означает возможность различной ориентации любого элемента трехмерной гиперповерхности в четырехмерном пространстве (вспомним, что элемент двумерной поверхности в трехмерном пространстве также может иметь различную ориентацию). В частности, компонента $\widetilde{V}^0$ изображает обычный трехмерный объем, построенный на трехмерных векторах $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ и взятый с тем
или другим знаком (в зависимости от того, правую или левую тройку векторов образуют векторы $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$). В зависимости от знака он может быть направлен вдоль оси Ox^0 (в будущее) или против нее (в прошлое). Аналогичный смысл имеют другие компоненты $\widetilde{V}^i$.

Любой вектор G_l, принадлежащий трехмерной гиперповерхности, может быть разложен по 4-векторам, на которых она построена:

$$G_l = SA_l + PB_l + QC_l$$

где S, P, Q - инварианты. Векторы G_l и $\widetilde{V}^i$ взаимно ортогональны, так как $G_l\widetilde{V}^l = 0$.
4.12. На трехмерный тензор II ранга $T^{\mu\nu}, (\mu, \nu = 1, 2, 3)$, два трехмерных вектора $T^{0\mu}$ и $T^{\mu 0}$ и трехмерный скаляр T^{00}.
4.13. Любой антисимметричный 4 -тензор II ранга включает в себя трехмерный полярный вектор p и трехмерный аксиальный вектор a:

$$A_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & p_x & p_y & p_z \\ -p_x & 0 & -a_z & a_y \\ -p_y & a_z & 0 & -a_x \\ -p_z & -a_y & a_x & 0 \end{pmatrix}$$

Но обратное утверждение неверно: далеко не любая совокупность трехмерных вектора и псевдовектора образует 4-тензор II ранга.

4.16.

$$\Lambda^i{}_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & & \widehat{g} & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

где матрица трехмерного поворота $\widehat{g}\,(\alpha_1\theta\alpha_2)$ определена в ответе задачи 1.20 .
4.18. Искомую матрицу, $x^i = \Lambda^i{}_k x'^k$, можно представить в виде произведения

$$\widehat{\Lambda} = \widehat{\Lambda}(\Theta, \Phi)\widehat{\Lambda}(V)\widehat{\Lambda}^{-1}(\Theta, \Phi)$$

где $\widehat{\Lambda}(\Theta, \Phi)$ - матрица пространственного поворота, переводящего ось Ox^3 в новое положение Ox'^3, которое определяется сферическими углами Θ, Φ в старой системе; $\Lambda(V)$ - буст вдоль новой оси Ox'^3. Произведя поворот
по часовой стрелке на угол Φ вокруг оси Ox^3 и на угол Θ вокруг новой оси Ox'^2, находим

$$\widehat{\Lambda}(\Theta, \Phi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & \cos\Theta\cos\Phi & -\sin\Phi & \sin\Theta\cos\Phi \\ 0 & \cos\Theta\sin\Phi & \cos\Phi & \sin\Theta\sin\Phi \\ 0 & -\sin\Theta & 0 & \cos\Theta \end{pmatrix}$$

Матрица буста вдоль оси Ox'^3 получается из (4.2) перестановкой строк и столбцов с номерами 1 и 3:

$$\widehat{\Lambda}(V) = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\psi & 0 & 0 & \operatorname{sh}\psi \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \operatorname{sh}\psi & 0 & 0 & \operatorname{ch}\psi \end{pmatrix}$$

Матрица $\widehat{\Lambda}^{-1}(\Theta, \Phi)$ получается транспонированием $\widehat{\Lambda}(\Theta, \Phi)$. После перемножения матриц (что требует некоторой аккуратности) получим

$$\widehat{\Lambda}(V, \Theta, \Phi) = \\ = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\psi & \operatorname{sh}\psi n_x & \operatorname{sh}\psi n_y & \operatorname{sh}\psi n_z \\ \operatorname{sh}\psi n_x & 1 + (\operatorname{ch}\psi - 1)n_x^2 & (\operatorname{ch}\psi - 1)n_x n_y & (\operatorname{ch}\psi - 1)n_x n_z \\ \operatorname{sh}\psi n_y & (\operatorname{ch}\psi - 1)n_y n_x & 1 + (\operatorname{ch}\psi - 1)n_y^2 & (\operatorname{ch}\psi - 1)n_y n_z \\ \operatorname{sh}\psi n_z & (\operatorname{ch}\psi - 1)n_z n_x & (\operatorname{ch}\psi - 1)n_z n_y & 1 + (\operatorname{ch}\psi - 1)n_z^2 \end{pmatrix}$$

где $n_x = \sin\Theta\cos\Phi, n_y = \sin\Theta\sin\Phi, n_z = \cos\Theta$ - проекции орта V/V на пространственные оси исходной системы координат.

4.19. Запишем преобразование (4.7) для дифференциалов 4-координат:

$$dx^0 = \Lambda^0{}_0 dx'^0 + \Lambda^0{}_\beta dx^{\beta\beta}, \quad dx^\alpha = \Lambda^\alpha{}_0 dx'^0 + \Lambda^\alpha{}_\beta dx'^\beta \tag{1}$$

Применим эти преобразования к началу отсчета O' пространственных координат системы S'. При этом $dx'^\beta = 0$, а $dx^\alpha/dx^0 = V^\alpha/c$ - скорость системы S' относительно S. Из (1) получаем

$$\Lambda^\alpha{}_0 = \Lambda^0{}_0 (V/c) n^\alpha \tag{2}$$

где n^α - проекции орта скорости на пространственные оси. Из равенства (4.16), пользуясь тем, что $n^1 n^1 + n^2 n^2 + n^3 n^3 = 1$, находим

$$\Lambda^0_0 = \left(1 - V^2/c^2\right)^{-1/2} = \operatorname{ch}\psi \quad \text{и} \quad \Lambda^\alpha{}_0 = n^\alpha (V/c) \operatorname{ch}\psi \tag{3}$$

Далее используем (4.10). Положив $m = 0, l = \alpha = 1, 2, 3$, и учитывая (3), имеем

$$\Lambda^0_\alpha = \frac{V}{c}\left(n^1\Lambda^1_\alpha + n^2\Lambda^2_\alpha + n^3\Lambda^3_\alpha\right) \tag{4}$$

Для нахождения величин $\Lambda^\mu{}_\alpha$ примем во внимание, что эта матрица может зависеть только от компонент вектора $V = Vn$. Поэтому ее общий вид

$$\Lambda^\mu{}_\alpha = A\delta^\mu_\alpha + Bn^\mu n_\alpha \tag{5}$$

где A и B могут зависеть только от абсолютной величины V. Из (4) получаем

$$\Lambda^0{}_\alpha = \frac{V}{c}(A + B) n_\alpha \tag{6}$$

Положив в (4.10) $m = \alpha, l = \beta$ и подставив в него (5) и (6), приходим к равенству

$$\left(V^2/c^2\right)(A+B)^2 n_\alpha n_\beta - A^2\delta_{\alpha\beta} - \left(2AB + B^2\right) n_\alpha n_\beta = -\delta_{\alpha\beta} \tag{7}$$

В этом равенстве имеются слагаемые с тензором $\delta_{\alpha\beta}$, инвариантные относительно поворотов, и слагаемые с тензором $n_\alpha n_\beta$, которые можно обратить в нуль поворотом системы координат. Слагаемые обоих типов должны компенсировать друг друга по отдельности, что позволяет найти $A = 1$ и $B = \operatorname{ch}\psi - 1$ (знаки выбраны так, чтобы преобразование Лоренца было собственным). Легко видеть, что элементы матрицы преобразования (3), $\Lambda^0{}_\alpha = n_\alpha (V/c)\operatorname{ch}\psi$ и $\Lambda^\mu{}_\alpha = \delta^\mu_\alpha + (\operatorname{ch}\psi - 1) n^\mu n_\alpha$, совпадают с теми, которые получены в предыдущей задаче.

4.20. Инвариантность интервала приводит к условию $g_{il}\delta\Omega^l{}_k + g_{kl}\delta\Omega^l{}_i = 0$ или, используя правило опускания индекса,

$$\delta\Omega_{ik} = -\delta\Omega_{ki} \tag{4.135}$$

(антисимметрия). Это свойство сохраняется и при подъеме одного из значков: $\delta\Omega^i{}_k = -\delta\Omega_k{}^i$. Таким образом, имеется всего 6 независимых параметров преобразования, соответствующих комбинациям значков $i, k = 0, 1;\ 0,2;\ 0, 3;\ 1, 2;\ 1, 3;\ 2, 3$.

Величины $\delta\Omega^\alpha{}_0 = \delta\Omega^0{}_\alpha = V^\alpha/c$ - малые углы псевдоповоротов в плоскостях $(0, \alpha)$. Величины $\delta\Omega^\alpha{}_\beta = \varphi_{\beta\to\alpha}$ - малые углы обычных поворотов в плоскостях (β, α) от оси β к α.

4.21. $A^i_{,i} = \partial_i A^i = \text{inv}$ - скаляр, 4-дивергенция; $\partial_k A^i$ - ковариантный тензор II ранга; $\partial_i T^i{}_k$ - ковариантный вектор.

4.22. Инвариантность оператора Даламбера становится очевидной из записи его в тензорных обозначениях:

$$\Box = -g^{ik}\frac{\partial}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^k} \tag{4.136}$$

4.23. По аналогии с компонентами 3-ротора $\frac{\partial A_\alpha}{\partial x_\beta} - \frac{\partial A_\beta}{\partial x_\alpha}$ четырехмерный ротор следует определить как антисимметричный 4 -тензор

$$\begin{aligned} F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \equiv \\ \equiv A_{k,i} - A_{i,k} \end{aligned} \tag{4.137}$$

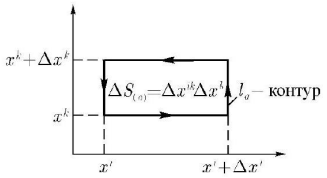


Рис. 4.5

Он имеет 6 существенно различных компонент и не может быть сведен к 4 -вектору. Но ему можно, согласно (4.39), сопоставить дуальный антисимметричный тензор II ранга

$$\widetilde{F}_{ik} = (1/2)e^{iklm}F_{lm} \tag{4.138}$$

4.24. Выделим малый элемент двумерной гиперповерхности, который можно считать плоским, в форме прямоугольника и введем локальную систему координат, оси которой i и k параллельны сторонам прямоугольника (рис. 4.5). Рассмотрим интеграл по замкнутой границе прямоугольника:

$$\begin{aligned} \oint_{(l_a)} A_j dl^j = \int_0^{\Delta x^k} \left[A_k\left(x^i+\Delta x^i, x^k+\eta\right) - A_k\left(x^i, x^k+\eta\right)\right] d\eta + \\ + \int_0^{\Delta x^i} \left[A_i\left(x^i+\xi, x^k\right) - A_i\left(x^i+\xi, x^k+\Delta x^k\right)\right] d\xi \approx \\ \approx \frac{\partial A_k}{\partial x^i}\Delta x^i \Delta x^k - \frac{\partial A_i}{\partial x^k}\Delta x^i \Delta x^k = \left(\frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k}\right)\Delta S^{ik}_{(a)} \end{aligned}$$

Мы воспользовались малостью прямоугольника и учли только члены низшего порядка.

Левая часть равенства представляет собой инвариант, не зависящий от системы координат; таким же инвариантом должна быть и правая часть, а ΔS^{ik} представляет собой, следовательно, контравариантный тензор II ранга, изображающий направленный элемент двумерной гиперповерхности. Далее следует разделить всю рассматриваемую гиперповерхность на прямоугольники, которые одновременно будут элементами касательных плоскостей в соответствующих точках гиперповерхности, и для каждого из них записать полученное выше соотношение. Просуммируем правую и левую части приближенного равенства по всей гиперповерхности, ограниченной контуром l,

$$\sum_a \oint_{(l_a)} A_j dl^j \approx \sum_a \left(\frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k}\right)\Delta S^{ik}_{(a)}$$

устремляя к нулю площади прямоугольников. В правой части получаем интегральную сумму, в пределе изображающую интеграл по всей гиперповерхности. В левой части интегралы по внутренним отрезкам, общим для соседних прямоугольников, входят с разными знаками и взаимно сокращаются. Остается лишь интеграл по внешним границам прямоугольников. В результате получается равенство, приведенное в условии задачи.
4.26.

$$\widetilde{F}_{ik}=\begin{pmatrix} 0 & H_x & H_y & H_z \\ -H_x & 0 & E_z & -E_y \\ -H_y & -E_z & 0 & E_x \\ -H_z & E_y & -E_x & 0 \end{pmatrix}, \widetilde{F}^{ik}=\begin{pmatrix} 0 & -H_x & -H_y & -H_z \\ H_x & 0 & E_z & -E_y \\ H_y & -E_z & 0 & E_x \\ H_z & E_y & -E_x & 0 \end{pmatrix}$$

4.27. $I_1=F_{ik}F^{ik}=-\widetilde{F}_{ik}\widetilde{F}^{ik}=2\left(H^2-E^2\right), I_2=F_{ik}\widetilde{F}^{ik}=-4\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{H}$.
4.28. а) Если в исходной системе $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}=0$, т. е. напряженности параллельны, то это свойство сохранится в любой системе, движущейся вдоль общего направления $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ с произвольной скоростью $V<c$.

Если в исходной системе $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}\neq 0$, то из условия параллельности $\boldsymbol{E}'\times\boldsymbol{H}'=0$ находим систему, обладающую нужными свойствами, которая движется в направлении $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}$:

$$\frac{\boldsymbol{V}}{c}=\frac{E^2+H^2-\sqrt{\left(E^2-H^2\right)^2+4(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{H})^2}}{2(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})^2}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}, \quad \frac{V}{c}<1$$

В любой другой инерциальной системе, движущейся относительно найденной системы вдоль общего направления $\boldsymbol{E}'$ и $\boldsymbol{H}'$, напряженности также параллельны и имеют значения

$$E'^2=(1/2)\left[E^2-H^2+\sqrt{\left(E^2-H^2\right)^2+4(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{H})^2}\right]$$
$$H'^2=(1/2)\left[H^2-E^2+\sqrt{\left(E^2-H^2\right)^2+4(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{H})^2}\right]$$

б) При $\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{H}=0$ и $H^2-E^2>0$ можно обратить в нуль электрическое поле, а при $\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{H}=0$ и $E^2-H^2>0$ - магнитное. Сохраняются в силе формулы п. а), из которых следует

$$\begin{array}{lll} \boldsymbol{V}=c\frac{\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}}{H^2}, & \boldsymbol{H}'=\frac{\boldsymbol{H}}{H}\sqrt{H^2-E^2} & \text{при} \quad H>E \\ \boldsymbol{V}=c\frac{\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}}{E^2}, & \boldsymbol{E}'=\frac{\boldsymbol{E}}{E}\sqrt{E^2-H^2} & \text{при} \quad H<E. \end{array}$$

При $E=H$ искомая система, реализуемая макроскопическими телами, отсутствует, так как $V=c$.
в) В силу инвариантности $\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{H}$ свойство перпендикулярности $\boldsymbol{E}'\cdot\boldsymbol{H}'=0$ должно выполняться во всех инерциальных системах, в том числе и в исходной: $\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{H}=0$. Если же $\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{H}\neq 0$, то и $\boldsymbol{E}'\cdot\boldsymbol{H}'\neq 0$.
г) и д) $E'=H'$ возможно лишь при условии $E=H$.
4.29. При $\kappa<J/$ с в системе отсчета, движущейся со скоростью $V=c^2\kappa/J$ параллельно оси цилиндра в направлении вектора $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}$, электрическое поле $E'=0$, а магнитное поле

$$H'=\frac{2J}{cr}\sqrt{1-\frac{c^2\kappa^2}{J^2}}$$

При $\kappa>J/c$ в системе отсчета, движущейся со скоростью $V=J/\kappa$ параллельно оси цилиндра в направлении $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}$, имеем

$$H'=0, \quad E'=\frac{2\kappa}{r}\sqrt{1-\frac{J^2}{c^2\kappa^2}}$$

При $\kappa = J/c$ не существует такой системы отсчета, в которой имелось бы только электрическое или только магнитное поле. Как видно из приведенных формул, при $\kappa \to J/c$ скорость такой системы отсчета стремилась бы к c, а величины обоих полей - к нулю.
4.30.

$$\partial_i F^{ik} = \frac{4\pi}{c} j^k, \quad \partial_k j^k = 0 \tag{1}$$

$$F_{ik,l} + F_{kl,i} + F_{li,k} = 0 \tag{2}$$

Второе уравнение Максвелла можно записать более компактно через дуальный тензор $\widetilde{F}^{ik} = e^{iklm}\partial_l A_m$:

$$\partial_i \widetilde{F}^{ik} = 0 \tag{3}$$

Из уравнений (1) следует, что совокупность величин $j^k = (c\rho, j)$ образует четырехмерный вектор плотности тока.
4.31. а) В фиксированный момент времени ($dt = 0$) получаем уравнения вида $\boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{r} = 0, d\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{0}$. Из второго уравнения следует, что $d\boldsymbol{r} \| \boldsymbol{H}$, т. е. dr является элементом магнитной силовой линии. Систему (2) можно записать в виде $F_{ik}dx^k = 0$, откуда следует ее релятивистская инвариантность.
б) Условие совместности системы имеет вид $\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{H} = 0$. Оно релятивистски инвариантно и показывает, что релятивистски инвариантные магнитные силовые линии можно ввести только для взаимно перпендикулярных электрического и магнитного полей.
в) Условие интегрируемости системы имеет вид

$$\boldsymbol{H} \times \left(\operatorname{rot} \boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} \right) - \boldsymbol{E} \operatorname{div} \boldsymbol{H} = 0$$

или в ковариантной записи, $F_{ik}e^{klmn}\partial_l F_{mn} = 0$, и всегда удовлетворяется в силу уравнений Максвелла.
г) Записав уравнения (2) в виде ($\boldsymbol{E} \perp \boldsymbol{H}$):

$$d\boldsymbol{r} = \frac{\boldsymbol{H}(\boldsymbol{H} \cdot d\boldsymbol{r})}{H^2} + c\frac{\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}}{H^2} dt$$

убеждаемся в справедливости сделанного в условии задачи утверждения г).
4.32. В трехмерной записи система, приведенная в условии задачи, принимает вид

$$d\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{E} - c\boldsymbol{H}dt = 0, \quad \boldsymbol{H} \cdot d\boldsymbol{r} = 0$$

откуда следует, что в любой фиксированный момент времени ($dt = 0$) выполняется условие параллельности $d\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{E} = 0$ приращения $d\boldsymbol{r}$ и электрического вектора $\boldsymbol{E}$. Уравнения совместны при $\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{H} = 0$ и интегрируемы при

$$\boldsymbol{E} \times \left(\operatorname{rot} \boldsymbol{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \right) + \boldsymbol{H} \operatorname{div} \boldsymbol{E} = 0$$

Последнее уравнение накладывает на распределение зарядов и токов условие

$$\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{j} + c\rho\boldsymbol{H} = 0$$

Если перечисленные условия не выполняются, то инвариантных силовых линий электрического поля ввести не удается. Силовые линии движутся поперек своего направления со скоростью $u = -c\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}/E^2$.

4.34. $\varphi = \frac{e}{R^*}$, $\boldsymbol{A} = \frac{e\boldsymbol{V}}{cR^*}$, $\boldsymbol{E} = \frac{e\boldsymbol{R}}{\gamma^2 R^{*3}} = \frac{e\boldsymbol{R}\left(1-V^2/c^2\right)}{R^3\left(1-\frac{V^2}{c^2}\sin^2\vartheta\right)^{3/2}}$, $\boldsymbol{H} = \frac{\boldsymbol{V}}{c} \times \boldsymbol{E}$, где $R^* = \sqrt{(x-Vt)^2 + (1-\beta^2)(y^2+z^2)}, (Vt,0,0)$ - координаты движущегося заряда в момент $t, \boldsymbol{R} = (x-Vt, y, z)$ - радиус-вектор, соединяющий заряд и точку наблюдения в момент t, ϑ - угол между $\boldsymbol{R}$ и $\boldsymbol{V}$.

Чтобы представить 4-потенциал в ковариантной форме, введем 4-скорость частицы u^k и 4-вектор $R^k = (c(t-t'), \boldsymbol{R}(t'))$, где t' - момент генерации поля частицей, $\boldsymbol{R}(t') - 3$-вектор, соединяющий точку наблюдения с положением заряда в момент t' (рис. 4.6). Не ограничивая общности, полагаем $x = 0.R^k$ - светоподобный вектор, т. е. $R^k R_k = 0$ и $c(t-t') = R(t')$. Из рис. 4.6 видно, что отрезок $S'S$ равен произведению скорости частицы на время запаздывания $vR(t')/c$, следовательно, $S'N = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{R}(t')/c$, а $R(t')\sin\vartheta = r_\perp$. Из прямоугольных треугольников MNS и MSO имеем $(MN)^2 = (MS)^2 - (NS)^2 = r_\perp^2 + (vt)^2 - (vR(t')/c)^2 \sin^2\vartheta =$

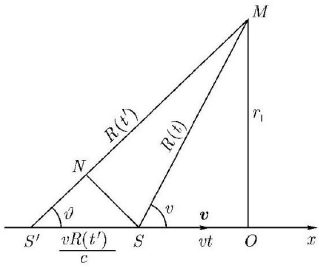


Рис. 4.6 $= \overrightarrow{R^*}2$

С другой стороны, $MN = S'M - S'N = R(t') - \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{R}(t')/c = c(t-t')$ - $-\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{R}(t')/c = \gamma^{-1} R_k u^k$, т. е. $R^* = \gamma^{-1} R_k u^k$. Таким образом, ковариантная
форма записи 4-потенциала

$$A^k = \frac{eu^k}{u^l R_l}$$

4.35. Из формул предыдущей задачи следует, что вдоль линии движения заряда ($\vartheta = 0, \pi$) поле E ослаблено по сравнению с кулоновым $E_C = e/R^2$ в $1 - V^2/c^2$ раз, а в перпендикулярном направлении ($\vartheta = \pi/2$) поле E усилено в $(1 - V^2/c^2)^{-1/2}$ раз. При $V \approx c$ поле велико только в узком интервале углов $\delta\vartheta \approx (1 - V^2/c^2)^{1/2}$ вблизи экваториальной плоскости.

Условие $E_\parallel = E'_\parallel$ относится к одним и тем же точкам 4 -пространства. Но если в системе покоя заряда какая-то точка находится на оси x на расстоянии R от заряда, то в лабораторной системе то же точка будет находиться от него на расстоянии $R\sqrt{1-\beta^2}$. Сравнивая значения $E_\parallel$в точке $R\sqrt{1-\beta^2}$ и $E'_\parallel$ в точке R, получим

$$E_\parallel = \frac{eR\sqrt{1-\beta^2}\,(1-\beta^2)}{\left(R\sqrt{1-\beta^2}\right)^3} = \frac{e}{R^2} = E'_\parallel$$

как и должно быть.

4.36. $\varphi = \frac{\boldsymbol{p}_0 \cdot \boldsymbol{r}_*}{\gamma r_*^3}, \boldsymbol{A} = \frac{\boldsymbol{V}}{c}\varphi, \boldsymbol{E} = \frac{3\boldsymbol{R}(\boldsymbol{p}_0 \cdot \boldsymbol{r}_*) - \boldsymbol{p}_0 r_*^2}{\gamma^2 r_*^5} 4, \boldsymbol{H} = \frac{\boldsymbol{V}}{c} \times \boldsymbol{E}$, где $\boldsymbol{R} = (x - Vt, y, z), \boldsymbol{r}_* = (x - Vt, y/\gamma, z/\gamma)$, диполь движется по оси x, находясь в момент t в точке с радиусом-вектором $\boldsymbol{V}t$.

4.37. По определению

$$\boldsymbol{p} = \int \boldsymbol{r}\rho dV, \quad \boldsymbol{m} = \frac{1}{2c}\int \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{j} dV$$

Величину $\mu^{\alpha\beta} = -\frac{1}{2c}\left(x^\alpha j^\beta - x^\beta j^\alpha\right)$ можно рассматривать как пространственную часть антисимметричного тензора II ранга, а $\mu^{0\beta} = \frac{1}{c} j^0 x^\beta$-как элементы его первой строки (при условии, что $\mu^{00} = 0$). Это следует из того, что $(c\rho, \boldsymbol{j}) = j^k$ образуют 4 -вектор (см. задачу 4.30). Дополняя первый столбец элементами $\mu^{i0} = -\mu^{0i}$, получим антисимметричный 4-тензор «плотности дипольного момента» [16] μ^{ik}.

Совокупность $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{m}$ выразится в виде интеграла $\int \mu^{ik} dV$:

$$p_\alpha = \int \mu^{0\alpha} dV = -\int \mu^{\alpha 0} dV, \quad m_\gamma = -\int \mu^{\alpha\beta} dV$$

(в последнем случае индексы α, β, γ нужно переставлять циклически). Из этих формул следует, что моменты $(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{m})$ преобразуются как произведение антисимметричного 4 -тензора II ранга на объем и не образуют сами по себе какого-либо 4 -тензора. Используя правило (4.70) преобразования антисимметричного тензора и правило (3.13) преобразования объема, находим

$$\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}_0 - (\gamma - 1)\frac{(\boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{p}_0)\,\boldsymbol{V}}{\gamma V^2} + \frac{\boldsymbol{V}}{c} \times \boldsymbol{m}_0$$
$$\boldsymbol{m} = \boldsymbol{m}_0 - (\gamma - 1)\frac{(\boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{m}_0)\,\boldsymbol{V}}{\gamma V^2} - \frac{\boldsymbol{V}}{c} \times \boldsymbol{p}_0$$

4.38. Используя формулы преобразования четырехмерной плотности тока, найдем, что стороны 2 и 4 прямоугольника (рис. 4.7) не заряжены, а стороны 1 и 3 несут заряды $q_1 = -q_3 = -VJ'a/c^2$, где J' - ток в системе S', связанной с петлей. Отсюда (или из результата предыдущей задачи) следует, что электрический дипольный момент петли, наблюдаемый в S', равен $p = q_3 b = Vm'/c$, где $m' = J'ab/c$ - магнитный момент петли, наблюдаемый в системе S'.

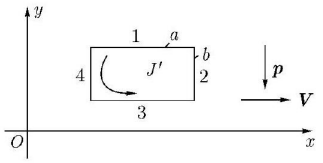


Рис. 4.7

Частные случаи:

$$\frac{m\dot{\boldsymbol{v}}}{(1-v^2/c^2)^{3/2}} = \mathscr{F} \quad \text{при} \quad \boldsymbol{v} \| \mathscr{F}$$
$$\frac{m\dot{\boldsymbol{v}}}{(1-v^2/c^2)^{1/2}} = \mathscr{F} \quad \text{при} \quad \boldsymbol{v} \perp \mathscr{F}$$
$$m\dot{\boldsymbol{v}} = \mathscr{F} \quad \text{при} \quad v \ll c$$

Величины $m\left(1 - v^2/c^2\right)^{-3/2}$ и $m\left(1 - v^2/c^2\right)^{-1/2}$ в старой научной литературе назывались продольной и поперечной массами соответственно. Но
при произвольном угле между силой и скоростью в релятивистском случае невозможно выделить какой-либо множитель в качестве коэффициента пропорциональности между силой и ускорением, которому можно было бы приписать смысл массы. Поэтому термины «релятивистская масса» или «масса, зависящая от скорости» не могут быть корректно определены, и пользоваться ими нещелесообразно. Остается единственная масса m - не зависящая от скорости инвариантная величина.

4.42. $\mathscr{F} = \frac{1}{\gamma}\mathscr{F}' + \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)\frac{(\boldsymbol{v}\cdot\mathscr{F}')\boldsymbol{v}}{v^2}$, $\mathscr{F}' = \gamma\mathscr{F} - (\gamma - 1)\frac{(\boldsymbol{v}\cdot\mathscr{F})\boldsymbol{v}}{v^2}$, где $\gamma = \left(1 - v^2/c^2\right)^{-1/2}$.

[416] Кавычки здесь использованы в связи с тем, что введенная величина может рассматриваться как плотность лишь в чисто формальном смысле - интеграл от нее по объему дает дипольные моменты системы. Для макроскопических тел такая трактовка значительно более оправдана.

4.43. $\mathscr{F} = \gamma^2 \frac{mv^2}{R}$.

4.45. $\psi(r,\alpha) = -\frac{2\kappa\left(1-\beta^2\right)}{\sqrt{(1-\beta^2)\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}} \ln r$,

где $\beta = v/c, r$ - расстояние от точки наблюдения до провода.

4.46. $\mathscr{F} = \frac{2e\kappa}{\gamma r}$.

Решить задачу можно разными способами:

а) непосредственно вычислить электромагнитную силу, действующую на движущийся точечный заряд со стороны линейного заряда и тока (учесть лоренцево сокращение!);

б) определить силу в той системе отсчета, в которой магнитное поле отсутствует, и воспользоваться формулами преобразования 4 -силы;

в) воспользоваться конвекционным потенциалом ψ, полученным в задаче 4.45.

4.47.

$$\mathscr{F} = e\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\frac{2J(r)}{vr}, \quad \text{где } r - \text{ расстояние электрона от оси пучка,}$$

$$J(r) = \frac{2\pi v}{\sqrt{1-\beta^2}}\int\limits_0^r \rho(r) r dr \quad \text{- ток через круг радиуса } r,$$

$$v = \left(1+\frac{eV}{mc^2}\right)^{-1}\left(1+\frac{eV}{2mc^2}\right)\sqrt{\frac{2eV}{m}} \quad \text{- скорость электронов.}$$

На поверхности пучка на электрон действует сила $\mathscr{F} = e\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\frac{2J}{va}$, где a - радиус пучка.

4.48. Ускорение наружного электрона нормально к оси пучка и к скорости электрона, поэтому в лабораторной системе отсчета имеем

$$\dot{v}_n = \frac{\left(1-v^2/c^2\right)^{1/2}}{m}\mathscr{F} = \frac{2eJ\left(1-v^2/c^2\right)^{3/2}}{mav}$$

(можно использовать результаты задач 4.41 и 4.47). Упирение пучка

$$\Delta a = \frac{\dot{v}_n t^2}{2} = \frac{\dot{v}_n L^2}{2v^2}$$

Согласно условию $\Delta a \ll L$, откуда $\dot{v}_n L/v \ll v$ или $\dot{v}_n t \ll v < c$. Таким образом, применение нерелятивистской формулы для вычисления Δa оправдано.

То же значение Δa можно получить, рассматривая уширение пучка в системе отсчета, движущейся вместе с электронами пучка; в этой системе на электроны действует только электрическая сила.

4.49. Интегрируя уравнения движения, записанные в ковариантной форме,

$$\frac{dp_x}{d\tau} = \frac{eE}{mc^2}\mathscr{E}, \quad \frac{dp_y}{d\tau} = 0, \quad \frac{dp_z}{d\tau} = 0, \quad \frac{d\mathscr{E}}{d\tau} = \frac{eE}{m}p_x$$

получим энергию и импульс в функции собственного времени:

$$p_x = (\mathscr{E}_0/c)\operatorname{sh}\kappa E\tau + p_{0x}\operatorname{ch}\kappa E\tau, \quad p_y = p_{0y}, \quad p_z = 0$$
$$\mathscr{E} = \mathscr{E}_0\operatorname{ch}\kappa E\tau + cp_{0x}\operatorname{sh}\kappa E\tau, \quad \kappa = e/mc$$

Повторное интегрирование уравнений $dx/d\tau = p_x/m$ и т. д. позволяет получить 4-координаты в функции собственного времени. В частности,

$$x^0(\tau) = ct = \frac{\mathscr{E}_0}{eE}\,\mathrm{sh}\,\kappa E\tau + \frac{cp_{ox}}{eE}(\mathrm{ch}\,\kappa E\tau - 1)$$

Из последнего уравнения находим

$$\tau(t) = \frac{mc}{eE}\ln\frac{p_{0x} + eEt + \sqrt{(p_{0x}+eEt)^2 + m^2c^2 + p_{0y}^2}}{p_{0x} + \mathscr{E}_0/c}$$

Заметим, что $\tau > 0$ и растет с ростом t независимо от знака заряда, при $e > 0$ и $e < 0$. Подставляя τ, выраженное через t, в формулы для $x(\tau), y(\tau)$ и $\mathscr{E}(\tau)$,
находим

$$x(t) = \frac{c}{eE}\left[\sqrt{(p_{0x}+eEt)^2 + m^2c^2 + p_{0y}^2} - \frac{\mathscr{E}_0}{c}\right]$$

$$y(t) = \frac{cp_{0y}}{eE}\tau(t), \quad z(t) = 0, \quad \mathscr{E}(t) = \sqrt{\mathscr{E}_0^2 - c^2p_{0x}^2 + (cp_{0x} + eEct)^2}$$

При $p_0 \ll mc$ и $t \ll mc/|e|E$ дви-

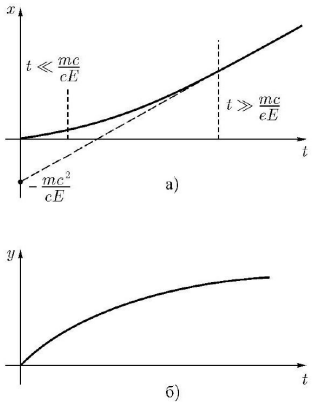


Рис. 4.8 жение нерелятивистское. Выражения для x, y, z переходят при этом в обычные нерелятивистские формулы равноускоренного движения:

$$x(t) = \frac{p_{0x}}{m}t + \frac{eE}{2m}t^2$$
$$y(t) = \frac{p_{0y}}{m}t$$

По истечении достаточно большого времени с начала движения ($t \gg \gg mc/|e|E$) скорость частицы становится близкой к c (даже если она была мала в начале). При этом

$$x(t) = ct - \frac{mc^2}{eE}$$
$$y(t) = \frac{cp_{0y}}{eE}\ln\frac{2|e|Et}{mc}$$

и движение становится равномерным (со скоростью c). Ход $x(t)$ и $y(t)$ представлен на рис. 4.8 а и 4.8 б соответственно. Движение, которое получается при $p_{0y} = 0$ (см. рис. 4.8 а) принято называть гиперболическим.

4.50. Траектория частицы определяется уравнением

$$x = \frac{\mathscr{E}_0}{eE}\left(\mathrm{ch}\,\frac{Ee}{cp_{0y}}y - 1\right) + \frac{cp_{0x}}{eE}\,\mathrm{sh}\,\frac{eE}{cp_{0y}}y$$

В нерелятивистском пределе $\mathscr{G}_0 = mc^2, p_0 \ll mc$ и $|eEy| \ll |cp_{0y}$. Последнее следует из того, что $eE\tau$ - приобретенный частицей импульс - должен быть в нерелятивистском случае мал по сравнению с mc. Таким образом,

$$x = \frac{meEy^2}{2p_{0y}^2} + \frac{p_{0x}}{p_{0y}}y$$

4.51. $l = \frac{\mathscr{E}-mc^2}{eE}$.

4.52. Из четырехмерного уравнения движения

$$\frac{dp^k}{d\tau} = \frac{e}{mc}F^{kl}p_l$$

получаем уравнения для компонент 4-импульса:

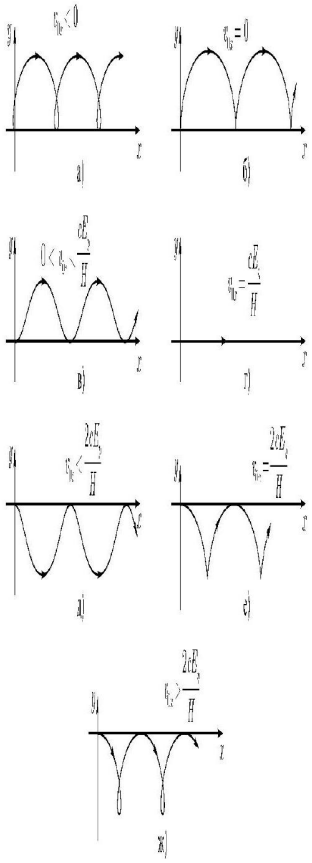
$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\mathscr{E}}{c}\right) = 0, \quad \frac{dp_x}{d\tau} = -\omega_c p_y$$
$$\frac{dp_y}{d\tau} = \omega_c p_z, \quad \frac{dp_z}{d\tau} = 0$$

где иклотронная частота $\omega_c = eH/m$ положительна или отрицательна в зависимости от знака заряда. Из уравнений и начальных условий находим:

$$\mathscr{E} = \mathscr{E}_0 = \sqrt{m^2c^4 + c^2p_0^2} = \text{const}$$
$$p_z = p_{0z} = \text{const}$$
$$p_x = p_{0\perp}\cos(\omega_c\tau + \alpha)$$
$$p_y = p_{0\perp}\sin(\omega_c\tau + \alpha)$$

С помощью уравнений $dx/d\tau = p_x/m$ и т. д. находим 4-координаты как функции собственного времени:
$x(\tau) = \frac{p_{0\perp}}{m\omega_c}\sin(\omega_c\tau + \alpha) + x_o - \frac{p_{0y}}{m\omega_c}$,

$$t = \frac{\mathscr{E}_0}{mc^2}\tau, \quad z(\tau) = \frac{p_{0z}}{m}\tau + z_0$$
$$y(\tau) = -\frac{p_{0\perp}}{m\omega_c}\cos(\omega_c\tau + \alpha) + y_0 + \frac{p_{0x}}{m\omega_c}$$



Импульс частицы, оставаясь постоянным по абсолютной величине, вращается
Рис. 4.9
вокруг направления магнитного поля с угловой скоростью ω_c (в функции собственного времени) либо с меньшей угловой скоростью

$$\Omega = \omega_c mc^2/\mathscr{E}_0 = \omega_c \gamma_0^{-1}$$

в функции координатного времени. Сама частица движется по винтовой линии, навитой на круговой цилиндр радиуса

$$R_\perp = cp_{0\perp}/|e|H = cp_\perp/|e|H$$

(ларморов радиус, или гирорадиус частицы) с шагом $h = 2\pi\,|v_{0z}|\,/|\Omega|$. Ось цилиндра совпадает с силовой линией магнитного поля, имеющей в плоскости xOy координаты x_0, y_0.
4.53.

$$\begin{array}{ll} v_x = a\omega_c \cos\omega_c t + \frac{cE_y}{H}, & x = a\sin\omega_c t + \frac{cE_y}{H} \\ v_y = -a\omega_c \sin\omega_c t, & y = a\,(\cos\omega_c t - 1) \\ v_z = \frac{eE_z}{m}t + v_{0z}, & z = \frac{eE_z}{2m}t^2 + v_{0z} \end{array}$$

где $\omega_c = eH/mc, a\omega_c = v_{0x} - cE_y/H$.
Вдоль оси z происходит равноускоренное движение под действием z-составляющей электрического поля. Движение в плоскости xy представляет собой обращение заряда в однородном магнитном поле по окружности, радиус которой $R = v_{0x}/\omega_c = cp_{0x}/eH$, а центр равномерно движется («дрейфует») в направлении, перпендикулярном плоскости $(\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H})$. Скорость дрейфа

$$v_E = \frac{eE_y}{H}$$

Возможные проекции траектории частицы на плоскость приведены на рис. 4.9. Траектории а), в), д), ж) являются трохоидами общего вида, б), е) циклоидами. Движение будет нерелятивистским во все моменты времени, если $v_0 \ll c, E_y/H \ll 1$.

4.54. $p_x = p_{0x}\cos\kappa H\tau - p_{0y}\sin\kappa H\tau, p_y = p_{0y}\cos\kappa H\tau - p_{0x}\sin\kappa H\tau$, $p_z = (p_{0z}E/H)\operatorname{ch}\kappa E\tau + (\mathscr{E}_0 E/cH)\operatorname{sh}\kappa E\tau, \mathscr{E} = \mathscr{E}_0\operatorname{ch}\kappa E\tau + p_{0z}c\operatorname{sh}\kappa E\tau$, $\kappa = e/mc$.

4.55. Помимо прямого интегрирования уравнения движения в рассматриваемой системе отсчета существует другой эффективный метод
решения задачи: преобразование Лоренца из системы, в которой электромагнитное поле и движение частицы выглядят наиболее просто. Такой системой S' является система, движущаяся относительно исходной со скоростью $\boldsymbol{v}_E = c\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}/H^2$ вдоль оси Ox, в которой $\boldsymbol{E}' = 0$, а $\boldsymbol{H}' = \boldsymbol{H}\sqrt{E^2 - H^2}/H$ (см. задачу 4.28). Направив ось Oz вдоль $\boldsymbol{H}$, а ось Oy вдоль E, запишем решение задачи в системе S':

$$p'_x = p'_{0x}\cos\omega'_c\tau - p'_{0y}\sin\omega'_c\tau, \quad p'_y = p'_{0x}\sin\omega'_c\tau + p'_{0y}\cos\omega'_c\tau$$
$$p'_z = p'_{0z}, \quad \mathscr{E}' = \mathscr{E}'_0, \quad \omega'_c = eH'/mc = e\sqrt{H^2 - E^2}/mc$$

Поскольку τ-инвариант и ω'_c-инвариант, следует преобразовать в исходную систему только компоненты импульса и энергию.

В результате получим

$$\mathscr{E} = \gamma_E^2(\mathscr{E}_0 - v_E p_{0x}) + \gamma_E^2\left(p_{0x} - v_E\mathscr{E}_0/c^2\right)v_E\cos\omega'_c\tau - \gamma_E p_{0y}v_E\sin\omega'_c\tau$$
$$p_x = \gamma_E^2(\mathscr{E}_0 - v_E p_{0x})v_E/c^2 + \gamma_E^2\left(p_{0x} - v_E\mathscr{E}_0/c^2\right)\cos\omega'_c\tau - \gamma_E p_{0y}\sin\omega'_c\tau$$
$$p_y = p_{0y}\cos\omega'_c\tau + \gamma_E\left(p_{0x} - v_E\mathscr{E}_0/c^2\right)\sin\omega'_c\tau$$
$$p_z = p_{0z}, \quad \gamma_E = \left(1 - v_E^2/c^2\right)^{-1/2} = H/\left(H^2 - E^2\right)^{1/2}$$

Зависимость координат от собственного времени вычисляется путем однократного интегрирования из уравнений $dx/d\tau = p_x/m$ и т.д.

4.56.

$$\mathscr{E} = \frac{E(\mathscr{E}_0 E - cp_{0x}H)}{E^2 - H^2}\operatorname{ch}\kappa\sqrt{E^2 - H^2}\tau +$$
$$+ \frac{cp_{0y}E}{\sqrt{E^2 - H^2}}\operatorname{sh}\kappa\sqrt{E^2 - H^2}\tau + \frac{H(cp_{0x}E - \mathscr{E}_0 H)}{E^2 - H^2},$$
$$p_x = \frac{H(\mathscr{E}_0 E - cp_{0x}H)}{c(E^2 - H^2)}\operatorname{ch}\kappa\sqrt{E^2 - H^2}\tau +$$
$$+ \frac{p_{0y}H}{\sqrt{E^2 - H^2}}\operatorname{sh}\kappa\sqrt{E^2 - H^2}\tau + \frac{E(cp_{0x}E - \mathscr{E}_0 H)}{c(E^2 - H^2)},$$
$$p_y = p_{0y}\operatorname{ch}\kappa\sqrt{E^2 - H^2}\tau + \frac{\mathscr{E}_0 E - cp_{0x}H}{c\sqrt{E^2 - H^2}}\operatorname{sh}\kappa\sqrt{E^2 - H^2}\tau,$$
$$p_z = p_{0z}, \quad \kappa = e/mc.$$

При $E \to H$, раскрывая неопределенности, находим

$$\mathscr{E} = (\mathscr{E}_0 - cp_{0x})\omega_c^2\tau^2/2 + cp_{0y}\omega_c\tau + \mathscr{E}_0$$
$$p_x = (\mathscr{E}_0/c - p_{0x})\omega_c^2\tau^2/2 + p_{0y}\omega_c\tau + p_{0x}$$
$$p_y = (\mathscr{E}_0/c - p_{0x})\omega_c\tau + p_{0y}$$
$$p_z = p_{0z}, \quad \omega_c = eH/mc$$

Вычисление траектории частицы в параметрической форме (параметр собственное время) сводится к однократному интегрированию полученных выражений.

4.57. Построим тензор электромагнитного поля плоской волны:

$$F_{ik} = A_{k,i} - A_{i,k} = (n_i\varepsilon_k - n_k\varepsilon_i)\, f'(s) \tag{1}$$

Поскольку $n^i F_{ik} = 0$, из уравнения движения (4.53)

$$m\frac{du_i}{d\tau} = \frac{e}{c}F_{ik}u^k \tag{2}$$

находим $md\left(u_i n^i\right)/d\tau = 0$. Отсюда получаем

$$u_i n^i = u_i(0)n^i = \text{ const} \tag{3}$$

где введено начальное значение 4-скорости частицы $u_i(0)$. Подставляя, далее, в (3) $u_i = dx_i/d\tau$ и выбирая 4-координаты таким образом, чтобы было $x_i(\tau) = 0$ при $\tau = 0$, получаем

$$s = n_i x^i = n_i u^i(0)\tau \tag{4}$$

таким образом, переменные τ и s отличаются постоянным множителем, и в уравнении (2) можно перейти к независимой переменной s:

$$m\frac{du_i}{ds} = \frac{e}{cn_l u^l(0)}\left(\varepsilon_i n_k u^k(0) - n_i\varepsilon_k u^k\right) f'(s) \tag{5}$$

Последнее уравнение упрощается путем умножения его на ε^i : $m\frac{d\left(u_i\varepsilon^i\right)}{ds} = -(e/c)f'(s)$, откуда находим

$$u_i\varepsilon^i = u_i(0)\varepsilon^i - (e/mc)[f(s) - f(0)] \tag{6}$$

Подстановка (6) в правую часть (5) дает простое уравнение с известной правой частью:

$$\frac{du_i}{ds} = \frac{e}{mc}\left[\varepsilon_i - \frac{n_i}{n_l u^l(0)}\left(\varepsilon^k u_k(0) - \frac{e}{mc}(f(s) - f(0))\right)\right] f'(s) \tag{7}$$

После интегрирования находим 4-скорость частицы в функции переменной s:

$$u_i(s) = u_i(0) + \frac{e}{mc}\left[\varepsilon_i - n_i\frac{\varepsilon^k u_k(0)}{n^l u_l(0)}\right][f(s) - f(0)] + \\ + \frac{e^2}{2m^2c^2}\frac{n_i}{n_l u^l(0)}[f(s) - f(0)]^2 \tag{8}$$

и 4-координаты

$$x_i(s) = x_i(0) + \int_0^s u_i\left(s'\right) ds'$$

Последние два равенства дают закон движения частицы в параметрической форме.

Полагая в равенстве (8) $i = 0$, находим энергию частицы в поле плоской волны:

$$\mathscr{E}(s) = \mathscr{E}_0 + e\left[\varepsilon_0 - n_0\frac{\varepsilon^k u_k(0)}{n^l u_l(0)}\right][f(s) - f(0)] + \\ + \frac{e^2}{2mc}\frac{n_0}{n^l u_l(0)}[f(s) - f(0)]^2 \tag{9}$$

Формула упрощается, если частица в начальный момент покоилась, т. е. $\mathscr{E}_0 = mc^2, u_l(0) = (c, 0)$:

$$\mathscr{E}(s) = mc^2 + \frac{e^2}{2mc^2}[f(s) - f(0)]^2 \tag{10}$$

Если на частицу действует волновой пакет конечной протяженности, т. е. $f(0) = 0$ и $f(s) \to 0$ при $s \to \infty$, то результирующего набора энергии частицей за все время действия волны не происходит, $\mathscr{E}(\infty) = mc^2$. В периодическом поле энергия частицы колеблется около среднего значения

$$\overline{\mathscr{E}} = mc^2 + \frac{e^2}{2mc^2}\left[\overline{f^2} + f^2(0)\right] \tag{11}$$

Средний импульс первоначально покоившейся частицы, на которую действует периодическое поле, отличен от нуля в исходной системе отсчета:

$$\overline{\boldsymbol{p}} = \frac{e}{c}\varepsilon f(0) + \frac{e^2\boldsymbol{n}}{2mc^3}\left[\overline{f^2} + f^2(0)\right] \tag{12}$$

Задачу можно решить также путем интегрирования уравнения движения в трехмерной форме или методом Гамильтона-Якоби.

4.58.

$$u^i(s) = u^i(0) + \frac{e}{mc}\left[A^i(s) - A^i(0) + \frac{n^i}{n^l u_l(0)}u_j(0)\left(A^j(s) - A^j(0)\right)\right] -$$
$$-\frac{e^2}{2m^2c^2}\frac{n^i}{n^l u_l(0)}\left[A^j(s) - A^j(0)\right]\left[A_j(s) - A_j(0)\right]$$
$$x^i(s) = \int_0^s u^i(s')\,ds' + x^i(0)$$

В трехмерной форме

$$r_\parallel(s) = r_\parallel(0) + \tfrac{c}{w}\int_0^s p_\parallel(s')\,ds', \qquad r_\perp(s) = \boldsymbol{r}_\perp(0) + \tfrac{c}{w}\int_0^s \boldsymbol{p}_\perp(s')\,ds'$$
$$p_\parallel(s) = p_\parallel(0) + (\mathscr{E}(s) - \mathscr{E}(0))/c, \qquad \boldsymbol{p}_\perp(s) = \boldsymbol{p}_\perp(0) + \tfrac{e}{c}\int_0^s \boldsymbol{E}(s')\,ds'$$
$$\mathscr{E}(s) = \mathscr{E}(0) + \tfrac{ec}{w}\int_0^s \boldsymbol{E}(s')\cdot\boldsymbol{p}_\perp(s')\,ds', \qquad t = \tfrac{1}{cw}\int_0^s \mathscr{E}(s')\,ds'$$
$$w = \mathscr{E}(0) - cp_\parallel(0)$$

Здесь значки $\parallel, \perp$ относятся к направлениям, параллельному и перпендикулярному относительно $\boldsymbol{n}$.

4.59. $x = x_0\cos\omega t, y = y_0\,\mathrm{ch}\,\omega t, z = v_0 t + z_0$, где $\omega^2 = 2ek/m$.

Из полученных зависимостей $x(t)$ и $y(t)$ видно, что с помощью линзы рассматриваемого типа может быть сформирован пучок заряженных частиц, имеющий форму плоской ленты.

4.60.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m\dot{r}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right) = \frac{mr\dot{\alpha}^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + eE_r + \frac{e}{c}\left(-H_\alpha \dot{z} + H_z r\dot{\alpha}\right)$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mr^2\dot{\alpha}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right) = e\left[E_\alpha + \frac{1}{c}\left(H_r\dot{z} - H_z\dot{r}\right)\right] r$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m\dot{z}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right) = e\left[E_z + \frac{1}{c}\left(H_\alpha\dot{r} - H_r\dot{\alpha}\right)\right]$$

4.61. При $H = 0$ траектории электронов прямолинейны. По мере увеличения магнитного поля траектории все больше искривляются в плоскости, перпендикулярной оси. Введем цилиндрические координаты (r, α, z), где z совпадает с осью цилиндра. Электроны перестанут попадать на анод, когда при $r = b$ их скорость окажется параллельной поверхности анода, т. е. при $\dot{r}|_{r=b} = 0$. При этом $\dot{\alpha}|_{r=b} = v_{\max}/b$. Воспользуемся одним из уравнений предыдущей задачи, которое в данном случае принимает вид

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mr^2\dot{\alpha}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right) = -\frac{e}{c}H(r)r\frac{dr}{dt}$$

Проинтегрируем обе части равенства вдоль траектории частицы от $r = a$ до $r = b$:

$$\left.\frac{mr^2\dot{\alpha}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right|_{r=a}^{r=b} = -\frac{e}{2\pi c}\int_a^b 2\pi H r dr = -\frac{e\Phi}{2\pi c}$$

Отсюда

$$\Phi_c = \frac{2\pi cb}{|e|}p_{\max} = 2\pi cb\sqrt{\frac{2mV}{|e|}\left(1 + \frac{|e|V}{2mc^2}\right)}$$

если выразить импульс через кинетическую энергию и положить $T_{\max} = |e|V$.

При малой разности потенциалов $|e|V \ll mc^2$ (или $v \ll c$, что то же самое) результат упрощается:

$$\Phi_c = 2\pi cb\sqrt{\frac{2mV}{|e|}}$$

4.62. Разность потенциалов должна быть больше, чем

$$V_c = \sqrt{\frac{4\mathscr{J}^2}{c^2}\ln^2\frac{b}{a} + \frac{m^2c^4}{e^2}} - \frac{mc^2}{|e|}$$

При $|e|V \ll mc^2$ (нерелятивистские электроны), получаем из общей формулы

$$V_c = \frac{2|e|\mathscr{J}^2}{mc^4}\ln^2\frac{b}{a}$$

4.63. $b = a\exp\frac{p_0c^2}{|e|\mathscr{J}}$, где $p_0 = \frac{mv_0}{\sqrt{1-v_0^2/c^2}}$.

4.65. а) В нерелятивистском случае кинетическая энергия T - квадратичная функция скоростей частиц. По теореме Эйлера об однородных функциях

$$2T = \sum_a \frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{v}_a}\cdot\boldsymbol{v}_a = \sum_a \boldsymbol{p}_a\cdot\boldsymbol{v}_a$$

где суммирование производится по всем частицам в системе. Перепишем это равенство в виде

$$2T = \frac{d}{dt}\left(\sum_a p_a \cdot \boldsymbol{r}_a\right) - \sum_a r_a \cdot \dot{\boldsymbol{p}}_a = \frac{d}{dt}\left(\sum_a \boldsymbol{p}_a \cdot \boldsymbol{r}_a\right) + \sum_a r_a \cdot \frac{\partial U}{\partial r_a}$$

и произведем усреднение согласно формуле

$$\bar{f} = \lim_{\delta t \to \infty} \frac{1}{\delta t} \int_0^{\delta t} f(t)dt$$

Поскольку

$$\overline{\frac{d}{dt}\left(\sum_a \boldsymbol{p}_a \cdot \boldsymbol{r}_a\right)} = \frac{1}{\delta t}\left[\sum_a \boldsymbol{p}_a \cdot \boldsymbol{r}_a\Big|_{t=\delta t} - \sum_a \boldsymbol{p}_a \cdot \boldsymbol{r}_a\Big|_{t=0}\right]_{\delta t \to \infty} \to 0$$

в силу ограниченности импульсов и координат частиц, то

$$2\bar{T} = \sum_a \overline{\boldsymbol{r}_a \cdot \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}_a}} \tag{1}$$

Потенциальная энергия при кулоновском взаимодействии является однородной функцией координат степени -1, поэтому

$$\sum_a \boldsymbol{r}_a \cdot \frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{r}_a} = -U \quad \text{и} \quad 2\bar{T} = -\bar{U} \tag{2}$$

При этом сохраняющаяся полная энергия системы заряженных частиц $E = \bar{T} + \bar{U} = -\bar{T} < 0$, так как финитное движение возможно только при отрицательной полной энергии.

Соотношение (1) называется теоремой вириала. Оно дает связь между $\bar{T}$ и $\bar{U}$ во всех случаях, когда потенциальная энергия представляет собой однородную функцию координат.

б)

$$2\bar{T} + \frac{e}{mc}\overline{\boldsymbol{L}} \cdot \boldsymbol{H} = -\bar{U} \tag{3}$$

где $\boldsymbol{L} = \sum_a m_a \left[\boldsymbol{r}_a \times \boldsymbol{v}_a\right]$ - полный момент импульса системы.

4.66. Траектория лежит в плоскости, перпендикулярной сохраняющемуся при движении моменту импульса l. При $ee' < 0$ (притяжение) и $0 > \mathscr{E} \geqslant -me^2e^2/(2l^2)$, где $m = m_1m_2/(m_1+m_2)$ - приведенная масса, движение финитно (связанное состояние). Траектория - эллипс, уравнение которого

$$r = \frac{a}{1 + \epsilon\cos\varphi} \tag{1}$$

Здесь

$$a = \frac{l^2}{m\left|ee'\right|}, \quad \epsilon = \sqrt{1 + \frac{2\mathscr{E}l^2}{me^2e'^2}} < 1 \tag{2}$$

угол φ отсчитывается от линии, соединяющей частицы в момент их наибольшего сближения. При $\mathscr{E} \to 0 (\epsilon \to 1)$ траектория переходит в параболу, движение становится инфинитным.

При $\mathscr{E} > 0$ в обоих случаях, $\epsilon e' < 0$ и $\epsilon e' > 0$, траектория представляет собой гиперболу

$$r = \frac{a}{\mp 1 + \epsilon \cos\varphi} \tag{3}$$

где $\epsilon > 1$. Знак (+) соответствует притяжению, вторая частица находится во внутреннем фокусе гиперболы (рис. 4.10 а). Знак (-) соответствует отталкиванию, вторая частица при этом находится во внешнем фокусе гиперболы (рис. 4.10 б).

4.67. Дифференциальное сечение рассеяния можно вычислить по формуле

$$\sigma(\theta) = \frac{sds}{\sin\theta d\theta} \tag{1}$$

где θ - угол рассеяния частицы, соответствующий данному значению s параметра соударения (прицельного расстояния). В данном случае θ - угол между направлениями подлета частицы к рассеивающему центру и отлета от него, определяемый асимптота-

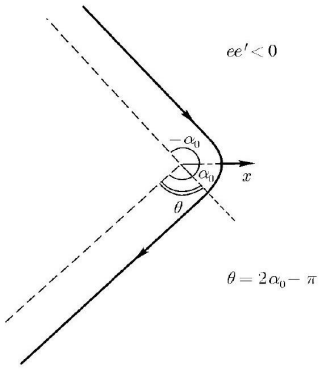


Рис. 4.10 а ми гиперболы. Из рис. 4.10 а (притяжение) находим $\theta = 2\alpha_0 - \pi$, из рис. 4.10 б (отталкивание) $\theta = \pi$ - $-2\alpha_0$. Оба случая объединяются в одну формулу $\theta/2 = \pm(\pi/2 \mp \alpha_0)$. Отсюда и из уравнения траектории (3) предыдущей задачи находим

$$\begin{gathered}\cot^2(\theta/2) = \sin^{-2}(\theta/2) - 1 = \\ = \cos^{-2}\alpha_0 - 1 = \epsilon^2 - 1 = \\ = 2\mathscr{E}l^2/\left(me^2e'^2\right)\end{gathered}$$

Момент импульса выражается через прицельное расстояние формулой $l = mv_0 s$. Таким образом,

$$s^2 = \frac{e^2e'^2}{m^2v_0^4}\cot^2\frac{\theta}{2} \tag{2}$$

Дифференцируя и подставляя в (1), получим знаменитую формулу Резерфорда, с помощью которой было открыто атомное ядро:

$$\sigma(\theta) = \left(\frac{ee'}{2mv_0^2}\right)^2 \frac{1}{\sin^4(\theta/2)} \tag{3}$$

Сечение одинаково в случае притяжения и отталкивания частиц.

4.68. В системе центра масс:

$$d\sigma = \left(\frac{e^2}{4\mathscr{E}_c}\right)^2 \left[\frac{1}{\sin^4\theta/2} + \frac{1}{\cos^4\theta/2}\right] d\Omega_c$$

где $\mathscr{E}_c = mv_0^2/2, m = m_1/2$ - приведенная масса.

В лабораторной системе:

$$d\sigma = \left(\frac{e^2}{2\mathscr{E}_l}\right)\left[\frac{1}{\sin^4\vartheta} + \frac{1}{\cos^4\vartheta}\right] 4\cos\vartheta d\Omega_l$$

где $\mathscr{E}_l = m_1 v_0^2/2, \vartheta$ - угол рассеяния в лабораторной системе, $0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi/2$.

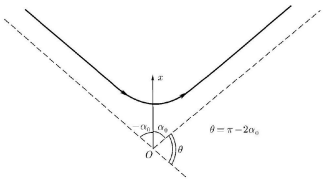


Рис. 4.10 б

4.69. Через площадку $d\sigma = sdsd\alpha$ плоскости,перпендикулярной направлению движения частиц, проходит за единицу времени $nvd\sigma$ частиц. Они передают неподвижной частице импульс, равный

$$m\Delta v_z nvd\sigma \tag{1}$$

где Δv_z - изменение z-компоненты скорости одной частицы при рассеянии ее на неподвижной частице.

Искомая сила, равная полному импульсу, передаваемому за единицу времени, получится интегрированием (1) по всему сечению пучка частиц.

При этом нужно выразить Δv_z через прицельный параметр s. Поскольку столкновения упругие, имеем

$$\Delta v_z = -2v\sin^2\frac{\theta}{2} \tag{2}$$

θ - угол рассеяния. Его связь с прицельным параметром была найдена при решении задачи 4.67 (формула 2). После использования указанной формулы и предыдущего соотношения (2), а также интегрирования по s получим из (1) выражение для силы:

$$\mathscr{F} = \frac{4\pi}{m}e^2e'^2n\lambda\frac{\boldsymbol{v}}{v^3} \tag{3}$$

где

$$\lambda = \ln\left[s_m\frac{mv^2}{ee'}\right]$$

При $s_m \to \infty$, что соответствует неограниченному пучку, величина λ расходится. Это объясняется дальнодействующим характером кулоновых сил. Фактически в нейтральной системе любой заряд экранируется зарядами противоположного знака, поэтому с данной частицей взаимодействуют только те, которые пролетают от нее на расстоянии, не превышающем радиуса экранировки. Поэтому в реальных условиях под s_m нужно понимать радиус экранировки (радиус Дебая в плазме, радиус нейтрального атома при рассеянии частиц в неионизованном веществе и т. д.).

Величина λ называется кулоновским логарифмом. Пренебрегая слабой зависимостью его от скорости частицы, обычно считают $\lambda = \text{const}$.

4.70.

$$\overline{\mathscr{F}}(\boldsymbol{v}) = -\frac{4\pi}{\mu}e^2e'^2\lambda\int\frac{\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}'}{|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}'|^3}f(\boldsymbol{v})d^3v$$

где $\mu = mm'/(m+m')$ - приведенная масса.

Полезно иметь в виду следующую электростатическую аналогию: приведенное выражение

можно записать в виде электрической силы $\mathscr{F} = q\boldsymbol{E}$, с которой действует на заряд $q = -4\pi e^2 e'^2 \lambda/\mu$ «электростатическое поле»

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{v}) = -\operatorname{grad}_{\boldsymbol{v}} \varphi(\boldsymbol{v})$$

где

$$\varphi(\boldsymbol{v}) = \int \frac{f(\boldsymbol{v}')\, d^3v}{|\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}'|}$$

- «электростатический потенциал», удовлетворяющий уравнению ПуассоНа

$$\Delta \boldsymbol{v} \varphi(\boldsymbol{v}) = -4\pi f(\boldsymbol{v})$$

4.71. Энергия пробной частицы не меняется при столкновениях с неподвижными бесконечно тяжелыми частицами. Изменение среднего импульса описывается уравнением

$$\frac{d\overline{\boldsymbol{p}}}{dt} = \mathscr{F} \tag{1}$$

где $\mathscr{F}$ - средняя сила. Ее удобно вычислять с помощью электростатической аналогии, указанной в решении предыдущей задачи. Распределение по скоростям частиц среды описывается функцией $f(\boldsymbol{v}) = n\delta(\boldsymbol{v})$. Поэтому $\varphi(\boldsymbol{v}) = n/v, \boldsymbol{E}(\boldsymbol{v}) = n\boldsymbol{v}/v^3$,

$$\mathscr{F} = -\frac{4\pi}{m} e^2 e'^2 n\lambda \frac{\boldsymbol{v}}{v^3}, \tag{2}$$

$\mathscr{F}$ имеет характер «силы трения», стремящейся уменьшить направленную скорость частицы. Но это трение тем меньше, чем больше скорость частицы ($\mathscr{F} \propto 1/v^2$, «падающее трение»).

Интегрируя уравнение (1), найдем

$$\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{v}_0 \exp\left[-\frac{t}{\tau}\right]$$

где $\tau = mv^3/4\pi e^2 e'^2 n\lambda$ - характерное время потери частицей направленной скорости.

4.72.

$$\mathscr{F} = \begin{cases} 0 & \text{при } v < v_0 \\ 4\pi n e^2 e'^2 \lambda \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m'}\right) \frac{\boldsymbol{v}}{v^2} & \text{при } v > v_0. \end{cases}$$

$$\mathscr{F} = \begin{cases} -4\pi n e^2 e'^2 \lambda \left(\dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{m'}\right) \dfrac{\boldsymbol{v}_0}{v_0} \text{ при } \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}_0 > v_0^2 \\ 4\pi n e^2 e^2 \lambda \left(\dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{m'}\right) \dfrac{\boldsymbol{v}_0}{v_0} \text{ при } \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}_0 < v_0^2 \end{cases}$$

4.73. На электрон, движущийся со скоростью $\boldsymbol{v}$ в среде неподвижных однозарядных ионов, действует сила трения

$$\overline{\mathscr{F}} = -\frac{4\pi e^4 n\lambda}{m} \frac{v}{v^3} \tag{1}$$

(см. решение задачи 4.71). Отметим, что зависимость силы от скорости можно получить и из следующих полукачественных соображений. Сила трения есть потеря импульса частицей в единицу времени из-за столкновений. Если среднее время между столкновениями τ, а при каждом столкновении теряется импульс порядка полного

импульса частицы mv (это означает, что в результате столкновения электрон отклоняется на большой угол), то

$$\mathscr{F} \approx \frac{mv}{\tau} \tag{2}$$

При таком столкновении электрон подходит к иону на расстояние, на котором его кинетическая энергия - порядка потенциальной:

$$\frac{mv^2}{2} \approx \frac{e^2}{r} \tag{3}$$

Это приближенное равенство позволяет оценить сечение столкновения

$$\sigma \approx \pi r^2 \approx \frac{4\pi e^4}{m^2 v^4} \tag{4}$$

и среднее время между столкновениями

$$\tau \approx \frac{1}{n\sigma v} \approx \frac{m^2 v^3}{4\pi n e^4} \tag{5}$$

Подставляя τ в (2), находим, учитывая тормозящий характер силы

$$\mathscr{F} \approx -\frac{4\pi n e^4 v}{mv^3} \tag{6}$$

что отличается от (1) отсутствием кулонова логарифма λ. Но это естественно: при оценке по формулам (2)-(5) мы не учитывали далеких столкновений с малыми передачами импульса, вклад которых и дается кулоновым логарифмом.

Усредним теперь формулу (1) по возможным скоростям электрона. Для этого положим

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}_T \tag{7}$$

где $\boldsymbol{v}_T$ - тепловая скорость, $\boldsymbol{u}$ - скорость, приобретаемая под действием электрического поля $\boldsymbol{E}$. При $u \ll v_T$ можем положить в знаменателе выражения (1) $v^3 \approx v_T^3$. В числителе же нельзя пренебречь $\boldsymbol{u}$ по сравнению с $\boldsymbol{v}_T$, так как при усреднении по направлениям тепловой скорости получим $\overline{\boldsymbol{v}_T} = 0$. В итоге будем иметь абсолютное значение тормозящей силы

$$\overline{\mathscr{F}} = \frac{4\pi n e^4 \lambda}{m v_T^3} u \tag{8}$$

где $v_T^2 = 3T/m$, если применимо распределение Максвелла (T - температура в единицах энергии). Таким образом, при $u \ll v_T$ получаем $\mathscr{F} \propto u$.

При $u \gg v_T$ полагаем $v \approx u$ и получаем

$$\overline{\mathscr{F}} \approx \frac{4\pi n e^4 \lambda}{m u^2} \tag{9}$$

т. е. $\overline{\mathscr{F}} \propto 1/u^2$. Максимуму $\overline{\mathscr{F}}$, очевидно, будет соответствовать значение $u \approx v_T$; при этом обе формулы (8) и (9) дадут одинаковое значение

$$\overline{\mathscr{F}}_{\max} \approx \frac{4\pi n e^4 \lambda}{m v_T^2} \tag{10}$$

Примерный ход функции $\overline{\mathscr{F}}(u)$ представлен на рис. 4.11.

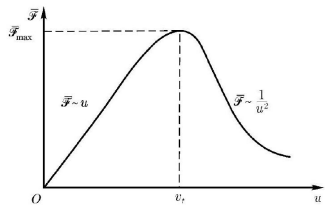


Рис. 4.11

Если в плазме $E < \overline{\mathscr{F}}_{\max}/e = E_D$, то сила торможения при некотором значении u, удовлетворяющем равенству $\overline{\mathscr{F}}(u) = eE$, превысит ускоряющую электрическую силу eE, и электроны не смогут больше ускоряться.

Это - область значений поля E, при которых имеет место обычный закон Ома. В случае $E > E_D$ ускоряюшая сила превышает торможение, и электроны получают возможность ускоряться неограниченно [17]. Это явление получило название «убегающих электронов».

Подставляя в формулу (10) максвелловское значение v_T^2, получим

$$E_D = \frac{e\lambda}{3D^2}, \quad D^2 = \frac{T}{4\pi n e^2} \tag{11}$$

Точный расчет дает близкое значение

$$E_D = 0,214\frac{e\lambda}{D^2} \tag{12}$$

4.74. Задачу можно решить различными способами, в частности, с помощью уравнений движения в цилиндрических координатах, приведенных в ответе к задаче 4.60. Ниже мы используем метод Гамильтона-Якоби, удобный при нахождении траектории частицы.

Запишем уравнение Гамильтона-Якоби в плоских полярных координатах с полярным углом α, отсчитываемым вокруг направления сохраняющегося в центрально-симметричном поле $U(r) = -Ze^2/r$ вектора момента импульса l:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \alpha}\right)^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial S}{\partial t} - \frac{Ze^2}{r}\right)^2 + m^2c^2 = 0 \tag{1}$$

Для решения задачи требуется найти действие S, зависящее от координат r, α, времени t и двух независимых и неаддитивных постоянных интегрирования. Проведя разделение переменных

$$S(r, \alpha, t) = W(r) + F(\alpha) + f(t)$$

находим из уравнения (1)

$$f(t) = -\mathscr{E}t, \quad F(\alpha) = l\alpha$$
$$W(r) = \pm \int \left[\mathscr{E}^2/c^2 - m^2c^2 - \left(l^2 - Z^2e^4/c^2\right) r^{-2} + 2Ze^2\mathscr{E}/c^2 r\right]^{1/2} dr \tag{2}$$

Здесь $\mathscr{E}$ и l - постоянные, введенные при разделении переменных и представляющие собой полную энергию и момент импульса частицы. В данном

случае полная энергия $\mathscr{E}$ включает в себя не только энергию покоя частицы и ее кинетическую энергию, но также и потенциальную энергию ее взаимодействия с кулоновским центром:

$$

[417] Но эта возможность как правило не реализуется из-за коллективных эффектов в плазме.

$$\mathscr{E} = \sqrt{c^2\left(p_r^2 + p_\alpha^2/r^2\right) + m^2c^2} - \frac{Ze^2}{r} \tag{3}$$

$$

Это следует из уравнения (1), если использовать определения обобщенных импульсов: $p_r = \partial S/\partial r, p_\alpha = \partial S/\partial\alpha = l$.

Чтобы найти траекторию частицы методом Гамильтона - Якоби, нужно продифференцировать действие S по l и приравнять эту производную некоторой постоянной, $\partial S/\partial l = \alpha_0$, которая должна быть определена из начальных условий. Это приведет к уравнению траектории вида

$$l\int \frac{dr}{r^2}\left[\frac{\mathscr{E}^2}{c^2} - m^2c^2 - \frac{l^2c^2 - Z^2e^4}{c^2r^2} + \frac{2Ze^2\mathscr{E}}{c^2r}\right]^{-1/2} = \pm\left(\alpha - \alpha_0\right) \tag{4}$$

Для вычисления интеграла и классификации траекторий удобно ввести другие постоянные, которые будут обобщать на релятивистский случай величины, использованные в соответствующей нерелятивистской задаче 4.66:

$$a = \frac{Ze^2}{\mathscr{E}}\left(\frac{1}{\rho^2} - 1\right), \quad \varepsilon = \frac{1}{\rho}\sqrt{1 - \frac{m^2c^4}{\mathscr{E}^2}\left(1 - \rho^2\right)}, \quad \text{где } \rho = \frac{Ze^2}{lc} \tag{5}$$

Здесь параметры ε и ρ безразмерны, имеет размерность длины. Далее рассматриваем различные соотношения между параметрами.

Стучай 1. $\rho = Ze^2/lc < 1, a > 0$. Переходя в (4) к интегрированию по переменной $x = a/r$, и выбирая $\alpha = 0$ в одной из точек наибольшего приближения частицы к центру, приводим интеграл к табличному:

$$\int\limits_{1+\varepsilon}^{a/r} \frac{dx}{\sqrt{\varepsilon^2 - (x-1)^2}} = -\arccos\frac{a/r - 1}{\varepsilon} = \pm\sqrt{1-\rho^2}\alpha \tag{6}$$

Таким образом, получаем уравнение траектории:

$$r = \frac{a}{1 + \varepsilon\cos\sqrt{1-\rho^2}\alpha} \tag{7}$$

Здесь опять может быть несколько вариантов. При $\varepsilon < 1$, что, согласно (5), имеет место при $mc^2 > \mathscr{E} \geqslant mc^2\sqrt{1-\rho^2}$, движение финитно.

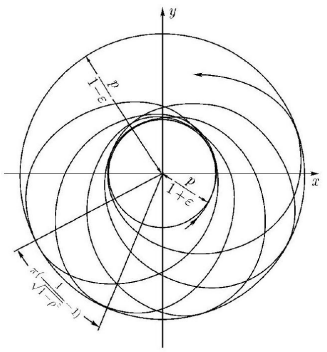


Рис. 4.12

Траектория в общем случае имеет вид незамкнутой розетки, заключенной между окружностями с радиусами $a/(1+\varepsilon)$ и $a/(1-\varepsilon)$ (рис. 4.12). В нерелятивистском случае аналогом такой траектории является эллипс. Ее можно получить путем вращения

(прецессии) эллипса в своей плоскости. Полное колебание радиуса от минимального значения $r_{\min} = a/(1+\varepsilon)$ (перигей) до максимального значения $r_{\max} = a/(1-\varepsilon)$ (апогей) [18] и обратно до нового минимума происходит при возрастании α на $2\pi/\sqrt{1-\rho^2}$. Перигей орбиты, таким образом, за один период изменения r поворачивается на угол $2\pi\left[(1-\rho^2)^{-1/2}-1\right]$. Если $\sqrt{1-\rho^2}$ представляет собой рациональное число, то после некоторого числа оборотов траектория замыкается на себя.

При $\varepsilon > 1$, что соответствует $\mathscr{E} > mc^2$, движение инфинитно. Траектория напоминает гиперболу (она получается из гиперболы путем увеличения полярных углов в $(1-\rho^2)^{-1/2}$ раз). Она имеет две ветви, уходящие на бесконечность при $\alpha = \pm\alpha_0$, где $\alpha_0 = (1-\rho^2)^{-1/2}\arccos(-1/\varepsilon)$. Частица, приближающаяся к центру по одной из этих ветвей, может совершить вокруг него несколько оборотов, раньше чем уйти на бесконечность по другой

ветви (рис. 4.13). При $\varepsilon = 1\,(\mathscr{E} = mc^2)$ движение также инфинитно, а траектория «параболоидна».

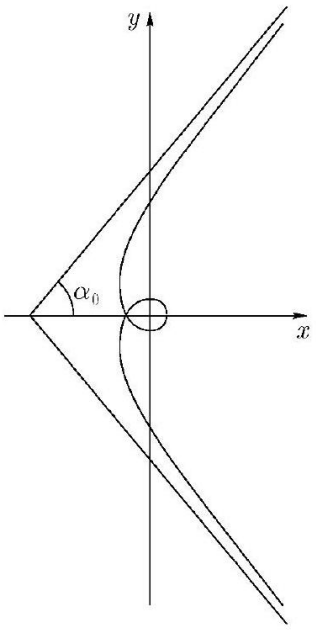


Рис. 4.13

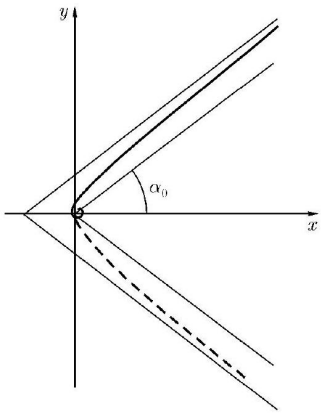


Рис. 4.14

При $\rho \ll 1$ рассмотренные траектории переходят в обычные эллипс ($\varepsilon < 1$), гиперболу

[418] С равным основанием эти точки можно называть перигелий и апогелий или периселений и апоселений.

($\varepsilon > 1$) и параболу ($\varepsilon = 1$) нерелятивистской кеплеровой задачи. Это естественно, так как при $v/c \ll 1$ выполняется условие $\rho \ll 1$.[19]

Случай 2. $\rho = Ze^2/lc > 1, a = -|a| < 0$. Ввиду изменения знаков в подкоренном выражении интеграла (3) вычисляем его заново и получаем

$$\int \frac{d(|a|/r)}{\sqrt{(1-|a|/r)^2-\varepsilon^2}} = \operatorname{Arch}\frac{1+|\mathrm{a}|/\mathrm{r}}{\varepsilon} = \pm\sqrt{\rho^2-1}\alpha \tag{7}$$

что соответствует наиболее простому выбору постоянных интегрирования. Отсюда получаем уравнение траектории:
$$

$$r = \frac{|a|}{-1+\varepsilon\operatorname{ch}\sqrt{\rho^2-1}\alpha} \tag{8}$$

$$

Траектории имеют вид спиралей, закручивающихся вокруг начала координат при $\alpha \to \pm\infty$. Частица падает на силовой центр (в нерелятивистском случае падение на центр возможно только при $l = 0, \rho = \infty$). При $\mathscr{E} > mc^2$ параметр $\varepsilon < 1$ и траектория имеет две ветви, уходящие на бесконечность при $\alpha = \pm\alpha_0$, где $\alpha_0 = (\rho^2-1)^{-1/2}\operatorname{Ar}\operatorname{ch}(1/\varepsilon)$ (рис. 4.14). При $\mathscr{E} < mc^2$ параметр $\varepsilon > 1$ и траектория имеет вид, изображенный на рис. 4.15 .

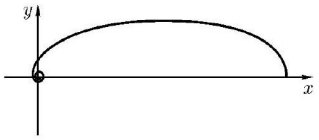


Рис. 4.15

Случай 3. $\rho = Ze^2/lc = 1, a = 0$. Вычислив интеграл заново, получим уравнение траектории

$$r = \frac{2Ze^2/\mathscr{E}}{a^2-1+m^2c^4/\mathscr{E}^2} \tag{9}$$

Траектория также представляет собой спираль, закручивающуюся вокруг центра при $\alpha \to \pm\infty$, но медленнее, чем в случае $\rho > 1$. Общий характер траектории такой же, как в случае 2.

4.75. При $\mathscr{E} > mc^2$ (инфинитное движение)

$$\Delta t = \frac{1}{c\sqrt{\mathscr{E}^2-m^2c^4}}\left\{\mathscr{E}\left[\sqrt{(r+b)^2-d^2}-\sqrt{b^2-d^2}\right]-\right.$$
$$\left.-\frac{Ze^2m^2c^4}{\mathscr{E}^2-m^2c^4}\ln\frac{r+b+\sqrt{(r+b)^2-d^2}}{b+\sqrt{b^2-d^2}}\right\}$$

где

$$b = \frac{Ze^2\mathscr{E}}{\mathscr{E}^2-m^2c^4}, \quad d^2 = \frac{l^2c^2}{\mathscr{E}^2-m^2c^4}+\frac{Z^2e^4m^2c^4}{(\mathscr{E}^2-m^2c^4)^2}$$

[419] Можно произвести такую оценку величины ρ в нерелятивистском случае для связанного состояния:

$$\rho = \frac{Ze^2}{lc} \approx \frac{Ze^2}{rmvc} \approx \frac{|U|}{mvc}$$

По теореме вириала (задача 4.65) $\overline{|U|} = 2\bar{T} \approx mv^2$, так что $\rho \approx v/c \ll 1$. При инфинитном движении на большей части траектории $|U| \ll 2T$, поэтому ρ еще меньше.

4.76. В обозначениях задачи 4.74 имеем при $\rho < 1$

$$r = \frac{a}{-1 + \varepsilon \cos \sqrt{1-\rho^2}\alpha}$$

Траектория имеет гиперболоидный характер (рис. 4.16). Две ее ветви уходят на бесконечность при $\alpha = \pm\alpha_0$, где $\alpha_0 = (1-\rho^2)^{-1/2} \arccos(1/\varepsilon)$. При $\rho \ll 1$ частица движется по гиперболе. Этот случай отвечает нерелятивистскому движению, $v \ll c$. При $\rho > 1$

$$r = \frac{|a|}{1 - \varepsilon \operatorname{ch} \sqrt{\rho^2 - 1}\alpha}$$

где $\varepsilon < 1$. Характер траектории такой же, как в первом случае. Две ее ветви уходят на бесконечность при $\alpha = \pm\,(\rho^2-1)^{-1/2} \operatorname{ar\,ch}(1/\varepsilon)$. В случае $\rho = 1$

$$r = \frac{2Ze^2/\mathscr{E}}{1 - m^2c^4/\mathscr{E}^2 - \alpha^2}$$

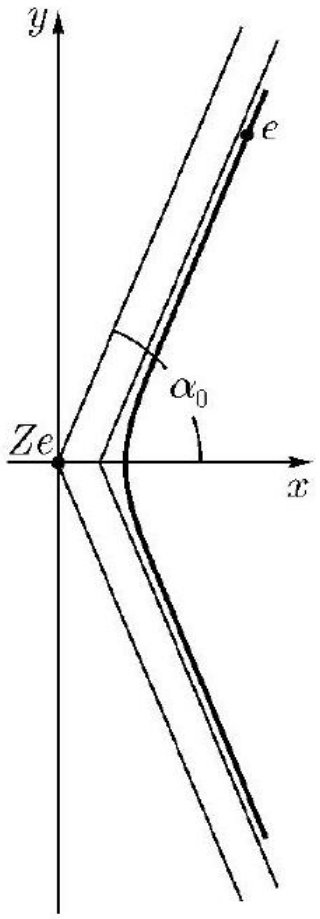


Рис. 4.16

Ветви траектории уходят на бесконечность при $\alpha = \pm\sqrt{1 - m^2c^4/\mathscr{E}^2}$.

4.77. В случае притяжения

$$\theta = \left(\frac{2lc}{\sqrt{l^2c^2 - Z^2e^4}} - 1\right)\pi - \frac{2lc}{\sqrt{l^2c^2 - Z^2e^4}} \operatorname{arctg} \frac{v_0\sqrt{l^2c^2 - Z^2e^4}}{Ze^2c}$$

где v_0 - скорость частицы на больших расстояниях от рассеивающего центра.

В случае отталкивания

$$\theta = \pi - \frac{2lc}{\sqrt{l^2c^2 - Z^2e^4}} \operatorname{arctg} \frac{v_0\sqrt{l^2c^2 - Z^2e^4}}{Ze^2c}$$

4.78. Малым углам рассеяния отвечают большие прицельные расстояния s. Поэтому, положив $l = p_0 s$, где p_0 - импульс частицы при $r \to \infty$,
можно найти интересующую нас зависимость угла рассеяния θ от s предельным переходом к большим значениям s (при этом, очевидно, $l > Ze^2/c$) в общих формулах, приведенных в предыдущей задаче. При выполнении предельного перехода для обоих случаев, притяжения и отталкивания, получится один и тот же результат:

$$\theta = \pi - 2 \operatorname{arctg} \frac{v_0 p_0 s}{Ze^2} = \frac{2Ze^2}{v_0 p_0 s} \ll 1$$

откуда $s = 2Ze^2/v_0p_0\theta$ и

$$\sigma(\theta) = \left|\frac{sds}{\theta d\theta}\right| = 4\left(\frac{Ze^2}{v_0p_0}\right)^2 \frac{1}{\theta^4}$$

4.79. Ускоряющее электрическое поле:

$$E_\alpha = \frac{1}{2\pi rc}\frac{d\Phi}{dt}$$

где r - радиус орбиты электрона, Φ - магнитный поток, пронизывающий орбиту, α - азимутальный угол.

При передвижении электрона по орбите на расстояние $rd\alpha$ поле E_α совершает работу

$$\delta A = E_\alpha r d\alpha$$

Ускорение электрона происходит на орбите постоянного радиуса $r = cp/eH_0$, где H_0 - магнитное поле на орбите, перпендикулярное ее плоскости и нарастающее со временем. Из условия $dr = 0$ находим $dp = pdH_0/H_0$. Энергия электрона $\mathscr{E} = c\sqrt{p^2 + m^2c^2}$ увеличивается на $d\mathscr{E} = c^2pdp/\mathscr{E} = c^2p^2dH_0/\mathscr{E}H_0$ при увеличении поля на dH_0. Очевидно, что $\delta A = d\mathscr{E}$. Используя предыдущие равенства и соотношение $c^2p/\mathscr{E} = v = rd\alpha/dt$, получим после интегрирования

$$\Phi = 2\Phi_0$$

где $\Phi_0 = \pi r^2 H_0$. Последним равенством и выражается искомое правило «2: 1».
4.80. Как следует из вида функции Лагранжа (4.46), энергия U взаимодействия двух заряженных частиц определяется формулой

$$U = -\frac{e}{c}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{v} + e\varphi$$

в которую нужно подставить заряд e_1 одной из частиц и запаздывающие потенциалы [20]$\varphi_2, \boldsymbol{A}_2$ поля другой частицы. Воспользовавшись разложениями запаздывающих потенциалов по степеням времени запаздывания, получим

$$\varphi_2 = \frac{e_2}{R} + \frac{e_2}{2c^2}\frac{\partial^2 R}{\partial t^2}, \quad \boldsymbol{A}_2 = \frac{e_2\boldsymbol{v}_2}{cR}$$

где R - расстояние между частицами. Выбрав калибровочную функцию χ в виде

$$\chi = \frac{e_2}{2c}\frac{\partial R}{\partial t}$$

произведем градиентное преобразование потенциалов. Новые потенциалы принимают вид

$$\varphi_2' = \varphi_2 - \frac{1}{c}\frac{\partial \chi}{\partial t} = \frac{e_2}{R}, \quad \boldsymbol{A}_2' = \boldsymbol{A}_2 + \nabla\chi = \frac{e_2\left[\boldsymbol{v}_2 + (\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v}_2)\,\boldsymbol{n}\right]}{2cR}$$

где $n = \boldsymbol{R}/R$. Отсюда для энергии взаимодействия получаем формулу Брейта

$$U = e_1\varphi_2' - \frac{e_1}{c}\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{A}_2' = \frac{e_1e_2}{R}\left\{1 - \frac{1}{2c^2}\left[\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_2 + (\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{n})\,(\boldsymbol{v}_2\cdot\boldsymbol{n})\right]\right\}$$

Эта формула приближенно учитывает то обстоятельство, что сила, действующая на одну из двух взаимодействующих частиц, находящихся на расстоянии R друг от друга, определяется предшествующим положением и состоянием движения другого заряда. Энергия и импульс передаются зарядами полю и переносятся полем от заряда к заряду в течение промежутка времени R/c. Частицы и поле образуют единую систему, и вследствие этого невозможно точное описание движения системы взаимодействующих частиц без привлечения степеней свободы поля.

4.81.

$L = \frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_1v_1^4}{8c^2} + \frac{m_2v_2^2}{2} + \frac{m_2v_2^4}{8c^2} - \frac{e_1e_2}{R} + \frac{e_1e_2}{2c^2R}\left[\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{v}_2 + (\boldsymbol{v}_1\cdot\boldsymbol{n})\,(\boldsymbol{v}_2\cdot\boldsymbol{n})\right]$.

4.82. В декартовой системе координат с осью Oz вдоль $\boldsymbol{H}$

$$\begin{aligned} m_{lz}(t) &= m_{lz}(0) = \text{ const} \\ m_{lx}(t) &= m_{l\perp}(0)\cos(\omega t + \alpha) \\ m_{ly}(t) &= m_{l\perp}(0)\sin(\omega t + \alpha) \end{aligned}$$

где $\omega = \kappa H, |\boldsymbol{m}_l(t)| = |\boldsymbol{m}_l(0)|$.

4.83. Мгновенно сопутствующая система из-за томасовской прецессии является вращающейся. В ней согласно (4.66) при $\gamma \approx 1$

$$\boldsymbol{H}' = \frac{1}{c}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{E}$$

где $\boldsymbol{E}$ - электрическое поле в лабораторной системе. Спиновый механический момент в сопутствующей системе изменяется по закону

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)_{\text{rot}} = \boldsymbol{m}_s\times\boldsymbol{H}'$$

Переходя в лабораторную систему, имеем

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)_{lab} = \left(\frac{ds}{dt}\right)_{\text{rot}} + \omega_T\times s = m_s\times\boldsymbol{H}_{eff}$$

где

$$\boldsymbol{H}_{eff} = \boldsymbol{H}' - \frac{m}{ceg}\dot{\boldsymbol{v}}\times\boldsymbol{v}$$

играет роль эффективного магнитного поля, действующего на спиновый магнитный момент. Энергия взаимодействия имеет обычный вид

$$U = -m_s\cdot\boldsymbol{H}_{eff}$$

[420] Определение запаздывающих потенциалов см. в главе 5 .

Подставляя

$$\dot{\boldsymbol{v}} = \frac{e}{m}\boldsymbol{E} \quad \text{и} \quad \boldsymbol{E} = -\frac{d\varphi}{dr}\frac{r}{r}$$

а также $\boldsymbol{l} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} = \boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v}$, находим

$$U = \frac{e(g-1)}{2m^2c^2}\frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dr}l \cdot s \tag{4.139}$$

Это выражение используется в квантовой теории атомов и называется энергией спин-орбитального взаимодействия.

4.84. $U = -\frac{1}{2m^2c^2}\frac{1}{r}\frac{dV}{dr}l \cdot s$.

Энергия взаимодействия спина нуклона с ядром возникает только за счет томасовской прецессии и должна быть добавлена к основной энергии взаимодействия $V(r)$. Спин-орбитальное взаимодействие нуклонов необходимо учитывать при расчете ядерных уровней.

4.85. В искомое ковариантное уравнение могут входить 4 -векторы S^k и u^k, характеризующие частицу, и тензор поля F_{ik}. В системе покоя $S^k = (0, s), u^k = (c, 0)$, откуда следует $S^k u_k = 0$. Этот инвариант равен нулю в любой системе, поэтому его дифференцирование по собственному времени дает $\left(dS^k/d\tau\right) u_k + S^k \left(du^k/d\tau\right) = 0$, или, с учетом уравнения движения (4.53),

$$\frac{dS^k}{d\tau}u_k = -\frac{e}{mc}S^k F_{kl}u^l \tag{1}$$

Искомое уравнение должно быть согласовано с (1) и в системе покоя частицы принимать форму (4.80). Будем искать уравнение в виде

$$\frac{dS^k}{d\tau} = aF^{kl}S_l + bu^k F^{il}u_i S_l \tag{2}$$

где a и b - инвариантные постоянные. Мы воспользовались тем, что вектор S_l и тензор F^{kl} могут входить в правую часть лишь линейно. Воспользовавшись уравнением (1), находим связь между постоянными a и b:

$$a + bc^2 = \frac{e}{mc} \tag{3}$$

Перейдем теперь в уравнении (2) в сопутствующую систему координат. При $k = 1, 2, 3, \tau = t$ получим

$$\frac{d\boldsymbol{s}}{dt} = a\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{H} \tag{4}$$

Но это уравнение должно совпасть с нерелятивистским трехмерным уравнением движения спина (4.80). Из сравнения находим

$$a = g\kappa_0 = \frac{ge}{2mc} \tag{5}$$

Постоянную b находим из (3):

$$b = \frac{e}{mc^3}\left(1 - \frac{g}{2}\right) \tag{6}$$

Таким образом, ковариантное квазиклассическое уравнение движения спинового момента имеет вид

$$\frac{dS^k}{dt} = \frac{ge}{2mc}F^{kl}S_l + \frac{e}{mc^3}\left(1 - \frac{g}{2}\right)u^k F^{il}u_i S_l \tag{7}$$

Впервые уравнение такого типа было получено Я.И.Френкелем [21] еще в 1926 г. Впоследствии оно было переоткрыто еще несколькими авторами (см. подробности и ссылки в статье [Тернов и Бордовицын (1980)]). Это уравнение позволяет описывать эволюцию среднего спина частицы (который называют также вектором поляризации) в плавно меняющихся электромагнитных полях при квазиклассическом движении частицы. Некоторые новые сведения по этому вопросу можно почерпнуть из статьи [Померанский и др. (2000)].

В случае заряженных лептонов (электронов и позитронов, мюонов, таонов) спиновый магнитный момент $m_s = e\hbar/2mc(g = 2, s = \hbar/2)$ описывается квантовым релятивистским уравнением Дирака. Для электронов $m_s = m_B = e\hbar/2m_ec = 9,27 \times 10^{-24}$ Дж / Тл $= 0,927 \times 10^{-20}$ эрг / Гс магнетон Бора. Та добавка к спиновому магнитному моменту,

$$m_s = \frac{e\hbar}{2mc} + \frac{e\hbar}{4mc}(g-2)$$

которая связана с отличием g от 2, называется аномальным моментом. Ее происхождение разъясняется в главе 6. Уравнение (7) учитывает как нормальный, так и аномальный магнитные моменты. Полное квантовое описание частиц со спином см. в [Ахиезер и Берестецкий (1981)], [Берестецкий и др. (1989)].

4.86. $S^0 = \gamma \boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{v}/c, \boldsymbol{S} = \boldsymbol{s} + \frac{\gamma^2}{\gamma+1}\frac{(\boldsymbol{s}\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{v}}{c^2}$,

где γ - релятивистский фактор частицы.

4.87. Используя уравнение (7) задачи (4.85), запишем его для пространственных и временной компонент S^k в трехмерных обозначениях:

$$\frac{d\boldsymbol{S}}{dt} = \frac{a}{c\gamma}(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{E} + \frac{a}{\gamma}\boldsymbol{S}\times\boldsymbol{H} + b\gamma\boldsymbol{v}\left[c\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{S} - \frac{1}{c}(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{v})(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{v}) - \boldsymbol{H}\cdot(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{S})\right]$$

$$\frac{dS^0}{dt} = \frac{a}{\gamma}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{S} + b\gamma\left[c^2\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{S} - (\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{v})(\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{v}) - c\boldsymbol{H}\cdot(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{S})\right]$$

Выразив S и S^0 через s и воспользовавшись значениями a и b из задачи 4.85, получим после простых, но громоздких вычислений, которые следует производить очень внимательно и аккуратно, уравнения, описывающие

эволюцию спина s:

$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\boldsymbol{s}}{dt} &= \frac{e}{2mc}(g-2+2/\gamma)\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{H} + \\
&+ \frac{e\gamma}{2mc^3(\gamma+1)}(g-2)(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{H})(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{s}) + \\
&+ \frac{e}{2mc^2}\left(g - \frac{2\gamma}{\gamma+1}\right)\boldsymbol{s}\times[\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{v}]
\end{aligned} \tag{1}$$

$$\frac{ds_\parallel}{dt} = \frac{e}{2mcv}(g-2)\boldsymbol{s}_\perp\cdot(\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{v}) + \frac{e}{2mv}\left(g/\gamma^2 + 2 - g\right)(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{s}_\perp). \tag{2}$$

$$

Здесь $s_\parallel, s_\perp$ - компоненты, параллельная и перпендикулярная $\boldsymbol{v}$. Последнее уравнение при $v \to 0$ теряет силу, так как невозможно определить $s_\parallel$и $s_\perp$.

[421] Френкель Яков Ильич (1894-1952) - выдающийся советский физик-теоретик, автор многих работ и первого современного полного курса теоретической физики.

При $\boldsymbol{E}=0$ изменение угла между спином и импульсом частицы может, согласно (2), происходить только при наличии у нее аномального магнитного момента, т. е. при $g\neq$).
а) При $\boldsymbol{v}\perp\boldsymbol{H}$ и $\boldsymbol{E}=0$ имеем $\gamma=\text{const}$. Уравнение движения спина

$$\frac{ds}{dt}=\boldsymbol{\Omega}_s\times s,\quad \boldsymbol{\Omega}_s=-\frac{ec\boldsymbol{H}}{\mathscr{E}}-\frac{e}{2mc}(g-2)\boldsymbol{H}$$

совпадает по форме с уравнением движения импульса частицы (см. задачу 4.52):

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt}=\boldsymbol{\Omega}_p\times p,\quad \boldsymbol{\Omega}_p=\frac{ec\boldsymbol{H}}{\mathscr{E}}$$

отличаясь от нее только угловой скоростью вращения:

$$\boldsymbol{\Omega}_s=\boldsymbol{\Omega}_p-\frac{e}{2mc}(g-2)\boldsymbol{H}$$

Спин прецессирует вокруг направления магнитного поля. Угловая скорость прецессии отличается от скорости вращения импульса при наличии аномального магнитного момента.
б)

$$\frac{ds}{dt}=\boldsymbol{\Omega}\times s,\quad \boldsymbol{\Omega}=-\frac{ecg\boldsymbol{H}}{\mathscr{E}}$$

Импульс не прецессирует, а прецессия спина обусловлена полным магнитным моментом.
в) Если ось Ox совместить с $\boldsymbol{E}$, а движение частицы происходит в плоскости xOy, то уравнение (1) дает

$$\dot{s}_z=0,\quad \dot{s}_x=-\Omega s_y,\quad \dot{s}_y=\Omega s_x,\quad \Omega=-\frac{eEv_y}{2mc^2}\left(g-\frac{2\gamma}{\gamma+1}\right)$$

Это - прецессия вокруг направления, перпендикулярного плоскости движения (т. е. вокруг орбитального момента импульса, сохраняющего свое направление, но не величину) с переменной угловой скоростью Ω. Проекция $\zeta=s_xe_x+s_ye_y$ спина на плоскость xOy в свою очередь вращается со скоростью $\dot{\varphi}$, которую можно найти из уравнения (7) задачи 4.85. Запишем (рис. 4.17)

$$s_\parallel=\zeta_\parallel=\zeta\cos\varphi,\quad s_\perp\cdot\boldsymbol{E}=\zeta_\perp\cdot\boldsymbol{E}=-\zeta E\sin\varphi\sin\alpha=-\zeta E\,(v_y/v)\sin\varphi$$

Подставив это в (2), находим

$$\dot{\varphi}=\frac{eEv_y}{2mv^2}\left(g/\gamma^2+2-g\right)$$

4.88. В отсутствие магнитного поля ($\boldsymbol{H}=0$) в нерелятивистском приближении ($\gamma=1$) имеем из уравнения (1) предыдущей задачи

$$\dot{\boldsymbol{s}}=\boldsymbol{m}_s\times\boldsymbol{H}_{eff},\quad \boldsymbol{H}_{eff}=-\frac{1}{c}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{E}-\frac{2mc}{eg}\boldsymbol{\omega}_T$$

Последнее слагаемое и описывает томасовскую прецессию.
4.89. Отражение происходит при антипараллельной ориентации магнитного момента и поля, если угол скольжения α достаточно мал, так что $\sin\alpha\leqslant\sqrt{m_nH/T}$.
4.90. Движение нейтрона вдоль провода равномерно. Движение в плоскости, перпендикулярной проводу, происходит в потенциальном поле $U=\pm2m_n\mathscr{J}/cr$. Следовательно, проекции траекторий нейтрона на эту плоскость имеют тот же вид, что и траектории относительного движения двух частиц с зарядами e и e',

взаимодействующих по закону Кулона (см. задачу 4.66). При этом в решении данной задачи нужно заменить ee' на $\pm 2m_n\mathscr{J}/c$, а под $\mathscr{E} = M\dot{r}^2/2 + l^2/2Mr^2 + U(r)$ - понимать энергию поперечного движения ($l = Mr^2\dot{\alpha}$ - момент импульса). В частности, при $\mathscr{E} < 0$ нейтроны совершают финитное движение около провода.

4.91. $l(\alpha) = \frac{m_n\mathscr{Z}}{cMv_0^2\sin^2\alpha/2}$.

4.94. Частица дрейфует под действием эффективного электрического поля $\boldsymbol{E}_{eff} = \mathscr{F}/e$ со скоростью

$$\boldsymbol{v}_d = \frac{c}{eH^2}\mathscr{F} \times \boldsymbol{H}$$

4.95. В приближении нулевого ларморова радиуса частица движется вдоль изогнутой силовой линии со скоростью $v_\parallel$, испытывая при этом действие центростремительной силы

$$\mathscr{F}_c = -\frac{\mathscr{E}v_\parallel^2}{c^2\rho}\boldsymbol{n} \tag{1}$$

где $\mathscr{E}$ - полная энергия частицы, ρ - локальный радиус кривизны силовой линии, n - орт главной нормали. Из дифференциальной геометрии используем соотношение $\boldsymbol{n}/\rho = (h\cdot\nabla)h$, где h - орт касательной, и с помощью формулы для дрейфовой скорости, полученной в предыдущей задаче, находим скорость центробежного дрейфа

$$\boldsymbol{v}_{dc} = v_\parallel R_\parallel \boldsymbol{h} \times (\boldsymbol{h}\cdot\nabla)\boldsymbol{h} \tag{2}$$

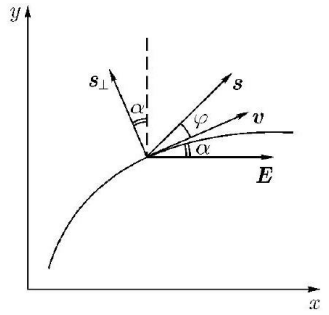


Рис. 4.17

где $R_\parallel = cp_\parallel/e\mathrm{H}$. По порядку величины $v_{de} \approx v_\parallel R/\rho \ll v_\parallel$.

Учет неоднородности электрического поля приводит к членам второго порядка малости $ER/HL \ll 1$. Такой же порядок имеют члены с $\dot{H} = -c\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E}$.

4.96. Изменение во времени магнитного поля порождает электрическое поле согласно уравнению Максвелла $c\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} = -\dot{\boldsymbol{H}}$. Вычислим изменение энергии частицы за один ларморов оборот:

$$\Delta\mathscr{E} = \oint e\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l} = e\int \mathrm{rot}\,\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}dS =$$

$$= e\boldsymbol{n}\cdot\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E}\pi R_\perp^2 = -\frac{e}{c}\pi R_\perp^2\dot{\boldsymbol{H}}\cdot\boldsymbol{n} = +\frac{e}{c}\pi R_\perp^2\dot{H}$$

Изменение знака в последнем равенстве произошло из-за того, что нормаль n к ларморовскому кружку, согласованная с направлением обхода по правилу правого винта, направлена противоположно магнитному полю. Поделим
далее обе части последнего равенства на ларморов период T_L. Имеем в левой части $\Delta\mathscr{E}/T_L = v_\perp\Delta p_\perp/T_L = v_\perp\dot{p}_\perp$. Аналогичным образом в правой части получаем $(e/2c)\,(2\pi R_\perp/T_L)\,R_\perp\dot{H} = 2^{-1}v_\perp p_\perp\dot{H}/H$. В итоге имеем постоянство адиабатического инварианта:

$$\frac{d}{dt}\frac{p_\perp^2}{H} = 0$$

4.97. Полная скорость частицы складывается из скорости ведущего центра $\boldsymbol{v}_c$(4.90) и скорости $\dot{r}_\perp$ ларморова вращения относительно ведущего центра. Мгновенная скорость изменения энергии частицы $\dot{\mathscr{E}}$ выражается обычной формулой

$$\dot{\mathscr{E}} = e\boldsymbol{E}\cdot(\boldsymbol{v}_c + \dot{\boldsymbol{r}}_\perp)$$

Это выражение нужно усреднить по ларморовскому периоду: $\dot{\mathscr{E}} = T_L^{-1}\oint \dot{\mathscr{E}}dt$. Первое слагаемое, $e\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{v}_c$, содержит только плавно меняющиеся величины и при усреднении не изменится. Второе слагаемое преобразуется следующим образом:

$$T_L^{-1}\oint e\boldsymbol{E}\cdot\dot{\boldsymbol{r}}_\perp dt = eT_L^{-1}\oint \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{r}_\perp = -(e/2)v_\perp R_\perp \boldsymbol{h}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{E}$$

4.98. Адиабатическим инвариантом для релятивистской частицы является величина $\gamma\mu$, где $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ - лоренц-фактор, $\mu = p_\perp v_\perp/2H$ - магнитный момент. Если кинетическая энергия частицы сохраняется, то $\gamma = \text{const}$ и $\mu = \text{const}$. Последнее соотношение выполняется для нерелятивистской частицы, у которой $\gamma \approx 1$, и в том случае, когда ее энергия не сохраняется.

4.99. $\mathscr{F} = -\boldsymbol{\mu}\cdot\nabla H$,

где $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{h}p_\perp v_\perp/2H$ - магнитный момент, создаваемый вращением частицы.

4.100. $M\dot{\boldsymbol{V}} = -\nabla U_{eff}(\boldsymbol{R}), U_{eff}(\boldsymbol{R}) = -\frac{\beta}{2}E^2(\boldsymbol{R})$,

где $\boldsymbol{R}$ и $\boldsymbol{V} = \dot{\boldsymbol{R}}$ - радиус-вектор и скорость центра масс, M - полная масса системы.

4.101. $M\dot{\boldsymbol{V}} = -U_{\text{eff}}(\boldsymbol{R}) + \frac{\beta}{c}[(\boldsymbol{V}\cdot\nabla)\boldsymbol{E}(\boldsymbol{R})\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{R})]$.

4.102. Выбрав векторный потенциал магнитного поля в виде $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{H}\times\boldsymbol{r}/2$, запишем функцию Лагранжа нерелятивистской системы в виде

$$L = \sum_a \frac{mv_a^2}{2} + \frac{e}{2c}\sum_a \boldsymbol{v}_a\cdot[\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{r}_a] - U \tag{1}$$

В отсутствие магнитного поля, но в системе отсчета (штрихованной), вращающейся с угловой скоростью $\boldsymbol{\Omega}$, имеем $\boldsymbol{r}_a = \boldsymbol{r}'_a + \boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}'_a$, и функция Лагранжа приобретет вид

$$L_\Omega = \sum_a \frac{mv_a'^2}{2} + \sum_a m\boldsymbol{v}'_a\cdot[\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}'_a] - U + \sum_a \frac{m}{2}\left[\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}'_a\right]^2 \tag{2}$$

При выполнении условия $|\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{r}'_a| \ll |\boldsymbol{v}'_a|$ в (2) можно пренебречь последним членом. Потенциальная энергия системы вообще не изменяется при переходе во вращающуюся систему. Поэтому функции L и L_Ω становятся одинаковыми при $\boldsymbol{\Omega} = e\boldsymbol{H}/2mc$ и достаточно слабом поле. Но это означает, что и поведение частиц одинаково: система частиц, наблюдаемая в лабораторной системе отсчета, при наложении магнитного поля приобретает угловую скорость $\boldsymbol{\Omega}_L = -\boldsymbol{\Omega}$. Знак минус появляется потому, что направления вращения частиц относительно координатных осей и осей относительно частиц противоположны. Условие малости поля означает, что частота ларморовской прецессии мала по сравнению с собственными частотами квазипериодического движения частиц в системе.

4.103. $\sin\vartheta > \sqrt{H/H_m}$.

4.104. $R = 1 - H/H_m$.

4.105. $r = r_0\sqrt{H_0/H}$,

где r_0 - расстояние ведущего центра до оси ловушки в поле H_0, r - расстояние после изменения поля до величины H. Возрастание поля вызывает сжатие плазмы к оси

ловушки.
4.106. Ведущий центр перейдет на силовую линию $r = l, \varphi = 2cq/Hv_{\parallel}l^2$.
4.107. Ведущий центр протона движется равномерно по окружности радиуса $r = r_\star$, лежащей в плоскости экватора, с угловой скоростью

$$\omega_d = \frac{3c\mathscr{E}}{e\mu}r - \frac{3GmM}{e\mu}$$

где G - гравитационная постоянная; $R \approx 226$ км, $T \approx 14,9$ с.
4.108. а) Из уравнения (4.90), вычисляя произведения $\boldsymbol{h} \times \nabla H$ и $\boldsymbol{h} \times (\boldsymbol{h} \cdot \nabla)\boldsymbol{h}$ для поля магнитного диполя, находим, что движение поперек магнитных силовых линий сводится к азимутальному дрейфу, при котором расстояние до центра Земли и широтный угол не меняются. Кроме того, ведущий центр движется вдоль силовой линии, уравнение которой имеет вид

$$r = r_0 \cos^2 \lambda \tag{1}$$

где r_0 - расстояние в экваториальной плоскости от силовой линии до центра. При этом энергия частицы остается постоянной вследствие пренебрежения гравитационным полем.

Используя известные выражения для напряженности поля магнитного диполя, а также уравнения (4.89), (1) и (4.90), находим угловую скорость азимутального дрейфа:

$$\omega_d = \frac{v_{d\alpha}}{r} = -\frac{3cpvr_0 \sin^2 \alpha}{2e\mu} \frac{1 + \sin^2 \lambda}{\cos^3 \lambda \left(3 \sin^2 \lambda + 1\right)} - \\ - \frac{cpvr_0 \cos^3 \lambda \left(3 \sin^2 \lambda - 1\right)}{e\mu \left(3 \sin^2 \lambda + 1\right)^2} \tag{2}$$

Здесь p и v - импульс и скорость протона.
б) С помощью уравнения (4.89) находим условие, определяющее $\lambda_m > 0$:

$$\frac{\cos^6 \lambda_m}{\sqrt{3 \sin^2 \lambda_m + 1}} = \sin^2 \alpha \tag{3}$$

Частицы движутся в области $-\lambda_m \leqslant \lambda \leqslant \lambda_m$.
в) Протон достигает поверхности Земли при условии

$$r_0 \cos^2 \lambda_m \leqslant r_\star,$$

где $r_\star$ - радиус земного шара.
4.109. В аксиально симметричной ловушке при $L = \text{const}$ продольное движение частицы строго периодично. Поэтому при медленном изменении L будет сохраняться продольный адиабатический инвариант

$$I_{\parallel} = \frac{1}{2\pi} \oint P_{\parallel} dl = \text{ const}$$

где

$$P_{\parallel} = \gamma m v_{\parallel} + (e/c) A_{\parallel}$$

- продольная компонента обобщенного импульса, интегрирование проводится вдоль силовой линии.

Продольная часть векторного потенциала $A_\parallel$не влияет на величину магнитного поля $\boldsymbol{H} = \operatorname{rot} \boldsymbol{A}$, и ее можно положить равной нулю, $A_\parallel = 0$. Поэтому

$$I_\parallel = \frac{1}{2\pi} \oint p_\parallel dl$$

где $p_\parallel = \gamma m v_\parallel$- продольная компонента обычного импульса.
Если в большей части ловушки поле однородно, а размеры областей, где поле нарастает, малы, то за один период колебаний $p_\parallel \approx$ const и $I_\parallel \approx p_\parallel L/\pi$. Условие адиабатической инвариантности принимает вид

$$p_\parallel(t) L(t) = \text{ const}$$

Условие медленности изменения поля: $|\dot{L}| \ll |v_\parallel|$. Изменение энергии со временем:

$$\mathscr{E}^2(t) = \mathscr{E}_0^2 + c^2 p_{0\parallel}^2 \left(L_0 - L(t)\right)/L(t)$$

где индексом 0 обозначены начальные значения.
4.110. $\mathscr{E}_2 = \sqrt{m^2c^4 + c^2 p_1^2 H_2/H_1}$.
Для получения этого результата следует доказать постоянство магнитного потока через площадь, охватываемую траекторией частицы за ларморов период. См. литературу [Топтыгин (1983), приложения III, IV]
4.111. См. оригинальную работу [Ходжаев и др. (1982)], а также [Топтыгин (1983), приложение IV]
4.112. $\frac{m\ddot{X}}{\left(1-\dot{X}^2/c^2\right)^{3/2}} = -\frac{dU_{eff}}{dX}, U_{eff}(X,\dot{X}) = \frac{e^2\left(1-\dot{X}^2/c^2\right)^{3/2}}{4m\omega^2} E^2(X)$.
4.113. а) $U_{\text{eff}}(X) = U_0(1 - \cos\varphi) + \frac{1}{2}U_1 \sin^2\varphi$, где $\varphi = 2\pi X/L, U_1 = c^2E_0^2/2m\omega^2, |e|E_0/m\omega^2 \ll L$.
б), в) При $U_1 < U_0$ центры расположены в точках $X_n = nL$, седла в точках $\widetilde{X}_n = (n+1/2)L, n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ Частота собственных колебаний вблизи всех центров одинакова,

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{L}\sqrt{\frac{U_0 + U_1}{m}}$$

Фазовый портрет см. на рис. 4.18 а .
При $U_1 > U_0$ центры расположены в точках $X_{1n} = nL$ (частота собственных колебаний $\omega_{01} = (2\pi/L)\left[\left(U_0 + U_1\right)/m\right]^{1/2}$) и $X_{2n} = (n+1/2)L$ (частота собственных колебаний $\omega_{02} = (2\pi/L)\left[\left(U_1 - U_0\right)/m\right]^{1/2}\Big), n = 0, \pm1, \ldots$ Седла находятся в точках $\widetilde{X}_n$, определяемых условием $\cos\widetilde{\varphi}_n = -U_0/U_1$. Существенно, что в этом случае появляются дополнительные точки устойчивого равновесия $X = X_{2n}$, которые при $U_1 < U_0$ были неустойчивыми, и фазовый портрет претерпевает заметные изменения (рис. 18 б).

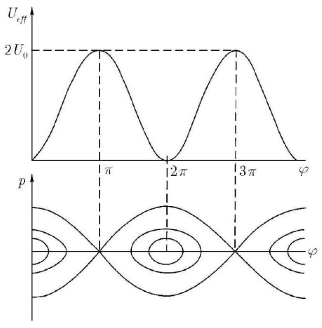


Рис. 4.18 а

4.114. При $U_0 > U_1$ центры расположены в точках $X_n = nL$, седла в точках $\widetilde{X}_n = (n + 1/2)L, n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ При $U_0 < U_1$ точки X_n становятся седлами, сохраняются седла в точках $\widetilde{X}_n$, но возникают центры в точках, определяемых условием $\cos\widetilde{\varphi}_n = U_0/U_1 < 1$.

4.115. В гауссовой системе единиц размерности E и H, а также e_0 и g совпадают:

$$g_{\min} = \frac{e_0}{2}\left(\frac{\hbar c}{e_0^2}\right) \approx \frac{137}{2}e_0 \gg e_0$$

$$\frac{d\mathscr{E}}{dl} = gH \text{ дин / см } = (300 \times 137/2)H \text{ эВ / см.}$$

При $H = 10^3$ Э имеем $d\mathscr{E}/dl = 20,55$МВ/ см.

4.116. Вычисляя $H = \operatorname{rot} \boldsymbol{A}$, находим в области, в где $r \neq 0, \vartheta \neq \pi$ магнитное поле $H_r = g/r^2, H_\vartheta = H_\alpha = 0$ или $\boldsymbol{H} = g\boldsymbol{r}/r^3$ - «кулоновское» поле точечного магнитного заряда. При $r \to 0$ это поле имеет такую же особенность, как и поле точечного электрического заряда. Но потенциал Дирака имеет особенность также при $\vartheta \to \pi (r \to z)$, т.е. на всей отрицательной полуоси $0 > z > -\infty$. На этой особенности дифференциальное выражение $\operatorname{rot} \boldsymbol{A}$ не определено.

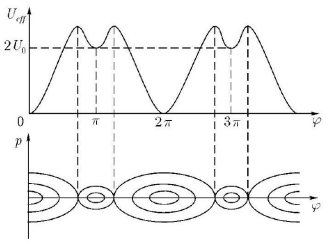


Рис. 4.18 б

Чтобы найти поле на этой сингулярной дираковской «нити», подсчитаем его поток через круг малого радиуса $s \to 0$, плоскость которого перпендикулярна оси Oz, а центр лежит на оси:

$$\int\limits_{\pi s^2} \boldsymbol{H} \cdot d\boldsymbol{S} = \oint \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{l} = \begin{cases} 4\pi g, & z < 0 (\vartheta \to \pi) \\ 0, & z > 0 (\vartheta \to 0) \end{cases}$$

Конечное значение магнитного потока через бесконечно малую площадку свидетельствует о сингулярности магнитного поля на отрицательной полуоси Oz:

$$H_z = \begin{cases} 4\pi g\delta(x)\delta(y), & z < 0 \\ 0 & z > 0 \end{cases}$$

Полный магнитный поток через замкнутую поверхность, окружаюшую начало координат, равен нулю, так как поток нити направлен противоположно потоку точечного заряда.

Таким образом, кроме точечного магнитного заряда потенциал Дирака описывает сингулярную «нить». Чтобы сделать ее ненаблюдаемой, Дирак накладывает на волновые функции частиц требование $\psi = 0$ на сингулярной нити. Этот запрет выглядит искусственным и, по-видимому, не обеспечивает ненаблюдаемости нитей. Обсуждение проблемы магнитного монополя в рамках традиционной электродинамики и квантовой механики, а также оригинальные статьи Дирака читатель может найти в сборнике [Монополь Дирака (1970)]. Дальнейшие исследования, основанные на свойствах калибровочных полей Янга-Миллса, см. в [Соколов и др. (1986)], [Рубаков (1999)], [Гальцов и др. (1991)].

Однако, сушествует простая макроскопическоя модель дираковского монополя с сингулярной нитью. Торец длинного тонкого соленоида создает магнитное поле, близкое полю монополя, на расстояниях, больших по сравнению с диаметром соленоида, но малых по сравнению с его длиной.

4.117. Уравнение движения:

$$\dot{\boldsymbol{p}} = \frac{eg}{cr^3}[\dot{\boldsymbol{r}} \times r] \tag{1}$$

Интегралы движения:

$$c^2p^2 + m^2c^4 = \mathscr{E}^2 = \text{const}, \quad [\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}] - \frac{eg}{c}\frac{\boldsymbol{r}}{r} = \boldsymbol{J} = \text{ const.} \tag{2}$$

Закон движения нерелятивистской частицы в сферических координатах (r, ϑ, φ) с полярной осью, направленной вдоль J:

$$r^2 = r_0^2 + v^2\,(t - t_0)^2$$
$$\varphi = \frac{1}{\sin\vartheta}\,\text{arctg}\,\frac{v\,(t - t_0)}{r_0}, \quad \text{tg}\,\vartheta = -\frac{mvcr_0}{eg} = \text{ const.} \tag{3}$$

4.118.

$$\mathscr{L} = \frac{\rho}{2}\left(q^\alpha_{,t}\right)^2 - \frac{\mu}{4}\left(q^\alpha_{,\beta} + q^\beta_{,\alpha} - \frac{2}{3}\delta^\alpha_\beta q^\gamma_{,\gamma}\right)^2 - \frac{K}{2}\left(q^\alpha_{,\alpha}\right)^2$$
$$\mathscr{H} = \frac{1}{2\rho}\left(\pi^\alpha\right)^2 + \frac{\mu}{4}\left(q^\alpha_{,\beta} + q^\beta_{,\alpha} - \frac{2}{3}\delta^\alpha_\beta q^\gamma_{,\gamma}\right)^2 + \frac{K}{2}\left(q^\alpha_{,\alpha}\right)^2$$

где $\pi^\alpha = \rho q^\alpha_{,t}$. Указанному в условии задачи уравнению движения соответствуют различные лагранжианы, отличающиеся преобразованием (4.94). Приведенные в ответе выражения выбраны так, что гамильтониан имеет смысл плотности энергии деформированного упругого тела.

4.119. $S = S_g + S_m + S_{\text{int}}$,

где

$$S_g = -\frac{1}{8\pi cG}\int\limits_\Omega (\nabla\varphi)^2 d^4x$$

- действие для гравитационного поля, $G = 6,67 \times 10^{-8}\ \text{cm}^3/\cdot\,\text{c}$ - гравитационная постоянная,

$$S_m = \int\limits_{t_1}^{t_2}\sum_{b=1}^{N}\frac{m_b}{2}\left(\dot{\boldsymbol{r}}_b\right)^2 dt$$

- действие для свободных частиц,

$$S_{int} = -\sum_{b=1}^{N}\int\limits_{t_1}^{t_2} m_b\varphi\left(\boldsymbol{r}_b, t\right) dt = \int\limits_\Omega \rho\varphi d^4x$$

- член взаимодействия, $\rho(\boldsymbol{r},t)=\sum\limits_b m_b\delta\left(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_b(t)\right)$ - плотность массы точечных частиц, записанная через дельта-функцию.

Уравнение для потенциала получается варьированием величины $S_g+ +S_{\text{int}}$ по φ при фиксированных координатах частиц $\boldsymbol{r}_a$ и дает

$$\Delta\varphi=4\pi G\rho(r,t)$$

уравнения движения частиц выводятся путем варьирования радиусов-векторов $\boldsymbol{r}_b$ в $S_{int}+S_m$:

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_a=-\nabla\varphi\left(\boldsymbol{r}_a,t\right)$$

В случае точечных частиц последнее уравнение некорректно, так как потенциал в правой части содержит бесконечный член самодействия (вида $-Gm_a/\left|\boldsymbol{r}_a-\boldsymbol{r}_a\right|$). Правильное уравнение движения a-й частицы под действием всех остальных получится, если из полного потенциала φ исключить потенциал, создаваемый a-й частицей:

$$\ddot{\boldsymbol{r}}_a=-\nabla\varphi'\left(\boldsymbol{r}_a,t\right)$$

где

$$\varphi'\left(\boldsymbol{r}_a,t\right)=-\sum_{b=1}^{N}\frac{Gm_b}{\left|\boldsymbol{r}_a-\boldsymbol{r}_b\right|}$$

штрих у суммы означает отсутствие члена с $b=a$. Отметим, что в уравнение движения не вошла масса частицы. Это означает, что все тела любой массы и природы движутся в заданном гравитационном поле совершенно одинаково.

4.120. $S=S_f+S_{\text{part}}+S_{\text{int}}$, где

$$S_f=\frac{1}{8\pi c}\int\limits_{\Omega}(\nabla\varphi)^2d^4x$$

- действие для электрического поля, $\varphi(\boldsymbol{r},t)$ - электростатический потенциал;

$$S_{\text{part}}=\sum_{b=1}^{N}\int\limits_{t_1}^{t_2}\frac{m_b}{2}\left(\dot{r}_b\right)^2dt$$

- действие для свободных частиц;

$$S_{\text{int}}=-\sum_{b=1}^{N}\int\limits_{t_1}^{t_2}e_b\varphi\left(\boldsymbol{r}_b,t\right)dt=-\frac{1}{c}\int\limits_{\Omega}\rho\varphi d^4x$$

- взаимодействие заряженных частиц и поля; e_b - заряд частицы,

$$\rho(\boldsymbol{r},t)=\sum_{a=1}^{N}e_a\delta\left(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_a(t)\right)$$

- объемная плотность электрического заряда.

Уравнения для поля и частиц:

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho, \quad m_a\ddot{r}_a = -e_a\nabla\varphi'$$

В последнем уравнении из правой части следует исключить расходящийся вклад в потенциал a-й частицы, описывающий эффект самодействия.
4.121.

$$S = \int\limits_{\Omega}\left[-\frac{(\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A})^2}{8\pi c} + \frac{1}{c^2}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{j}\right]d^4x$$

где $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ - векторный потенциал, определяющий напряженность магнитного поля.
4.122.

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + U\psi$$

- уравнение Шредингера для волновой функции нерелятивистской частицы в потенциальном поле $U(\boldsymbol{r}, t)$.
  4.123.

$$\mathscr{H} = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\psi_{,t}}\psi_{,t} + \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\psi^*_{,t}}\psi^*_{,t} - \mathscr{L} = \frac{\hbar^2}{2m}|\nabla\psi|^2 + U|\psi|^2$$

Полная энергия поля:

$$H = \int\mathscr{H}d^3x = \int\psi^*\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + U\right)\psi d^3x$$

последнее выражение получено путем интегрирования по частям в предположении $\psi \to 0$ при $r \to \infty$. Оно совпадает с квантовомеханическим средним значением энергии частицы. Если потенциальная энергия $U(\boldsymbol{r})$ не зависит от времени и частица находится в состоянии с определенной энергией, т. е. $\widehat{H}\psi = E\psi$, где $\widehat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + U$ - квантовомеханический оператор Гамильтона, то $H = E$. Это означает, что энергия, вычисленная по формулам теории поля как интеграл по всему трехмерному пространству, совпадает с энергией квантовой частицы.

4.124.

$$\mathscr{L} = \frac{i\hbar}{2}\left(\psi^*\psi, t - \psi\psi^*_{,t}\right) - \frac{\hbar^2}{2m}\left|\nabla\psi + \frac{ie}{\hbar c}\boldsymbol{A}\psi\right|^2 - e\varphi|\psi|^2$$

Уравнение (4.101) получается из приведенного лагранжиана по алгоритму (4.95):

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\psi^*} - \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\psi^*_{,t}} - \frac{d}{dx_\alpha}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\psi^*_{,\alpha}} = 0$$

4.125.

$$\Box\varphi - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\varphi = 0 \tag{1}$$

(уравнение Клейна - Гордона-Фока). Записав решение в виде плоской волны с инвариантной фазой, $\varphi = A\exp\left(ik^l x_l\right)$, где $A = \text{const}$, $k^l = (\omega/c, \boldsymbol{k})$, получим из уравнения Клейна-Гордона - Фока дисперсионное соотношение

$$\frac{\omega^2}{c^2} = k^2 + \frac{m^2c^2}{\hbar^2} \tag{2}$$

Если согласно де-Бройлю интерпретировать произведения $\hbar\omega$ и $\hbar\boldsymbol{k}$ как энергию $\mathscr{E}$ и импульс $\boldsymbol{p}$ частицы, то приходим к релятивистскому соотношению между энергией и импульсом

$$\mathscr{E}^2 = c^2p^2 + m^2c^4 \tag{3}$$

Поскольку волновая функция $\varphi\left(x^k\right)$ однокомпонентна и является скаляром, зависящим только от пространственных 4-координат, она может описывать только частицы без внутренних степеней свободы, т. е. частицы с нулевым спином.

4.126. Из приведенного лагранжиана с помощью (4.95) получаем уравнение движения

$$\Box\varphi + \mu^2\varphi - \lambda\varphi^3 = 0 \tag{1}$$

При малых φ и в пренебрежении нелинейным членом вместо дисперсионного соотношения (2) предыдущей задачи получим

$$\frac{\omega^2}{c^2} = -\mu^2 + k^2 \tag{2}$$

и при $k^2 < \mu^2$ будем иметь чисто мнимые частоты $\omega = ic\sqrt{\mu^2 - k^2}$. Это означает, что решения $\varphi \propto \exp\left(\pm\sqrt{\mu^2 - k^2}ct\right.$ со знаком плюс будут нарастать экспоненциально. Но рост не может быть безграничным, так как нелинейное слагаемое ограничивает амплитуду φ.

Найдем значение $\varphi = \varphi_0$, при котором $V(\varphi)$ имеет минимум. Из условия $\partial V/\partial\varphi^2 = 0$ находим $\varphi_0 = \pm\mu/\sqrt{\lambda}$. Из физических соображений можно ожидать, что поле φ дорастет до значения φ_0 и затем будет колебаться около указанного значения, причем колебаниям поля будут соответствовать кванты - частицы с некоторой действительной и положительной массой.

Для проверки этой гипотезы делаем подстановку $\varphi(x) = \varphi_0 + \eta(x)$, $|\eta| \ll |\varphi_0|$ в лагранжиан и оставляем члены не выше второго порядка:

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\left(\partial^k\eta\partial_k\eta\right) - \mu^2\eta^2 - \frac{\mu^4}{4\lambda}$$

Постоянное слагаемое может быть опущено. Член, содержащий квадрат массы, имеет теперь правильный знак. Сравнивая его с соответствующим слагаемым в уравнении (1) предыдущей задачи, находим массу квантов, соответствуюших возбуждениям η : $m_\eta = \sqrt{2}\mu\hbar/c$. В результате мы приходим к следующей физической картине: указанному в условии задачи потенциалу $V(\varphi)$ соответствуют два низших энергетических состояния (вакуумных
решения) с отличными от нуля значениями поля $\varphi_0 = \pm\mu/\sqrt{\lambda}$. На этом фоне возможны возбужденные состояния, в которых имеется некоторое число квантов - частиц с массой m_η и обычной для релятивистских частиц связью между энергией и импульсом

$$\mathscr{E} = \sqrt{c^2p^2 + m_\eta^2 c^4}, \quad p = \hbar k, \mathscr{E} = \hbar\omega$$

Волновые функции частиц при низких уровнях возбуждений поля могут представлять собой суперпозиции плоских волн с $\omega = \mathscr{E}/\hbar, \boldsymbol{k} = \boldsymbol{p}/\hbar$.

4.128. Имеется всего один скалярный параметр преобразования α. При малом α имеем $\psi' = \psi + i\alpha\psi, x'^k = x^k$, поэтому в общих формулах (4.115) следует положить $\Gamma_a^k = 0, G_{Ba}^A = i, \delta\lambda^a = \alpha$. Обобщенный ток представляет собой 4-вектор: $J_a^k = j^k$, причем, согласно (4.119),

$$j^0 = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\psi_{,t}^*} ic\psi^* - \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\psi_{,t}} ic\psi = c\hbar|\psi|^2 \tag{1}$$

$$j^\beta = \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\psi_{,\beta}^*} i\psi^* - \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial\psi, \beta} i\psi = \frac{i\hbar^2}{2m}\left(\psi\psi_{,\beta}^* - \psi^*\psi_{,\beta}\right. \tag{2}$$

Величина $\rho(\boldsymbol{r}, t) = j^0/c\hbar = |\psi|^2$ неотрицательна, может быть нормирована на единицу (для состояний финитного движения, когда частица все время находится в конечной области пространства) и интерпретируется в квантовой механике как плотность вероятности. 3-вектор $j/\hbar$ представляет собой плотность потока вероятности. Уравнение неразрывности (4.120) приводит к сохранению полной вероятности во времени: $\int \rho(\boldsymbol{r}, t)d^3x = \text{const}$. Возможна и другая, более адекватная интерпретация рассматриваемого закона сохранения для заряженных частиц. Домножая равенства (1), (2) на заряд частицы e, получим плотность электрического заряда $e\rho = \rho_e$ и плотность электрического тока $ej/\hbar = j_e$, создаваемые в обычном 3-мерном пространстве в результате движения частицы по законам квантовой механики. В такой интерпретации нетеровский ток, связянный с фазовым преобразованием волновой функции заряженной частицы, представляет собой четырехмерную плотность электрического тока.

где

4.129. $\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}\boldsymbol{j} = 0$,

$$\rho(\boldsymbol{r}, t) = \frac{i\hbar}{2mc^2}\left(\varphi^*\varphi_{,t} - \varphi\varphi_{,t}^*\right), \quad j = \frac{i\hbar}{2m}\left(\varphi\nabla\varphi^* - \varphi^*\nabla\varphi\right)$$

Интерпретация величины ρ как плотности вероятности невозможна, так как ρ может иметь оба знака. Но произведение $e\rho = \rho_e$ можно рассматривать как плотность электрического заряда, если φ описывает такое поле, квантами которого являются частицы и античастицы, имеющие заряды разных знаков. Релятивистские волновые уравнения и вытекающие из них следствия тесно связаны с понятием античастиц. Об интерпретации уравнения Клейна - Гордона - Фока подробнее см. [Бьеркен и Дрелл (1978), Берестецкий и др. (1989)]

4.130. $j = \frac{i\hbar}{2m}\left(\psi\nabla\psi^* - \psi^*\nabla\psi\right) - \frac{e}{mc}\boldsymbol{A}\psi^*\psi, \rho = \psi^*\psi$.

4.131. Для того, чтобы наблюдаемые величины ρ и $\boldsymbol{j}$ не изменились при калибровочном преобразовании потенциалов

$$\boldsymbol{A} = \widetilde{\boldsymbol{A}} - \nabla f(\boldsymbol{r}, t), \quad \varphi = \widetilde{\varphi} + \frac{1}{c}\frac{\partial f(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t} \tag{1}$$

нужно преобразовать фазу волновой функции:

$$\psi = \widetilde{\psi}\exp\left(\frac{ie}{\hbar c} f(\boldsymbol{r}, t)\right) \tag{2}$$

Преобразование (1) (2) отличается от преобразования фазы с $\alpha = \text{const}$, рассмотренного в задачах 4.128-4.130, своим локальным характером: фазовый

множитель волновой функции зависит теперь от координат и времени. Инвариантность наблюдаемых величин относительно локального фазового преобразования сохраняется только при наличии дополнительного компенсирующего поля, роль которого играет электромагнитное поле.

Обобщение этой простой идеи привело к созданию начиная с 60 -х годов нового научного направления - теории калибровочных полей - и позволило достичь впечатляющих успехов в физике элементарных частиц.

4.132. Выполнив преобразование к новым полевым функциям $A^k(x)$, $\zeta(x), \eta(x)$, получим лагранжиан

$$\begin{aligned}\mathscr{L} = &-\frac{1}{4}\left(\partial_k A_i - \partial_i A_k\right)\left(\partial^k A^i - \partial^i A^k\right) + \\ &+ \frac{g^2}{2}\left(\varphi_0 + \eta\right)^2 A_k A^k + \frac{1}{2}\left(\partial_k \eta \partial^k \eta\right) + \\ &+ \frac{\mu^2}{2}\left(\varphi_0 + \eta\right)^2 - \frac{\lambda}{4}\left(\varphi_0 + \eta\right)^4 .\end{aligned} \tag{1}$$

В отсутствие векторного поля, $A_i = 0$, имеем лагранжиан, уже исследованный в задаче 4.126. Он описывает скалярное поле с вакуумными состояниями, которым отвечают отличные от нуля значения $\varphi_0 = \pm\mu/\sqrt{\lambda}$. Возбуждения поля (его кванты) возникают при $\eta \neq 0$ и имеют массу $m_\eta = \sqrt{2}\mu\hbar/c$.

В отсутствие скалярного поля, $\varphi_0 = \eta = 0$, лагранжиан векторного поля A_k, приобретает вид такой же, как у свободного электромагнитного поля:

$$\mathscr{L}_v^{(0)} = -\frac{1}{4}\left(\partial_k A_i - \partial_i A_k\right)\left(\partial^k A^i - \partial^i A^k\right) \tag{2}$$

Он не содержит никаких постоянных, через которые можно было бы выразить массу частиц, и описывает поле с нулевой массой квантов. Для вакуумного состояния скалярного поля, $\varphi_0^2 = \mu^2/\lambda$ и $\eta = 0$, лагранжиан приобретает вид

$$\mathscr{L}_v = -\frac{1}{4}\left(\partial_k A_i - \partial_i A_k\right)\left(\partial^k A^i - \partial^i A^k\right) + \frac{g^2\mu^2}{2\lambda} A_k A^k + \text{ const.} \tag{3}$$

Уравнение движения при дополнительном условии типа условия Лоренца $\partial_i A^i = 0$ имеет вид

$$\Box A^l - \frac{g^2\mu^2}{\lambda} A^l = 0 \tag{4}$$

Сравнивая (4) с уравнением (1) задачи 4.125, находим массу векторных частиц в рассмотренной модели:

$$m_v = \frac{g\mu\hbar}{c\sqrt{\lambda}} \tag{5}$$

Изложенный механизм возникновения массы у первоначально безмассовых частиц носит название механизма Хиггса. Предполагается, что этот механизм объясняет наличие массы у промежуточных векторных бозонов ($W^\pm$и Z^0, см. таблицу 3.1), наблюдающихся на опыте. Один из «промежуточных бозонов» - фотон - остается безмассовым. Но хиггсовские скалярные частицы - кванты поля η - до сих пор экспериментально не обнаружены. Более подробные сведения см. в содержательном обзоре [Окунь (1988)]

4.133. Из классической механики известно, что инвариантность функции Лагранжа относительно сдвига во времени приводит к сохранению

полной энергии, а относительно сдвига в пространстве - к сохранению полного импульса системы. По аналогии, в случае поля следует отождествить интеграл по всему трехмерному пространству $\mathscr{E} = \int J^{00} d^3x$ с полной энергией поля, а $P^\alpha = (1/c)\int J^{0\alpha} d^3x$ - с его полным импульсом. Следует, однако, помнить, что обобщенные токи определяются неоднозначно. Поэтому требуются дополнительные соображения, чтобы найти удовлетворительные выражения для плотностей соответствующих величин. См. примеры 4.21, 4.22 и задачи 4.135, 4.139.

4.134. Из вида тензора энергии-импульса, записанного через напряженности электромагнитного поля (см. пример 4.21), следует, что его недиагональные элементы обращаются в нуль в том и только в том случае, когда напряженность $\boldsymbol{E}$ параллельна или антипараллельна $\boldsymbol{H}$, либо одна из них равна нулю. При этом

$$T^{00} = -T^{11} = T^{22} = T^{33} = \frac{1}{8\pi}\left(E^2 + H^2\right)$$

если векторы поля направлены вдоль Ox. Все системы отсчета, обладающие таким свойством, были найдены в задаче 4.28. Если поле изменяется в пространстве и во времени, то, вообще говоря, диагонализировать тензор путем перехода в соответствующую инерциальную систему отсчета можно только в одной точке пространства в определенный момент времени.

Диагонализация невозможна, если в исходной системе отсчета $\boldsymbol{E} \perp \boldsymbol{H}$ и $E = H$.

4.135. Добавив в лагранжиан (4.100) слагаемое $-mc^2\psi^*\psi$, находим

$$T^0{}_0 = T^{00} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \psi_{,t}}\psi_{,t} + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \psi^*_{,t}}\psi^*_{,t} - \mathscr{L} = \frac{\hbar^2}{2m}\psi^{,\alpha}\psi^*_{,\alpha} + \left(U + mc^2\right)\psi^*\psi \tag{1}$$

что тождественно плотности функции Гамильтона, вычисленной в задаче 4.123, с добавлением энергии покоя частицы. Далее находим

$$\frac{1}{c}T^{0\alpha} = -\frac{1}{c}T^0{}_\alpha = -\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \psi_{,t}}\psi_{,\alpha} - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \psi^*_{,t}}\psi^*_{,\alpha} = -\frac{i\hbar}{2}\left(\psi^*\psi_{,\alpha} - \psi\psi^*_{,\alpha}\right) \tag{2}$$

Полный импульс, связанный с полем ψ, вычисляется с помощью интегрирования второго слагаемого по частям в предположении обращения в нуль поля на бесконечности,

$$P^\alpha = \frac{1}{c}\int T^{0\alpha} d^3x = \int \psi^* \left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\right)\psi d^3x = \tag{3}$$
$$= -\int \psi^* \widehat{p}_\alpha \psi d^3x = \int \psi^* \widehat{p}^\alpha \psi d^3x$$

и совпадает со средним квантовомеханическим значением импульса частицы.

Поучительно проверить симметрию тензора энергии-импульса. Имеем

$$\frac{1}{c}T^{\alpha 0} = \frac{1}{c}T^\alpha_0 = \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \psi_{,\alpha}}\ \psi_{,t} + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \psi^*_{,\alpha}}\psi^*_{,t}\right) = \tag{4}$$
$$= \frac{\hbar^2}{2mc^2}\left[\left(\partial^\alpha \psi^*\right)\psi_{,t} + \left(\partial^\alpha \psi\right)\psi^*_{,t}\right]$$

По внешнему виду это выражение сильно отличается от $T^{0\alpha}/c$, определяемых уравнением (2). Однако, следует иметь в виду, что с учетом главного члена (энергии покоя) $\psi, t \approx -imc^2\psi/\hbar$, поэтому $T^{\alpha 0}/c \approx i\hbar\psi^*\partial^\alpha\psi/2$ - $-i\hbar\psi\partial^\alpha\psi^*/2$, что совпадает с $T^{0\alpha}$. Наконец, трехмерный тензор $T^{\alpha\beta}$ дает

$$\int T^{\alpha\beta} d^3x = \int \psi^* \widehat{p}^\alpha \widehat{v}^\beta \psi d^3x \tag{5}$$

- среднее квантовомеханическое значение плотности потока импульса.

4.136. Если наблюдатель находится в системе S', то плотность энергии $\mathscr{H} = T'^{00} = T'^{ik}u'_i u'_k/c^2 = T^{ik}u_i u_k/c^2$; плотность проекции импульса на пространственноподобное направление, определяемое единичным вектором $n_k \left(n_k n^k = -1\right)$ записывается в виде $P'_n = T^{ik}u_i n_k/c$.

4.137. В общем случае

$$\oint_S \sigma^{\alpha\beta} dS_\beta = \int\limits_V \left(\frac{\partial \boldsymbol{g}}{\partial t} + \rho \boldsymbol{E} + \frac{1}{c} \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{H} \right)^\alpha d^3x$$

Кроме силы, в правую часть равенства входит изменение импульса поля за единицу времени в рассматриваем объеме.

4.138. В качестве независимых параметров преобразования естественно выбрать шесть независимых компонент антисимметричной матрицы преобразования Лоренца $\delta\Omega_{li} = -\delta\Omega_{il}$, введенной при решении задачи 4.20. Индекс a, входящий в общее выражение (4.119), будет представлять собой совокупность двух векторных индексов, $a = (i, l)$. Имеем

$$x'^l = x^l + \delta\Omega^l{}_i x^i, \quad \delta x^l = \delta\Omega^l{}_i x^i = \Gamma^l_{ij}\delta\Omega^{ij}/2, \quad \Gamma^l_{ij} = \delta^l_i x_j - \delta^l_j x_i \tag{1}$$

(Удобно с самого начала ввести множитель $1/2$, т. е. выбрать $\delta\lambda = \delta\Omega/2$, чтобы получить согласие с известным из механики определением момента).

Из (4.119) с помощью выражений (1) получаем плотность нетеровского тока

$$J^k{}_{mn} = J^k{}_m x_n - J^k{}_n x_m - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q^A, k} G^A_{Bmn} q^B \tag{2}$$

Здесь $J^k{}_l$ - канонический тензор энергии-импульса (4.124), а вид матрицы G^A_{Bmn} определяется природой полевых функций q^A.

а) Пусть $q^A = \psi$ - скалярная комплексная волновая функция нерелятивистской бесспиновой частицы, удовлетворяющая уравнению Шредингера. С помощью (4.100) и (4.124) находим

$$J^0{}_\alpha = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial q^A, 0} q^A{}_{,\alpha} = \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \psi^*_{,0}} \psi^*_{,\alpha} + \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \psi_{,0}} \psi_{,\alpha} = \frac{i\hbar c}{2} \left(\psi^* \psi_{,\alpha} - \psi \psi^*_{,\alpha} \right). \tag{3}$$

Скаляр не изменяется при пространственных поворотах, поэтому $G^A_{Bmn} = 0$. Пользуясь (1) и (2), находим

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \int J^0{}_{\alpha\beta} d^3x = \frac{1}{c} \int \left(J^0{}_\alpha x_\beta - J^0{}_\beta x_\alpha \right) d^3x = \\ = i\hbar \int \psi^* \left(x_\beta \psi, \alpha - x_\alpha \psi_{,\beta} \right) d^3x = \int \psi^* [\boldsymbol{r} \times \widehat{\boldsymbol{p}}]_{\alpha\beta} \psi d^3x \equiv \bar{l}_{\beta\alpha}, \end{aligned} \tag{4}$$

где $\boldsymbol{r} = (-x_1, -x_2, -x_3)$, $\widehat{\boldsymbol{p}} = (-i\hbar\partial_1, -i\hbar\partial_2, -i\hbar\partial_3)$. Таким образом, после интегрирования компонент $J^0{}_{\alpha\beta}/$ по 3 -пространству мы получили среднее квантовомеханическое значение орбитального момента частицы $\bar{l}$, выраженное через компоненты дуального 3 -тензора ($\bar{l}_{12} \to \bar{l}_3$ и т. д.). Обращаем внимание на изменение порядка индексов α, β в правой и левой частях предыдущей цепочки равенств. В общем случае рассмотренное выражение при $G^A_{Bmn} = 0$ можно представить в виде

$$\bar{L}_{\beta\alpha} = \int \left(x_\beta dP_\alpha - x_\alpha dP_\beta \right) \tag{5}$$

где $dP_\alpha = J^0{}_\alpha d^3x/c$ - импульс поля, приходящийся на элемент объема d^3x. Ввиду явного сходства с моментом импульса сплошной среды в механике эту величину называют орбитальным моментом поля. Для скалярного поля он является интегралом движения.

б) Пусть нерелятивистская частица имеет спин 1/2. Ее волновая функция $\Psi(x,\xi) = \psi(x)\chi(\xi)$ представляет собой произведение скаляра ψ на спинор χ - двухкомпонентную величину. При повороте на малый угол $\delta\varphi$
вокруг направления n в 3 -пространстве спинор преобразуется по закону [Ландау и Лифшиц, Квантовая механика]

$$\chi' = (1 + i\boldsymbol{n}\cdot\widehat{\boldsymbol{\sigma}}\delta\varphi/2)\chi \tag{6}$$

где $\widehat{\sigma}$ - вектор, компонентами которого выступают спиновые матрицы Паули. Из сравнения (6) с (1) находим вид матрицы $\widehat{G}$:

$$\widehat{G} = (i/2)\boldsymbol{n}\cdot\widehat{\boldsymbol{\sigma}} \tag{7}$$

Вычисляя последнее слагаемое в (2) и интегрируя его затем по 3-пространству, получаем добавочный член к орбитальному моменту (4) - спиновый момент:

$$S_n = \left(\chi, \frac{\hbar}{2}\boldsymbol{n}\cdot\widehat{\boldsymbol{\sigma}}\chi\right)\int|\psi(x)|^2 d^3x = \frac{\hbar}{2}(\chi, \boldsymbol{n}\cdot\widehat{\boldsymbol{\sigma}}\chi) \tag{8}$$

Здесь получено среднее квантовомеханическое значение проекции спинового момента на направление n. Интеграл от квадрата модуля координатной волновой функции дает единицу в силу условия нормировки.

В общем случае спин поля описывается выражением

$$S_{\alpha\beta} = -\int \frac{\partial\mathscr{L}}{\partial q^A, 0} G^A_{B\beta\alpha} q^B \tag{9}$$

Сохраняющейся величиной в общем случае выступает полный момент $J_{\alpha\beta} = L_{\alpha\beta} + S_{\alpha\beta}$.

4.139. Преобразование координат описывается формулами (1) из решения предыдущей задачи. В качестве полевых функций в электродинамике выступают компоненты 4 -потенциала $q^A(x) = A^l(x)$. При малом повороте четырехмерной системы координат меняется аргумент 4 -потенциала и его проекции на координатные оси. Изменение аргумента означает сдвиг в пространстве, который ввиду однородности 4 -пространства не приводит к изменению полевых функций (ср. с рассмотрением сдвига в задаче 4.132). Изменение проекций 4 -потенциала подчиняется тому же закону, что и преобразование любого 4-вектора, например, радиуса-вектора, т. е.

$$A'^l = A^l + \delta\Omega^l{}_i A^i = A^l + \left(\delta^l_i A_j - \delta^l_j A_i\right)\delta\Omega^{ij}/2. \tag{1}$$

Таким образом, в данном случае во втором слагаемом формулы (2) из решения предыдущей задачи нужно сделать замену

$$G^A_{Ba} q^B(x) \to \delta^l_i A_j(x) - \delta^l_j A_i(x) \tag{2}$$

а вычисление производной $\partial\mathscr{L}/\partial A^l_{,k}$ было проделано в примере 4.21 . В результате находим обобщенный нетеровский ток, который в данном случае является тензором III ранга, антисимметричным по двум нижним значкам i, j:

$$J_{kij} = J_{ki}x_j - J_{kj}x_i + \frac{1}{4\pi}\left(F_{ki}A_j - F_{kj}A_i\right) \tag{3}$$

Хотя полученный тензор в силу теоремы Нетер удовлетворяет дифференциальному закону сохранения $\partial^k J_{kij} = 0$ (в этом легко убедиться и непосредственно), ему присущи два крупных недостатка: он не обладает калибровочной инвариантностью и не имеет структуры механического момента (т. е. векторного произведения радиуса-вектора на импульс). Это наводит на мысль сконструировать тензор плотности момента на основе калибровочно инвариантного и симметричного тензора энергии-импульса T_{ik} (см. (4.126)):

$$M_{kij} = T_{ki}x_j - T_{kj}x_i \tag{4}$$

Вычислим дивергенцию этого тензора:

$$\partial^k M_{kij} = T_{ji} - T_{ij} + x_j\partial^k T_{ki} - x_i\partial^k T_{kj} = 0$$

Полученный результат связан с симметрией ($T_{ji} = T_{ij}$) и дифференциальным законом сохранения ($\partial^k T_{kl} = 0$) тензора энергии-импульса. Таким образом, тензор M_{kij}, как и J_{kij}, удовлетворяет уравнению неразрывности (4.116), вытекающему из теоремы Нетер, и, следовательно, указанные два тензора должны отличаться дивергенцией некоторого антисимметричного тензора IV ранга. Убедимся в этом:

$$\begin{aligned}
&M_{kij} - J_{kij} = \\
&= \frac{1}{4\pi}\left(F_{kl}F^l{}_i x_j - F_{kl}F^l{}_j x_i\right) + \frac{1}{4\pi}F_{kl}\left(A^l_{,i}x_j - A^l_{,j}x_i\right) - \frac{1}{4\pi}\left(F_{ki}A_j - F_{kj}A_i\right) = \\
&= \frac{1}{4\pi}F_{kl}\left(A^l_i x_j - A^l_j x_i\right) + \frac{1}{4\pi}\left(F_{kj}A_i - F_{ki}A_j\right) = \partial^l\left[\frac{1}{4\pi}F_{kl}\left(A_i x_j - A_j x_i\right)\right]
\end{aligned}$$

Таким образом, оба тензора плотности момента, M_{kij} и J_{kij}, совместимы с теоремой Нетер и приводят к одинаковым интегральным сохраняющимся величинам - компонентам антисимметричного тензора II ранга момента импульса:

$$M_{ij} = \frac{1}{c}\int M_{0ji}d^3x = \frac{1}{c}\int J_{0ji}d^3x \tag{5}$$

(в правой части порядок индексов обратный). Но тензор M_{0ij} приводит к более симметричным и наглядным выражениям:

$$M_{ij} = \frac{1}{c}\int\left(x_i T_{0j} - x_j T_{0i}\right)d^3x = \int\left(x_i dP_j - x_j dP_i\right) \tag{6}$$

где $dP_i = T_{0i}d^3x/c$ - импульс поля, заключенный в трехмерном объеме d^3x. Пространственная часть тензора M_{ij} образует трехмерный антисимметричный тензор II ранга, дуальный псевдовектору углового момента поля M:

$$\boldsymbol{M} = \int \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{g}d^3x \tag{7}$$

где

$$c\boldsymbol{g}^\alpha = T^{0\alpha} = -T_{0\alpha}, \quad \boldsymbol{g} = \frac{1}{4\pi c}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}$$

4.140. $M_{kji} = x_i T_{kj} - x_j T_{ki}$,

где $T_{kl} = T^{em}_{kl} + T^{\text{part}}_{kl}$ - полный тензор энергии-импульса, определенный в примере 4.22. Для пространственных компонент $M_{\alpha\beta} = (1/c)\int M_{0\alpha\beta}d^3x$ момента импульса системы находим

$$\boldsymbol{M} = \int \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{g}d^3x + \sum_a \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}_a = \text{ const.} \tag{1}$$

Для интерпретации смешанных компонент $M_{0\alpha}$ введем время t, общее для всех частиц. Тогда из теоремы Нетер следует сохранение величин

$$M_{0\alpha} = ct\,(G_\alpha + P_\alpha) - \frac{1}{c}\left\{\int x_\alpha w d^3x + \sum_a x^a_\alpha \mathscr{E}_a\right\} = \text{const} \tag{2}$$

где $\boldsymbol{G}$ и $\boldsymbol{P}$ - полные импульсы поля и частиц соответственно, w - плотность энергии электромагнитного поля. Введем в рассмотрение точку в 3 -пространстве с радиусом-вектором

$$\boldsymbol{R} = \frac{\int \boldsymbol{r} w d^3x + \sum\limits_a \boldsymbol{r}_a \mathscr{E}_a}{\int w d^3x + \sum\limits_a \mathscr{E}_a} \tag{3}$$

Постоянство компонент $M_{0\alpha}$ означает, что эта точка движется по закону $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{R}_0 + \boldsymbol{V}t$ со скоростью

$$\boldsymbol{V} = \frac{c^2(\boldsymbol{P}+\boldsymbol{G})}{\mathscr{E}_{field} + \mathscr{E}_{\text{part}}}, \quad \text{где} \quad \mathscr{E}_{field} = \int w d^3x, \quad \mathscr{E}_{\text{part}} = \sum_a \mathscr{E}_a \tag{4}$$

которая в силу сохранения полного импульса и полной энергии системы постоянна. Полученные соотношения представляют собой обобщение теоремы механики о равномерном движении центра масс замкнутой системы на случай релятивистских объектов.

4.141. Функция Лагранжа имеет вид

$$L(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{r}) = \frac{mv^2}{2} + \frac{e}{c}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) \tag{1}$$

где $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{H}\times\boldsymbol{r}/2$ - векторный потенциал. Ввиду отсутствия явной зависимости функции Лагранжа от времени сохраняется энергия частицы

$$\mathscr{E} = \boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}} - L = \frac{mv^2}{2} \tag{2}$$

Ввиду инвариантности функции Лагранжа относительно поворотов вокруг направления $\boldsymbol{H}\|Oz$ сохраняется также канонический импульс

$$P_\alpha = \left[\boldsymbol{r}\times\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}}\right]_z = m[\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}]_z + \frac{e}{2c}[\boldsymbol{r}\times[\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{r}]]_z \tag{3}$$

соответствующий повороту вокруг оси Oz.

Вывод закона сохранения, связанного с пространственным сдвигом, требует большей аккуратности, так как функция Лагранжа не инвариантна относительно сдвига. Вычисляя изменение функции Лагранжа при замене r на $\boldsymbol{r}+\delta\boldsymbol{r}$, находим из (1)

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}}\cdot\delta\boldsymbol{r} = \frac{e}{2c}[\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{H}]\cdot\delta\boldsymbol{r} = \delta\boldsymbol{r}\cdot\frac{d}{dt}\frac{e}{2c}\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{H} \tag{4}$$

т. е. вариация выражается через полную производную по времени от некоторой функции координат. С другой стороны, из уравнения Лагранжа получаем

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}} = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}} = \frac{d\boldsymbol{P}}{dt} \tag{5}$$

где $\boldsymbol{P} = m\boldsymbol{v} + (e/2c)\boldsymbol{H}\times\boldsymbol{r}$ - канонический импульс, сопряженный радиусу-вектору, который не сохраняется. Подставляя (5) в (4), находим сохраняющийся обобщенный импульс

$$\mathscr{P} = \boldsymbol{P} + \frac{e}{2c}\boldsymbol{H} \times \boldsymbol{r} = m\boldsymbol{v} - \frac{e}{c}\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{H} \tag{6}$$

Постоянство приведенной величины следует и непосредственно из уравнения движения

$$m\dot{\boldsymbol{v}} = \frac{e}{c}\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{H} \tag{7}$$

при $H = \text{const}$.

Вычислим еще электромагнитный импульс, создаваемый кулоновским полем частицы и внешним магнитным полем. Используя формулу (4.128), находим

$$p_{em} = \frac{1}{4\pi c}\int \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) \times \boldsymbol{H} d^3x = \frac{1}{2\pi c}\int \boldsymbol{A}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{E} d^3x = \frac{2e}{c}\boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{r}_0(t)\right) \tag{8}$$

Здесь $\boldsymbol{E} = e\left(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0(t)\right)/\left|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0(t)\right|^3, \boldsymbol{r}_0(t)$ - радиус-вектор частицы, $\mathrm{div}\,\boldsymbol{E} = 4\pi e\delta\left(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0(t)\right)$. Преобразование интеграла произведено с помощью формулы (1.89) для $\nabla(\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{A})$ и уравнений $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E} = 0, \mathrm{div}\,\boldsymbol{A} = 0$. Импульс поля в конечном счете оказался локализованным в точке нахождения частицы. Для момента полного импульса системы $m\boldsymbol{v} + \boldsymbol{p}_{em}$, который складывается из импульса частицы и импульса поля, находим

$$\boldsymbol{L} = r_0 \times \left(m\boldsymbol{v} + \boldsymbol{p}_{em}\right) \tag{9}$$

куда вошел радиус-вектор $r_0(t)$ частицы. Проекция (9) на направление магнитного поля сохраняется и совпадает с (3).

4.142. Импульс и энергию поля в объеме V в момент $t = x^0/c$ можно выразить интегралами $\int T^{\alpha 0}dV$ и $\int T^{00}dV$ соответственно, где интегрирование производится по всему трехмерному пространству. Объединим их и запишем в ковариантной форме, введя единичный 4 -вектор $n_i = (1, 0, 0, 0)$: $\int\limits_{\Sigma(t)} T^{ki}dS_i$, где $dS_i = n_i dV$ - элемент гиперповерхности $\Sigma(t)$, определяемой условием $t = x^0/c = x_0/c = \text{const}$, т. е. это элемент трехмерного объема. Обобщим написанный интеграл и распространим его на замкнутую гиперповерхность Σ_{tot}, окружающую 4 -объем Ω:

$$\Sigma_{tot} = \Sigma(t) + \Sigma\left(t'\right) + \Sigma' \tag{1}$$

Здесь Σ' - боковая цилиндрическая гиперповерхность, образующие которой параллельны оси времени x^0 (см. условный рис. 4.19).

Применим четырехмерную теорему Остроградского - Гаусса к интегралу по всей гиперповерхности:

$$\oint\limits_{\Sigma_{\mathrm{tot}}} T^{ki}dS_i = \int\limits_{\Omega} \frac{\partial T^{ki}}{\partial x^i}d\Omega \tag{2}$$

где dS_i на боковой поверхности, конечно, имеет вид, отличный от $n_i dV$. Поскольку Ω и $d\Omega$ - инварианты, а $\partial T^{ki}/\partial x^2 -$ 4-вектор, то и интеграл в левой части также 4 -вектор. Векторами являются и его отдельные слагаемые $T^{ki}dS_i$ при любой ориентации элементов dS_i, в частности, интеграл $\int\limits_{\Sigma(t)} T^{k0}dV$

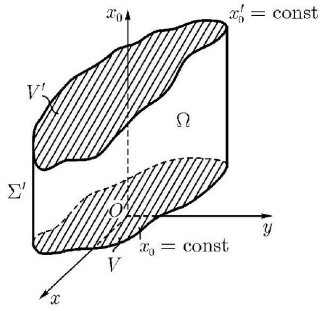


Рис. 4.19

На удаленной боковой поверхности Σ' поле отсутствует, $T^{ki} = 0$. Из этого факта, уравнения (1) и уравнения непрерывности $\partial T^{ki}/\partial x^i = 0$ следует, что $\int T^{k0}(t)dV = \int T^{k0}(t')\,dV$, т. е. рассматриваемый 4-вектор, как и должно быть, не изменяется со временем.

4.143. Полный момент импульса частиц и поля в рассматриваемом конечном 3-объеме

$$L^{\alpha\beta}(t) = \sum l^{\alpha\beta} - \frac{1}{c}\int\limits_{\Sigma(t)} \left(x^\alpha T^{\beta\gamma} - x^\beta T^{\alpha\gamma}\right) dS_\gamma \tag{1}$$

где $l^{\alpha\beta} = x^\alpha p^\beta - x^\beta p^\alpha$ - момент импульса одной частицы, сумма берется по всем частицам. Гиперповерхность $\Sigma(t)$ перпендикулярна оси t и представляет собой, в отличие от предыдущей задачи, конечный трехмерный
объем V. Убыль момента импульса системы за время dt:

$$(2)\quad -dL^{\alpha\beta} = L^{\alpha\beta}(t) - L^{\alpha\beta}(t+dt) = -\sum dl^{\alpha\beta} + \frac{1}{c}\int\limits_{\Sigma(t+dt)} \ldots - \frac{1}{c}\int\limits_{\Sigma(t)} \ldots$$

Перейдем в (2) к интегрированию по замкнутой цилиндрической гиперповерхности Σ_{tot}, записав $\int\limits_{\Sigma(t+dt)} + \int\limits_{\Sigma(t)} + \int\limits_{\Sigma'} = \oint_{\Sigma_{tot}}$. Здесь Σ' - боковая цилиндрическая поверхность, образующие которой параллельны оси времени (см. рис. 4.20, не забывая об условности изображения 4 -пространства на бумажном листе). Во всех интегралах элементы dS_i должны быть ориентированы вдоль внешней нормали к гиперповерхности.

Применив теорему Остроградского-Гаусса, будем иметь

$$\oint_{\Sigma_{tot}} \left(x^\alpha T^{\beta i} - x^\beta T^{\alpha i}\right) dS_i = \int\limits_\Omega \frac{\partial}{\partial x^i}\left(x^\alpha T^{\beta i} - x^\beta T^{\alpha i}\right) d\Omega \tag{3}$$

С помощью уравнений (4.133) и (4.53) убеждаемся, что интеграл по 4-объему в (3) преобразуется в изменение момента импульса частиц $\sum dl^{\alpha\beta}$.

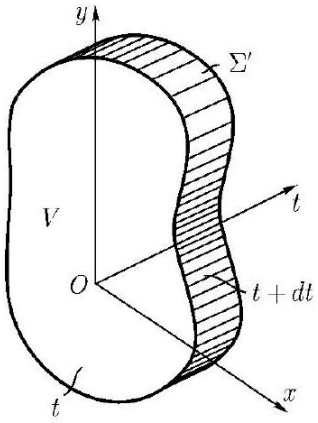


Рис. 4.20 В результате (2) преобразуется к виду

$$-dL^{\alpha\beta} = \frac{1}{c}\int\limits_{\Sigma'} \left(x^{\alpha}T^{\beta\gamma} - x^{\beta}T^{\alpha\gamma}\right) dS_{\gamma} \tag{4}$$

Элементы гиперповерхности Σ' нормальны к оси времени, их можно записать в виде $dS_{\gamma} = cdtn_{\gamma}df$, где df - элемент обычной двумерной поверхности, ограничивающей объем $V, \boldsymbol{n}$ - орт нормали к этому элементу. Это позволяет получить из (4) выражение для убыли момента импульса в единицу времени:

$$-\frac{dL^{\alpha\beta}}{dt} = \oint \left(-x^{\alpha}T^{\beta\gamma} + x^{\beta}T^{\alpha\gamma}\right) n_{\gamma}df \tag{5}$$

Введем антисимметричный по значкам α, β тензор $\mathscr{R}^{\alpha\beta\gamma} = x^{\beta}T^{\alpha\gamma}$ - $-x^{\alpha}T^{\beta\gamma}$. Этот тензор можно интерпретировать как плотность потока момента импульса, что вытекает из (5). Компонента $\mathscr{R}^{\alpha\beta\gamma}$ равна количеству $\alpha\beta$-компоненты полного момента импульса $L^{\alpha\beta}$, протекающему в единицу времени через единицу поверхности, перпендикулярной оси с номером γ. Обозначим через L и $\mathscr{R}$3-векторы, дуальные антисимметричным тензорам $L^{\alpha\beta}$ и $\mathscr{R}_{\alpha\beta\gamma}n_{\gamma}$. Тогда равенство (5) примет вид

$$-\frac{dL}{dt} = \oint \mathscr{R}, df \tag{6}$$

где

$$\mathscr{R} = \frac{E^2 + H^2}{8\pi}\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{n} - \frac{1}{4\pi}\boldsymbol{r} \times [\boldsymbol{E}(\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{E}) + \boldsymbol{H}(\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{H})] \tag{7}$$

При получении последней формулы использовано выражение (4.126) для компонент тензора энергии-импульса и таблицы (4.68).

D References

References

[1] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.: *Теоретическая физика. Том 8. Электродинамика сплошных сред*. 1982.

[2] Spaldin, Nicola A.: *Magnetic Materials: Fundamentals and Applications*. Cambridge University Press, 2nd edition, 2010.

[3] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.: *Теоретическая физика. Том 2. Теория поля*. Litres, 2020.

[4] Петерсои, Жукарев Матвеев: *Задачи повышенной сложности в курсе общей физики: Учебное пособие. 2-е изд., испр. — 192 с.* книга, 2001.

[5] В.С. Булыгин, М.Г. Кремлев, Э.В. Прут: *Избранные задачи студенческих олимпиад МФТИ по курсу общей физики*. Долгопрудный: Издательский Дом «Интеллект», 312 с., 2015.

[6] Дж., Джексон: *Классическая электродинамика: Пер. с англ.* Мир, 1965.

[7] Кингсеп, А.С. Локшин, ГР Ольхов ОА: *Основы физики. Курс общей физики. Т. 1. Механика, электричество и магнетизм, колебания и волны, волновая оптика.* 2007.

[8] А., Кириченко Н.: *Электричество и магнетизм*. 2011.

[9] Mieling, Thomas B: *The response of optical fibres to gravitational waves*. Classical and Quantum Gravity, 38(15):155006, jul 2021. https://doi.org/10.1088%2F1361-6382%2Fac0b2f.

[10] Mieling, Thomas B: *The response of laser interferometric gravitational wave detectors beyond the eikonal equation*. Classical and Quantum Gravity, 38(17):175007, aug 2021. https://doi.org/10.1088%2F1361-6382%2Fac15db.

From Limits on the Applicability of Classical Electromagnetic Fields as Inferred from the Radiation Reaction by McDonald (1998)

References

[1] J. Schwinger, "Electromagnetic Mass Revisited", Found. Phys. **13**, 373-383 (1983).

[2] F. Rohrlich, "The Dynamics of a Charged Sphere and the Electron", Am. J. Phys. **65**, 1051-1056 (1997).

[3] J.J. Thomson, "Electric and Magnetic Effects Produced by Motion of Electrified Bodies", Phil. Mag. **11**, 227-246 (1881).

[4] H.A. Lorentz, "La Théorie Électromagnétique de Maxwell et son Application aux Corps Mouvants", Arch. Neérl. **25**, 363-552 (1892), reprinted in *Collected Papers* (Martinus Nijhoff, The Hague, 1936), Vol. II, pp. 64-343.

[5] H.A. Lorentz, "Weiterbildung der Maxwellschen Theorie. Elektronen Theorie", Enzykl. Math. Wiss. **5**, part II, no. 14, 151-279 (1903), especially secs. 20-21; "Contributions to the Theory of Electrons", Proc. Roy. Acad. Amsterdam **5**, 608 (1903), reprinted in *Collected Papers*, Vol. III, 132-154.

[6] H.A. Lorentz, *The Theory of Electrons* (B.G. Teubner, Leipzig, 1906; reprinted by Dover Publications, New York, 1952), secs. 26 and 37 and note 18.

[7] M. Planck, "Über electrische Schwingunger, welche durch Resonanz erregt und durch Strahlung gedämpft werden", Ann. d. Phys. **60**, 577-599 (1897).

[8] J.R. Oppenheimer, "Are the Formulae for the Absorption of High Energy Radiations Valid?", Phys. Rev. **47**, 44-52 (1935).

[9] L.D. Landau and E.M. Lifshitz, *The Classical Theory of Fields*, 4th ed. (Pergamon Press, Oxford, 1975), sec. 75. The first Russian edition appeared in 1941.

[10] J.C. Maxwell, *A Treatise on Electricity and Magnetism*, 3rd ed. (Clarendon Press, Oxford, 1894; reprinted by Dover Publications, New York, 1954). The first edition appeared in 1873.

[11] J.H. Poynting, "On the Transfer of Energy in the Electromagnetic Field" Phil. Trans. **175**, 343-361 (1884); also, pp. 174-193, *Collected Scientific Papers* (Cambridge U. Press, 1920). This landmark paper contains several instructive examples with figures well worth including in undergraduate courses on electromagnetism.

[12] O. Heaviside, Electrician **16**, 178, 306 (1885); see also Vol. I, pp. 434-441 and 449-450 as well as much subsequent discussion in Vol. II, *Electrical Papers* (Electrician Press, London, 1892; reprinted by Chelsea Publishing, New York, 1970).

[13] J.J. Thomson, *Recent Researches in Electricity and Magnetism* (Clarendon Press, Oxford, 1893; reprinted by Dawsons, London, 1968), secs. 10-13.

[14] H. Poincaré, "Théorie de Lorentz et le Principe de la Réaction", Arch. Neérl. **5**, 252-278 (1900).

[15] M. Abraham, "Dynamik des Electrons", Gött. Nachr., 20-41 (1902).

[16] B. Stewart, "Temperature Equilibrium of an Enclosure in which there is a Body in Visible Motion", Brit. Assoc. Reports, 41st Meeting, Notes and Abstracts, p. 45 (1871). [This meeting featured an inspirational address by W. Thomson as a memorial to Herschel; among many other topics Thomson speculates on the size of atoms, on the origin of life on Earth as due to primitive organisms arriving in meteorites, and on how the Sun's source of energy cannot be an influx of matter as might, however, explain the small advance of the perihelion of Mercury measured by LeVerrier.]; "Æthereal Friction", Brit. Assoc. Reports, 43rd Meeting, Notes and Abstracts, pp. 32-35 (1873). Stewart argued that the radiation resistance felt by a charge moving through blackbody radiation should vanish as the temperature of the bath went to zero, just as he expected the electrical resistance of a conductor to vanish at zero temperature. [The 43rd meeting was also the occasion of a report by Maxwell on the exponential atmosphere as an example of statistical mechanics (pp. 29-32), by Rayleigh on the diffraction limit to the sharpness of spectral lines (p. 39), and perhaps of greatest significance to the attendees, a note by A.H. Allen on the detection of adulteration of tea (p. 62).]

[17] M. Planck, *Vorlesungen über die Theorie der Wärmestrahlung* (J. Barth, Leipzig, 1906), sec. III.

[18] M. Abraham, "Prinzipien der Dynamik des Elektrons", Ann. d. Phys. **10**, 105-179 (1903); "Die Grundhypothesen der Elektronentheorie", Phys. Zeit. **5**, 576-578 (1904).

[19] M. Abraham, "Zur Theories der Strahlung and des Strahlungsdruckes", Ann. d. Phys. **14**, 236-287 (1904).

[20] A. Sommerfeld, "Zur Elektronentheorie I. Allgemeine Untersuching des Feldes eines beliebig bewegten Elektrons", Gött. Nachr., 99-130 (1904); "Zur Elektronentheorie II. Grundlagen für eine allgemeine Dynamik des Elektrons", Gött. Nachr., 363-439 (1904); "Simplified Deduction of the Field and Forces of an Electron, moving in any given way", Proc. Roy. Acad. Amsterdam **7**, 346-367 (1905).

[21] H. Poincaré, "Sur la Dynamique de l'Électron", Compte Rendus **140**, 1504-1508 (1905); Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo **21**, 129 (1906); for a translation, see H.M. Schwartz, "Poincaré's Rendiconti Paper on Relativity, Parts I-III", Am. J. Phys **39**, 1287–1294 (1971); **40**, 862-872, 1282-1287 (1972).

[22] J. Larmor, *Mathematical and Physical Papers* (Cambridge U. Press, 1929), Vol. I, pp. 414-597, Vol. II, pp. 420-449.

[23] F. Lindemann, "Zur Elektronentheorie", Abh. K. Bayer. Akad. d. Wiss., II Kl. **23**, 177-209, 353-380 (1907). Between the two parts of this paper there appeared a long study of Fermat's last theorem, apparently by the same author.

[24] M. von Laue, "Die Wellenstrahlung einer bewegten Punktladung nach dem Relativitätsprinzip", Ann. d. Phys. **28**, 436-442 (1909).

[25] M. Born, "Die Theorie des starren Elektrons in der Kinematik des Relativitätsprinzips", Ann. d. Phys. **30**, 1-56 (1909).

[26] G.A. Schott, *Electromagnetic Radiation and the Mechanical Reactions Arising from It* (Cambridge U. Press, 1912), especially Chap. XI and Appendix D.

[27] G.A. Schott, "On the Motion of the Lorentz Electron", Phil. Mag. **29**, 49-69 (1915).

[28] G.A. Schott, "The Theory of the Linear Electric Oscillator and its bearing on Electron Theory", Phil. Mag. **3**, 739-732 (1927).

[29] G.A. Schott, "The Electromagnetic Field of a moving uniformly and rigidly Electrified Sphere and its Radiationless Orbits", Phil. Mag. **15**, 752-761 (1933).

[30] L. Page, "Is a Moving Mass Retarded by the Reaction of its own Radiation". Phys. Rev. **11**, 376-400 (1918); "Advanced Potentials and Their Application to Atomic Models". Phys. Rev. **24**, 296-305 (1924).

[31] G. Nordström, "Note on the circumstance that an electric charge moving in accordance with quantum conditions does not radiate", Proc. Roy. Acad. Amsterdam **22**, 145-149 (1920).

[32] S.R. Milner, "Does an Accelerated Electron necessarily Radiate Energy on the Classical Theory", Phil. Mag. **41**, 405-419 (1921).

[33] E. Fermi, "Über einem Widerspruch zwischen der elektrodynamischen und der relativistischen Theorie der elektromagnetischen Masse", Phys. Z. **23**, 340-344 (1922); "Correzione di una contraddizione tra la teoria elettrodinamica e quella relativisitica delle masse elettromagnetiche", Nuovo Cim. **25**, 159-170 (1923).

[34] G. Wenzel, "Über die Eigenkräfte der Elementarteilchen. I", Z. Phys. **86**, 479-494 (1933).

[35] W. Wesel, "Über ein klassisches Analogon des Elektronenspins", Z. Phys. **92**, 407 (1933); "Zur Theorie des Spins", Z. Phys. **110**, 625 (1938);

[36] W. Wilson, "The Mass of a Convected Field and Einstein's Mass-Energy Law", Proc. Phys. Soc. **48**, 736-740 (1936).

[37] P.A.M. Dirac, "Classical Theory of Radiating Electrons", Proc. Roy. Soc. A **167**, 148-169 (1938).

[38] M.H.L. Pryce, "The electromagnetic energy of a point charge", Proc. Roy. Soc. A **168**, 389-401 (1938).

[39] H.J. Bhabha, "Classical Theory of Electrons", Proc. Ind. Acad. Sci. **10A**, 324-332 (1939); "On Elementary Heavy Particles with Any Integral Charge", *ibid.* **11A**, 347-368 (1940).

[40] I. Pomeranchuk, "On the Maximum Energy Which the Primary Electrons of Cosmic Rays Can Have on the Earth's Surface Due to Radiation in the Earth's Magnetic Field", J. Phys. (USSR) **2**, 65-69 (1940).

[41] L. Infeld and P.R. Wallace, "The Equations of Motion in Electrodynamics", Phys. Rev. **57**, 797-806 (1940).

[42] F. Bopp, "Lineare Theorie des Elektrons II", Ann. d. Phys. **42**, 573-608 (1942/43).

[43] E.C.G. Stueckelberg, "Un modèle de l'électron ponctuel II", Helv. Phys. Acta **17**, 1-26 (1943).

[44] P. Havas, "On the Classical Equations of Motion of Point Charges", Phys. Rev. **74**, 456-463 (1948).

[45] R.P. Feynman, "A Relativistic Cut-Off for Classical Electrodynamics", Phys. Rev. **74**, 939-946 (1948).

[46] D. Bohm and M. Weinstein, "The Self-Oscillations of a Charged Particle", Phys. Rev. **74**, 1789-1798 (1948).

[47] D.L. Drukey, "Radiation from a Uniformly Accelerated Charge", Phys. Rev. **76**, 543-544 (1949).

[48] A. Loinger, "Sulle soluzioni fisiche dell'equazione dell'elettrone puntiforme", Nuovo Cim. **6**, 360-367 (1949).

[49] R. Haag, "Die Selbstwechselwirkung des Electrons", Z. Naturforsch. **10a**, 752-761 (1955).

[50] H. Bondi and T. Gold, "The field of a uniformly accelerated charge, with special reference to the problem of gravitational acceleration", Proc. Roy. Soc. (London) **229A**, 416-424 (1955).

[51] B.S. DeWitt and R.W. Brehme, "Radiation Damping in a Gravitational Field", Ann. Phys. **9**, 220-259 (1960).

[52] T. Fulton and F. Rohrlich, "Classical Radiation from a Uniformly Accelerated Charge", Ann. Phys. **9**, 499-517 (1960).

[53] F. Rohrlich, "The Equations of Motions of Classical Charges", Ann. Phys. **13**, 93-109 (1961).

[54] N. Rosen, "Field of a Particle in Uniform Motion and Uniform Acceleration", Ann. Phys. **17**, 26-275 (1962).

[55] T.C. Bradbury, "Radiation Damping in Classical Electrodynamics", Ann. Phys. **19**, 323-347 (1962).

[56] C. Leibovitz and A. Peres, "Energy Balance of Uniformly Accelerated Charge", Ann. Phys. **25**, 400-404 (1963).

[57] J.S. Nodvik, "A Covariant Formulation of Classical Electrodynamics for Charges of Finite Extension", Ann. Phys. **28**, 225-319 (1964).

[58] C.M. DeWitt and B.S. DeWitt, "Falling Charges", Physics **1**, 3-20 (1964).

[59] G.H. Goedecke, "Classically Rotationless Motions and Possible Implications for Quantum Theory", Phys. Rev. **133**, B281-288 (1964).

[60] D.J. Kaup, "Classical Motion of an Extended Charged Particle", Phys. Rev. **152**, 1130-1134 (1966).

[61] W.J.M. Cloetens et.al., "A Theoretical Energy Paradox in the Lorentz-Dirac-Wheeler-Feynman-Rohrlich Electrodynamics", Nuovo Cim. **62A**, 247-253 (1969).

[62] A.I. Nikishov and V.I. Ritus, "Radiation Spectrum of an Electron Moving in a Constant Electric Field", Sov. Phys. JETP **29**, 1093-1097 (1969).

[63] V.L. Ginzburg, "Radiation and Radiation Friction Force in Uniformly Accelerated Motion", Sov. Phys. Uspekhi **12**, 565-574 (1969).

[64] W.T. Grandy jr, "Concerning a 'Theoretical Paradox' in Classical Electrodynamics", Nuovo Cim. **65A**, 738-742 (1970).

[65] C. Teitelboim, "Splitting of the Maxwell Tensor: Radiation Reaction without Advanced Fields", Phys. Rev. D **1**, 1572-1582 (1970); "Splitting of the Maxwell Tensor, II. Sources", Phys. Rev. D **3**, 297-298 (1971).

[66] C.S. Shen, "Synchrotron Emission at Strong Radiative Damping", Phys. Rev. Lett. **24**, 410-415 (1970).

[67] E.S. Sarachik and G.T.Schappert, "Classical Theory of the Scattering of Intense Laser Radiation by Free Electrons", Phys. Rev. D **1**, 2738-2753 (1970).

[68] J.C. Herrera, "Relativistic Motion in a Constant Field and the Schott Energy", Nuovo Cim. **70B**, 12-20 (1970).

[69] W.L. Burke, "Runaway Solutions: Remarks on the Asymptotic Theory of Radiation Damping", Phys. Rev. A **2**, 1501-1505 (1970).

[70] N.D. Sen Gupta, "Synchrotron Motion with Radiation Damping", Phys. Lett. **32A**, 103-104 (1970).

[71] C.S. Shen, "Comment on the Synchrotron Motion with Radiation Damping", Phys. Lett. **33A**, 322 (1970).

[72] T.C. Mo and C.H. Papas, "New Equation of Motion for Classical Charged Particles", Phys. Rev. D **4**, 3566-3571 (1971).

[73] N.D. Sen Gupta, "Comment on Relativistic Motion with Radiation Reaction", Phys. Rev. D **5**, 1546-1547 (1972).

[74] J. Jaffe, "Anomalous Motion of Radiating Particles in Strong Fields", Phys. Rev. D **5**, 2909-2911 (1972).

[75] C.S. Shen, "Magnetic Bremsstrahlung in an Intense Magnetic Field", Phys. Rev. D **6**, 2736-2754 (1972).

[76] C.S. Shen, "Comment on the 'New' Equation of Motion for Classical Charged Particles", Phys. Rev. D **6**, 3039-3040 (1972).

[77] J.C. Herrera, "Relativistic Motion in a Uniform Magnetic Field", Phys. Rev. D **7**, 1567-1570 (1973).

[78] W.B. Bonnor, "A New Equation of Motion for a Radiating Charged Particle", Proc. R. Soc. Lond. A **337**, 591-598 (1974).

[79] E.J. Moniz and D.H. Sharp, "Absence of Runaways and Divergent Self-Mass in Nonrelativistic Quantum Electrodynamics", Phys. Rev. D **10**, 1133-1136 (1974).

[80] P. Pearle, "Absence of Radiationless Motions of Relativistically Rigid Classical Electron", Found. Phys. **7**, 931-945 (1977).

[81] C.S. Shen, "Radiation and acceleration of a relativistic charged particle in an electromagnetic field", Phys. Rev. D **17**, 434 (1978).

[82] H.M. França et.al., "Some Aspects of the Classical Motion of Extended Charges", Nuovo Cim. **48A**, 65-83 (1978).

[83] L. de la Peña et.al., "The Classical Motion of an Extended Charged Particle Revisited", Nuovo Cim. **69B**, 71-88 (1982).

[84] H. Grotch et.al., "Internal Retardation", Acta Phys. Austr. **54**, 31-38 (1982).

[85] I. Bialynicki-Birula, "Classical Model of the Electron: Exactly Solvable Example", Phys. Rev. D **28**, 2114-2117 (1983).

[86] E. Comay, "Lorentz Transformation of Electromagnetic Systems and the 4/3 Problem", Z. Naturforsch. **46a**, 377-383 (1991).

[87] F.V. Hartemann and N.C. Luhmann, Jr., "Classical Electrodynamical Derivation of the Radiation Damping Force", Phys. Rev. Lett. **74**, 1107-1110 (1995).

[88] Z. Huang et.al., "Radiation Reaction in a Continuous Focusing Channel", Phys. Rev. Lett. **74**, 1759 (1995); "A Semi-Classical Treatment of Channeling Radiation Reaction", Nucl. Instr. and Meth. **B119**, 192-198 (1996).

[89] F.V. Hartemann and A.K. Kerman, "Classical Theory of Nonlinear Compton Scattering", Phys. Rev. Lett. **76**, 624-627 (1996).

[90] M. Abraham, *Elektromagnetische Theorie der Strahlung* (B.G. Teubner, Leipzig, 1905), sec. 15; for a greatly abridged English version, see R. Becker, *Electromagnetic Fields and Interactions* (Dover Publications, New York, 1964), Vol. II, Chap. A11.

[91] M. von Laue, *Das Relativitätsprinzip* (B.G. Teubner, Leipzig, 1911)

[92] W. Pauli, "Relativitätstheorie", Enzyl. Math. Wiss. Vol. V, part II, no. 19, 543-773 (1921); translated as *Theory of Relativity* (Pergamon Press, New York, 1958).

[93] W. Heitler, *The Quantum Theory of Radiation* (Clarendon, Oxford, 1936), secs. 4 and 5 discuss classical radiation damping, while sec. 24 speculates on limits to quantum theory at high energies following Oppenheimer [8]; 2nd ed. (1944), a new sec. 25 briefly reviews Heitler's quantum theory of damping; 3rd ed. (1954, reprinted by Dover, New York, 1984), Heitler's damping theory is reviewed at greater length in secs. 15, 16 and 33.

[94] A. O'Rahilly, *Electromagnetics* (Longmans, Green and Co., New York, 1938); reprinted as *Electromagnetic Theory* (Dover Publications, New York, 1965), chaps. 7 and 8.

[95] J.A. Wheeler and R.P. Feynman, "Interaction with the Absorber as the Mechanism of Radiation", Rev. Mod. Phys. **17**, 157-181 (1945); "Classical Electrodynamics in Terms of Direct Interparticle Action", Rev. Mod. Phys. **17**, 157-181 (1949).

[96] C.J. Eliezer, "The Interactions of Electrons and an Electromagnetic Field", Rev. Mod. Phys. **19**, 147-184 (1947).

[97] H. Steinwedel, "Strahlungsdämpfung und Selbstbeschleunigung in der klassichen Theorie des punktiförmigen Elektrons", Fortschr. d. Phys. **1**, 7-28 (1953).

[98] P. Caldirola, "A New Model of the Classical Electron", Nuovo Cim. **3**, Suppl. 2, 297-343 (1956).

[99] W.E. Thirring, *Principles of Quantum Electrodynamics* (Academic Press, New York, 1958), Chap. 2, especially p. 24.

[100] T. Erber, "The Classical Theories of Radiation Reaction", Fortshritte f. Phys. **9**, 343-392 (1961).

[101] G.N. Plass, "Classical Electrodynamic Equations of Motion with Radiative Reaction", Rev. Mod. Phys. bf 33, 37-62 (1961).

[102] W.K.H. Panofsky and M. Phillips, *Classical Electricity and Magnetism* (Addison-Wesley, Reading, MA, 1962), chap. 21.

[103] A.O. Barut, *Electrodynamics and Classical Theory of Fields and Particles* (Macmillan, New York, 1964; reprinted by Dover Publications, New York, 1980), chap. 5.

[104] F. Rohrlich, *Classical Charged Particles* (Addison-Wesley, Reading, MA, 1965).

[105] A. Pais, "The Early History of the Theory of the Electron: 1897-1947", in *Aspects of Quantum Theory*, ed. by A. Salam and E. Wigner (Cambridge U. Press, London, 1972), pp. 79-93.

[106] J.D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, 2nd ed. (Wiley, New York, 1975), chap. 17.

[107] S. Coleman, "Classical Electron Theory from a Modern Standpoint", in *Paths to Research*, D. Teplitz, ed. (Plenum, New York, 1982), pp. 183-210.

[108] P. Pearle, "Classical Electron Models", in *Paths to Research*, D. Teplitz, ed. (Plenum, New York, 1982), pp. 211-295.

[109] N.P. Klepikov, "Radiation Damping Forces and Radiation from Charged Particles", Sov. Phys. Ups. **28**, 506-520 (1985).

[110] A.D. Yaghjian, *Relativistic Dynamics of a Charged Sphere* (Springer-Verlag, Berlin, 1992).

[111] P.W. Milonni *The Quantum Vacuum* (Academic Press, San Diego, 1994).

[112] J.L. Jiménez and I. Campos, "The Balance Equations of Energy and Momentum in Classical Electrodynamics", in *Advanced Electromagnetism, Foundations, Theory and Applications*, T.W. Barnett and D.M. Grimes eds. (World Scientific, Singapore, 1995).

[113] L. Page and N.I. Adams, Jr., "Action and Reaction Between Moving Charges", Am. J. Phys. **13**, 141-147 (1945).

[114] F. Rohrlich, "Self-Energy and Stability of the Classical Electron", Am. J. Phys. **28**, 639-643 (1960).

[115] A. Gamba, "Physical Quantities in Different Reference Systems According to Relativity", Am. J. Phys. **35**, 83-89 (1966).

[116] F. Rohrlich, "Electromagnetic Momentum, Energy, and Mass", Am. J. Phys. **38**, 1310-1316 (1970).

[117] T.H. Boyer, "Mass Renormalization and Radiation Damping for a Charged Particle in Uniform Circular Motion", Am. J. Phys. **40**, 1843-1846 (1972).

[118] H. Levine et.al., "Motion of Extended Charges in Classical Electrodynamics", Am. J. Phys. **45**, 75-78 (1977).

[119] D.J. Griffiths and E.W. Szeto, "Dumbell Model for the Classical Radiation Reaction", Am. J. Phys. **46**, 244-248 (1978).

[120] J.T. Cushing, "Electromagnetic Mass, Relativity, and the Kaufmann Experiments", Am. J. Phys. **49**, 1133-1149 (1981).

[121] D.J. Griffiths and R.E. Owen, "Mass Renormalization in Classical Electrodynamics", Am. J. Phys. **51**, 1120-1126 (1983).

[122] R.J. Cook, "Radiation Reaction Revisited", Am. J. Phys. **52**, 894-895 (1984).

[123] F.H.J. Cornish, "An Electric Dipole in Self-Accelerated Transverse Motion", Am. J. Phys. **54**, 166-168 (1986).

[124] J.L. Jiménez and I. Campos, "A Critical Examination of the Abraham-Lorentz Equation for a Radiating Charged Particle", Am. J. Phys. **55**, 1017-1023 (1987).

[125] I. Campos and J.L. Jiménez, "Energy Balance and the Abraham-Lorentz Equation", Am. J. Phys. **57**, 610-613 (1989).

[126] P. Moylan, "An Elementary Account of the Factor of 4/3 in the Electromagnetic Mass", Am. J. Phys. **63**, 818-820 (1995).

[127] E.J. Bochove, "Unified Derivation of Classical Radiation Forces", Am. J. Phys. **6457**, 1419-1422 (1996).

[128] J.D. Templin, "Direct Calculation of Radiation Resistance in Simple Radiating Systems", Am. J. Phys. **64**, 1379-1383 (1996).

[129] D.R. Stump and G.L. Pollack, "Magnetic Dipole Oscillations and Radiation Damping", Am. J. Phys. **65**, 81-87 (1997).

[130] M. Planck, "Zur Theorie des Gesetzes der Energieverteilung im Normalspektrum", Verh. Deutsch. Phys. Ges. **2**, 237-245 (1900).

[131] Internet site
`http://www.hia.com/hia/pcr/feynproj1.html#rad` includes pages from a notebook of Feynman which indicate that he agreed (at one time) that a uniformly accelerated charge does not radiate.

[132] M. Planck, *The Theory of Heat Radiation*, (Blakiston, Philadelphia, 1914; reprinted by Dover, New York, 1991), Part V, Chap. I.

[133] W. Ritz and A. Einstein, "Zum gegenwärtigen Stand des Strahlungsproblems", Phys. Z. **10**, 323-324 (1909).

[134] T.W.B. Kibble, "Frequency Shift in High-Intensity Compton Scattering", Phys. Rev. **138**, B740-753, (1965); "Radiative Corrections to Thomson Scattering from Laser Beams", Phys. Lett. **20**, 627-628 (1966); "Refraction of Electron Beams by Intense Electromagnetic Waves", Phys. Rev. Lett. **16**, 1054-1056 (1966); 'Mutual Refraction of Electrons and Photons", Phys. Rev. **150**, 1060-1069 (1966); "Some Applications of Coherent States", *Cargèse Lectures in Physics*, Vol. 2, ed. by M. Lévy (Gordon and Breach, New York, 1968), pp. 299-345.

[135] A.H. Compton, "The Quantum Theory of the Scattering of X-Rays by Light Elements", Phys. Rev. **21**, 207, 483-502 (1923); "The Spectrum of Scattered X-Rays", **22**, 409-413 (1923).

[136] W. Heitler, "The Influence of Radiation Damping on the Scattering of Light and Mesons by Free Particles. I", Proc. Camb. Phil. Soc. **37**, 291-300 (1941).

[137] A.H. Wilson, "The Quantum Theory of Radiation Damping", Proc. Camb. Phil. Soc. **37**, 301-316 (1941).

[138] S.C. Power, "Note on the Influence of Damping on the Compton Scattering", Proc. Roy. Ir. Acad. **50A**, 139-142 (1945).

[139] O. Klein, "Die Reflexion von Elektronen an einem Potentialsprung nach der relativistischen Dynamik von Dirac", Z. Phys. **53**, 157-165 (1929).

[140] F. Sauter, "Über das Verhalten eines Elektrons im homogenen elektrischen Feld nach der relativistischen Theorie Diracs", Z. Phys. **69**, 742-764 (1931); "Zum 'Kleinschen Paradoxon' ", **73**, 547-552 (1931).

[141] W. Heisenberg and H. Euler, "Folgerungen aus der Diracschen Theorie des Positrons", Z. Phys. **98**, 718-732 (1936).

[142] J. Schwinger, "On Gauge Invariance and Vacuum Polarization", Phys. Rev. **82**, 664-679 (1951).

[143] E. Brezin and C. Itzykson, "Pair Production in Vacuum by an Alternating Field", Phys. Rev. D **2**, 1191-1199 (1970); "Polarization Phenomena in Vacuum Nonlinear Electrodynamics", D **3**, 618-621 (1971).

[144] C. Bula et.al., "Observation of Nonlinear Effects in Compton Scattering", Phys. Rev. Lett. **76**, 3116-3119 (1996).

[145] D.L. Burke et.al., "Positron Production in Multiphoton Light-by-Light Scattering", Phys. Rev. Lett. **79**, 1626-1629 (1997).

[146] V.L. Ginzburg, "The Magnetic Fields of Collapsing Masses and the Nature of Superstars" Sov. Phys. Dokl. **9**, 329-331 (1964).

[147] L. Woltjer, "X-Rays and Type I Supernova Remnants", Ap. J. **140**, 1309-1313 (1964).

[148] For a review see G. Changmugam, "High Magnetic Fields in Stars", in *Paths to Research*, D. Teplitz, ed. (Plenum, New York, 1982), pp. 137-170.

[149] J. Schwinger, "On the Classical Radiation of Accelerated Electrons", Phys. Rev. **75**, 1912-1925 (1949); "The Quantum Correction in the Radiation by Energetic Accelerated Electrons", Proc. N.A.S. **40**, 132-136 (1954).

[150] The paper of Schiff is insufficiently clear on this point: L.I. Schiff, "Quantum Effects in the Radiation from Accelerated Relativistic Electrons", Am. J. Phys. **20**, 474-478 (1952).

[151] C. Kozhuharov et.al., "Positrons from 1.4-GeV Uranium-Atom Collisions", Phys. Rev. Lett. **42**, 376-379 (1979)

[152] H. Tsertos et.al., "Systematic Studies of Positron Production in Heavy-Ion Collisions Near the Coulomb Barrier", Z. Phys. A **342**, 79-94 (1992).

[153] For reviews see J.S. Greenberg and W. Greiner, "Search for the Sparking of the Vacuum", Physics Today, 24-32 (August 1982); W. Greiner et.al., *Quantum Electrodynamics of Strong Fields*, (Springer-Verlag, Berlin, 1985); but see also G. Taubes, "The One That Got Away?", Science **275**, 148-151 (1997).

[154] R. Blankenbecler and S.D. Drell, "Quantum Treatment of Beamstrahlung", Phys. Rev. D **36**, 277-288 (1987).

[155] W. Heitler and F. Sauter, "Stopping of Fast Particles with Emission of Radiation and the Birth of Positive Electrons", Nature **132**, 892 (1933).

[156] H. Bethe and W. Heitler, "On the Stopping of Fast Particles and on the Creation of Positive Electrons", Proc. Roy. Soc. (London) **A146**, 81-112 (1934).

[157] E.J. Williams, "Nature of High Energy Particles of Penetrating Radiation and Status of Ionization and Radiation Formulae", Phys. Rev. **45**, 729-730 (1934).

[158] E.A. Uehling, "Polarization Effects in the Positron Theory", Phys. Rev. **48**, 55-63 (1935).

[159] L.W. Nordheim, "Probability of Radiative Processes for Very High Energies", Phys. Rev. **49**, 189-191 (1936).

[160] S.S. Schweber, *QED and the Men Who Made It; Dyson, Feynman, Schwinger, and Tomonaga*, (Princeton U. Press, Princeton, 1994), Chap. 2.

[161] V.I. Ritus, "Electron Mass Shift in an Intense Field", in *Issues in Intense-Field Quantum Electrodynamics*, V.L. Ginzburg, ed. (Nova Science, Commack, NY, 1987), pp. 63-152.

[162] A.I. Nikishov and V.I. Ritus, "Quantum Processes in the Field of a Plane electromagnetic Wave and in a Constant Field. I", Sov. Phys. JETP **19**, 529-541, (1964); "Quantum Processes in the Field of a Plane Electromagnetic Wave and in a Constant Field. II", **19** 1191-1199 (1964); "Nonlinear Effects in Compton Scattering and Pair Production Owing to Absorption of Several Photons", **20**, 757-759 (1965); "Pair Production by a Photon and Photon Emission by an Electron in the Field of an Intense Electromagnetic Wave and in a Constant Field", **25**, 1135-1142 (1967).

[163] S.W. Hawking, "Black Hole Explosions", Nature **248**, 30-31 (1974); "Particle Creation by Black Holes", Comm. Math.-Phys. **43**, 199-220 (1975).

[164] W.G. Unruh, "Notes on Black Hole Evaporation", Phys. Rev. D **14**, 870-892 (1976); "Particle Detectors and Black Hole Evaporation", Ann. N.Y. Acad. Sci. **302**, 186-190 (1977).

[165] J.F. Donoghue and B.R. Holstein, "Temperature measured by a uniformly accelerated observer", Am. J. Phys. **52**, 730-734 (1984).

[166] J.S. Bell and J.M. Leinaas, "Electrons as Accelerated Thermometers", Nuc. Phys. **B212**, 131-150 (1983); "The Unruh Effect and Quantum Fluctuations of Electrons in Storage Rings", **B284**, 488-508 (1987); J.S. Bell, R.J. Hughes and J.M. Leinaas, "The Unruh Effect in Extended Thermometers", Z. Phys. **C28**, 75-80 (1985).

[167] K.T. McDonald, "The Hawking-Unruh Temperature and Quantum Fluctuations in Particle Accelerators", Proceedings of the 1987 IEEE Particle Accelerator Conference, E.R. Lindstrom and L.S. Taylor, eds. (Washington, D.C., Mar. 16-19, 1987) pp. 1196-1197.

[168] K.T. McDonald, "Fundamental Physics During Violent Accelerations", in *Laser Acceleration of Particles*, C. Joshi and T. Katsouleas, eds., AIP Conference Proceedings No. 130, (New York, 1985), pp. 23-54.

[169] D.W. Sciama, "The Thermodynamics of Black Holes", Ann. N.Y. Acad. Sci. **302**, 161-165 (1977); D.W. Sciama, P. Candelas and D. Deutsch, "Quantum Field Theory, Horizons and Thermodynamics", Adv. in Phys. **30**, 327-366 (1981).

[170] The Planck length and related concepts were first discussed by J.A. Wheeler, "On the Nature of Quantum Geometrodynamics", Ann. Phys. **2**, 604-614 (1957).

From Complex Form of Classical and Quantum Electrodynamics by Kryuchkov et al.

References

[1] M. Abraham, *The Classical Theory of Electricity and Magnetism*, Translation of the Eighth German Edition, Blackie & Son, Glasgow, 1948.

[2] P. B. Acosta-Humánez, S. I. Kryuchkov, E. Suazo, and S. K. Suslov, *Degenerate parametric amplification of squeezed photons: explicit solutions, statistics, means and variances*, J. Nonlinear Opt. Phys. Mater. **24** (2015) # 2, 1550021 (27pp).

[3] G. N. Afanasiev, *Vavilov-Cherenkov and Synchrotron Radiation: Foundations and Applications*, Kluwer, Dordrecht, 2004.

[4] K. Alladi, J. R. Klauder, and C. R. Rao (Eds.), *The Legacy of Alladi Ramakrishnan in the Mathematical Sciences*, Springer, New York, 2010.

[5] S. M. Barnett, *Resolution of the Abraham-Minkowski dilemma*, Phys. Rev. Lett. **104** (2010) # 7, 070401 (4pp).

[6] A. O. Barut, *Electrodynamics and Classical Theory of Fields and Particles*, Dover, New York, 1980.

[7] R. Becker, *Electromagnetic Fields & Interactions*, Blaisdell Pub. Co., New York, 1964.

[8] I. Białynicki-Birula and Z. Białynicki-Birula Z *Quantum Electrodynamics*, Pergamon and PWN–Polish Scientific Publishers, Oxford, New York, Toronto, Sydney, Warszawa,1975.

[9] Białynicki-Birula I and Białynicki-Birula Z *The role of Riemann-Silberstein vector in classical and quantum theories of electromagnetism*, J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. **46** (2013), 053001 (32 pp).

[10] N. N. Bogolubov, A. A. Logunov, A. I. Oksak, and I. T. Todorov, *General Principles of Quantum Field Theory*, Seventh Edition, Kluwer, Dordrecht, 1990.

[11] B. M. Bolotovskii, *Theory of Vavilov-Cherenkov effect (I–II)*, Usp. Fiz. Nauk **62** (1957) # 3, 201–246 [in Russian].

[12] B. M. Bolotovskii, *Theory of Cherenkov radiation (III)*, Sov. Phys.–Usp. **4** (1962) # 5, 781–811.

[13] B. M. Bolotovskii, *Vavilov-Cherenkov radiation: its discovery and application*, Phys.–Usp. **52** (2009) # 11, 1099–1110.

[14] B. M. Bolotovskii and A. A. Rukhadze, *Field of a charged particle in a moving medium*, Sov. Phys. JETP **10** (1960) # 5, 958–961.

[15] B. M. Bolotovskii and S. N. Stolyarov, *Current status of the electrodynamics of moving media (infinite media)*, Sov. Phys.–Usp. **17** (1975) # 6, 875–895; see also a revised version with the annotated bibliography in: *Einstein's Collection 1974*, pp. 179–275, Nauka, Moscow, 1976 [in Russian].

[16] B. M. Bolotovskii and S. N. Stolyarov, *The Fields of Emitting Sources in Moving Media*, in: *Einstein's Collection 1978–1979*, pp. 173–277, Nauka, Moscow, 1983 [in Russian].

[17] M. Carmeli, *Classical Fields: General Relativity and Gauge Theory*, World Scientific, New Jersey, 2001.

[18] V. I. Denisov, *Introduction to Electrodynamics of Material Media*, Izd. MGU, Moscow State University, Moscow, 1989 [in Russian].

[19] I. Y. Dodin and N. J. Fisch, *Axiomatic geometrical optics, Abraham-Minkowski controversy, and photon properties derived classically*, Phys. Rev. A **86** (2012) # 5, 053834 (16pp).

[20] V. V. Dodonov and V. I. Man'ko, *Invariants and Correlated States of Nonstationary Quantum Systems*, in: *Invariants and the Evolution of Nonstationary Quantum Systems*, Proceedings of Lebedev Physics Institute, vol. 183, pp. 71–181, Nauka, Moscow, 1987 [in Russian]; English translation published by Nova Science, Commack, New York, 1989, pp. 103–261.

[21] A. Einstein, *Zur Electrodynamik der bewegter Körper*, Ann. Phys. **17** (1905), 891–921.

[22] A. Einstein, *Eine neue formale Deutung der Maxwellschen Feildgleichungen der Electrodynamik*, Sitzungsber. preuss Akad. Wiss. **1** (1916), 184–188.

[23] A. Einstein and J. Laub, *Über die elektromagnetischen Grundgleichungen für bewegte Körper*, Ann. Phys. **26** (1908), 532–540; *Bemerkungen zu unserer Arbeit <<Über die elektromagnetischen Grundgleichungen für bewegte Körper>>*, Ann. Phys. **28** (1908), 445–447.

[24] A. Einstein and J. Laub, *Über die im elektromagnetischen Felde auf ruhende Körper ausgeubten pondemotorischen Kräfte*, Ann. Phys. Wiss. **26** (1908), 541–550.

[25] G. Farmelo, *The Strangest Man: The Hidden Life of Paul Dirac, Mystic of the Atom*, Faber & Faber, London, 2009.

[26] G. D. Fleishman and I. N. Toptygin, *Cosmic Electrodynamics: Electrodynamics and Magnetic Hydrodynamics of Cosmic Plasmas*, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Dordrecht, London, 2013.

[27] V. A. Fock, *The Theory of Space, Time and Gravitation*, Pergamon Press, New York, 1964.

[28] V. A. Fock, *Electromagnetic Diffraction and Propagation Problems*, Pergamon Press, London, 1965.

[29] V. L. Ginzburg, *Quantum theory of electromagnetic radiation of an electron uniformly moving in a medium*, Sov. Phys. JETP **10** (1940) # 6, 589–600 [in Russian].

[30] V. L. Ginzburg, *The laws of conservation of energy and momentum in emission of electromagnetic waves (photons) in a medium and the energy-momentum tensor in macroscopic electrodynamics*, Sov. Phys.–Usp. **16** (1973) # 3, 434–439.

[31] V. L. Ginzburg, *Applications of Electrodynamics in Theoretical Physics and Astrophysics*, 2nd ed., Gordon and Breach, New York, 1989.

[32] V. L. Ginsburg and V. A. Ugarov, *Remarks on forces and the energy-momentum tensor in macroscopic electrodynamics*, Sov. Phys.–Usp. **19** (1976) # 1, 94–101.

[33] M. V. Gorkunov and A. V. Kondratov, *Microscopic view of light pressure on a continuous medium*, Phys. Rev. A **88** (2013) # 1, 011804(R) (5pp).

[34] S. R. de Groot and L. G. Suttorp, *Foundations of Electrodynamics*, North-Holland, Amsterdam, 1972.

[35] W. Heisenberg, *The Physical Principles of the Quantum Theory*, University of Chicago Press, Chicago, 1930; Dover, New York, 1949.

[36] W. Israel and J. M. Steward, *Progress in relativistic thermodynamics and electrodynamics of continous media*, in: *General Relativity and Gravitation (One hundred years after the birth of Albert Einstein)* (A. Held, ed.), vol. 2, pp. 491–525, Plenum Press, New York, 1980.

[37] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, Second Edition, John Wiley & Sons, New York, London, Sydney, 1962.

[38] M. Jacob, *Antimatter*, https://cds.cern.ch/record/294366/files/open-96-005.pdf

[39] J. M. Jauch and K. M. Watson, *Phenomenological quantum-electrodynamics*, Phys. Rev. **74** (1948) # 8, 950–957.

[40] J. M. Jauch and K. M. Watson, *Phenomenological quantum electrodynamics. Part II. Interaction of the field with charges*, Phys. Rev. **74** (1948) # 10, 1485–1493.

[41] L. Kannenberg, *A note on the Hertz potentials in electromagnetism*, Am. J. Phys. **18** (1987) # 4, 370–372.

[42] A. N. Kaufman, *Maxwell equations in nonuniformly moving media*, Ann. Phys. **18** (1962) # 2, 264–273.

[43] A. P. Kiselev and A. B. Plachenov, *Laplace-Gauss and Helmholtz-Gauss paraxial modes in media with quadratic refraction index*, J. Opt. Soc. Am. A **33** (2016) # 4, 663–666.

[44] J. R. Klauder and E. C. G. Sudarshan, *Fundamentals of Quantum Optics*, W. A. Benjamin, Inc., New York, Amsterdam, 1968.

[45] C. Koutschan, E. Suazo, and S. K. Suslov, *Fundamental laser modes in paraxial optics: from computer algebra and simulations to experimental observation*, Appl. Phys. B **121** (2015) # 3, 315–336.

[46] C. Krattenthaler, S. I. Kryuchkov, A. Mahalov, and S. K. Suslov, *On the problem of electromagnetic-field quantization*, Int. J. Theor. Phys. **52** (2013) # 12, 4445–4460.

[47] S. I. Kryuchkov, N. A. Lanfear, and S. K. Suslov, *The Pauli-Lubański vector, complex electrodynamics, and photon helicity*, Phys. Scripta **90** (2015), 074065 (8pp).

[48] S. I. Kryuchkov, N. A. Lanfear, and S. K. Suslov, *The role of the Pauli-Lubański vector for the Dirac, Weyl, Proca, Maxwell and Fierz-Pauli equations*, Phys. Scripta **91** (2016), 035301 (15pp).

[49] S. I. Kryuchkov, S. K. Suslov, and J. M. Vega-Guzmán, *The minimum-uncertainty squeezed states for atoms and photons in a cavity*, J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys. **46** (2013), 104007 (15pp); IOP Select and Highlight of 2013.

[50] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *The Classical Theory of Fields*, 4th edn, Butterworth-Heinenann, Oxford, 1975.

[51] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Electrodynamics of Continuous Media*, 2nd edn, Pergamon, Oxford, New York, Beijing, Frankfurt, 1989.

[52] N. Lanfear, Mathematica notebook: *ComplexElectrodynamics.nb*.

[53] N. Lanfear, R. M. López and S. K. Suslov, *Exact wave functions for generalized harmonic oscillators*, Journal of Russian Laser Research **32** (2011) # 4, 352–361.

[54] O. Laporte and G. E. Uhlenbeck, *Applications of spinor analysis to the Maxwell and Dirac equations*, Phys. Rev. **37** (1931), 1380–1397.

[55] R. M. López, S. K. Suslov, and J. M. Vega-Guzmán, *Reconstracting the Schrödinger groups*, Physica Scripta **87** (2013) # 3, 038118 (6pp).

[56] R. M. López, S. K. Suslov, and J. M. Vega-Guzmán, *On a hidden symmetry of quantum harmonic oscillators*, Journal of Difference Equations and Applications **19** (2013) # 4, 543–554.

[57] H. A. Lorentz, *The Theory of Electrons and Its Applications to the Phenomena of Light and Radiant Heat*, 2nd edn, Teubner, Leipzig, 1916.

[58] H. A. Lorentz, A. Einstein, and H. Minkowski, *Das Relativitätsprinzip, eine Sammlung von Abhandlungen*, Teubner, Leipzig, Berlin, 1913; English translation in: A. Einstein et al, *The Principle of Relativity, A Collection of Original Papers on the Special and General Theory of Relativity*, 4th edn, Dover, New York, 1932.

[59] A. Mahalov, E. Suazo, and S. K. Suslov, *Spiral laser beams in inhomogeneous media*, Opt. Lett. **38** (2013) # 15, 2763–2766.

[60] A. Mahalov and S. K. Suslov, *An "Airy gun": Self-accelerating solutions of the time-dependent Schrödinger equation in vacuum*, Phys. Lett. A **377** (2012), 33–38.

[61] A. Mahalov and S. K. Suslov, *Solution of paraxial wave equation for inhomogeneous media in linear and quadratic approximation*, Proc. Amer. Math. Soc. **143** (2015) # 2, 595–610.

[62] V. P. Makarov and A. A. Rukhadze, *Force acting on a substance in an electromagnetic field*, Phys.–Usp. **52** (2009) # 9, 937–943.

[63] V. P. Makarov and A. A. Rukhadze, *Negative group velocity electromagnetic waves and the energy-momentum tensor*, Phys.–Usp. **54** (2011) # 12, 1285–1296.

[64] H. Minkowski, *Raum und Zeit*, in: Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, (1909), 75–88.

[65] H. Minkowski, *Die Grundlagen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern*, Nachr. König. Ges. Wiss. Göttingen, math.-phys. Kl. (1908), 53–111; *The fundamental equations for electromagnetic processes in moving bodies*, English translation in: *The Principle of Relativity* (M. Saha, ed.), University Press, Calcutta, 1–69, 1920.

[66] H. Minkowski, *Eine Ableitung der Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern vom Standpukt der Electronentheorie*, Math. Ann. **68** (1908), 526–556.

[67] V. V. Nesterenko and A. V. Nesterenko, *Symmetric energy-momentum tensor: The Abraham form and the explicit covariant formula*, J. Math. Phys. **57** (2016) # 3, 032901 (14pp).

[68] Y. N. Obukhov, *Electromagnetic energy and momentum in moving media*, Ann. Phys. (Berlin) **17** (2008) # 9–10, 830–851.

[69] Y. N. Obukhov and F. W. Hehl, *Electromagnetic energy-momentum and forces in matter*, Phys. Lett. A **311** (2003), 277–284.

[70] W. K. H. Panofsky and M. Phillips, *Classical Electricity and Magnetism*, Second Edition, Addison-Wesley, Reading, London, 1962.

[71] C. H. Papas, *Theory of Electromagnetic Wave Propagation*, Dover, New York, 2011.

[72] W. Pauli, *Theory of Relativity*, Pergamon Press, Oxford, 1958.

[73] V. I. Pavlov, *On discussions concerning the problem of ponderomotive forces*, Sov. Phys.-Usp. **21** (1978) # 2, 171–173.

[74] R. N. C. Pfeifer, T. A. Nieminen, N. R. Heckenberg, and H. Rubinsztein-Dunlop, *Momentum of an electromagnetic wave in dielectric media*, Rev. Mod. Phys. **79** (2007), 1197–1216.

[75] M. I. Riazanov, *Phenomenological study of the effect of nonconducting medium in quantum electrodynamics*, Sov. Phys. JETP **5** (1957) # 5, 1013–1015.

[76] M. I. Riazanov, *Radiative corrections to Compton scattering taking into account polarization of the surrounding medium*, Sov. Phys. JETP **7** (1958) # 5, 869–875.

[77] M. I. Ryazanov, *Covariant Formulation of Phenomenological Quantum Electrodynamics*, in: *Topics in Theoretical Physics*, pp. 75–86, Atomizdat, Moscow, 1958 [in Russian].

[78] G. L. J. A. Rikken and B. A. van Tiggelen, *Observation of the intrinsic Abraham force in time-varying magnetic and electric fields*, Phys. Rev. Lett. **108** (2012) # 23, 230402 (4pp).

[79] J. Schwinger, L. L. DeRoad, Jr., K. A. Milton, and Wu-y. Tsai, *Classical Electrodynamics*, Perseus Books, Reading, Massachusetts, 1998.

[80] D. V. Skobel'tsyn, *The momentum-energy tensor of the electromagnetic field*, Sov. Phys.–Usp. **16** (1973) # 3, 381–401.

[81] A. Sokolov, *Quantum theory of radiation of elementary particles*, Doklady Phys. **28** (1940) # 5, 415–417 [in Russian].

[82] J. A. Stratton, *Electromagnetic Theory*, McGraw Hill, New York and London, 1941.

[83] I. E. Tamm, *Electrodynamics of anisotropic medium in special theory of relativity*, J. Russ. Phys. Chem. Soc. **56** (1924) # 2–3, 248–262 [in Russian].

[84] I. E. Tamm, *Crystal optics of the relativity theory in connection with geometry of a biquadratic form*, J. Russ. Phys. Chem. Soc. **57** (1925) # 3–4, 209–214 [in Russian].

[85] I. E. Tamm, *Radiation induced by uniformly moving electrons*, J. Phys. USSR **1** (1939) # 5–6, 439–454.

[86] I. E. Tamm, *Fundamentals of the Theory of Electricity*, Mir, Moscow, 1979.

[87] N. W. Taylor, *A simplified form of the relativistic electromagnetic equations*, Australian Journal of Scientific Research, Series A: Physical Sciences **5** (1952), 423–429.

[88] Ya. P. Terletskii and Yu. P. Rybakov, *Electrodynamics*, 2nd edn, Vysshaya Skola, Moscow, 1990 [in Russian].

[89] M. Testa, *The momentum of an electromagnetic wave inside a dielectric*, Ann. Phys. **336** (2013) # 1, 1–11.

[90] I. N. Toptygin, *Foundations of Classical and Quantum Electrodynamics*, Wiley-VCH, Weinheim, 2014.

[91] I. N. Toptygin, *Electromagnetic Phenomena in Matter: Statistical and Quantum Approaches*, Wiley-VCH, Weinheim, 2015.

[92] I. N. Toptygin and K. Levina, *Energy-momentum tensor of the electromagnetic field in dispersive media*, Phys.–Usp. **186** (2016) # 2, 146–158 [in Russian].

[93] V. G. Veselago, *Energy, linear momentum, and mass transfer by an electromagnetic wave in a negative-refraction medium*, Phys.–Usp. **52** (2009) # 6, 649–654.

[94] V. G. Veselago, *Waves in metamaterials: their role in physics*, Phys.–Usp. **54** (2011) # 11, 1161–1165.

[95] V. G. Veselago and V. V. Shchavlev, *Force acting on a substance in an electromagnetic field*, Phys.–Usp. **53** (2010) # 3, 317–318.

[96] M. B. Vinogradova, O. V. Rudenko, and A. P. Sukhorukov, *Theory of Waves*, Second Edition, Nauka, Moscow, 1990 [in Russian].

[97] K. M. Watson and J. M. Jauch, *Phenomenological quantum electrodynamics. Part III. Dispersion*, Phys. Rev. **75** (1949) # 8, 1249–1261.

From The Response of Optical Fibres to Gravitational Waves by Mieling

References

[1] Olver, F. W. J.: *Bessel Functions of Integer Order*. In Abramowitz, M. and I. A. Stegun [2], pages 355–433.

[2] Abramowitz, M. and Stegun, I. A.: *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. Number 55 in *National Bureau of Standards Applied Mathematics Series*. U.S. Department of Commerce, Washington, DC, tenth printing, december 1972, with corrections edition, 1964.

[3] Beig, R., Chruściel, P. T., Hilweg, C., Kornreich, P., and Walther, P.: *Weakly gravitating isotropic waveguides*. Classical and Quantum Gravity, 35(24):244001, November 2018.

[4] Hilweg, C., Massa, F., Martynov, D., Mavalvala, J., Chruściel, P. T., and Walther, P.: *Gravitationally induced phase shift on a single photon*. New Journal of Physics, 19(3):033028, March 2017.

[5] Mieling, T.: *On the Influence of Earth's Rotation on the Propagation of Light*. Master's thesis, University of Vienna, July 2019.

[6] Tang, M. and Li, F.: *Circular waveguide: a possible gravitational wave antenna*. Classical and Quantum Gravity, 17(12):2449–2453, June 2000, ISSN 0264-9381. https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0264-9381/17/12/316.

[7] Cruise, A. M.: *An electromagnetic detector for very-high-frequency gravitational waves*. Classical and Quantum Gravity, 17(13):2525–2530, July 2000, ISSN 0264-9381. https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0264-9381/17/13/305.

[8] Cooperstock, F. I.: *The interaction between electromagnetic and gravitational waves*. Annals of Physics, 47(1):173–181, March 1968, ISSN 00034916. https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/0003491668902339.

[9] Cooperstock, F. I. and Faraoni, V.: *Laser-interferometric detectors of gravitational waves*. Classical and Quantum Gravity, 10(6):1189–1199, 1993, ISSN 02649381.

[10] Mensky, M. B. and Rudenko, V. N.: *High-frequency gravitational wave detector with electromagnetic-gravitational resonance*. Gravitation and Cosmology, 15(2):167–170, April 2009, ISSN 0202-2893. http://link.springer.com/10.1134/S0202289309020133.

[11] Braginsky, V. B. and Mensky, M. B.: *Gravitational-electromagnetic resonance*. General Relativity and Gravitation, 3(4):401–402, December 1972, ISSN 0001-7701. http://link.springer.com/10.1007/BF00759177.

[12] Lobo, J. A.: *Effect of a weak plane GW on a light beam*. Classical and Quantum Gravity, 9(5):1385–1394, May 1992, ISSN 0264-9381. https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0264-9381/9/5/019.

[13] Finn, L. S.: *Response of interferometric gravitational wave detectors*. Physical Review D, 79(2):022002, January 2009, ISSN 1550-7998. https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.79.022002.

[14] Rakhmanov, M.: *On the round-trip time for a photon propagating in the field of a plane gravitational wave*. Classical and Quantum Gravity, 26(15):155010, August 2009, ISSN 0264-9381. https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0264-9381/26/15/155010.

[15] Jackson, J. D.: *Classical Electrodynamics*. John Wiley & Sons, Inc., third edition edition, 1998, ISBN 978-0-471-30932-1.

[16] Gordon, W.: *Zur Lichtfortpflanzung nach der Relativitätstheorie*. Annalen der Physik, 377(22):421–456, 1923.

[17] Liu, J. M.: *Photonic Devices*. Cambridge University Press, 2005.

[18] Davis, C. C.: *Lasers and Electro-optics*. Cambridge University Press, 2nd edition edition, 2009.

[19] Mieling, T. B.: *On the influence of Earth's rotation on light propagation in waveguides*. Classical and Quantum Gravity, 37(22):225001, October 2020.

[20] Iacopini, E., Picasso, E., Pegoraro, F., and Radicati, L. A.: *Birefringence induced by gravitational waves: A suggestion for a new detector*. Physics Letters A, 73(2):140–142, September 1979.

[21] Pegoraro, F. and Radicati, L. A.: *Dielectric tensor and magnetic permeability in the weak field approximation of general relativity*. Journal of Physics A: Mathematical and General, 13(7):2411–2421, July 1980.

[22] Bini, D., Fortini, P., and Haney, M.and Ortolan, A.: *Electromagnetic waves in gravitational wave spacetimes*. Classical and Quantum Gravity, 28(23):235007, November 2011.

[23] Born, M. and Wolf, E.: *Principles of Optics*. Cambridge University Press, 60th anniversary edition edition, 2019.

[24] Vinet, J. Y.: *Elasto optical antennas*. Annales de Physique, 10(3):253–261, 1985.

[25] Cros, F. T. du: *Electromagnetic and elasto-optical systems for the reception or generation of gravitational radiation*. Annales de Physique, 10(3):263–286, 1985.

[26] Vinet, J. Y.: *Elasto-optical detection of gravitational waves.* Annales de l'I.H.P. Physique théorique, 30(3):251–262, 1979. http://www.numdam.org/item/AIHPA_1979__30_3_251_0.

[27] Boyer, G. R., Lamouroux, B. F., Prade, B. S., and Vinet, J. Y.: *Elastooptical antenna for detection of gravitational radiation.* Applied Optics, 19(3):382, February 1980.

[28] Rudenko, V. N. and Sazhin, M. V.: *Laser interferometer as a gravitational wave detector.* Soviet Journal of Quantum Electronics, 10(11):1366–1373, November 1980.

[29] Hodgson, N. and Weber, H.: *Laser Resonators and Beam Propagation.* Number 108 in *Springer Series in Optical Sciences*. Springer, New York, second edition edition, 2005, ISBN 978-0-387-40078-5.

[30] Damask, J. N.: *Polarization Optics in Telecommunications.* Number 101 in *Springer Series in Optical Sciences*. Springer, New York, 2004, ISBN 978-0-387-22493-0.

[31] Linsay, P., Saulson, P., Weiss, R., and Whitcomb, S.: *A Study of a Long Baseline Gravitational Wave Antenna System.* techreport, Prepared for the National Science Foundation, 1983. https://dcc.ligo.org/LIGO-T830001/public.

[32] Adhikari, R.: *Sensitivity and noise analysis of 4 km laser interferometric gravitational wave antennae.* phdthesis, Massachusetts Institute of Technology, July 2004. https://dspace.mit.edu/handle/1721.1/28646.

[33] Cornish, Neil J.: *Alternative derivation of the response of interferometric gravitational wave detectors.* Physical Review D, 80(8), October 2009.

[34] Sazhin, M. V. and Markova, S. N.: *Optical resonator in the field of gravitational waves.* Physics Letters A, 233(1-2):43–48, August 1997.

[35] Saulson, P. R.: *Fundamentals of Interferometric Gravitational Wave Detectors.* World Scientific, 1994, ISBN 981-02-1820-6.

[36] Koop, M. J. and Finn, L. S.: *Physical response of light-time gravitational wave detectors.* Physical Review D, 90(6), September 2014.

[37] Forward, R. L.: *Wideband laser-interferometer graviational-radiation experiment.* Physical Review D, 17(2):379–390, January 1978.

[38] Schutz, B. F. and Tinto, M.: *Antenna patterns of interferometric detectors of gravitational waves - I. Linearly polarized waves.* Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 224(1):131–154, January 1987.

[39] Faraoni, V.: *A common misconception about LIGO detectors of gravitational waves.* General Relativity and Gravitation, 39(5):677–684, March 2007.

[40] Abbott, B. P., Abbott, R., Abbott, T. D., Abernathy, M. R., Acernese, F., Ackley, K., Adams, T., *et al.*: *Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger.* Physical Review Letters, 116(6), February 2016.

[41] Abbott, B. P., Abbott, R., Abbott, T. D., Acernese, F., Ackley, K., Adams, C., Adams, T., *et al.*: *GW170814: A Three-Detector Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Coalescence.* Physical Review Letters, 119(14), October 2017.

[42] Abbott, B. P., Abbott, R., Abbott, T. D., Acernese, F., Ackley, K., Adams, C., Adams, T., *et al.*: *GW170817: Observation of Gravitational Waves from a Binary Neutron Star Inspiral.* Physical Review Letters, 119(16), October 2017.

[43] Abbott, R., Abbott, T. D., Abraham, S., Acernese, F., Ackley, K., Adams, C., Adhikari, R. X., *et al.*: *GW190412: Observation of a binary-black-hole coalescence with asymmetric masses.* Physical Review D, 102(4), August 2020.

[44] Liu, M. and Gong, B.: *A three-dimensional laser interferometer gravitational-wave detector.* Scientific Reports, 10(1), October 2020.

[45] Dergachev, V. and Papa, M. A.: *Results from the First All-Sky Search for Continuous Gravitational Waves from Small-Ellipticity Sources.* Physical Review Letters, 125(17):171101, October 2020.

[46] Abbott, B. P., Abbott, R., Abbott, T. D., Abraham, S., Acernese, F., Ackley, K., Adams, C., *et al.*: *All-sky search for continuous gravitational waves from isolated neutron stars using Advanced LIGO O2 data.* Physical Review D, 100(2):024004, July 2019.

[47] Dergachev, V. and Papa, M. A.: *Results from an extended Falcon all-sky survey for continuous gravitational waves.* Physical Review D, 101(2):022001, January 2020.

[48] Maggiore, M.: *Gravitational Waves. Volume 1.* Oxford University Press, October 2007, ISBN 0198570740.

[49] Jaranowski, P., Królak, A., and Schutz, B. F.: *Data analysis of gravitational-wave signals from spinning neutron stars: The signal and its detection.* Physical Review D, 58(6):063001, August 1998.